Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska
Jolanta Wesołowska

# MATeMAtyka 4

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

**Zakres podstawowy**

nowa era
Twoje mocne strony

# MATeMAtyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
**dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.**

Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa
**Rok dopuszczenia: 2022**

**Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/4/2022**

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.

nowa era

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-5112-7

**Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna:** Ewa Kowalik, Katarzyna Radzimińska
**Współpraca redakcyjna:** Urszula Cielniak, Marcin Minda
**Opracowanie odpowiedzi:** Ewa Kowalik, Katarzyna Radzimińska
**Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik:** Urszula Cielniak
**Konsultacje merytoryczne:** Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska, Renata Wolniewicz
**Redakcja językowa:** Paulina Szulim
**Korekta językowa:** Marta Zuchowicz
**Nadzór artystyczny:** Kaia Pichler
**Opieka graficzna:** Maciej Galiński
**Opracowanie graficzne:** Klaudia Jarocka-Ciok, Ewa Kaletyn, Marcin Kołacz
**Projekt graficzny:** Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek
**Projekt okładki:** Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
**Fotoedycja:** Katarzyna Iwan-Malawska
**Opracowanie graficzne infografik:** Klaudia Jarocka-Ciok
**Ilustracje na infografikach:** Laura Maziewska (diamenty, s. 82), zespół Kartografii NE (odwzorowania kartograficzne, s. 123)
**Realizacja projektu graficznego:** Dorota Chańko

**W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:**
MATeMAtyka kl. 3 ZP i MATeMAtyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesołowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

**Fotografia na okładce:** Shutterstock/Click Bestsellers.

**Fotografie:** Archiwum Wydawnictwa s. 10; BE&W: Alamy Stock Photo - Classic Image s. 122, Independent Photo Agency Srl s. 153, Mary Evans Picture Library s. 144; East News: Museos Vaticanos-Estancia del Sello, Vaticano Photo: East News/Album s. 135; Getty Images: Corbis Sport/Tim Clayton – Corbis s. 45 (rzut monetą na meczu tenisa), Hulton Fine Art Collection/Mondadori Portfolio s. 36, iStock - Anton Aleksenko s. 61, dei-sin s. 9, Getty Images Plus/Wega52 s. 45 (dłoń z monetą); Panthermedia: Janusz Gajewicz s. 51, Patrick Guenette s. 48; Shutterstock: Akkaradet Bangchun s. 82, Sergey Nivens s. 123; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - MikeLane45 s. 37, szczuri s. 52, Photos.com s. 31; Lech Chańko s. 11, 14, 34, 100, 109.

**Rysunki merytoryczne:** Marcin Adamski s. 103, 119, 120 (ćwiczenie 2, lewa strona), 121 (zadanie 1), 127 (wszystkie z lewej strony), 128 (wszystkie z lewej strony), 129 (wszystkie z lewej strony); Andrzej Oziębło s. 117 (zadanie 7); Lech Chańko – pozostałe.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

# Spis treści


## 1. Rachunek prawdopodobieństwa

1.1. Reguła mnożenia ..... 10
Prezentacja wyników doświadczenia za pomocą drzewa – warto wiedzieć ... 13
1.2. Permutacje ..... 14
Permutacje z powtórzeniami – warto wiedzieć ..... 18
1.3. Wariacje bez powtórzeń ..... 19
1.4. Wariacje z powtórzeniami ..... 21
1.5. Reguła dodawania ..... 24
1.6. Zdarzenia losowe ..... 28
Częstość zdarzeń – warto wiedzieć ..... 31
1.7. Prawdopodobieństwo klasyczne ..... 32
1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne – zadania ..... 36
1.9. Rozkład prawdopodobieństwa ..... 38
1.10. Własności prawdopodobieństwa ..... 40
1.11. Wartość oczekiwana zmiennej losowej ..... 46
1.12. Zagadnienia uzupełniające ..... 50
Zestawy powtórzeniowe ..... 54
Sposób na zadanie ..... 58
Zadania testowe ..... 59
Przed obowiązkową maturą z matematyki ..... 60

## 2. Graniastosłupy i ostrosłupy

2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni ..... 62
2.2. Graniastosłupy ..... 66
Przedstawianie graniastosłupów na rysunkach – warto powtórzyć ..... 70
2.3. Odcinki w graniastosłupach ..... 71
2.4. Objętość graniastosłupa ..... 74
Graniastosłupy pochyłe – warto wiedzieć ..... 77
2.5. Ostrosłupy ..... 78
Przedstawianie ostrosłupów na rysunkach – warto wiedzieć ..... 81
2.6. Objętość ostrosłupa ..... 83
2.7. Kąt między prostą a płaszczyzną ..... 87
2.8. Kąt dwuścienny ..... 91
2.9. Przekroje prostopadłościanów ..... 95

2.10. Zagadnienia uzupełniające ..... 100
Zestawy powtórzeniowe ..... 104
Sposób na zadanie ..... 106
Zadania testowe ..... 107
Przed obowiązkową maturą z matematyki ..... 108

## 3. Bryły obrotowe

3.1. Walec ..... 110
3.2. Stożek ..... 114
Linie geodezyjne – warto wiedzieć ..... 118
3.3. Kula ..... 119
3.4. Bryły podobne ..... 124
3.5. Zagadnienia uzupełniające ..... 127
Zestawy powtórzeniowe ..... 130
Sposób na zadanie ..... 132
Zadania testowe ..... 133
Przed obowiązkową maturą z matematyki ..... 134

## 4. Przykłady dowodów w matematyce

4.1. Dowody w algebrze (1) ..... 136
4.2. Dowody w algebrze (2) ..... 139
4.3. Dowody nie wprost ..... 142
Nieskończoność zbioru liczb pierwszych – warto wiedzieć ..... 144
4.4. Dowody w geometrii (1) ..... 145
4.5. Dowody w geometrii (2) ..... 149
Różne dowody twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie – warto wiedzieć 152

## 5. Powtórzenie

5.1. Liczby rzeczywiste ..... 154
5.2. Zbiory, przedziały i nierówności ..... 161
5.3. Funkcje ..... 167
5.4. Funkcja liniowa i układy równań liniowych ..... 176
5.5. Funkcja kwadratowa ..... 183
5.6. Wielomiany ..... 191
5.7. Funkcje wymierne ..... 198
5.8. Funkcje trygonometryczne ..... 204
5.9. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna ..... 210

5.10. Ciągi ..... 215
5.11. Geometria analityczna ..... 222
5.12. Planimetria ..... 229
5.13. Stereometria ..... 240
5.14. Rachunek prawdopodobieństwa ..... 247
5.15. Statystyka ..... 253

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań ..... 259
Indeks ..... 290
Tablice logarytmów dziesiętnych ..... 294
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych ..... 296

Odpowiedzi do pytań i poleceń, a także rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie. Oznaczenie lekcji w całości poświęconych dowodzeniu.

Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



# 1 Rachunek prawdopodobieństwa

Początki rachunku prawdopodobieństwa są związane z grami losowymi, do których należy na przykład gra w kości, i chęcią poznania szansy wygranej.

W 1654 roku we Francji zapalony gracz w kości kawaler de Méré [czyt. de mere] zwrócił się do Blaise'a Pascala z prośbą o wyjaśnienie pewnych zagadnień związanych z grami hazardowymi. W celu rozwiązania tych zagadnień Pascal prowadził korespondencję z innym francuskim matematykiem – Pierre'em de Fermatem. Rok 1654 jest przyjmowany za datę narodzin rachunku prawdopodobieństwa.

# 1.1. Reguła mnożenia

### Przykład 1

Rzucamy dwiema monetami: dwuzłotówką i pięciozłotówką. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

Niech $o$ oznacza otrzymanie orła, a $r$ – reszki na monecie dwuzłotowej, natomiast $O$ – orła, a $R$ – reszki na monecie pięciozłotowej. Możliwe wyniki doświadczenia to:

$$oO,\ oR,\ rO,\ rR$$




### Przykład 2

Rzucamy dwiema kostkami: niebieską i czerwoną. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia?

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 2 1 | 3 1 | 4 1 | 5 1 | 6 1 |
| 1 2 | 2 2 | 3 2 | 4 2 | 5 2 | 6 2 |
| 1 3 | 2 3 | 3 3 | 4 3 | 5 3 | 6 3 |
| 1 4 | 2 4 | 3 4 | 4 4 | 5 4 | 6 4 |
| 1 5 | 2 5 | 3 5 | 4 5 | 5 5 | 6 5 |
| 1 6 | 2 6 | 3 6 | 4 6 | 5 6 | 6 6 |

Kiedy piszemy o kostce, mamy na myśli sześcienną kostkę do gry.

Przyjmujemy, że wynikiem jednokrotnego rzutu kostką jest liczba otrzymanych oczek, a wynikiem rzutu dwiema kostkami – uporządkowana para liczb.

Wszystkich możliwych wyników jest 36 (zwróć uwagę, że rozróżniamy wyniki takie jak np. 23 i 32).

### Ćwiczenie 1

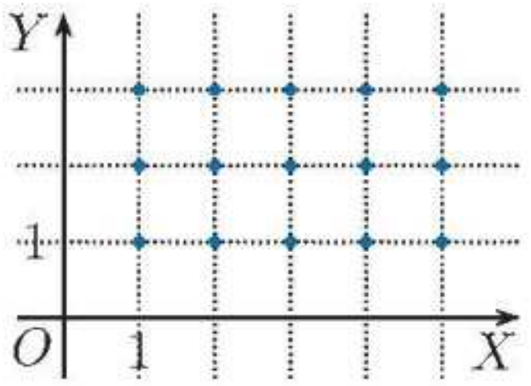
Pewien kod składa się z jednej litery alfabetu i następującej po niej jednej cyfry. Ile różnych kodów można utworzyć, jeżeli w każdym będzie występowała jedna z 26 liter: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z oraz jedna z 10 cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

W takiej sytuacji, jak opisana w ćwiczeniu, zamiast wypisywać wszystkie możliwe pary tworzące kod, warto skorzystać z **reguły mnożenia**. Mówi ona, że jeśli zbiór $A$ ma $m$ elementów, a zbiór $B$ ma $n$ elementów, to liczba różnych par $(x, y)$ takich, że $x \in A$ oraz $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

**Uwaga.** Liczbę elementów zbioru $A$ będziemy oznaczać $\overline{\overline{A}}$ (lub $|A|$).

### Przykład 3

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą należącą do zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a druga – do zbioru $B = \{1, 2, 3\}$?




$\overline{\overline{A}} = 5$ oraz $\overline{\overline{B}} = 3$, więc takich punktów jest $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = 15$.

### Ćwiczenie 2

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą należącą do zbioru $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a druga – do zbioru $B = \{2, 4, 6, 8\}$?

### Ćwiczenie 3

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą naturalną mniejszą od 20 i podzielną przez 3, a druga – liczbą naturalną mniejszą od 30 i podzielną przez 4?

Regułę mnożenia można sformułować bardziej ogólnie.

#### Reguła mnożenia

Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu $n$ decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na $k_1$ sposobów, drugą – na $k_2$ sposobów, ..., $n$-tą – na $k_n$ sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ sposobów.

### Przykład 4

Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku dwie litery, a następnie pięć cyfr (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli w numerach tych mogą występować jedynie litery W, E oraz cyfry 1, 3, 8, 9?




Takich numerów może być: $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$.

### Ćwiczenie 4

Ile może być kodów mających na początku cztery litery, a następnie trzy cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli do utworzenia kodów wykorzystujemy:

a) jedynie litery V, X, Y, Z oraz cyfry 1, 3, 5, 7, 9;

b) jedynie litery A, B, C, D, E, F, G oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6;

c) 26 liter alfabetu oraz wszystkie cyfry?

## Zadania

**1.** Ile jest wszystkich par $(x, y)$ takich, że $x \in A$ i $y \in B$?
a) $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
b) $A$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 24,
$B$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 100

**2.** Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują dwie litery, a następnie dwie cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:
a) litery A, B, C, D, E, F, G, H oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5;
b) 26 liter alfabetu oraz dowolne cyfry?

**3.** Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują trzy litery, a następnie cztery cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:
a) litery A, B, C oraz cyfry 1, 2, 3, 4;
b) litery A, B, C, D oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**4.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Ile jest liczb ośmiocyfrowych takich, że pierwszą cyfrą jest 5, występuje w nich jedna cyfra 2, jedna cyfra 4, a pozostałe cyfry są zerami?
>
> Cyfrę 2 możemy umieścić na jednej z siedmiu pozycji, a cyfrę 4 – na jednej z pozostałych sześciu pozycji. Takich liczb jest zatem $7 \cdot 6 = 42$.

Ile jest liczb ośmiocyfrowych takich, że pierwszą cyfrą jest 3 oraz:
a) występuje w nich jedna cyfra 4, jedna cyfra 6 i jedna cyfra 8, a pozostałe cyfry są zerami,
b) występuje w nich jedna cyfra 7, jedna cyfra 9, a pozostałe cyfry są zerami, jeśli liczba ta jest podzielna przez 100,
c) suma cyfr jest równa 6, a cyfry różne od zera się nie powtarzają?

## Powtórzenie

**5.** W restauracji serwuje się pięć różnych zup, osiem drugich dań i sześć deserów. Ile różnych zestawów obiadowych, składających się z zupy, drugiego dania i deseru, można zamówić w tej restauracji?

**6.** Na ile sposobów może się ubrać pani, która ma trzy różne kapelusze, sześć sukni i cztery pary butów?

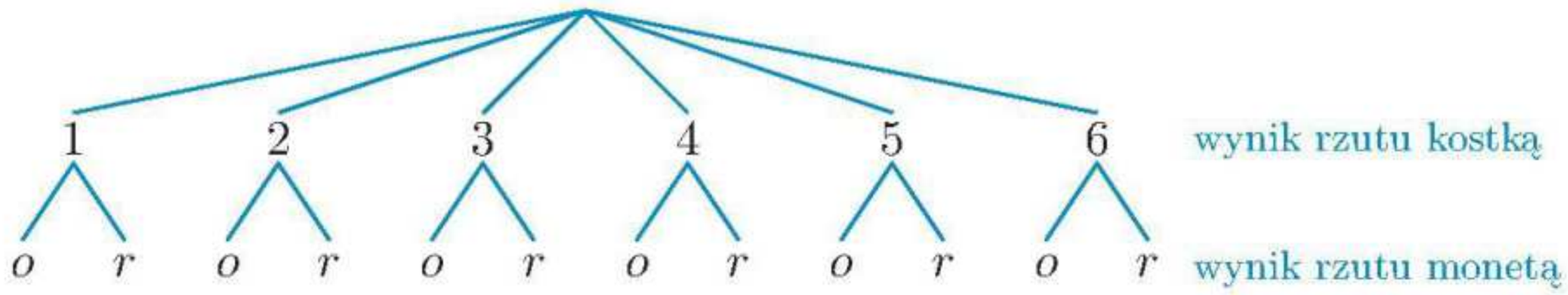
Warto wiedzieć

## Prezentacja wyników doświadczenia za pomocą drzewa

### Przykład

Rzucono kostką i monetą. Wynikiem doświadczenia jest para $(a, b)$, gdzie $a$ jest liczbą oczek na kostce, a $b$ – orłem lub reszką. Ile jest możliwych wyników takiego doświadczenia?

Poniższe drzewo ilustruje wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

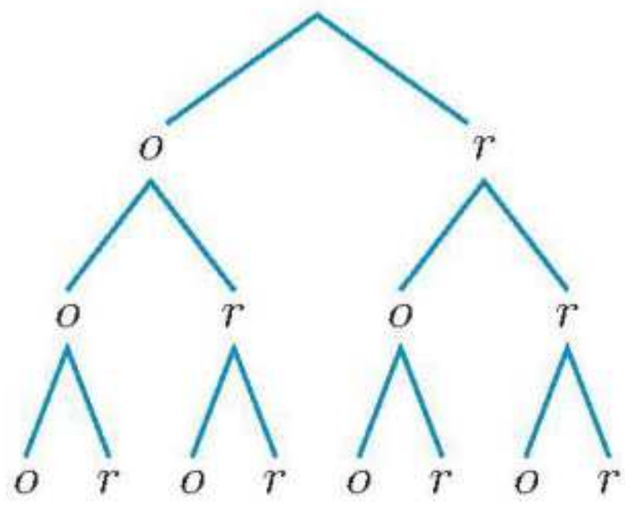



Wyników tego doświadczenia jest $6 \cdot 2 = 12$:
$(1, o)$, $(1, r)$, $(2, o)$, $(2, r)$, $(3, o)$, $(3, r)$, $(4, o)$, $(4, r)$, $(5, o)$, $(5, r)$, $(6, o)$, $(6, r)$.

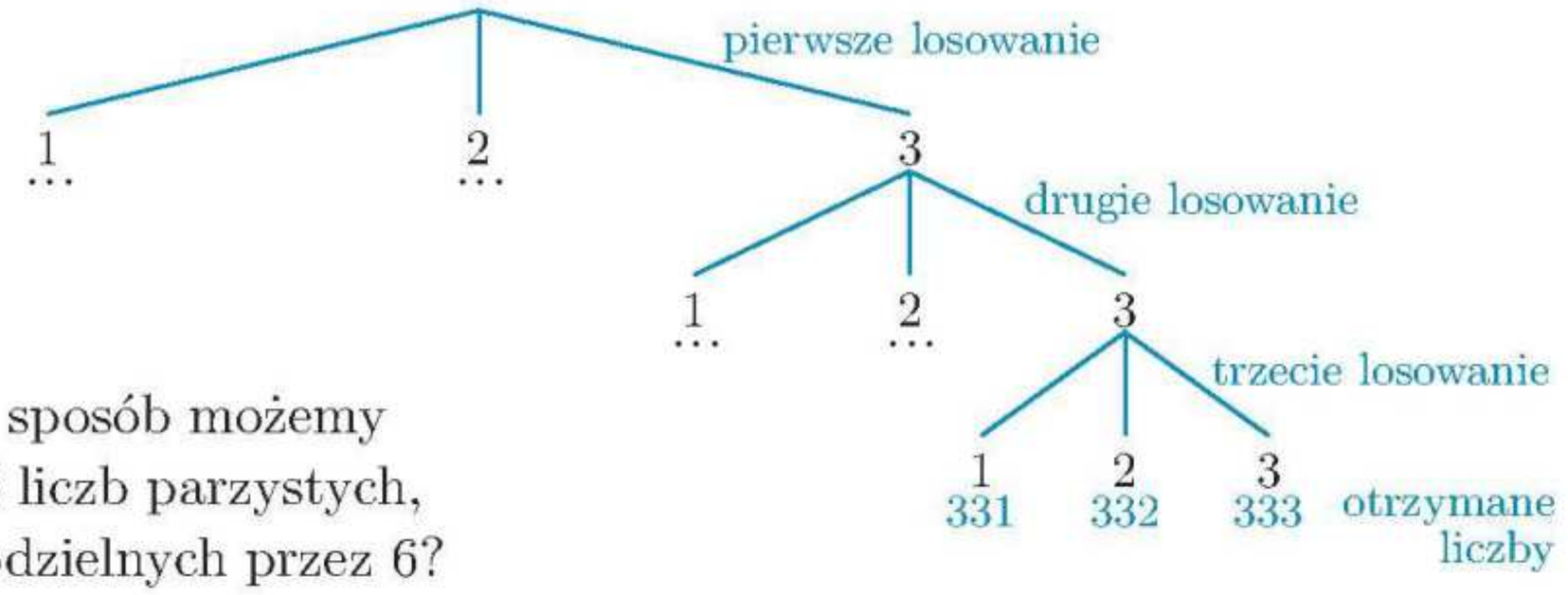
**1.** Rzucono dwiema kostkami: zieloną i żółtą. Na kostce zielonej otrzymano parzystą liczbę oczek, a na kostce żółtej – liczbę oczek mniejszą od 4. Ile jest możliwych takich wyników? Zbiór wyników tego doświadczenia przedstaw w postaci drzewa.

**2.** a) Zapisz możliwe wyniki doświadczenia polegającego na trzykrotnym rzucie monetą (drzewo przedstawione obok jest ilustracją graficzną tego doświadczenia).

b) Przedstaw w postaci drzewa zbiór wyników doświadczenia polegającego na czterokrotnym rzucie monetą.




**3.** W urnie znajdują się trzy kule oznaczone numerami 1, 2 i 3. Trzykrotnie wyciągamy kulę, zapisujemy jej numer i zwracamy ją do urny. Zapisane numery tworzą liczbę trzycyfrową. Przerysuj poniższe drzewo do zeszytu i uzupełnij je tak, aby ilustrowało wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.




Ile w ten sposób możemy otrzymać liczb parzystych, a ile – podzielnych przez 6?

# 1.2. Permutacje

### Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić na półce trzy różne książki?




Oznaczamy książki numerami 1, 2, 3 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

123 132 213 231 312 321

Trzy książki możemy ustawić na 6 sposobów.

### Przykład 2

Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne książki?

Oznaczamy książki numerami 1, 2, 3, 4 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1234 | 2134 | 3124 | 4123 |
| 1243 | 2143 | 3142 | 4132 |
| 1324 | 2314 | 3214 | 4213 |
| 1342 | 2341 | 3241 | 4231 |
| 1423 | 2413 | 3412 | 4312 |
| 1432 | 2431 | 3421 | 4321 |

Otrzymaliśmy 24 możliwe ustawienia książek.

W przykładzie 1. podaliśmy wszystkie trzywyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby 1, 2, 3, a w przykładzie 2. – wszystkie czterowyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby 1, 2, 3, 4. Takie ciągi nazywamy permutacjami.

### Definicja

Każdy $n$-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów $n$-elementowego zbioru $A$ nazywamy **permutacją** tego zbioru.

### Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie permutacje podanego zbioru.

a) $\{3, 5\}$ b) $\{3, 5, 7\}$ c) $\{3, 5, 7, 9\}$

Liczbę wszystkich permutacji zbioru $n$-elementowego oznaczamy przez $P_n$. Obliczamy ją, korzystając z reguły mnożenia.

### Przykład 3

Na ile sposobów można ustawić na półce pięć różnych książek?

Należy odpowiedzieć na pytanie, ile jest permutacji zbioru pięcioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Najpierw wybieramy jedną spośród pięciu książek i ustawiamy ją na pierwszym miejscu – możemy to zrobić na 5 sposobów. Następnie wybieramy jedną z czterech pozostałych książek i ustawiamy ją na drugim miejscu – możemy to zrobić na 4 sposoby, następnie wybieramy jedną z trzech pozostałych książek itd. Możliwych ustawień jest więc:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

### Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $n!$ [czyt. $n$ **silnia**] oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do $n$:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

### Ćwiczenie 2

Podaj liczbę, którą należy wstawić w miejsce ?.

a) $4! = 3! \cdot$ ?  b) $8! = 7! \cdot$ ?  c) $12! = 11! \cdot$ ?

Zauważ, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi równość: $(n+1)! = n!(n+1)$.

| | |
|---|---|
| $0! =$ | 1 |
| $1! =$ | 1 |
| $2! =$ | 2 |
| $3! =$ | 6 |
| $4! =$ | 24 |
| $5! =$ | 120 |
| $6! =$ | 720 |
| $7! =$ | 5 040 |
| $8! =$ | 40 320 |
| $9! =$ | 362 880 |
| $10! =$ | 3 628 800 |
| $11! =$ | 39 916 800 |
| $12! =$ | 479 001 600 |

### Ćwiczenie 3

Uprość ułamek.

a) $\frac{5!}{4!}$  c) $\frac{8!}{10!}$  e) $\frac{(n+1)!}{n!}$  g) $\frac{(n+2)!}{n!}$

b) $\frac{7!}{5!}$  d) $\frac{102!}{100!}$  f) $\frac{(n-1)!}{n!}$  h) $\frac{(n-2)!}{n!}$

### Twierdzenie

Wszystkich permutacji zbioru $n$-elementowego jest $n!$.

### Ćwiczenie 4

Ile jest wszystkich permutacji zbioru $A$, jeśli wiadomo, że:

a) $\overline{\overline{A}} = 6$,  b) $\overline{\overline{A}} = 7$,  c) $\overline{\overline{A}} = 10$,  d) $\overline{\overline{A}} = 12$?

## Zadania

**1.** a) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 56 789?

b) Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 245 768?

**2.** a) Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i żadna cyfra się nie powtarza?

b) Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?

**3.** Rozważmy liczby pięciocyfrowe, w których zapisie każda z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 występuje dokładnie raz.

a) Ile jest takich liczb mniejszych od 50 000?

b) Ile jest takich liczb większych od 30 000?

**4.** Z cyfr 4, 5, 6, 7, 8, 9 tworzymy liczby sześciocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach. Ile można utworzyć takich liczb:

a) podzielnych przez 5, b) parzystych?

**5.** Podaj liczbę elementów zbioru $A$, o którym wiadomo, że wszystkich możliwych jego permutacji jest:

a) 24, b) 120, c) 40 320, d) 3 628 800.

**6.** a) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do $n$. Ile osób brało udział w zawodach, jeśli wiadomo, że numery startowe można było przydzielić na 5040 sposobów?

b) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do $n$. Najpierw rozdano numery parzyste, po czym okazało się, że numery nieparzyste można przydzielić na 720 sposobów. Ile osób brało udział w zawodach?

**7.** Na ile sposobów można zakwaterować cztery osoby:

a) w czterech jednoosobowych pokojach,

b) w pięciu jednoosobowych pokojach?

**8.** a) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 7 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby każda szuflada była zajęta?

b) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 8 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby tylko jedna szuflada była pusta?

**9.** a) Na ile sposobów można ustawić dziewięć osób w kolejce?

b) Na ile sposobów można ustawić czworo dziewcząt i pięciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na początku kolejki?

c) Na ile sposobów można ustawić troje dziewcząt i sześciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na końcu kolejki?

**10.** Oblicz.

a) $\frac{8!}{6!}$ d) $\frac{10!}{7!\cdot 3!}$ g) $\frac{5!}{4!+5!}$ j) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

b) $\frac{19!}{21!}$ e) $\frac{9!\cdot 4!}{12!}$ h) $\frac{5!+6!}{6!-5!}$ k) $\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!}$

c) $\frac{15!}{3!\cdot 13!}$ f) $\frac{100!\cdot 10!}{12!\cdot 98!}$ i) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$ l) $\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$

**11.** a) Liczba permutacji zbioru $(n+1)$-elementowego jest o 600 większa od liczby permutacji zbioru $n$-elementowego. Oblicz $n$.

b) Liczba permutacji zbioru $(n+3)$-elementowego jest 120 razy większa od liczby permutacji zbioru $n$-elementowego. Oblicz $n$.

**12.** Ile zer na końcu ma podana liczba?

a) 15! b) 30! c) 100!

## Powtórzenie

**13.** Ile liczb $n$-cyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry podanej liczby?

a) 234 i $n = 3$ b) 4567 i $n = 4$ c) 123 456 i $n = 6$

**14.** Ile można utworzyć kodów mających na początku $n$ liter, a następnie $m$ cyfr, jeśli wykorzystujemy wszystkie podane litery i cyfry?

a) A, B, 2, 4, 6 i $n = 2$, $m = 3$

b) A, B, C, 1, 3, 5, 7 i $n = 3$, $m = 4$

c) A, B, C, D, 3, 6, 9 i $n = 4$, $m = 3$

**15.** Pięciu przyjaciół wybrało się do kina. Na ile sposobów mogą oni usiąść na pięciu miejscach?

**16.** Tramwajem zatrzymującym się na 8 przystankach jedzie 7 osób. Na ile sposobów mogą one wysiąść z tramwaju, jeśli każda z nich:

a) wysiada na innym przystanku,

b) wysiada na innym przystanku, ale nikt nie wysiada na pierwszym przystanku?

Warto wiedzieć

## Permutacje z powtórzeniami

### Przykład 1

a) Mamy do dyspozycji klocki z literami A, A, K, R. Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie). Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

Jest 12 możliwych słów:

AAKR AKAR AKRA KAAR KARA KRAA
AARK ARAK ARKA RAAK RAKA RKAA

b) Mamy do dyspozycji klocki z literami A, A, T, T. Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie). Wypisz wszystkie możliwe słowa.

Jest 6 możliwych słów:

AATT ATAT ATTA TAAT TATA TTAA

Rozpatrzmy $n$-elementowy ciąg, którego wyrazy należą do zbioru:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

przy czym każdy z elementów $a_1, a_2, \ldots, a_k$ występuje jako wyraz ciągu odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$ razy (czyli $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$).
Taki ciąg nazywamy $n$-elementową **permutacją z powtórzeniami** zbioru $A$.
Liczba takich permutacji jest równa $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

### Przykład 2

Niech $m$ określa, ile liczb sześciocyfrowych możemy otrzymać, przestawiając cyfry liczby $x$.

a) Jeśli $x = 112\,222$, to $m = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$.

b) Jeśli $x = 112\,223$, to $m = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = 60$.

**1.** a) Ile siedmioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie BARBARA?

b) Ile dziewięcioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie KATAPULTA?

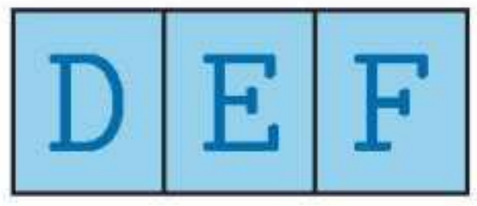
**2.** Ile dziesięciocyfrowych liczb możemy otrzymać, przestawiając cyfry w liczbie:

a) 1 222 333 444, b) 9 989 879 876?

# 1.3. Wariacje bez powtórzeń

### Przykład 1

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród następujących: A, B, C, D, E, F, G, H, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?




Na pierwszym miejscu kodu możemy wpisać jedną z ośmiu liter, na drugim – jedną z pozostałych siedmiu, a na trzecim – jedną z pozostałych sześciu. Zatem jest $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ kodów.

### Przykład 2

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród 26 liter alfabetu, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?

Takich kodów jest $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\,600$.

### Ćwiczenie 1

a) Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których mogą wystąpić litery A, B, C, D, E, F i żadna litera się nie powtarza?

b) Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których może wystąpić każda z 26 liter alfabetu i żadna litera się nie powtarza?

Opisane wyżej ciągi liter tworzące kody to przykłady wariacji bez powtórzeń.

### Definicja

Każdy $k$-wyrazowy ciąg utworzony z różnych elementów $n$-elementowego zbioru $A$, gdzie $k \leqslant n$, nazywamy $k$-elementową **wariacją bez powtórzeń** zbioru $A$.

Zauważmy, że każda $n$-elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru $n$-elementowego jest permutacją.

Liczbę wariacji bez powtórzeń można obliczyć, odwołując się bezpośrednio do reguły mnożenia lub korzystając ze wzoru podanego poniżej.

### Twierdzenie

Jeśli $k \leqslant n$, to wszystkich $k$-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru $n$-elementowego jest:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

## Zadania

**1.** a) Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i cyfry się nie powtarzają?

b) Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 3, 5, 7, 9 i żadna z nich się nie powtarza? A ile jest takich liczb czterocyfrowych?

**2.** Ile jest liczb trzycyfrowych, a ile czterocyfrowych, w których zapisie cyfry się nie powtarzają?

**3.** a) Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 71, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała i które nie będą zawierały cyfry 0?

b) Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 701, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała?

**4.** W loterii fantowej wzięło udział 100 uczniów i każdy kupił jeden ze stu losów. Wygrane to: I nagroda – rakieta tenisowa, II nagroda – piłka do koszykówki i III nagroda – pluszowy miś. Na ile sposobów uczniowie mogą wylosować nagrody?

**5.** Do windy zatrzymującej się na 10 piętrach wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada:

a) na innym piętrze,

b) na innym piętrze i nikt nie wysiada na trzech ostatnich piętrach?

## Powtórzenie

**6.** Których liczb o różnych cyfrach jest więcej: dwucyfrowych zapisanych za pomocą cyfr 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 czy trzycyfrowych zapisanych za pomocą cyfr 5, 6, 7, 8, 9?

**7.** Na ile sposobów dziesięcioosobowe stowarzyszenie może wybrać trzy różne osoby do zajmowania stanowisk przewodniczącego, wiceprzewodniczącego i sekretarza?

D **8.** Rozważmy wszystkie siedmiocyfrowe numery telefoniczne o niepowtarzających się cyfrach. Uzasadnij, że numerów zaczynających się od 6051 jest tyle samo co numerów zaczynających się od 605 i zawierających tylko cyfry od 0 do 7.

# 1.4. Wariacje z powtórzeniami

### Przykład 1

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?

Każdą z trzech cyfr możemy wybrać na dwa sposoby, zatem jest $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ takich liczb.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 111 | 121 | 211 | 221 | Jest 8 liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2. |
| 112 | 122 | 212 | 222 | |

### Przykład 2

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4 i 5?

Jest $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ takich liczb.

### Ćwiczenie 1

a) Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?

b) Ile jest wszystkich liczb sześciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4 i 5?

Opisane wyżej ciągi cyfr tworzące liczby to przykłady wariacji z powtórzeniami.

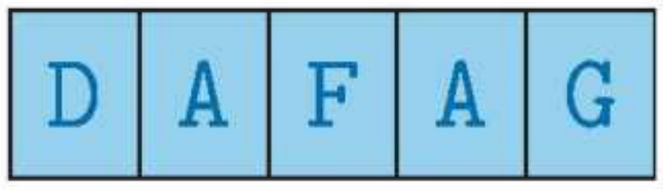
### Definicja

Każdy $k$-wyrazowy ciąg utworzony z elementów zbioru $A$ nazywamy $k$-elementową **wariacją z powtórzeniami** zbioru $A$.

**Uwaga.** W wariacji z powtórzeniami wyrazy mogą się powtarzać.

### Przykład 3

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter A, B, C, D, E, F, G, H, jeśli litery mogą się powtarzać?




Można utworzyć $8^5 = 32\,768$ takich kodów.

### Ćwiczenie 2

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z 26 liter alfabetu, jeśli litery mogą się powtarzać?

### Twierdzenie

Wszystkich $k$-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru $n$-elementowego jest $n^k$.

**Uwaga.** Jeśli liczbę wszystkich $k$-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru $n$-elementowego oznaczymy przez $W_n^k$, to treść powyższego twierdzenia zapiszemy:

$$W_n^k = n^k$$

### Ćwiczenie 3

a) Ile jest wszystkich dwuelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dziesięcioelementowego?

b) Ile jest wszystkich dziesięcioelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego?

## Zadania

**1.** Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie ma:
a) cyfry 0, b) cyfr 0 i 4, c) cyfr 0, 4 i 5, d) cyfr 4 i 5?

**2.** Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych:
a) zaczynających się od 12, b) których ostatnią cyfrą jest 7?

**3.** Która z liczb jest większa:

a) liczba dwuelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru trzyelementowego czy liczba trzyelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego,

b) liczba trzyelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru czteroelementowego czy liczba czteroelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru trzyelementowego?

D **4.** Z urny, w której znajdują się kule z numerami 4, 5, 6, 7, 8, 9, losujemy kolejno cztery kule. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Uzasadnij, że przy losowaniu ze zwracaniem możliwych do otrzymania liczb jest ponad trzykrotnie więcej niż przy losowaniu bez zwracania.

**Uwaga.** Losowanie polega na wyciąganiu przedmiotów (np. losów, kul, żetonów) w sposób, który wyklucza wpływ osoby losującej na otrzymany wynik.

**5.** a) Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów możemy rozmieścić te kule?

b) Do 9 szuflad wrzucamy 3 kule (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów możemy rozmieścić te kule?

**6.** a) Na ile sposobów 6 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na dziesięciu piętrach?

b) Na ile sposobów 10 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na sześciu piętrach?

D **7.** Niech $m$ będzie liczbą sposobów, na które 5 pasażerów może wysiąść z pociągu na czterch stacjach, a $n$ – liczbą sposobów, na które 4 pasażerów może wysiąść z pociągu na pięciu stacjach. Uzasadnij, że $m - n < 400$.

**8.** Ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują tylko cyfry 0 i 1 i które mają co najwyżej: a) 5 cyfr, b) 11 cyfr, c) $n$ cyfr?

**9.** Ile jest wszystkich liczb, które są zapisane tylko za pomocą cyfr 0, 1, 2 oraz mają: a) 5 cyfr, b) 11 cyfr, c) $n$ cyfr?

**10.** Rzucamy czterokrotnie kostką. Wyrzucone liczby oczek są kolejnymi cyframi liczby czterocyfrowej. Ile spośród otrzymanych w ten sposób liczb jest:

a) większych od 6000,
b) większych od 3500,
c) podzielnych przez 25,
d) podzielnych przez 4?

**11.** Oblicz, ile jest liczb pięciocyfrowych:

a) mniejszych od 48 000,
b) większych od 56 700,
c) o nieparzystym iloczynie cyfr,
d) o parzystym iloczynie cyfr.

## Powtórzenie

**12.** Których liczb jest więcej:

a) dwucyfrowych, w których zapisie występują cyfry 3, 5, 7, czy trzycyfrowych, w których zapisie występują cyfry 3, 5,

b) trzycyfrowych, w których zapisie występują cyfry 2, 4, 6, 8, czy czterocyfrowych, w których zapisie występują cyfry 1, 2, 3?

**13.** Karolina zapomniała dwie ostatnie cyfry z dziewięciu cyfr numeru telefonu komórkowego kolegi. Pamięta tylko, że były to cyfry nieparzyste. Ile maksymalnie prób musi wykonać Karolina, aby dodzwonić się do kolegi?

**14.** Do 4 szuflad wrzucamy 6 kul (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów można rozmieścić te kule?

**15.** Ile razy więcej jest dziewięciocyfrowych numerów telefonicznych zaczynających się od 515 niż siedmiocyfrowych numerów zaczynających się od 77?

# 1.5. Reguła dodawania

### Przykład 1

Rzucamy cztery razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby czterocyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których suma cyfr jest równa 6?

Suma cyfr może być równa 6 w dwóch przypadkach:

- w zapisie liczby występują: raz cyfra 3 i trzy razy cyfra 1; są cztery takie liczby: 1113, 1131, 1311, 3111;
- w zapisie liczby występują: dwa razy cyfra 2 i dwa razy cyfra 1; jest sześć takich liczb: 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211.

Wszystkich takich liczb jest $4 + 6 = 10$.

Przedstawione powyżej sumowanie liczby obiektów sprzyjających dwóm różnym przypadkom to przykład zastosowania reguły dodawania. Mówi ona, że jeśli zbiory $A$ i $B$ są rozłączne, to liczba elementów zbioru $A \cup B$ równa się sumie liczby elementów zbioru $A$ i liczby elementów zbioru $B$.

**Reguła dodawania**

Jeśli zbiory $A$ i $B$ są rozłączne, to $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

### Ćwiczenie 1

Rzucamy trzy razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których:

a) suma cyfr jest równa 6, b) iloczyn cyfr jest równy 6?

### Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować cyfry należące do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i co najmniej raz występuje cyfra 3?

Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich liczb czterocyfrowych zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6; $A$ – zbiorem tych liczb ze zbioru $X$, w których zapisie co najmniej raz występuje cyfra 3; $B$ – zbiorem tych liczb ze zbioru $X$, w których zapisie ani razu nie występuje cyfra 3. Wówczas $\overline{\overline{X}} = 6^4$, $\overline{\overline{B}} = 5^4$. Zauważmy, że $X = A \cup B$ oraz $A$ i $B$ są rozłączne, zatem:

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$$

Stąd:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{X}} - \overline{\overline{B}} = 6^4 - 5^4 = 1296 - 625 = 671$$

### Ćwiczenie 2

a) Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować cyfry należące do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i co najmniej raz występuje cyfra 2?

b) Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0, a suma cyfr jest mniejsza od 35?

### Przykład 3

Ile jest liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i żadna z nich się nie powtarza?

Liczba jest podzielna przez 5, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.
Niech $A$ będzie zbiorem tych liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 0.

| ? | ? | ? | ? | 0 |
|---|---|---|---|---|

Wówczas $\overline{\overline{A}}$ jest równa liczbie czteroelementowych wariacji bez powtórzeń zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Zatem $\overline{\overline{A}} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$.
Niech $B$ będzie zbiorem tych liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 5.

| ? | ? | ? | ? | 5 |
|---|---|---|---|---|

Zwróćmy uwagę, że pierwszą cyfrę liczby wybieramy ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, więc $\overline{\overline{B}} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

Zatem $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = 360 + 300 = 660$.

### Ćwiczenie 3

Ile jest parzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 i żadna z nich się nie powtarza?

Ogólnie **regułę dodawania** można sformułować następująco:

> Jeśli zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to:
> $$\overline{\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}} = \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} + \ldots + \overline{\overline{A_n}}$$

### Ćwiczenie 4

Rozpatrujemy liczby pięciocyfrowe zapisane za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6.

a) Ile jest takich liczb, których pierwszą cyfrą jest 5 lub 6?

b) Ile jest takich liczb, których pierwszą cyfrą jest 4, a drugą 5 lub 6?

c) Ile jest takich liczb, których pierwsza i druga cyfra to 4, a trzecia cyfra to 4, 5 lub 6?

d) Ile jest takich liczb większych od 44 400?

Talia 24 kart składa się z 6 pików (♠), 6 kierów (♥), 6 kar (♦) i 6 trefli (♣). Litery $A$, $K$, $D$, $W$ oznaczają figury: odpowiednio asa, króla, damę i waleta. W skład talii wchodzą karty wymienione obok.

$A\spadesuit$ $K\spadesuit$ $D\spadesuit$ $W\spadesuit$ $10\spadesuit$ $9\spadesuit$
$A\heartsuit$ $K\heartsuit$ $D\heartsuit$ $W\heartsuit$ $10\heartsuit$ $9\heartsuit$
$A\diamondsuit$ $K\diamondsuit$ $D\diamondsuit$ $W\diamondsuit$ $10\diamondsuit$ $9\diamondsuit$
$A\clubsuit$ $K\clubsuit$ $D\clubsuit$ $W\clubsuit$ $10\clubsuit$ $9\clubsuit$

### Przykład 4

Z talii 24 kart wybrano jednego pika, jednego kiera, jedno karo i jednego trefla. Wiadomo, że nie wybrano czterech asów. Ile jest możliwości takiego wyboru?

Liczba możliwych wyborów równa się $6^4 - 1 = 1296 - 1 = 1295$.

### Ćwiczenie 5

Z talii 24 kart wybrano jednego pika, jednego kiera i jedno karo. Wiadomo, że nie wybrano ani trzech króli, ani trzech dam. Ile jest możliwości takiego wyboru?

## Zadania

**1.** a) Z talii 24 kart wybrano pięć, wśród których były cztery asy. Ile jest możliwości takiego wyboru?

b) Z talii 24 kart wybrano sześć, wśród których były cztery asy. Pozostałe dwie karty to albo król i dama, albo dama i walet. Ile jest możliwości takiego wyboru?

**2.** Rzucamy dwiema kostkami do gry. Liczbę oczek na pierwszej z nich oznaczamy przez $x$, a na drugiej – przez $y$. Ile jest możliwych wyników spełniających podany warunek?

a) $x < y$ lub $x > y + 2$ (diagram obok)

b) $x = y$ lub $x \geqslant y + 2$

c) $x + y \leqslant 5$ lub $x + y = 10$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 |
| 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | 62 |
| 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 |
| 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 |
| 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 |

**3.** Podczas sprawdzianu należało obliczyć, ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Poniżej przedstawiono rozwiązania podane przez dwóch uczniów.

uczeń I: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ uczeń II: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

Uzasadnij podane rozwiązania.

**4.** Rzucamy czterokrotnie kostką. Wyrzucone liczby oczek są kolejnymi cyframi liczby czterocyfrowej. Ile spośród otrzymanych w ten sposób liczb jest:

a) większych od 6000,
b) większych od 3500,
c) podzielnych przez 25,
d) podzielnych przez 4?

**5.** Ile jest liczb naturalnych mniejszych od $k$, w których zapisie nie występuje cyfra 0 oraz cyfry się nie powtarzają?

a) $k = 99$ b) $k = 999$ c) $k = 9999$ d) $k = 99\,999$

**6.** Na parkingu salonu samochodowego stoi 10 samochodów tej samej marki. Cztery samochody są czarne, trzy – srebrne, a pozostałe – granatowe. Wybieramy trzy samochody. Na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wszystkie wybrane samochody były:

a) w różnych kolorach,
b) w tym samym kolorze?

**7.** Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb nie występuje cyfra 7? A ile jest takich liczb czterocyfrowych?

**8.** Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ i nie mogą się powtarzać, a ich suma jest większa od 6?

**9.** Ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują tylko cyfry 0 oraz 1 i które mają co najwyżej:

a) 5 cyfr,
b) 7 cyfr,
c) 10 cyfr?

## Powtórzenie

**10.** Ile jest siedmiocyfrowych numerów telefonicznych zaczynających się od 66 lub od 606?

**11.** Ile jest kodów liczbowych składających się z co najmniej pięciu oraz co najwyżej dziewięciu cyfr?

**12.** Chcemy kupić kanapę i fotel. Sklep $A$ oferuje 3 rodzaje kanap i 6 rodzajów foteli, a sklep $B$ – 5 rodzajów kanap i 4 rodzaje foteli. Ile mamy możliwości wyboru, jeśli kupimy wszystko w jednym sklepie?

**13.** Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych:

a) zaczynających się od 12,
b) kończących się na 12?

# 1.6. Zdarzenia losowe

Rzut monetą czy rzut kostką to przykłady doświadczeń losowych, czyli takich doświadczeń, których wyniku nie możemy przewidzieć. W przypadku jednokrotnego rzutu monetą możliwe wyniki to orzeł lub reszka. W przypadku jednokrotnego rzutu kostką mamy sześć możliwych wyników: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek.

Poszczególne wyniki doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**, a ich zbiór – **przestrzenią zdarzeń elementarnych** lub krótko **przestrzenią**. Zgodnie z tradycją przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczamy grecką wielką literą omega ($\Omega$), a pojedyncze zdarzenia elementarne – małą literą omega ($\omega$).

### Przykład 1

a) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu monetą: $\Omega = \{o, r\}$, gdzie $o$ oznacza otrzymanie orła, a $r$ – reszki.

b) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c) Przestrzenią zdarzeń elementarnych w doświadczeniu polegającym na rzucie najpierw monetą, a następnie kostką jest zbiór:
$\Omega = \{(r,1), (r,2), (r,3), (r,4), (r,5), (r,6), (o,1), (o,2), (o,3), (o,4), (o,5), (o,6)\}$.

### Ćwiczenie 1

Z urny zawierającej trzy kule ponumerowane 1, 2 i 3 losujemy jedną kulę, a następnie drugą. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę dwucyfrową. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

a) wylosowanej kuli nie zwracamy do urny (losowanie bez zwracania),

b) wylosowaną kulę zwracamy do urny (losowanie ze zwracaniem).

### Definicja

**Zdarzeniem losowym** nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych $\Omega$.

Zdarzenia losowe, zwane krótko zdarzeniami, będziemy oznaczać wielkimi literami: $A$, $B$, $C$ itd.

Zbiór $\Omega$ nazywamy zdarzeniem **pewnym**, natomiast zbiór pusty nazywamy zdarzeniem **niemożliwym**. Elementy zdarzenia $A$ nazywamy **wynikami sprzyjającymi** zdarzeniu $A$.

### Przykład 2

Rzucamy raz kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:
$A$ – wypadła parzysta liczba oczek,
$B$ – wypadła liczba oczek większa od 8,
$C$ – wypadła liczba oczek mniejsza od 7.

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Zdarzeniu $A$ sprzyjają wyniki 2, 4, 6, zatem $A = \{2, 4, 6\}$.
Zdarzenie $B$ jest zdarzeniem niemożliwym, a $C$ – zdarzeniem pewnym.

### Ćwiczenie 2

Rzucamy dwa razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
$A$ – suma otrzymanych oczek jest mniejsza od 4,
$B$ – iloczyn otrzymanych oczek jest podzielny przez 10.

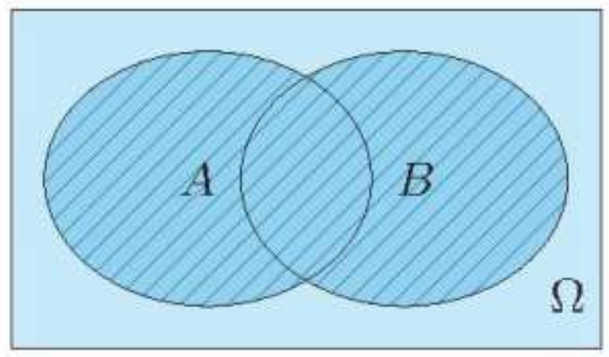
### Ćwiczenie 3

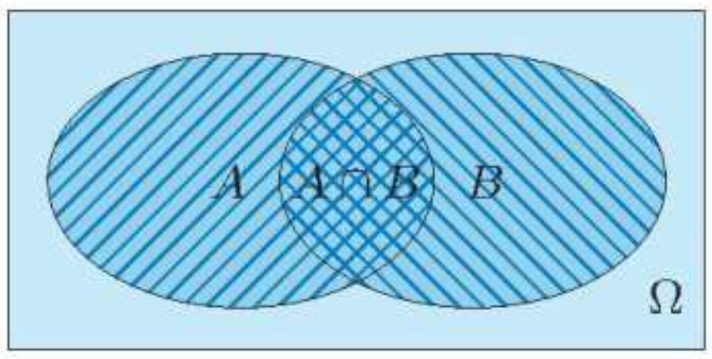
Rzucamy cztery razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
$A$ – wypadły co najwyżej dwie reszki,
$B$ – wypadły dokładnie dwie reszki.

Zdarzenia losowe są zbiorami, zatem możemy na nich wykonywać takie same działania jak na zbiorach.

Niech $A, B \subset \Omega$.

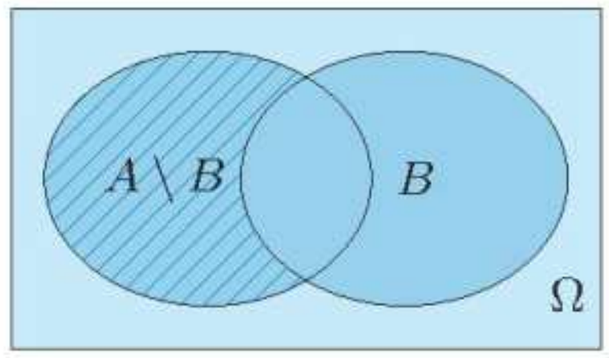
**Sumą** zdarzeń $A$ i $B$ nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu $A$ lub zdarzeniu $B$ i tylko one.




**Iloczynem** zdarzeń $A$ i $B$ nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie zdarzeniu $A$ i zdarzeniu $B$ i tylko one.

**Różnicą** zdarzeń $A$ i $B$ nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu $A$ oraz niesprzyjające zdarzeniu $B$ i tylko one.




Mówimy, że zdarzenia $A$ i $B$ są **rozłączne** lub **wykluczają się**, jeśli część wspólna $A \cap B$ tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym ($A \cap B = \emptyset$).

Zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia $A$. Zauważ, że $A \cap A' = \emptyset$ oraz $A \cup A' = \Omega$.

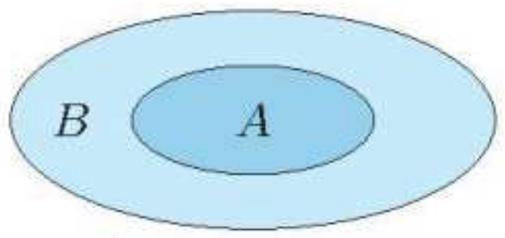
### Ćwiczenie 4

Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

$A$ – orzeł wypadł co najwyżej raz, $D$ – wypadły same orły,
$B$ – co najmniej raz wypadła reszka, $E$ – wypadło więcej orłów niż reszek.
$C$ – reszka wypadła dokładnie dwa razy,

Wskaż pary zdarzeń wykluczających się oraz pary zdarzeń przeciwnych.

**Uwaga.** Jeśli wszystkie elementy zdarzenia $A$ należą do zdarzenia $B$, to mówimy, że zdarzenie $A$ **zawiera się** w zdarzeniu $B$, co zapisujemy $A \subset B$.




Zauważ, że jeśli $A \subset B$, to $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ i $A \setminus B = \emptyset$.

## Zadania

**1.** Rzucamy trzy razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
$A$ – suma wyrzuconych oczek jest równa 17,
$B$ – suma wyrzuconych oczek jest nie większa niż 6,
$C$ – iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 36.

**2.** Rzucamy dwa razy kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:
$A$ – pierwsza wyrzucona liczba jest nie mniejsza od drugiej,
$B$ – wśród wyrzuconych liczb są liczba parzysta i liczba nieparzysta.
Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom $A'$ i $B'$. Sprawdź, czy zachodzą zależności: $A \cup B = \Omega$, $A' \cup B = B$, $A \setminus B = B'$, $B' \subset A$.

**3.** Z urny, w której jest pięć kul ponumerowanych od 1 do 5, losujemy kolejno, bez zwracania, dwie kule.
a) Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
$A$ – za drugim razem wylosowano liczbę parzystą,
$B$ – iloczyn wylosowanych liczb jest równy 4,
$C$ – pierwsza wylosowana liczba jest mniejsza od drugiej.
b) Wyznacz zdarzenia: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$ i $A \cap B \cap C$.

## Powtórzenie

**4.** Rzucamy dwa razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
$A$ – wypadło więcej orłów niż reszek, $B$ – wypadły co najmniej dwa orły,
$C$ – wypadły co najwyżej dwie reszki.

**5.** Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
$A$ – za trzecim razem wypadł orzeł, $B$ – wypadły co najmniej dwa orły,
$C$ – wypadło więcej orłów niż reszek.

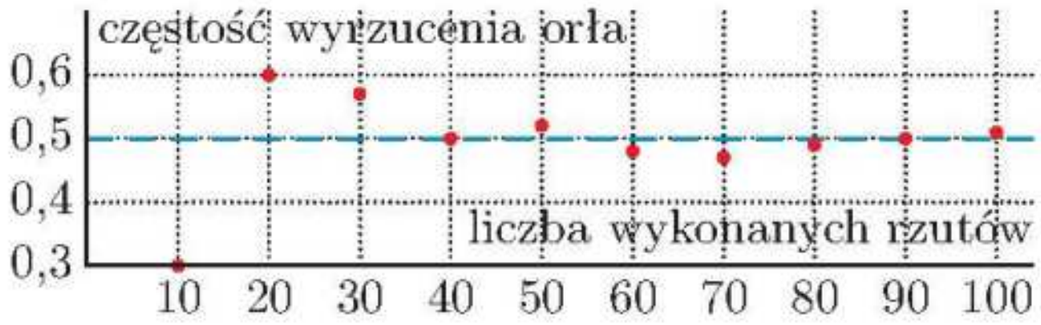
**Warto wiedzieć**

## Częstość zdarzeń

Rzucamy $n$ razy monetą. Jeśli $k$ razy wypadnie orzeł, to mówimy, że **częstość** otrzymania orła wynosi $\frac{k}{n}$. W tabeli i na wykresie podano częstość wyrzucenia orła podczas pewnego eksperymentu.

| Liczba wykonanych rzutów $n$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Liczba otrzymanych orłów $k$ | 3 | 12 | 17 | 20 | 26 | 29 | 33 | 39 | 45 | 51 |
| Częstość $\frac{k}{n}$ | 0,3 | 0,6 | 0,57 | 0,5 | 0,52 | 0,48 | 0,47 | 0,49 | 0,5 | 0,51 |

Zwróć uwagę, że dla dużej liczby rzutów częstość otrzymania orła jest bliska $\frac{1}{2}$.




W poniższej tabeli przedstawiono wyniki eksperymentów polegających na rzucie monetą, przeprowadzonych przez Francuza Georges'a Louisa Leclerca de Buffona [czyt. żorża luisa leklerka de bufona] (1707–1788) i Anglika Karla Pearsona [czyt. pirsona] (1857–1936).

| | Liczba rzutów | Liczba orłów | Częstość |
|---|---|---|---|
| G.L.L. de Buffon | 4040 | 2048 | 0,5069 |
| K. Pearson | 12000 | 6019 | 0,5016 |
| K. Pearson | 24000 | 12012 | 0,5005 |

1. Wykonaj 100 rzutów monetą. Podaj otrzymaną częstość wypadnięcia orła.
2. Wykonaj 100 rzutów kostką. Sprawdź, czy częstość otrzymania szóstki jest bliska $\frac{1}{6}$.
3. Wykonaj 30 rzutów dwiema kostkami. Za każdym razem zapisz, czy suma wyrzuconych oczek jest parzysta, czy nieparzysta. Podaj częstość, z jaką występowała parzysta liczba oczek.

W 1733 r. de Buffon sformułował problem, zwany później problemem **igły Buffona**, polegający na obliczeniu prawdopodobieństwa tego, że igła o długości $l$, rzucona na podłogę podzieloną liniami równoległymi odległymi o $d$, spadnie na linię. Rozwiązanie tego problemu, podane przez Buffona w 1777 r., pozwala wyznaczyć przybliżoną wartość liczby $\pi$ metodami rachunku prawdopodobieństwa.



# 1.7. Prawdopodobieństwo klasyczne

Gdy rzucamy kostką, możemy otrzymać jeden z wyników należących do zbioru $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Przyjmujemy, że kostka jest symetryczna (upada na każdą ściankę równie często), zatem szansa otrzymania któregokolwiek wyniku jest równa $\frac{1}{6}$. Rozpatrzmy zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek. Zauważmy, że zdarzeniu temu sprzyjają trzy wyniki: 2, 4 i 6. Zatem szansa zajścia tego zdarzenia jest równa $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Jeżeli wszystkie wyniki doświadczenia zdarzają się równie często, mówimy, że mamy do czynienia z **prawdopodobieństwem (schematem) klasycznym**. W takiej sytuacji prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A$ zawartego w przestrzeni $\Omega$ określamy następująco:

### Definicja

Jeżeli $\Omega$ jest zbiorem skończonym i niepustym, to **prawdopodobieństwem zdarzenia** $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

### Przykład 1

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek większej od 10 w dwukrotnym rzucie symetryczną kostką.

$$\Omega = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),$$
$$(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),$$
$$(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),$$
$$(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4),$$
$$(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),$$
$$(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych ma 36 elementów:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 36$$

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć, to zdarzenie:

$$A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}, \text{ stąd } \overline{\overline{A}} = 3$$

Zatem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

### Ćwiczenie 1

Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) sumy oczek mniejszej od 5,

b) parzystej sumy oczek.

### Przykład 2

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie mniej orłów niż reszek.

$$\Omega = \{(o,o,o),(o,o,r),(o,r,o),(r,o,o),(o,r,r),(r,o,r),(r,r,o),(r,r,r)\}$$

Zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 8$. Niech $A$ będzie zdarzeniem polegającym na otrzymaniu mniejszej liczby orłów niż reszek:

$$A = \{(o,r,r),(r,o,r),(r,r,o),(r,r,r)\}$$

Zatem $\overline{\overline{A}} = 4$ i stąd $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

### Ćwiczenie 2

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy czterokrotnym rzucie symetryczną monetą wypadnie mniej orłów niż reszek.

### Ćwiczenie 3

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy pięciokrotnym rzucie symetryczną monetą przynajmniej raz wypadnie reszka.

### Przykład 3

Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką i zapisujemy liczbę, której kolejnymi cyframi są otrzymane liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie cyfry tej liczby są nieparzyste.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest zbiorem wszystkich trzyelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Stąd $\overline{\overline{\Omega}} = 6^3 = 216$.

Rozpatrujemy zdarzenie losowe $A$, którego elementami są wszystkie trzyelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1,3,5\}$.

Stąd $\overline{\overline{A}} = 3^3 = 27$.

Zatem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

### Ćwiczenie 4

Rzucamy trzy razy symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) iloczyn liczb oczek otrzymanych w tych rzutach jest liczbą parzystą,

b) suma liczb oczek otrzymanych w tych rzutach jest równa 5.

### Ćwiczenie 5

Rzucamy czterokrotnie symetryczną kostką i zapisujemy liczbę, której kolejnymi cyframi są otrzymane liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest podzielna przez: a) 5, b) 4.

## Zadania

**1.** Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Rozpatrzmy zdarzenia:
$A$ – wypadły co najmniej trzy orły,
$B$ – liczba orłów jest równa liczbie reszek,
$C$ – wypadła parzysta liczba reszek.
Które z tych zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne?

**2.** Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że orzeł wypadnie co najmniej dwa razy.

**3.** Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wypadły dokładnie trzy reszki, b) wypadły co najmniej trzy orły.

**4.** Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) liczba oczek otrzymana w drugim rzucie jest o 2 większa od liczby oczek otrzymanej w pierwszym rzucie,

b) liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się co najwyżej o 1.

**5.** Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymane kolejno liczby oczek tworzą ciąg:

a) geometryczny, b) arytmetyczny.

**6.** Rzucamy cztery razy symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za każdym razem wypadnie taka sama liczba oczek.

**7.** Rzucając czworościenną symetryczną kostką, możemy otrzymać jedną z liczb 1, 2, 3 lub 4 (podaną przy wierzchołku kostki).

a) Gracz rzucający dwukrotnie taką kostką wygrywa, jeśli suma wyrzuconych liczb jest większa od 5. Wypisz wyniki sprzyjające wygranej i oblicz jej prawdopodobieństwo.

b) Gracz rzucający trzykrotnie taką kostką wygrywa, jeśli suma wyrzuconych liczb jest nie mniejsza od 10. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.



**8.** a) Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie ona podzielna przez 3.

b) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru liczb dwucyfrowych liczby podzielnej przez 3.

c) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru liczb trzycyfrowych liczby podzielnej przez 5.

**9.** Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb dwucyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 11, b) 6.

**10.** Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb trzycyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 2, b) 3.

**11.** Na loterii jest 60 losów, w tym 12 wygrywających. Kupujemy 1 los.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to los wygrywający.

b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to los wygrywający, jeżeli przed nami kupiono już 4 losy i były to losy wygrywające.

**12.** Na pewnej loterii jest 5 losów wygrywających. Kupujemy 1 los. Ile powinno być wszystkich losów na tej loterii, aby prawdopodobieństwo tego, że kupimy los wygrywający, było większe od 0,2?

**13.** Windą zatrzymującą się na 6 piętrach jadą 4 osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) każda osoba wysiądzie na innym piętrze,

b) wszyscy wysiądą na tym samym piętrze.

**14.** Dziesięć kul rozmieszczamy w dziesięciu szufladach (kule i szuflady rozróżniamy). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda szuflada będzie zajęta.

## Powtórzenie

**15.** Student potrafi odpowiedzieć na 20 spośród 25 pytań egzaminacyjnych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie będzie umiał odpowiedzieć na wybrane losowo pytanie.

**16.** Wrzucamy losowo 3 piłki do 7 pojemników. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) wszystkie piłki będą w tym samym pojemniku,

b) każda piłka będzie w innym pojemniku.

## 1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne – zadania

**1.** W klasie liczącej 16 dziewcząt i 10 chłopców 25% dziewcząt i 10% chłopców interesuje się wspinaczką skałkową.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z tej klasy interesuje się wspinaczką.

b) Jakie będzie to prawdopodobieństwo, jeśli do klasy dojdzie dwóch chłopców interesujących się wspinaczką?

**2.** W klasie IVa jest 24 uczniów, w IVb – 26 uczniów, a w IVc – 30 uczniów. Egzamin maturalny z języka francuskiego ma zamiar zdawać 12,5% uczniów klasy IVa, 50% uczniów klasy IVb i 20% uczniów klasy IVc. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uczeń losowo wybrany spośród wszystkich uczęszczających do tych klas ma zamiar zdawać maturę z języka francuskiego.

**3.** Na pierwszej loterii jest 120 losów, w tym 24 losy wygrywające. Na drugiej loterii jest 80 losów, w tym $n$ losów wygrywających. Oblicz $n$, wiedząc, że prawdopodobieństwo wygranej, jeżeli kupimy 1 los, jest na drugiej loterii dwukrotnie większe niż na pierwszej.

**4.** Liczba losów przegrywających jest na pewnej loterii o 20 większa od liczby losów wygrywających. Oblicz, ile jest wszystkich losów na tej loterii, wiedząc, że prawdopodobieństwo wygranej, jeżeli kupimy 1 los, jest równe 0,3.

**5.** a) Do urny zawierającej 2 kule białe i 4 czarne dołożono pewną liczbę kul białych. Ile jest obecnie wszystkich kul w urnie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{3}{4}$?

b) W pierwszej urnie znajdowało się 6 kul białych i 8 zielonych, a w drugiej – 10 kul białych i pewna liczba kul zielonych. Po przełożeniu wszystkich kul z pierwszej urny do drugiej prawdopodobieństwo wylosowania z niej kuli zielonej było równe $\frac{5}{9}$. Ile było wszystkich kul?

Klasyczną definicję prawdopodobieństwa precyzyjnie sformułował francuski matematyk, fizyk i astronom Pierre Simon de Laplace [czyt. pier simą de laplas] (1749–1827). Zamieścił ją w dziele *Théorie analytique des probabilités* (*Analityczna teoria prawdopodobieństwa*), wydanym w 1812 r. Od 1785 r. Laplace był członkiem Akademii Nauk w Paryżu.



**6.** Do urny, w której znajdowały się 2 kule białe i 8 czarnych, dołożono taką samą liczbę kul białych i czarnych. Ile kul dołożono, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest teraz dwa razy większe niż na początku?

**7.** Z urny, w której jest 8 kul białych i 2 czarne, losujemy 9 kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w urnie zostanie kula biała.

**8.** Na 11 fotelach ustawionych w rzędzie usiadło losowo 6 kobiet i 5 mężczyzn. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) mężczyźni siedzą razem,

b) żadne dwie kobiety nie siedzą obok siebie.

**9.** Test dotyczący życia pingwinów składa się z 10 pytań, na które możemy odpowiedzieć „tak" lub „nie". Oblicz prawdopodobieństwo zaliczenia testu, jeśli odpowiedzi wskazujemy losowo i aby zaliczyć test, musimy odpowiedzieć poprawnie:

a) na wszystkie pytania,

b) na co najmniej 9 pytań.



## Powtórzenie

**10.** Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: $A$ – za pierwszym razem wypadł orzeł, $B$ – za drugim razem wypadł orzeł, $C$ – wypadły co najmniej dwa orły, $D$ – wypadły co najwyżej dwie reszki. Oblicz prawdopodobieństwa powyższych zdarzeń.

**11.** Rzucamy dwa razy symetryczną kostką. Niech $A_n$ oznacza zdarzenie: suma oczek wyrzuconych na obu kostkach jest równa $n$. Oblicz $P(A_2)$, $P(A_3)$ i $P(A_4)$.

**12.** Rzucamy dwa razy symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: $A$ – co najmniej raz wypadnie 6 oczek, $B$ – dokładnie w jednym z rzutów wypadnie co najmniej 5 oczek, $C$ – iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest liczbą nieparzystą.

**13.** Na ściankach symetrycznej kostki znajdują się następujące liczby oczek: 1, 2, 3, 4, 5, 5. Rzucamy dwa razy tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek będzie równa 6.

# 1.9. Rozkład prawdopodobieństwa

Pewną niesymetryczną kostkę poddano testowi, wykonując długą serię rzutów. W tabeli podano w procentach częstość występowania danych liczb oczek.

| Liczba oczek | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Częstość występowania | 12,5% | 12,5% | 12,5% | 25% | 12,5% | 25% |

Zwróćmy uwagę, że częstość występowania nie jest taka sama dla wszystkich wyników. Na tej podstawie można przyjąć dla testowanej kostki następujące prawdopodobieństwa pojawienia się danych liczb oczek.

| Liczba oczek | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Prawdopodobieństwo | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

W powyższej tabeli podano **rozkład prawdopodobieństwa** dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie testowaną kostką.

Aby podać rozkład prawdopodobieństwa, należy zdarzeniom elementarnym $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ przyporządkować odpowiednio liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ należące do przedziału $\langle 0; 1\rangle$ tak, aby spełniony był warunek:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A$ obliczamy, sumując prawdopodobieństwa wyników sprzyjających temu zdarzeniu.

**Definicja**

Niech $A \subset \Omega$. **Prawdopodobieństwo** $P(A)$ zdarzenia $A$ jest sumą prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$.

**Przykład 1**

W tabeli obok podano rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie niesymetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek w rzucie tą kostką.

| $\omega_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ |

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A = \{2, 4, 6\}$:

$$P(A) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

### Ćwiczenie 1

| $\omega_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{15}$ |

W tabeli obok podano rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie niesymetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek oraz prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej trzech oczek.

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ mają równe prawdopodobieństwa, to mamy do czynienia ze **schematem klasycznym**. Wówczas:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$$

**Uwaga.** W dalszym ciągu podręcznika dla rzutu kostką (monetą) będziemy przyjmować, że kostka (moneta) jest symetryczna, czyli że wszystkie ścianki (orzeł lub reszka) wypadają z takim samym prawdopodobieństwem, chyba że zaznaczono, że jest inaczej.

## Zadania

**1.** W rzucie pewną niesymetryczną monetą orzeł wypada dwukrotnie częściej niż reszka. Podaj rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na rzucie tą monetą.

**2.** Rzucamy raz niesymetryczną kostką. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę przedstawiającą rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu tą kostką, jeśli prawdopodobieństwo otrzymania 6 oczek jest dwa razy większe od prawdopodobieństwa otrzymania 5 oczek. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek.

| $\omega_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | ? | ? |

**3.** Niech $\omega_i$ oznacza liczbę otrzymanych orłów, a $p_i$ – prawdopodobieństwo otrzymania $\omega_i$ orłów. Podaj rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na rzucie:

a) dwiema monetami, b) trzema monetami.

## Powtórzenie

**4.** Na ściankach symetrycznej kostki znajdują się następujące liczby oczek: 1, 2, 3, 4, 5, 5. Podaj rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu tą kostką.

**5.** W tabeli obok podano rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie niesymetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w rzucie tą kostką: a) parzystej liczby oczek, b) nieparzystej liczby oczek.

| $\omega_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | 0 |

# 1.10. Własności prawdopodobieństwa

**Twierdzenie**

Niech $\Omega$ będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo $P$. Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

1. $P(A) \geqslant 0$ oraz $P(A) \leqslant 1$,
2. $P(\emptyset) = 0$ oraz $P(\Omega) = 1$,
3. jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$,
4. $P(A') = 1 - P(A)$.

**Przykład 1**

Rzucamy trzykrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie orzeł.

Zauważmy, że $\overline{\overline{\Omega}} = 8$. Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na otrzymaniu przynajmniej jednego orła w trzech rzutach. Rozpatrzmy zdarzenie $A'$ przeciwne do zdarzenia $A$. Polega ono na wyrzuceniu samych reszek:

$$A' = \{(r, r, r)\}$$

Zatem $\overline{\overline{A'}} = 1$, czyli:

$$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{1}{8}$$

Stąd:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

**Ćwiczenie 1**

a) Rzucamy czterokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie reszka.

b) Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz otrzymamy 6 oczek.

**Ćwiczenie 2**

Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie $A$ polega na tym, że suma liczb oczek, które wypadną w obu rzutach, jest równa co najmniej 4. Podaj opis zdarzenia $A'$ i wypisz sprzyjające mu zdarzenia elementarne. Oblicz $P(A')$ i $P(A)$.

**Ćwiczenie 3**

a) Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb oczek, które wypadną w obu rzutach, jest mniejszy od 30.

b) Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb oczek, które wypadną w trzech rzutach, jest większa od 4.

### Ćwiczenie 4

Rzucamy monetą i kostką. Jest 12 możliwych wyników tego doświadczenia: $(o,1)$, $(o,2)$, $(o,3)$, $(o,4)$, $(o,5)$, $(o,6)$, $(r,1)$, $(r,2)$, $(r,3)$, $(r,4)$, $(r,5)$, $(r,6)$. Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że na monecie wypadł orzeł, a $B$ – że na kostce wypadła parzysta liczba oczek. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

| Zdarzenie | Wyniki sprzyjające | Prawdopodobieństwo |
|---|---|---|
| $A$ | ? | ? |
| $B$ | $(o,2),(o,4),(o,6),(r,2),(r,4),(r,6)$ | $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ |
| $A\cap B$ | ? | ? |
| $A\cup B$ | ? | ? |

Sprawdź, czy zachodzi równość: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

### Twierdzenie

Niech $\Omega$ będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo $P$. Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B\subset\Omega$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

### Ćwiczenie 5

Oblicz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń $A, B\subset\Omega$, jeśli:

a) $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{3},\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}$,

b) $P(A)=\frac{2}{9},\ P(B)=\frac{5}{12},\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

### Ćwiczenie 6

Oblicz prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń $A, B\subset\Omega$, jeśli:

a) $P(A)=\frac{2}{3},\ P(B)=\frac{1}{4},\ P(A\cup B)=\frac{5}{6}$,

b) $P(A)=\frac{2}{5},\ P(B)=\frac{1}{3},\ P(A\cup B)=\frac{11}{15}$.

### Ćwiczenie 7

W pewnej grupie uczniów każdy zna język angielski lub niemiecki. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania z tej grupy ucznia znającego język angielski jest równe $\frac{7}{8}$, natomiast prawdopodobieństwo wylosowania ucznia znającego język niemiecki jest równe $\frac{4}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń zna obydwa języki.

### Twierdzenie

Niech $\Omega$ będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo $P$. Wówczas jeśli zdarzenia $A$ i $B \subset \Omega$ wykluczają się ($A \cap B = \emptyset$), to:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

### Ćwiczenie 8

Rzucamy trzema kostkami. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 3 wynosi $\frac{1}{216}$, a prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 4 wynosi $\frac{1}{72}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych oczek będzie mniejsza od 5.

### Twierdzenie

Niech $\Omega$ będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo $P$. Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

**Dowód**

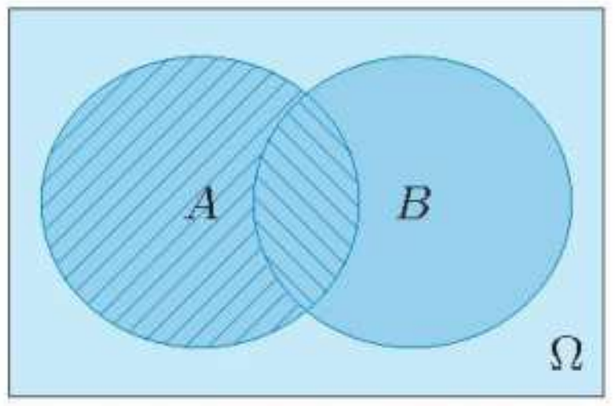
Dla dowolnych $A, B \subset \Omega$ mamy:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

więc:

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

a stąd $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.




Zauważ, że zbiory $A \setminus B$ oraz $A \cap B$ są rozłączne.

### Ćwiczenie 9

Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \setminus B)$, jeśli:

a) $P(A) = 0{,}8$ i $P(A \cap B) = 0{,}35$, b) $P(A) = \frac{3}{4}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

## Zadania

**1.** Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie $A$ polega na tym, że w każdym rzucie otrzymamy inną liczbę oczek, a zdarzenie $B$ – że ani razu nie otrzymamy szóstki. Podaj opis zdarzenia $A'$ oraz zdarzenia $B'$. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń $A'$, $A$, $B'$ i $B$.

**2.** Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
$A$ – suma oczek, które wypadną w obu rzutach, jest równa co najmniej 4,
$B$ – iloczyn oczek, które wypadną w obu rzutach, jest mniejszy od 25.

**3.** a) Rzucamy czterokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że reszka wypadnie co najwyżej trzy razy.

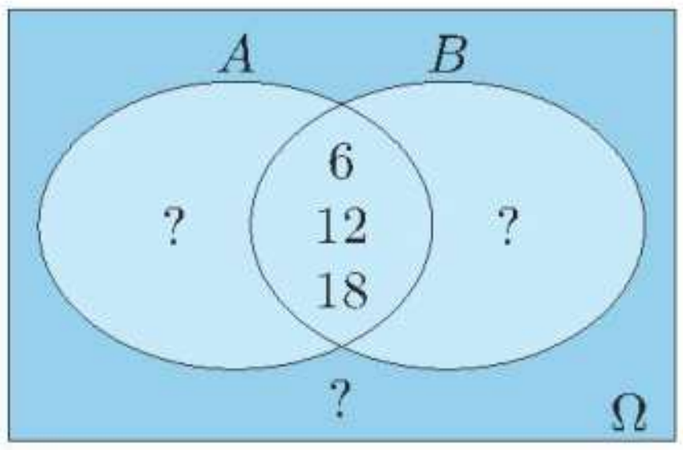
b) Rzucamy pięciokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że moneta nie upadnie pięć razy tą samą stroną do góry.

**4.** Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) szóstka wypadnie co najwyżej dwa razy,

b) ta sama liczba oczek nie powtórzy się trzykrotnie.

**5.** Z liczb od 1 do 20 losowo wybieramy jedną liczbę. Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 2, a $B$ – podzielnej przez 3. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij diagram, a następnie podaj: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.




Sprawdź prawdziwość równości: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**6.** a) Losujemy jedną liczbę spośród $1, 2, \ldots, 50$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta jest podzielna przez 2 lub przez 3.

b) Losujemy jedną liczbę spośród $1, 2, \ldots, 100$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta jest podzielna przez 2 lub przez 5.

**7.** Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
$A$ – w obu rzutach otrzymano parzystą liczbę oczek lub obie otrzymane liczby oczek są większe od 3,
$B$ – iloczyn liczb otrzymanych oczek jest nieparzysty lub większy od 24.

**8.** Z ankiety dotyczącej znajomości języka francuskiego i hiszpańskiego przeprowadzonej w pewnej grupie uczniów wynika, że $\frac{3}{5}$ z nich zna język francuski, $\frac{1}{4}$ – zna oba języki, natomiast $\frac{9}{10}$ – zna co najmniej jeden z tych języków. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uczeń losowo wybrany z tej grupy zna język hiszpański.

**9.** Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$ oraz $P(A \setminus B)$, jeśli:

a) $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$,

b) $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{5}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

**10.** Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$, jeśli:

a) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}6$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym,

b) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ i $P(A \cap B) = \frac{4}{9}P(A \cup B)$.

D **11.** a) Uzasadnij, że jeśli $B \subset A \subset \Omega$, to $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

b) Niech $B \subset A \subset \Omega$. Oblicz $P(A \setminus B)$, jeśli $P(A) = 0{,}95$ i $P(B) = 0{,}48$.

**12.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ mogą się wykluczać, jeśli $P(A) = \frac{1}{2}$ i $P(B) = \frac{3}{5}$?
>
> Załóżmy, że zdarzenia $A$ i $B$ się wykluczają. Wówczas:
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10} > 1$$
>
> Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem zdarzenia te nie mogą się wykluczać.

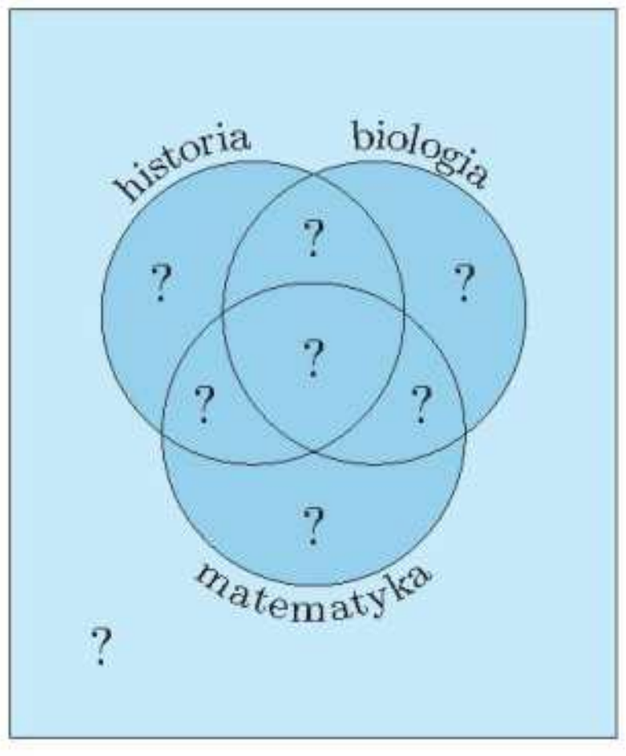
Czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ mogą się wykluczać?

a) $P(A) = \frac{4}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ b) $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$

**13.** W ankiecie przeprowadzonej wśród 200 uczniów klas czwartych pewnego liceum otrzymano następujące wyniki:

- matematykę lubi 100 uczniów,
- historię lubi 90 uczniów,
- biologię lubi 35 uczniów,
- matematykę i historię lubi 25 uczniów,
- matematykę i biologię lubi 15 uczniów,
- historię i biologię lubi 20 uczniów,
- matematykę, historię i biologię lubi 5 uczniów.

Przerysuj do zeszytu diagram przedstawiony obok i go uzupełnij. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń nie lubi żadnego z wymienionych przedmiotów.




## Powtórzenie

**14.** Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania przynajmniej jednego orła w doświadczeniu polegającym na pięciokrotnym rzucie monetą.

**15.** Spośród liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest:

a) parzysta lub dzieli się przez 5, b) podzielna przez 3 lub przez 4.

**16.** Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli:

a) $P(A) = 0{,}35$, $P(B) = 0{,}47$ i $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym,

b) $P(A') = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}25$ i $P(A \cap B) = 0{,}1$.

# Rzut monetą

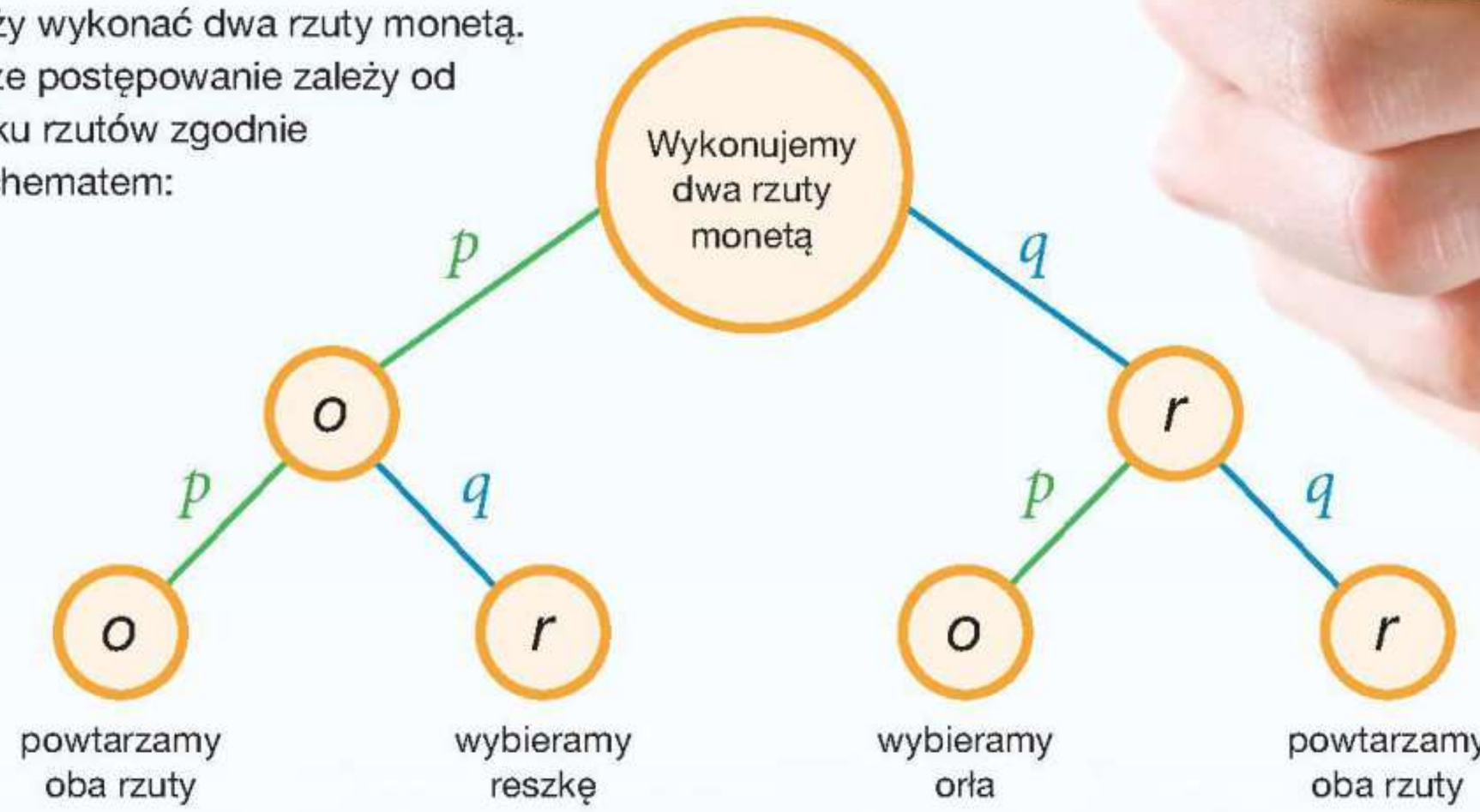
Rzut monetą to jeden z najbardziej znanych sposobów losowego podejmowania decyzji. Wykorzystuje się go w niektórych dyscyplinach sportu, na przykład aby rozstrzygnąć, która drużyna rozpocznie mecz.



## Sprawiedliwa decyzja

Nawet jeśli podejrzewamy, że moneta nie jest symetryczna (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe $p$, prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki jest równe $q$ oraz $p \neq q$), możemy za jej pomocą podjąć sprawiedliwą decyzję.

Należy wykonać dwa rzuty monetą. Dalsze postępowanie zależy od wyniku rzutów zgodnie ze schematem:




Nawet gdy moneta nie jest symetryczna, otrzymanie par orzeł–reszka oraz reszka–orzeł jest jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń jest równe $pq$.

Rzut powinien być wykonany w taki sposób, aby moneta podczas lotu kilka razy się obróciła. Następnie, w zależności od zwyczaju, monetę można złapać w locie lub pozwolić jej upaść na ziemię.

# 1.11. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

### Przykład 1

Rozpatrzmy grę polegającą na rzucie dwiema monetami. Jeśli wyrzucimy dwa orły, to wygrywamy 20 zł, jeśli jednego orła – wygrywamy 10 zł, a w przypadku, gdy wypadną dwie reszki – przegrywamy 40 zł. W tabeli podano możliwe wielkości wygranej w jednym rzucie w złotych: $x_1 = 20$, $x_2 = 10$ i $x_3 = -40$ (przegrana) oraz ich prawdopodobieństwa.

| $x_i$ | 20 | 10 | $-40$ |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Przy omawianiu zagadnień takich jak w powyższym przykładzie będziemy używać pojęć *zmienna losowa* i *rozkład zmiennej losowej*.

### Definicja

**Zmienną losową** nazywamy funkcję o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze zdarzeń elementarnych $\Omega$.

**Uwaga.** Zmienne losowe zwyczajowo oznacza się dużymi literami, np. $X$, $Y$.

### Przykład 2

Rzucamy raz kostką. Zmienna losowa $X$ przyporządkowuje każdemu zdarzeniu elementarnemu kwadrat otrzymanej liczby oczek. Zmienna losowa $X$ przyjmuje następujące wartości:

$$x_1 = X(1) = 1,\ x_2 = X(2) = 4,\ \ldots,\ x_6 = X(6) = 36$$

Każda z tych wartości jest przyjmowana z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$.

### Definicja

Zbiór par $(x_i, p_i)$, gdzie $x_i$ jest wartością zmiennej losowej $X$, a $p_i$ prawdopodobieństwem, z jakim zmienna losowa przyjmuje tę wartość, nazywamy **rozkładem zmiennej losowej**.

Rozkład zmiennej losowej zwykle wygodnie jest prezentować w tabeli. W tabeli obok przedstawiono rozkład zmiennej losowej z przykładu 2.

| $x_i$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

### Ćwiczenie 1

Losujemy ze zwracaniem dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3\}$. Zmienna losowa $X$ każdej parze liczb przyporządkowuje ich sumę. Uzupełnij w zeszycie tabelę przedstawiającą rozkład tej zmiennej.

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | ? |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | ? | ? | ? |

### Ćwiczenie 2

Losujemy dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Zmienna losowa $X$ każdej parze liczb przyporządkowuje ich sumę. Podaj rozkład zmiennej $X$, jeśli losujemy:

a) ze zwracaniem,

b) bez zwracania.

### Definicja

Niech $X$ będzie zmienną losową o wartościach $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ przyjmowanych z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$. **Wartością oczekiwaną** zmiennej $X$ nazywamy liczbę:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

### Przykład 3

Rozpatrzmy grę polegającą na rzucie trzema monetami. Jeśli wyrzucimy same orły, to wygrywamy 100 zł, jeśli wyrzucimy same reszki, to wygrywamy 60 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 20 zł. W tabeli obok przedstawiono rozkład zmiennej losowej $X$ opisującej tę grę.

| $x_i$ | 100 | 60 | $-20$ |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{6}{8}$ |

Wartość oczekiwana zmiennej losowej $X$ (wartość oczekiwana gry):

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 100 \cdot \tfrac{1}{8} + 60 \cdot \tfrac{1}{8} - 20 \cdot \tfrac{6}{8} = \tfrac{40}{8} = 5 \text{ [zł]}$$

Wartość oczekiwana tej gry jest dodatnia, czyli gra jest korzystna dla gracza.

### Ćwiczenie 3

Bierzemy udział w pewnej grze. Rzucamy kostką – jeśli wypadnie co najmniej 5 oczek, to wygrywamy $x_1$ zł, w przeciwnym wypadku przegrywamy $x_2$ zł.

D a) Uzasadnij, że jeśli $x_1 = 50$ i $x_2 = -40$, to wartość oczekiwana tej gry jest równa $-10$ zł (czyli gra jest dla nas niekorzystna).

b) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, jeśli wygrana $x_1 = 45$, a przegrana $x_2 = -15$.

### Definicja

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

### Ćwiczenie 4

Rzucamy dwiema monetami. Jeśli wypadną dwie reszki, to wygrywamy $x_1$ zł, jeśli wypadnie jedna reszka, to wygrywamy $x_2$ zł. Jeśli wypadną dwa orły, to przegrywamy $x_3$ zł.

D a) Uzasadnij, że jeśli $x_1 = 20$, $x_2 = 10$ i $x_3 = -40$, to gra jest sprawiedliwa.

b) Dla jakiej wartości $x_3$ gra jest sprawiedliwa, jeśli $x_1 = x_2 = 49$?

## Zadania

**1.** Bierzemy udział w pewnej grze. Rzucamy kostką – jeśli wypadnie parzysta liczba oczek, to wygrywamy 10 zł, jeśli wypadnie 5 oczek, to wygrywamy 120 zł, a jeśli 1 oczko lub 3 oczka, to przegrywamy 90 zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

b) Jaka powinna być wysokość przegranej, aby gra była sprawiedliwa?

**2.** Rzucamy dwa razy kostką. Jeśli w drugim rzucie wypadnie więcej niż w pierwszym, to wygrywamy $x_1$ zł, jeśli tyle samo oczek, to przegrywamy 120 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 60 zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, gdy $x_1 = 180$.

b) Dla jakiej wartości $x_1$ gra byłaby sprawiedliwa?

**3.** W pierwszej grze rzucamy trzema monetami i otrzymujemy $x = 24$ zł za każdego wyrzuconego orła. W drugiej grze rzucamy czterema monetami i otrzymujemy $y = 15$ zł za każdego wyrzuconego orła.

a) Wartość oczekiwana której gry jest większa?

b) Ile powinna być równa wygrana $x$, aby – bez zmiany wartości $y$ w drugiej grze – wartości oczekiwane obu gier były równe?

**Czy wiesz, że...**

Zagadnieniem wartości oczekiwanej gry zajmował się holenderski matematyk, fizyk i astronom Christiaan Huygens [czyt. kristian hojchens] (1629–1695). W 1657 r. wydał pracę dotyczącą rachunku prawdopodobieństwa *De ratiociniis in ludo aleae* (*O wnioskowaniu w grach hazardowych*). Christiaan Huygens był członkiem Towarzystwa Królewskiego w Londynie i Akademii Nauk w Paryżu.



**4.** Romek i Tomek grają w grę losową polegającą na rzucie $n$ monetami. Jeśli wypadną same orły, to Romek daje Tomkowi 21 żetonów. W przeciwnym wypadku Tomek daje Romkowi $x$ żetonów. Ile powinnno wynosić $x$, aby ta gra była sprawiedliwa, jeśli: a) $n = 2$, b) $n = 3$?

**5.** Rzucamy pewną liczbą monet. Jeśli w rzucie wypadło $n$ orłów i $k$ reszek, to wygrana (lub przegrana) jest równa $(2^n - 3k)$ zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, jeśli rzucamy:

a) czterema monetami, b) pięcioma monetami.

**6.** W tabeli podano prawdopodobieństwa trafienia trójki, czwórki, piątki i szóstki w grze liczbowej, w której skreślamy 6 spośród 49 liczb.

| | |
|---|---|
| trójka | około 0,017 650 404 |
| czwórka | około 0,000 968 620 |
| piątka | około 0,000 018 450 |
| szóstka | około 0,000 000 072 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |

a) Przyjmijmy, że wygrywamy jedynie wtedy, gdy trafimy szóstkę, i że cena jednego zakładu jest równa 1 zł. Jaka powinna być wysokość wygranej, aby była to gra sprawiedliwa?

b) Przyjmijmy, że jeśli trafimy trójkę, wygramy 10 zł, czwórkę – 100 zł, piątkę – 1000 zł, i że cena jednego zakładu jest równa 1 zł. Jaka powinna być wysokość wygranej w przypadku trafienia szóstki, aby gra była sprawiedliwa?

c) Przyjmijmy, że jeśli trafimy trójkę, wygramy 100 zł, czwórkę – 1000 zł, piątkę – 10 000 zł, a szóstkę – 10 000 000 zł. Jaka powinna być cena jednego zakładu, aby gra była sprawiedliwa?

## Powtórzenie

**7.** W tabeli obok przedstawiono rozkład pewnej zmiennej losowej. Wyznacz $x$, jeśli wartość oczekiwana tej zmiennej jest równa:

a) 0, b) 10, c) $-10$.

| $x_i$ | 20 | 30 | $x$ | $-60$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

**8.** Romek i Tomek grają w grę losową polegającą na rzucie kostką. Jeśli wypadnie co najmniej $n$ oczek, to Romek daje Tomkowi 10 żetonów. W przeciwnym wypadku Tomek daje Romkowi $x$ żetonów. Oblicz $x$, jeśli wiadomo, że gra jest sprawiedliwa oraz: a) $n = 6$, b) $n = 5$.

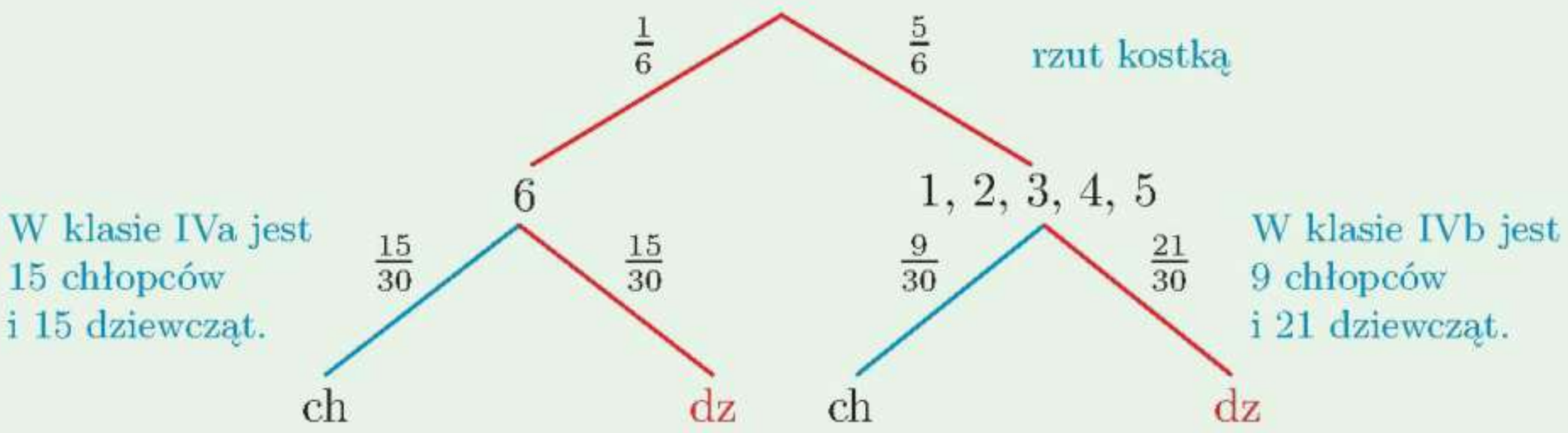
# 1.12. Zagadnienia uzupełniające

## Doświadczenia wieloetapowe

**Przykład 1**

W klasie IVa jest 15 chłopców i 15 dziewcząt, w klasie IVb jest 9 chłopców i 21 dziewcząt. Rzucamy kostką: jeśli wypadnie szóstka, to losujemy jedną osobę z klasy IVa, w przeciwnym razie losujemy jedną osobę z klasy IVb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaną osobą będzie dziewczyna.

Przedstawiamy na drzewie ilustrację tego doświadczenia.




Zdarzeniu $A$ polegającemu na wylosowaniu dziewczyny sprzyja wyrzucenie 6 oczek i wylosowanie dziewczyny z klasy IVa oraz wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 6 i wylosowanie dziewczyny z klasy IVb. Zatem:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{30} + \frac{5}{6} \cdot \frac{21}{30} = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{2}{3}$$

**1.** Jedna z osób uczących się w klasie IVa lub IVb ma otrzymać darmowy bilet do cyrku. W klasie IVa jest 20 chłopców i 10 dziewcząt, w klasie IVb – 12 chłopców i 18 dziewcząt. Rzucamy monetą: jeśli wypadnie orzeł, to losujemy osobę z klasy IVa, jeśli reszka – to z IVb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że bilet otrzyma dziewczyna.

**2.** Mamy dwie urny z kulami: w pierwszej są 3 kule białe i 3 czarne, w drugiej – 2 białe i 6 czarnych. Rzucamy kostką: jeśli wypadnie jedno oczko, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie – z drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

**3.** Mamy dwie urny z kulami: w pierwszej są 2 kule białe, 2 czarne i 2 zielone, w drugiej – 3 białe, 4 czarne i 1 zielona. Rzucamy kostką: jeśli liczba oczek jest podzielna przez 3, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie – z drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

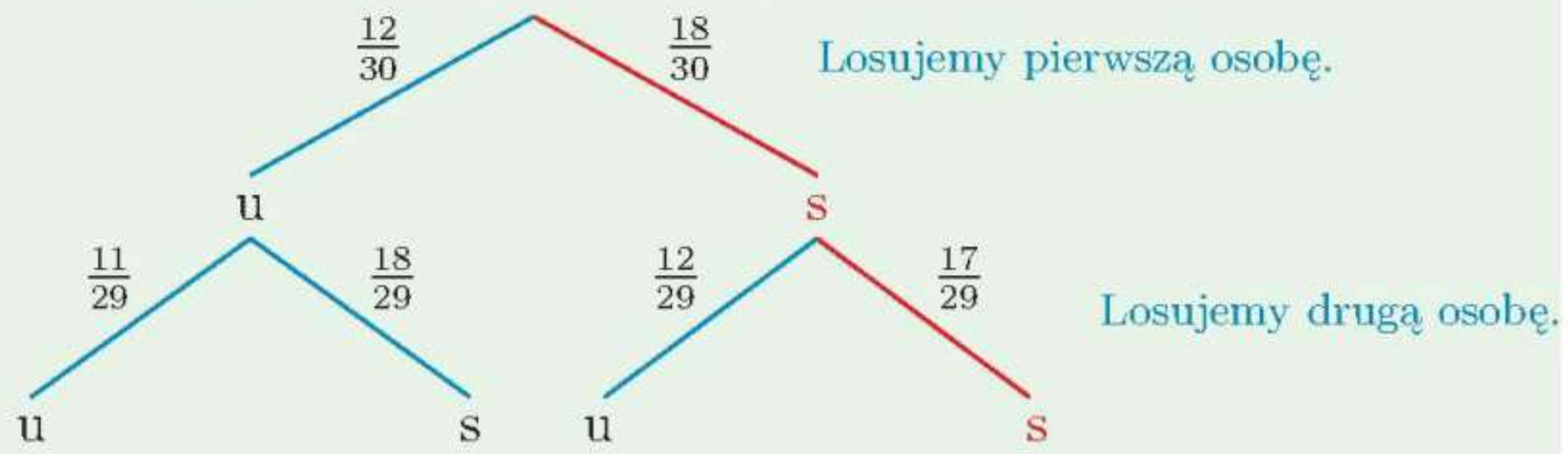
**4.** Mamy dwie urny z kulami: w pierwszej są 4 kule białe i 6 niebieskich, w drugiej – 3 białe, 5 żółtych i 2 niebieskie. Rzucamy monetą: jeśli wypadnie orzeł, to losujemy kulę z pierwszej urny, jeśli reszka – to z drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli:

a) białej, b) żółtej, c) niebieskiej.

**Przykład 2**

Wśród 30 uczestników wycieczki jest 12 uczniów i 18 studentów. Biuro turystyczne postanowiło zwrócić połowę kosztów wycieczki dwóm losowo wybranym osobom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zwrot otrzyma przynajmniej jeden uczeń.

Przebieg losowania ilustrujemy za pomocą drzewa.




Niech zdarzenie $A$ oznacza, że wśród wylosowanych dwóch osób jest przynajmniej jeden uczeń. Rozpatrzmy zdarzenie $A'$ – wśród wylosowanych nie ma ani jednego ucznia (na drzewie oznaczone kolorem czerwonym): $P(A') = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145}$. Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{51}{145} = \frac{94}{145} \approx 0{,}65$$

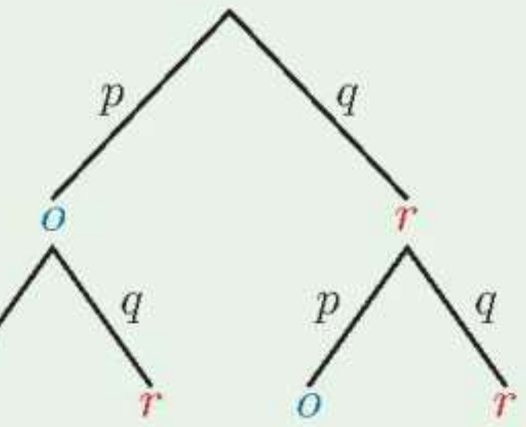
**5.** W pewnej firmie pracuje 36 mężczyzn i 12 kobiet. W ramach nagrody postanowiono ufundować wycieczkę do Świnoujścia dwóm losowo wybranym pracownikom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wycieczkę wygra co najmniej jedna kobieta.



**6.** Mamy trzy urny z kulami: w urnie $U_1$ są 3 kule białe, w urnie $U_2$ – 3 kule czarne, a w urnie $U_3$ – 3 białe i 1 czarna. Rzucamy dwa razy monetą: jeśli wypadną dwa orły, to losujemy kulę z urny $U_1$, jeśli dwie reszki – to z urny $U_2$. W pozostałych przypadkach losujemy kulę z urny $U_3$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

**Przykład 3**

Dla pewnej niesymetrycznej monety prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $p$, a prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki – $q$. Oblicz $p$ i $q$, jeśli prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ polegającego na wyrzuceniu co najmniej jednej reszki przy dwukrotnym rzucie tą monetą jest równe $\frac{8}{9}$.




Rozpatrzmy zdarzenie $A'$ polegające na wyrzuceniu dwóch orłów. Mamy $P(A') = p^2$ oraz:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

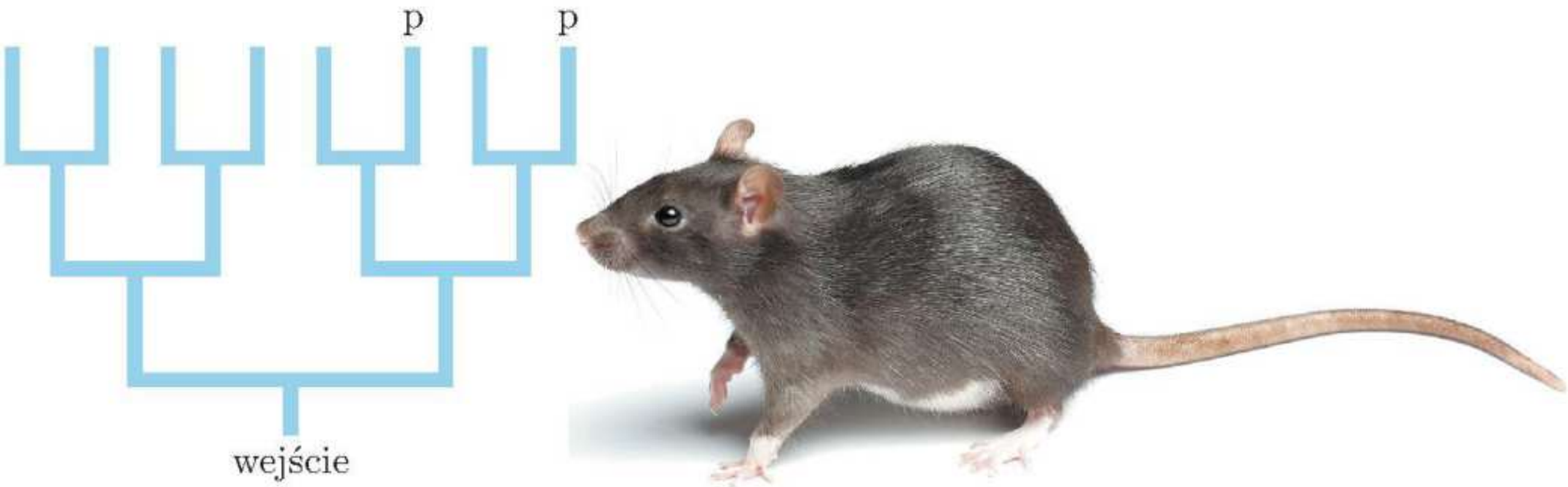
Zatem $p^2 = \frac{1}{9}$ i stąd $p = \frac{1}{3}$ oraz $q = \frac{2}{3}$.

**7.** Dla pewnej niesymetrycznej monety prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $p$, a prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki – $q$.

D a) Rzucamy dwukrotnie tą monetą. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pierwszym rzucie i reszki w drugim rzucie jest takie samo jak prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki w pierwszym rzucie i orła w drugim rzucie.

b) Rzucamy trzykrotnie tą monetą. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednego orła jest równe $\frac{37}{64}$. Oblicz $p$ i $q$.

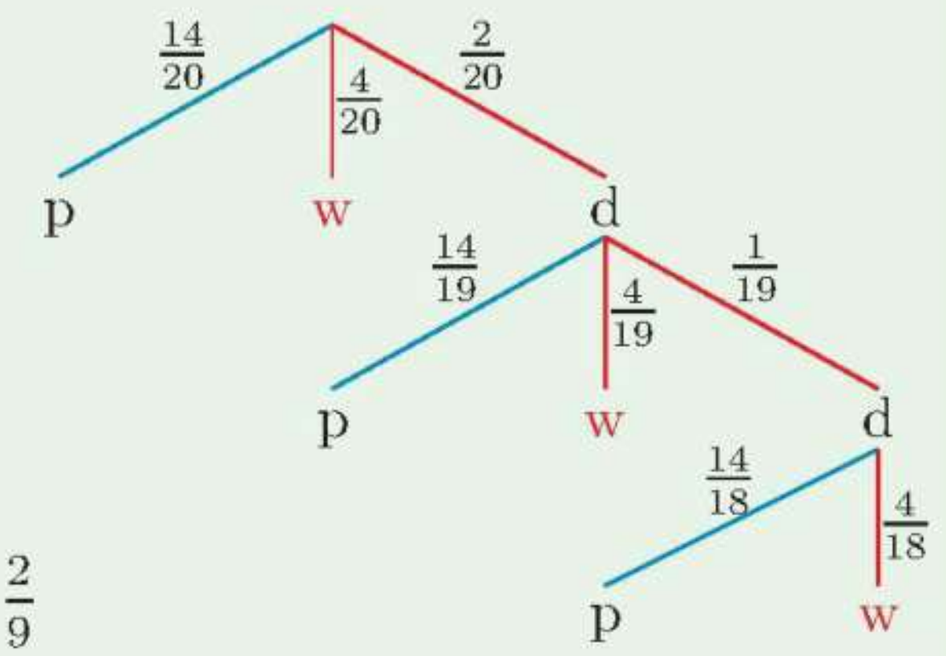
**8.** a) Pewien szczur wpuszczony do labiryntu na rozwidleniu dróg dwa razy częściej skręca w lewo niż w prawo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że szczur dotrze do pokarmu (oznaczonego na rysunku literą p).




b) Inny szczur wpuszczony do tego samego labiryntu na rozwidleniu dróg skręca w prawo w $x\%$ przypadków. Oblicz $x$, jeśli prawdopodobieństwo tego, że szczur dotrze do pokarmu, jest równe $\frac{9}{16}$.

**Przykład 4**

Na loterii jest 20 losów, w tym 4 wygrywające (oznaczone literą w) i 2 uprawniające do dalszego losowania (oznaczone literą d). Pozostałe losy są przegrywające (oznaczone literą p). Zakupiono jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.




Na drzewie przedstawiamy ilustrację możliwych wyników. Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na kupieniu losu wygrywającego. Wówczas:

$$P(A) = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{4}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

**9.** Wśród 20 losów loterii fantowej są 4 losy uprawniające do odebrania jednej z nagród (jest 1 nagroda główna i są 3 nagrody pocieszenia) oraz 2 losy uprawniające do dalszego losowania. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania nagrody pocieszenia, jeśli kupimy 1 los.

**10.** W pewnej klasie jest 10 chłopców i 20 dziewcząt. Liczba biletów do kina, które będą rozlosowane w tej klasie, jest równa liczbie orłów otrzymanych w rzucie dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że bilet otrzyma przynajmniej jeden chłopiec.

**11.** W dwóch urnach są po 3 kule białe i po 1 kuli czarnej, a trzecia zawiera $n$ kul czarnych. Z pierwszych dwóch urn losujemy po jednej kuli i wkładamy je do trzeciej urny. Następnie losujemy z tej urny jedną kulę.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula wylosowana z trzeciej urny będzie czarna, jeśli $n = 2$.

b) Dla jakiego $n$ wyciągnięcie z trzeciej urny czarnej kuli i wyciągnięcie z trzeciej urny białej kuli są zdarzeniami jednakowo prawdopodobnymi?

**12.** Rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł, rzucamy kostką symetryczną. W przeciwnym razie rzucamy kostką niesymetryczną. Rozkład prawdopodobieństwa wyników rzutu tą kostką podano w tabeli.

| Liczba oczek | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Prawdopodobieństwo | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ |

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek.

# Zestawy powtórzeniowe

## Zestaw I

**1.** Na ile sposobów można ustawić w kolejce:
a) 5 osób, b) 6 osób, c) 8 osób?

**2.** Na ile sposobów można ustawić w kolejce:
a) 1 kobietę i 7 mężczyzn tak, aby kobieta stała na początku kolejki,
b) 2 kobiety i 6 mężczyzn tak, aby kobiety stały na początku kolejki,
c) 2 kobiety i 3 mężczyzn tak, aby kobiety nie stały obok siebie?

**3.** Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2, 3, 8, 9 oraz:
a) żadna cyfra się nie powtarza, b) cyfry mogą się powtarzać?

**4.** Ile jest liczb czterocyfrowych:
a) w których zapisie mogą wystąpić tylko cyfry 5, 6 i 7,
b) nieparzystych, w których zapisie mogą wystąpić tylko cyfry 4, 5, 6 i 7?

**5.** Ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych o różnych cyfrach, jeśli w zapisie tych liczb użyto tylko cyfr 0, 1, 2, 3 i 4? Ile jest takich liczb nieparzystych?

**6.** Ile jest liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których zapisie:
a) występują tylko cyfry 4 i 5,
b) występuje dokładnie jedna cyfra 4 i dokładnie jedna cyfra 5?

**7.** Na ile sposobów cztery kule o numerach 1, 2, 3 i 4 można rozmieścić w trzech rozróżnialnych szufladach, a na ile – w pięciu?

**8.** Ile jest siedmiocyfrowych numerów telefonicznych zaczynających się od 45, a ile – zaczynających się od 345?

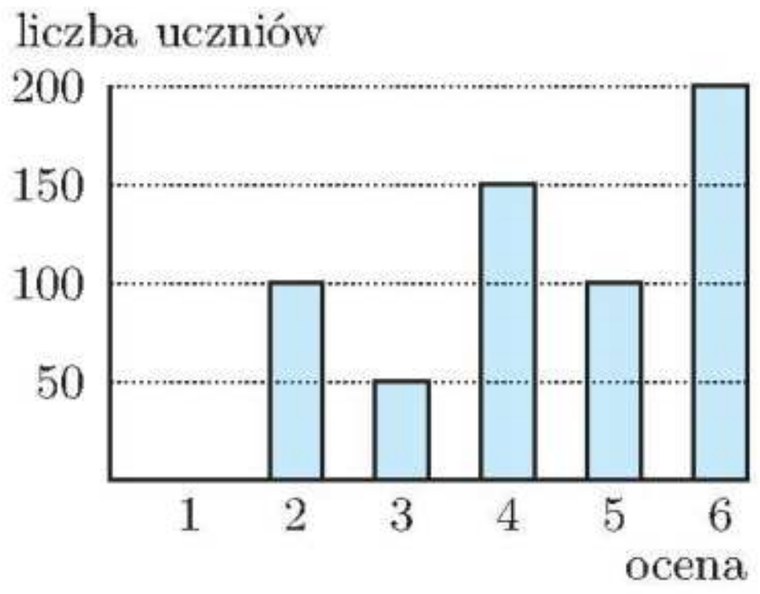
**9.** Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
$A$ – wypadły co najmniej dwie reszki,
$B$ – wypadły co najwyżej dwie reszki,
$C$ – wypadły trzy reszki.
a) Czy zdarzenia $A$ i $B$ się wykluczają?
b) Czy zdarzenia $B$ i $C$ są zdarzeniami przeciwnymi?
c) Czy zdarzenie $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym?

**10.** Rzucamy cztery razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
$A$ – orzeł wypadł co najwyżej raz,
$B$ – orzeł wypadł nie więcej razy niż reszka.
Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń $A$, $B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

**11.** W urnie jest osiem kul ponumerowanych od 1 do 8. Losujemy siedem razy po jednej kuli bez zwracania. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę siedmiocyfrową.
a) Ile jest takich liczb?
b) Ile jest takich liczb podzielnych przez 6?

**12.** Pewna pani ma cztery kapelusze: biały, zielony, czerwony i niebieski, pięć torebek: białą, zieloną, czerwoną, brązową i czarną oraz trzy szale: biały, zielony i czarny. Na ile sposobów ta pani może wybrać zestaw: kapelusz, torebka i szal tak, aby wszystkie trzy elementy zestawu nie były tego samego koloru?

**13.** W pewnej szkole zebrano dane dotyczące ocen semestralnych z wychowania fizycznego i przedstawiono je na diagramie słupkowym. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń otrzymał z tego przedmiotu:
a) ocenę celującą,
b) ocenę wyższą niż dostateczna.




**14.** Autobusem, który zatrzyma się jeszcze na 10 przystankach, jedzie 6 pasażerów. Pasażerowie opuszczają autobus na losowo wybranych przystankach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) każdy z nich wysiądzie na innym przystanku,
b) wszyscy wysiądą na tym samym przystanku.

**15.** Rzucamy dwa razy kostką, której dwie ścianki są zielone, a cztery czerwone. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia:
a) co najmniej raz ścianki zielonej, b) co najwyżej raz ścianki czerwonej.

**16.** Drużyna koszykówki składa się z pięciu zawodników, w tym kapitana drużyny. Do kontroli antydopingowej wybiera się losowo dwóch zawodników. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kapitan drużyny nie zostanie poddany kontroli. Ile wynosiłoby to prawdopodobieństwo, gdyby kontrolowanych było trzech zawodników?

## Zestaw II

**1.** Rzucamy dwa razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: $A$ – suma oczek jest równa 8, $B$ – iloczyn oczek jest równy 12. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń $A$, $B$, $A'$, $B'$, $A \cap B$ oraz $A \cup B$.

**2.** Rzucamy dwa razy kostką. Niech $x$ oznacza liczbę oczek uzyskanych w pierwszym rzucie, a $y$ – liczbę oczek uzyskanych w drugim rzucie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) suma $x + y$ jest liczbą większą od 10,

b) iloczyn $x \cdot y$ jest liczbą parzystą,

c) iloraz $\frac{y}{x}$ jest równy 2,

d) iloraz $\frac{y}{x}$ jest równy 3.

**3.** Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie użyto tylko cyfr 2, 3, 5 i 6, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba:

a) nie dzieli się przez 5,

b) jest nieparzysta lub dzieli się przez 5,

c) jest parzysta lub dzieli się przez 5.

**4.** Spośród wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie użyto tylko cyfr 0, 1 i 2, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba:

a) nie dzieli się przez 10,

b) jest nieparzysta lub większa od 200.

**5.** Łucznik, strzelając do tarczy, uzyskuje co najmniej 10 punktów z prawdopodobieństwem 0,4, a co najwyżej 10 punktów z prawdopodobieństwem 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że łucznik uzyska dokładnie 10 punktów.

**6.** W urnie jest 15 kul żółtych ponumerowanych od 1 do 15 oraz 9 kul zielonych ponumerowanych od 1 do 9. Losujemy 1 kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to kula o numerze:

a) parzystym,

b) nieparzystym,

c) podzielnym przez 3.

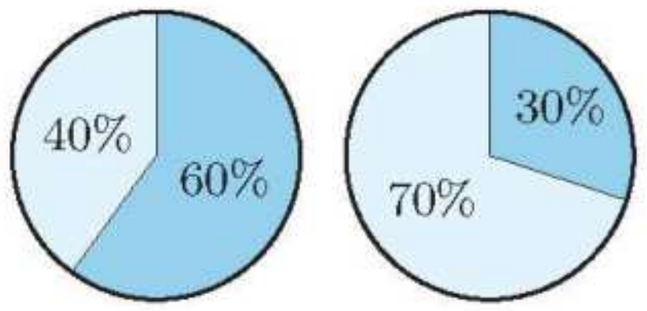
**7.** W urnie jest 5 kul białych, 5 zielonych i 5 czarnych. Kule każdego koloru zostały ponumerowane od 1 do 5. Losujemy 1 kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to:

a) kula biała lub czarna, mająca numer nieparzysty,

b) kula zielona lub kula o numerze parzystym.

**8.** Na pewnej loterii jest 100 losów, w tym 10 wygrywających 20 zł, 5 wygrywających 40 zł oraz 5 wygrywających 60 zł. W pierwszym losowaniu wyciągnęliśmy los wygrywający 60 zł. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia w drugim losowaniu takiego losu, że z obu losowań razem uzyskamy wygraną nie mniejszą niż 100 zł.

**9.** W pewnej klasie jest 15 dziewcząt i 10 chłopców. Uczniom tej klasy zadano pytanie: „Czy lubisz matematykę?". Na diagramach przedstawiono wyniki ankiety. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z tej klasy:




a) jest dziewczyną i lubi matematykę,

b) nie lubi matematyki.

**10.** Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli:

a) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ i $P(A \cap B) = 0{,}2$,

b) $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ i $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym.

**11.** Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$, jeśli:

a) $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}8$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym,

b) $P(A') = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{1}{6}$ i $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

**12.** Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \setminus B)$, jeśli:

a) $P(A) = 0{,}9$ i $P(A \cap B) = 0{,}5$, b) $P(B) = \frac{1}{2}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

**13.** Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej, której rozkład podano w tabeli.

a)

| $x_i$ | 30 | 20 | $-40$ | $-60$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

b)

| $x_i$ | 36 | 28 | $-48$ |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{12}$ |

**14.** Podczas gry rzucamy trzema monetami. Jeśli wypadną same orły, to wygrywamy 80 zł, jeśli wypadną dokładnie dwa orły, to wygrywamy $x$ zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 50 zł. Wyznacz $x$ tak, aby gra była sprawiedliwa.

**15.** Podczas gry rzucamy dwiema kostkami. Jeśli na obu kostkach wypadnie parzysta liczba oczek, to wygrywamy 16 zł. Jeśli suma wyrzuconych oczek będzie nieparzysta, to wygrywamy 24 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 60 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

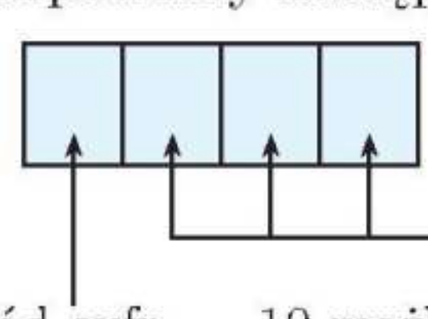
## Sposób na zadanie

**Przykład**

Losujemy jedną liczbę spośród wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba będzie nieparzysta i w jej zapisie dokładnie dwa razy wystąpi cyfra 4 i jeden raz cyfra 5.

Oznaczmy przez $\Omega$ zbiór zdarzeń elementarnych polegających na wylosowaniu liczby naturalnej czterocyfrowej.

Aby obliczyć moc zbioru $\Omega$, rozpatrzmy następujący diagram.



9 możliwości wyboru cyfry spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

10 możliwości wyboru cyfry spośród cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

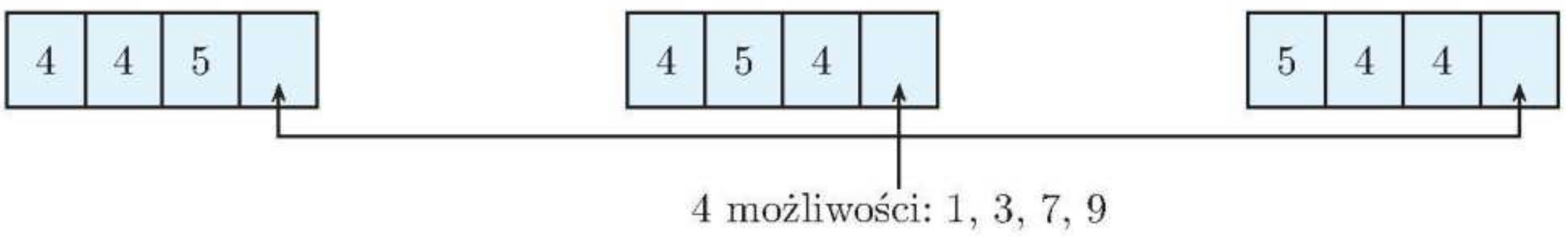
Zatem korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

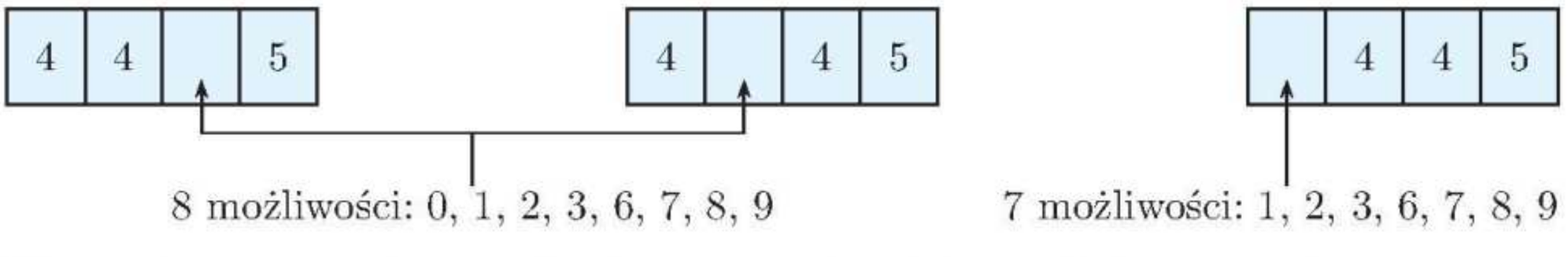
Niech $A$ oznacza wylosowanie czterocyfrowej liczby nieparzystej, w której zapisie występują dwie cyfry 4 i jedna cyfra 5.

Zauważmy, że liczba jest nieparzysta, gdy jej ostania cyfra jest jedną spośród cyfr 1, 3, 5, 7, 9.

Rozpatrzmy sytuacje, gdy dwie cyfry 4 i jedna cyfra 5 występują na pierwszych trzech pozycjach. Oto możliwe przypadki:




Jeśli cyfra 5 znajduje się na ostatniej pozycji, to mamy następujące przypadki:




Korzystamy z reguły mnożenia oraz reguły dodawania i otrzymujemy:

$$\overline{\overline{A}} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 7 = 35$$

Zatem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{35}{9000} = \frac{7}{1800}$.

**Odpowiedź:** Prawdopodobieństwo podanego zdarzenia jest równe $\frac{7}{1800}$.

## Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

**1.** Liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie mogą wystąpić jedynie cyfry 2 i 3, jest:

**A.** $7 \cdot 8^2$, **B.** 58, **C.** 1000, **D.** 1024.

**2.** Liczb pięciocyfrowych, w których zapisie pierwsza i ostatnia cyfra są takie same, jest:

**A.** $10^4$, **B.** $9 \cdot 10^3$, **C.** $9^2 \cdot 10^2$, **D.** $9^2 \cdot 10^3$.

**3.** Rozpatrzmy czterocyfrowe kody, w których cyfry się nie powtarzają. Ile jest takich kodów, jeśli występują w nich jedynie cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**A.** 360 **B.** 720 **C.** $6^4$ **D.** $4^6$

**4.** Z cyfr 1, 2, 3 i 4 utworzono takie czterocyfrowe kody, że suma pierwszych dwóch cyfr jest parzysta, a suma ostatnich dwóch jest nieparzysta (cyfry mogą się powtarzać). Takich kodów jest:

**A.** $2^4$, **B.** $2^5$, **C.** $3^4$, **D.** $4^3$.

**5.** Rzucamy trzykrotnie monetą. Zdarzenie $A$ polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby orłów, a zdarzenie $B$ – na wyrzuceniu większej liczby orłów niż reszek. Wtedy:

**A.** $P(A) > P(B)$, **C.** $P(A) \leqslant P(A')$,

**B.** $P(A) < P(B)$, **D.** $P(B) > P(B')$.

**6.** Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie $A$ polega na tym, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą. Wtedy:

**A.** $P(A) = \frac{1}{2}$, **B.** $P(A) = \frac{1}{4}$, **C.** $P(A') = \frac{1}{2}$, **D.** $P(A') = \frac{1}{4}$.

**7.** Niech $A, B \subset \Omega$. Jeśli $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ oraz $A \subset B$, to:

**A.** $P(A \cap B) = 0$, **C.** $P(A \cup B) = \frac{1}{12}$,

**B.** $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, **D.** $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

**8.** Rzucamy dwa razy kostką, na której ściankach znajdują się następujące liczby oczek: 1, 2, 3, 4, 6, 6. Prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest większa od 10, jest równe:

**A.** $\frac{1}{4}$, **B.** $\frac{1}{6}$, **C.** $\frac{1}{9}$, **D.** $\frac{1}{12}$.

**9.** Przestawiamy w sposób losowy cyfry liczby 24689. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że cyfra 4 zostanie na swoim miejscu?

**A.** $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{3}{4}$

## Zadania krótkiej odpowiedzi

### Zadanie 1 (2 pkt)

Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń $A$ i $B$, jeśli $P(A) = 0{,}6$, $P(B') = 0{,}3$ oraz $P(A \cap B) = 0{,}4$.

### Zadanie 2 (2 pkt)

Z cyfr $0, 1, 2, \ldots, n$ tworzymy liczby trzycyfrowe, w których zapisie cyfry się nie powtarzają. Wyznacz $n$, jeśli wiadomo, że wszystkich takich liczb jest 100.

### Zadanie 3 (2 pkt)

Ustal, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 5, 7, 9.

### Zadanie 4 (2 pkt)

W urnie jest pięć kul o numerach 1, 2, 3, 4 i 5. Losujemy kolejno cztery kule i zwracamy za każdym razem wylosowaną kulę do urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie wylosowane kule mają numery nieparzyste.

### Zadanie 5 (2 pkt)

Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie w jednym z rzutów wypadną 3 lub 4 oczka.

## Zadania rozszerzonej odpowiedzi

### Zadanie 6 (4 pkt)

Oblicz, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb naturalnych, w których zapisie dokładnie dwa razy występuje cyfra 6.

### Zadanie 7 (4 pkt)

W urnie jest pięć kul o numerach 1, 2, 3, 4 i 5. Losujemy trzy kule bez zwracania. Numery wylosowanych kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez 2.

### Zadanie 8 (4 pkt)

Spośród liczb sześciocyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez 4 lub 5.

### Zadanie 9 (4 pkt)

Na loterii jest 200 losów, z tego 2 wygrywające po 450 zł i 4 wygrywające po 250 zł. Kupujemy jeden los za 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej na tej loterii. Uwzględnij cenę zakupu losu.

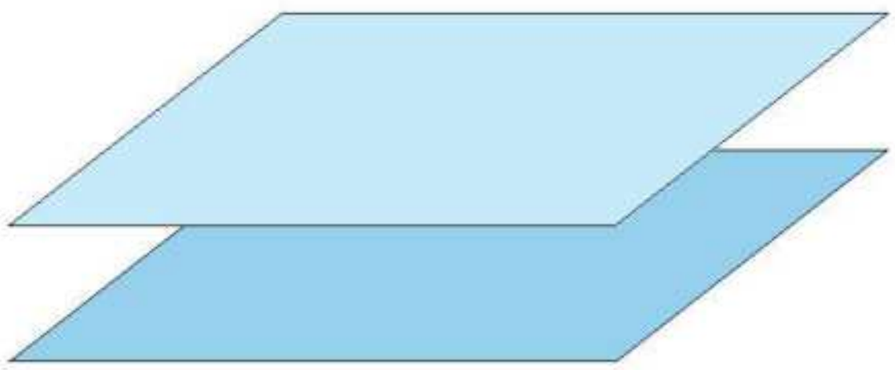


# 2 Graniastosłupy i ostrosłupy

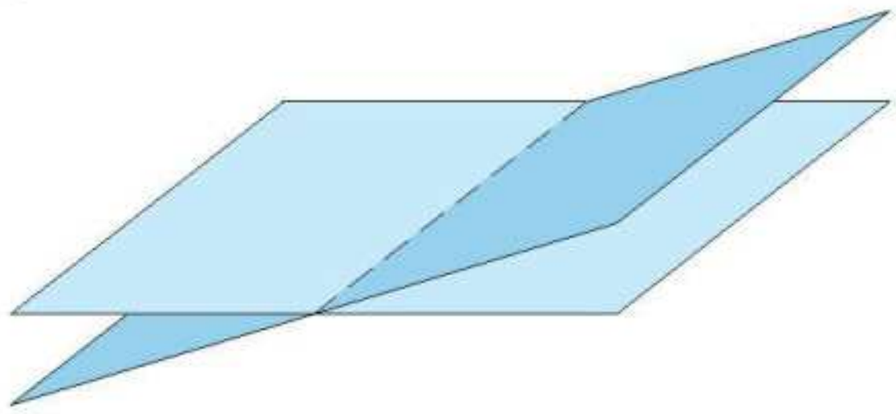
Piramidy w Gizie zbudowano na przełomie XXVI i XXV w. p.n.e. Największa z nich – piramida Cheopsa (po lewej na zdjęciu) – miała około 146 m wysokości, a jej podstawą był kwadrat o boku 230 m. Aby obliczyć objętość piramidy, korzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$, gdzie $P_p$ jest polem podstawy ostrosłupa, a $H$ – jego wysokością. Objętość piramidy Cheopsa wynosiła około $2\,600\,000\ \mathrm{m}^3$. Obecnie jej wymiary są nieco mniejsze.

# 2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

## Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn



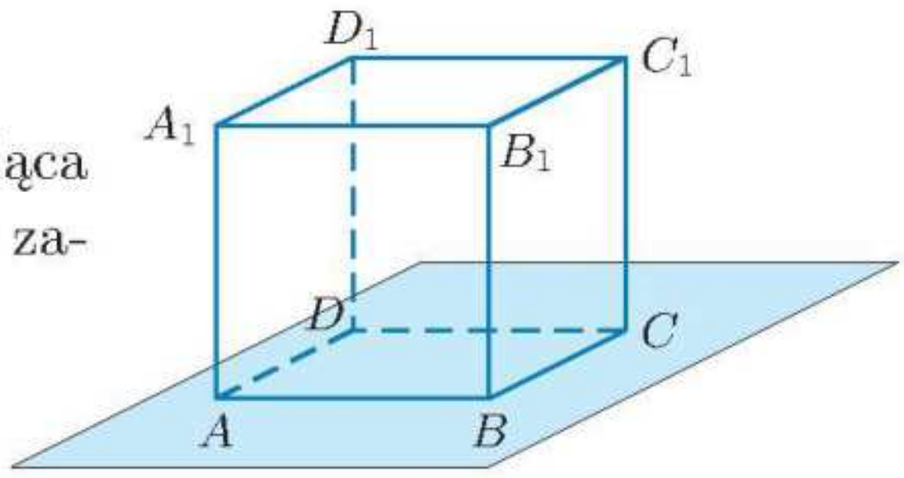
Płaszczyzny **równoległe** – nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Płaszczyzny **przecinające się** – ich częścią wspólną jest prosta.

### Przykład 1

W sześcianie (rysunek obok) płaszczyzna zawierająca podstawę $ABCD$ jest równoległa do płaszczyzny zawierającej podstawę $A_1B_1C_1D_1$.




### Ćwiczenie 1

Wskaż ścianę sześcianu (rysunek powyżej) zawartą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny zawierającej ścianę:

a) $ADD_1A_1$,

b) $DCC_1D_1$.

Zauważmy, że aby opisać płaszczyznę, wystarczy podać trzy niewspółliniowe punkty należące do niej, gdyż przez każde trzy punkty nieleżące na jednej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

### Ćwiczenie 2

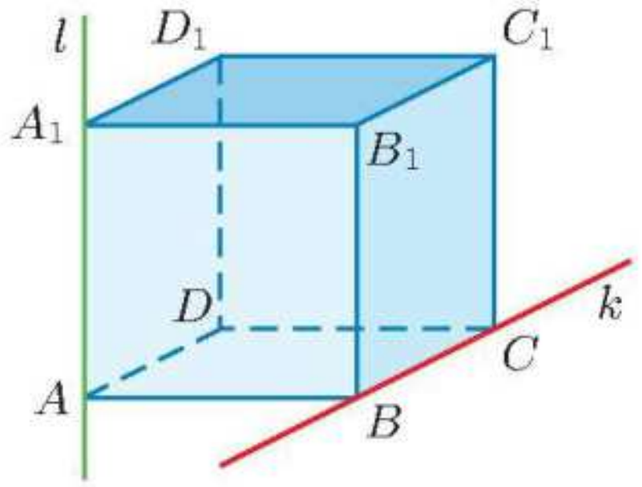
Do płaszczyzn $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ należą wymienione wierzchołki sześcianu (rysunek poniżej).

$\mathcal{P}_1$: $A, D, D_1$

$\mathcal{P}_2$: $A, B, D$

$\mathcal{P}_3$: $B, B_1, C_1$

$\mathcal{P}_4$: $B, B_1, A_1$

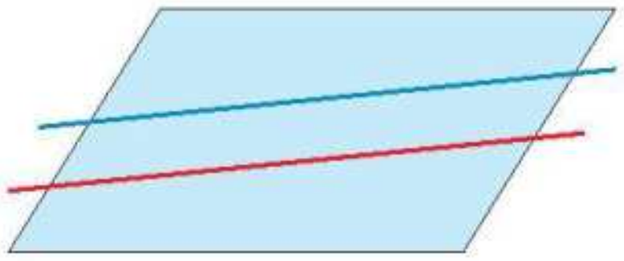



Które z tych płaszczyzn przecinają się wzdłuż prostej $l$, a które – wzdłuż prostej $k$?

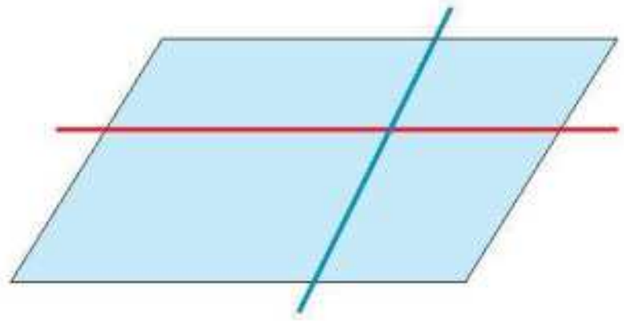
### Ćwiczenie 3

Ściany sześcianu są zawarte w sześciu różnych płaszczyznach. Wskaż dowolne trzy wierzchołki sześcianu (rysunek powyżej) należące do płaszczyzny przecinającej te sześć płaszczyzn.

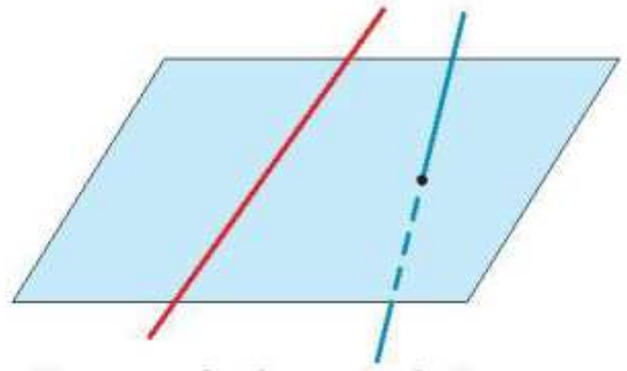
## Wzajemne położenie dwóch prostych



Proste **równoległe** leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Proste **przecinające się** leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny.

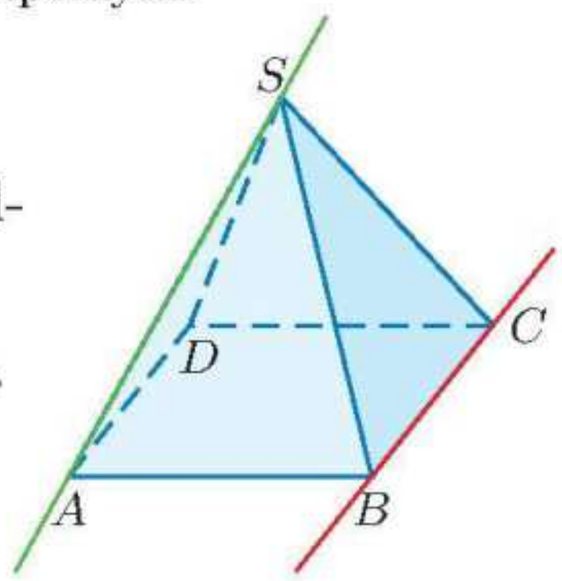


Proste **skośne** nie leżą w jednej płaszczyźnie, zatem nie mają punktów wspólnych.

### Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat.

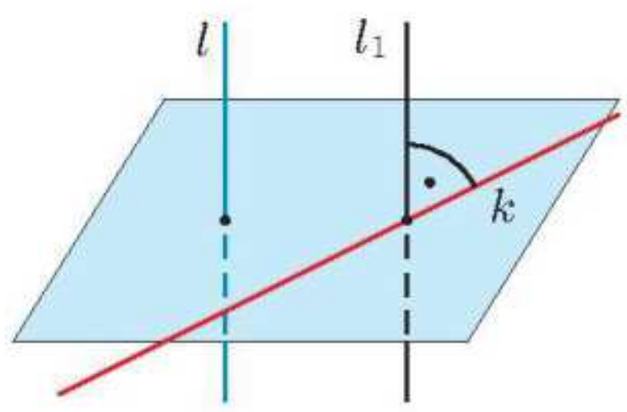
- Proste zawierające krawędzie $AB$ i $DC$ są równoległe.
- Proste zawierające krawędzie $AS$ i $BC$ są skośne.




### Ćwiczenie 4

Które krawędzie ostrosłupa (rysunek powyżej) zawierają się w prostych skośnych do prostej zawierającej krawędź $AB$?

Mówimy, że prosta $l$, skośna do prostej $k$, jest do prostej $k$ **prostopadła**, gdy istnieje prosta $l_1$ równoległa do prostej $l$ i przecinająca prostą $k$ pod kątem prostym.
Zauważmy, że każda prosta równoległa do prostej $l_1$ jest prostopadła do prostej $k$.



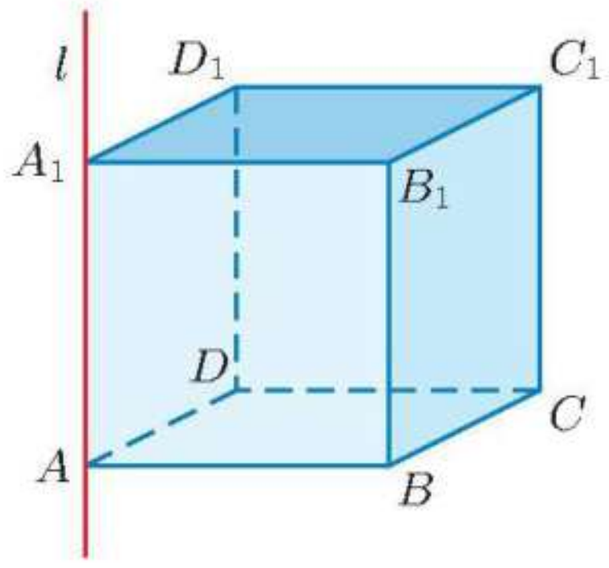

**Uwaga.** Proste prostopadłe są skośne lub się przecinają (gdy leżą w jednej płaszczyźnie).

### Ćwiczenie 5

Prosta $l$ zawiera krawędź $AA_1$ sześcianu (rysunek obok). Wskaż proste zawierające pozostałe krawędzie tego sześcianu, które są:

a) równoległe do prostej $l$,

b) prostopadłe do prostej $l$.

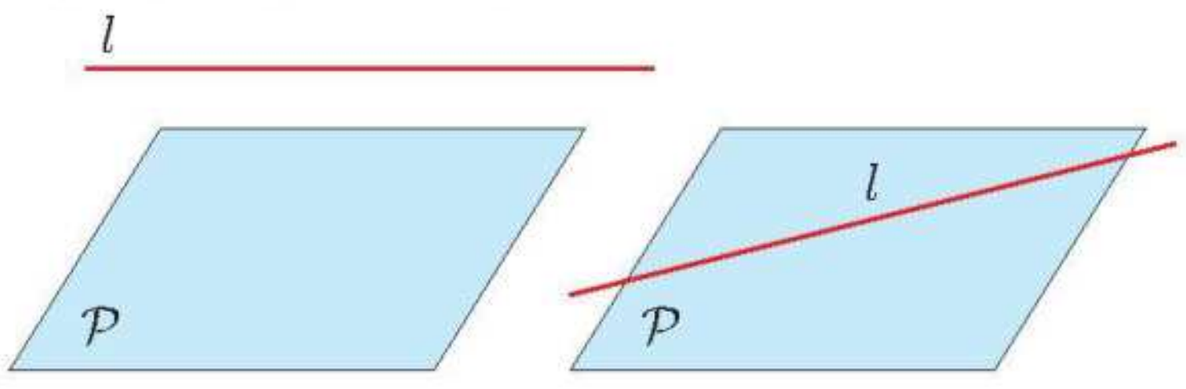



### Ćwiczenie 6

W sześcianie (rysunek powyżej) wskaż pary wierzchołków, które wyznaczają proste skośne nieprostopadłe do prostej $l$.

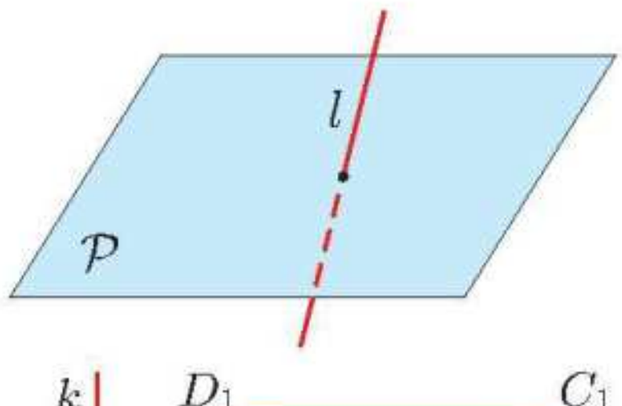
## Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Prostą $l$ nazywamy **równoległą** do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli nie ma ona punktów wspólnych z tą płaszczyzną lub jest w niej zawarta.



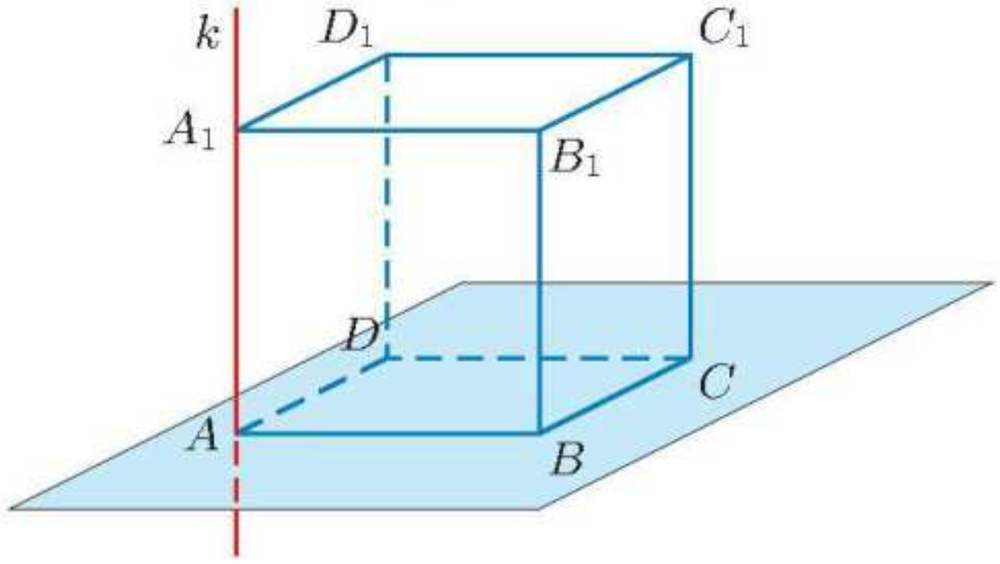

Mówimy, że prosta $l$ jest **prostopadła** do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie $\mathcal{P}$.

Jeśli prosta $l$ ma z płaszczyzną $\mathcal{P}$ dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że prosta $l$ **przecina** płaszczyznę $\mathcal{P}$.




### Przykład 3

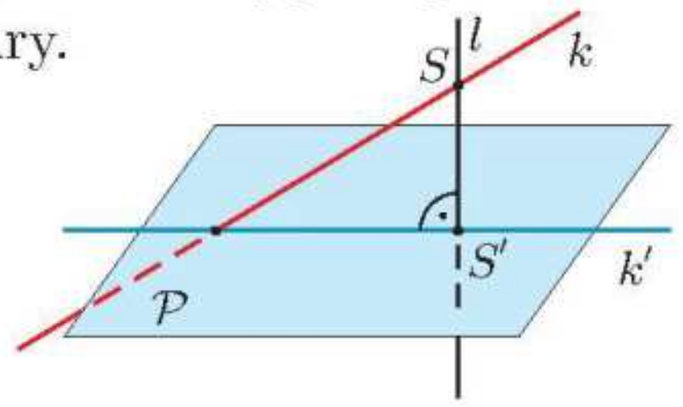
W sześcianie (rysunek obok) prosta $k$ zawierająca krawędź $AA_1$ jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej podstawę $ABCD$.




Dla dowolnego punktu $S$ możemy poprowadzić prostą $l$ przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$. Punkt przecięcia prostej $l$ z płaszczyzną $\mathcal{P}$ nazywamy **rzutem prostokątnym** punktu $S$ na płaszczyznę $\mathcal{P}$.

Rzutem prostokątnym figury na płaszczyznę jest figura składająca się z rzutów prostokątnych wszystkich punktów rzutowanej figury.

Na rysunku obok punkt $S'$ jest rzutem prostokątnym punktu $S$ na płaszczyznę $\mathcal{P}$, a prosta $k'$ jest rzutem prostokątnym prostej $k$ na tę płaszczyznę.

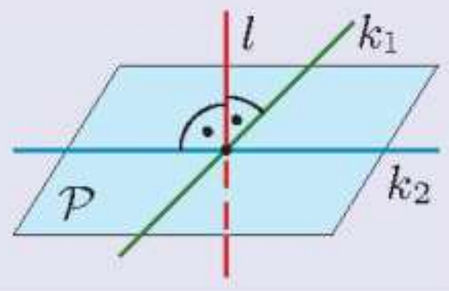



### D Ćwiczenie 7

Odcinek $R_1S_1$ jest rzutem prostokątnym odcinka $RS$ na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Czy odcinek $R_1S_1$ może być dłuższy od odcinka $RS$? Sformułuj i udowodnij odpowiednie twierdzenie.

Aby wykazać, że prosta jest prostopadła do płaszczyzny, nie musimy wykazywać, że jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie. Mówi o tym **twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny**.

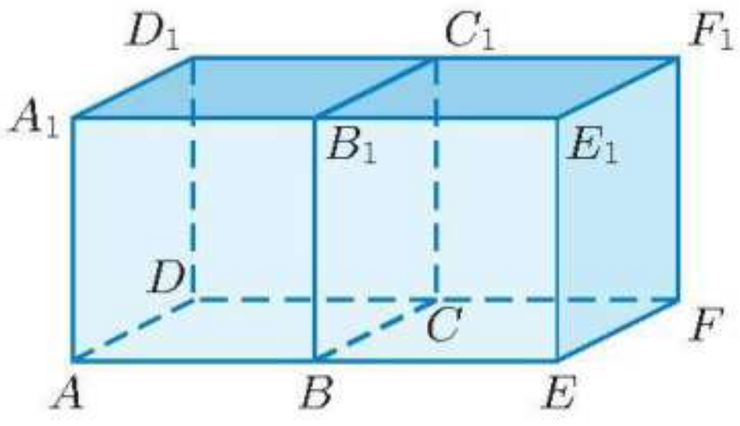
Jeśli prosta $l$ jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie $\mathcal{P}$, to jest ona prostopadła do płaszczyzny $\mathcal{P}$.



## Zadania

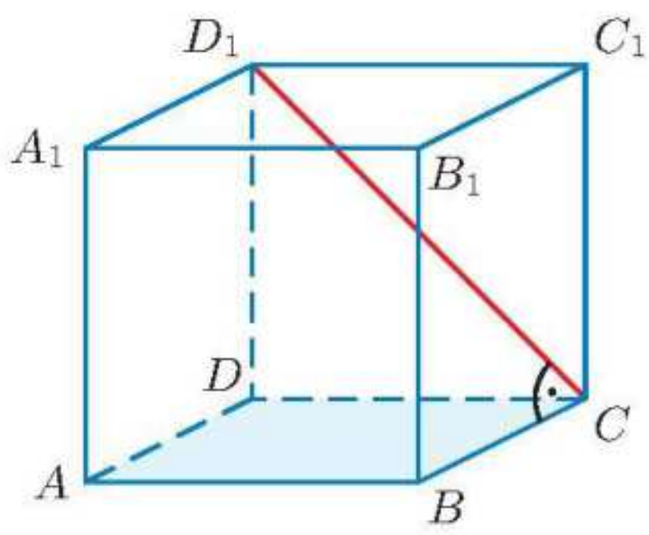
**1.** Dwa sześciany mają wspólną ścianę $BCC_1B_1$ (rysunek obok). Wskaż pary wierzchołków tych sześcianów wyznaczające proste równoległe oraz pary wierzchołków wyznaczające proste prostopadłe do prostej:

a) $EF_1$, b) $A_1C_1$.




**2.** a) Które krawędzie sześcianu przedstawionego na rysunku obok są prostopadłe do płaszczyzny zawierającej podstawę $ABCD$?

D b) Odcinek $CD_1$ tworzy kąt prosty z krawędzią podstawy $BC$. Czy odcinek $CD_1$ jest prostopadły do podstawy $ABCD$? Odpowiedź uzasadnij.




**3.** Wskaż proste zawierające krawędzie sześcianu (rysunek powyżej) i prostopadłe do prostej $DB$. Które z tych prostych przecinają prostą $DB$, a które są do niej skośne?

**4.** Przyjmijmy, że krawędź sześcianu (rysunek powyżej) ma długość 2. Wskaż przykładowy odcinek, którego końce należą do krawędzi sześcianu, a długości jego rzutów prostokątnych na ściany sześcianu przyjmują wartości:

a) $\sqrt{5}$ i $2\sqrt{2}$, b) 2 i $2\sqrt{2}$, c) 1, 2 i $\sqrt{5}$, d) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$.

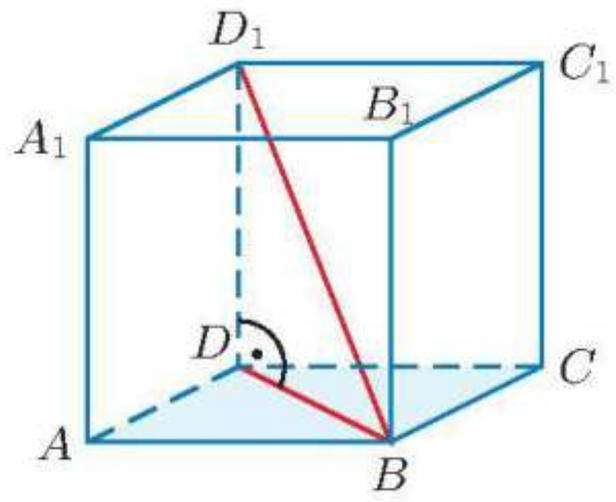
D **5.** Dla prostych $k$, $l$, $m$ leżących w tej samej płaszczyźnie zachodzi własność: jeśli $k \perp l$ i $l \perp m$, to $k \parallel m$. Uzasadnij, że analogiczna własność nie zachodzi dla prostych w przestrzeni.

## Powtórzenie

**6.** Prosta $k$ zawiera jedną z krawędzi sześcianu. Ile różnych płaszczyzn przechodzących przez dowolne cztery wierzchołki tego sześcianu przecina się wzdłuż prostej $k$?

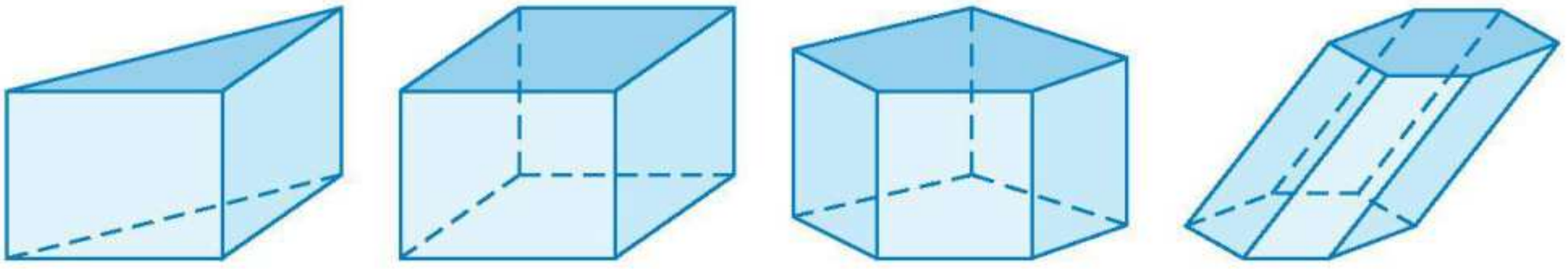
**7.** Rzutem prostokątnym odcinka $D_1B$ na ścianę $ABCD$ sześcianu jest odcinek $DB$ (rysunek obok). Wskaż odcinek będący rzutem prostokątnym odcinka $D_1B$ na ścianę:

a) $A_1B_1C_1D_1$, b) $ADD_1A_1$, c) $BCC_1B_1$.



## 2.2. Graniastosłupy

**Graniastosłup** to wielościan, którego dwie ściany, zwane **podstawami**, są przystającymi wielokątami zawartymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane **ścianami bocznymi**, są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.



Jeśli krawędzie boczne graniastosłupa są prostopadłe do podstaw, to graniastosłup nazywamy **prostym**, w przeciwnym razie graniastosłup nazywamy **pochyłym**. Ściany boczne dowolnego graniastosłupa prostego są prostokątami.

Dowolny odcinek, który łączy płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i jest do nich prostopadły, nazywamy **wysokością** graniastosłupa.
**Powierzchnię boczną** graniastosłupa stanowią wszystkie jego ściany boczne.

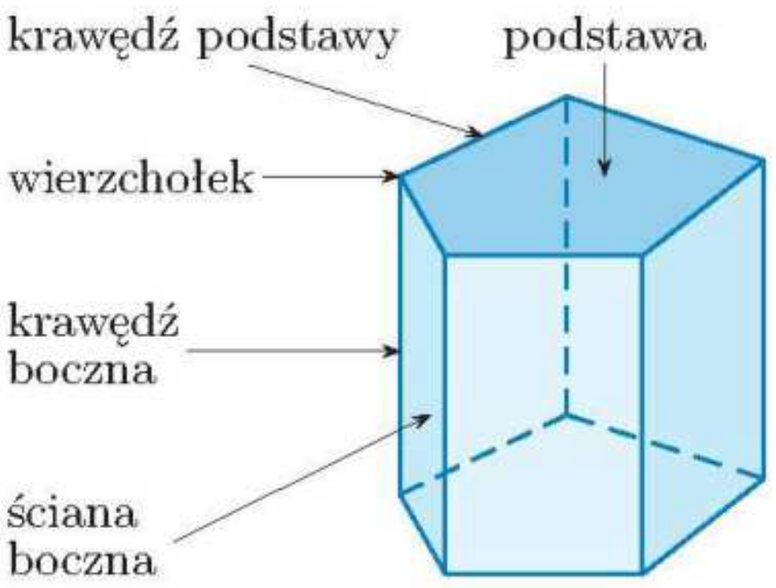
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

### Ćwiczenie 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego, którego wysokość jest równa 30 cm, a podstawą jest trójkąt o bokach 6 cm, 8 cm i 10 cm.

W zależności od tego, jakim wielokątem jest podstawa graniastosłupa, mówimy o graniastosłupie trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. Graniastosłup pięciokątny przedstawiony na rysunku obok ma 7 ścian (2 podstawy i 5 ścian bocznych), 15 krawędzi (10 krawędzi podstawy i 5 krawędzi bocznych) oraz 10 wierzchołków.




### Ćwiczenie 2

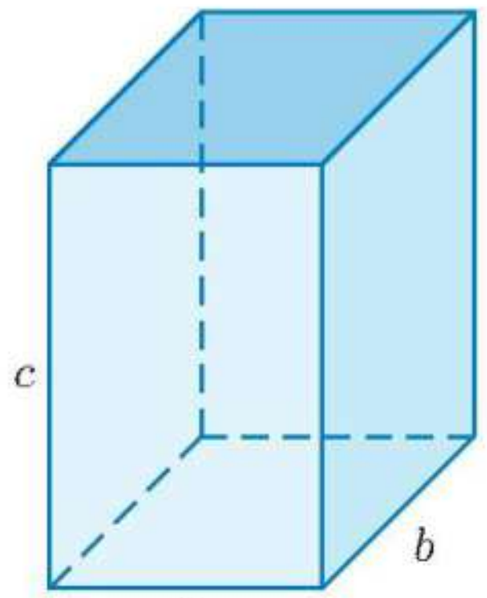
Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupa:
a) trójkątnego, b) czworokątnego, c) sześciokątnego.

### Ćwiczenie 3

Czy istnieje graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa: a) 21 b) 25?

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt, nazywamy **prostopadłościanem**.

**Uwaga.** Za podstawę prostopadłościanu możemy przyjąć jego dowolną ścianę.




Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach $a$, $b$, $c$ opisuje wzór:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

### Ćwiczenie 4

Długości krawędzi podstawy prostopadłościanu są równe 4 cm i 6 cm. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jego:

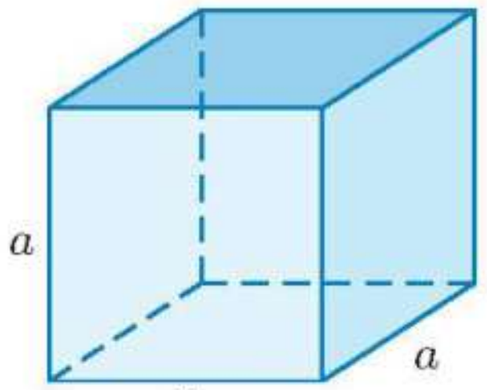
a) pole powierzchni całkowitej wynosi 100 $\text{cm}^2$,

b) pole powierzchni bocznej stanowi 60% pola powierzchni całkowitej.

Prostopadłościan o wszystkich krawędziach równych nazywamy **sześcianem**. Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi $a$ jest równe $6a^2$.

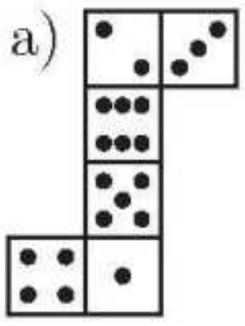
### Ćwiczenie 5

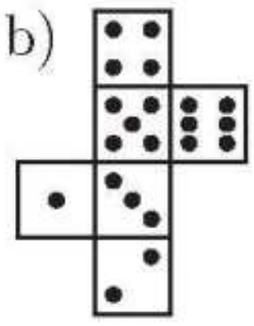
Do wykonania modelu sześcianu zużyto 1620 $\text{cm}^2$ kartonu, z czego 20% stanowiły zakładki. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

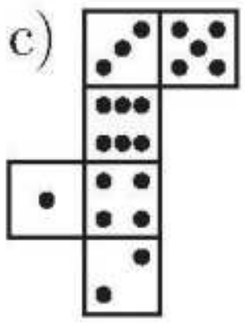


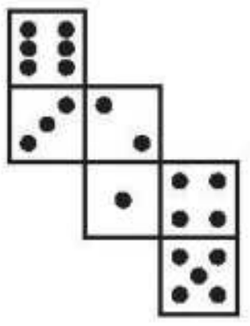

### Ćwiczenie 6

Suma oczek znajdujących się na przeciwległych ścianach sześciennej kostki do gry jest równa 7. Czy przedstawiona siatka może być siatką tej kostki?

a) 

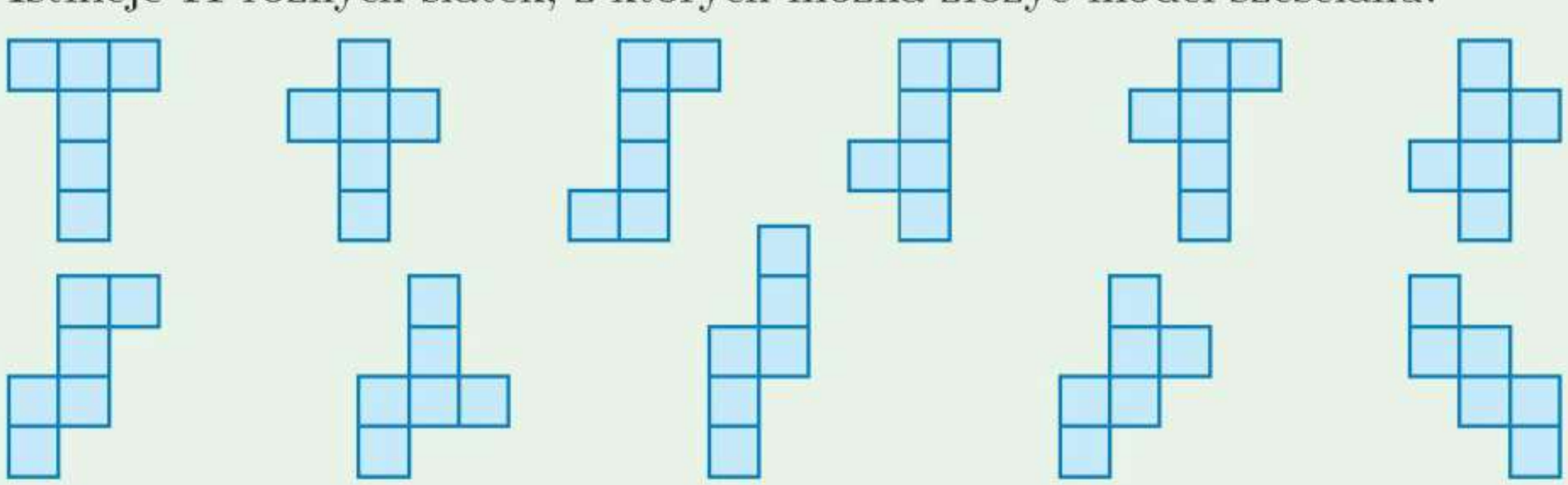
b) 

c) 

d) 

**Czy wiesz, że...**

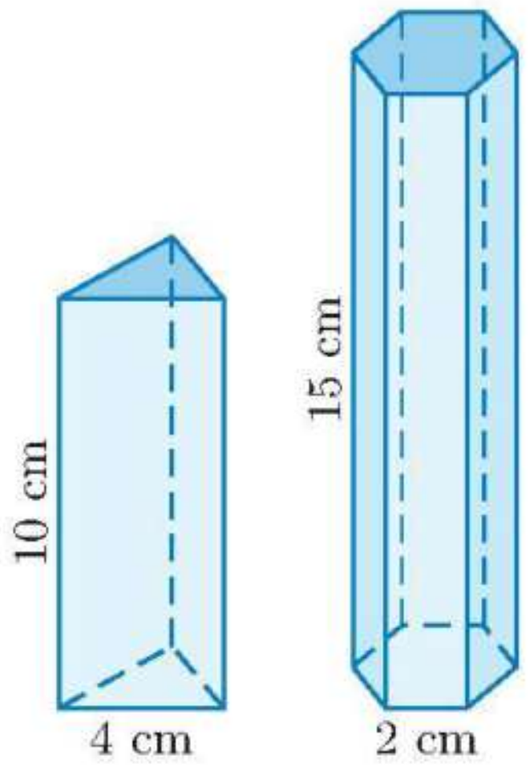
Istnieje 11 różnych siatek, z których można złożyć model sześcianu.



Graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, nazywamy **prawidłowym**.

### D Ćwiczenie 7

Wymiary dwóch graniastosłupów prawidłowych, trójkątnego i sześciokątnego, podano na rysunku obok. Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej jednego z tych graniastosłupów jest o 50% większe od pola powierzchni całkowitej drugiego.




## Zadania

**1.** Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prostego jest równa 78 cm. Jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 cm i 12 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

**2.** Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o obwodzie 24 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa przeciwprostokątnej podstawy, a pole największej ściany bocznej jest równe 100 $cm^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego wielościanu.

**3.** Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego o wysokości 8 cm, którego podstawą jest:

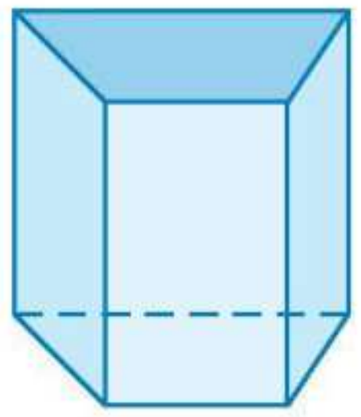
a) romb o kącie ostrym $30^\circ$ i boku długości 12 cm,

b) romb o przekątnych długości 15 cm i 20 cm.

**4.** Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o bokach długości 12 cm, 5 cm, 6 cm i 5 cm. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że:

a) jego pole powierzchni bocznej jest równe 560 $cm^2$,

b) jego pole powierzchni całkowitej jest równe 492 $cm^2$.



**5.** Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 5 cm, a jego pole powierzchni bocznej wynosi 100 $cm^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeśli jego podstawą jest trapez równoramienny o kącie ostrym $60^\circ$ i podstawach, których długości są w stosunku $2:1$.

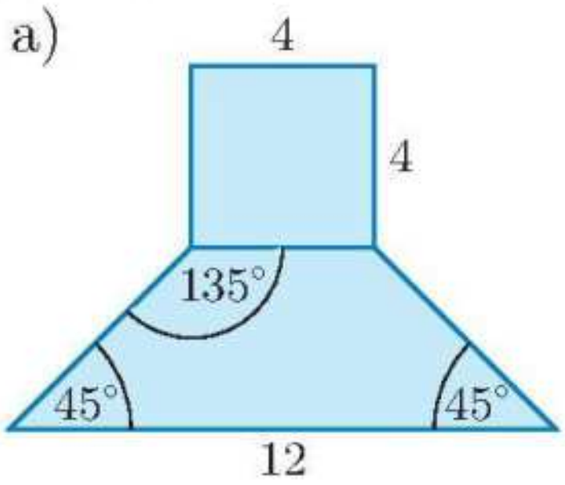
**6.** Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają równe długości, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe $96 + 48\sqrt{3}$. Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

**7.** Prostokąt o bokach długości 2 cm i 4 cm jest jedną ze ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa oraz narysuj jego siatkę (rozpatrz dwie możliwości).

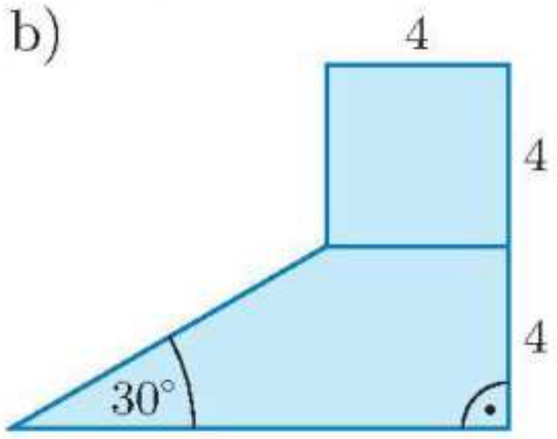
**8.** Ściana boczna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego to prostokąt o bokach długości $x$ cm i $(x+1)$ cm oraz przekątnej długości $(x+2)$ cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa oraz narysuj jego siatkę (rozpatrz dwie możliwości).

**9.** Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

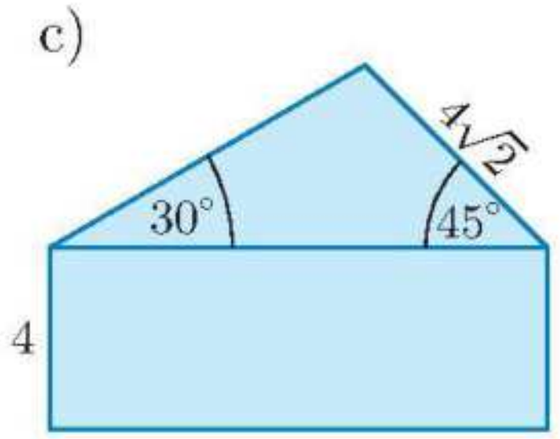
a)




b)




c)



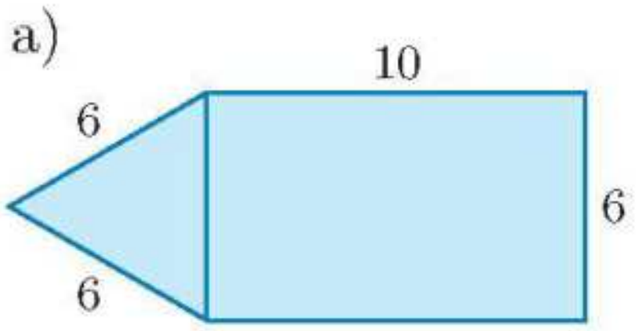

**10.** Dany jest prostopadłościan, którego wymiary są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie 10 i ilorazie $\frac{1}{2}$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu oraz jego pole powierzchni całkowitej.

## Powtórzenie

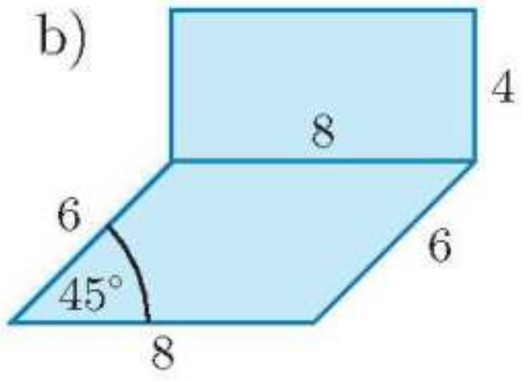
**11.** Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 11 cm jest trójkąt równoramienny o jednym z kątów $120^\circ$ i ramionach długości 8 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

**12.** Na rysunku poniżej przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prostego. Narysuj całą siatkę tego graniastosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

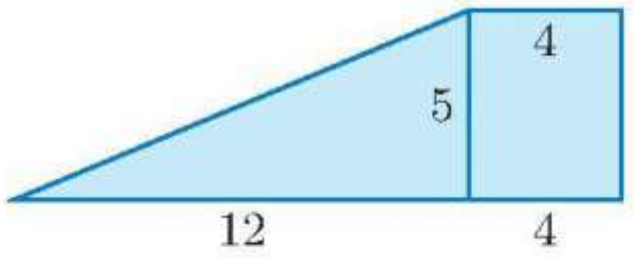
a)




b)




c)




**13.** Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego $n$-kątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 2 cm, i oblicz jego pole powierzchni całkowitej:
a) dla $n = 3$, b) dla $n = 4$, c) dla $n = 6$.

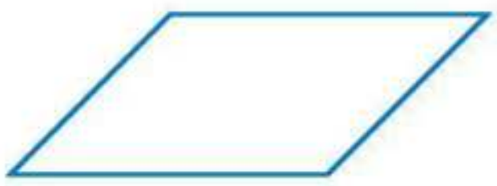
Warto powtórzyć

## Przedstawianie graniastosłupów na rysunkach

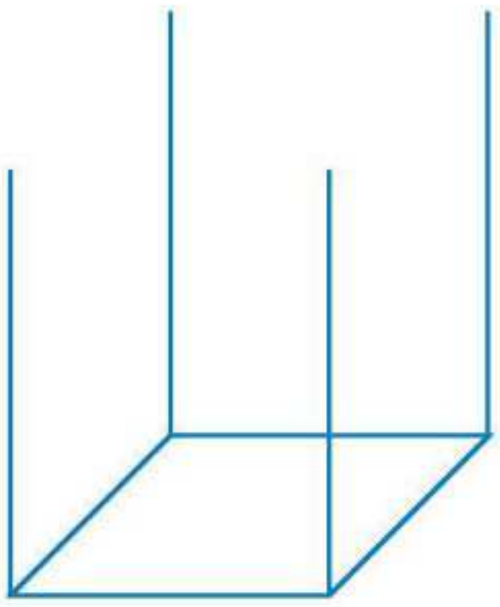
Podstawową zasadą przy rysowaniu graniastosłupów jest zachowanie równoległości odcinków odpowiadających równoległym krawędziom graniastosłupa.

### ■ Prostopadłościan

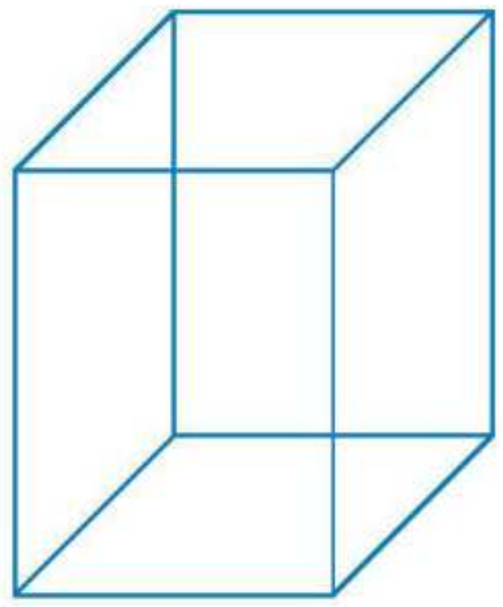
**Krok 1.**
Rysujemy dolną podstawę prostopadłościanu – w rzeczywistości jest ona prostokątem, ale na rysunku ma kształt równoległoboku.



**Krok 2.**
Rysujemy krawędzie boczne w postaci czterech odcinków równoległych i równej długości.



**Krok 3.**
Łączymy wolne końce odcinków reprezentujących krawędzie boczne i otrzymujemy górną podstawę prostopadłościanu.



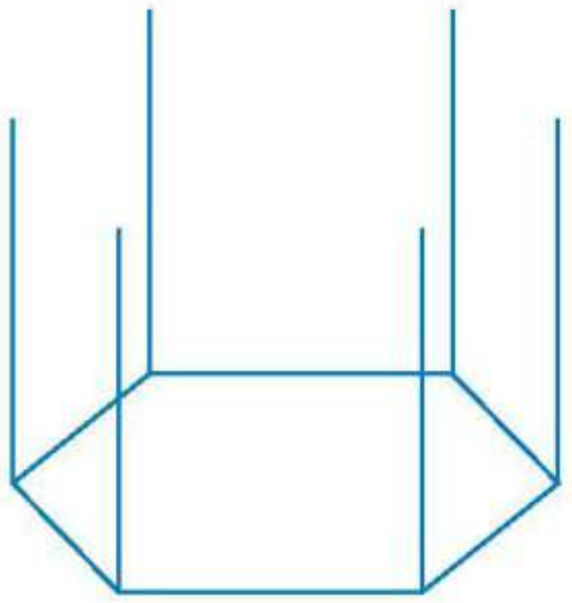
### ■ Graniastosłup sześciokątny

Na rysunkach poniżej pokazano, jak narysować graniastosłup prawidłowy sześciokątny.

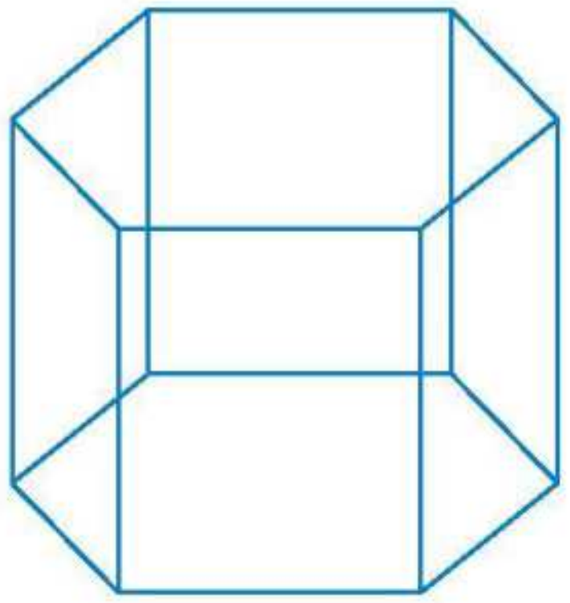
**Krok 1.**
Rysujemy dolną podstawę graniastosłupa – w rzeczywistości jest ona sześciokątem foremnym, ale na rysunku ma kształt sześciokąta o trzech parach boków równoległych różnej długości.



**Krok 2.**
Rysujemy krawędzie boczne w postaci sześciu odcinków równoległych i równej długości.



**Krok 3.**
Łączymy wolne końce odcinków reprezentujących krawędzie boczne i otrzymujemy górną podstawę graniastosłupa.



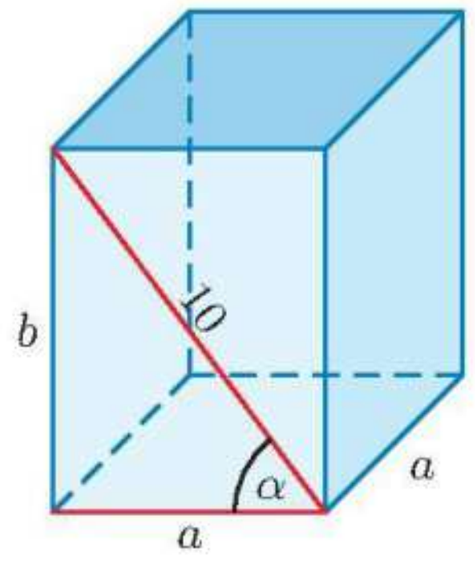
**1.** Przedstaw na rysunku graniastosłup trójkątny.

**2.** Przedstaw na rysunku graniastosłup pięciokątny.

# 2.3. Odcinki w graniastosłupach

### Przykład 1

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt $\alpha$ taki, że $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.




Zauważmy, że $\cos\alpha = \frac{a}{10}$, więc $a = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$ [cm].

$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ [cm]}$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej: $P_b = 4ab = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$ [cm$^2$].

### Ćwiczenie 1

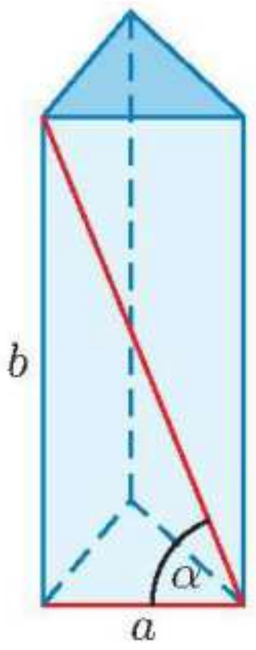
Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 25 cm i tworzy z krawędzią boczną kąt $\alpha$ taki, że $\sin\alpha = 0{,}28$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

### Ćwiczenie 2

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt $\alpha$ taki, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że:

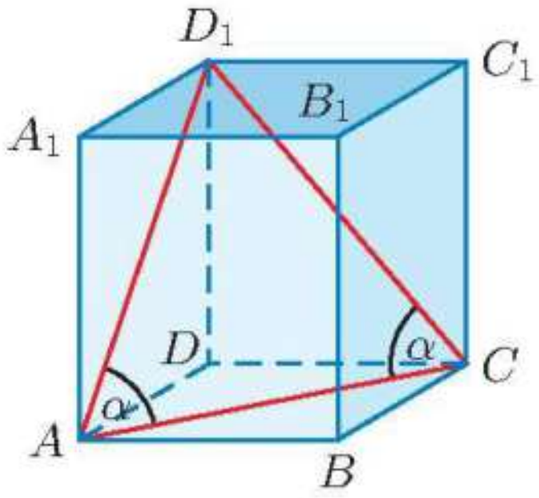
a) $a = 6$ cm,

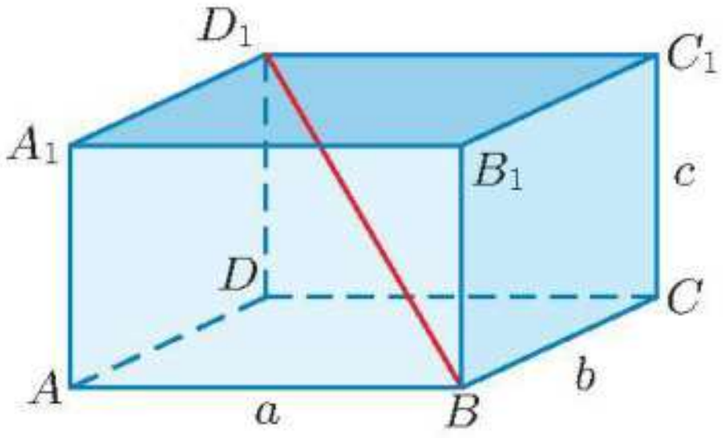
b) $b = 6$ cm.




### Ćwiczenie 3

Przekątne $AD_1$ i $CD_1$ ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego (rysunek obok) mają długości równe 8 cm. Tworzą one z przekątną podstawy kąt $\alpha$ taki, że $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.




**Przekątną graniastosłupa** nazywamy taki odcinek łączący dwa jego wierzchołki, który nie jest zawarty w żadnej ścianie graniastosłupa.

Prostopadłościan ma cztery przekątne.
Na rysunku obok są to odcinki:

$$BD_1,\ AC_1,\ CA_1 \text{ i } DB_1$$

Zwróć uwagę na to, że przekątna ściany bocznej graniastosłupa nie jest przekątną graniastosłupa oraz że graniastosłup trójkątny nie ma przekątnych.

### Ćwiczenie 4

a) Uzasadnij twierdzenie podane obok.

b) Uzasadnij, że przekątna sześcianu o krawędzi $a$ ma długość równą $a\sqrt{3}$.

> Przekątna prostopadłościanu o krawędziach $a$, $b$, $c$ ma długość równą:
> $$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

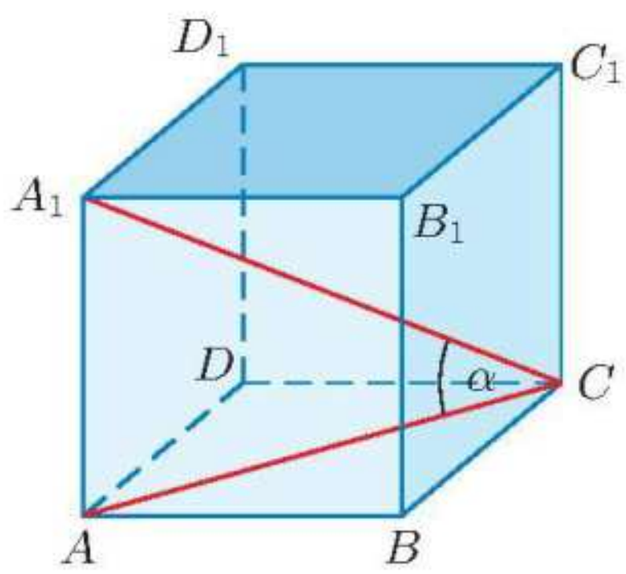
### Ćwiczenie 5

Oblicz długości przekątnych wszystkich ścian oraz długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach:

a) 5, 9, 12,  b) 6, 8, 15.

### Ćwiczenie 6

W sześcianie z tego samego wierzchołka poprowadzono jego przekątną i przekątną podstawy (rysunek obok). Tworzą one kąt $\alpha$. Oblicz cosinus tego kąta oraz jego przybliżoną miarę z dokładnością do 1°.



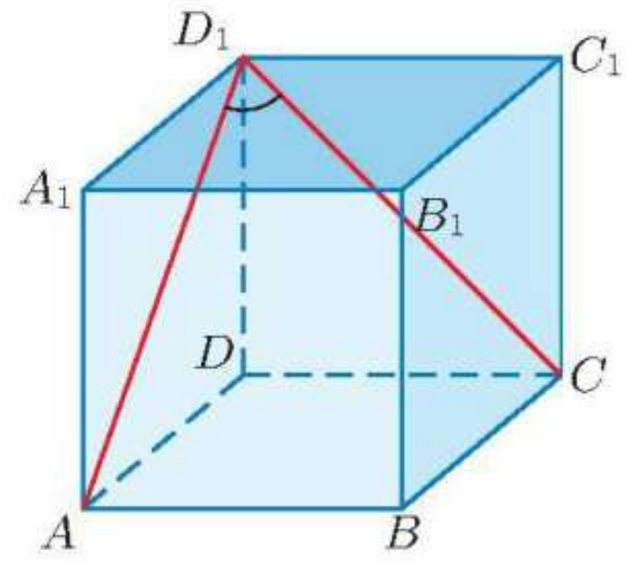

## Zadania

**1.** Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 5 cm, a przekątna jego ściany bocznej tworzy:

a) z krawędzią podstawy kąt 30°,

b) z krawędzią boczną kąt 30°,

c) z przekątną graniastosłupa kąt 30°.




**2.** Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równy 60° (rysunek obok). Wykaż, że graniastosłup ten jest sześcianem.

**3.** Oblicz długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 cm, a przekątna ta tworzy:

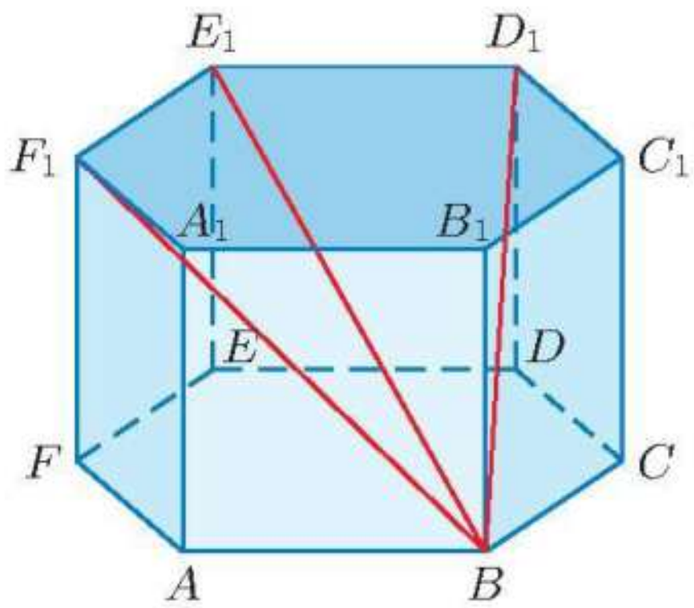
a) z przekątną podstawy kąt 45°,

b) z jedną z krawędzi bocznych kąt 30°,

c) z przekątną jednej ze ścian bocznych kąt 30°.

**4.** Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{6}$, a jego wysokość jest równa 8. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

**5.** Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa (rysunek obok).



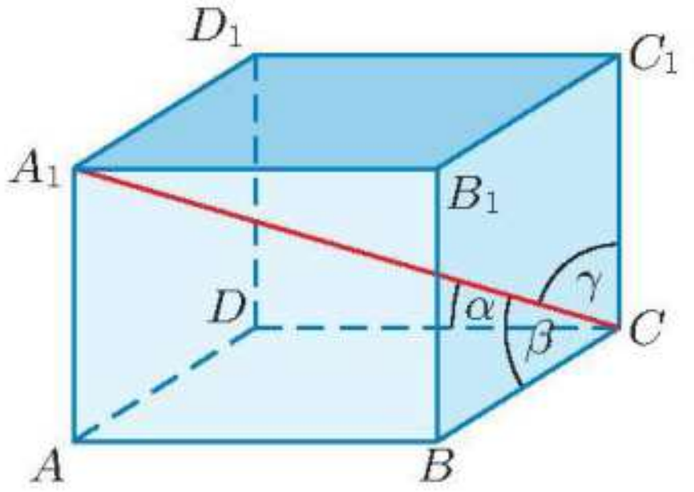

**6.** Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 cm, a jego wysokość jest równa 5 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

**7.** Różnica długości przekątnych graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie są równe, wynosi 2 cm. Oblicz długość krawędzi tego graniastosłupa.

D **8.** Przekątna $A_1C$ prostopadłościanu (rysunek obok) tworzy z krawędziami wychodzącymi z wierzchołka $C$ kąty $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$. Wykaż, że:

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$,

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.




**9.** Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest trzy razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego graniastosłupa a jego krawędzią boczną.

**10.** Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a dłuższa przekątna jest trzy razy dłuższa od krótszej przekątnej podstawy.

**11.** Liczba przekątnych graniastosłupa prawidłowego $n$-kątnego jest o 24 większa od liczby przekątnych jego wszystkich ścian bocznych. Oblicz $n$.

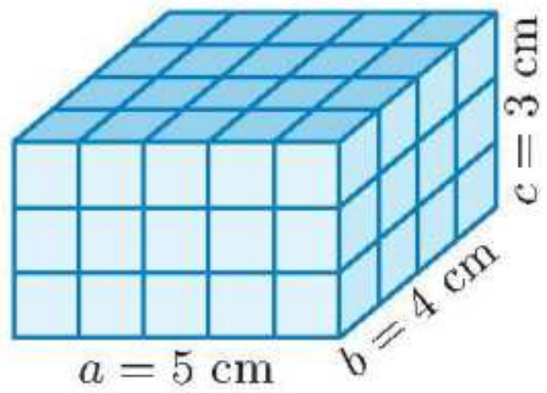
## Powtórzenie

**12.** Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 26 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt $\alpha$ taki, że $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

**13.** Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 3 cm jest dwa razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz długość przekątnej tego graniastosłupa i cosinus kąta, który ta przekątna tworzy z krawędzią boczną.

# 2.4. Objętość graniastosłupa

Objętość prostopadłościanu o wymiarach $a$, $b$, $c$ wyraża się za pomocą wzoru: $V = abc$.




### Przykład 1

Przedstawiony na rysunku powyżej prostopadłościan ma objętość równą $5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 60\text{ cm}^3$. Zauważ, że można go podzielić na 60 sześcianów o objętości $1\text{ cm}^3$ każdy.

### Ćwiczenie 1

Dane są prostopadłościany $P_1$ i $P_2$ o wymiarach:

$P_1$: $15\text{ cm} \times 2\text{ dm} \times 10\text{ cm}$, $P_2$: $0{,}12\text{ m} \times 1{,}2\text{ dm} \times 22\text{ cm}$

Który z nich ma większą objętość?

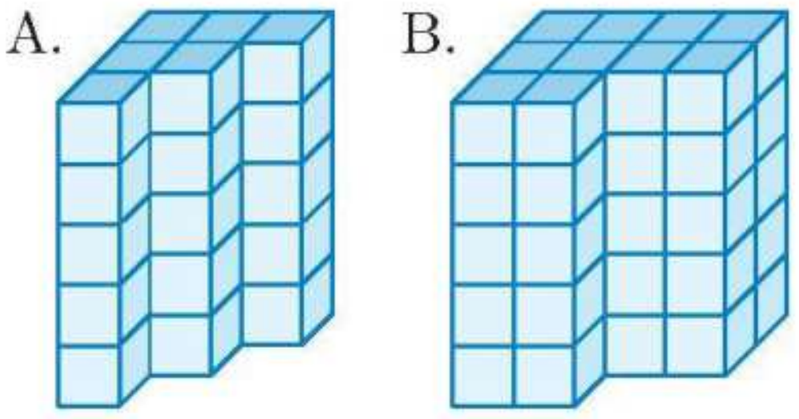
### Ćwiczenie 2

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe $1{,}5\text{ dm}^2$. Oblicz objętość tego sześcianu.

Objętość sześcianu o krawędzi $a$ wyraża się za pomocą wzoru: $V = a^3$.

### Ćwiczenie 3

Na rysunkach przedstawiono graniastosłupy ułożone z sześciennych kostek o objętości $1\text{ cm}^3$ każda. Oblicz objętości tych graniastosłupów.



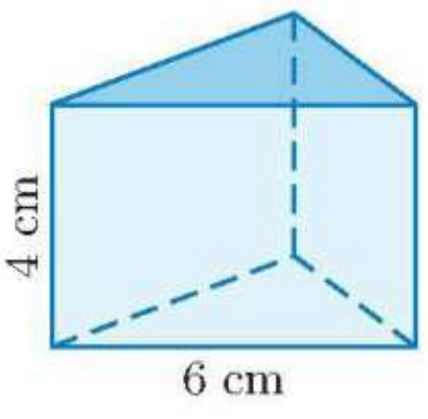

Objętość dowolnego graniastosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie $P_p$ jest polem podstawy graniastosłupa, a $H$ – jego wysokością.

### Przykład 2

Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 4 cm.




Obliczamy pole podstawy:

$$P_p = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ [\text{cm}^2]$$

Zatem objętość:

$$V = P_p \cdot H = 9\sqrt{3} \cdot 4 = 36\sqrt{3}\ [\text{cm}^3]$$

### Ćwiczenie 4

Wyznacz wzór na objętość graniastosłupa prawidłowego:
a) trójkątnego, b) sześciokątnego,
którego wszystkie krawędzie są równe i mają długość $a$.

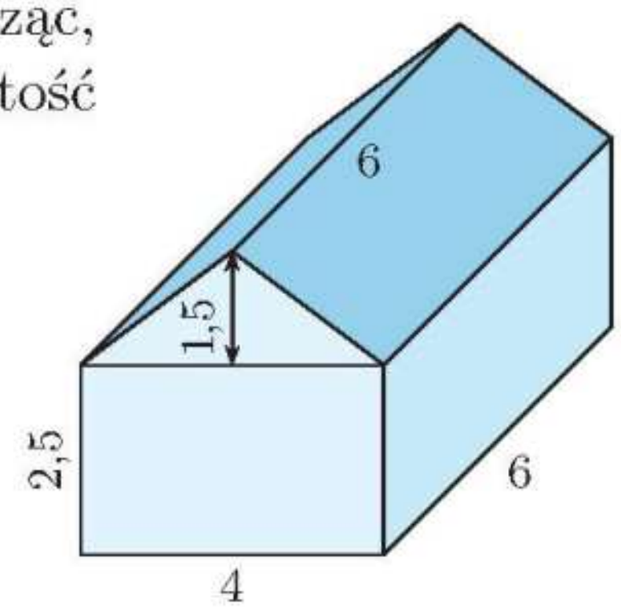
### Ćwiczenie 5

a) Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 4 cm, którego pole powierzchni bocznej jest równe 180 $cm^2$.

b) Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe sumie pól jego podstaw. Wiedząc, że krawędź podstawy ma długość 5 cm, oblicz objętość tego graniastosłupa.

### Ćwiczenie 6

Oblicz kubaturę (objętość) budynku przedstawionego obok na schematycznym rysunku. Wymiary tego budynku podano w metrach.




## Zadania

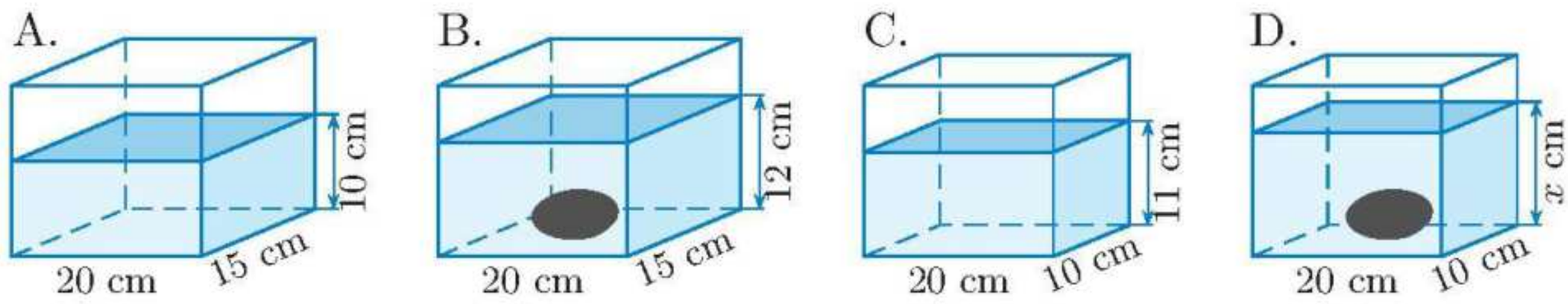
**1.** a) Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 7 cm, a jego podstawą jest trapez o bokach długości 4 cm, 4 cm, 4 cm i 8 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

b) Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 cm i 12 cm, a jego kąt ostry ma miarę 45°. Oblicz objętość graniastosłupa prostego o wysokości 18 cm, którego podstawą jest ten trapez.

**2.** a) Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm, a pole jego podstawy jest równe 16 $cm^2$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

b) Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego przekątna o długości 10 cm tworzy z krawędzią podstawy kąt 60°.

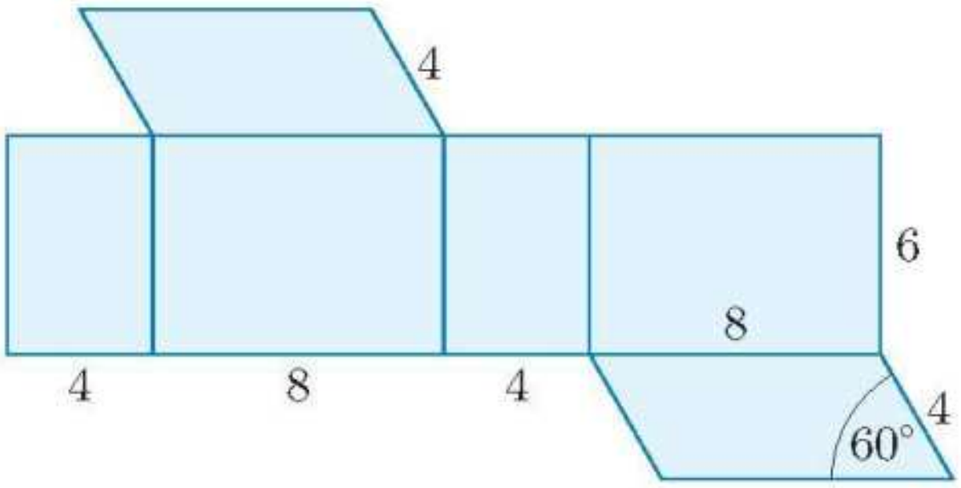
**3.** Do dwóch akwariów (rysunki A i C) wrzucono kolejno ten sam kamień (rysunki B i D). Za każdym razem kamień był całkowicie zanurzony w wodzie. Oblicz $x$.



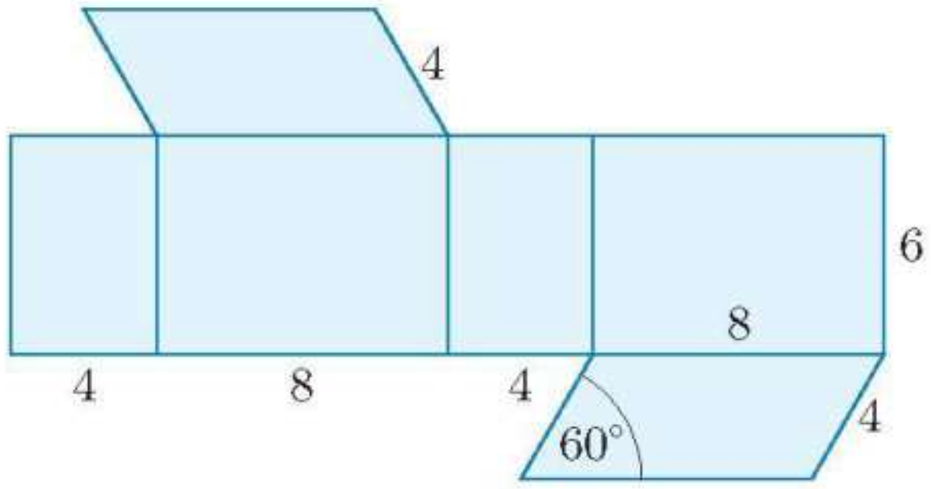
**4.** Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt, którego dwa boki mają długości 6 i $2\sqrt{3}$, a miara kąta między nimi wynosi $30^\circ$. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że jego pole powierzchni całkowitej jest dwa razy większe niż pole powierzchni bocznej.

**5.** Na którym z poniższych rysunków przedstawiono siatkę graniastosłupa? Oblicz objętość tego graniastosłupa.

A.




B.



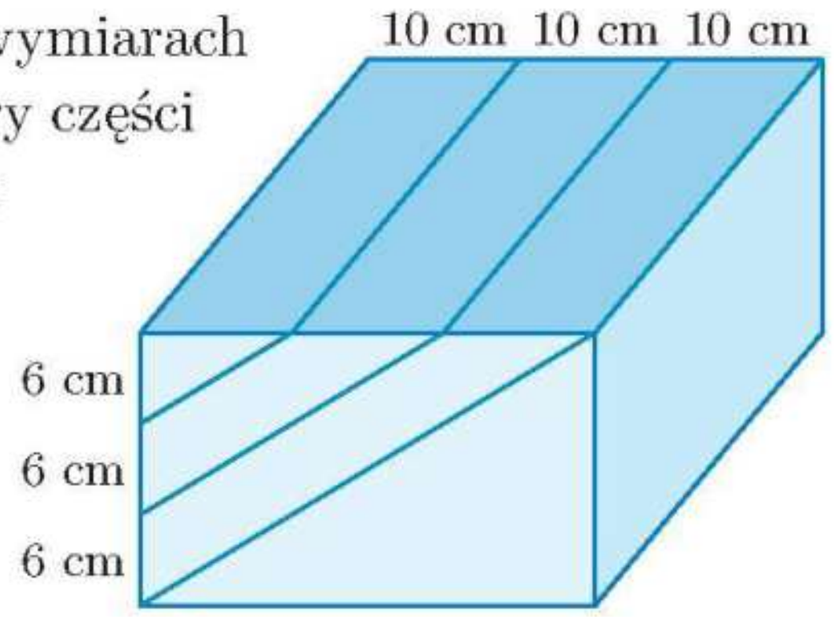

**6.** Objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest romb o kącie ostrym $30^\circ$, jest równa 27 $\text{cm}^3$, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 36 $\text{cm}^2$. Narysuj siatkę tego graniastosłupa.

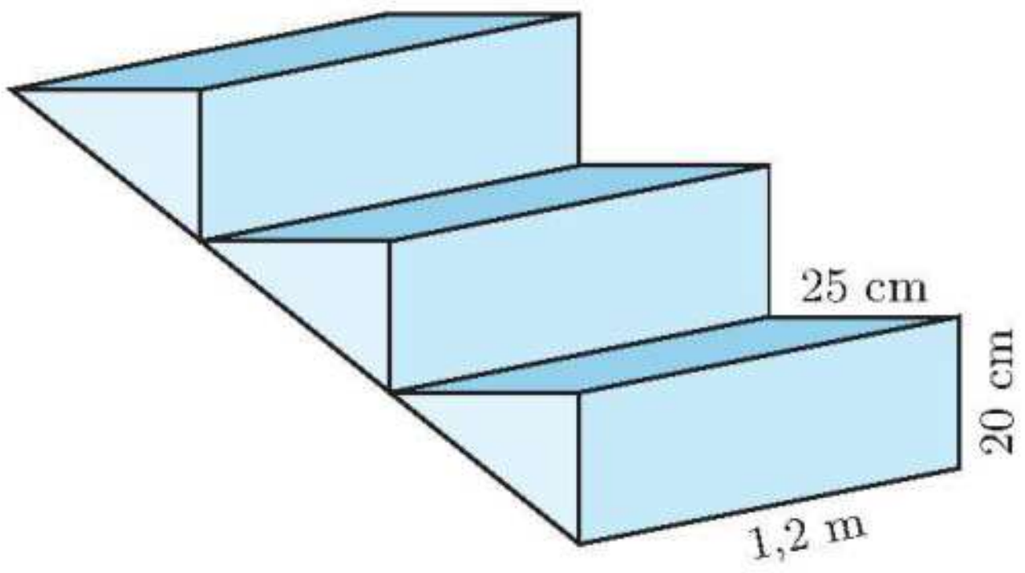
## Powtórzenie

**7.** a) Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm.

b) Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni bocznej jest równe 144 $\text{cm}^2$, a pole powierzchni całkowitej jest równe 306 $\text{cm}^2$.

**8.** Prostopadłościenny drewniany klocek o wymiarach 18 cm × 30 cm × 50 cm przecięto na cztery części mające kształty graniastosłupów tak, jak przedstawiono na rysunku obok. Oblicz objętość każdej z otrzymanych części.



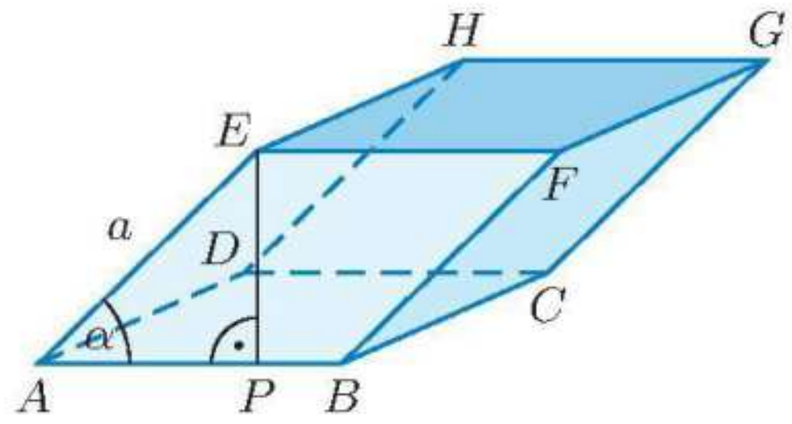




**9.** Schody składają się z 15 jednakowych betonowych stopni o wymiarach podanych na rysunku obok. Oblicz objętość betonu zużytego na ich wykonanie.

**Warto wiedzieć**

## Graniastosłupy pochyłe

Ściany boczne $ABFE$ i $DCGH$ graniastosłupa pochyłego przedstawionego na rysunku obok są rombami o boku $a$ i kącie ostrym $\alpha$. Podstawy oraz pozostałe ściany boczne tego graniastosłupa są kwadratami. Odcinek $EP$ jest jego wysokością.



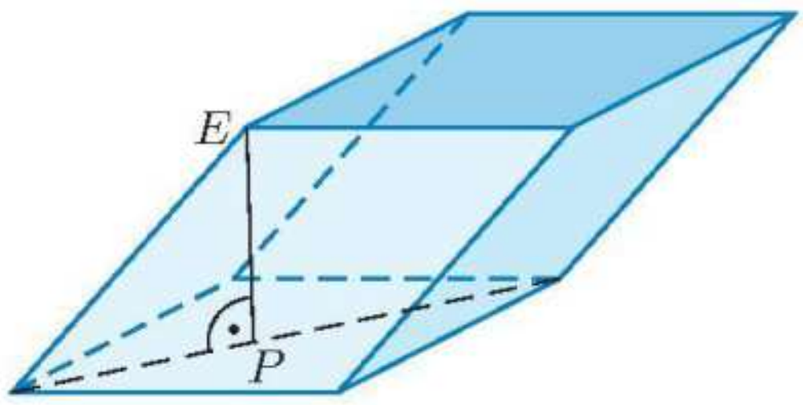

$|EP| = a\sin\alpha$, zatem objętość tego graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot h = a^2 \cdot a\sin\alpha = a^3\sin\alpha$$

Zauważ, że objętość tego graniastosłupa możemy również wyznaczyć, przyjmując, że jego podstawami są romby $ABFE$ i $DCGH$. Wówczas otrzymujemy:

$$V = P'_p \cdot h' = a^2\sin\alpha \cdot a = a^3\sin\alpha$$

Innym przykładem graniastosłupa pochyłego jest **romboedr**, czyli graniastosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi rombami. Na rysunku obok przedstawiono romboedr, którego wysokością jest odcinek $EP$.




Zauważ, że wysokość ściany bocznej nie jest wysokością romboedru.

### Twierdzenie

Objętość romboedru, którego każda ściana jest rombem o kącie ostrym $\alpha$ i boku $a$, dana jest wzorem:

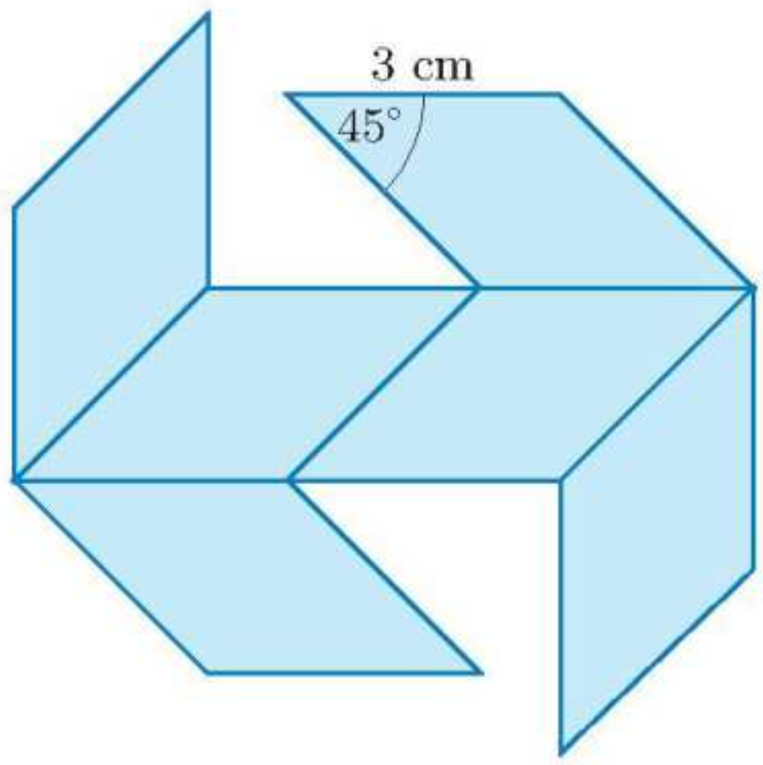
$$V = a^3(1-\cos\alpha)\sqrt{1+2\cos\alpha}$$

**1.** Oblicz wysokość romboedru, którego każda ściana jest rombem o boku 4 i kącie ostrym 60°.

**2.** Na rysunku obok przedstawiono siatkę romboedru, którego ścianami są romby o boku długości 3 cm i kącie ostrym 45°.

a) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego romboedru.

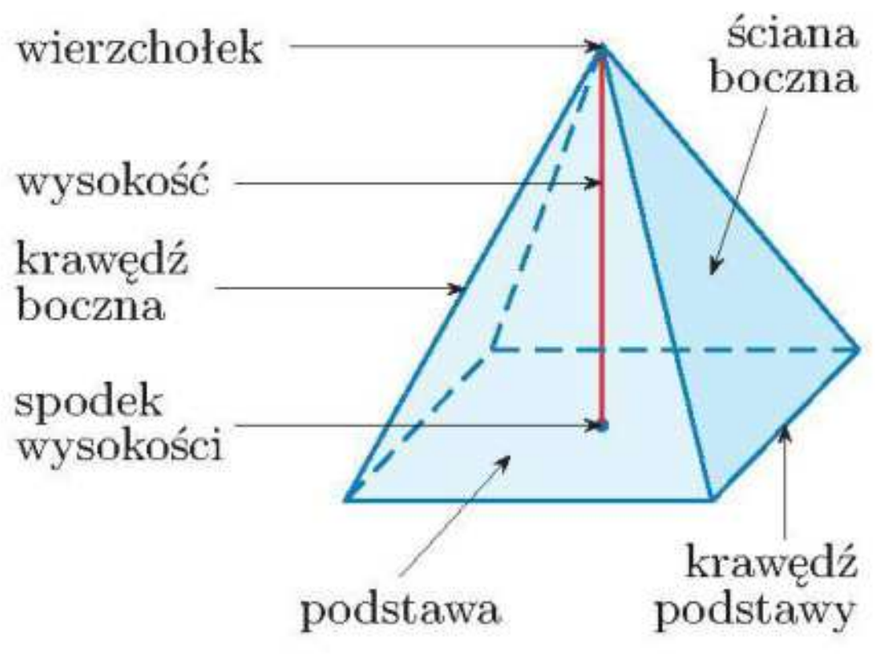
b) Oblicz objętość tego romboedru z dokładnością do 0,01 $\text{cm}^3$.



# 2.5. Ostrosłupy

**Ostrosłup** to wielościan, którego jedna ściana, zwana **podstawą**, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane **ścianami bocznymi**, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.

**Wysokością** ostrosłupa nazywamy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim – rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy, zwany **spodkiem wysokości**.




Ostrosłup nazywamy trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. – w zależności od tego, jakim wielokątem jest jego podstawa. Na rysunku przedstawiono ostrosłup czworokątny.

### Definicja

Ostrosłup nazywamy **prostym**, jeśli wszystkie jego krawędzie boczne mają tę samą długość.
Jeśli podstawą ostrosłupa prostego jest wielokąt foremny, to taki ostrosłup nazywamy **prawidłowym**.

### Ćwiczenie 1

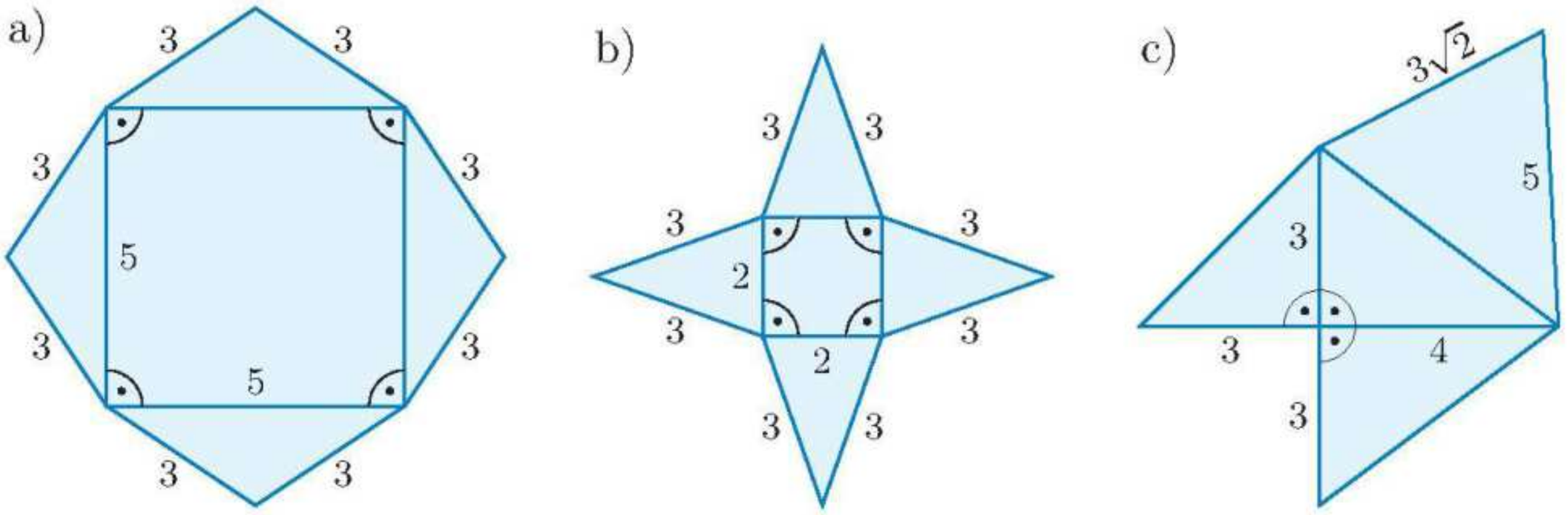
Uzasadnij, że w ostrosłupie prostym spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

### Ćwiczenie 2

Czy na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa prostego? Jeśli tak, to oblicz jego pole powierzchni całkowitej.



### Ćwiczenie 3

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, a krawędź podstawy ma długość 4 cm.

### Ćwiczenie 4

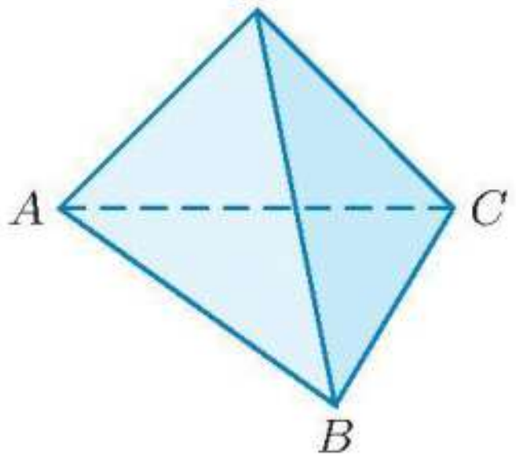
Podstawa ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma pole równe $25\sqrt{3}$. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa, jeśli jego pole powierzchni całkowitej jest siedmiokrotnie większe od pola podstawy.

**Kątem płaskim przy wierzchołku** ostrosłupa prawidłowego nazywamy kąt między ramionami trójkąta równoramiennego będącego ścianą boczną tego ostrosłupa.

### Ćwiczenie 5

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę $60^\circ$.

Ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.



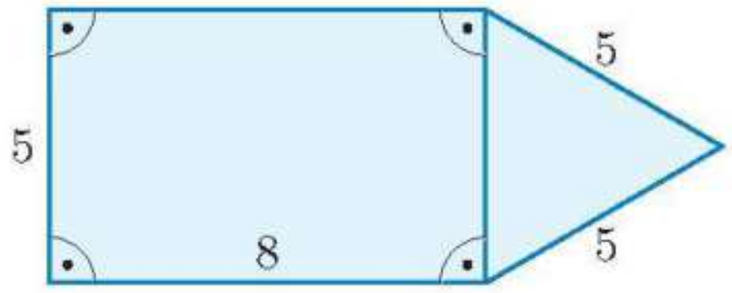

### Ćwiczenie 6

a) Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 5 cm.

b) Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $49\sqrt{3}$ cm$^2$.

## Zadania

**1.** Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.




**2.** Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 6 cm i 8 cm. Dwie spośród jego ścian bocznych są trójkątami równobocznymi. Oblicz wysokość tego ostrosłupa (rozpatrz dwa przypadki).

**3.** Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12 cm. Tworzy ona z wysokością ściany bocznej kąt $\alpha$ taki, że $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

**4.** Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 8 cm$^2$, a jego ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o kącie między ramionami 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

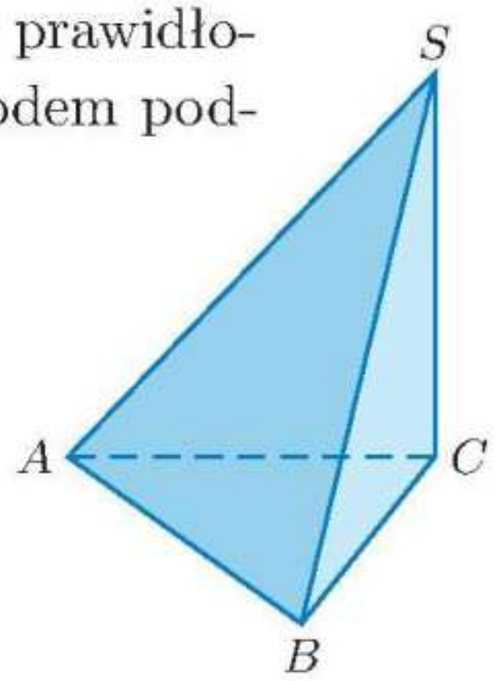
**5.** Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią boczną tego ostrosłupa kąt $\alpha$ taki, że $\cos\alpha = 0{,}8$. Krawędź podstawy ma długość 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

**6.** Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 2 cm, a kąt między nimi jest równy 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

**7.** Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 9 cm. Różnica między polem koła opisanego na podstawie tego ostrosłupa a polem koła wpisanego w tę podstawę wynosi $8\pi$ cm$^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

D **8.** Uzasadnij, że pole powierzchni bocznej $P_b$ ostrosłupa prawidłowego wyraża się wzorem $P_b = \frac{1}{2}Lh$, gdzie $L$ jest obwodem podstawy, a $h$ – wysokością ściany bocznej.

**9.** Dany jest ostrosłup trójkątny, w którym krawędź $SC$ jest prostopadła do podstawy $ABC$ (rysunek obok) oraz $|AB| = 5$, $|BC| = 3$, $|AC| = |SC| = 4$. Oblicz cosinusy kątów trójkąta $ABS$. Wyznacz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do 1°.

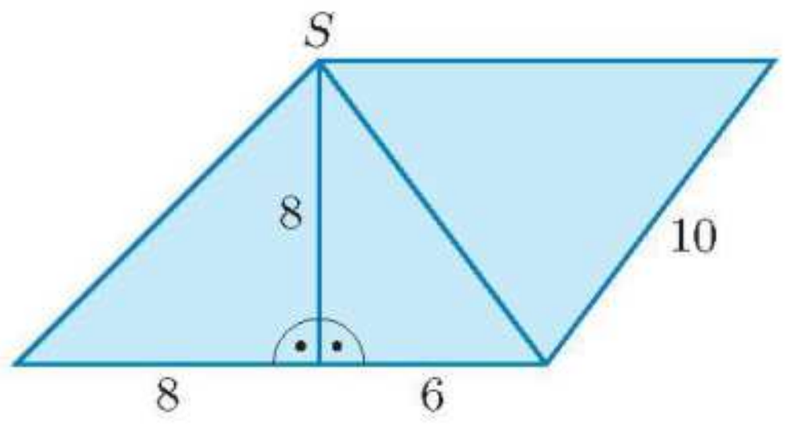



## Powtórzenie

**10.** Krawędzie podstawy ostrosłupa prawidłowego mają długość 10 cm, a krawędzie boczne – 13 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego podstawą jest:

a) kwadrat, b) trójkąt, c) sześciokąt.

**11.** Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa trójkątnego o wierzchołku $S$. Narysuj całą siatkę tego ostrosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.



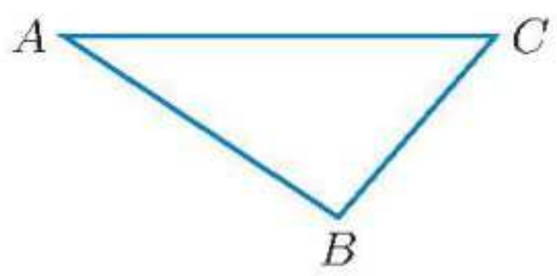
Warto wiedzieć

## Przedstawianie ostrosłupów na rysunkach

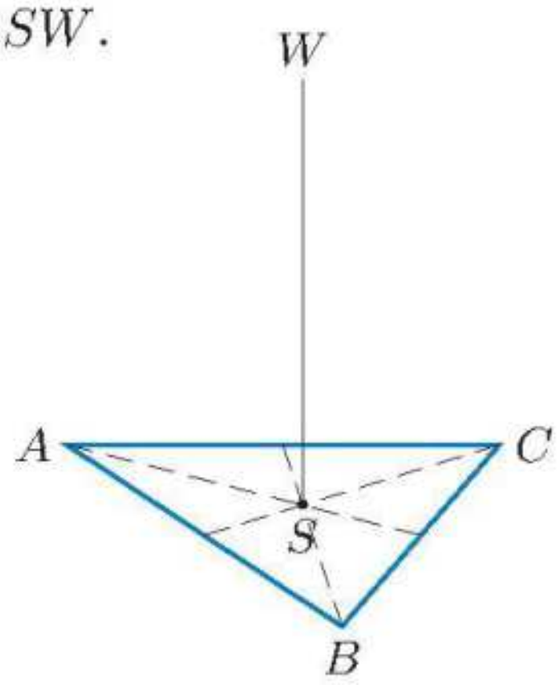
Podczas rysowania ostrosłupa szczególną uwagę należy zwrócić na położenie jego spodka wysokości.

### ■ Ostrosłup prawidłowy trójkątny

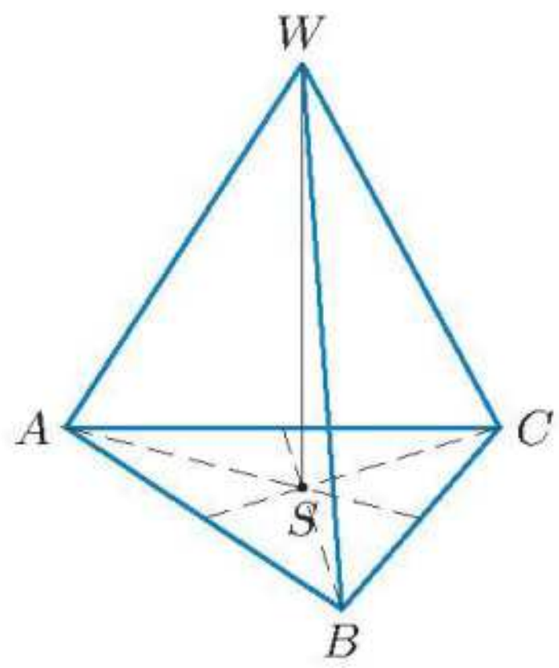
**Krok 1.**
Rysujemy podstawę ostrosłupa – w rzeczywistości jest ona trójkątem równobocznym, ale na rysunku długości boków trójkąta są różne.




**Krok 2.**
Wyznaczamy spodek wysokości $S$ – punkt przecięcia środkowych trójkąta $ABC$. Następnie rysujemy wysokość ostrosłupa – odcinek $SW$.

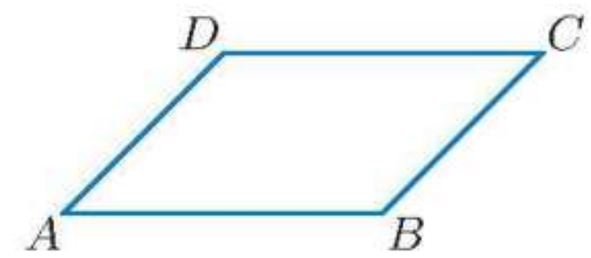



**Krok 3.**
Łączymy wierzchołek ostrosłupa z wierzchołkami jego podstawy i otrzymujemy krawędzie boczne ostrosłupa.

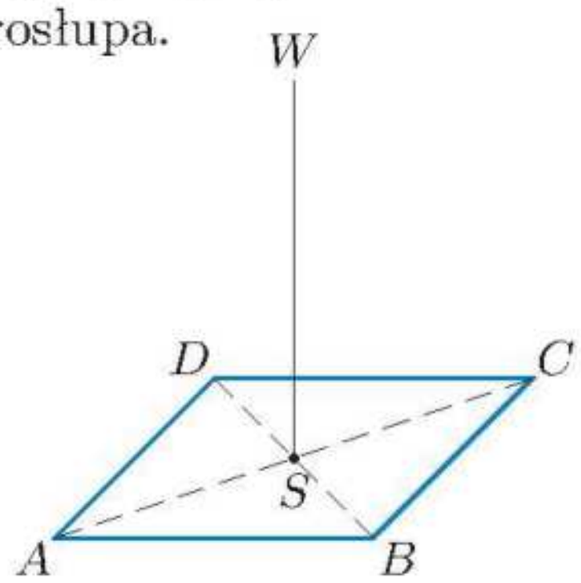



### ■ Ostrosłup prawidłowy czworokątny

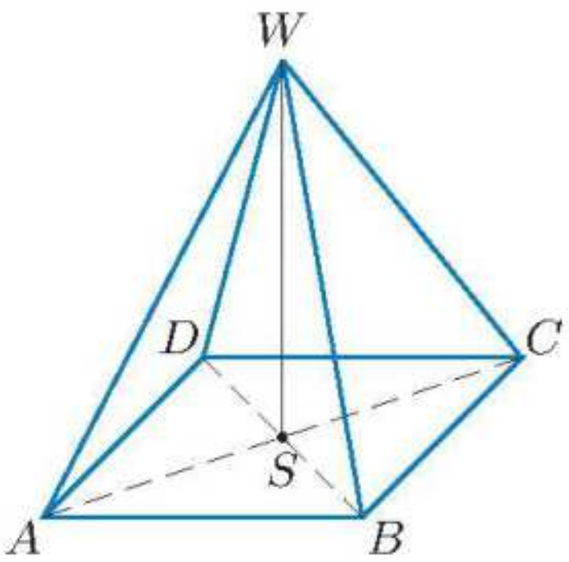
**Krok 1.**
Rysujemy podstawę ostrosłupa – w rzeczywistości jest ona prostokątem, ale na rysunku ma kształt równoległoboku $ABCD$.




**Krok 2.**
Wyznaczamy spodek wysokości $S$ – jest to punkt przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Następnie rysujemy wysokość $SW$ ostrosłupa.




**Krok 3.**
Łączymy wierzchołek ostrosłupa z wierzchołkami jego podstawy i otrzymujemy krawędzie boczne ostrosłupa.




**1.** Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy sześciokątny.

**2.** Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy pięciokątny.

**3.** Przedstaw na rysunku ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat $ABCD$, a spodkiem wysokości jest punkt $A$.

# Szlify diamentów

Diamenty po oszlifowaniu często mają kształt wielościanu wypukłego.

Wielościan nazywamy wypukłym, jeśli każdy odcinek, którego końce są punktami tego wielościanu, jest cały w nim zawarty.

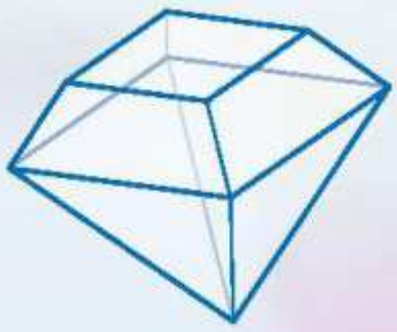


Na szkicach poniżej pokazano najwcześniejsze szlify diamentów w Europie.

Pierwsze szlify diamentów polegały na wygładzaniu naturalnych ścianek kryształów. Dopiero wynalezienie tarczy szlifierskiej pozwoliło na skośne ścinanie krawędzi diamentów i tworzenie tzw. fasetek, czyli symetrycznie rozmieszczonych ścianek.



szpiczasty kamień
XIV w.



gruby kamień
XIV w.



cienki kamień
XIV w.



pojedyncze dobro
XV w.



szlif Mazarina
XVII w.



szlif Peruzziego
XVIII w.

## Wzór Eulera

Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi zależność opisana tzw. wzorem Eulera:

$$s - k + w = 2$$

gdzie $s$ oznacza liczbę ścian, $k$ – liczbę krawędzi, $w$ – liczbę wierzchołków.

**1** Sprawdź prawdziwość wzoru Eulera dla wielościanów, których kształt mają pierwsze trzy szlify diamentów przedstawione na ilustracji.

# 2.6. Objętość ostrosłupa

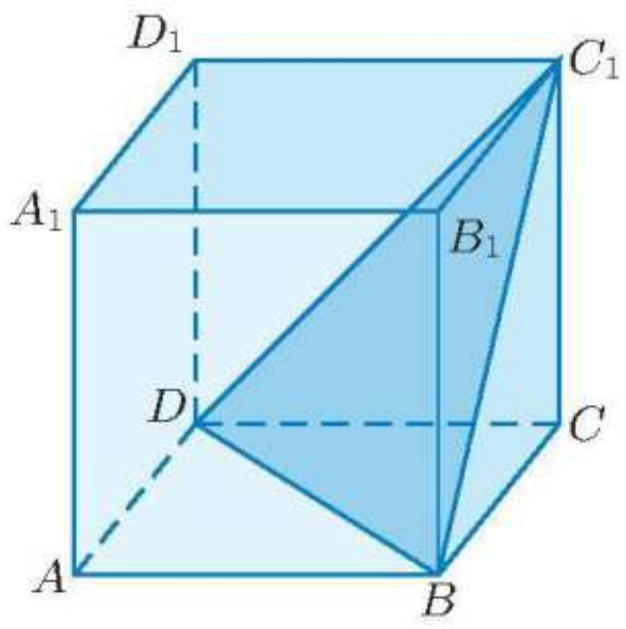
Objętość dowolnego ostrosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

gdzie $P_p$ jest polem podstawy ostrosłupa, a $H$ – jego wysokością.

### Przykład 1

Sześcian o krawędzi długości 6 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki $B$, $D$ i $C_1$ (rysunek obok). Oblicz objętości wielościanów otrzymanych w ten sposób.




Jednym z wielościanów jest ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt $BDC$ o polu:

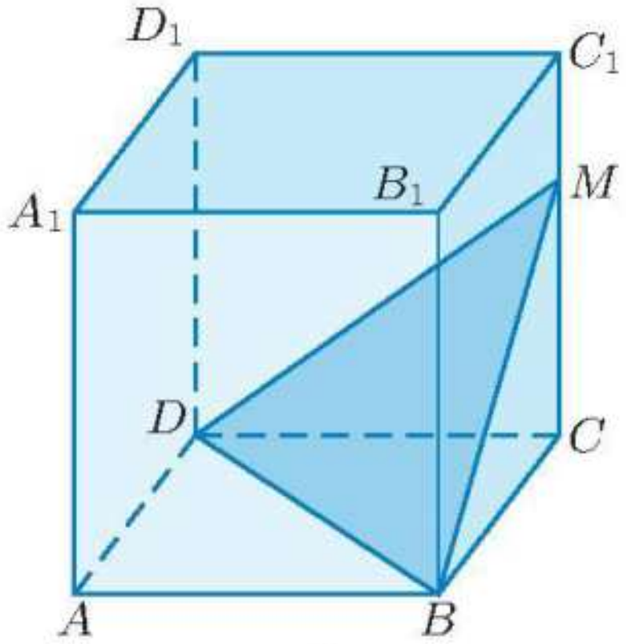
$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Wysokość tego ostrosłupa $H = 6$ cm, zatem jego objętość $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$ [cm$^3$].

Natomiast objętość drugiego wielościanu jest równa $6^3 - 36 = 180$ [cm$^3$].

### Ćwiczenie 1

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm, a przekątna podstawy ma długość 8 cm. Oblicz objętości wielościanów powstałych z przecięcia graniastosłupa płaszczyzną $BDM$ (rysunek obok), jeśli punkt $M$ należy do krawędzi $CC_1$ i odcinek $CM$ jest dwa razy dłuższy od odcinka $MC_1$.

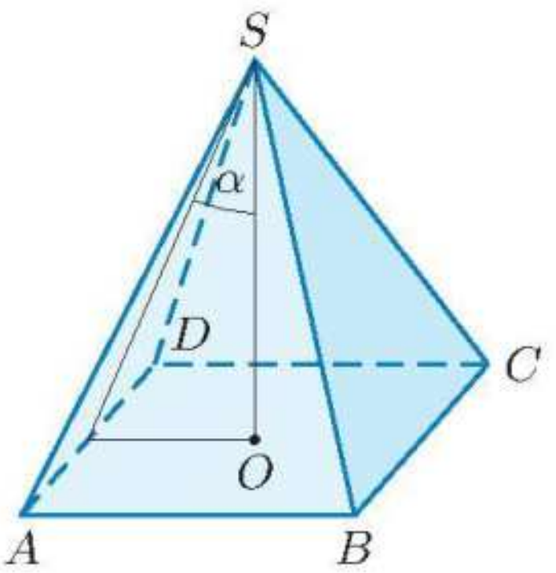



### Ćwiczenie 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 9, jeśli cosinus kąta między:

a) wysokością tego ostrosłupa a wysokością jego ściany bocznej jest równy 0,9 (rysunek obok),

b) wysokością tego ostrosłupa a jego krawędzią boczną jest równy 0,6.

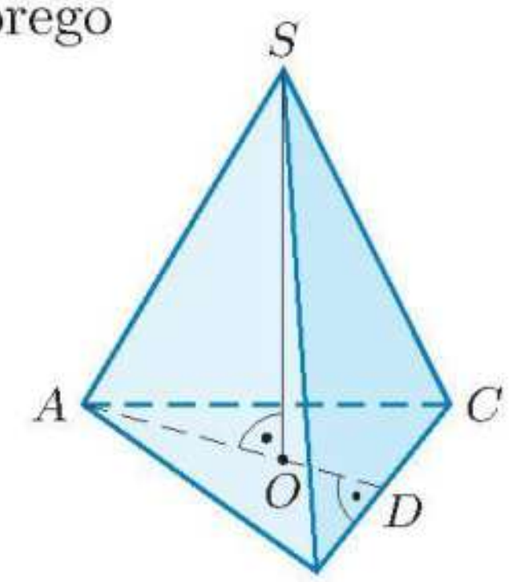



### Ćwiczenie 3

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 16 cm$^2$, a wysokość jego ściany bocznej jest równa 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

### Przykład 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 8 cm, a krawędź boczna – 10 cm.




Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok oraz długość krawędzi podstawy oznaczmy przez $a$.
Wówczas:

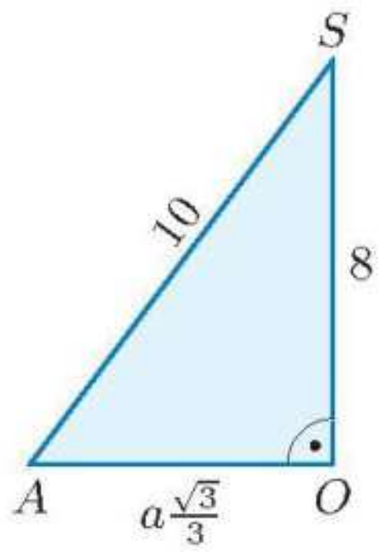
$$|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Spodek wysokości ostrosłupa – punkt $O$ – jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, zatem:

$$|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym dzieli jego wysokość w stosunku 1:2.

Rozpatrzmy trójkąt $AOS$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:




$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 8^2 = 10^2$$

$$\frac{a^2}{3} = 100 - 64$$

$$a^2 = 36 \cdot 3$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}\ [\text{cm}^2]$$

Zatem objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 8 = 72\sqrt{3}\ [\text{cm}^3]$.

### Ćwiczenie 4

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 12 cm, a wysokość ściany bocznej – 15 cm.

### Ćwiczenie 5

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 16 cm i tworzy:

a) z krawędzią boczną kąt $\alpha$ taki, że $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$,

b) z wysokością ściany bocznej kąt $\alpha$ taki, że $\cos\alpha = 0{,}8$.

### Ćwiczenie 6

a) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę $60^\circ$, a pole podstawy jest równe 16 $\text{cm}^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

b) W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę $90^\circ$, a krawędź podstawy ma długość 6 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi $a$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

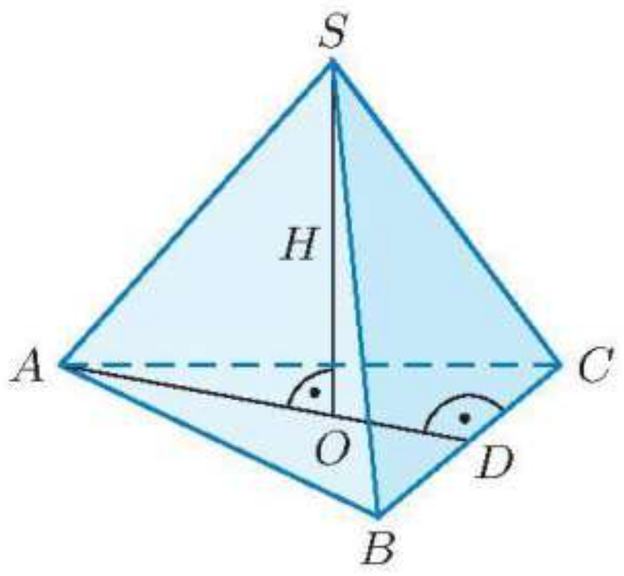
a jego objętość – za pomocą wzoru:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

**Dowód**

Na rysunku poniżej przedstawiono czworościan foremny o krawędzi $a$.

Niech punkt $O$ będzie spodkiem wysokości czworościanu. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny $AOS$.




Zauważmy, że $|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz $|AS| = a$.

Zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

Stąd $H = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ oraz objętość czworościanu:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

### Ćwiczenie 7

a) Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36\sqrt{3}$ cm$^2$.

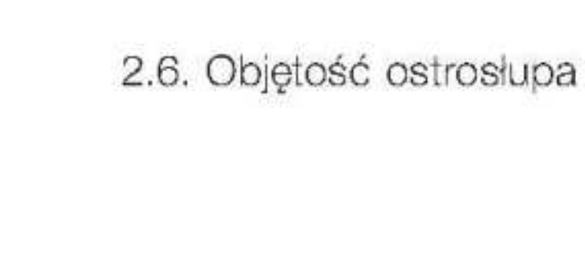
b) Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o objętości równej $18\sqrt{2}$ cm$^3$.

## Zadania

**1.** Wysokość ostrosłupa prawidłowego jest równa 15 cm, a obwód jego podstawy jest równy 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli jest on:

a) czworokątny, b) trójkątny, c) sześciokątny.

**2.** Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36(1+\sqrt{3})$ cm$^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.




**3.** Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 13 cm i tworzą kąt $\alpha$ taki, że $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**4.** Oblicz objętość ostrosłupa prostego, którego wysokość tworzy z krawędzią boczną kąt 30°, a podstawą jest prostokąt o bokach 4 cm i 8 cm.

**5.** Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe $24\ \text{cm}^2$, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę $60^\circ$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**6.** a) Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość ma 24 cm, a objętość jest równa $50\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

b) Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego objętość jest równa $21\sqrt{3}\ \text{cm}^3$, a promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $2\sqrt{3}$ cm.

**7.** Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 21, a jego wysokość jest równa $\sqrt{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**8.** Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wysokość jest dwa razy krótsza od wysokości jego ściany bocznej, a krawędź podstawy ma długość 6 cm.

**9.** Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego wysokość:

a) jest równa 2 cm,

b) jest o 1 cm krótsza od wysokości jego ściany.

**10.** Dany jest czworościan, w którym dwie skośne krawędzie mają długość 4 cm każda, a pozostałe krawędzie mają po 5 cm. Oblicz objętość tego czworościanu.

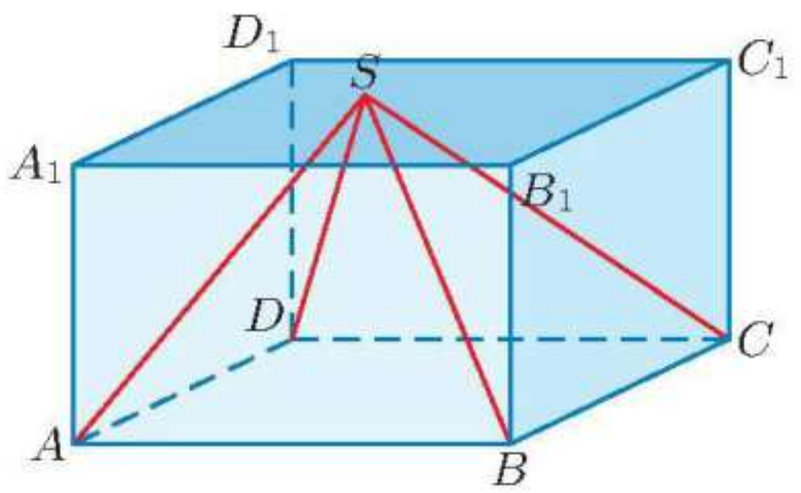
## Powtórzenie

**11.** Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z krawędzią boczną kąt $45^\circ$. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli jego podstawa ma pole równe $36\ \text{cm}^2$.

**12.** Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|BB_1| = 2$ (rysunek obok). Oblicz objętość ostrosłupa:

a) $ABDD_1$,

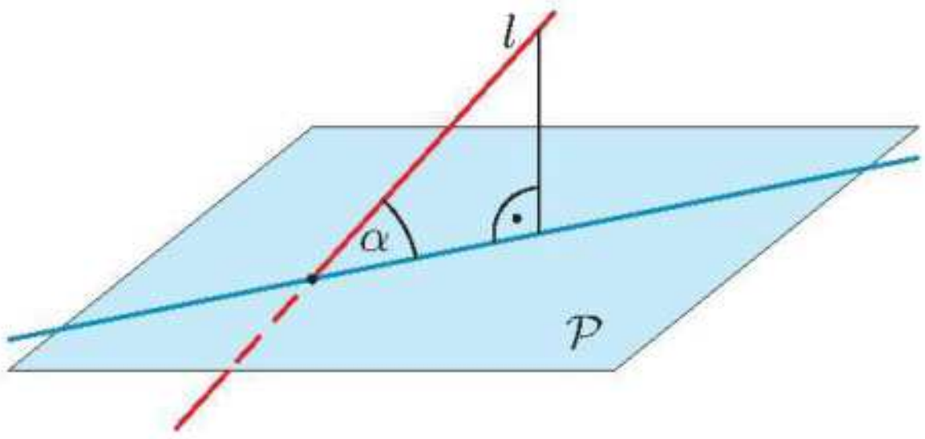
b) $ABCDS$, gdzie $S$ jest dowolnym punktem należącym do ściany $A_1B_1C_1D_1$.

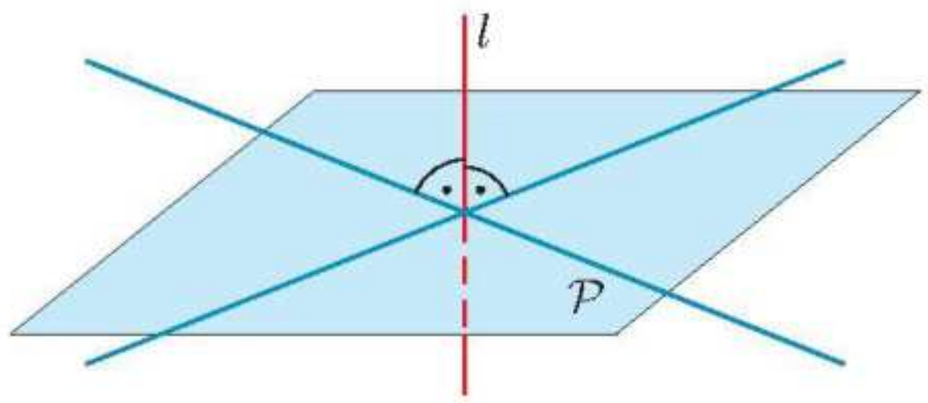



**13.** Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o przeciwprostokątnej równej 20 cm.

**14.** Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego ściana boczna ma pole równe $25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

# 2.7. Kąt między prostą a płaszczyzną



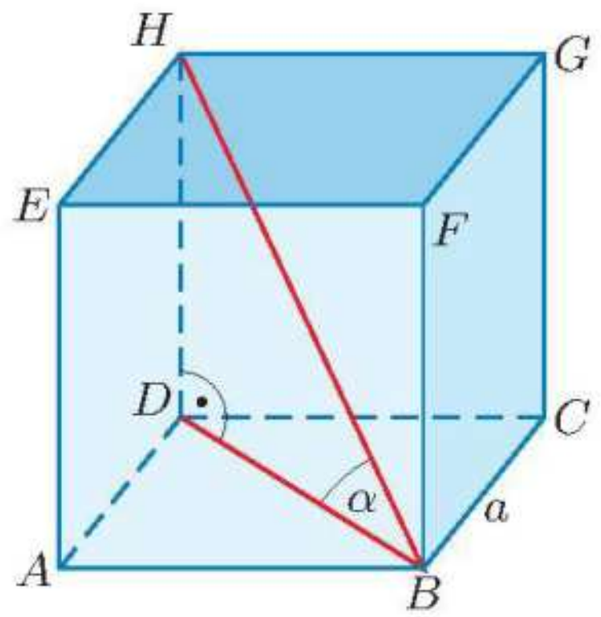




**Kątem między prostą a płaszczyzną** nazywamy kąt ostry, który ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Jeśli rzutem prostej jest punkt, to przyjmujemy, że płaszczyzna i prosta tworzą kąt prosty. Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to tworzy z nią kąt $0°$.

### Przykład 1

Wyznacz miarę kąta między przekątną sześcianu a jego podstawą.

Rozpatrzmy przekątną sześcianu $BH$ (rysunek obok) i jej rzut prostokątny na płaszczyznę podstawy – odcinek $BD$.




Jeśli $|DH| = a$, to $|BD| = a\sqrt{2}$, zatem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071, \text{ stąd } \alpha \approx 35°$$

### Ćwiczenie 1

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają tę samą długość. Wyznacz miary kątów, które jego przekątne tworzą z podstawą.

### Ćwiczenie 2

Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 5 cm jest prostokąt o bokach długości 3 cm i 4 cm. Oblicz sinusy kątów, które przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego ścianami bocznymi.

### Ćwiczenie 3

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 8 cm, a jego przekątna tworzy z podstawą kąt $60°$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

### Ćwiczenie 4

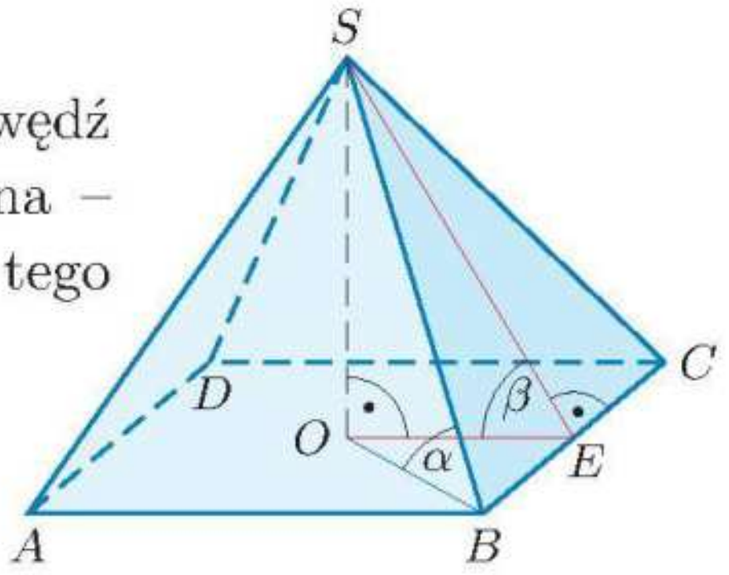
Podstawa graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma pole równe $49\ \text{cm}^2$, a jego przekątna tworzy ze ścianą boczną kąt $\alpha$ taki, że $\sin\alpha = 0{,}28$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

### Przykład 2

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

a) jego krawędź boczna,

b) wysokość jego ściany bocznej.

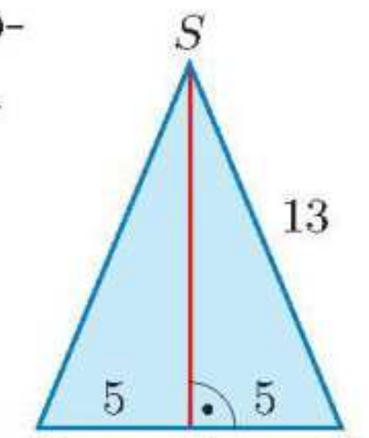



a) Kąt między krawędzią boczną $SB$ ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek $OB$) oznaczono na rysunku przez $\alpha$. Odcinek $OB$ jest połową przekątnej kwadratu o boku 10 cm, więc $|OB| = 5\sqrt{2}$ cm.
Rozpatrzmy trójkąt $OBS$:

$$\cos\alpha = \frac{|OB|}{|BS|} = \frac{5\sqrt{2}}{13}$$

b) Kąt między wysokością $SE$ ściany bocznej ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek $OE$) oznaczono przez $\beta$. Na rysunku poniżej przedstawiono ścianę boczną ostrosłupa – jest to trójkąt równoramienny o wysokości $SE$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $|SE|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, skąd $|SE| = 12$ cm.
Rozpatrzmy trójkąt $OES$:

$$\cos\beta = \frac{|OE|}{|SE|} = \frac{5}{12}$$

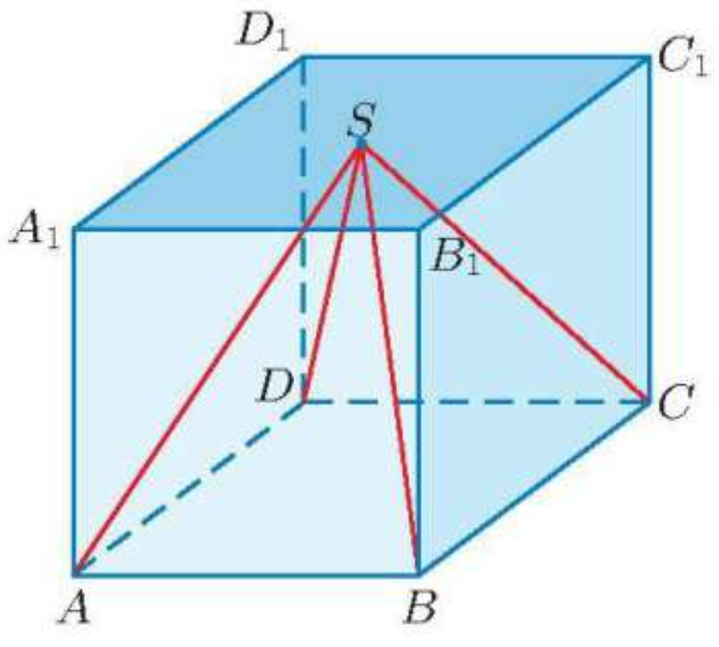



### Ćwiczenie 5

Dolną podstawą sześcianu jest kwadrat $ABCD$. Punkt $S$ jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ będącego górną podstawą sześcianu. Rozpatrzmy ostrosłup o podstawie $ABCD$ i wierzchołku $S$. Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

a) jego krawędź boczna,

b) wysokość jego ściany bocznej.



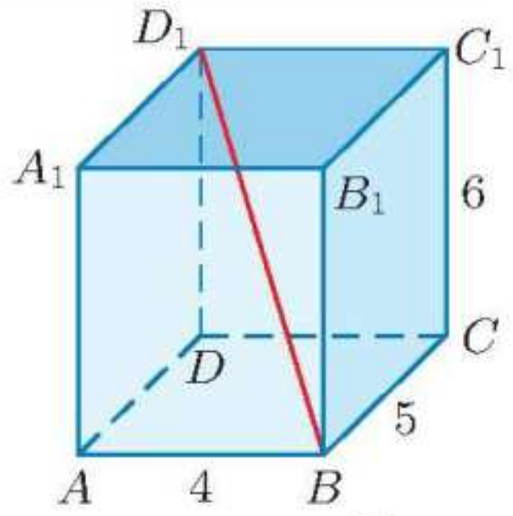

### Ćwiczenie 6

a) Oblicz sinus kąta, który krawędź boczna czworościanu foremnego tworzy z jego podstawą.

b) Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego pole powierzchni bocznej jest sześć razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta, który krawędź boczna tego ostrosłupa tworzy z jego podstawą.

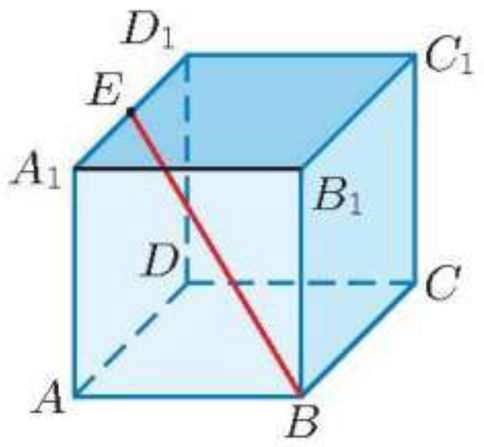
## Zadania

**1.** Dany jest prostopadłościan o wymiarach podanych na rysunku obok. Oblicz sinus kąta zawartego między przekątną $BD_1$ a płaszczyzną:
a) podstawy $ABCD$,
b) ściany bocznej $BCC_1B_1$,
c) ściany bocznej $DCC_1D_1$.




**2.** Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 2 cm, 3 cm i $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego prostopadłościanu a jego ścianą o największym polu.

**3.** W sześcianie (rysunek obok) punkt $E$ jest środkiem krawędzi $A_1D_1$. Oblicz sinus kąta, który odcinek $BE$ tworzy:
a) ze ścianą $ABB_1A_1$, b) z podstawą $ABCD$.

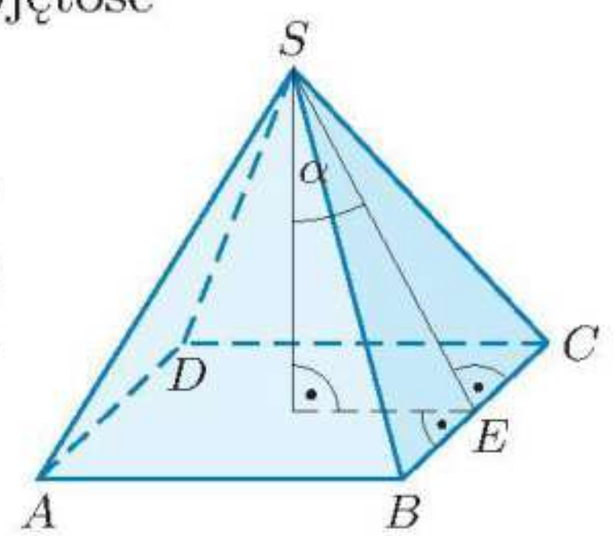



**4.** a) Pole podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 64 cm$^2$, a jego przekątna tworzy z podstawą kąt 45°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

b) Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 cm i tworzy z podstawą kąt 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

**5.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a kąt zawarty między wysokością ściany bocznej a podstawą ma miarę 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

**6.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa 6 cm, a kąt między tą wysokością a ścianą boczną ma miarę $\alpha$ (rysunek obok). Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że:
a) $\alpha = 45°$, b) $\alpha = 30°$.




**7.** a) Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy jego krawędź boczna.

b) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy wysokość jego ściany bocznej.

**8.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy 4 cm kąt między wysokością ostrosłupa a jego ścianą boczną ma miarę $30^\circ$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

**9.** Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy 6 cm i objętości równej $18\sqrt{3}$ cm$^3$. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą ostrosłupa tworzy:

a) krawędź boczna, b) wysokość ściany bocznej.

**10.** Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy, a dwie pozostałe krawędzie są do podstawy nachylone pod kątem $60^\circ$ i mają długość $5\sqrt{3}$ cm każda. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

D **11.** Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $d$ i tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt $\alpha$. Wyznacz wysokość tego graniastosłupa. Uzasadnij, że zadanie ma rowiązanie dla $\alpha < 60^\circ$.

## Powtórzenie

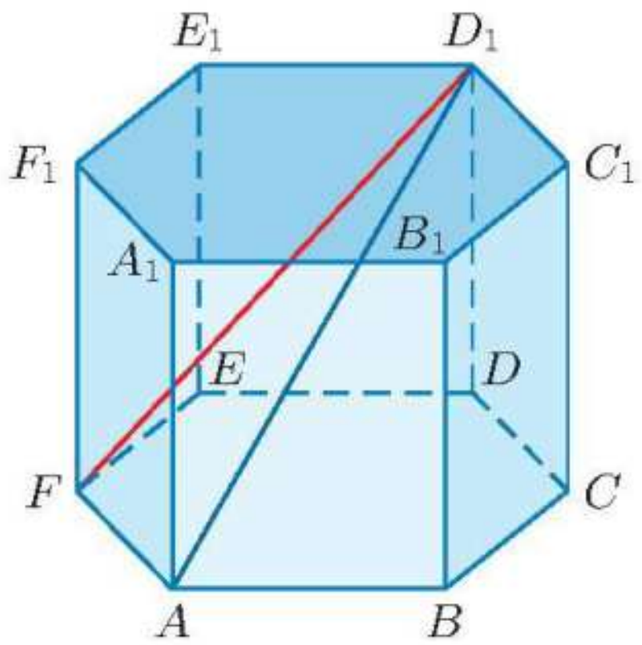
**12.** Przedstaw na rysunku graniastosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz: kąt $\alpha$ między przekątną ściany bocznej a podstawą, kąt $\beta$ między przekątną graniastosłupa a podstawą, kąt $\gamma$ między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną.

**13.** Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz: kąt $\alpha$ między krawędzią boczną a podstawą, kąt $\beta$ między wysokością ostrosłupa a ścianą boczną, kąt $\gamma$ między wysokością ściany bocznej a podstawą.

**14.** Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 5 i wysokości 6 (rysunek obok).

a) Oblicz sinus kąta, który przekątna $AD_1$ tworzy z podstawą tego graniastosłupa.

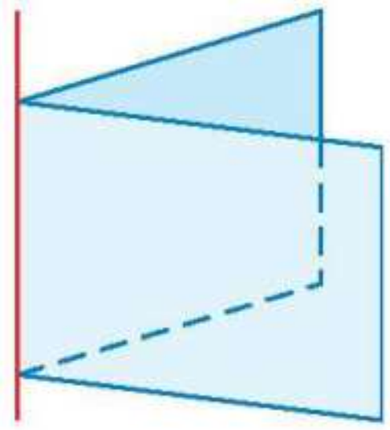
b) Oblicz tangens kąta, który przekątna $FD_1$ tworzy z podstawą tego graniastosłupa.



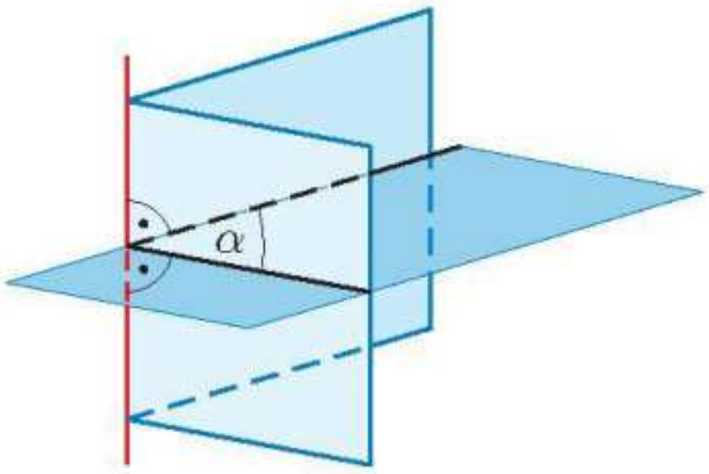

**15.** Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym kąt między wysokością ściany bocznej a podstawą ma miarę $\alpha$, a pole podstawy jest równe $P$.

a) $\alpha = 30^\circ$, $P = 16$ b) $\alpha = 45^\circ$, $P = 18$ c) $\alpha = 60^\circ$, $P = 36$

# 2.8. Kąt dwuścienny



Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części, łącznie z półpłaszczyznami, nazywamy **kątem dwuściennym**, półpłaszczyzny – **ścianami** tego kąta, a wspólną krawędź półpłaszczyzn – jego **krawędzią**.

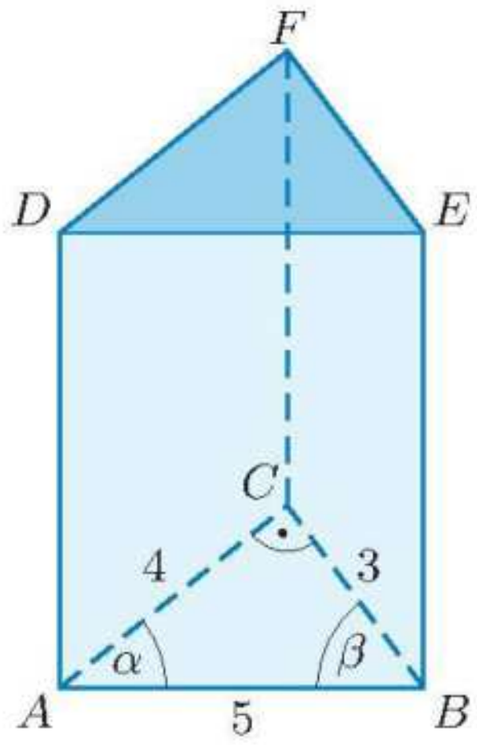



**Miarą kąta dwuściennego** nazywamy miarę kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.

W dalszym ciągu, kiedy będziemy mówić o kącie dwuściennym, będziemy rozważać ten z kątów między półpłaszczyznami, który ma mniejszą miarę.

### Przykład 1

Dany jest graniastosłup prosty trójkątny, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4 i 5. Podaj miary kątów, które tworzą ze sobą ściany boczne tego graniastosłupa.




Ściany $BCFE$ i $ACFD$ tworzą kąt prosty.

Ściany $ABED$ i $ACFD$ tworzą kąt $\alpha$ taki, że:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \text{ więc } \alpha \approx 37^\circ$$

Ściany $ABED$ i $BCFE$ tworzą kąt $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53^\circ$.

### Ćwiczenie 1

Podaj miarę kąta utworzonego przez dwie sąsiednie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego:

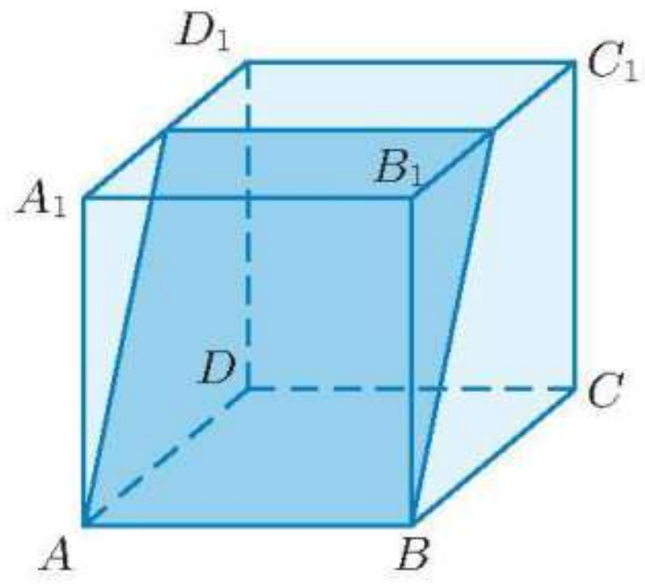
a) trójkątnego, b) pięciokątnego, c) sześciokątnego.

### Ćwiczenie 2

Oblicz cosinus kąta, który z podstawą $ABCD$ sześcianu tworzy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołki $A$ i $B$ oraz:

a) środki krawędzi $A_1D_1$ i $B_1C_1$ (rysunek obok),

b) środki krawędzi $DD_1$ i $CC_1$.

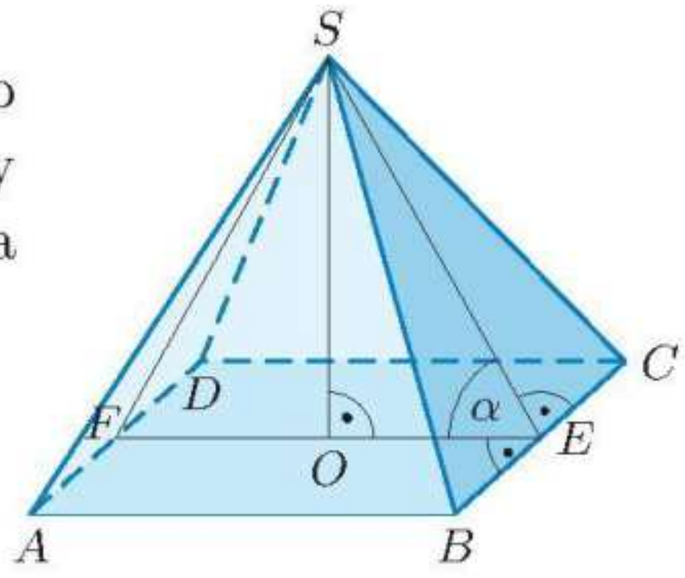


### Przykład 2

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wysokość jest równa $5\sqrt{3}$, a krawędź podstawy ma długość 10. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.
Zauważmy, że proste $FE$ i $SE$ są prostopadłe do $BC$ – krawędzi kąta dwuściennego zawartego między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa, czyli miara tego kąta jest miarą kąta płaskiego $FES$.
Zatem szukamy miary kąta $\alpha$ w trójkącie $OES$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|OS|}{|OE|} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}, \text{ czyli } \alpha = 60^\circ$$




### Ćwiczenie 3

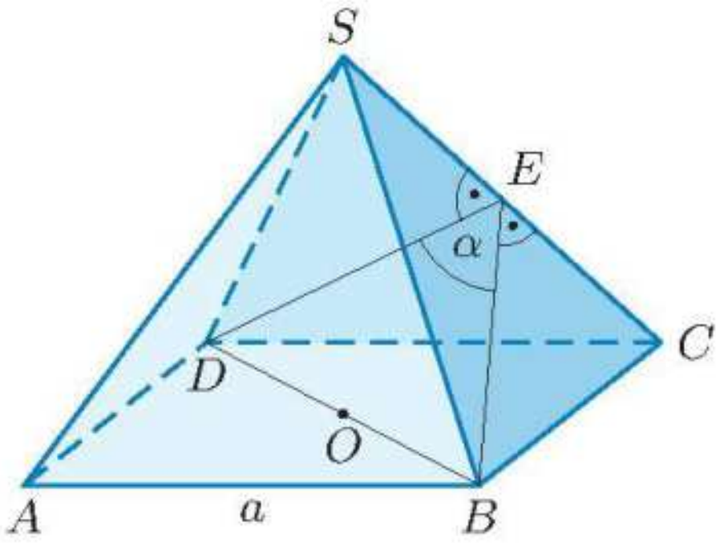
a) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12 cm, a jego wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

b) Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do jego podstawy pod kątem $45^\circ$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

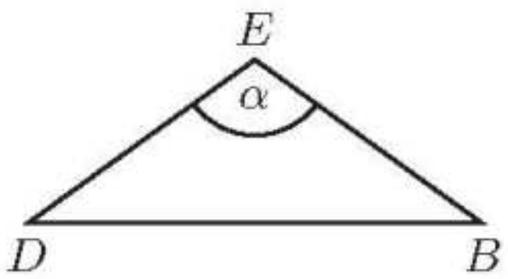
### Przykład 3

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

Szukamy cosinusa kąta $BED$, gdzie $E$ jest wierzchołkiem kąta płaskiego otrzymanego przez przekrój płaszczyzną prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego zawartego między sąsiednimi ścianami ostrosłupa.
Oznaczmy długość krawędzi ostrosłupa przez $a$.
Wówczas przekątna podstawy $|DB| = a\sqrt{2}$.




Odcinek $EB$ jest wysokością trójkąta równobocznego $BCS$ o boku $a$, zatem $|EB| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Podobnie $|ED| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.




Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta $DBE$:

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \;/:a^2$$

$$2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2\cdot\frac{3}{4}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

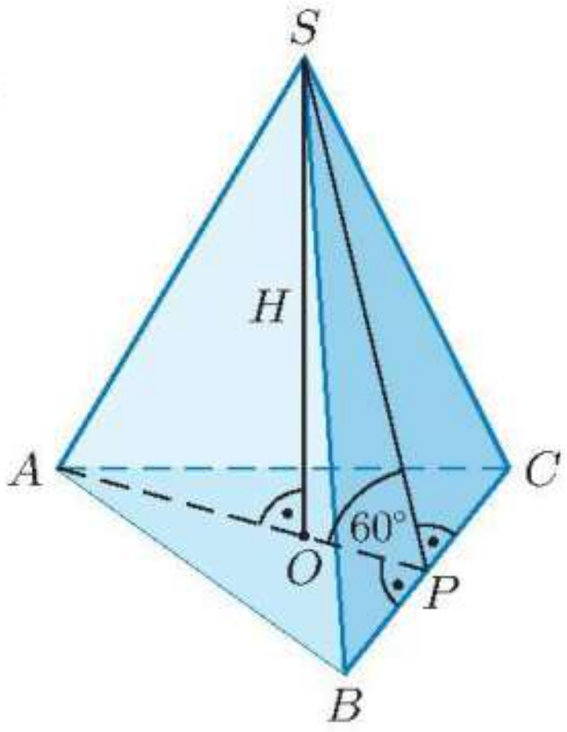
Zauważ, że $\cos\alpha < 0$, więc $\alpha$ jest kątem rozwartym.

### Ćwiczenie 4

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od jego krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

### Przykład 4

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z jego podstawą kąt $60^\circ$ (rysunek poniżej). Krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz objętość tego ostrosłupa.




Trójkąt $ABC$ jest trójkątem równobocznym, a punkt $O$ jest środkiem opisanego na nim okręgu, zatem:

$$|AP| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad |OP| = \frac{1}{3}|AP| = \sqrt{3}$$

Obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$H = |OP| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

Zatem objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$$

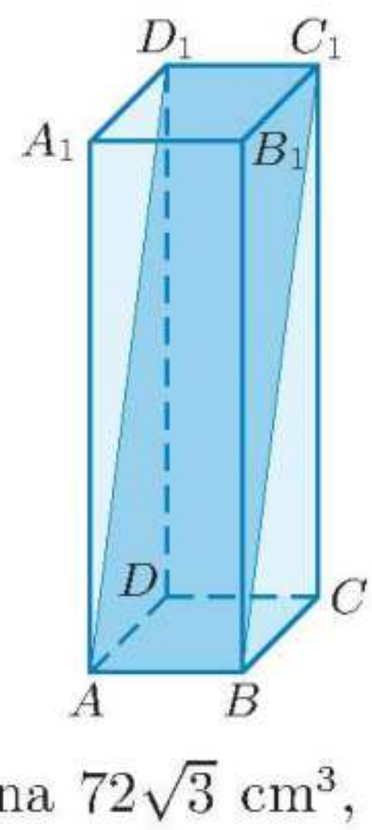
### Ćwiczenie 5

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt $45^\circ$. Pole podstawy jest równe $16\sqrt{3}$ cm$^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

## Zadania

**1.** Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 7 cm i 24 cm. Oblicz miary kątów zawartych między sąsiednimi ścianami bocznymi tego graniastosłupa.

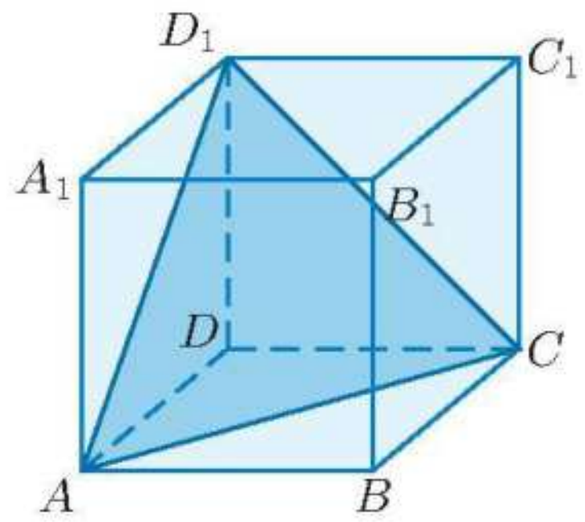
**2.** Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego pole powierzchni bocznej jest równe 480 cm$^2$, a pole powierzchni całkowitej – 530 cm$^2$. Oblicz sinus kąta, który tworzy płaszczyzna zawierająca krawędzie $AB$ i $C_1D_1$ tego graniastosłupa (rysunek obok) z jego podstawą.




**3.** a) Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $72\sqrt{3}$ cm$^3$, a jego wysokość jest równa 2 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

b) Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm.

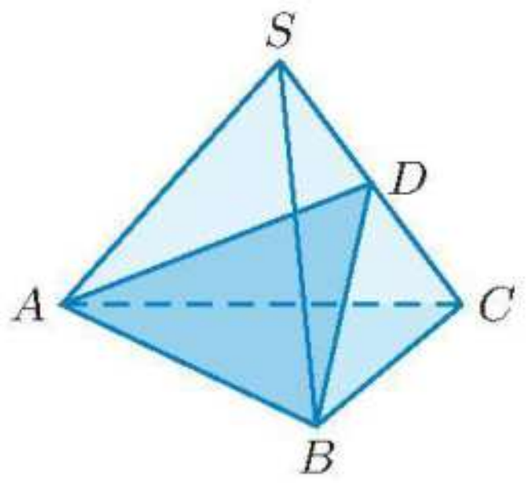
**4.** Oblicz cosinus kąta, który z podstawą $ABCD$ sześcianu tworzy płaszczyzna zawierająca trójkąt $ACD_1$ (rysunek obok).




**5.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między ścianą boczną a podstawą ma miarę $30^\circ$. Oblicz sinus kąta, który tworzy krawędź boczna tego ostrosłupa z jego podstawą.

**6.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 24 cm, a jego wysokość jest równa 12 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

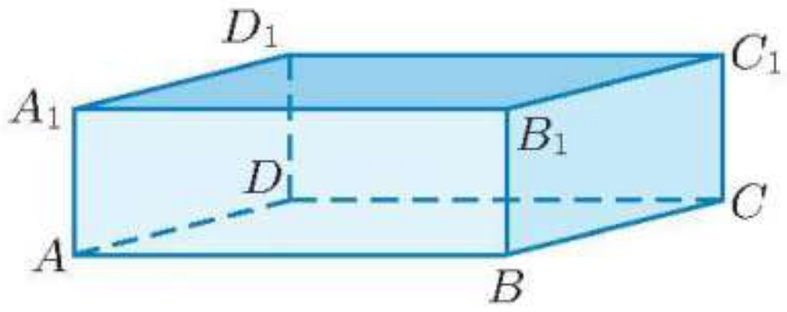
**7.** Dany jest czworościan foremny $ABCS$ (rysunek obok). Punkt $D$ jest środkiem krawędzi $CS$. Oblicz cosinus kąta zawartego między płaszczyzną $ABD$ a płaszczyzną zawierającą podstawę $ABC$ tego ostrosłupa.




**8.** Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $20\sqrt{3}$ cm$^3$, a koło opisane na jego podstawie ma pole równe $16\pi$ cm$^2$. Oblicz tangens kąta zawartego między ścianą boczną tego ostrosłupa a jego podstawą.

## Powtórzenie

**9.** Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości: $|AB| = 3$ cm, $|AD| = 2$ cm, $|AA_1| = 1$ cm (rysunek obok). Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego prostopadłościanu tworzy płaszczyzna:
a) $ABC_1D_1$, b) $BCD_1A_1$.




**10.** Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz: kąt $\alpha$ między ścianą boczną a podstawą, kąt $\beta$ między sąsiednimi ścianami bocznymi, kąt $\gamma$ między przeciwległymi ścianami bocznymi.

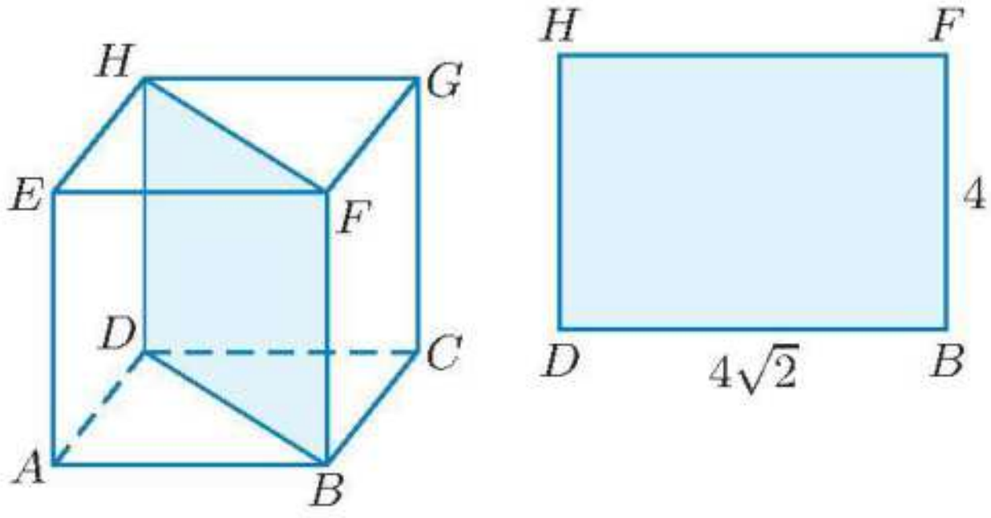
**11.** Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy trójkątny i zaznacz: kąt $\alpha$ między ścianą boczną a podstawą, kąt $\beta$ między sąsiednimi ścianami bocznymi.

**12.** Oblicz sinus kąta, który ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z jego podstawą, jeśli wiadomo, że:
a) krawędź podstawy ma długość 18 cm, a wysokość jest równa 12 cm,
b) wszystkie krawędzie ostrosłupa mają długość 10 cm.

# 2.9. Przekroje prostopadłościanów

### Przykład 1

Sześcian o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez równoległe przekątne jego podstaw (rysunek obok). Oblicz pole otrzymanego przekroju.

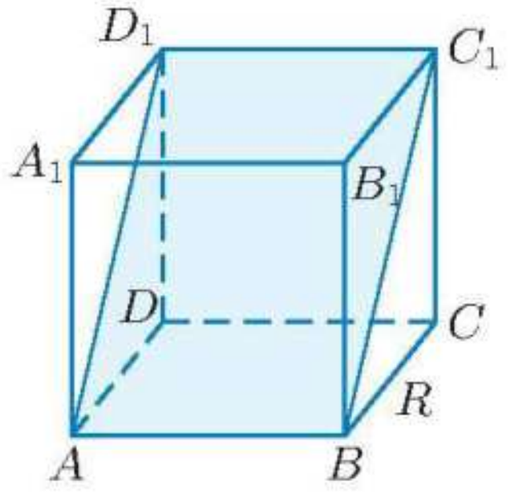



Dany przekrój jest częścią wspólną sześcianu i płaszczyzny przechodzącej przez wierzchołki $D$, $B$, $F$ i $H$ – jest to prostokąt o polu:

$$P = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\ [\text{cm}^2]$$

### Ćwiczenie 1

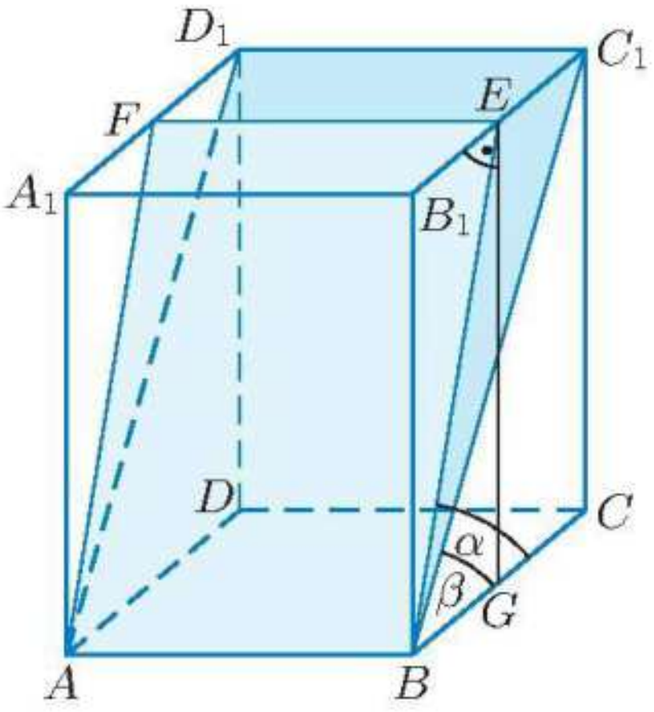
Dany jest sześcian o krawędzi 5 cm (rysunek obok). Oblicz pole przekroju tego sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez punkty $A$, $B$ i $C_1$ (rysunek obok).




### Przykład 2

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 8 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt $\alpha$ taki, że $\sin\alpha = \frac{8}{9}$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zauważmy, że płaszczyzna przechodząca przez krawędzie $AB$ i $C_1D_1$ graniastosłupa tworzy z podstawą kąt $\beta$ (rysunek obok), którego tangens jest równy $\frac{4}{3}$. Zatem $\beta \approx 53^\circ$. Natomiast $\sin\alpha = \frac{8}{9}$, więc $\alpha \approx 62^\circ$. Ponieważ $\alpha > \beta$, przekrój $ABEF$ jest prostokątem, którego jeden bok $(EF)$ jest zawarty w górnej podstawie graniastosłupa.




$|EG| = 8$ cm oraz $\frac{|EG|}{|BE|} = \sin\alpha$, stąd:

$$|BE| = \frac{|EG|}{\sin\alpha} = \frac{8}{\frac{8}{9}} = 9\ [\text{cm}]$$

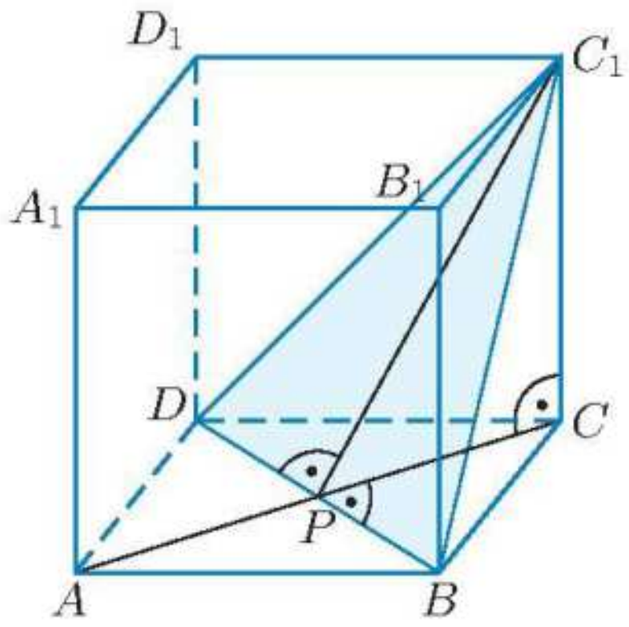
Obliczamy pole przekroju: $P_{ABEF} = |AB| \cdot |BE| = 6 \cdot 9 = 54\ [\text{cm}^2]$.

### Ćwiczenie 2

Sześcian o krawędzi 8 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt $\alpha$. Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeśli wiadomo, że: a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

### Przykład 3

Oblicz pole przekroju sześcianu o krawędzi 8 cm płaszczyzną $BDC_1$ (rysunek obok).




Oznaczmy przez $P$ punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$. Wówczas:

$$|PC| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $PCC_1$:
$|PC_1|^2 = (4\sqrt{2})^2 + 8^2 = 96$, skąd $|PC_1| = 4\sqrt{6}$ cm.
Zatem pole przekroju:

$$P_{DBC_1} = \frac{1}{2}|DB| \cdot |PC_1| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6} = 32\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

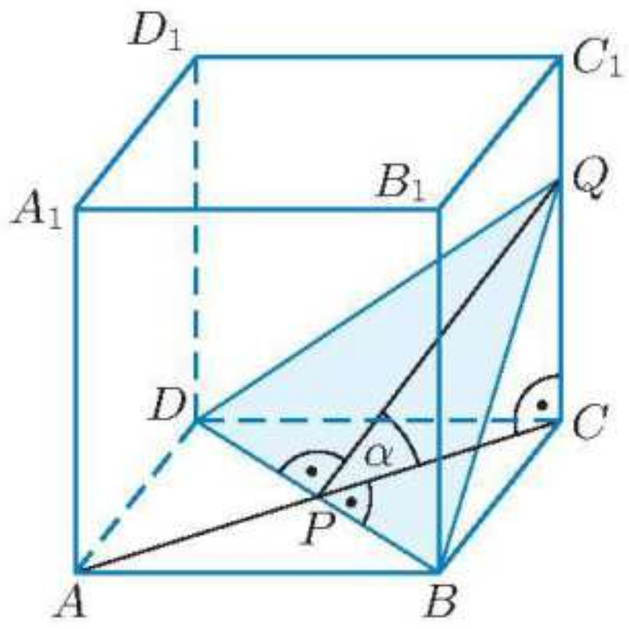
### D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że płaszczyzna $BC_1D$ w przykładzie 3 tworzy z podstawą sześcianu kąt $\alpha$ taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

### Ćwiczenie 4

Sześcian o krawędzi 10 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną $BD$ dolnej podstawy oraz punkt $Q$ należący do krawędzi $CC_1$ (rysunek obok). Płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą kąt $\alpha$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

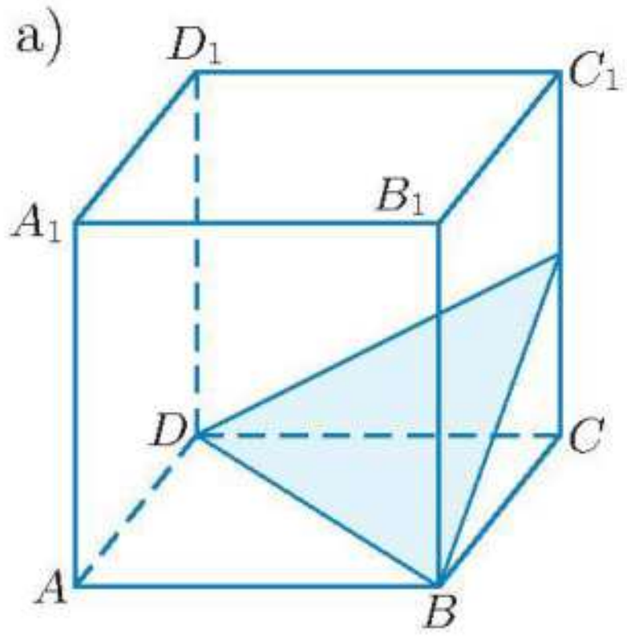
a) $\alpha = 30^\circ$ b) $\alpha = 45^\circ$




### Ćwiczenie 5

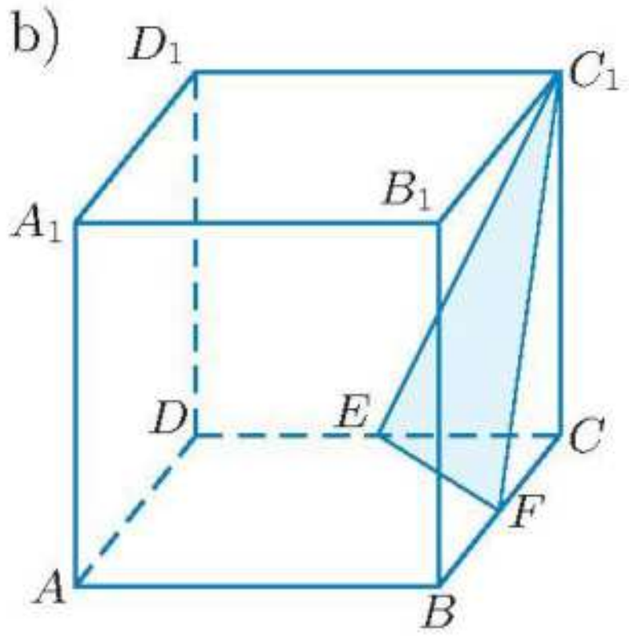
Oblicz pole przekroju sześcianu przedstawionego na rysunku poniżej, jeżeli wiadomo, że krawędź sześcianu ma długość 6 cm.

a)



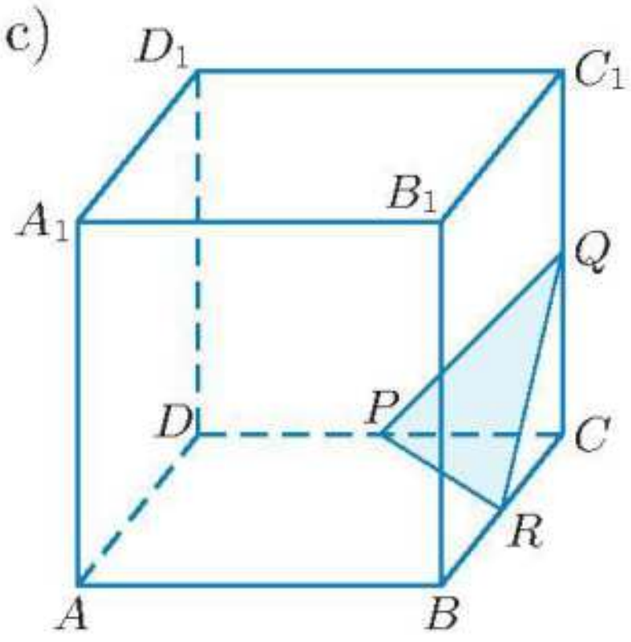

Płaszczyzna przekroju przechodzi przez przekątną podstawy $DB$ oraz środek krawędzi $CC_1$.

b)




Płaszczyzna przekroju przechodzi przez środki sąsiednich krawędzi $CD$ i $BC$ (odpowiednio punkty $E$ i $F$) oraz wierzchołek $C_1$.

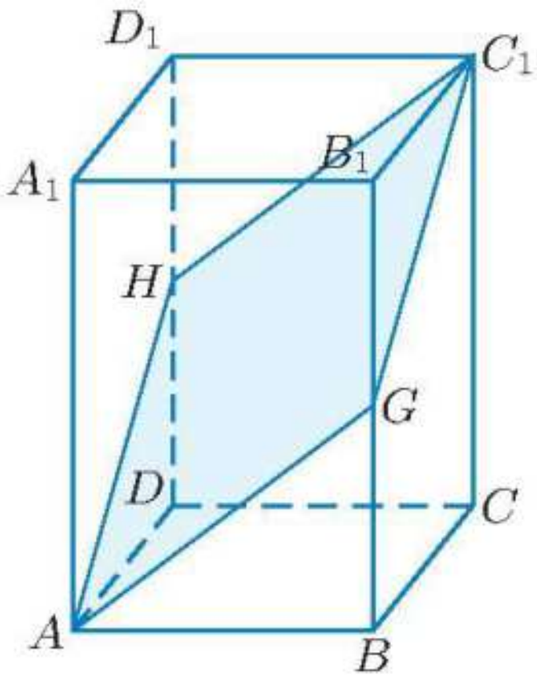
c)




Płaszczyzna przekroju przechodzi przez środki krawędzi $CD$, $BC$ i $CC_1$.

### Przykład 4

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 6 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki $A$ i $C_1$ oraz punkty $G$ i $H$ będące odpowiednio środkami krawędzi $BB_1$ i $DD_1$ (rysunek obok). Oblicz obwód otrzymanego przekroju.




Otrzymany w przekroju czworokąt $AGC_1H$ jest rombem (uzasadnij). Obliczamy długość boku tego rombu:

$$|AG| = \sqrt{|AB|^2 + |BG|^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ [cm]}$$

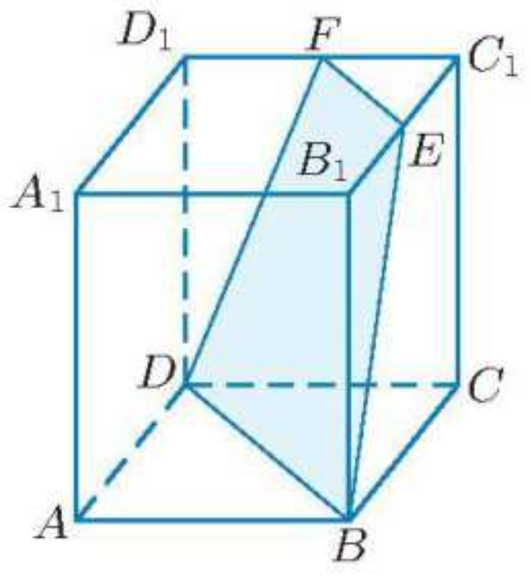
Zatem obwód przekroju jest równy 20 cm.

### Ćwiczenie 6

Sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki $A$ i $C_1$ oraz środki krawędzi $BB_1$ i $DD_1$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

### Przykład 5

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 10 cm i wysokości 12 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy (rysunek obok). Otrzymany przekrój jest trapezem. Oblicz jego obwód.




Długości podstaw tego trapezu:

$$|DB| = 10\sqrt{2} \text{ cm}, \; |EF| = \frac{1}{2}|DB| = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

Długości ramion: $|BE| = |DF| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ [cm].

Obwód trapezu: $Ob = 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 2 \cdot 13 = 26 + 15\sqrt{2}$ [cm].

### Ćwiczenie 7

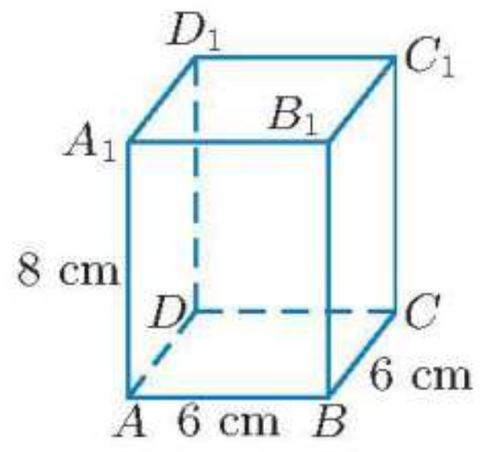
Sześcian o krawędzi 8 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

## Zadania

**1.** Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny (rysunek obok). Oblicz pole przekroju tego graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez:

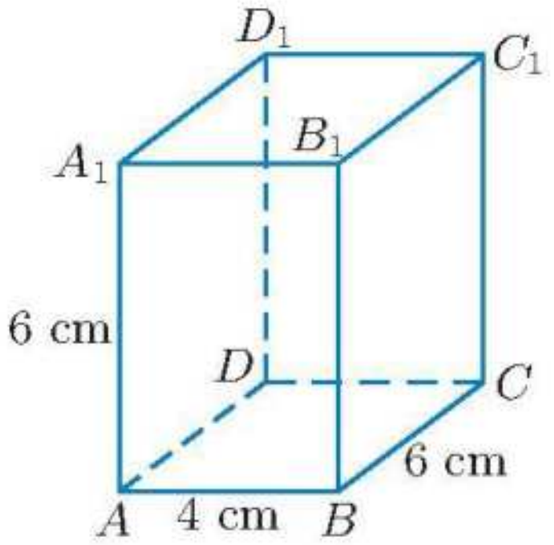
a) krawędź $DD_1$ i środek krawędzi $BC$,

b) środki krawędzi wychodzących z wierzchołka $A$.



**2.** Klocek o wymiarach $3\text{ dm} \times 4\text{ dm} \times 5\text{ dm}$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątne jego przeciwległych ścian i otrzymano dwie części, każda o kształcie graniastosłupa trójkątnego. Dla jakiego cięcia suma pól powierzchni całkowitych tych graniastosłupów jest najmniejsza, a dla jakiego – największa?

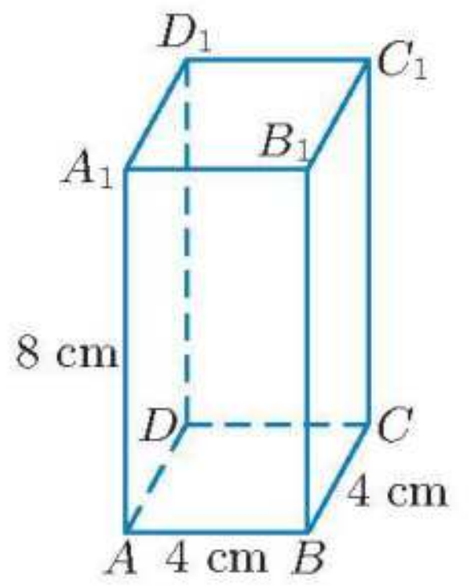
**3.** Płaszczyzna przechodząca przez środki krawędzi wychodzących z wierzchołka $D$ dzieli prostopadłościan (rysunek obok) na dwa wielościany. Oblicz stosunek objętości większego z tych wielościanów do objętości mniejszego wielościanu.




**4.** Prostopadłościan (rysunek obok) przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi $BB_1$ i $DD_1$. Oblicz obwód i pole otrzymanego przekroju, jeśli wiadomo, że należą do niego również punkty:

a) $A$ i $C_1$,

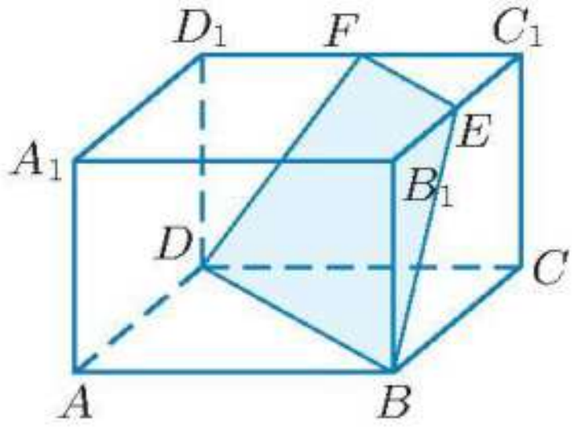
b) $P$ i $Q$, gdzie $P$ jest takim punktem krawędzi $AA_1$, że $|PA| = \frac{1}{8}|AA_1|$, a $Q$ – takim punktem krawędzi $CC_1$, że $|QC| = \frac{7}{8}|CC_1|$.




**5.** Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 4 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki $B$ i $D$ oraz środki krawędzi $B_1C_1$ i $D_1C_1$ (rysunek obok). Oblicz:

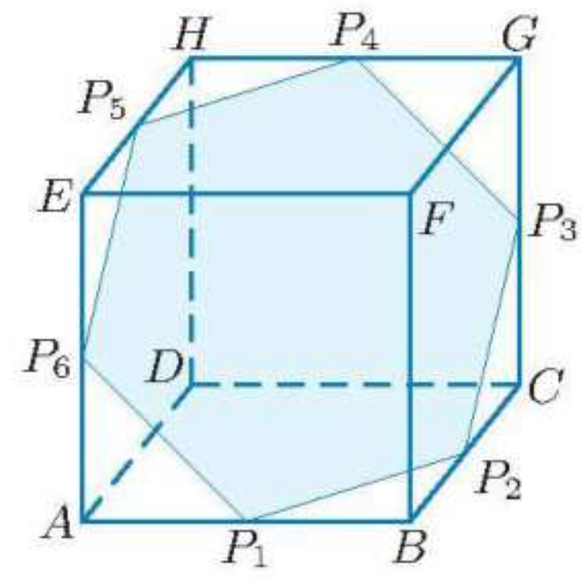
a) obwód otrzymanego przekroju,

b) tangens kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą tego graniastosłupa.

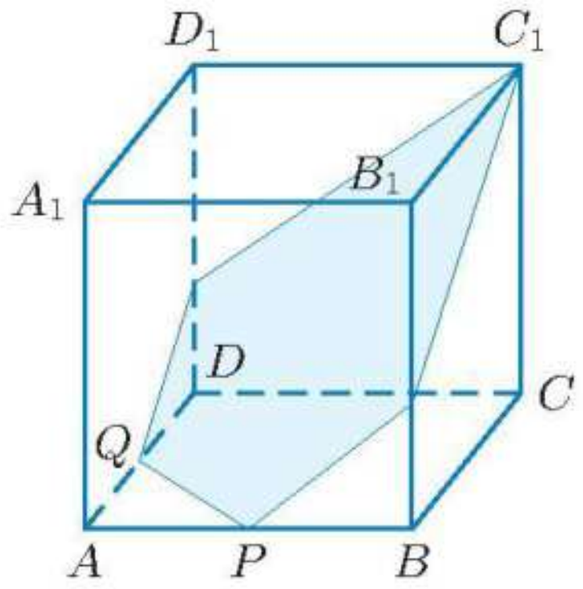



D **6.** Przekrojem sześcianu o krawędzi $a$ jest sześciokąt $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, którego wierzchołki są środkami odpowiednich krawędzi sześcianu (rysunek obok). Uzasadnij, że otrzymany sześciokąt jest foremny. Wyznacz jego pole.

**7.** Sześcian o krawędzi 6 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt $\alpha$ taki, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.



**8.** Sześcian o krawędzi 4 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy (punkty $P$ i $Q$ na rysunku obok) oraz wierzchołek $C_1$. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt $\alpha$. Oblicz cosinus kąta $\alpha$.

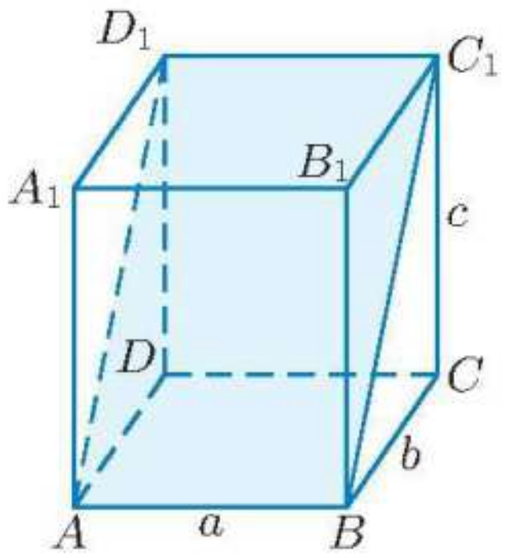



## Powtórzenie

**9.** Prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędzie $AB$ i $C_1D_1$ (rysunek obok). Oblicz pole otrzymanego przekroju oraz sinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą.

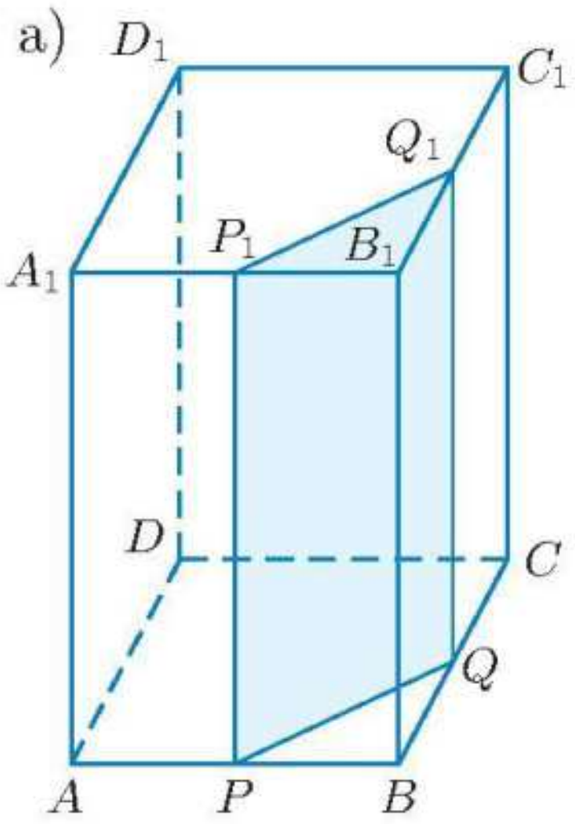
a) $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm

b) $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $c = 24$ cm



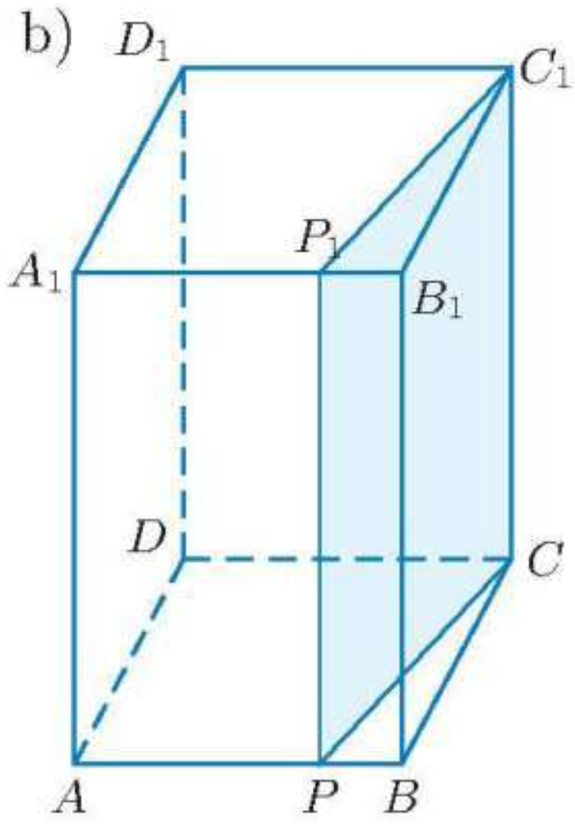

**10.** Na poniższym rysunku przedstawiono przekrój graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 6 cm płaszczyzną równoległą do krawędzi bocznych. Oblicz pole tego przekroju.

a)



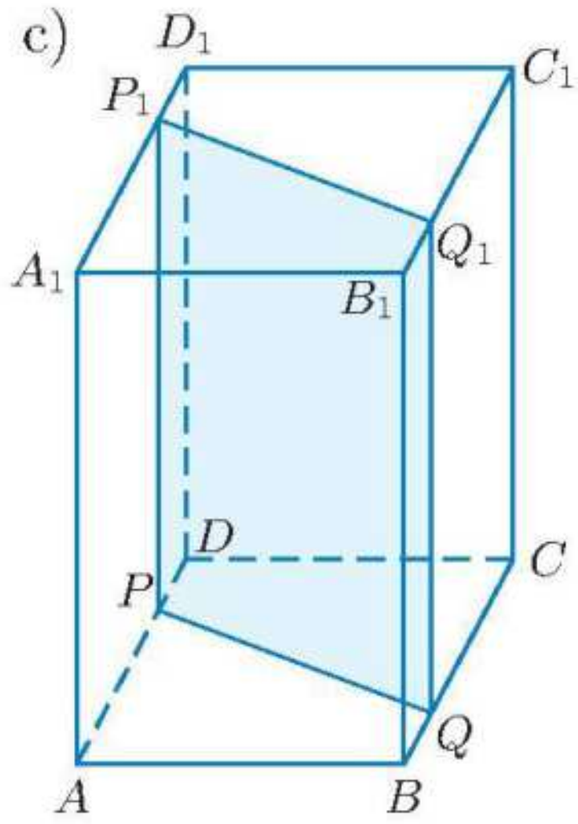

$|PB| = |QB| = 2$ cm

b)




$|PB| = 1$ cm

c)



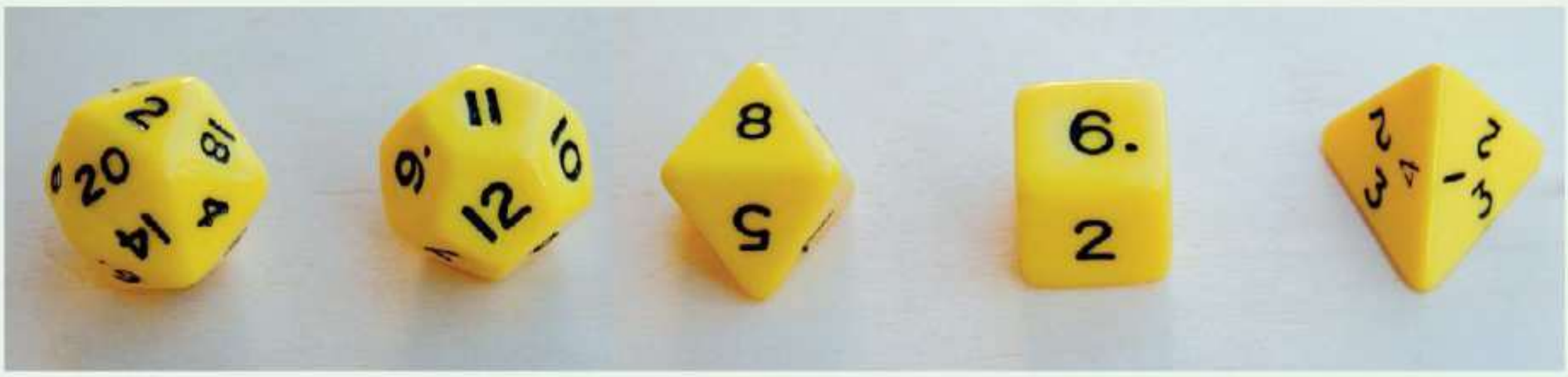

$|PD| = |BQ| = 1$ cm

**11.** Sześcian o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Oblicz pola powierzchni całkowitych i objętości otrzymanych w ten sposób wielościanów.

**12.** Przekrojem prostopadłościanu o wymiarach 4 cm $\times$ 4 cm $\times$ 6 cm jest trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród wierzchołków prostopadłościanu. Oblicz pole tego trójkąta.

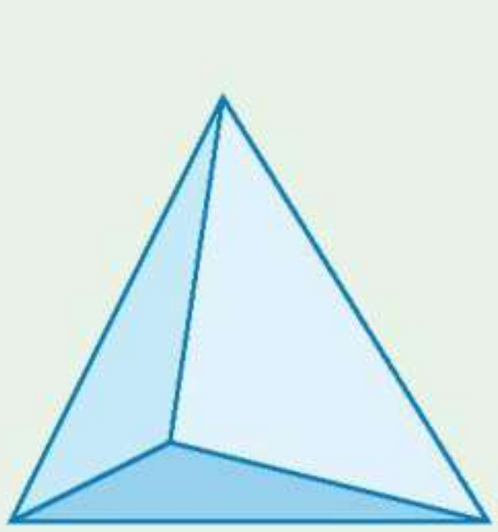
# 2.10. Zagadnienia uzupełniające

## Wielościany foremne

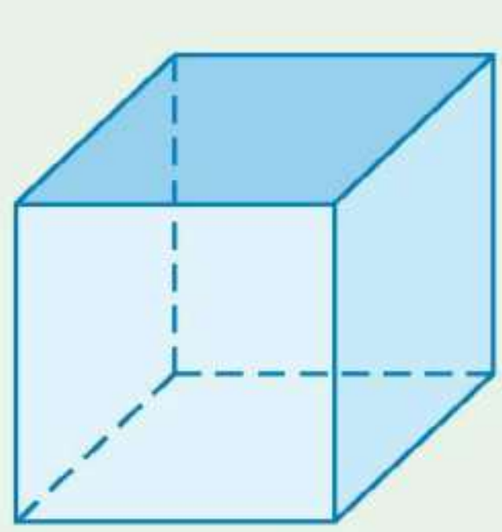



**Wielościanem foremnym (bryłą platońską)** nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i w każdym wierzchołku zbiega się jednakowa liczba ścian.

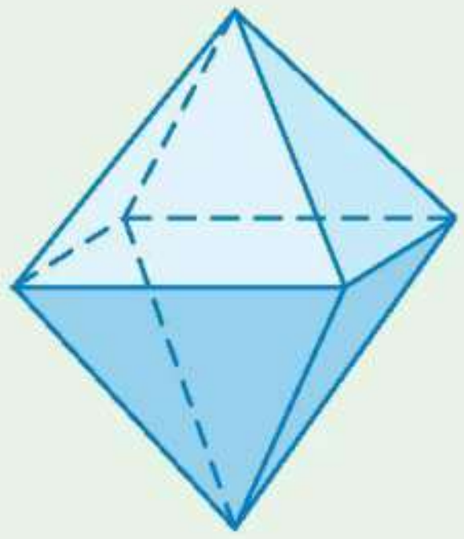
Istnieje pięć wielościanów foremnych. Wszystkie znane były już w starożytności (nazwy greckie podane w nawiasach pochodzą od greckich nazw liczb 4, 6, 8, 12 i 20).



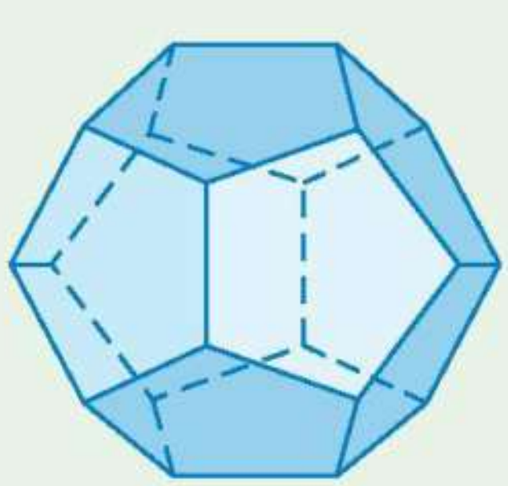
Czworościan foremny (tetraedr) ma cztery ściany będące trójkątami równobocznymi.



Sześcian (heksaedr) ma sześć ścian będących kwadratami.

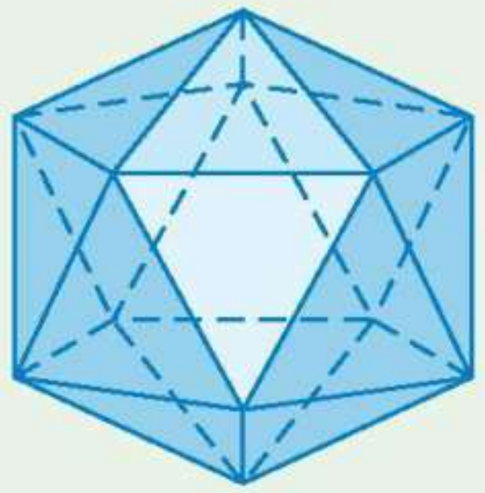


Ośmiościan foremny (oktaedr) ma osiem ścian będących trójkątami równobocznymi.

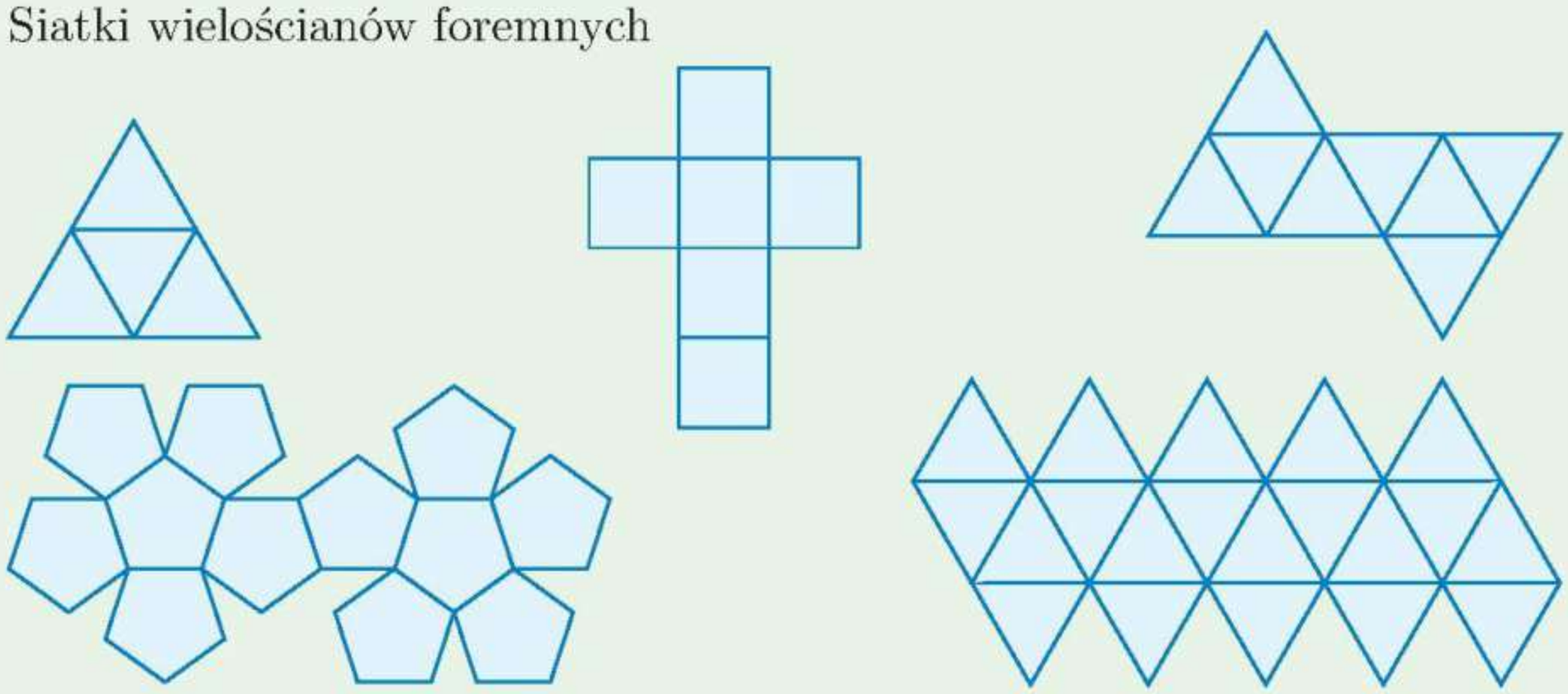


Dwunastościan foremny (dodekaedr) ma dwanaście ścian będących pięciokątami foremnymi.

Dwudziestościan foremny (ikosaedr) ma dwadzieścia ścian będących trójkątami równobocznymi.



Siatki wielościanów foremnych

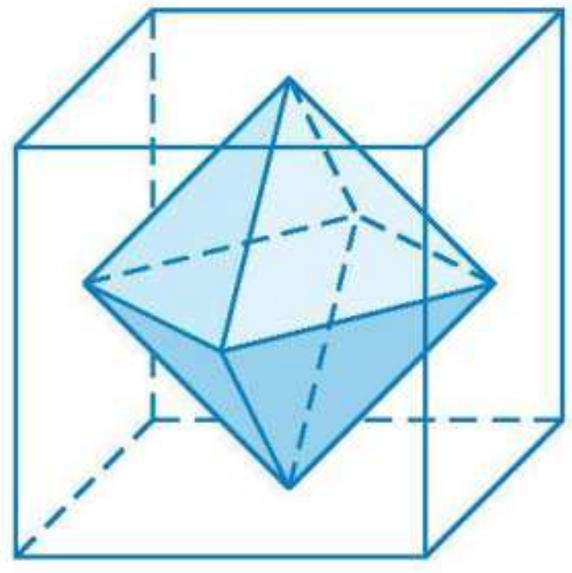


**1.** Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i uzupełnij dane dotyczące wielościanów foremnych. Sprawdź, czy dla każdego z tych wielościanów spełniony jest wzór Eulera: $s - k + w = 2$, gdzie $s$ oznacza liczbę ścian, $k$ – liczbę krawędzi, $w$ – liczbę wierzchołków.

| Wielościan foremny | Liczba ścian | Liczba krawędzi | Liczba wierzchołków |
|---|---|---|---|
| czworościan | ? | ? | ? |
| sześcian | 6 | 12 | 8 |
| ośmiościan | ? | ? | ? |
| dwunastościan | ? | ? | ? |
| dwudziestościan | ? | ? | ? |

**2.** Oblicz pole powierzchni i objętość ośmiościanu foremnego, którego krawędź ma długość 4 cm.

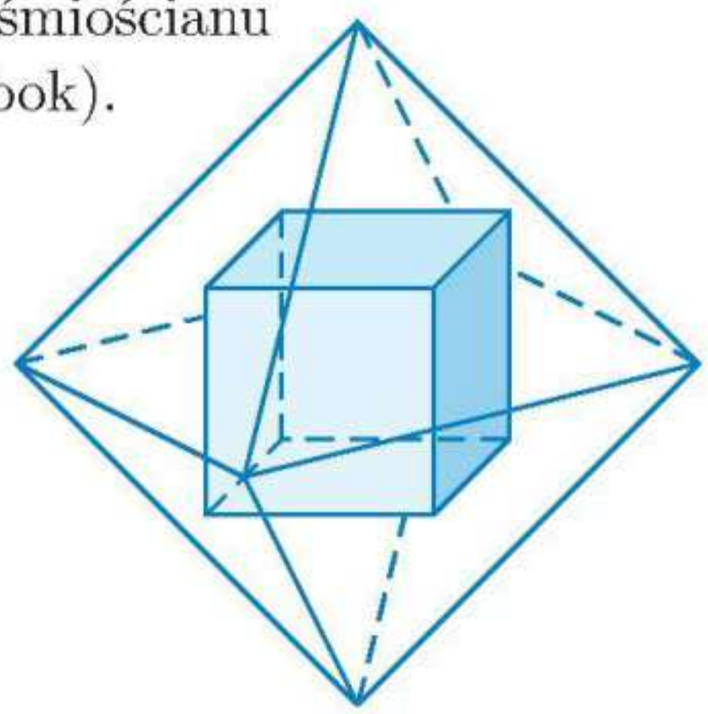
**3.** Łączymy odpowiednio środki ścian sześcianu i otrzymujemy ośmiościan foremny (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni i objętość tego ośmiościanu, jeśli wiadomo, że krawędź sześcianu ma długość 8 cm.



**4.** Przekrój ośmiościanu foremnego o krawędzi 6 cm płaszczyzną, która przechodzi przez jego dwa przeciwległe wierzchołki oraz środki dwóch przeciwległych krawędzi, jest rombem. Oblicz pole tego rombu.

**5.** Pole powierzchni czworościanu foremnego jest dwa razy większe od pola powierzchni ośmiościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych wielościanów.

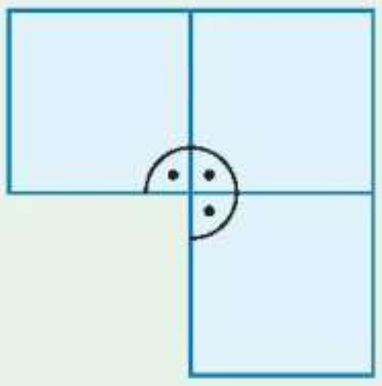
**6.** Łączymy odpowiednio środki ciężkości ścian ośmiościanu foremnego i otrzymujemy sześcian (rysunek obok). Oblicz objętość tego sześcianu, jeśli wiadomo, że krawędź ośmiościanu ma długość 4 cm.



**7.** Ściany wielościanu foremnego malujemy w ten sposób, aby żadne dwie ściany mające wspólną krawędź nie były tego samego koloru. Jakiej najmniejszej liczby kolorów należy użyć do pomalowania:
a) czworościanu, b) sześcianu, c) ośmiościanu?

**8.** Dwa czworościany foremne tej samej wielkości złączono podstawami i w ten sposób otrzymano wielościan o sześciu ścianach. Narysuj otrzymany wielościan. Czy jest on foremny?

■ Dlaczego istnieje tylko pięć wielościanów foremnych?

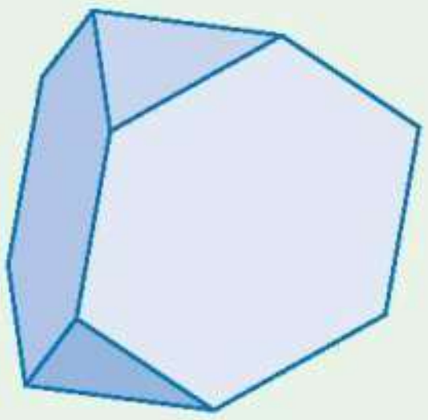


W każdym wierzchołku wielościanu spotykają się co najmniej jego trzy ściany. Na przykład w sześcianie są to trzy kwadraty – fragment siatki przedstawiający ściany mające wspólny wierzchołek przedstawiono na rysunku obok. W każdym fragmencie siatki wielościanu, zawierającym ściany mające wspólny wierzchołek, suma kątów przy tym wierzchołku musi być mniejsza od 360°. Zatem jeśli ścianą wielościanu jest trójkąt równoboczny, to przy jednym wierzchołku mogą się znajdować trzy trójkąty (czworościan foremny), cztery trójkąty (ośmiościan foremny) lub pięć trójkątów (dwudziestościan foremny). W przypadku sześciu trójkątów otrzymalibyśmy 360°.

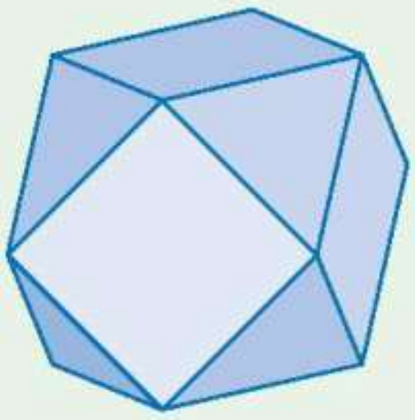


Istnieje tylko jeden wielościan foremny, którego ścianami są pięciokąty i nie istnieją wielościany foremne, których ścianami są $n$-kąty dla $n > 5$ (uzasadnij). Zatem istnieje tylko pięć wielościanów foremnych.

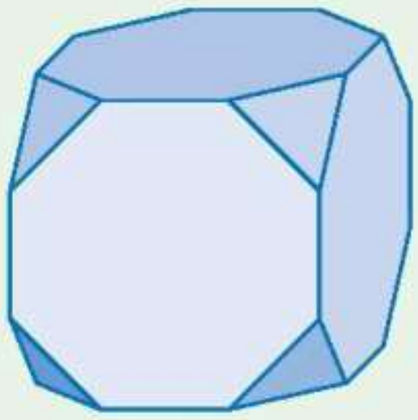
## Bryły Archimedesa



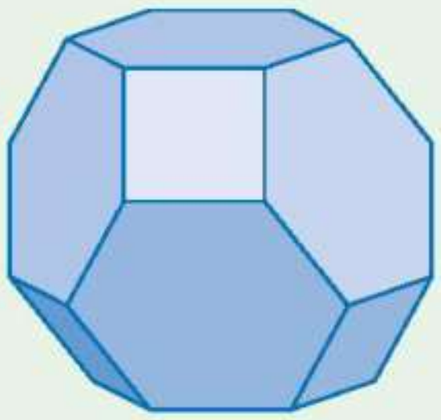
czworościan ścięty



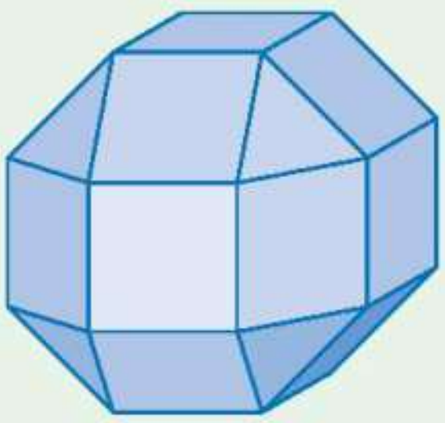
sześcio-ośmiościan



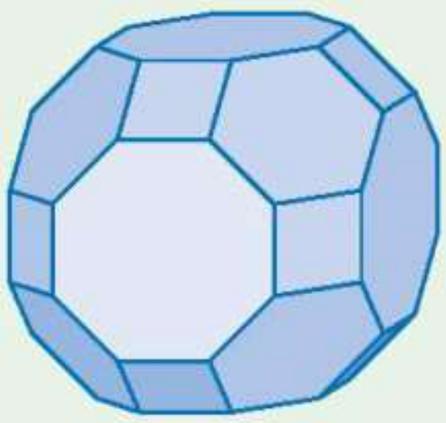
sześcian ścięty



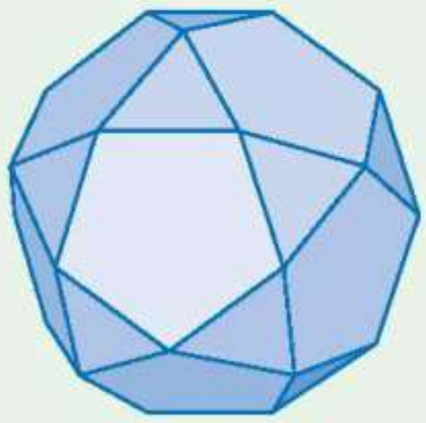
ośmiościan ścięty



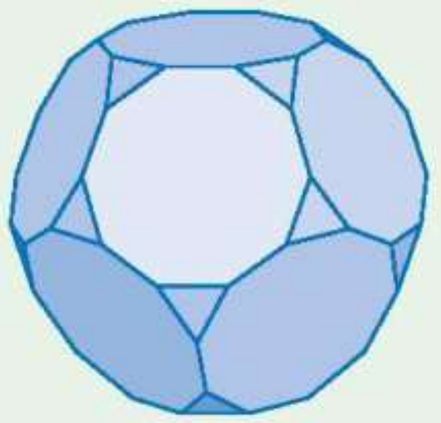
sześcio-ośmiościan rombowy mały



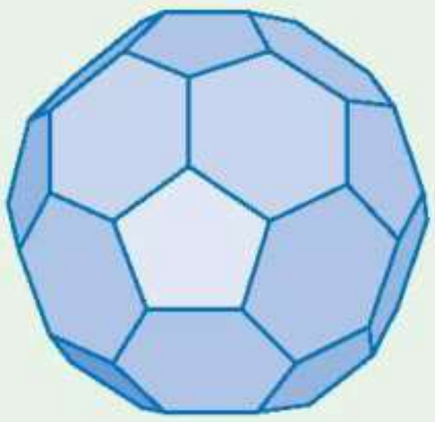
sześcio-ośmiościan rombowy wielki



dwudziesto--dwunastościan



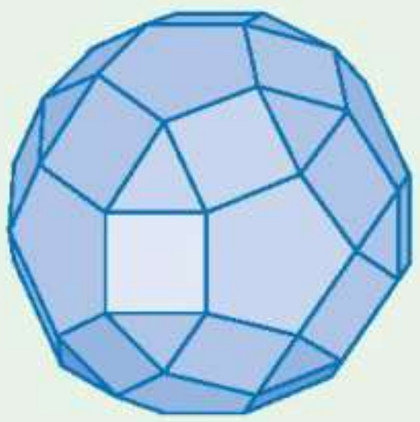
dwunastościan ścięty



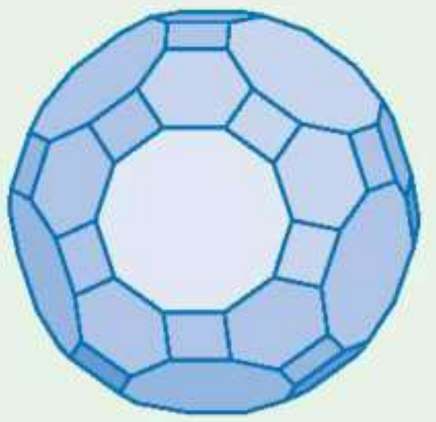
dwudziestościan ścięty



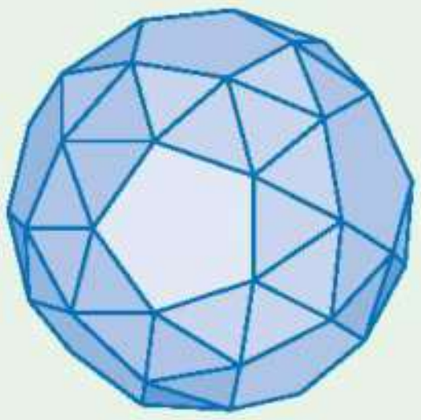
sześcian przycięty



dwudziesto--dwunastościan rombowy mały



dwudziesto--dwunastościan rombowy wielki



dwunastościan przycięty

Na rysunkach przedstawiono 13 **brył Archimedesa** – wielościanów półforemnych. Wszystkie ich ściany są wielokątami foremnymi, nie wszystkie o jednakowej liczbie boków. Wszystkie krawędzie mają jednakową długość.

**9.** Oblicz objętość sześcianu ściętego, którego krawędź ma długość 1 cm.

**10.** Z sześcianu o krawędzi 3 cm odcięto narożniki i otrzymano sześcian ścięty. Oblicz długość jego krawędzi.

# Zestawy powtórzeniowe

## Zestaw I

**1.** Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego ma długość 2, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 24. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeżeli jego podstawą jest:

a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

**2.** Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu, którego przekątna jest o 2 dłuższa od jego krawędzi.

**3.** Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 i jest nachylona do podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{1}{4}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

**4.** Spośród wszystkich prostopadłościanów, których suma długości krawędzi wynosi 488 cm, a stosunek długości krawędzi podstawy jest równy $5:4$, wybieramy ten o największym polu powierzchni całkowitej. Oblicz pole podstawy tego prostopadłościanu.

D **5.** Wykaż, że objętość prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = \sqrt{P_1 P_2 P_3}$, gdzie $P_1, P_2, P_3$ są polami jego ścian o wspólnym wierzchołku.

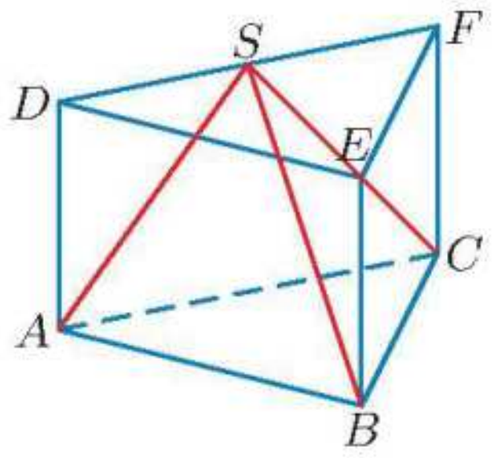
**6.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają taką samą długość. Oblicz cosinus kąta nachylenia:

a) krawędzi bocznej do podstawy, b) ściany bocznej do podstawy.

**7.** Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego jest nachylona do podstawy pod kątem $30^\circ$, a krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest:

a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

**8.** Podstawą graniastosłupa prawidłowego jest trójkąt $ABC$ o boku 6 (rysunek obok). Wysokość graniastosłupa jest równa 4. Środek $S$ krawędzi $DF$ połączono odcinkami z wierzchołkami $A$, $B$ i $C$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa $ABCS$.




**9.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6 cm, a wysokość jego ściany bocznej jest równa 2 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

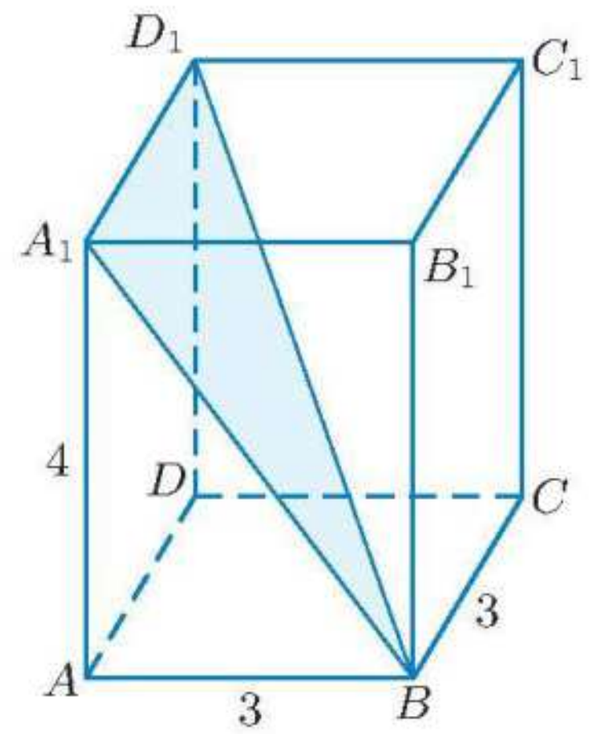
## Zestaw II

**1.** Ściany boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są kwadratami, każdy o polu równym 3. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa oraz długości jego przekątnych.

**2.** Wysokość prostopadłościanu jest równa 4, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 (rysunek obok).

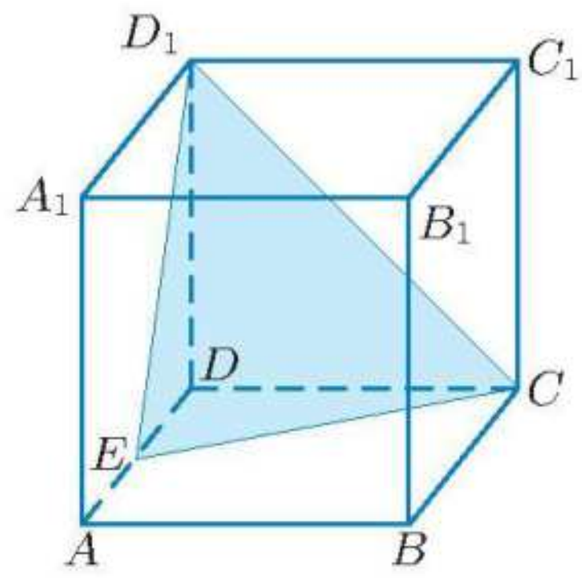
D a) Uzasadnij, że trójkąt $BD_1A_1$ jest prostokątny.

b) Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka.




**3.** W sześcianie o objętości 64 środek $S$ jednej z krawędzi bocznych połączono z wierzchołkami $A$, $B$, $C$, $D$ podstawy. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa $ABCDS$ oraz jego pole powierzchni bocznej.

**4.** Sześcian o krawędzi długości 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki $C$ i $D_1$ oraz środek krawędzi $AD$ (rysunek obok). Oblicz długości boków trójkąta $CD_1E$ oraz cosinus kąta położonego naprzeciwko najdłuższego boku tego trójkąta.




**5.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym pole ściany bocznej jest cztery razy większe od pola podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

**6.** Wysokość ostrosłupa prawidłowego wynosi 6, a promień okręgu opisanego na jego podstawie jest równy 4. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest: a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

**7.** Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy większe od jego pola podstawy. Oblicz tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

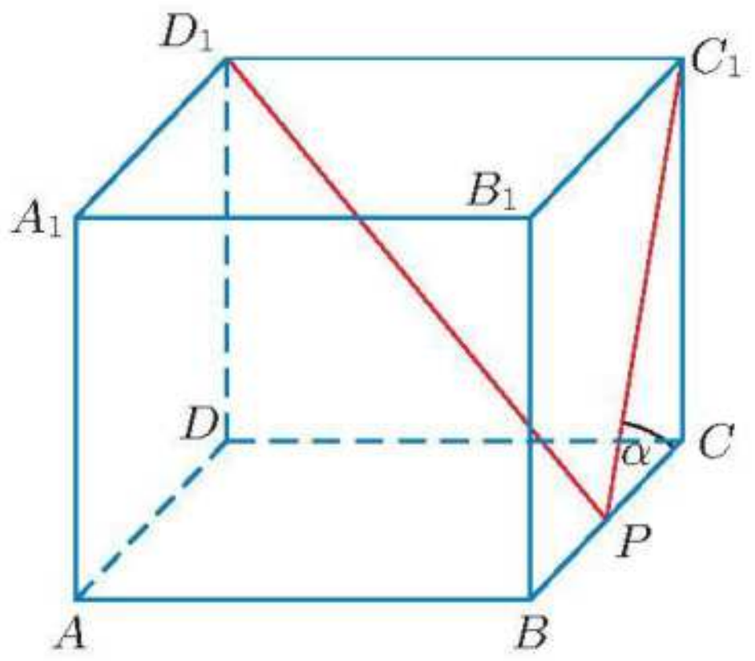
**8.** Sześcian o polu powierzchni całkowitej równym 150 $cm^2$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt $\alpha$. Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeśli:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

## Sposób na zadanie

### Przykład

Punkt $P$ jest środkiem krawędzi $BC$ podstawy prostopadłościanu (rysunek obok). Oblicz objętość tego prostopadłościanu, jeżeli wiadomo, że $|PD_1| = 5\sqrt{13}$, $|PC_1| = 3\sqrt{29}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$.




Niech $x = |PC|$, wówczas $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|CC_1|}{x}$, czyli $|CC_1| = \frac{5}{2}x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $PCC_1$ i otrzymujemy:

$$x^2 + \left(\frac{5}{2}x\right)^2 = (3\sqrt{29})^2$$

Stąd $\frac{29}{4}x^2 = 9 \cdot 29$, zatem $x^2 = 36$, czyli $x = 6$.

Obliczamy długości krawędzi prostopadłościanu:

$$|BC| = 2|PC| = 2x = 12$$
$$|CC_1| = \frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$$

Zauważmy, że prosta $D_1C_1$ jest prostopadła do ściany $BCC_1B_1$, jest więc prostopadła do prostej $PC_1$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $PC_1D_1$:

$$|D_1C_1|^2 + |PC_1|^2 = |PD_1|^2$$
$$|D_1C_1|^2 + \left(3\sqrt{29}\right)^2 = \left(5\sqrt{13}\right)^2$$
$$|D_1C_1|^2 + 261 = 325$$
$$|D_1C_1|^2 = 64$$
$$|D_1C_1| = 8$$

Obliczamy objętość prostopadłościanu:

$$V = |BC| \cdot |CC_1| \cdot |D_1C_1| = 12 \cdot 15 \cdot 8 = 1440$$

**Odpowiedź**: Objętość prostopadłościanu jest równa 1440.

W rozwiązaniu tego zadania można też skorzystać z tożsamości trygonometrycznej $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Zauważmy, że:
$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$$

Podstawiamy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$ i otrzymujemy:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{29}{4}$$
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

W trójkącie prostokątnym $PCC_1$: $\frac{|PC|}{|PC_1|} = \cos\alpha$, stąd:

$$|PC| = |PC_1| \cdot \cos\alpha = 3\sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = 6$$

Dalszy ciąg rozwiązania jak wyżej.

## Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

**1.** Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm i jest nachylona do podstawy pod kątem 45°. Pole podstawy tego graniastosłupa jest równe:

**A.** 32 cm$^2$, **B.** 16 cm$^2$, **C.** 8 cm$^2$, **D.** 4 cm$^2$.

**2.** Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 6 cm, a kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do ściany bocznej ma miarę 30°. Przekątna ta ma długość:

**A.** $3\sqrt{2}$ cm, **B.** $3\sqrt{3}$ cm, **C.** $6\sqrt{3}$ cm, **D.** 12 cm.

**3.** Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 3 i 4. Jeśli przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa ma długość $\sqrt{7}$, to jego pole powierzchni całkowitej jest równe:

**A.** $12\sqrt{3}$, **B.** $12 + 5\sqrt{3}$, **C.** $10 + 4\sqrt{3}$, **D.** 13.

**4.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45°. Objętość tego ostrosłupa jest równa:

**A.** $36\sqrt{2}$, **B.** $48\sqrt{2}$, **C.** $72\sqrt{2}$, **D.** $108\sqrt{2}$.

**5.** Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 3 cm przecięto płaszczyzną zawierającą przeciwległe krawędzie jego podstaw. Otrzymany przekrój tworzy z jedną ze ścian bocznych kąt $\alpha$ taki, że $\cos\alpha = 0{,}8$. Pole tego przekroju jest równe:

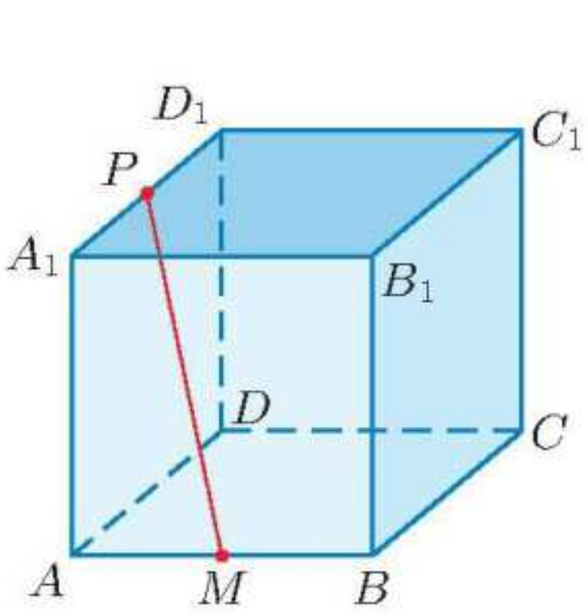
**A.** 8 cm$^2$, **B.** 9 cm$^2$, **C.** 12 cm$^2$, **D.** 15 cm$^2$.

**6.** W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy 2 cm pole podstawy jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe:

**A.** 12 cm$^2$, **C.** $18\sqrt{3}$ cm$^2$,
**B.** 18 cm$^2$, **D.** $36\sqrt{2}$ cm$^2$.

**7.** Punkty $M$ i $P$ są środkami krawędzi sześcianu przedstawionego na rysunku obok. Sinus kąta, który odcinek $MP$ tworzy z podstawą, jest równy:

**A.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$, **B.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$, **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



## Zadania krótkiej odpowiedzi

### Zadanie 1 (2 pkt)

Sześcian o krawędzi 4 cm i graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy $2\sqrt{2}$ cm mają taką samą objętość. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa.

### Zadanie 2 (2 pkt)

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi jego podstawy. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

### Zadanie 3 (2 pkt)

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych długości 2 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

## Zadania rozszerzonej odpowiedzi

### Zadanie 4 (4 pkt)

Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 12 cm, a przekątna ściany bocznej ma długość 15 cm. Jego podstawą jest romb o kącie ostrym 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

### Zadanie 5 (4 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy równej 4 przekątna tworzy z tą krawędzią kąt 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

### Zadanie 6 (4 pkt)

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 6 cm, a pole podstawy jest cztery razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

### Zadanie 7 (4 pkt)

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 10 cm i tworzy z podstawą kąt 45°.

### Zadanie 8 (4 pkt)

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $\sqrt{119}$. Przekątna tego graniastosłupa i przekątna jego ściany bocznej, wychodzące z jednego wierzchołka, tworzą kąt, którego tangens jest równy $\frac{5}{12}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

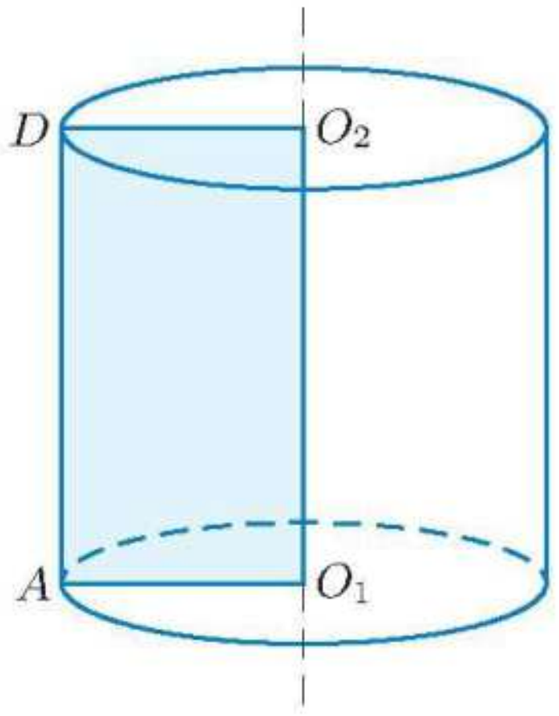



# 3 Bryły obrotowe

W celu zapewnienia bezpiecznego ruchu statków przy podejściach do portów tor wodny jest oznakowany czerwonymi bojami w kształcie walca i zielonymi w kształcie stożka. Stosuje się też boje o innych kształtach i kolorach. Boje malowane w biało-czerwone pasy to znaki bezpiecznej wody – wskazują, że wokół nich woda jest żeglowna. Zwykle boje takie są kuliste, walcowe lub drążkowe. Na zdjęciu boja podejściowa do portu w Gdyni.

# 3.1. Walec

**Walec** to bryła obrotowa otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków. Prostą tę nazywamy **osią** walca.



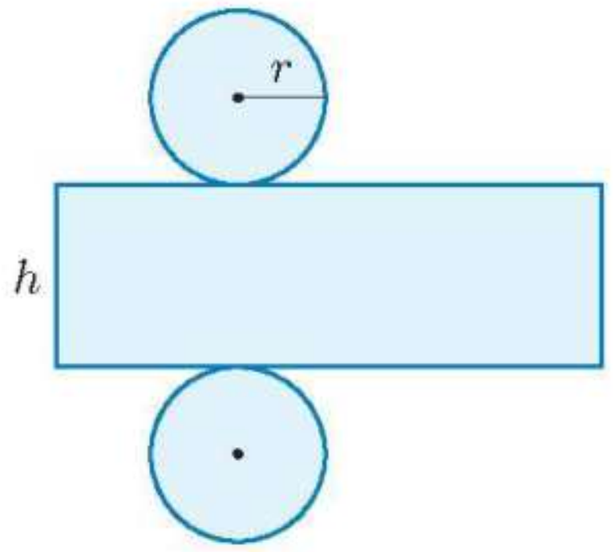

Dwa koła otrzymane przez obrót dwóch boków prostokąta prostopadłych do osi obrotu nazywamy **podstawami** walca. Dowolny odcinek łączący podstawy walca i do nich prostopadły nazywamy **wysokością** walca. W szczególności odcinki $O_1O_2$ oraz $AD$ (rysunek obok) są wysokościami walca.

Dowolny odcinek, który łączy dwa punkty z brzegów podstaw walca i jest prostopadły do tych podstaw, nazywamy **tworzącą** walca (np. odcinek $AD$ na rysunku powyżej).

Pole powierzchni całkowitej walca o promieniu podstawy $r$ i wysokości $h$ wyraża się wzorem:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$$

gdzie $P_p$ jest polem podstawy walca,
a $P_b$ – polem jego powierzchni bocznej.



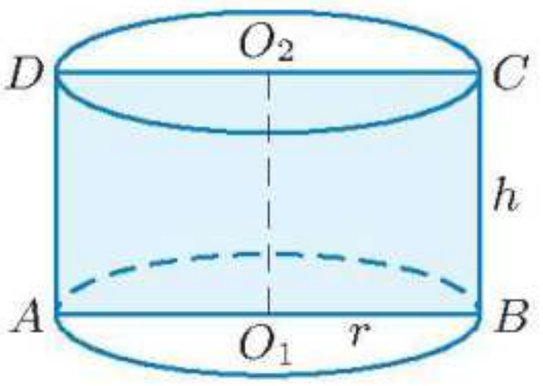

Siatka walca o promieniu podstawy $r$ i wysokości $h$

### Ćwiczenie 1

D a) Uzasadnij wzór na pole powierzchni całkowitej walca.

b) Pole powierzchni całkowitej walca jest równe $40\pi$ cm$^2$, a jego wysokość ma 10 cm. Oblicz pole koła będącego podstawą tego walca.

**Przekrojem osiowym** walca nazywamy przekrój walca płaszczyzną zawierającą jego oś (rysunek obok) – jest to prostokąt o bokach $h$ i $2r$.

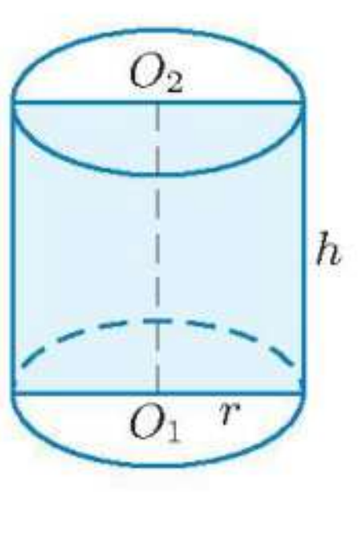



### Przykład 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o polu równym 36.

Bok kwadratu będącego przekrojem osiowym tego walca ma długość 6, zatem wysokość walca $h = 6$, a promień podstawy $r = 3$, stąd:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 = 54\pi$$



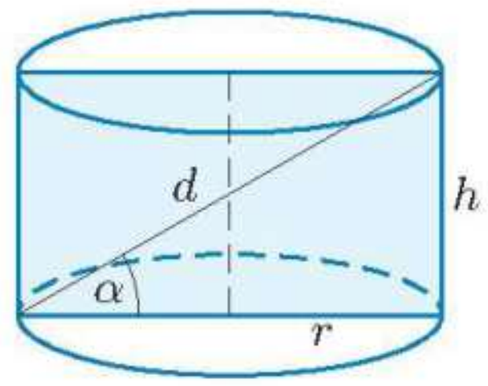
### Ćwiczenie 2

a) Oblicz pole powierzchni całkowitej walca otrzymanego przez obrót prostokąta o bokach 4 cm i 8 cm wokół krótszego boku.

b) Pole przekroju osiowego walca jest równe 40 $\text{cm}^2$, a promień jego podstawy ma 4 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

### Ćwiczenie 3

a) Przekątna $d$ prostokąta będącego przekrojem osiowym walca ma długość 12 cm i tworzy z jego podstawą kąt $\alpha = 30^\circ$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.




b) Przekątna $d$ prostokąta będącego przekrojem osiowym walca ma długość 26 cm i tworzy z jego podstawą kąt $\alpha$ taki, że $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca.

> Objętość walca o promieniu podstawy $r$ i wysokości $h$ wyraża się wzorem:
>
> $$V = P_p \cdot h = \pi r^2 h$$
>
> gdzie $P_p$ jest polem podstawy walca.

### Ćwiczenie 4

Oblicz objętość walca, którego przekrój osiowy jest:

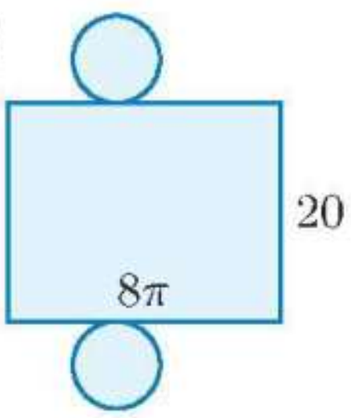
a) kwadratem o polu 64 $\text{cm}^2$,

b) prostokątem o bokach 6 cm i 8 cm (rozpatrz dwa przypadki).

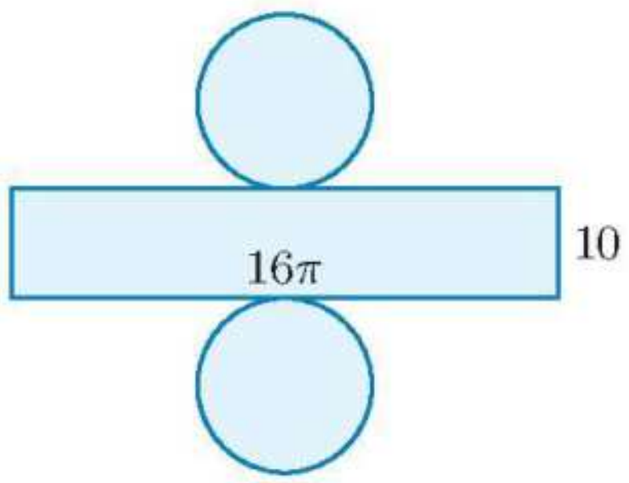
### Ćwiczenie 5

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, którego siatkę przedstawiono poniżej.

a)




b)




### Ćwiczenie 6

a) Średnica podstawy walca ma 8 cm, a pole jego powierzchni bocznej jest czterokrotnie większe od pola podstawy. Oblicz objętość tego walca.

b) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 15 cm i tworzy z jego podstawą kąt $\alpha$ taki, że $\cos\alpha = 0{,}6$. Oblicz objętość tego walca.

## Zadania

**1.** Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $d$ i tworzy z jego podstawą kąt $\alpha$. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego walca.

a) $d = 6$, $\alpha = 30^\circ$ b) $d = 8$, $\alpha = 60^\circ$ c) $d = 12$, $\alpha = 45^\circ$

**2.** Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 20 cm i tworzy z jego podstawą kąt $\alpha$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

a) $\cos\alpha = 0{,}8$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$

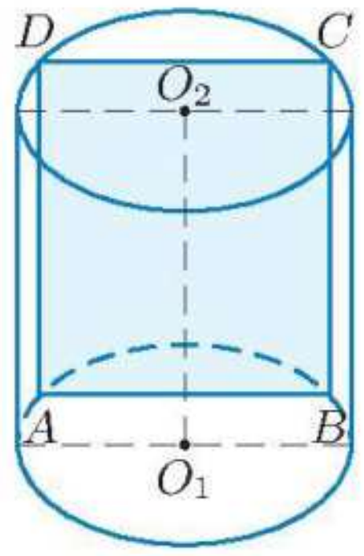
**3.** Pole powierzchni bocznej walca wynosi $392\pi$, a promień jego podstawy i wysokość są równe. Oblicz pole podstawy i objętość tego walca.

**4.** Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest prostokąt o polu 144 cm$^2$, jeżeli wiadomo, że stosunek długości boków tego prostokąta jest równy $9:4$ (rozpatrz dwa przypadki).

D **5.** Uzasadnij, że w każdym walcu stosunek pola powierzchni bocznej do pola przekroju osiowego jest równy $\pi$.

D **6.** Dany jest prostokąt o bokach $a$ i $b$, przy czym $a < b$. Wykaż, że walec otrzymany w wyniku obrotu tego prostokąta wokół krótszego boku ma większą objętość od walca otrzymanego w wyniku obrotu wokół dłuższego boku.

**7.** Walec przecięto płaszczyzną równoległą do jego przekroju osiowego i otrzymano prostokąt $ABCD$ (rysunek obok) o polu $20\sqrt{2}$ cm$^2$. Trójkąt $AO_1B$ (gdzie $O_1$ jest środkiem podstawy walca) jest prostokątny. Oblicz pole przekroju osiowego tego walca.

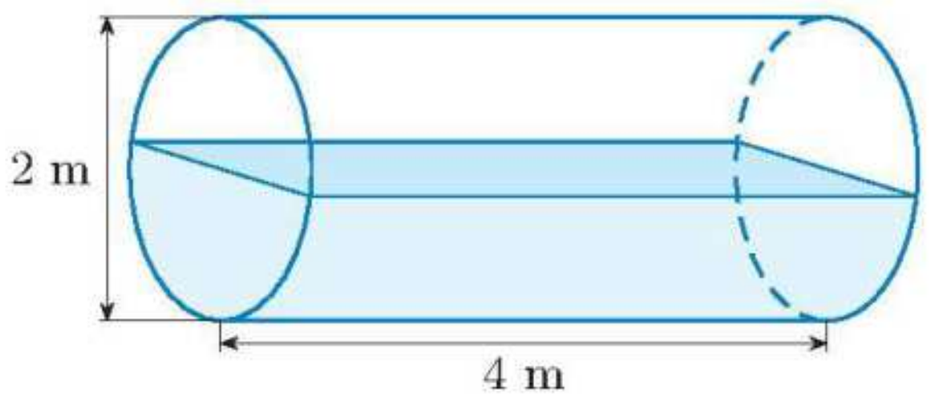



**8.** Odcinek łączący środek dolnej podstawy walca z punktem na brzegu górnej podstawy tworzy z tymi podstawami kąt $60^\circ$. Oblicz objętość tego walca, jeśli wiadomo, że:

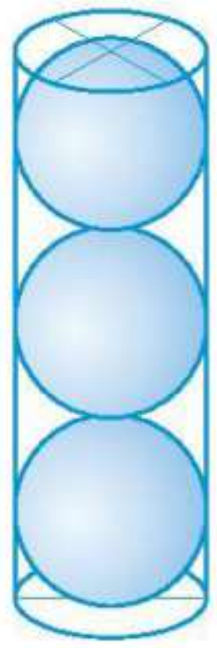
a) pole jego przekroju osiowego jest równe $18\sqrt{3}$ cm$^2$,

b) przekątna jego przekroju osiowego ma długość 7 cm.

**9.** Zbiornik w kształcie walca o wymiarach przedstawionych na rysunku obok jest w połowie wypełniony wodą. Ile jeszcze litrów wody trzeba wlać do tego zbiornika, aby wypełnić go całkowicie?



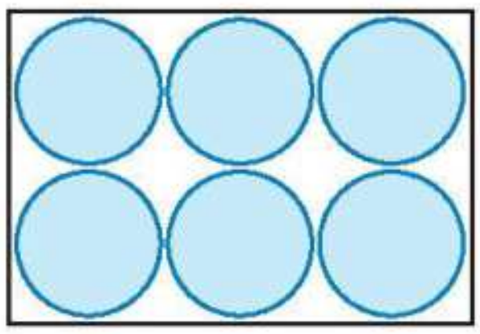
**10.** W pudełku mającym kształt walca można zmieścić trzy piłki tenisowe o średnicy 6,4 cm każda (rysunek obok). Czy pole powierzchni bocznej tego pudełka jest większe od 3 $dm^2$?



**11.** Przekrojem osiowym walca jest prostokąt $ABCD$. Długości boków $AB$ i $BC$ oraz przekątnej $AC$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz stosunek pola powierzchni bocznej tego walca do pola jego podstawy (rozpatrz dwa przypadki).

**12.** Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem o przekątnej długości 6 tworzącej z jednym z boków prostokąta kąt 60°. Oblicz objętość tego walca.

D **13.** W prostopadłościennym kartonie umieszczono sześć puszek w kształcie walca o objętości 1 litra i wysokości 10 cm każda (rysunek obok). Wykaż, że pole podstawy kartonu jest większe od 750 $cm^2$.



**14.** Kubek mający kształt walca o średnicy podstawy 8 cm i wysokości 10 cm jest w 90% wypełniony wodą. Wkładamy do niego cztery sześcienne metalowe kostki o krawędzi 2 cm każda. Czy woda z kubka się wyleje (pomiń grubość ścianek kubka)?

## Powtórzenie

**15.** Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu równym 49 $cm^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

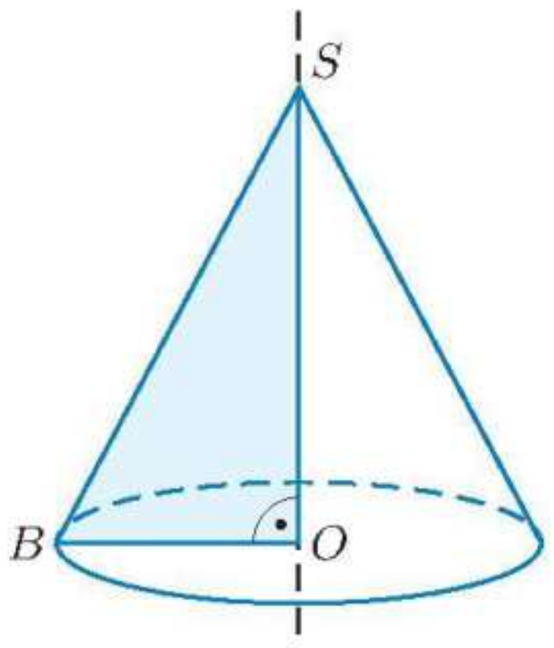
**16.** Oblicz miarę kąta, który przekątna przekroju osiowego walca tworzy z jego podstawą, jeśli wiadomo, że:

a) pole tej podstawy jest równe $9\pi$ $cm^2$, a pole powierzchni bocznej jest równe $12\pi\sqrt{3}$ $cm^2$,

b) odcinek łączący środek dolnej podstawy z punktem należącym do brzegu górnej podstawy tworzy z podstawą kąt, którego tangens jest równy 2.

**17.** Pole powierzchni całkowitej walca jest pięć razy większe od pola jego powierzchni bocznej, a przekątna przekroju osiowego ma długość $5\sqrt{13}$ cm. Oblicz objętość tego walca.

## 3.2. Stożek

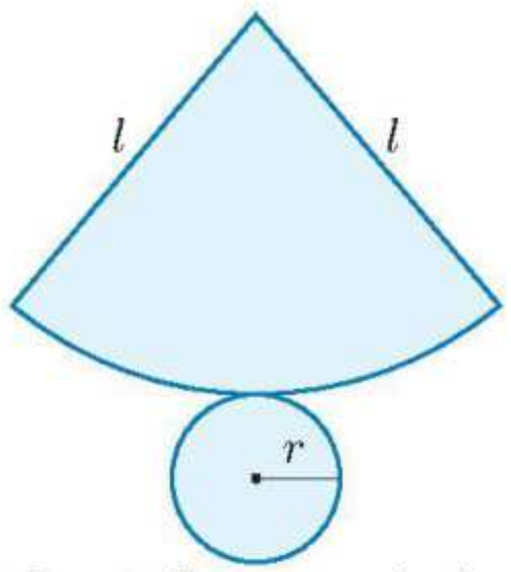



**Stożek** to bryła obrotowa otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych tego trójkąta. Prostą tę nazywamy **osią** stożka.

Koło otrzymane przez obrót drugiej przyprostokątnej nazywamy **podstawą** stożka, a wierzchołek trójkąta nienależący do podstawy – **wierzchołkiem** stożka.

Odcinek łączący wierzchołek stożka ze środkiem podstawy (punkt $O$ na rysunku) nazywamy **wysokością** stożka. Środek podstawy zwany jest też **spodkiem** wysokości stożka. Dowolny odcinek łączący wierzchołek stożka z brzegiem podstawy nazywamy **tworzącą** stożka (np. odcinek $SB$ na rysunku).

Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu równym tworzącej stożka.




Siatka stożka o promieniu podstawy $r$ i tworzącej $l$

> Pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy $r$ i tworzącej $l$ wyraża się wzorem:
>
> $$P_b = \pi r l$$

### Ćwiczenie 1

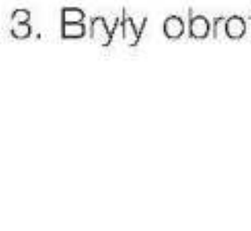
D a) Uzasadnij wzór na pole powierzchni bocznej stożka.

b) Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, którego pole podstawy jest równe $81\pi$ cm$^2$, a tworząca ma długość 12 cm.

### Ćwiczenie 2

Na poniższych rysunkach przedstawiono wycinki kół będące po zwinięciu powierzchniami bocznymi stożków o takiej samej tworzącej.
Który z tych stożków ma najdłuższą wysokość?

A.




B.



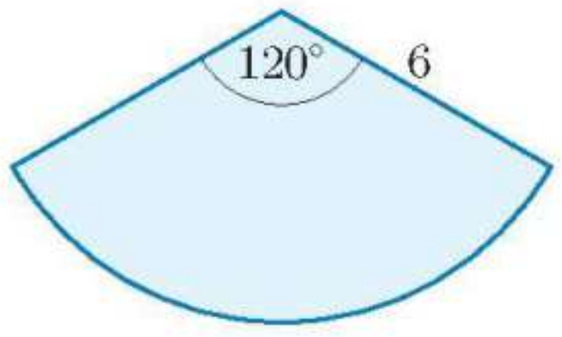

C.




> Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy $r$ i tworzącej $l$ wyraża się wzorem:
>
> $$P_c = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$
>
> gdzie $P_p$ jest polem podstawy stożka.

### Ćwiczenie 3

a) Na rysunku obok przedstawiono wycinek koła, który po zwinięciu jest powierzchnią boczną stożka. Oblicz pole podstawy i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

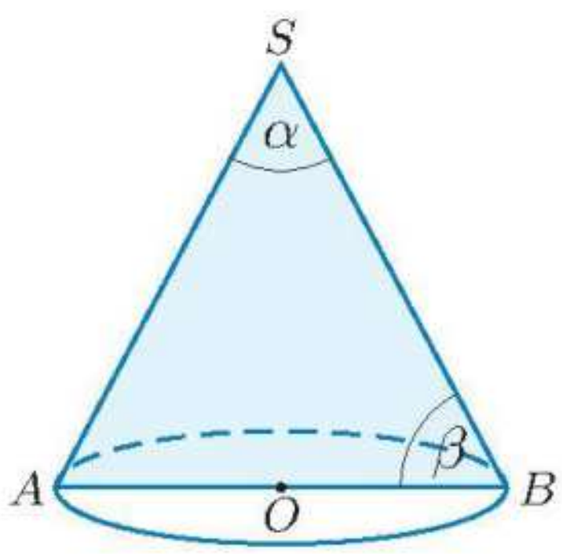



b) Promień podstawy stożka jest równy 4 cm, a jego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest wycinkiem koła wyznaczonym przez kąt środkowy 150°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

### Ćwiczenie 4

Podstawą stożka jest koło o polu równym $36\pi$ cm$^2$, a powierzchnia boczna tego stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 9 cm wyznaczonym przez kąt środkowy $\alpha$. Oblicz miarę tego kąta.

**Przekrojem osiowym** stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. Przekrojem tym jest trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia** stożka (kąt $\alpha$ na rysunku obok). Kąt między tworzącą stożka a jego podstawą oznaczono na rysunku przez $\beta$.




### Ćwiczenie 5

Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka, którego tworząca ma długość 10 cm, a pole podstawy jest równe $50\pi$ cm$^2$.

Objętość stożka o promieniu podstawy $r$ i wysokości $h$ wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie $P_p$ jest polem podstawy stożka.

Objętość stożka jest równa $\frac{1}{3}$ objętości walca o takiej samej podstawie i wysokości.

### Ćwiczenie 6

a) Oblicz objętość stożka o średnicy podstawy równej 24 cm i wysokości 8 cm.

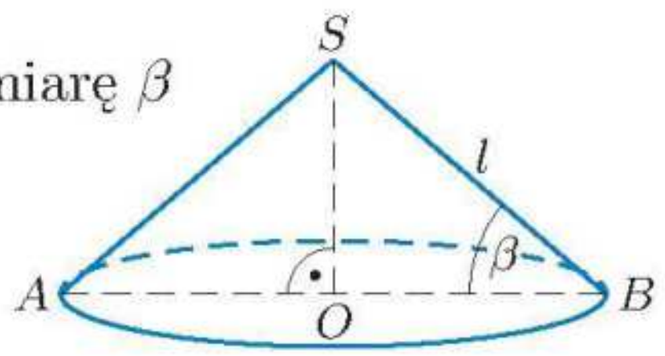
b) Oblicz objętość stożka o tworzącej równej 13 cm i wysokości 12 cm.

### Ćwiczenie 7

Kąt między tworzącą $l$ stożka a jego podstawą ma miarę $\beta$ (rysunek obok). Oblicz objętość tego stożka, jeśli:

a) $\sin\beta = 0{,}6$, $l = 15$ cm,

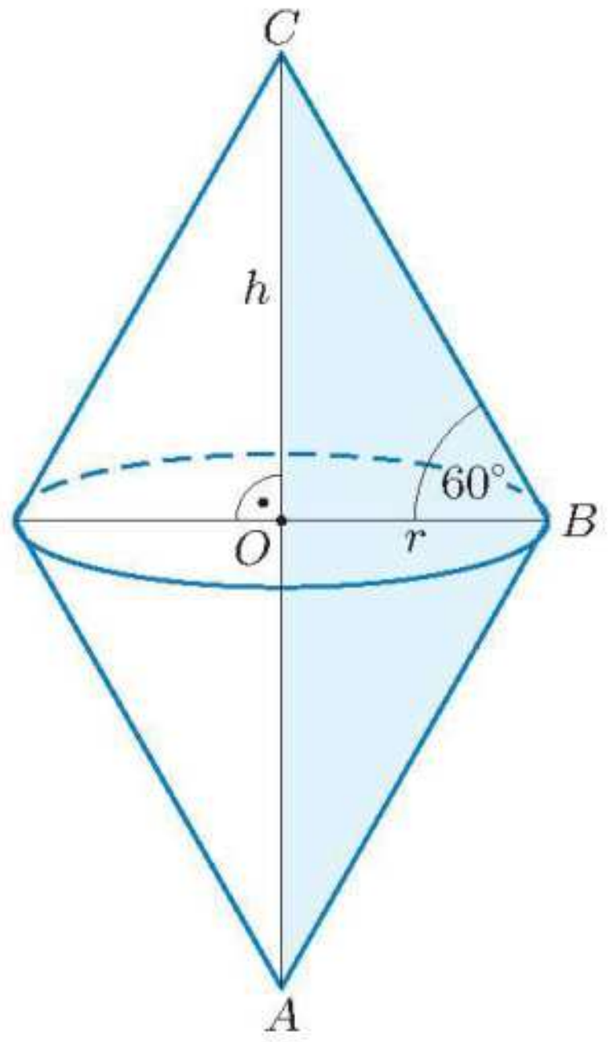
b) $\operatorname{tg}\beta = 2{,}4$, $l = 13$ cm.



### Ćwiczenie 8

a) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $16\sqrt{3}$ cm$^2$. Oblicz objętość tego stożka.

b) Pole podstawy stożka jest równe $27\pi$ cm$^2$, a jego objętość jest równa $27\pi$ cm$^3$. Oblicz miarę kąta między tworzącą stożka a jego podstawą.




### Przykład 1

W trójkącie równoramiennym $ABC$ kąt przy wierzchołku $B$ ma miarę $120^\circ$ oraz $|AB| = |BC| = 6$ cm. Bryła, która powstała przez obrót tego trójkąta wokół najdłuższego boku, to dwa stożki połączone podstawami (rysunek obok). Oblicz objętość tej bryły.

$r = |OB| = 3$ cm oraz $h = |OC| = 3\sqrt{3}$ cm.

Obliczamy objętość otrzymanej bryły:

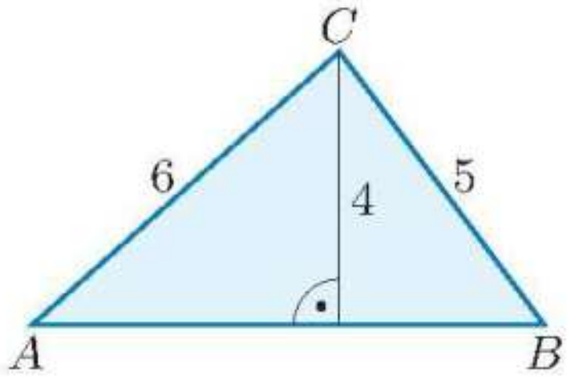
$$V = 2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = 2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

### Ćwiczenie 9

Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu:

a) trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu równym 8 cm$^2$ wokół jego przeciwprostokątnej,

b) trójkąta $ABC$ (rysunek obok) wokół jego najdłuższego boku.




## Zadania

**1.** Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu 12 cm wyznaczony przez kąt środkowy $\alpha$. Oblicz pole podstawy i objętość tego stożka.

a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\alpha = 180^\circ$ c) $\alpha = 240^\circ$ d) $\alpha = 270^\circ$

**2.** a) Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu 15 cm wyznaczony przez kąt środkowy $\alpha$. Podstawę tego stożka można wyciąć z kwadratu o boku 6 cm. Wyznacz największą możliwą miarę kąta $\alpha$.

b) Oblicz pole przekroju osiowego stożka, którego podstawą jest koło opisane na kwadracie o boku 5 cm, a sinus kąta między tworzącą a wysokością stożka jest równy $\frac{2}{3}$.

**3.** a) Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny o polu 18 $\text{cm}^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.

b) Pole powierzchni bocznej stożka jest dwukrotnie większe od pola jego podstawy. Oblicz miarę kąta rozwarcia tego stożka.

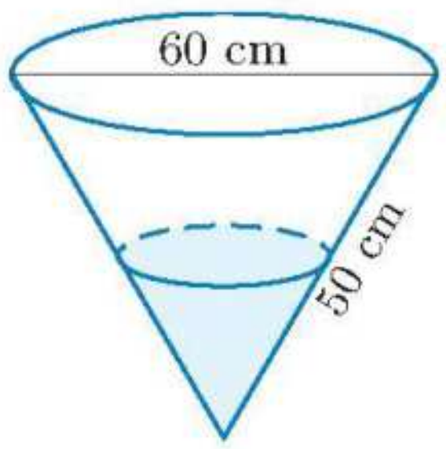
c) Kąt rozwarcia stożka ma miarę $120^\circ$, a pole jego podstawy jest równe $108\pi$ $\text{cm}^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

**4.** a) Kąt rozwarcia stożka ma miarę $60^\circ$, a pole jego powierzchni bocznej jest równe $8\pi$ $\text{cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.

b) Kąt rozwarcia stożka ma miarę $30^\circ$, a jego podstawa ma pole równe $(18 - 9\sqrt{3})\pi$ $\text{cm}^2$. Oblicz pole przekroju osiowego i objętość tego stożka.

**5.** Dany jest stożek o polu powierzchni bocznej $2\pi\sqrt{2}$ $\text{cm}^2$ i polu powierzchni całkowitej $\frac{2\pi}{\sqrt{2}-1}$ $\text{cm}^2$. Oblicz miarę kąta między tworzącą tego stożka a jego podstawą.

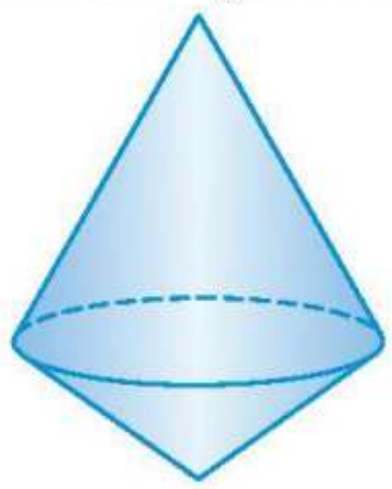
**6.** Poziom wody w zbiorniku w kształcie stożka sięga połowy jego wysokości (rysunek obok). Ile litrów wody znajduje się w zbiorniku? Na jaką wysokość sięgałaby woda, gdyby zajmowała połowę objętości zbiornika?




**7.** Dwa stożki mają identyczne podstawy o polu $16\pi$ $\text{cm}^2$. Stożki te złączono podstawami i otrzymano bryłę przedstawioną na rysunku. Jej przekrojem osiowym jest deltoid o polu 60 $\text{cm}^2$.

a) Oblicz objętość tej bryły.

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeśli wiadomo, że wysokość jednego stożka jest dwukrotnie dłuższa od wysokości drugiego.



D **8.** Wykaż, że stosunek pola podstawy stożka do pola jego powierzchni bocznej jest równy sinusowi kąta między tworzącą a wysokością tego stożka.

## Powtórzenie

**9.** Oblicz różnicę objętości stożka o średnicy podstawy 12 cm i wysokości 6 cm oraz stożka o średnicy podstawy 6 cm i wysokości 12 cm.

**10.** Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o kącie rozwarcia $60^\circ$ i wysokości równej $4\sqrt{3}$ cm.

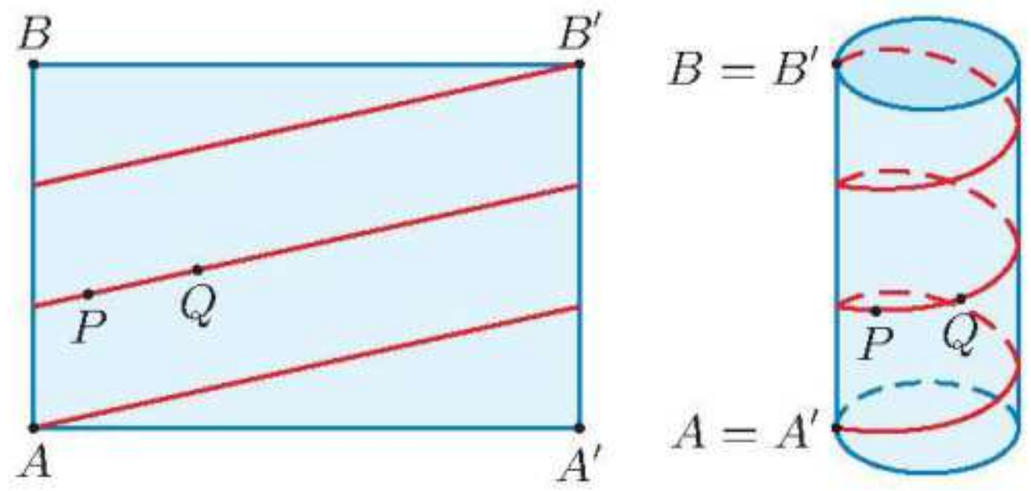
**11.** Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $96\pi$ $\text{cm}^2$, a średnica jego podstawy ma 12 cm. Oblicz objętość tego stożka.

**Warto wiedzieć**

## Linie geodezyjne

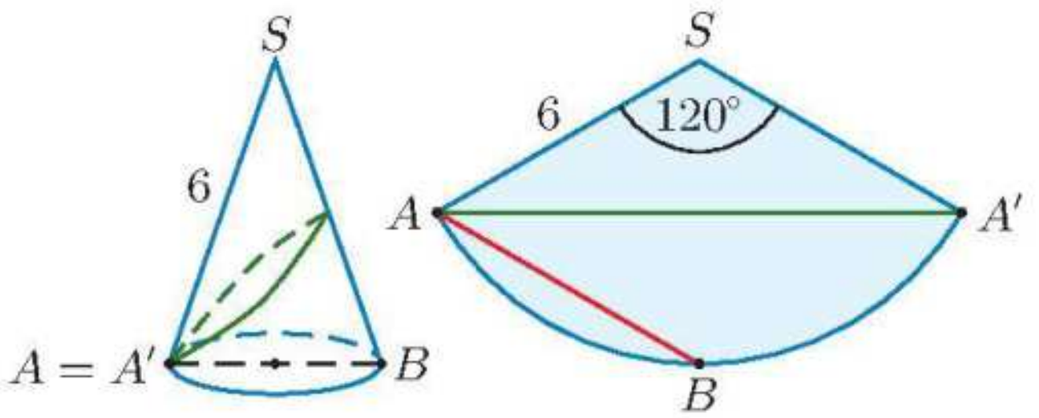
Najkrótsza linia na powierzchni bryły łącząca dwa punkty nazywa się **linią geodezyjną**.

Po zwinięciu prostokąta przedstawionego na rysunku obok w powierzchnię boczną walca otrzymujemy na powierzchni tego walca tzw. **linię śrubową** (zaznaczoną kolorem czerwonym). Nazwa tej krzywej pochodzi stąd, że wzdłuż linii śrubowej nacinany jest gwint śruby. Zauważmy, że dla punktów $P$ i $Q$ położonych na powierzchni walca tak jak na powyższym rysunku najkrótsza droga między tymi punktami prowadzi wzdłuż linii śrubowej.

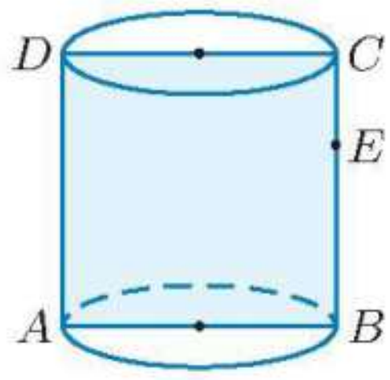



### Przykład 1

Przekrojem osiowym stożka o tworzącej równej 6 jest trójkąt $ABS$ (rysunek obok). Powierzchnią boczną tego stożka po rozwinięciu jest wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy $120^\circ$. Najkrótsza droga z punktu $A$ do punktu $B$ poprowadzona po powierzchni bocznej stożka (kolor czerwony) ma długość 6. Długość najkrótszej pętli poprowadzonej po powierzchni bocznej stożka, zaczynającej się i kończącej w punkcie $A$ (kolor zielony), jest równa $6\sqrt{3}$.



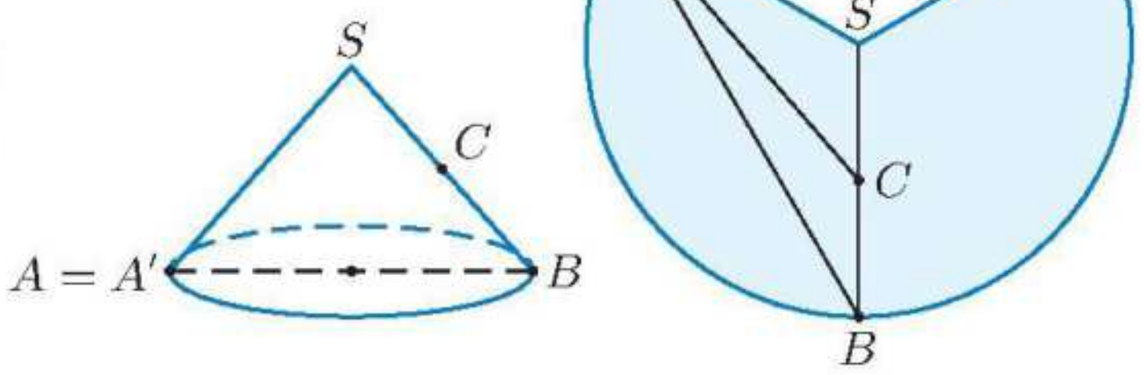

**1.** Przekrój osiowy walca jest kwadratem $ABCD$ o boku 12. Na boku $BC$ wybrano punkt $E$ taki, że $|BE| = 2|CE|$ (rysunek obok). Oblicz długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni bocznej walca z punktu $E$ do punktu: a) $A$, b) $D$.




**2.** Przekrojem osiowym stożka o promieniu podstawy 8 i wysokości $4\sqrt{5}$ jest trójkąt $ABS$. Punkt $C$ jest środkiem odcinka $BS$ (rysunek poniżej). Oblicz długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni bocznej stożka:

a) z punktu $A$ do punktu $B$,

b) z punktu $A$ do punktu $C$.

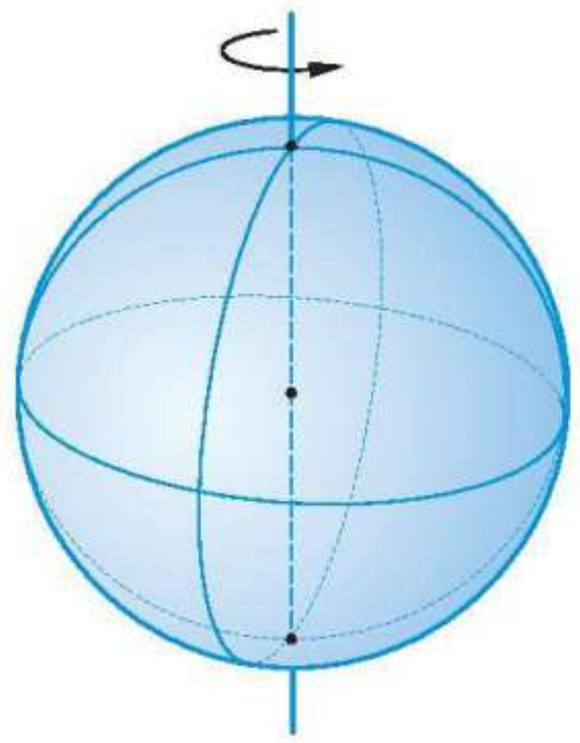


# 3.3. Kula

**Kula** to bryła obrotowa otrzymana przez obrót koła wokół prostej zawierającej jego średnicę.

**Kula** o środku w punkcie $O$ i promieniu $r > 0$ jest zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu $O$ jest mniejsza lub równa $r$.

**Sfera** o środku w punkcie $O$ i promieniu $r > 0$ jest zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu $O$ jest równa $r$ (sfera jest powierzchnią kuli).

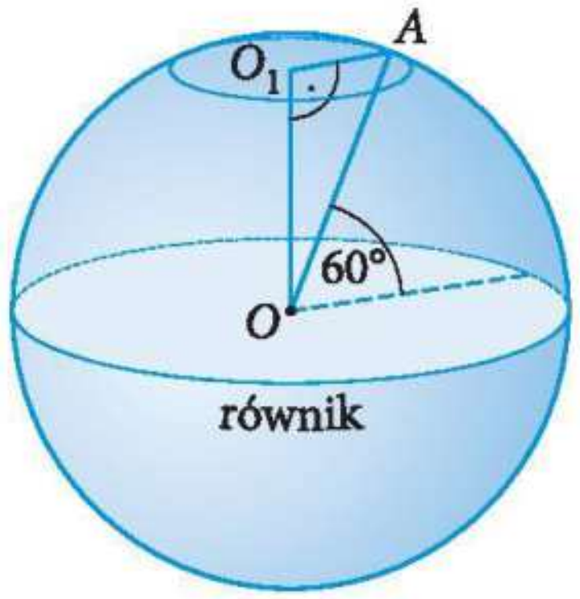


Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż jeden punkt wspólny z tą kulą, jest kołem. Jeśli płaszczyzna ta przechodzi przez środek kuli, to przekrój ten nazywamy **kołem wielkim**.

### Przykład 1

Przyjmując, że Ziemia jest kulą, oblicz stosunek długości równoleżnika przechodzącego przez punkty o szerokości geograficznej 60° do długości równika.

W trójkącie $OO_1A$ mamy $|OA| = 2|O_1A|$ (rysunek obok). Stosunek długości okręgów jest równy stosunkowi długości ich promieni, więc szukany stosunek długości równoleżnika 60° do długości równika jest równy 1 : 2.

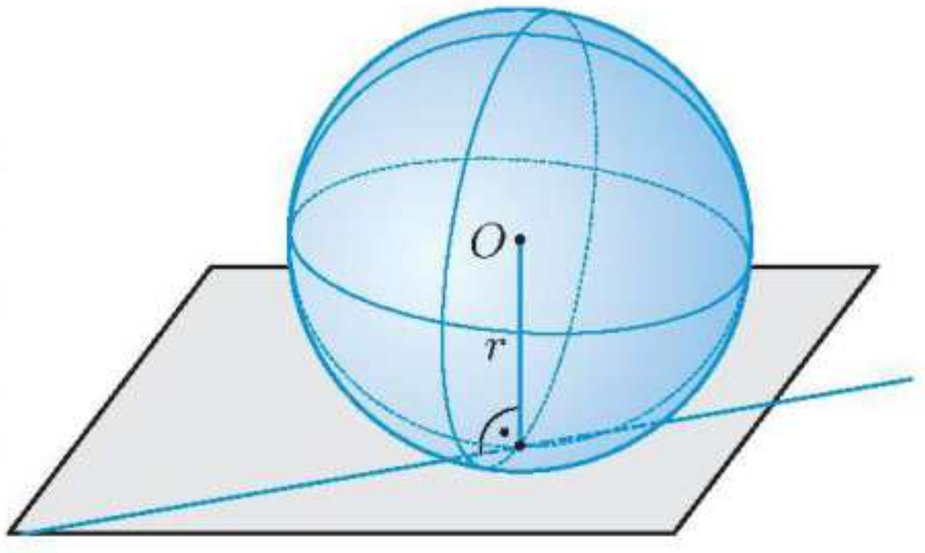



### Ćwiczenie 1

a) Kulę o promieniu 10 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o środku oddalonym od środka kuli o 7 cm. Oblicz pole tego koła.

b) Kulę o promieniu 5 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o polu równym $16\pi$ cm$^2$. Oblicz odległość środka tego koła od środka kuli.

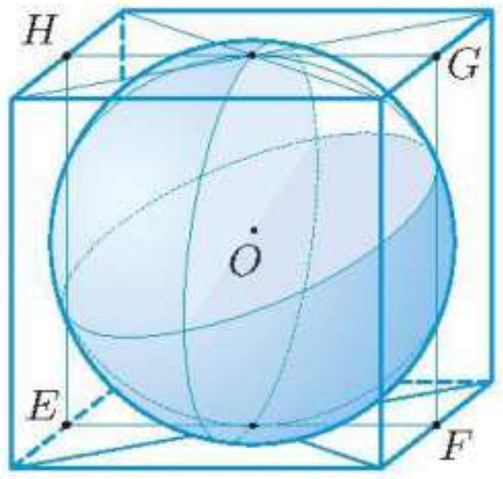
Jeśli płaszczyzna ma z kulą dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że ta płaszczyzna jest **styczna** do kuli. Promień poprowadzony ze środka kuli do punktu styczności jest prostopadły do płaszczyzny stycznej.

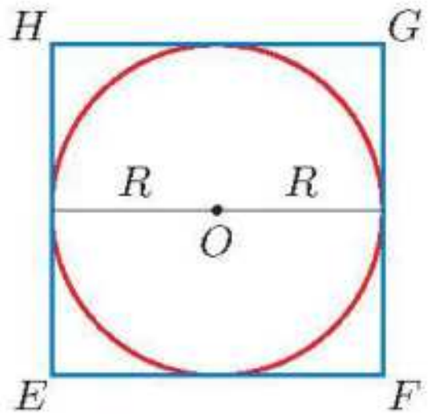


### Ćwiczenie 2

Punkt $O$ jest środkiem sześcianu (punktem przecięcia przekątnych sześcianu) o krawędzi $a$. Oblicz promień sfery o środku w punkcie $O$:

a) stycznej do wszystkich ścian tego sześcianu (rysunek obok),




b) zawierającej wszystkie wierzchołki tego sześcianu.

### Przykład 2

Pole powierzchni kuli jest równe $144\pi$ cm$^2$. Oblicz objętość tej kuli.

Obliczamy promień kuli:

$$P = 4\pi r^2 = 144\pi$$

stąd $r^2 = 36$, czyli $r = 6$ cm.
Zatem objętość kuli:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Pole powierzchni kuli o promieniu $r$ wyraża się wzorem:

$$P = 4\pi r^2$$

Objętość kuli o promieniu $r$ wyraża się wzorem:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

### Ćwiczenie 3

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu $r$.

a) $r = \frac{3}{2}$ cm  b) $r = \sqrt{3}$ cm  c) $r = 2\sqrt{2}$ cm

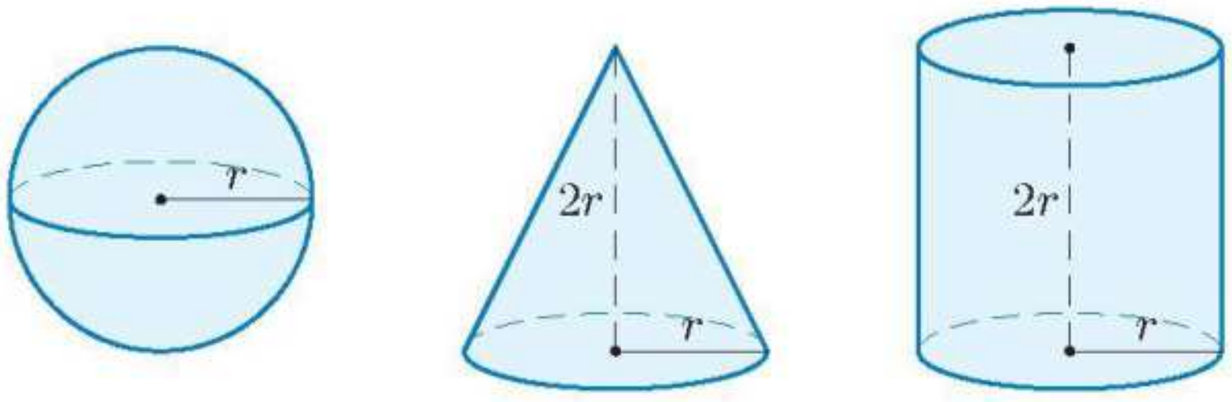
### Ćwiczenie 4

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

| Promień kuli | 6 | 3 | ? | ? | ? |
|---|---|---|---|---|---|
| Pole powierzchni kuli | $144\pi$ | $36\pi$ | $256\pi$ | ? | $3{,}24\pi$ |
| Objętość kuli | $288\pi$ | ? | ? | $\frac{32}{3}\pi$ | ? |

### D Ćwiczenie 5

Dane są kula, stożek i walec o wymiarach takich jak na rysunku poniżej. Uzasadnij, że suma objętości kuli i stożka jest równa objętości walca.



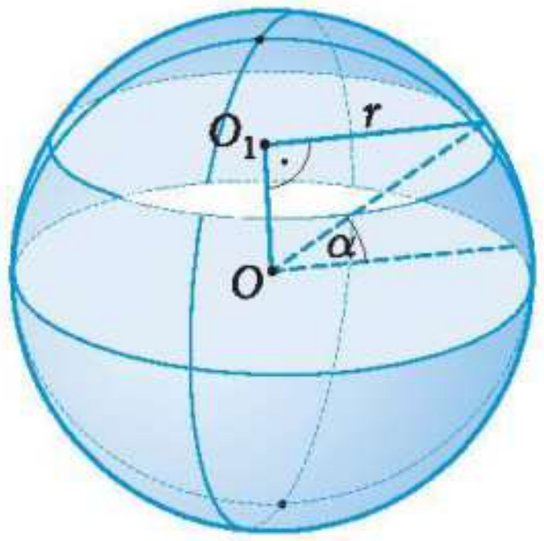
## Zadania

**1.** Kulę o środku $O$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkt $O_1$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni i objętość tej kuli, jeśli:

a) $\sin\alpha = 0{,}5$ i $|OO_1| = 2\sqrt{3}$ cm,

b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$ i $|OO_1| = 6$ cm,

c) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ i $|OO_1| = 2\sqrt{5}$ cm.




**2.** Kulę o promieniu 8 cm przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami i otrzymano w przekrojach koła o promieniach 3 cm i 4 cm. Oblicz odległość między tymi płaszczyznami (rozpatrz dwa przypadki).

**3.** Kulę o środku $O$ przecięto płaszczyzną i otrzymano w przekroju koło o środku $S$. Oblicz:

a) objętość kuli, jeśli $|OS| = \sqrt{2}$, a pole przekroju jest równe $25\pi$,

b) pole przekroju, jeśli $|OS| = 2\sqrt{3}$, a objętość kuli jest równa $108\sqrt{3}\pi$.

**4.** a) Dane są dwie kule o promieniach 3 cm i 5 cm oraz wspólnym środku. Oblicz pole przekroju utworzonego przez przecięcie większej kuli płaszczyzną styczną do mniejszej kuli.

b) Dane są dwie kule o promieniach 6 cm i $r$ cm oraz wspólnym środku. Pole przekroju utworzonego przez przecięcie większej kuli płaszczyzną styczną do mniejszej kuli jest równe $9\pi$ cm$^2$. Oblicz $r$ (rozpatrz dwa przypadki).

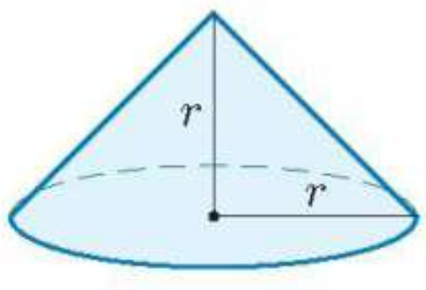
**5.** Do powierzchni kuli należą wszystkie wierzchołki pewnego sześcianu. Oblicz pole powierzchni tej kuli, jeśli wiadomo, że:

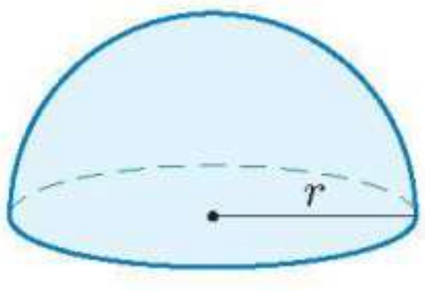
a) pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 96 cm$^2$,

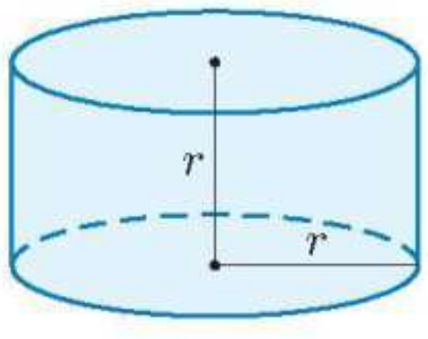
b) przekątna sześcianu ma długość 12 cm,

c) objętość sześcianu jest równa 125 cm$^3$.

D **6.** Na rysunku poniżej przedstawiono stożek, półkulę i walec. Wszystkie bryły mają taką samą podstawę, a wysokości stożka i walca są równe promieniowi półkuli. Uzasadnij, że objętości tych brył są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.



D **7.** a) Sześcian z brązu przetopiono na kulę. Wykaż, że stosunek pola powierzchni tej kuli do pola powierzchni sześcianu jest równy $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$.

b) Metalowy walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem, przetopiono na kulę. Wykaż, że promień tej kuli jest równy $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ promienia podstawy walca.

**8.** Promień kuli jest równy promieniowi podstawy stożka. Oblicz stosunek objętości kuli do objętości stożka, którego:

a) przekrojem osiowym jest trójkąt prostokątny,

b) kąt rozwarcia ma miarę $120°$.

**9.** Kula i stożek mają równe objętości. Promień podstawy stożka jesr równy $r$, a stosunek jego pola powierzchni bocznej do pola podstawy wynosi 2,6. Wyznacz promień kuli.

**10.** Środek sfery o promieniu $r_1$ należy do sfery o promieniu $r_2$. Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

a) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm b) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 2\sqrt{3}$ cm

Archimedes (ok. 287–ok. 212 r. p.n.e.) jest uważany za jednego z najwybitniejszych matematyków i fizyków starożytnej Grecji. Sformułował między innymi wzory na pole powierzchni i objętość walca oraz kuli. Podał również przybliżoną wartość liczby $\pi$:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$



## Powtórzenie

**11.** Oblicz pole powierzchni i objętość kuli, jeśli wiadomo, że:

a) jej średnica jest równa $6\sqrt{2}$ cm,

b) pole koła wielkiego tej kuli jest równe $81\pi$ cm$^2$,

c) obwód koła wielkiego tej kuli jest równy $\sqrt{2}\pi$ cm.

**12.** a) Kulisty balon ma promień równy 20 cm. Po dopompowaniu powietrza promień balonu zwiększył się o 25%. O ile wzrosło jego pole powierzchni?

b) Z kulistego balonu o promieniu równym 20 cm spuszczono częściowo powietrze. Promień balonu zmniejszył się o 25%. O ile zmalało jego pole powierzchni?

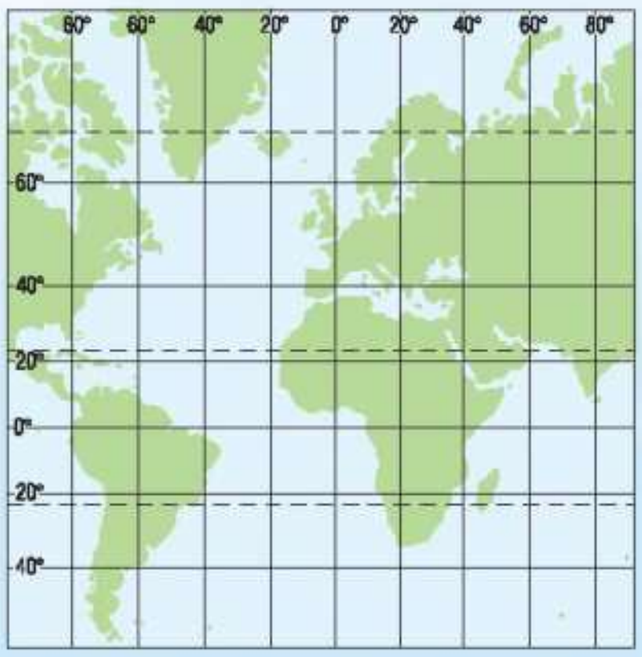
# Odwzorowania kartograficzne

Odwzorowanie powierzchni Ziemi na płaszczyźnie, jaką jest płaska mapa, pociąga za sobą różne zniekształcenia. Mogą to być zniekształcenia pól powierzchni, długości bądź kątów. Oto przykłady dwóch odwzorowań wiernokątnych, czyli zachowujących zależności kątowe między południkami a równoleżnikami.

## Odwzorowanie walcowe

Powierzchnia modelu Ziemi jest odwzorowana na powierzchni bocznej walca stycznego do powierzchni modelu wzdłuż równika. Obrazami południków są proste prostopadłe do równika.

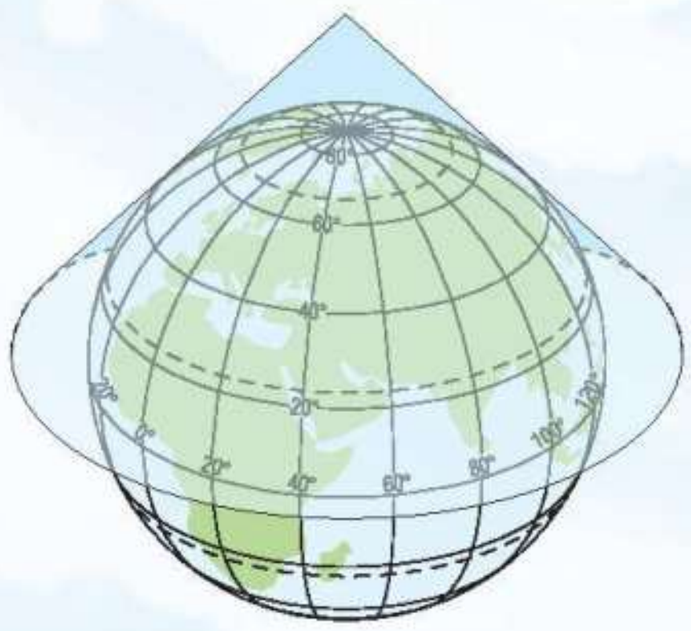


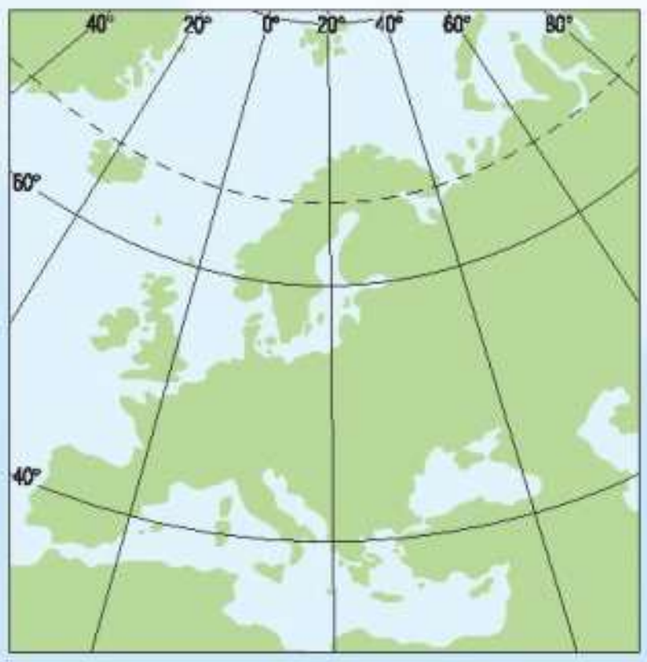



Takie odwzorowanie nazywamy odwzorowaniem Merkatora, od nazwiska flamandzkiego matematyka i kartografa (1512–1594). Zauważ, że w tym odwzorowaniu szczególnie zniekształcone są obszary okołobiegunowe.

## Odwzorowanie stożkowe

Powierzchnia modelu Ziemi jest odwzorowana na powierzchni bocznej stożka stycznego do powierzchni modelu wzdłuż jednego z równoleżników.



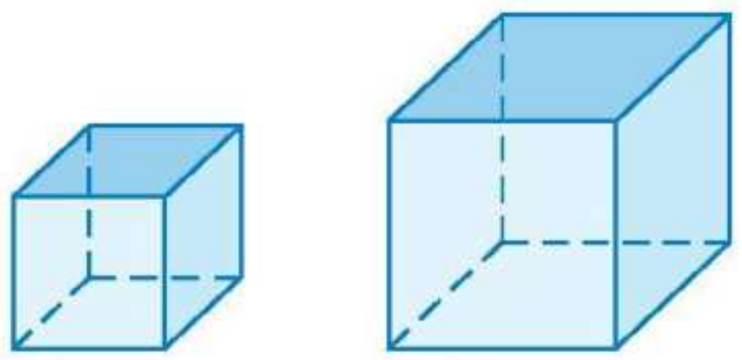



Za pomocą takich siatek przedstawia się na przykład obszary między zwrotnikami a kołami podbiegunowymi.

**1** Znajdź informacje o odwzorowaniu powierzchni Ziemi za pomocą siatki azymutalnej.

# 3.4. Bryły podobne

Dwie bryły są **podobne**, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiadającymi im punktami drugiej bryły. Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył podobnych nazywamy **skalą podobieństwa**.

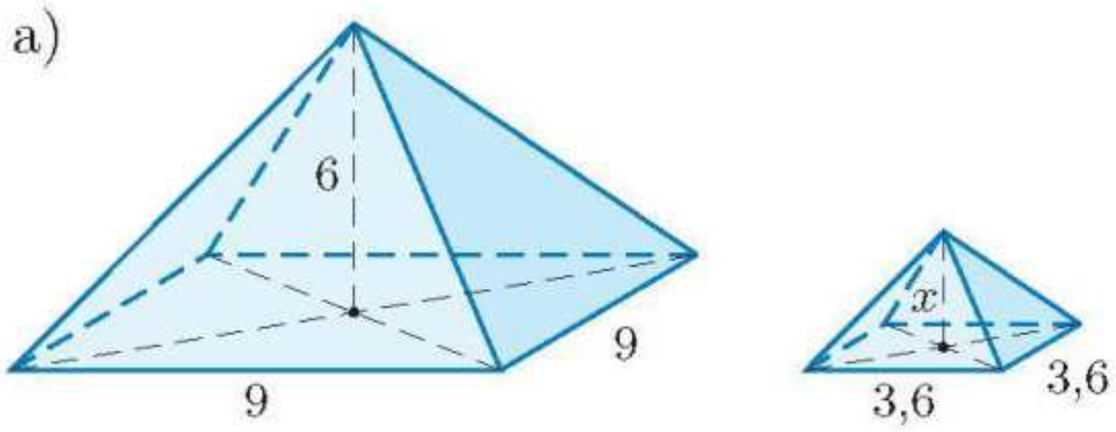



Na przykład dowolne dwie kule czy dowolne dwa sześciany są podobne. Na rysunku powyżej skala podobieństwa większego sześcianu do mniejszego jest równa $\frac{3}{2}$, co możemy też zapisać $3:2$.

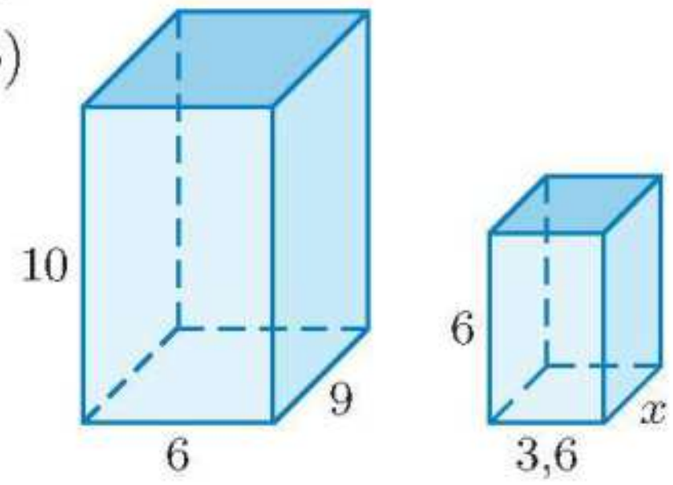
### Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wielościany podobne. Oblicz $x$ oraz podaj skalę podobieństwa mniejszego wielościanu do większego.

a)




b)




### Przykład 1

Pole powierzchni kuli $K_1$ jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli $K_2$. Oblicz stosunek objętości tych kul.

Niech $r_1$ i $r_2$ będą odpowiednio promieniami kul $K_1$ i $K_2$. Stosunek pól powierzchni tych kul:

$$\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2$$

zatem $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}$ – zauważmy, że jest to skala podobieństwa kuli $K_1$ do kuli $K_2$. Obliczamy stosunek objętości:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa $a:b$, to:
- stosunek pól powierzchni tych brył jest równy $a^2:b^2$,
- stosunek objętości tych brył jest równy $a^3:b^3$.

### Ćwiczenie 2

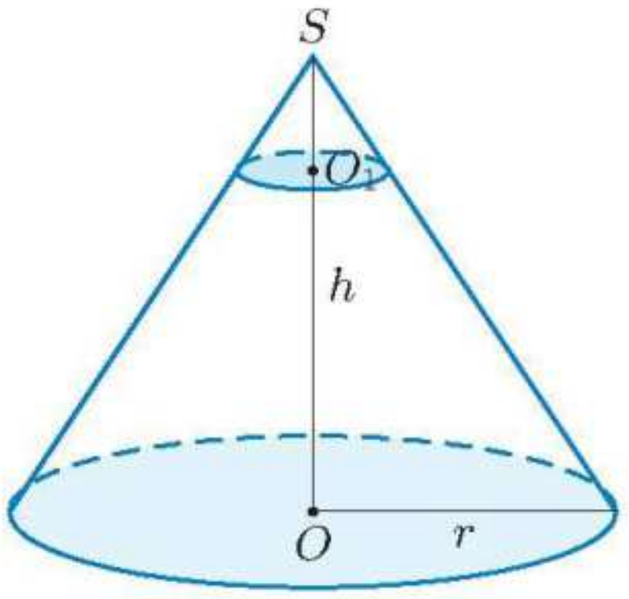
Dane są dwa sześciany. Pole powierzchni pierwszego jest czterokrotnie większe od pola powierzchni drugiego. Oblicz stosunek objętości tych sześcianów.

### Ćwiczenie 3

Dane są dwie kule. Objętość pierwszej jest równa $36\pi$ cm$^3$, a jej promień jest dwa razy krótszy od promienia drugiej kuli. Oblicz objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?

### Przykład 2

Stożek o promieniu podstawy 8 cm i wysokości 12 cm przecięto płaszczyzną prostopadłą do tej wysokości w odległości 3 cm od wierzchołka $S$ (rysunek obok). Oblicz objętości brył, na które płaszczyzna podzieliła stożek.



W wyniku przecięcia stożka płaszczyzną równoległą do jego podstawy otrzymujemy dwie bryły: stożek i stożek ścięty.

Obliczamy objętość dużego (wyjściowego) stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 256\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Skala podobieństwa małego stożka do dużego:

$$\frac{|SO_1|}{|SO|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Zatem objętość małego stożka:

$$V_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot V = \frac{256}{64}\pi = 4\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

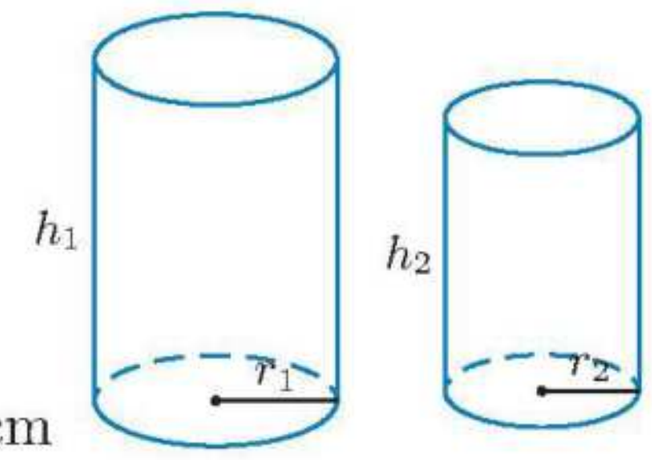
Obliczamy objętość stożka ściętego: $V_2 = V - V_1 = 256\pi - 4\pi = 252\pi$ [cm$^3$].

### Ćwiczenie 4

Stożek o objętości $27\pi$ cm$^3$ przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła wysokość stożka w stosunku 2 : 1, gdy liczymy od podstawy. Oblicz objętości brył powstałych w wyniku tego podziału.

## Zadania

**1.** Promienie podstaw dwóch walców oraz ich wysokości są równe $r_1$, $h_1$ i $r_2$, $h_2$ (rysunek obok). Sprawdź, czy te walce są podobne.




a) $r_1 = 20$ cm, $h_1 = 24$ cm,
$r_2 = 12$ cm, $h_2 = 15$ cm

b) $r_1 = 12$ cm, $h_1 = 16$ cm, $r_2 = 9$ cm, $h_2 = 12$ cm

**2.** a) Dane są dwa stożki podobne. Wysokość mniejszego stożka jest równa 6 cm, a pole powierzchni całkowitej większego jest o 125% większe od pola powierzchni całkowitej mniejszego. Oblicz wysokość większego stożka.

D b) Uzasadnij, że stożek o wysokości 4 i polu powierzchni całkowitej $24\pi$ nie jest podobny do stożka o tworzącej 20 i objętości $1024\pi$.

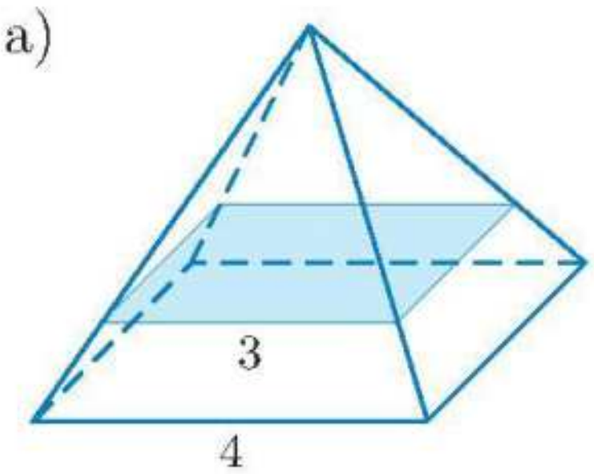
**3.** Ostrosłupy prawidłowe $O_1$, $O_2$, $O_3$ i $O_4$ są podobne. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj skalę podobieństwa ostrosłupów:

a) $O_1$ i $O_2$, b) $O_1$ i $O_3$, c) $O_2$ i $O_3$, d) $O_3$ i $O_4$.

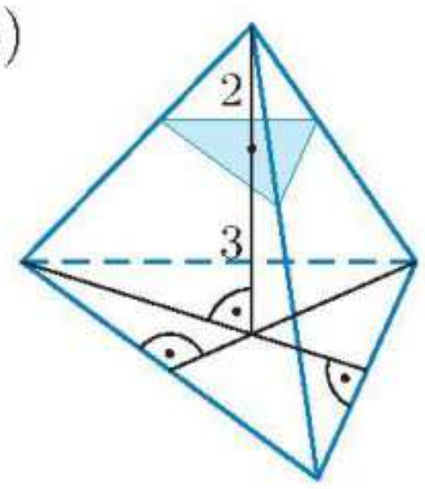
| Ostrosłup | Wysokość | Krawędź podstawy | Pole podstawy | Objętość |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 8 cm | 6 cm | 36 cm$^2$ | 96 cm$^3$ |
| $O_2$ | ? | 9 cm | ? | ? |
| $O_3$ | ? | ? | 144 cm$^2$ | ? |
| $O_4$ | ? | ? | ? | 12 cm$^3$ |

**4.** Na rysunku przedstawiono ostrosłup i jego przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła ostrosłup na dwie części. Oblicz stosunek objętości mniejszej części do objętości większej części.

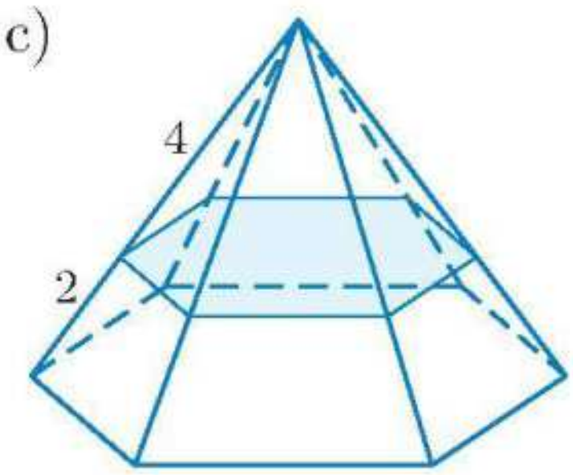
a)




b)




c)




**5.** Stożek został podzielony płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie bryły o równych objętościach. W jakim stosunku płaszczyzna ta podzieliła wysokość stożka?

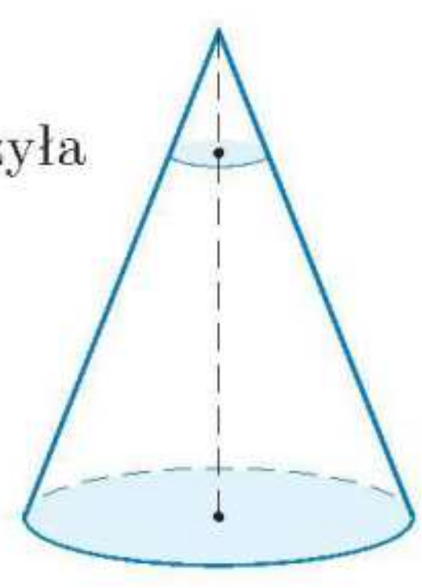
## Powtórzenie

**6.** Oblicz stosunek pól powierzchni dwóch kul, których stosunek objętości jest równy: a) $\frac{1}{216}$, b) $\frac{125}{27}$, c) 0,216, d) 0,064.

**7.** Dane są dwa podobne stożki. Pole podstawy większego jest o 44% większe od pola podstawy mniejszego. Oblicz wysokość większego stożka, jeśli wiadomo, że wysokość mniejszego jest równa 10 cm.

**8.** Powierzchnia kulistego balonu po dopompowaniu zwiększyła się o 44%. O ile procent wzrosła objętość balonu?

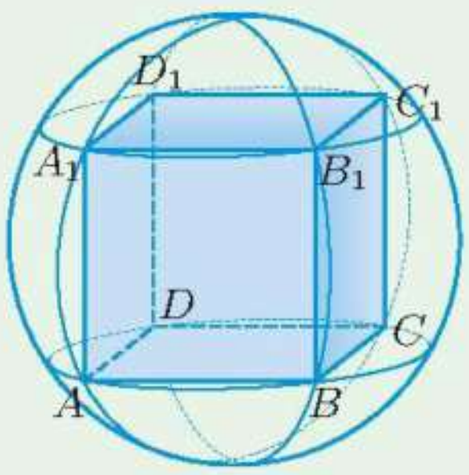
**9.** Stożek o objętości $128\pi$ cm$^3$ przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna podzieliła wysokość stożka w stosunku 3:1 (rysunek obok). Oblicz objętości brył powstałych w wyniku tego podziału.

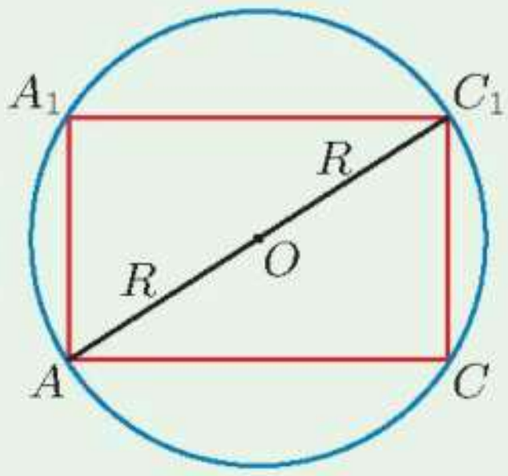


# 3.5. Zagadnienia uzupełniające

## Bryły wpisane w kulę

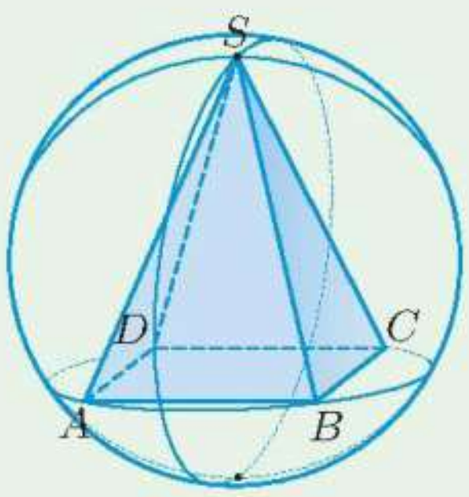
### Prostopadłościan wpisany w kulę (kula opisana na prostopadłościanie)

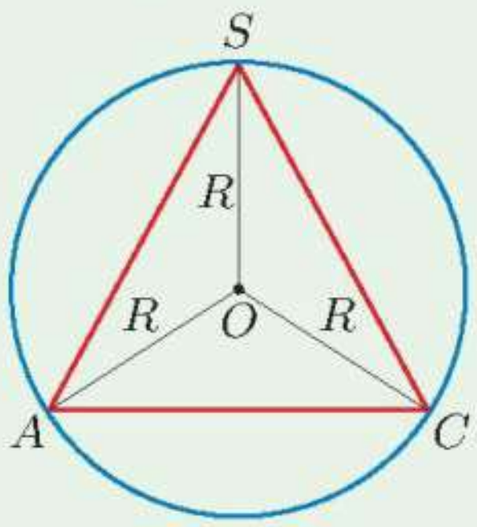



Wszystkie wierzchołki prostopadłościanu leżą na powierzchni kuli. Prostokąt $ACC_1A_1$ jest przekrojem prostopadłościanu przechodzącym przez przekątne jego podstaw – przekątna prostopadłościanu jest średnicą kuli.

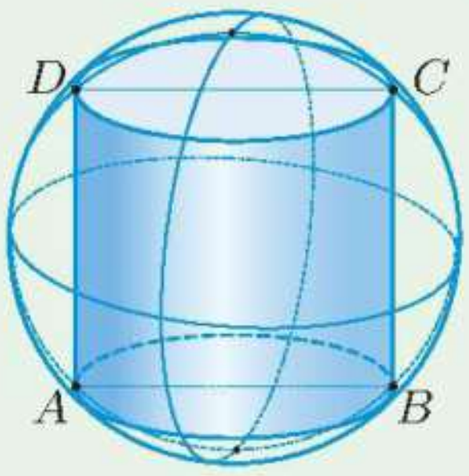
### Ostrosłup czworokątny wpisany w kulę (kula opisana na ostrosłupie)

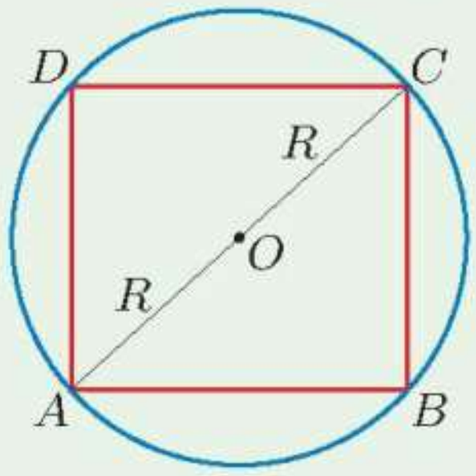



Wszystkie wierzchołki ostrosłupa leżą na powierzchni kuli. Trójkąt $ACS$ jest przekrojem ostrosłupa poprowadzonym przez jego wierzchołek i przekątną podstawy. Jeżeli wysokość ostrosłupa jest dłuższa od promienia kuli, to środek kuli leży wewnątrz ostrosłupa.

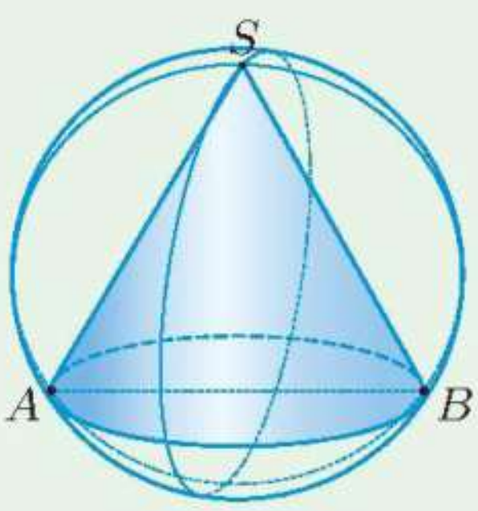
### Walec wpisany w kulę (kula opisana na walcu)

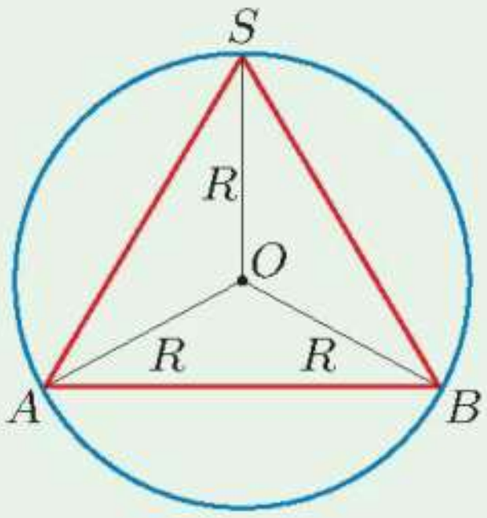



Okręgi ograniczające podstawy walca zawierają się w powierzchni kuli. Prostokąt $ABCD$ jest przekrojem osiowym walca – jego przekątna jest średnicą kuli.

### Stożek wpisany w kulę (kula opisana na stożku)

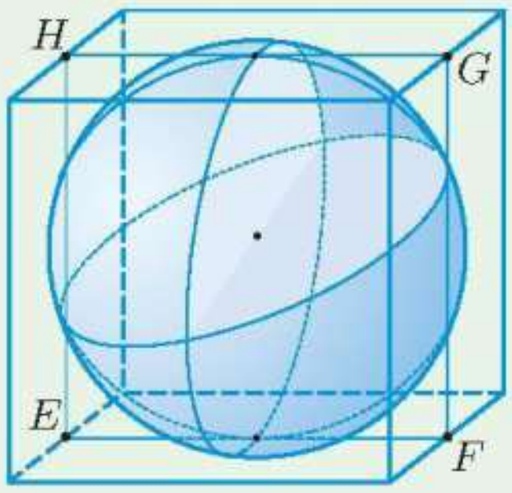


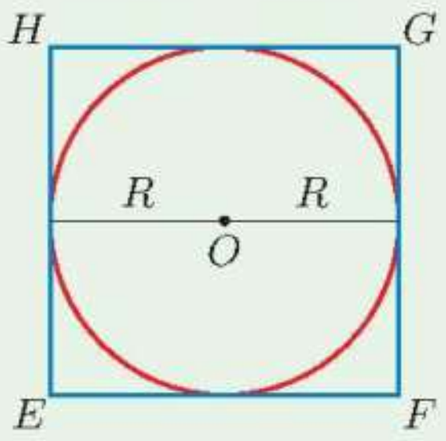




Okrąg ograniczający podstawę stożka zawiera się w powierzchni kuli, a wierzchołek stożka leży na powierzchni kuli. Trójkąt $ABS$ jest przekrojem osiowym stożka. Jeśli wysokość stożka jest dłuższa od promienia kuli, to środek kuli leży wewnątrz stożka.

## Bryły opisane na kuli

### Sześcian opisany na kuli (kula wpisana w sześcian)

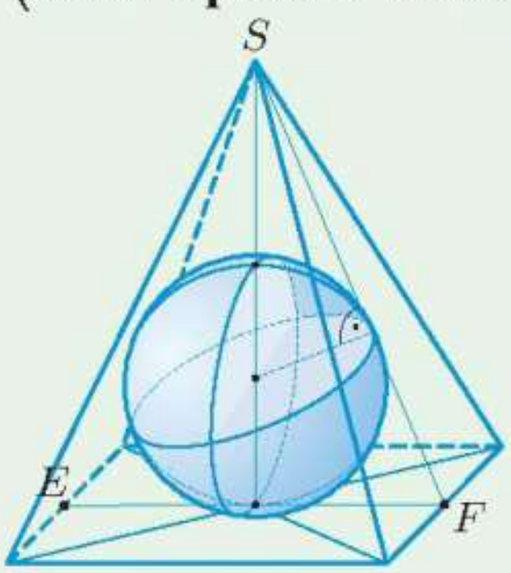


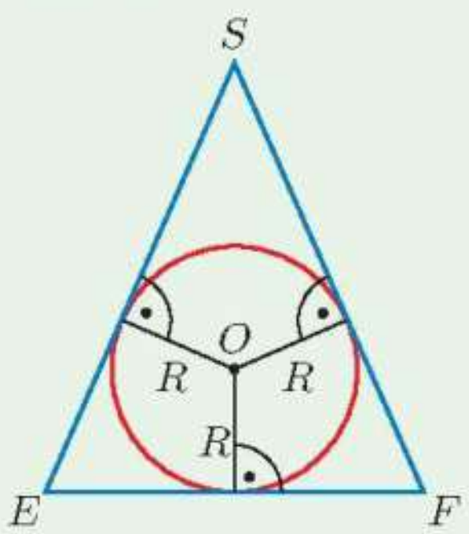




Kula jest styczna do każdej ściany sześcianu. Kwadrat $EFGH$ jest przekrojem sześcianu przechodzącym przez środki odpowiednich krawędzi. Jeśli sześcian jest opisany na kuli o promieniu $R$, to jego krawędź ma długość $2R$.

**Uwaga.** Jeśli prostopadłościan jest opisany na kuli, to jest sześcianem (uzasadnij).

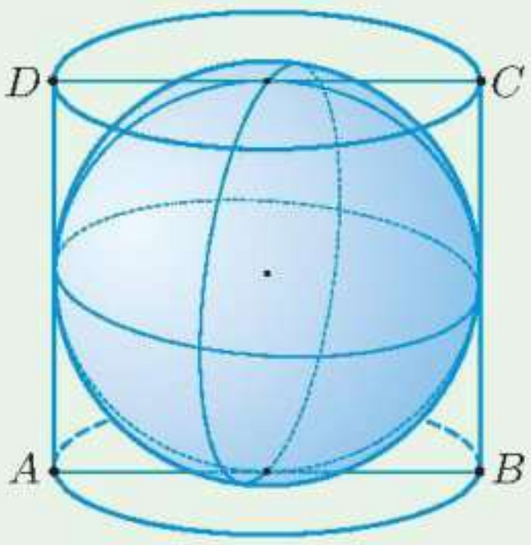
### Ostrosłup prawidłowy czworokątny opisany na kuli (kula wpisana w ostrosłup)

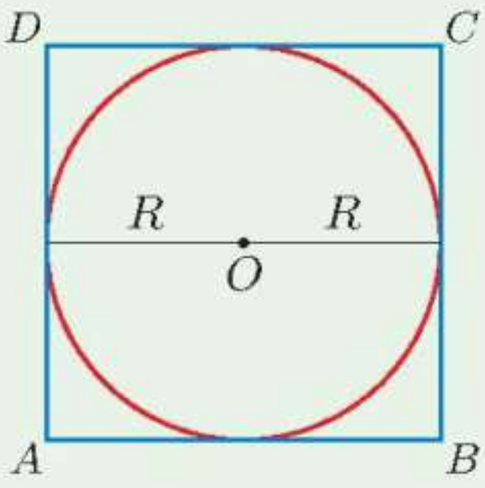



Kula jest styczna do podstawy oraz wszystkich ścian bocznych ostrosłupa. Trójkąt $EFS$ jest przekrojem ostrosłupa przechodzącym przez jego wysokość oraz środki dwóch przeciwległych krawędzi podstawy. Jeśli ostrosłup jest opisany na kuli o promieniu $R$, to trójkąt ten jest opisany na okręgu o promieniu $R$.

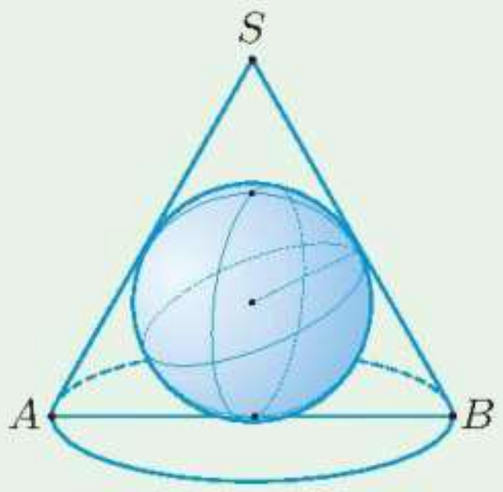
### Walec opisany na kuli (kula wpisana w walec)

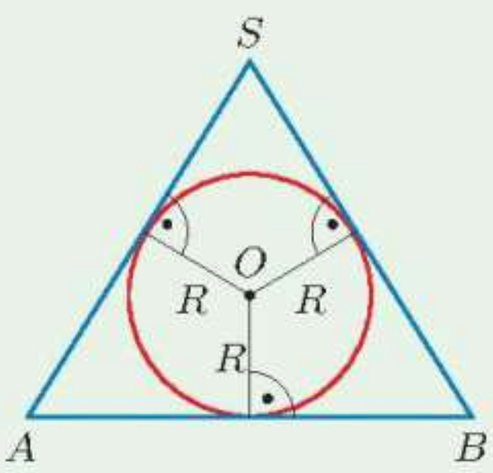



Kula jest styczna do obu podstaw walca i do każdej jego tworzącej. Kwadrat $ABCD$ jest przekrojem osiowym walca. Jeśli walec jest opisany na kuli o promieniu $R$, to jego przekrój osiowy jest kwadratem o boku $2R$.

### Stożek opisany na kuli (kula wpisana w stożek)



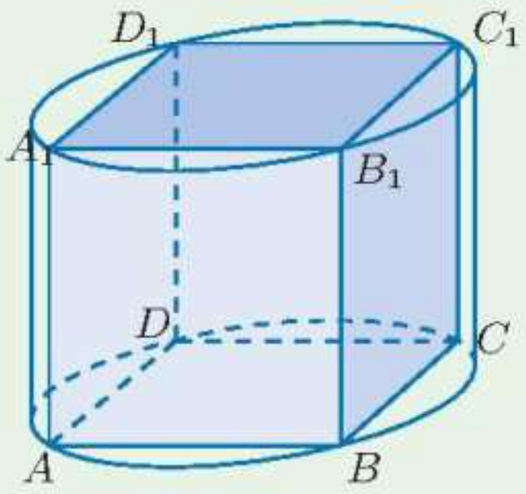



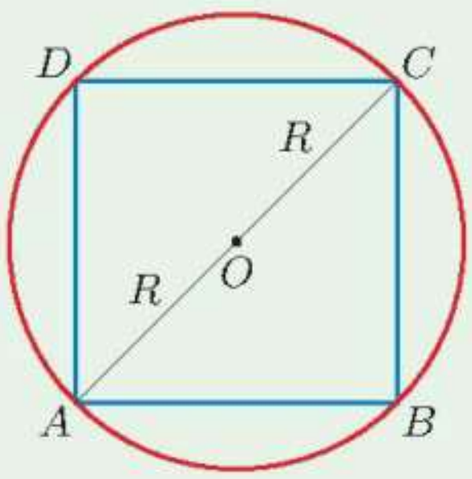

Kula jest styczna do podstawy stożka i do każdej jego tworzącej. Trójkąt $ABS$ jest przekrojem osiowym stożka. Jeśli stożek jest opisany na kuli o promieniu $R$, to jego przekrój osiowy jest trójkątem opisanym na okręgu o promieniu $R$.

## Inne bryły wpisane i opisane

Poniżej przedstawiono przykłady brył i wielościanów wpisanych i opisanych.

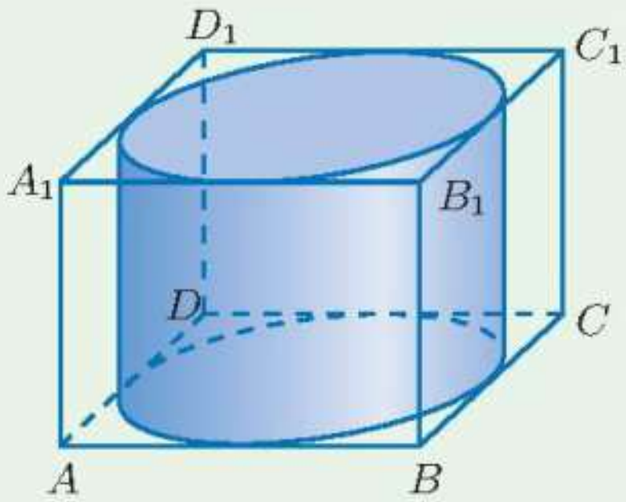
**Walec opisany na graniastosłupie (graniastosłup wpisany w walec)**

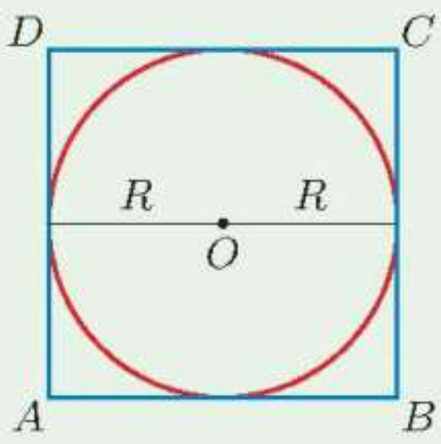



Podstawy graniastosłupa są wpisane w podstawy walca. Na rysunkach przedstawiono walec opisany na graniastosłupie prawidłowym czworokątnym oraz podstawę walca z wpisaną w nią podstawą graniastosłupa.

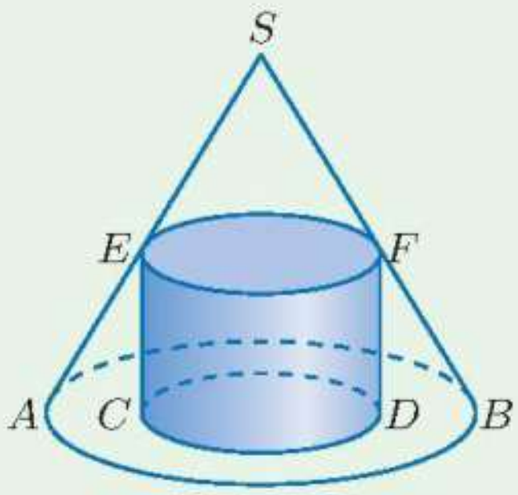
**Walec wpisany w graniastosłup (graniastosłup opisany na walcu)**

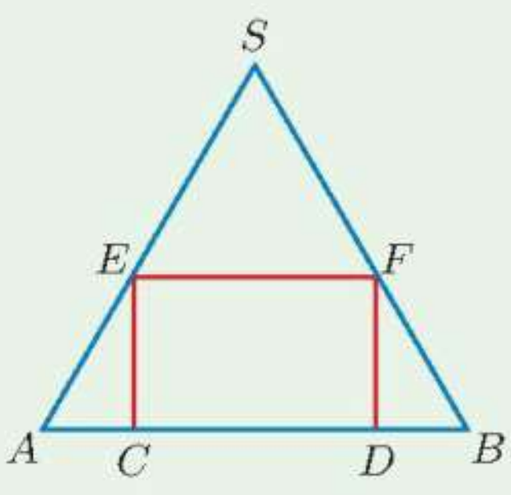



Podstawy walca są wpisane w podstawy graniastosłupa. Na rysunkach przedstawiono walec wpisany w graniastosłup prawidłowy czworokątny oraz podstawę walca z opisaną na niej podstawą graniastosłupa.

**Walec wpisany w stożek (stożek opisany na walcu)**




Okrąg ograniczający jedną podstawę walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka, a druga podstawa walca zawiera się w podstawie stożka. Na rysunku po prawej przedstawiono wspólny przekrój osiowy tych brył.

**1.** Oblicz objętość kuli opisanej na graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 8 cm.

**2.** Oblicz objętość walca opisanego na kuli o objętości $36\pi$ cm$^3$.

**3.** Oblicz objętość kuli wpisanej w stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny o boku 6 cm.

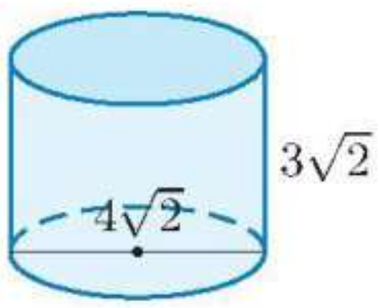
**4.** W stożek o promieniu podstawy 4 cm i wysokości 6 cm wpisano walec, którego wysokość jest równa 3 cm. Oblicz objętość tego walca.

# Zestawy powtórzeniowe

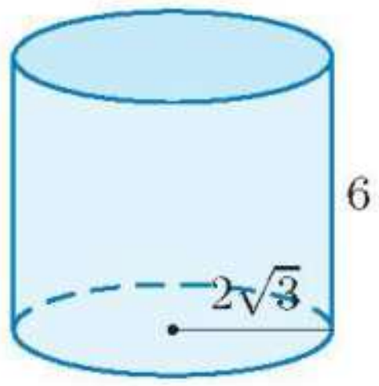
## Zestaw I

**1.** Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca przedstawionego na rysunku.

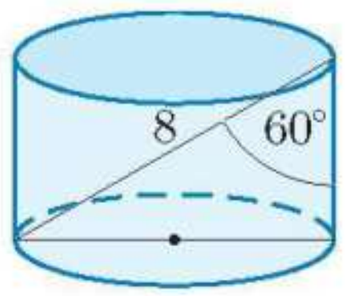
a)




b)

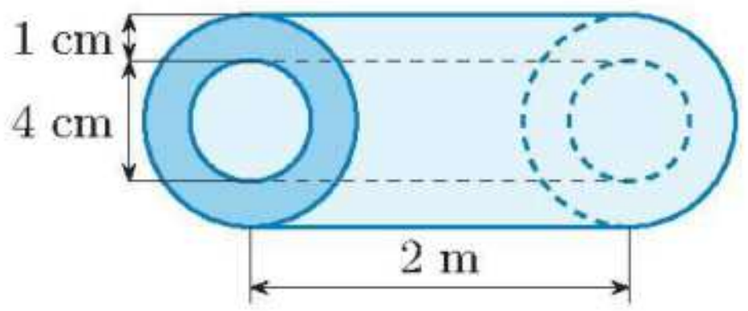



c)




**2.** Dwa walce mają taką samą wysokość. Promień podstawy jednego z nich jest o 50% dłuższy od promienia podstawy drugiego. Oblicz stosunek objętości tych walców.

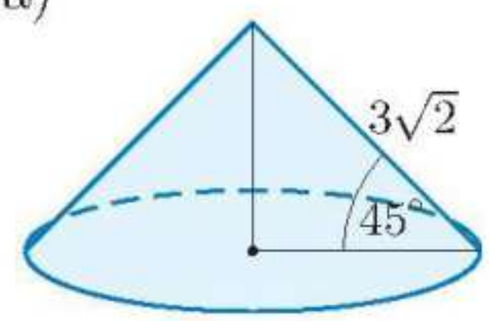
**3.** Oblicz objętość metalu użytego do wykonania metalowej rury o wymiarach podanych na rysunku (skala nie jest zachowana).



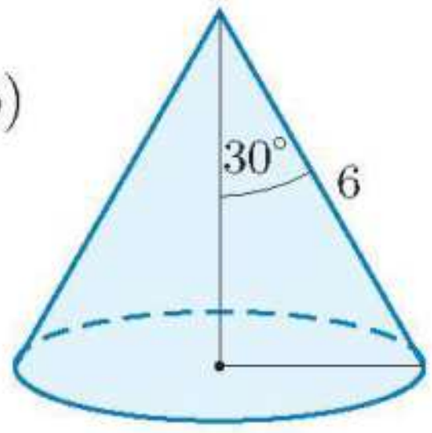

**4.** Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny, którego obwód jest równy $(8 + 4\sqrt{2})$ cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

**5.** Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka przedstawionego na rysunku.

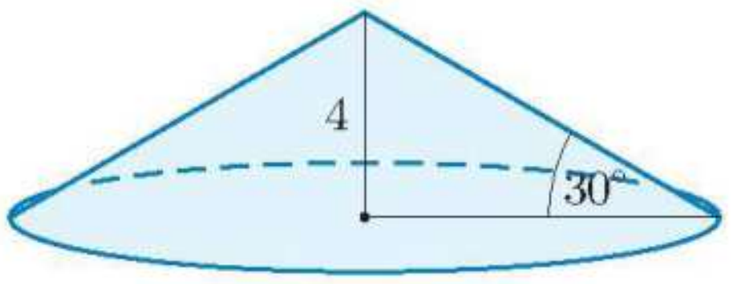
a)




b)




c)




**6.** Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 12 cm wyznaczonym przez kąt środkowy 225°. Oblicz objętość tego stożka.

**7.** Wycinek koła o promieniu 2 wyznaczony przez kąt środkowy 90° zwinięto w powierzchnię boczną stożka. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

**8.** Oblicz objętość kuli o polu powierzchni równym:
a) $1024\pi$ cm$^2$, b) $2500\pi$ cm$^2$, c) $72\pi$ cm$^2$.

**9.** Oblicz pole powierzchni kuli o objętości równej:
a) $4{,}5\pi$ cm$^3$, b) $2304\pi$ cm$^3$, c) $144\sqrt{2}\pi$ cm$^3$.

## Zestaw II

**1.** Oblicz pole przekroju osiowego walca, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest prostokątem o wymiarach 7 cm × 5 cm.

**2.** Przekrojem osiowym walca jest prostokąt $ABCD$. Długości jego boków $AB$ i $BC$ oraz przekątnej $AC$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 4. Oblicz objętość tego walca (rozpatrz dwa przypadki).

**3.** Pole podstawy walca jest równe 64, a pole jego przekroju osiowego jest równe $32\sqrt{\pi}$. Oblicz objętość tego walca.

**4.** Stosunek długości boków prostokąta jest równy 3:1. Wyznacz stosunek objętości brył otrzymanych w wyniku obrotów tego prostokąta wokół każdego z dwóch sąsiednich boków.

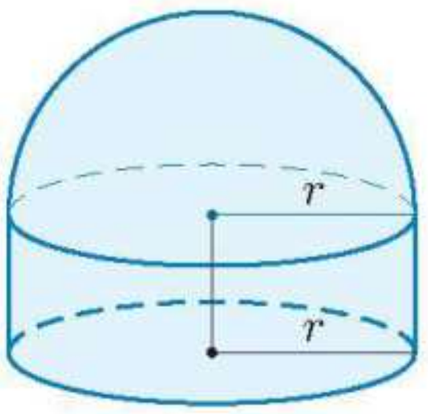
**5.** Stożek i walec mają równe pola powierzchni bocznych, równe tworzące i takie same objętości. Oblicz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.

**6.** Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 i 5. Oblicz objętość bryły otrzymanej przez obrót tego trójkąta wokół jego:

a) dłuższej przyprostokątnej,

b) krótszej przyprostokątnej.

**7.** Półkulę o promieniu $r$ i walec o promieniu podstawy $r$ oraz wysokości $\frac{2}{3}r$ połączono tak jak na rysunku obok. W ten sposób otrzymano bryłę o polu powierzchni całkowitej $156\pi$. Oblicz objętość tej bryły.




**8.** Kulę o środku $O$ przecięto płaszczyzną i otrzymano w przekroju koło o środku $S$. Oblicz długość odcinka $OS$, jeśli wiadomo, że pole powierzchni kuli jest równe $20\pi$, a obwód przekroju jest równy $2\pi$.

**9.** Środki dwóch sfer są oddalone od siebie o 10 cm, a ich promienie są równe $r_1$ i $r_2$. Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

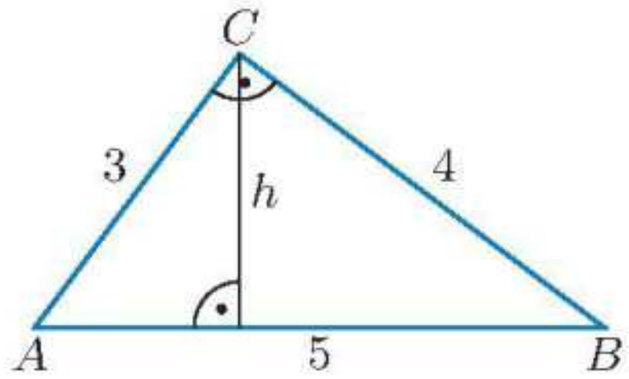
a) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 8$ cm  b) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 14$ cm

D **10.** Wykaż, że jeżeli przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, to pole powierzchni bocznej tego stożka jest dwa razy większe od pola jego podstawy.

## Sposób na zadanie

### Przykład 1

Oblicz objętość bryły otrzymanej przez obrót trójkąta prostokątnego $ABC$ o bokach długości 3, 4 i 5 (rysunek obok) wokół jego przeciwprostokątnej.

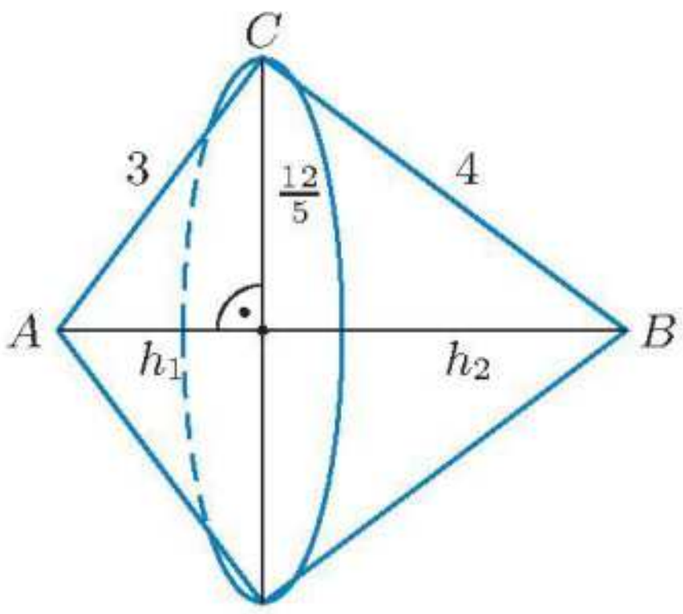



Obliczamy wysokość $h$ trójkąta $ABC$. W tym celu zapisujemy jego pole na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

Zatem $h = \frac{12}{5}$.

Bryła otrzymana przez obrót trójkąta $ABC$ wokół jego przeciwprostokątnej składa się z dwóch stożków połączonych podstawami o promieniu $\frac{12}{5}$. Jej objętość jest równa sumie objętości tych stożków:



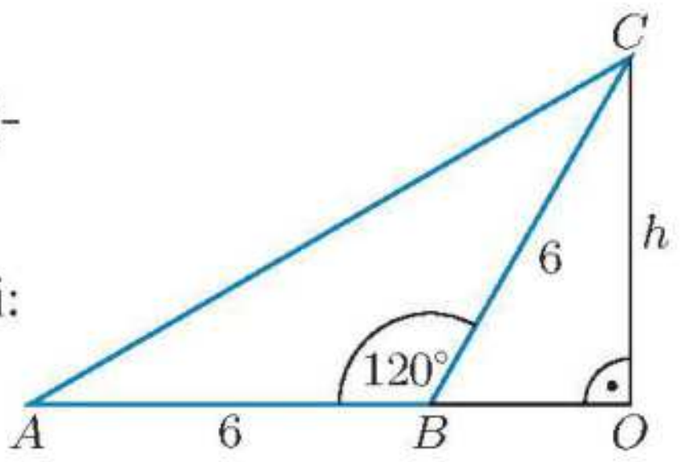

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot h_2 =$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 5 =$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{144}{25} \cdot 5 = \frac{48}{5}\pi$$

Zauważ, że skorzystaliśmy z tego, że $h_1 + h_2 = 5$ (nie obliczaliśmy $h_1$ i $h_2$).

**Odpowiedź**: Objętość bryły jest równa $\frac{48}{5}\pi$.

### Przykład 2

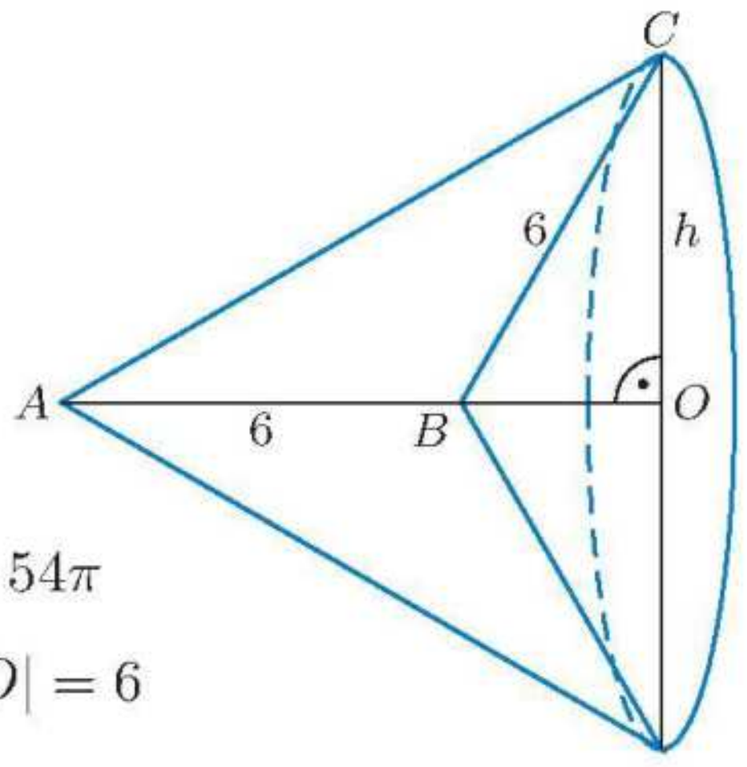
Oblicz objętość bryły otrzymanej przez obrót trójkąta $ABC$ wokół prostej $AB$ (rysunek obok).




Obliczamy wysokość trójkąta: $\frac{h}{|BC|} = \sin 60°$, czyli:

$$h = 6 \sin 60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Objętość bryły otrzymanej przez obrót trójkąta $ABC$ wokół prostej $AB$ jest różnicą objętości stożka o wysokości $AO$ oraz stożka o wysokości $BO$ i wspólnej podstawie:




$$V = V_1 - V_2 =$$
$$= \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2 \cdot |AO| - \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2 \cdot |BO| =$$
$$= \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2 \cdot (|AO| - |BO|) = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3 \cdot 6 = 54\pi$$

Zauważ, że skorzystaliśmy z tego, że $|AO| - |BO| = 6$ (nie obliczaliśmy $|AO|$ i $|BO|$).

**Odpowiedź**: Objętość bryły jest równa $54\pi$.

## Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

**1.** Różnica objętości brył powstałych przez obrót prostokąta o bokach 4 cm i 6 cm wokół krótszego i wokół dłuższego boku jest równa:

**A.** $48\pi$ cm$^3$, **B.** $42\pi$ cm$^3$, **C.** $36\pi$ cm$^3$, **D.** $30\pi$ cm$^3$.

**2.** Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku $a$, jest równe:

**A.** $\pi a^2$, **B.** $\frac{3}{2}\pi a^2$, **C.** $2\pi a^2$, **D.** $\frac{5}{2}\pi a^2$.

**3.** Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 12. Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe:

**A.** $144\pi$, **B.** $72\pi$, **C.** $36\pi$, **D.** $24\pi$.

**4.** Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę:

**A.** $120^\circ$, **B.** $90^\circ$, **C.** $60^\circ$, **D.** $45^\circ$.

**5.** Trójkąt o bokach długości 15, 20 i 25 obracamy wokół najdłuższego boku i otrzymujemy bryłę złożoną z dwóch stożków o wspólnej podstawie. Objętość tej bryły jest równa:

**A.** $1600\pi$, **B.** $1200\pi$, **C.** $1000\pi$, **D.** $750\pi$.

**6.** Koło o polu $36\pi$ obracamy wokół średnicy. Otrzymujemy wówczas bryłę o objętości:

**A.** $288\pi$, **B.** $240\pi$, **C.** $144\pi$, **D.** $120\pi$.

**7.** Suma promieni dwóch kul jest równa 12. Wynika stąd, że suma pól powierzchni tych kul może być dowolną liczbą z przedziału:

**A.** $(0; 240\pi)$, **B.** $(240\pi; 288\pi)$, **C.** $(288\pi; 576\pi)$, **D.** $(296\pi; 684\pi)$.

**8.** Dane są dwa stożki podobne. Przekrój osiowy pierwszego z nich jest trójkątem równobocznym o obwodzie 12, a przekrój osiowy drugiego ma pole $16\sqrt{3}$. Wynika stąd, że skala podobieństwa większego stożka do mniejszego jest równa:

**A.** 2, **B.** $2\sqrt{3}$, **C.** 4, **D.** $4\sqrt{3}$.

**9.** Pola powierzchni bocznych dwóch stożków podobnych mają się do siebie jak $4:9$. Stosunek objętości tych stożków jest równy:

**A.** $2:3$, **B.** $4:9$, **C.** $8:27$, **D.** $64:729$.

## Zadania krótkiej odpowiedzi

**Zadanie 1 (2 pkt)**
Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego walca do pola jego powierzchni bocznej.

**Zadanie 2 (2 pkt)**
Średnica podstawy stożka jest dwa razy krótsza od jego tworzącej. Oblicz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.

**Zadanie 3 (2 pkt)**
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu $9\sqrt{3}$ cm$^2$. Oblicz objętość tego stożka.

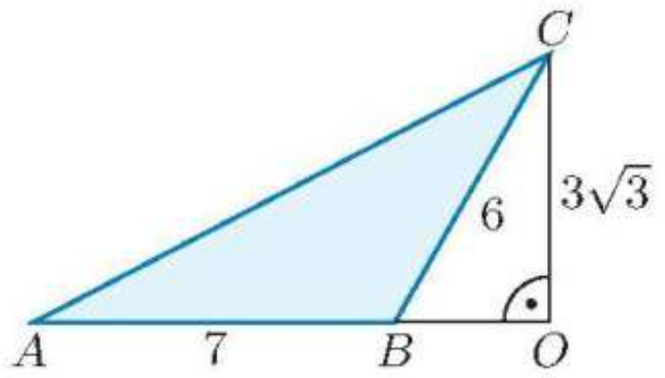
**Zadanie 4 (2 pkt)**
Oblicz objętość kuli, której pole powierzchni jest równe sumie pól powierzchni dwóch kul o promieniach 3 cm i 6 cm.

## Zadania rozszerzonej odpowiedzi

**Zadanie 5 (3 pkt)**
Wnętrze szklanki ma kształt walca o średnicy podstawy 6 cm i wysokości 8 cm. Oblicz, ile takich szklanek można napełnić po brzegi sokiem przechowywanym w dwóch prostopadłościennych kartonach o wymiarach 10 cm $\times$ 8 cm $\times$ 15 cm.

**Zadanie 6 (3 pkt)**
Oblicz objętość bryły, która powstała przez obrót trójkąta równobocznego o boku 12 cm wokół jednego z boków.

**Zadanie 7 (4 pkt)**
Oblicz objętość i pole powierzchni bryły, która powstała przez obrót trójkąta $ABC$ wokół prostej $AB$ (rysunek obok).




**Zadanie 8 (3 pkt)**
Kulę o promieniu 6 cm przecięto dwoma równoległymi płaszczyznami dzielącymi promień kuli na trzy równe odcinki. Oblicz sumę pól otrzymanych w ten sposób dwóch przekrojów.

**Zadanie 9 (3 pkt)**
Ostrosłup o wysokości 8 cm przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i otrzymano dwa wielościany o równych objętościach. Oblicz, w jakiej odległości od wierzchołka ostrosłupa leży ta płaszczyzna.

# 4 Przykłady dowodów w matematyce

Pitagorasowi (VI/V w. p.n.e.) przypisuje się autorstwo pierwszego dowodu twierdzenia nazwanego jego imieniem. Uczony nie pozostawił jednak po sobie żadnych pism. Dowód twierdzenia Pitagorasa przedstawił Euklides (IV/III w. p.n.e.) w *Elementach* – dziele podsumowującym stan wiedzy matematycznej starożytnej Grecji. Składa się ono z trzynastu ksiąg. Księgi I–IV i VI poświęcone są geometrii płaszczyzny, księgi V i VII–X – arytmetyce, a księgi XI–XIII – geometrii przestrzeni. W księdze IX znajduje się dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych. W tym podręczniku przedstawiono go na str. 144. Powyżej pokazano fragment fresku Rafaela Santi *Szkoła ateńska* przedstawiający Pitagorasa.

# D 4.1. Dowody w algebrze (1)

### Przykład 1

Wykaż, że jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest nieparzysta, to iloczyn tych liczb jest parzysty.

Załóżmy, że $n_1$ i $n_2$ są liczbami naturalnymi takimi, że suma $n_1 + n_2$ jest liczbą nieparzystą. Wówczas jedna z liczb (możemy przyjąć, że $n_1$) jest liczbą parzystą, a druga – nieparzystą (uzasadnij).
Zatem dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$: $n_1 = 2k_1$ oraz $n_2 = 2k_2 + 1$. Czyli:

$$n_1 \cdot n_2 = 2k_1 \cdot (2k_2 + 1) = 2(2k_1k_2 + k_1), \text{ gdzie } 2k_1k_2 + k_1 \in \mathbf{N}$$

Oznacza to, że iloczyn $n_1 \cdot n_2$ jest liczbą parzystą.

Zdanie postaci „jeśli $p$, to $q$" nazywamy **implikacją**, $p$ – **poprzednikiem** implikacji, a $q$ – **następnikiem** implikacji.
Twierdzenia w matematyce często można sformułować w postaci implikacji. Poprzednik implikacji nazywamy założeniem, a następnik – tezą twierdzenia. Wykazanie prawdziwości takiego twierdzenia polega na wykazaniu prawdziwości tezy przy założeniu prawdziwości założenia.

### Ćwiczenie 1

Wykaż, że jeśli dwie liczby są nieparzyste, a trzecia jest parzysta, to suma tych trzech liczb jest parzysta.

### Ćwiczenie 2

Wykaż, że jeśli:
a) dwie liczby są nieparzyste, to suma ich kwadratów jest parzysta,
b) trzy liczby są nieparzyste, to suma ich kwadratów jest nieparzysta.

### Przykład 2

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n$ liczba $n^2(n^2 - 1)$ jest podzielna przez 12.

Zauważmy, że $n^2(n^2 - 1) = n(n-1)n(n+1)$. Wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb całkowitych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3. Oznacza to, że liczba:
- $n(n-1)$ jest podzielna przez 2,
- $n(n+1)$ jest podzielna przez 2,
- $(n-1)n(n+1)$ jest podzielna przez 3.

Zatem liczba $n^2(n^2-1)$ jest podzielna przez 4 oraz przez 3, jest więc podzielna przez 12.

### Ćwiczenie 3

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n$ liczba:

a) $n(n^4 - 1)$ jest podzielna przez 6,

b) $n^6 - 2n^4 + n^2$ jest podzielna przez 36.

### Ćwiczenie 4

a) Udowodnij, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 120.

b) Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

### Przykład 3

Wykaż, że liczba $17^8 - 6^8$ jest podzielna przez 11 i przez 23.

Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 17^8 - 6^8 &= (17^4 - 6^4)(17^4 + 6^4) = (17^2 - 6^2)(17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) = \\ &= (17 - 6)(17 + 6)(17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) = \\ &= 11 \cdot 23 \cdot (17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) \qquad (17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Zatem liczba $17^8 - 6^8$ jest podzielna przez 11 i przez 23.

### Ćwiczenie 5

a) Udowodnij, że liczba $10\,007^4 - 10\,003^4$ jest podzielna przez 80 040.

b) Udowodnij, że liczba $7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75}$ jest podzielna przez 19.

c) Udowodnij, że liczba $32^{32} - 5^{64}$ jest podzielna przez 7.

### Przykład 4

Reszta z dzielenia liczby naturalnej $n$ przez 5 jest równa 4. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby $n^2$ przez 5 jest równa 1.

Liczbę naturalną $n$ można zapisać w postaci $n = 5k + 4$ dla pewnego $k \in \mathbf{N}$. Wówczas $n^2 = (5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$, zatem reszta z dzielenia liczby $n^2$ przez 5 jest równa 1.

### Ćwiczenie 6

Reszta z dzielenia liczby naturalnej $n$ przez 6 jest równa 5. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby $n^2$ przez 6 jest równa 1.

### Ćwiczenie 7

Reszta z dzielenia każdej z liczb naturalnych $n_1$, $n_2$ i $n_3$ przez 6 jest równa 4. Wykaż, że suma kwadratów tych liczb jest podzielna przez 12.

## Zadania

**1.** Dane są dwie liczby naturalne, obie podzielne przez 3. Wykaż, że różnica kwadratów tych liczb jest podzielna przez 9.

**2.** Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych, z których pierwsza jest parzysta, jest podzielny przez 24.

**3.** a) Dane są trzy liczby naturalne takie, że reszta z dzielenia każdej z nich przez 3 jest równa 2. Wykaż, że suma tych liczb jest podzielna przez 3.

b) Dane są trzy liczby naturalne takie, że reszta z dzielenia każdej z nich przez 6 jest równa 4. Wykaż, że suma tych liczb jest podzielna przez 6.

**4.** Dane są dwie kolejne liczby naturalne, z których żadna nie jest podzielna przez 3. Wykaż, że:

a) suma tych liczb jest podzielna przez 3,

b) różnica kwadratów tych liczb jest podzielna przez 3.

**5.** a) Wykaż, że jeśli reszta z dzielenia liczby naturalnej $n$ przez 5 jest równa 4, to liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 5.

b) Wykaż, że jeśli liczba naturalna $n$ nie jest podzielna przez 5, to jedna z liczb $n^2 - 1$ lub $n^2 + 1$ jest podzielna przez 5.

**6.** a) Wykaż, że jeśli liczba naturalna $n$ nie jest podzielna przez 3, to reszta z dzielenia liczby $n^2$ przez 3 jest równa 1.

b) Wykaż, że suma kwadratów trzech liczb naturalnych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.

**7.** a) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n$ liczba $\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$ jest naturalna.

b) Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej $n$ liczba $\frac{n^3}{8} - \frac{n}{8}$ jest naturalna.

## Powtórzenie

**8.** a) Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

b) Wykaż, że iloczyn kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 36.

**9.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ reszta z dzielenia liczby $m$ przez 4 jest równa 3.

a) $m = 24n^2 + 56n + 7$ b) $m = 144n^3 + 256n^2 - 96n + 51$

# D 4.2. Dowody w algebrze (2)

### Przykład 1

Wykaż, że nierówność $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$.

Przekształcamy nierówności równoważnie:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geqslant 2ab \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geqslant 0 \qquad \text{Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.} \\ (a-b)^2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$, zatem również nierówność $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ zachodzi dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$.

### Przykład 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych $a$ i $b$ prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (czyli że średnia arytmetyczna liczb nieujemnych jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej).

Załóżmy, że $a$ i $b$ są liczbami nieujemnymi. Przekształcamy nierówności równoważnie:

$$\begin{aligned} \tfrac{a+b}{2} &\geqslant \sqrt{ab} \qquad \text{Dla dowolnych nieujemnych } \alpha \text{ i } \beta \text{ nierówności } \alpha \geqslant \beta \text{ i } \alpha^2 \geqslant \beta^2 \text{ są równoważne.} \\ \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 &\geqslant ab \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geqslant 4ab \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geqslant 0 \qquad \text{Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.} \\ (a-b)^2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb nieujemnych $a$ i $b$, zatem także nierówność $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ zachodzi dla dowolnych liczb nieujemnych $a$ i $b$.

### Ćwiczenie 1

a) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$ takich, że $ab > 0$, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

b) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$ takich, że $ab < 0$, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant -2$.

### Ćwiczenie 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$ prawdziwa jest nierówność:

a) $a^2 \geqslant 4b(a-b)$, b) $a(6b-7a) \leqslant 2(b-a)(b+a)$.

### Ćwiczenie 3

Wykaż, że dla dowolnych liczb $a, b \geqslant 0$ zachodzi nierówność $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$.

### Przykład 3

Wykaż, że równanie $x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ nie ma pierwiastków.

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 4x + 4 = 0$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

$$(x^2 - 2)^2 + (x - 2)^2 = 0$$

Rozpatrzmy składniki otrzymanej sumy: $(x^2 - 2)^2$ i $(x - 2)^2$. Zauważmy, że:

- $(x^2 - 2)^2 \geqslant 0$ i $(x - 2)^2 \geqslant 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$,
- nie istnieje takie $x$, dla którego jednocześnie $(x^2 - 2)^2 = 0$ i $(x - 2)^2 = 0$ (pierwszy składnik przyjmuje wartość 0 dla $x = -\sqrt{2}$ oraz dla $x = \sqrt{2}$, a drugi składnik – dla $x = 2$).

Zatem równanie $x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ nie ma pierwiastków.

### Ćwiczenie 4

Wykaż, że podana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby $x \in \mathbf{R}$.

a) $x^4 - 2x + 2 > x^2 + 4x - 8$ b) $x^4 - 4x^2 + 5 > 4x - 12$

### Przykład 4

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ prawdziwa jest nierówność:

$$5x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 1 \geqslant 0$$

Przekształcamy wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$5x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 1 = x^2 + 2xy + y^2 + 4x^2 - 4x + 1 = (x + y)^2 + (2x - 1)^2$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ zachodzą nierówności $(x + y)^2 \geqslant 0$ oraz $(2x - 1)^2 \geqslant 0$, więc nierówność jest zawsze prawdziwa.

### Ćwiczenie 5

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ prawdziwa jest nierówność:

a) $x^2 + 10y^2 + 9 \geqslant 6y(x + 1)$, b) $3x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 2x - \frac{1}{2}$.

### Przykład 5

Wykaż, że jeśli liczby $a \neq 0$ i $b \neq 0$ spełniają warunek $(a + 2b)^3 = a^3 + 8b^3$, to wartość wyrażenia $\frac{a}{b}$ jest równa $-2$.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

$$(a + 2b)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot 2b + 3a(2b)^2 + (2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$$

Z równości $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 = a^3 + 8b^3$ otrzymujemy:

$$6a^2b + 12ab^2 = 0$$

Stąd $6a^2b = -12ab^2$, czyli $\frac{a}{b} = -2$.

### Ćwiczenie 6

Wykaż, że jeśli liczby $a \neq 0$ i $b \neq 0$ spełniają warunek:

a) $(3a+b)^3 = 27a^3 + b^3$, to $\frac{b}{a} = -3$, b) $(a-2b)^3 = a^3 - 8b^3$, to $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

## Zadania

**1.** Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$ prawdziwa jest podana nierówność.

a) $9a^2 + 4b^2 \geqslant 12ab$ b) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 \geqslant \frac{1}{3}ab$ c) $a(\sqrt{6}b - a) \leqslant \frac{3}{2}b^2$

**2.** Wykaż, że dla dowolnych liczb $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$ prawdziwa jest nierówność:

a) $a + 4b \geqslant 4\sqrt{ab}$, b) $a + \frac{b}{2} \geqslant \sqrt{2ab}$, c) $\sqrt{a}\left(\frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) \leqslant \frac{b}{16}$.

**3.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$ i $b$ takich, że $ab = 4$, prawdziwa jest nierówność $a + b \geqslant 4$.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$
$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$
$$(a+b)^2 \geqslant 4ab$$

Korzystamy z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb.

Z założenia $ab = 4$, więc $(a+b)^2 \geqslant 16$ i stąd $a + b \geqslant 4$.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$ i $b$ takich, że:

a) $ab = 16$, prawdziwa jest nierówność $(1+a)(1+b) \geqslant 25$,

b) $ab = \frac{1}{4}$, prawdziwa jest nierówność $4(1+a)(1+b) \geqslant 9$.

**4.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$ i $b$ takich, że:

a) $a + b = \frac{1}{2}$, prawdziwa jest nierówność $ab \leqslant \frac{1}{16}$,

b) $a + b = 5$, prawdziwa jest nierówność $ab \leqslant 6{,}25$.

**5.** Udowodnij, że jeśli liczba całkowita $a$ nie jest podzielna przez 3, to liczba $\frac{a^3}{9}$ nie jest całkowita.

## Powtórzenie

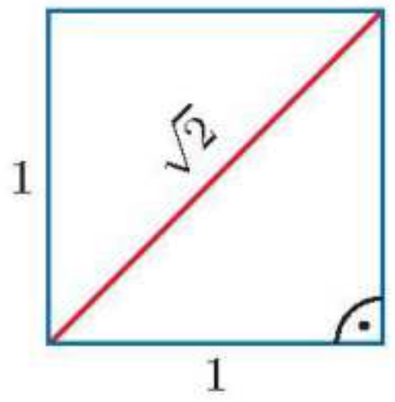
**6.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność:

a) $2b(2a-b) \leqslant (2a-b)(2a+b)$, b) $\sqrt{3}b(a - \sqrt{3}b) \leqslant a(a - \sqrt{3}b)$.

**7.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a$ i $b$ takich, że $a \geqslant b > 0$, prawdziwa jest nierówność $b^2(a+1) \leqslant a^2(b+1)$.

# 4.3. Dowody nie wprost

Starożytni Grecy udowodnili, że $\sqrt{2}$ (czyli długość przekątnej kwadratu o boku 1) jest liczbą niewymierną.




### Twierdzenie

$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

**Dowód**

Załóżmy przeciwnie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieją liczby całkowite względnie pierwsze $m$ i $n$, takie, że:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Założyliśmy, że liczby $m$ i $n$ nie mają wspólnych dzielników większych od 1.

Podnosimy obie strony równości do kwadratu i otrzymujemy:

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$2n^2 = m^2$$

Zatem $m^2$ jest liczbą parzystą, czyli również $m$ jest liczbą parzystą (kwadrat liczby parzystej jest liczbą parzystą, a kwadrat liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą). Czyli $m = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej $k$. Stąd:

$$2n^2 = (2k)^2$$

$$n^2 = 2k^2$$

Zatem $n^2$, a więc również $n$, są liczbami parzystymi. Oznacza to, że 2 jest wspólnym dzielnikiem liczb $m$ i $n$, co jest sprzeczne z założeniem, że są względnie pierwsze.
Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ można wyrazić jako ułamek $\frac{m}{n}$, było fałszywe (z prawdy nie może wynikać fałsz). Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód niewymierności $\sqrt{2}$ jest **dowodem przez sprowadzenie do sprzeczności** (*reductio ad absurdum*), zwany też **dowodem nie wprost**. Ten sposób rozumowania polega na wykazaniu, że przyjęcie prawdziwości jakiegoś zdania prowadzi do sprzeczności. Zatem musi być prawdziwe zdanie przeciwne.

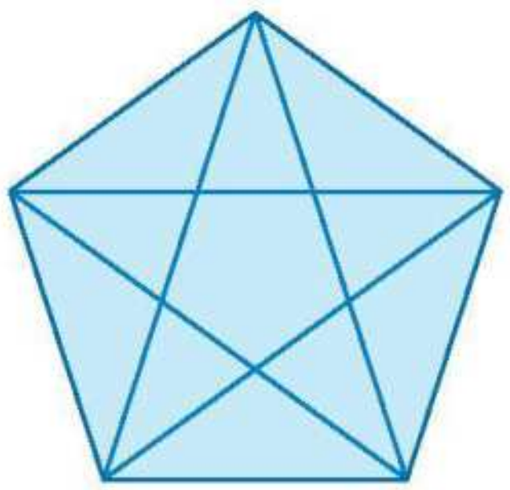
### Ćwiczenie 1

Udowodnij, że liczba $x$ jest niewymierna. Przeprowadź rozumowanie analogiczne do dowodu niewymierności liczby $\sqrt{2}$.

a) $x = \sqrt{3}$ b) $x = \sqrt{5}$ c) $x = \sqrt{6}$

### Przykład 1

Udowodnij, że liczba $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (długość przekątnej pięciokąta foremnego o boku 1) jest niewymierna.




Załóżmy przeciwnie, że $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieją takie liczby całkowite $m$ i $n$, że:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{m}{n}$$

$$\sqrt{5}+1 = \frac{2m}{n}$$

$$\sqrt{5} = \frac{2m}{n} - 1 = \frac{2m-n}{n}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną, a $\frac{2m-n}{n}$ – liczbą wymierną. Zatem $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ jest liczbą niewymierną.

### Ćwiczenie 2

Udowodnij, że podana liczba jest niewymierna.

a) $\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$ b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$

**Wskazówka do podpunktu b).** Obie strony równości $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{N}$, podnieś do kwadratu.

## Zadania

**1.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Iloczyn dowolnej liczby niewymiernej $x$ i liczby całkowitej $k \neq 0$ jest liczbą niewymierną.
>
> **Dowód.** Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna $x$ oraz liczba całkowita $k \neq 0$ takie, że iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite $m$ i $n$ takie, że $k \cdot x = \frac{m}{n}$. Wówczas $x = \frac{m}{k \cdot n}$, z czego wynika, że $x$ jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą niewymierną.

Udowodnij, że:

a) iloczyn dowolnej liczby niewymiernej $x$ i liczby wymiernej $w \neq 0$ jest liczbą niewymierną,

b) suma dowolnej liczby niewymiernej $x$ i liczby wymiernej $w$ jest liczbą niewymierną.

**2.** Wykaż, że wysokość trójkąta równobocznego o boku 1 ma długość, która wyraża się liczbą niewymierną.

Warto wiedzieć

## Nieskończoność zbioru liczb pierwszych

### Twierdzenie

> Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

**Dowód**

Załóżmy, że liczb pierwszych jest skończenie wiele. Niech $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi ustawionymi w kolejności rosnącej (czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ itd.). Rozpatrzmy liczbę:

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Liczba $M$ jest większa od każdej z liczb $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ oraz jest albo liczbą pierwszą, albo złożoną.

Jeżeli $M$ jest liczbą pierwszą, to liczby $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ nie są wszystkimi liczbami pierwszymi.

Jeżeli $M$ jest liczbą złożoną, to można ją przedstawić jako iloczyn czynników będących liczbami pierwszymi. Zauważmy, że w rozkładzie liczby $M$ na czynniki nie może wystąpić żadna spośród liczb $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, gdyż przy dzieleniu przez $p_k$ $(k \leqslant n)$ otrzymujemy resztę równą 1. Zatem liczba $M$ ma dzielnik pierwszy różny od każdej z liczb:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$$

Oznacza to, że zarówno wtedy, gdy liczba $M$ jest pierwsza, jak i wtedy, gdy jest złożona, istnieje liczba pierwsza większa od każdej z liczb:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$$

Zatem nie jest prawdą, że liczb pierwszych jest skończenie wiele.

Powyższe twierdzenie podał i udowodnił Euklides (ok. 365 – ok. 300 r. p.n.e.).




**1.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieje liczba pierwsza $p$ taka, że:

$$n < p < n!$$

**Wskazówka.** Rozpatrz liczbę $n! - 1$.

***2.** Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ do przedziału $\langle n! + 2; n! + n\rangle$ nie należy żadna liczba pierwsza.

# 4.4. Dowody w geometrii (1)

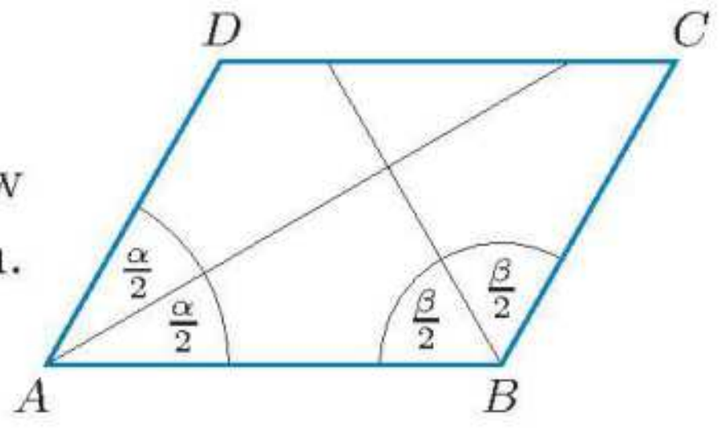
### Ćwiczenie 1

Udowodnij, że suma miar kątów trójkąta jest równa $180^\circ$.

Gdy przedstawiamy dowód twierdzenia, często korzystamy z twierdzeń już udowodnionych. W dowodach twierdzeń w ćwiczeniach 2. i 3. można skorzystać z twierdzenia udowodnionego w ćwiczeniu 1.

### Ćwiczenie 2

Udowodnij, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku przecinają się pod kątem prostym.



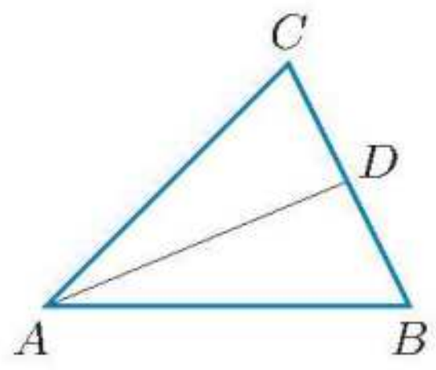

### Ćwiczenie 3

Udowodnij, że jeśli środek okręgu opisanego na trójkącie jest środkiem jednego z jego boków, to trójkąt ten jest prostokątny.

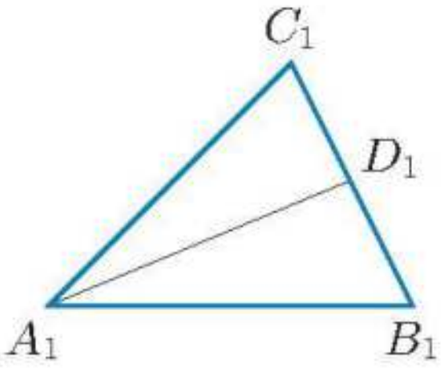
W dowodzie przedstawionym w poniższym przykładzie korzystamy z twierdzeń nazywanych cechami przystawania trójkątów (przypomnij ich treść).

### Przykład 1

W trójkątach $ABC$ i $A_1B_1C_1$ (rysunek obok) poprowadzono dwusieczne odpowiednio $AD$ i $A_1D_1$. Wykaż, że jeśli $|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1A_1B_1$, to $|AC| = |A_1C_1|$.




$|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B_1A_1D_1$, więc na podstawie cechy BKB trójkąty $ABD$ i $A_1B_1D_1$ są przystające ($\triangle ABD \equiv \triangle A_1B_1D_1$).
Stąd $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$.




Z powyższego wniosku i założeń $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1A_1B_1$ oraz $|AB| = |A_1B_1|$, na podstawie cechy KBK, otrzymujemy: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. Zatem $|AC| = |A_1C_1|$.

### Ćwiczenie 4

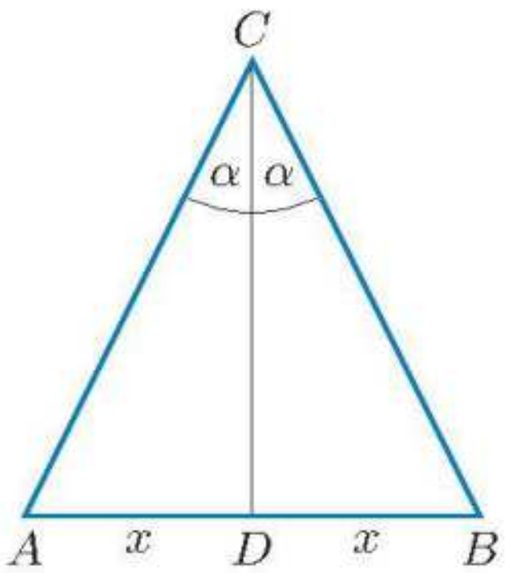
Środkowe $AD$ i $A_1D_1$ poprowadzone odpowiednio w trójkątach $ABC$ i $A_1B_1C_1$ mają równe długości. Wykaż, że jeśli:

a) $|AB| = |A_1B_1|$ oraz $|BC| = |B_1C_1|$, to $|AC| = |A_1C_1|$,

b) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C_1A_1D_1$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A_1D_1B_1$, to $|AB| = |A_1B_1|$.

### Przykład 2

Środkowa $CD$ trójkąta $ABC$ zawiera się w dwusiecznej kąta $ACB$ (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty $ADC$ i $BDC$ są przystające.




Trójkąty $ADC$ i $BDC$ mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka $C$ i równe podstawy, zatem:

$$P_{\triangle ADC} = P_{\triangle BDC}$$

Wyznaczamy te pola:

$$P_{\triangle ADC} = \tfrac{1}{2}|AC| \cdot |CD| \cdot \sin\alpha$$
$$P_{\triangle BDC} = \tfrac{1}{2}|BC| \cdot |CD| \cdot \sin\alpha$$

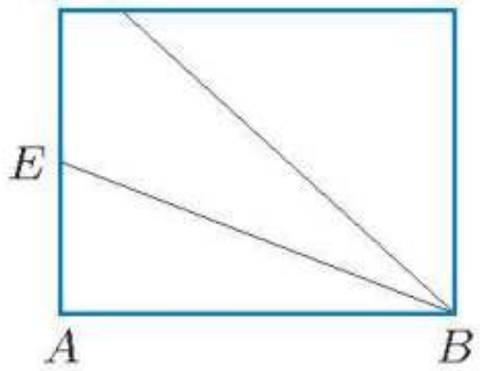
i otrzymujemy $|AC| = |BC|$. Trójkąty $ADC$ i $BDC$ mają odpowiednie boki tej samej długości, zatem na podstawie cechy BBB są przystające.

Zwróćmy uwagę, że z udowodnionego w przykładzie 2. twierdzenia wynika, że jeśli środkowa trójkąta zawiera się w dwusiecznej jednego z jego kątów, to jest ona wysokością tego trójkąta.

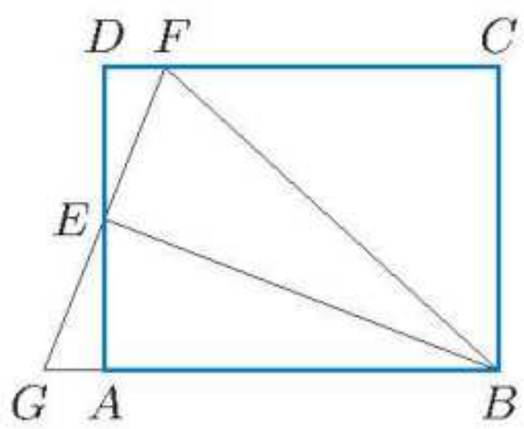
W niektórych dowodach geometrycznych potrzebne jest poprowadzenie dodatkowych prostych lub odcinków.

### Przykład 3

Punkt $E$ jest środkiem boku $AD$ prostokąta $ABCD$. Na boku $DC$ obrano taki punkt $F$, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle FBE$. Wykaż, że kąt $FEB$ jest prosty.

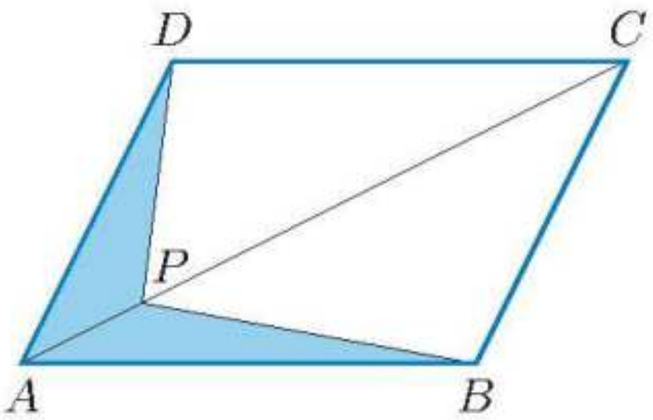



Odcinek $FE$ przedłużamy do przecięcia z prostą $AB$ w punkcie $G$. Trójkąty $FDE$ i $GAE$ są przystające (uzasadnij), stąd $|EF| = |EG|$. Odcinek $EB$ jest więc środkową trójkąta $FBG$, a ponieważ zawiera się w dwusiecznej kąta $FBG$, jest też wysokością tego trójkąta. Zatem kąt $FEB$ jest prosty.




### Ćwiczenie 5

Punkt $P$ należy do przekątnej $AC$ równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów $ADP$ i $ABP$ są równe.

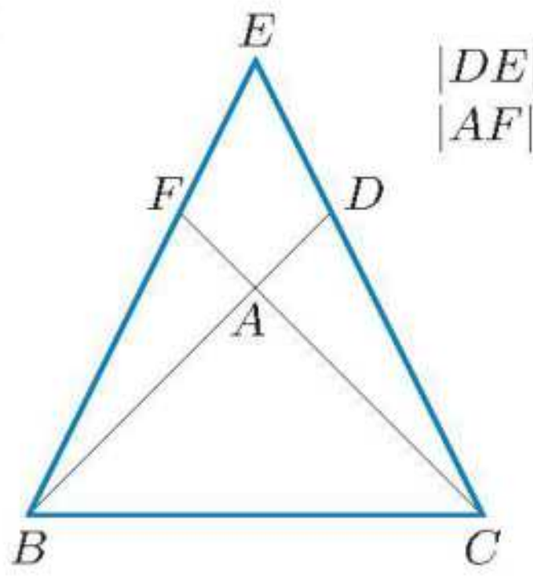



**Wskazówka.** Narysuj wysokość trójkąta $ACD$ opuszczoną z wierzchołka $D$ oraz wysokość trójkąta $ACB$ opuszczoną z wierzchołka $B$ i wykaż, że wysokości te są równe.

## Zadania

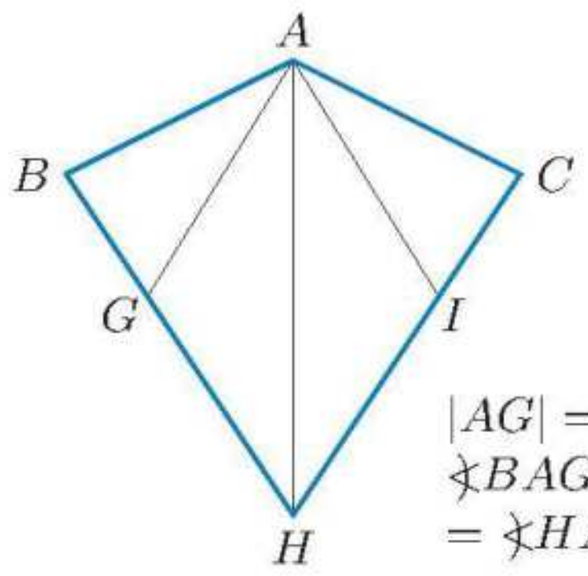
**1.** Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $|AB| = |AC|$.

a)




$|DE| = |FE|$,
$|AF| = |AD|$

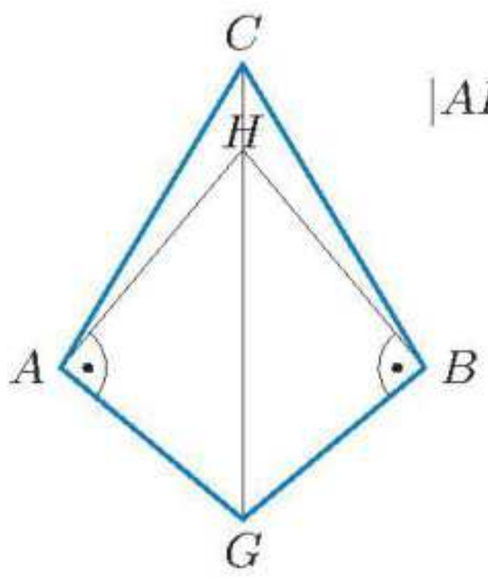
b)




$|AG| = |AI|$,
$\sphericalangle BAG = \sphericalangle GAH =$
$= \sphericalangle HAI = \sphericalangle IAC$

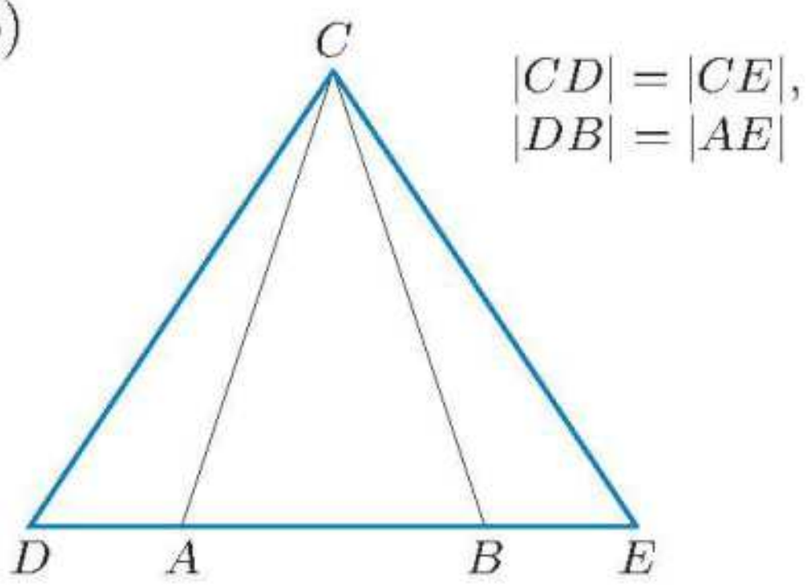
**2.** Korzystając z podanych informacji, wykaż, że trójkąt $ABC$ jest równoramienny.

a)




$|AH| = |BH|$

b)

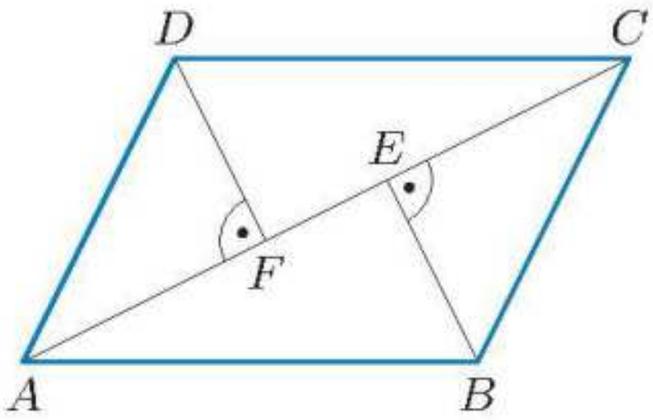



$|CD| = |CE|$,
$|DB| = |AE|$

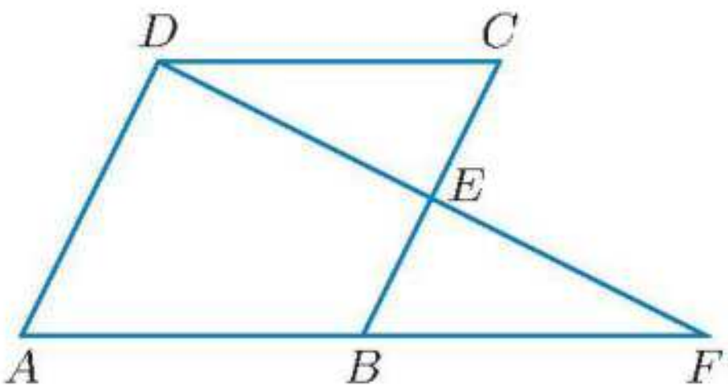
**3.** Dany jest czworokąt $ABCD$ (rysunek obok).

a) Wykaż, że $|AB| = |DC|$, jeśli wiadomo, że $|AF| = |CE|$ oraz $\sphericalangle FAD = \sphericalangle ECB$.

b) Wykaż, że $|AD| = |BC|$, jeśli wiadomo, że $|BE| = |DF|$ oraz $AB \parallel CD$.




**4.** Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok). Punkt $E$ jest środkiem boku $BC$, a punkt $F$ – punktem przecięcia prostych $AB$ i $DE$. Wykaż, że pola trójkąta $AFD$ i równoległoboku $ABCD$ są równe.

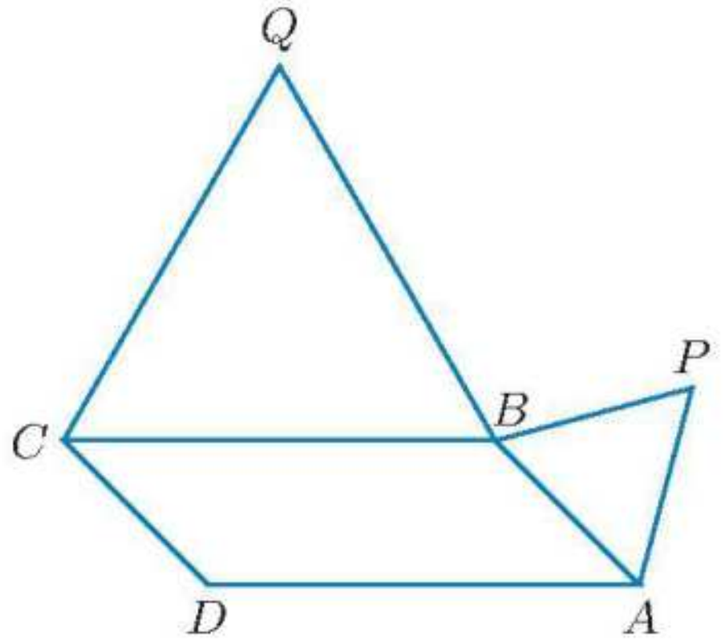



**5.** Na bokach $AB$, $BC$ i $AC$ trójkąta równobocznego $ABC$ obrano odpowiednio punkty $P$, $Q$ i $R$ tak, że $|AP| = |BQ| = |CR|$. Wykaż, że trójkąt $PQR$ jest równoboczny oraz że punkty przecięcia odcinków $AQ$, $BR$ i $CP$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

**6.** W trójkącie $ABC$ poprowadzono środkową $CD$, a z punktu $D$ poprowadzono środkowe trójkątów $ADC$ i $CDB$: odpowiednio $DE$ i $DF$. Wykaż, że jeśli $|DE| = |DF|$, to trójkąt $ABC$ jest równoramienny.

**7.** Dany jest równoległobok $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku $A$. Na półprostych $AB$ i $CB$ obrano odpowiednio punkty $E$ i $F$ takie, że $|CB| = |CE|$ oraz $|AB| = |AF|$. Wykaż, że $\triangle DAF \equiv \triangle ECD$.

**8.** Na zewnątrz równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) obrano punkty $P$ i $Q$ tak, że trójkąty $BAP$ i $CBQ$ są równoboczne. Wykaż, że trójkąt $PQD$ jest równoboczny.

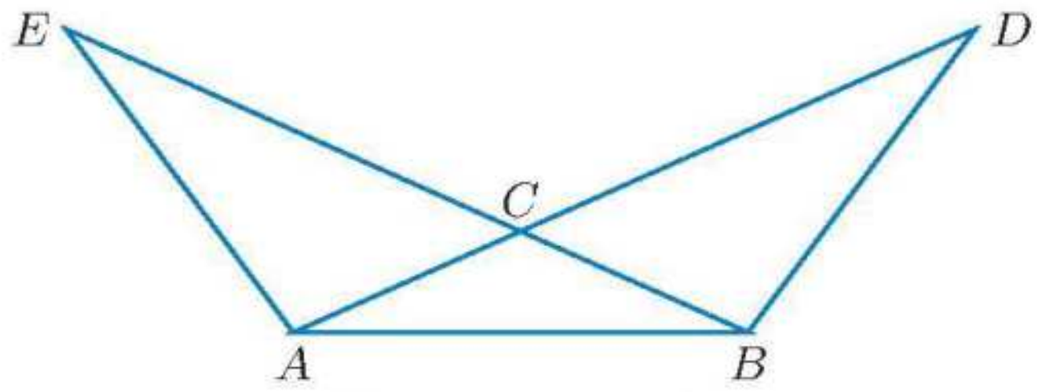



**9.** Dany jest trapez $ABCD$. Punkt $P$ jest środkiem ramienia $AD$. Udowodnij, że pole trójkąta $BPC$ jest dwa razy mniejsze od pola trapezu $ABCD$.

**10.** Punkty $P$, $Q$, $R$ i $S$ są środkami boków trapezu równoramiennego. Wykaż, że czworokąt $PQRS$ jest rombem.

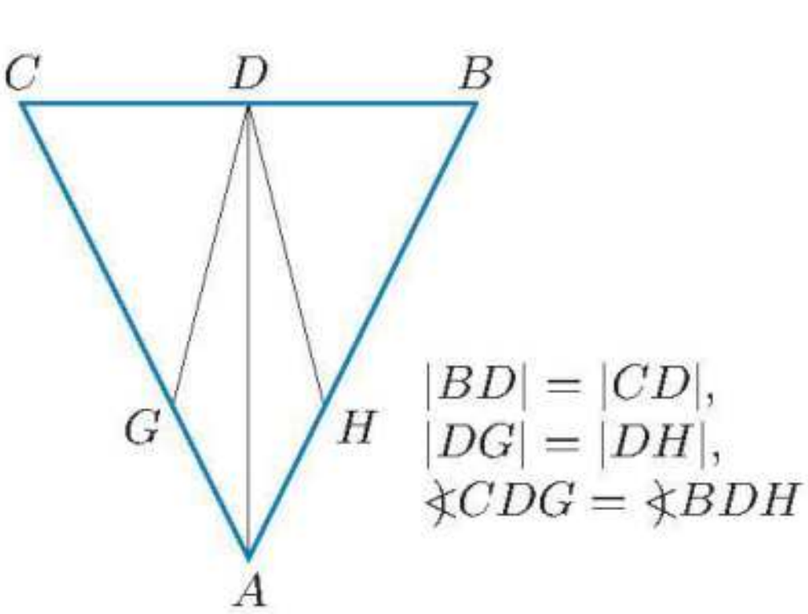
## Powtórzenie

**11.** Udowodnij, że jeśli $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DBA$ oraz $|EA| = |DB|$ (rysunek poniżej), to trójkąt $ABC$ jest równoramienny.



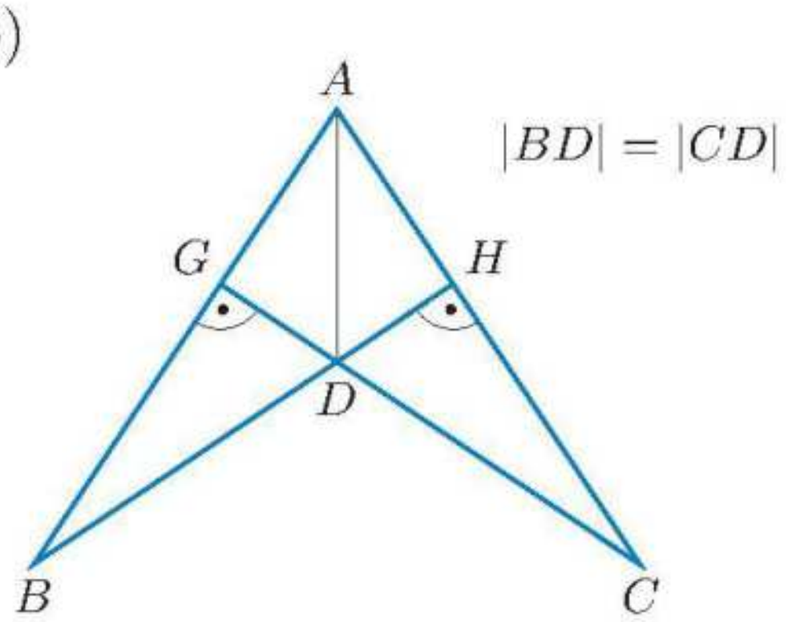

**12.** Korzystając z podanych informacji, wykaż, że odcinek $AD$ zawiera się w dwusiecznej kąta $BAC$.

a)




$|BD| = |CD|$,
$|DG| = |DH|$,
$\sphericalangle CDG = \sphericalangle BDH$

b)

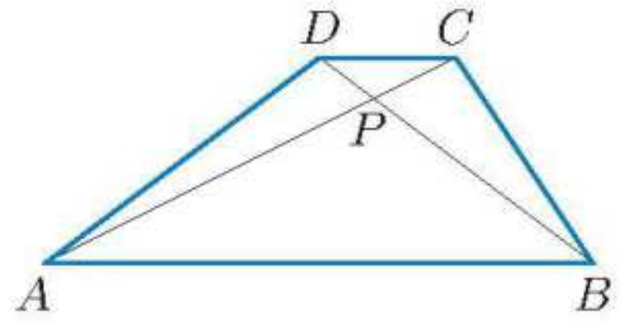


# D 4.5. Dowody w geometrii (2)

### Ćwiczenie 1

a) Przypomnij cechy podobieństwa trójkątów.

b) Dany jest trapez $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $P$ (rysunek obok). Podaj cechę, na podstawie której można uzasadnić podobieństwo trójkątów $ABP$ i $CDP$.




Trójkąty $ABP$ i $CDP$ są podobne, co zapisujemy:

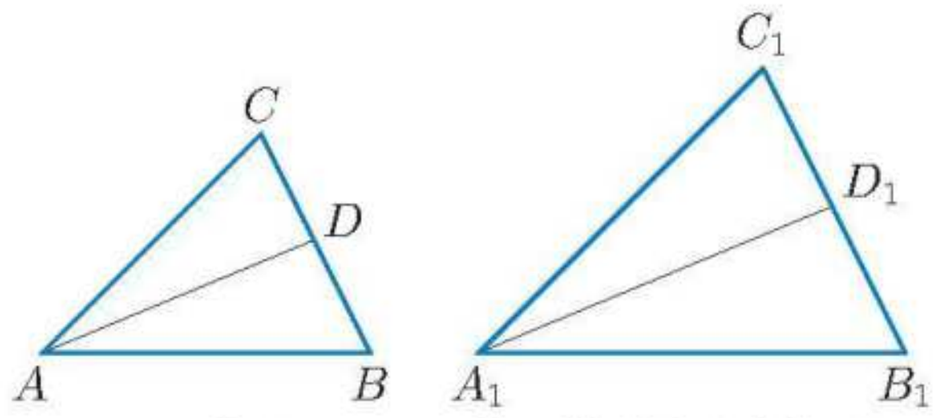
$$\triangle ABP \sim \triangle CDP$$

### Przykład 1

W trójkątach podobnych $ABC$ i $A_1B_1C_1$ poprowadzono środkowe $AD$ i $A_1D_1$. Wykaż, że długości tych środkowych są proporcjonalne do długości boków trójkątów.

Korzystamy z podobieństwa trójkątów $ABC$ i $A_1B_1C_1$:

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{\frac{1}{2}|BC|}{\frac{1}{2}|B_1C_1|} = \frac{|BD|}{|B_1D_1|}$$




Ponadto kąty $ABD$ i $A_1B_1D_1$ są równe, więc na podstawie cechy BKB trójkąty $ABD$ i $A_1B_1D_1$ są podobne. Zatem:

$$\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}$$

### Ćwiczenie 2

Boki $AB$, $BC$ i $AC$ trójkąta $ABC$ są proporcjonalne odpowiednio do boków $A_1B_1$, $B_1C_1$ i $A_1C_1$ trójkąta $A_1B_1C_1$.

a) W trójkątach $ABC$ i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne kątów $BAC$ i $B_1A_1C_1$. Przecięły one boki $BC$ i $B_1C_1$ odpowiednio w punktach $D$ i $D_1$. Wykaż, że długości odcinków $AD$ i $A_1D_1$ są proporcjonalne do długości boków trójkątów.

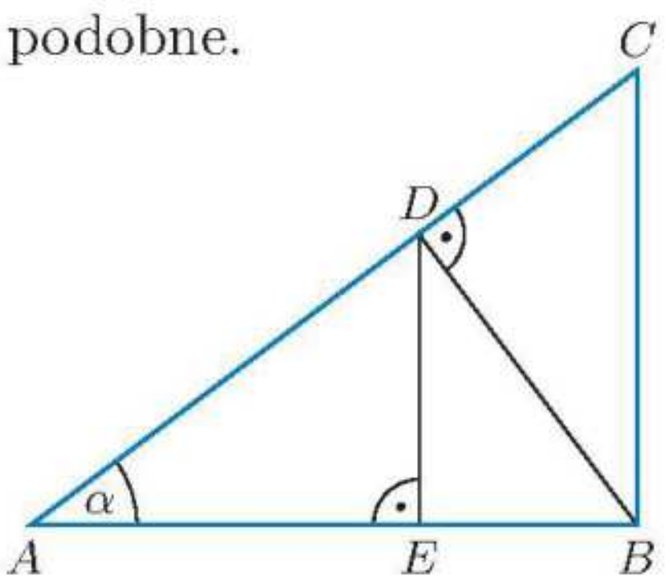
b) Symetralna boku $AB$ przecina boki trójkąta $ABC$ w punktach $P$ i $Q$, a symetralna boku $A_1B_1$ przecina boki trójkąta $A_1B_1C_1$ odpowiednio w punktach $P_1$ i $Q_1$. Wykaż, że trójkąty $APQ$ i $A_1P_1Q_1$ są podobne.

### Ćwiczenie 3

Dany jest trójkąt prostokątny $ABC$ (rysunek obok). Wykaż, że stosunek pól trójkątów:

a) $BDC$ i $ABC$ jest równy $\sin^2\alpha$,

b) $AED$ i $ABC$ jest równy $\cos^4\alpha$.



### Przykład 2

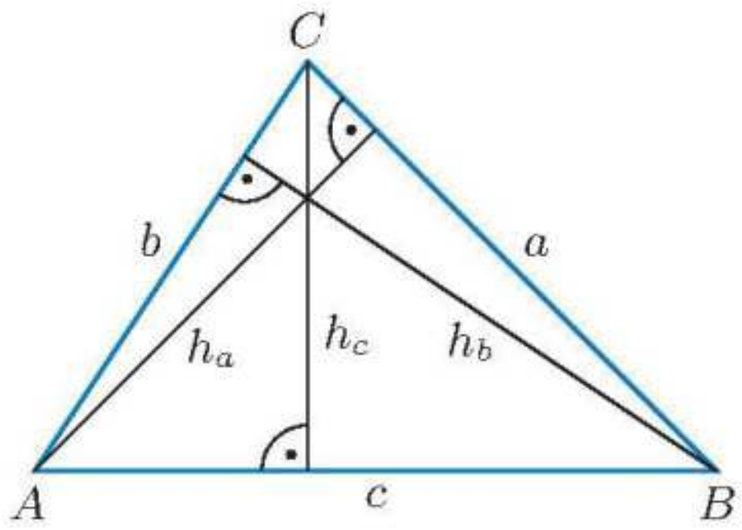
Udowodnij, że wysokości trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do długości boków, na które je opuszczono.

Rozpatrzmy trójkąt o bokach $a$, $b$ i $c$ oraz wysokościach $h_a$, $h_b$ i $h_c$ (rysunek obok). Wówczas pole trójkąta $ABC$:

$$P = \tfrac{1}{2}ah_a = \tfrac{1}{2}bh_b$$

Stąd $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

Analogicznie $\frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}$ oraz $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$.




### Ćwiczenie 4

Udowodnij, że jeśli wysokości jednego trójkąta są proporcjonalne do wysokości drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

### Ćwiczenie 5

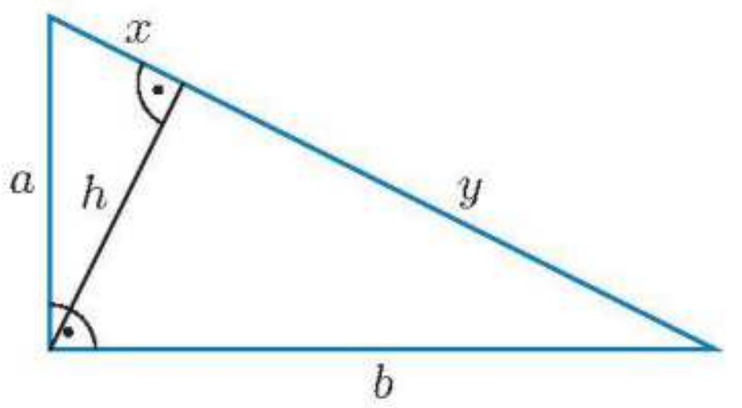
Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $a$, $b$ i przeciwprostokątnej długości $x + y$, gdzie $x$ i $y$ są długościami odcinków, na które wysokość $h$ podzieliła przeciwprostokątną. Udowodnij, że:

a) $h = \frac{ab}{x+y}$,

b) $h = \sqrt{xy}$,

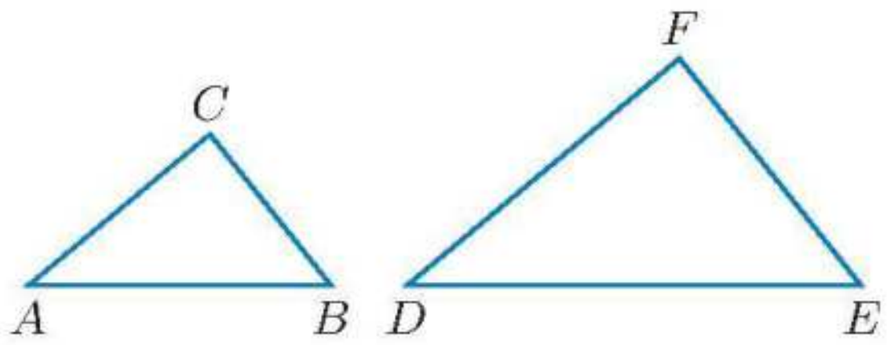
c) $a = \sqrt{x(x+y)}$,

d) $b = \sqrt{y(x+y)}$.

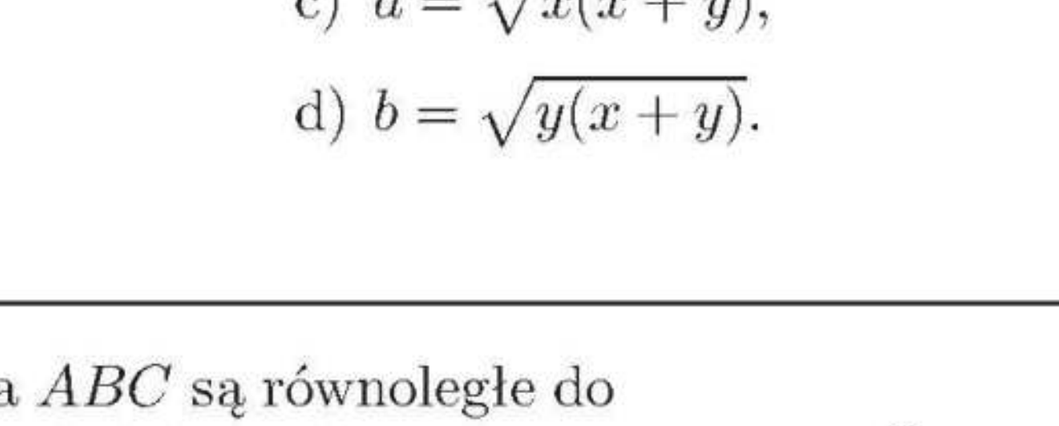



## Zadania

**1.** Boki trójkąta $ABC$ są równoległe do odpowiednich boków trójkąta $DEF$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty te są podobne.



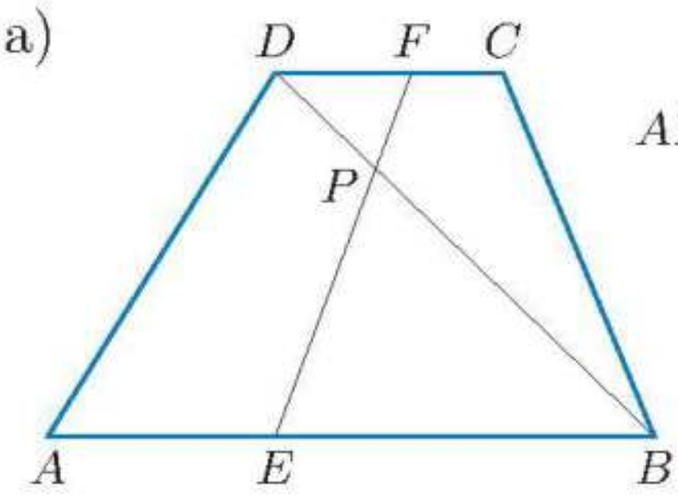

**2.** Wykaż, że jeśli $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$, to stosunek obwodów trójkątów $ABE$ i $CBD$ (rysunek poniżej) jest równy $\frac{|BE|}{|BD|}$.



**3.** Wewnątrz trójkąta $ABC$ obrano punkt $P$ tak, że $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP$. Wykaż, że $\triangle APL \sim \triangle BPK$ oraz $\triangle APB \sim \triangle KLP$, gdzie punkty $K$ i $L$ są punktami przecięcia prostych $AP$ i $BP$ odpowiednio z bokami $BC$ i $AC$.

**4.** Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $x = y$.

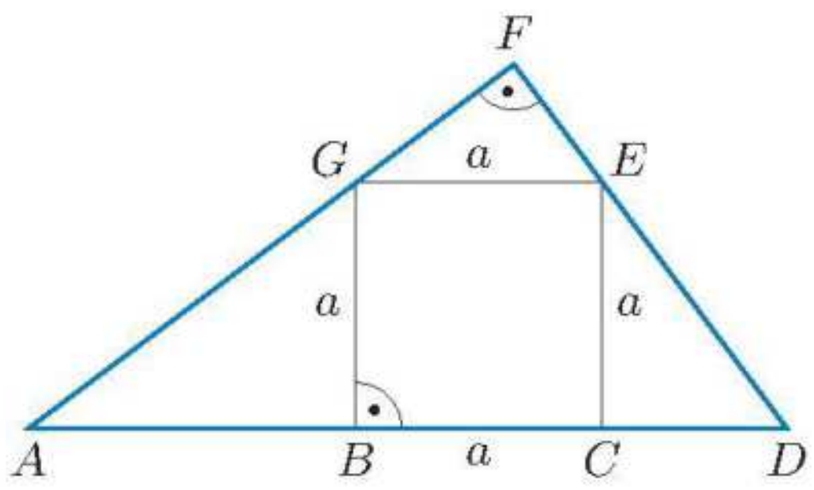
a)




$AB \parallel DC$

$x = |FD| \cdot |PB|$, $y = |EB| \cdot |PD|$

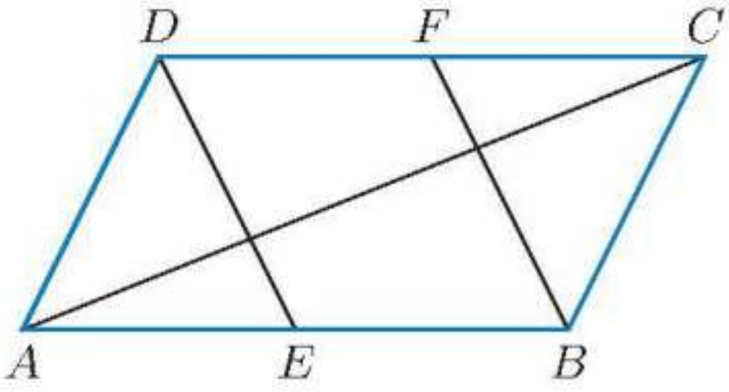
b)




$x = a^2$, $y = |AB| \cdot |CD|$

**5.** Punkt $M$ jest środkiem boku $AB$ trójkąta $ABC$ oraz $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ABC$. Wykaż, że $|AB| = \sqrt{2} \cdot |AC|$.

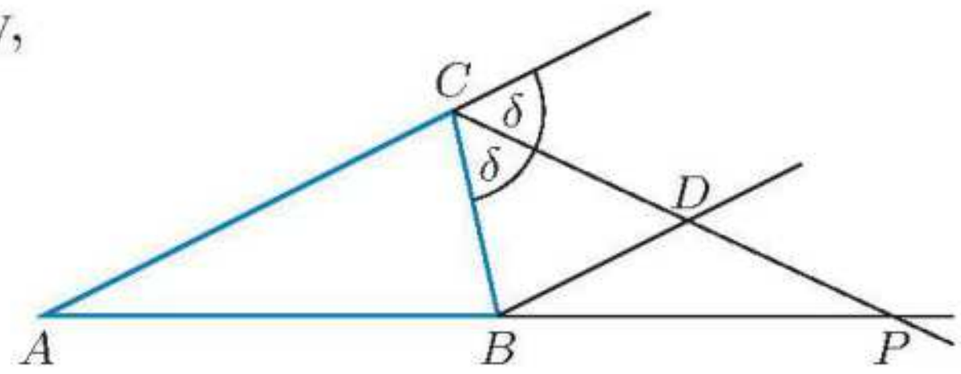
**6.** Punkty $E$ i $F$ są środkami boków $AB$ i $DC$ równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że odcinki $DE$ i $FB$ dzielą przekątną $AC$ na trzy odcinki równej długości.




**7.** Dany jest trójkąt $ABC$. Punkt $P$ jest punktem przecięcia prostej będącej przedłużeniem boku $AB$ i dwusiecznej kąta zewnętrznego trójkąta (rysunek poniżej). Odcinek $BD$ jest równoległy do odcinka $AC$. Wykaż, że:

a) trójkąt $BCD$ jest równoramienny,

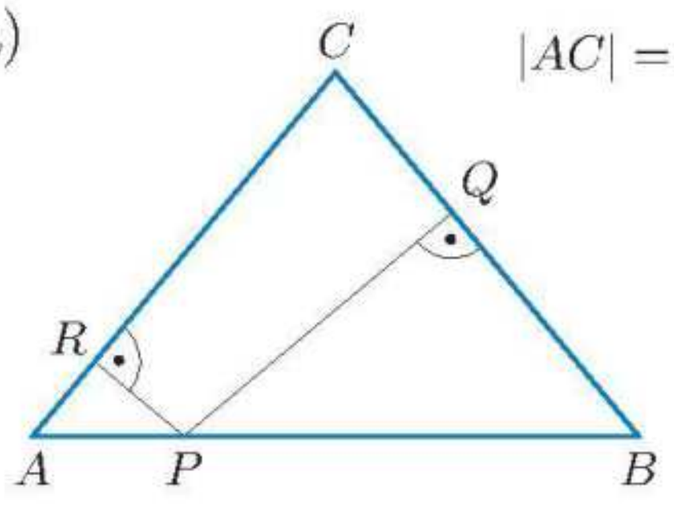
b) $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$.




## Powtórzenie

**8.** Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $x = y$.

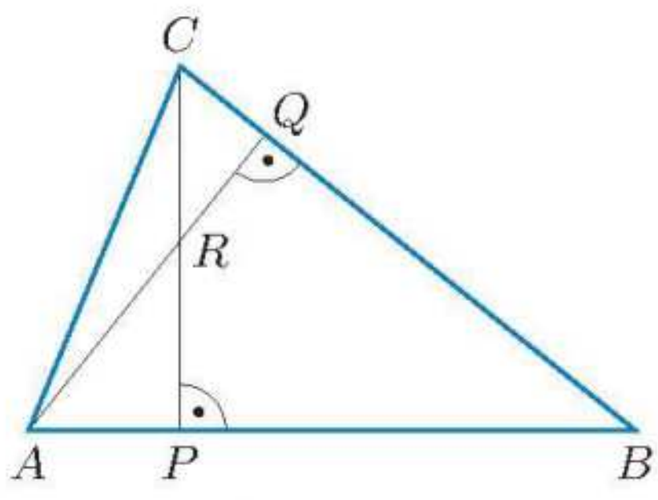
a)




$|AC| = |BC|$

$x = |AR| \cdot |PQ|$, $y = |PR| \cdot |BQ|$

b)




$x = |AR| \cdot |QR|$, $y = |PR| \cdot |CR|$

**Warto wiedzieć**

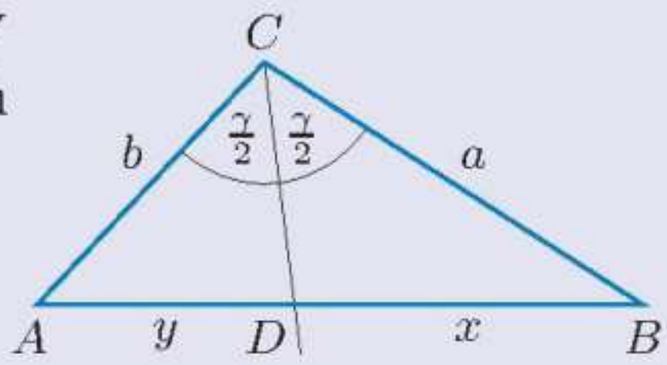
## Różne dowody twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie

Poniższe twierdzenie zostało przedstawione w klasie pierwszej.

### Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

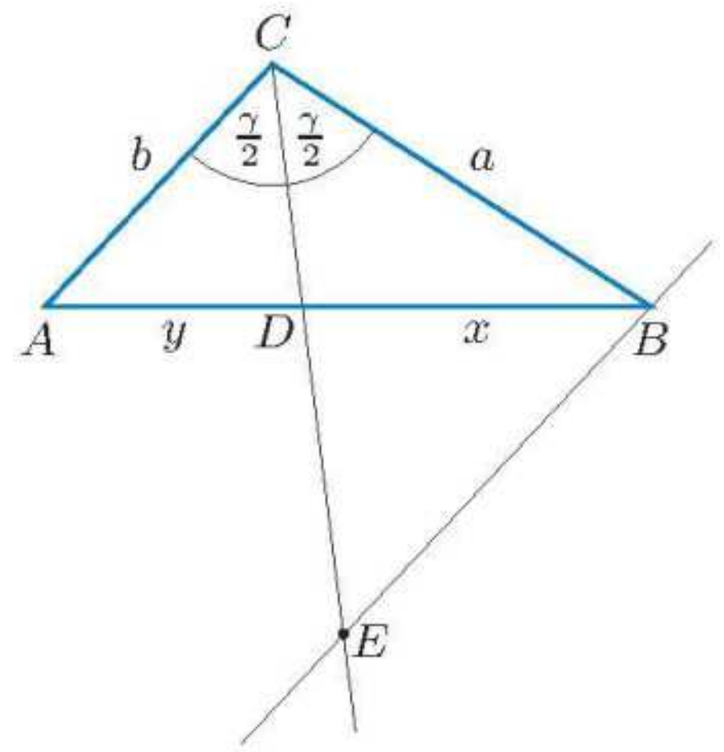
Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$




**Dowód 1**

Prowadzimy prostą równoległą do boku $AC$ trójkąta $ABC$ i przechodzącą przez wierzchołek $B$ aż do przecięcia z dwusieczną $CD$ kąta $ACB$. Punkt przecięcia oznaczamy przez $E$.




Kąty $ACE$ i $CEB$ są naprzemianległe, zatem $\sphericalangle CEB = \frac{\gamma}{2}$.

$\sphericalangle CEB = \sphericalangle ECB$, więc trójkąt $BCE$ jest równoramienny, zatem $|EB| = |BC| = a$.

Na podstawie cechy KKK trójkąty $ADC$ i $BDE$ są podobne, zatem:

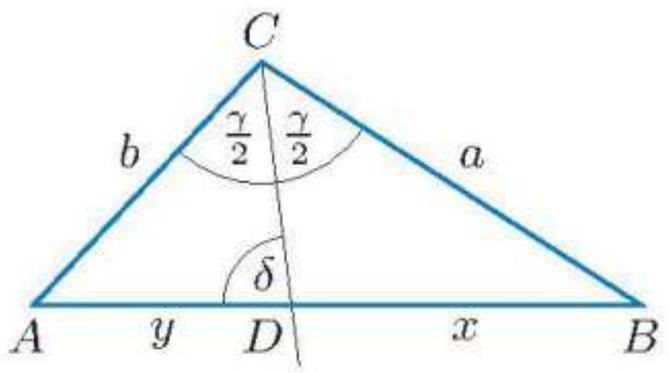
$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

**Dowód 2**

Niech $\delta = \sphericalangle ADC$.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta $ADC$ otrzymujemy:

$$\frac{y}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin\delta}$$




Z twierdzenia sinusów dla trójkąta $BDC$ otrzymujemy:

$$\frac{x}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \delta)}$$

Zauważmy, że $\sin(180^\circ - \delta) = \sin\delta$, zatem:

$$\frac{y}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\delta} = \frac{x}{a}$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

# 5 Powtórzenie



# 5.1. Liczby rzeczywiste

Zbiór **liczb rzeczywistych** oznaczamy literą **R**.

**Liczby naturalne** to liczby: $0, 1, 2, 3, \ldots$ Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą **N**. Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**.
Początkowe liczby pierwsze: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

**Liczby całkowite** to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \ldots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ oraz liczba 0. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą **Z**.

**Liczby wymierne** to liczby, które można zapisać w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{Z}$ oraz $n \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **Q**.

**Liczby niewymierne** to liczby rzeczywiste, które nie są wymierne. Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy jako $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

**Potęga o wykładniku całkowitym**

$a^0 = 1$ dla $a \neq 0$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ dla $a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$

**Potęga o wykładniku wymiernym**

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dla $a \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ dla $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $m \in \mathbf{Z}$

**Działania na potęgach**

Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbf{R}$:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

**Działania na pierwiastkach**

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ dla $a, b \geqslant 0$

$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ dla $a, b \in \mathbf{R}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ dla $a \geqslant 0$, $b > 0$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ dla $a \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$

**Wzory skróconego mnożenia**

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

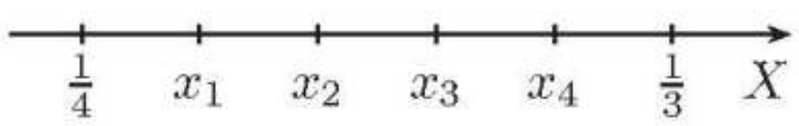
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

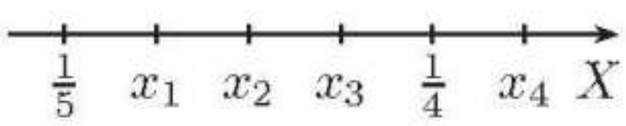
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Wyznacz liczby $x_1, x_2, x_3, x_4$, które zaznaczono na osi liczbowej (odległości między sąsiednimi punktami są jednakowe).

a) 


b) 


**2.** Przedstaw liczbę w postaci $a^m$, gdzie $m \in \mathbf{Z}$.

a) $0{,}125^3 \cdot 32^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{27}\right)^5 : 81^{3{,}25}$

c) $0{,}4^7 \cdot 2{,}5^{-4} : \left(\frac{2}{5}\right)^5$

d) $0{,}64^5 : \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} : \sqrt{8}$

f) $9^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{27^2}$

**3.** Oblicz.

a) $(7^3 \cdot 7^{-4}) : 7^{-2}$

b) $\left(3^{-4} : \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

c) $0{,}6^{-14} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{-16}$

d) $(125^3 \cdot 5^{-4}) : (25^2 \cdot 0{,}2^{-3})$

e) $\left[1{,}42^3 : (-0{,}71)^3\right] \cdot 0{,}5^3$

f) $(27 \cdot 0{,}008)^{\frac{1}{3}} + (16 \cdot 0{,}09)^{\frac{1}{2}} : 36^{\frac{1}{2}}$

**4.** Oblicz. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

a) $\dfrac{5^6 + 20 \cdot 5^4}{2 \cdot 5^6 - 100 \cdot 5^3}$

b) $\dfrac{6 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4^3}{2 \cdot 8^2 - 5 \cdot 2^6}$

c) $\dfrac{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + 3{,}5}{4^{-1} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{17}{19}\right)^0\right]}$

d) $\dfrac{1{,}75 + 0{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{3\frac{1}{12} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}$

e) $\dfrac{2{,}2 \cdot \frac{10}{11} + 0{,}6 \cdot (0{,}9)^{-1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(2\frac{1}{4} - 1{,}75\right)}$

f) $\dfrac{\left(3\frac{1}{3}\right)^{-7} \cdot (0{,}3)^{-5}}{2^{-2} \cdot \left(1^0 + 2^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3\right)}$

**5.** Oblicz. Wynik przedstaw w notacji wykładniczej.

a) $(6 \cdot 10^8) \cdot (5{,}5 \cdot 10^7)$

b) $(4 \cdot 10^5) : (8 \cdot 10^{-6})$

c) $0{,}000\,012\,5 \cdot 0{,}000\,04$

d) $0{,}000\,002\,7 : 0{,}000\,09$

e) $(0{,}81 \cdot 0{,}0004)^{0{,}5}$

f) $(245 : 0{,}0005)^{0{,}5}$

**6.** Podaj rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego. Zaokrąglij je do trzeciego miejsca po przecinku. Czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

a) $\frac{85}{6}$

b) $\frac{85}{8}$

c) $\frac{62}{33}$

d) $\frac{11}{111}$

**7.** Liczba 17,7828 jest przybliżeniem liczby $10^{1{,}25}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Wiedząc o tym, wyznacz przybliżenie liczby:

a) $10^{0{,}25}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku,

b) $10^{\frac{13}{4}}$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku,

c) $10^{-\frac{7}{4}}$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

**8.** Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{72}$ b) $\sqrt{98}$ c) $\sqrt[3]{500}$ d) $\sqrt[3]{128}$ e) $\sqrt[3]{625}$

**9.** Oblicz.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$ c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{-9}$ e) $\sqrt{18\frac{7}{9}}$ g) $\sqrt{11\frac{2}{3}} : \sqrt{4\frac{1}{5}}$

b) $\sqrt{48} \cdot \sqrt{12}$ d) $\sqrt[3]{0{,}04} \cdot \sqrt[3]{25}$ f) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$ h) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{10\frac{1}{8}}$

**10.** Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

a) $\sqrt{27} + 3\sqrt{48} - 3\sqrt{75} = 0$

b) $\sqrt{48} + \sqrt{12} = \sqrt{50}$

c) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{-81} = 0$

d) $(7\sqrt{12} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{75} = 150$

e) $(\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{54}) : \sqrt{12} = 0$

f) $\sqrt[3]{-8\frac{1}{6}} : \sqrt[3]{-5\frac{1}{7}} = 1\frac{1}{6}$

**11.** Oblicz.

a) $(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)$

b) $(3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})$

c) $(2 + \sqrt{3})^2(7 - 4\sqrt{3})$

d) $(1 - 2\sqrt{2})^2(9 + 4\sqrt{2})$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

f) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

**12.** Wyznacz:

a) 2,5% liczby 160,

b) 112% liczby 125,

c) liczbę, której 45% jest równe 18,

d) liczbę o 225% większą od 8.

**13.** Towary $A$ i $B$ miały jednakową cenę. Który z nich jest obecnie tańszy, jeżeli:

a) cenę towaru $A$ obniżano dwukrotnie, za każdym razem o 20%, a cenę towaru $B$ obniżono jednokrotnie o 40%,

b) cenę towaru $A$ zwiększano dwukrotnie, za każdym razem o 20%, a cenę towaru $B$ zwiększono jednokrotnie o 40%,

c) cenę towaru $A$ obniżono o 20%, następnie zwiększono o 20%, natomiast cena towaru $B$ nie uległa zmianie?

**14.** Dany jest prostokąt o bokach długości $a$ i $b$. Jak i o ile zmieni się jego pole, jeżeli:

a) $a$ wzrośnie o 20% i $b$ zmaleje o 20%,

b) $a$ zmaleje o 20% i $b$ wzrośnie o 25%?

**15.** W prostokącie jeden bok wydłużono o 20%, a drugi o $p$% i otrzymano prostokąt, którego pole jest o 50% większe od wyjściowego. Oblicz $p$.

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**16.** Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}-2}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ d) $\frac{5-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

**17.** Oblicz wartość wyrażenia dla $x = 2-\sqrt{5}$ i $y = 1+3\sqrt{5}$. Wynik zapisz w postaci $a+b\sqrt{5}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Q}$.

a) $3x+y$ b) $x \cdot y$ c) $y : x$ d) $\frac{2y-x}{2x+y}$

**18.** Oblicz wartość wyrażenia dla $a = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ i $b = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.

a) $a \cdot b$ b) $(a-b)^2$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$

**19.** Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

a) $3-\sqrt{3} = \sqrt{12-3\sqrt{12}}$ b) $\sqrt{2}-\sqrt{3} = \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

**20.** Sprawdź, czy podana liczba jest niewymierna.

a) $\left[(3+5^{0,5})^{0,5}-(3-5^{0,5})^{0,5}\right]^2$ c) $\left[(\sqrt{7}+\sqrt{3})^{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right]^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

b) $\left[\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}}+25^{-0,25}\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}}-25^{-0,25}\right]$

**21.** Oblicz wartość wyrażenia dla $a = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

a) $a \cdot b$ c) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ e) $(a-b)^2$ g) $\frac{1}{a^2}+b^2$

b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ d) $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$ f) $(a+b)^2$ h) $\frac{1}{a^2}-b^2$

**22.** Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) $(x+\sqrt{3})^3+2x(x+3)(x-3)+(x-\sqrt{3})^3$

b) $(2\sqrt{3}-x)^2-2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)+(2\sqrt{3}+x)^2$

c) $(x-\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}x+3)+(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)$

**23.** Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = \sqrt{2}-1$ i $y = 1-2\sqrt{2}$.

a) $(\sqrt{6}x-y)(\sqrt{6}x+y)-(3x+y)^2+3x(2y+x)$

b) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)-(x+2y)^3+6xy(x+2y)$

**D 24.** a) Wykaż, że liczba $9-4\sqrt{5}$ jest liczbą odwrotną do $9+4\sqrt{5}$.

b) Wykaż, że liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ jest liczbą przeciwną do $1-\sqrt{2}$.

**D 25.** Wykaż, że liczba $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ jest wymierna.

**26.** Wiadomo, że 21% dodatniej liczby $a$ jest równe 12% liczby $b$. Która z tych liczb jest większa i o ile procent?

**27.** Oblicz, jaki procent liczby $x$ stanowi liczba $y$.

a) $x = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)$, $y = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$

b) $x = 3^{-1} \cdot 5^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{81^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{25}}$, $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{4}}{3}\right)^2$

**28.** Na cenę brutto pewnego towaru wynoszącą 176,55 zł składa się cena netto oraz 7% podatku VAT od ceny netto. Oblicz, jaka będzie cena brutto tego towaru po podwyższeniu podatku do 22% przy niezmienionej cenie netto.

**29.** Pewną kwotę wpłacono do banku na lokatę roczną oprocentowaną 3,5% w skali roku. Od odsetek dopisanych po roku bank odprowadził podatek w wysokości 14 zł. Jaką kwotę umieszczono na lokacie, jeżeli wiadomo, że podatek od odsetek wynosił 20%?

**30.** a) Oprocentowanie lokat w pewnym banku, równe początkowo 5% w skali roku, wzrosło o 1,2 punktu procentowego. O ile procent wzrosło to oprocentowanie?

b) Oprocentowanie lokat w pewnym banku, równe początkowo 5% w skali roku, zmniejszyło się o 20%. O ile punktów procentowych zmniejszyło się to oprocentowanie?

**31.** Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, zapisz wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $121 - 49x^2$
b) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{25}{16}y^2$
c) $16x^4 - 1$
d) $81x^4 - \frac{1}{16}y^4$
e) $(3x+1)^2 - 4$
f) $9(1-x)^2 - (1+x)^2$
g) $x^4 - 8x^2 + 16$
h) $81x^4 - 18x^2 + 1$
i) $16x^4 - 72x^2 + 81$

**32.** Oblicz $a^4 + b^4$, wiedząc, że:

a) $ab = 1$ oraz $a^2 + b^2 = 3$,
b) $a^2 + b^2 = 9$ oraz $a + b = 1$.

**D 33.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ prawdziwa jest nierówność.

a) $(x+y)^2 \geqslant 4xy$
b) $(x-2y)^2 + 8xy \geqslant 0$
c) $x^2 + 4xy \geqslant y(6x-y)$
d) $4x(x-2y) \geqslant y(4x-9y)$

**D 34.** Wykaż, że nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

a) $(2x+1)^2 \geqslant 8x$
b) $x(x+12) \geqslant 9(2x-1)$
c) $\frac{4}{x^2+1} \geqslant 3 - x^2$

## Zestaw III – podsumowujący

**35.** Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+2)^3$ c) $(2x-3y)^3$ e) $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^3$

b) $(3x-1)^3$ d) $(5x+2)^3$ f) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^3$

**36.** Oblicz.

a) $\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ c) $\left(3-2\sqrt{3}\right)^3$ e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+1\right)^3$

b) $\left(1-\sqrt{5}\right)^3$ d) $\left(4+\sqrt{5}\right)^3$ f) $\left(2-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3$

**37.** Oblicz.

a) $(2\sqrt{2}-3)^3-(2\sqrt{2}+3)^3$ b) $(3+\sqrt{2})^3-(2+\sqrt{2})^3$

**38.** Uprość wyrażenie.

a) $(x-3)(x^2+3x+9)$ c) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

b) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ d) $(x^2-2x+1)(x^2+x+1)$

**39.** Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

a) $x^3+64$ c) $x^3+8y^3$ e) $x^6+125$

b) $8x^3-1$ d) $8x^3-27y^3$ f) $27x^3-64y^6$

Dla $n \geqslant 2$ różnica $n$-tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$ wyraża się wzorem:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+\ldots+a^2\cdot b^{n-3}+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1})$$

D **40.** Udowodnij powyższy wzór dla:

a) $n=4$, b) $n=6$.

D **41.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$ prawdziwa jest podana nierówność.

a) $a^2+b^2 \geqslant 2(a-b-1)$ b) $a^2+b^2 \geqslant 4(a+b-2)$ c) $a^2+ab+b^2 \geqslant 0$

D **42.** Udowodnij, że dla dodatnich liczb $a$ i $b$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{2}{a+b} \geqslant \frac{a+b}{a^2+b^2}$$

D **43.** Udowodnij, że suma dwóch kolejnych potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych dodatnich jest podzielna przez 6, a suma trzech kolejnych potęg jest podzielna przez 14.

D **44.** a) Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

b) Udowodnij, że jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą parzystą, to ich różnica też jest liczbą parzystą.

D **45.** Udowodnij, że różnica czwartych potęg dowolnej liczby naturalnej i liczby o 2 od niej mniejszej jest podzielna przez 8.

D **46.** Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych powiększona o 1 jest podzielna przez 12.

D **47.** Udowodnij, że sześcian sumy trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 27.

D **48.** Udowodnij, że dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}$ podana liczba jest podzielna przez 6.

a) $2n(4n^2-1)$ b) $n(n^2-7)$ c) $n^9-n$

**49.** Dana jest liczba $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Prawdziwa jest nierówność $a \leqslant 2\sqrt{3}$. | P | F |
| 2. | Liczba $a$ jest liczbą niewymierną. | P | F |

**50.** Dane jest wyrażenie $\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}$, gdzie $x \neq 2$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Istnieje liczba niewymierna $x$, dla której wartość wyrażenia jest liczbą wymierną. | P | F |
| 2. | Dla każdego $x \neq 2$ wyrażenie jest równe $x-2$. | P | F |

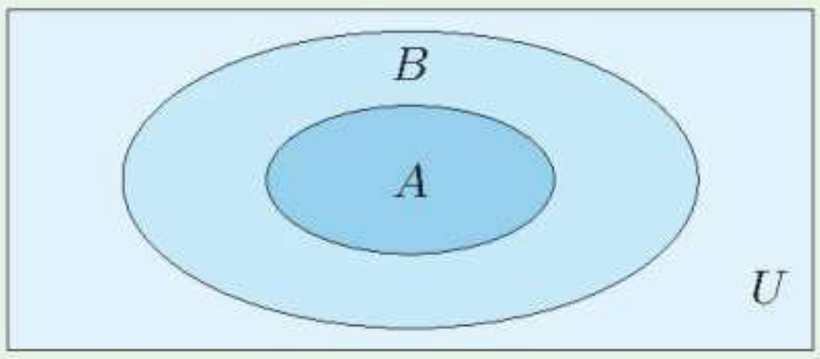
**51.** Dana jest liczba $p = 405\,070\,203\,030\,168$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Liczba $p$ jest podzielna przez:

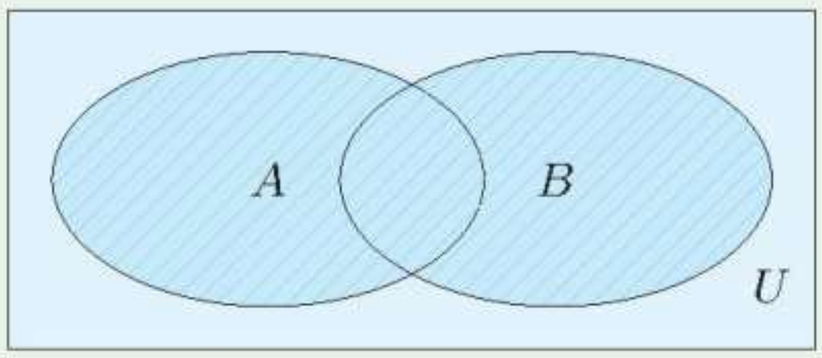
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A. | 36, | ponieważ | 1. | jej dzielnikami są liczby 2 i 6. |
| B. | 18, | | 2. | jej dzielnikami są liczby 3 i 4. |
| C. | 12, | | 3. | jej dzielnikami są liczby 4 i 9. |

# 5.2. Zbiory, przedziały i nierówności



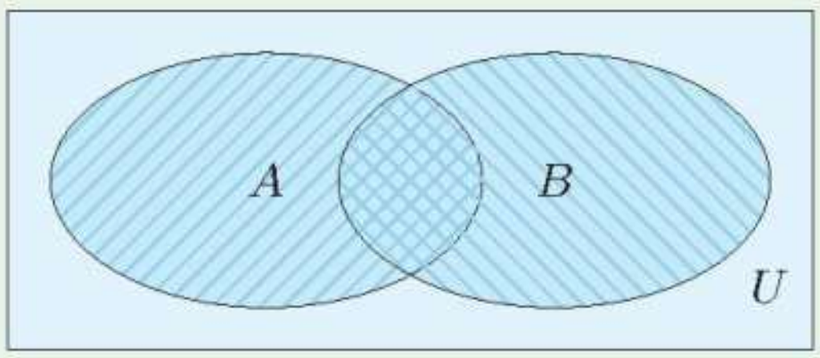

$A \subset B$ – zbiór $A$ jest zawarty w zbiorze $B$

Zbiór $A$ jest **podzbiorem** zbioru $B$, jeśli każdy element zbioru $A$ jest elementem zbioru $B$. Zapisujemy to: $A \subset B$.



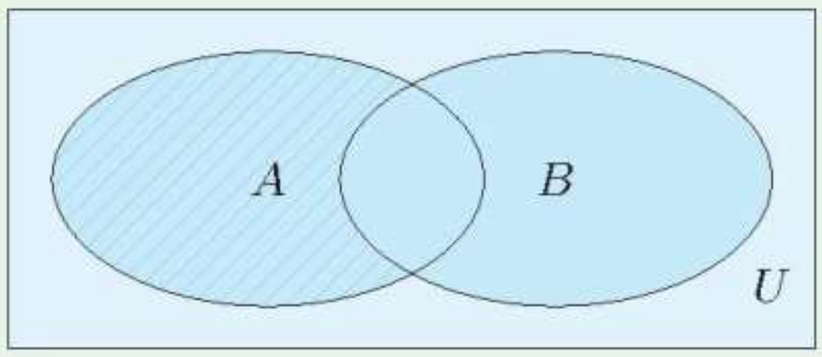

$A \cup B$ – suma zbiorów $A$ i $B$ (obszar zakreskowany)

**Sumą zbiorów** $A$ i $B$ nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów $A$ lub $B$.
Zbiór ten oznaczamy: $A \cup B$.




$A \cap B$ – iloczyn zbiorów $A$ i $B$ (obszar zakreskowany podwójnie)

**Iloczynem (częścią wspólną) zbiorów** $A$ i $B$ nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Zbiór ten oznaczamy: $A \cap B$.




$A \setminus B$ – różnica zbiorów $A$ i $B$ (obszar zakreskowany)

**Różnicą zbiorów** $A$ i $B$ nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru $A$ i nie należą do zbioru $B$.
Zbiór ten oznaczamy: $A \setminus B$.

**Wartość bezwzględna**

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{dla} \quad a < 0 \end{cases}$$

Zauważ, że $\sqrt{a^2} = |a|$ dla $a \in \mathbf{R}$.

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ dla $a, b \in \mathbf{R}$

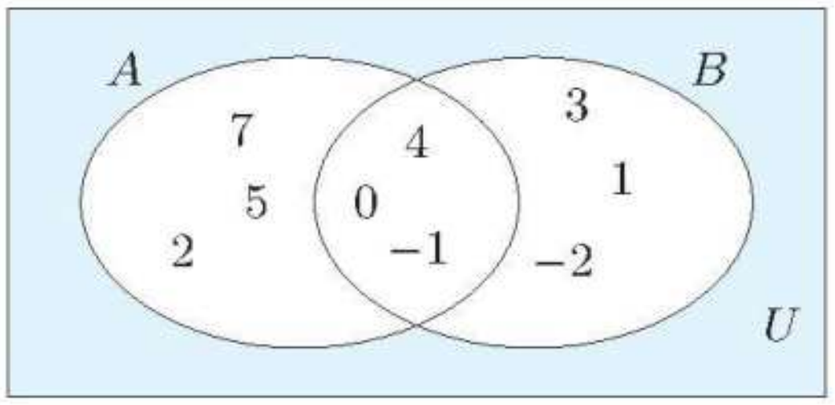
$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ dla $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Dla dowolnego $a > 0$:

- $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$,
- $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a < x < a$,
- $|x| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < -a$ lub $x > a$.

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Na podstawie diagramu wyznacz zbiory $A$, $B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.




**2.** Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

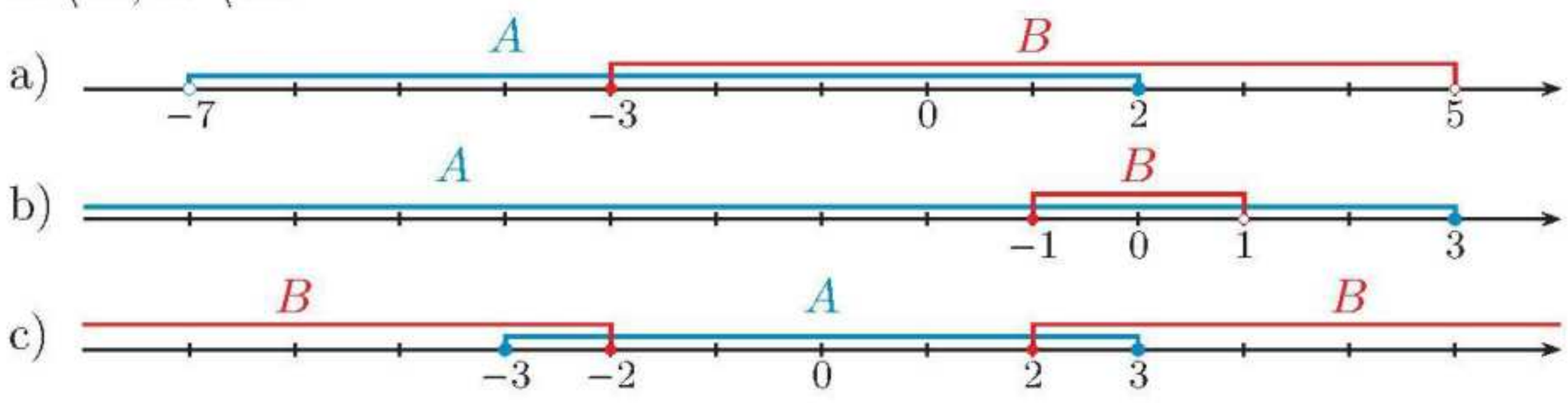
a) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0\}$

b) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$

c) $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5\}$

d) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

**3.** Na osi liczbowej zaznaczono zbiory $A$ i $B$. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.




**4.** Zapisz zbiory $A$ i $B$ w postaci przedziałów. Wyznacz i zaznacz na osi liczbowej zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A$ – zbiór liczb rzeczywistych mniejszych od 2, $B$ – zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych

b) $A$ – zbiór liczb rzeczywistych nie większych od 9, $B$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich

**5.** Zaznacz zbiór $A \cap B$ na osi liczbowej. Wypisz wszystkie liczby całkowite, które do niego należą.

a) $A = \langle -3; 2\rangle$, $B = \langle 0; 4\rangle$

b) $A = \langle \frac{1}{2}; 6\rangle$, $B = \langle 2; 8\rangle$

c) $A = (-\infty; 1\rangle \cup \langle 4; \infty)$, $B = (0; 8)$

d) $A = \{0\} \cup (2; 5\rangle$, $B = \langle 0; 4\rangle$

e) $A = \mathbf{R} \setminus (-1; 4\rangle$, $B = \langle -2; 6)$

f) $A = \mathbf{R} \setminus \langle 2; \infty)$, $B = \langle -3; 3\rangle$

**6.** Zapisz zbiory $A$ i $B$ w postaci przedziałów. Wyznacz zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R}: 3x - 5 < 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: 1 - 2x \leqslant 3\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R}: 2 - 5x < 1 - 2x\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: \frac{1}{2}x + 0{,}75 < 1\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R}: -4 < 2x \leqslant 6\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: 1 \leqslant 3x + 1 < 7\}$

d) $A = \{x \in \mathbf{R}: -3 \leqslant 2 - x \leqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: 0 < 1 - 2x \leqslant 5\}$

**7.** Rozwiąż nierówność. Zbiór rozwiązań zaznacz na osi liczbowej.

a) $-3(4-2x) \geqslant 2x+4$

b) $-\frac{3}{4}(2x-6) \leqslant 2-x$

c) $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-2}{4} \geqslant 0$

d) $\frac{x-6}{2} + \frac{5-3x}{4} < 0$

e) $(x-2)(x+2) \leqslant (x-2)^2$

f) $(2x+4)^2 > (2x-4)^2$

g) $(x-2)^2 - (4-x)^2 \geqslant 2{,}75 + \frac{x+1}{4}$

h) $\frac{(2x-4)^2}{4} + 7 > \frac{(3x+1)^2}{9}$

**8.** Zapisz zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału. Zaznacz go na osi liczbowej i podaj wszystkie liczby całkowite, które do niego należą.

a) $\begin{cases} 2x-5 \leqslant 11 \\ 1-4x < 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x+4 > 10 \\ -4+2x \leqslant 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x < 0 \\ 3x+7 > 4 \end{cases}$

**9.** Oblicz.

a) $|7-8|$

b) $|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}|$

c) $|\sqrt{3}-2|$

d) $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$

e) $2\sqrt{3} - |3-2\sqrt{3}|$

f) $|\sqrt{3}-2| + |1-\sqrt{3}|$

**10.** Wypisz wszystkie elementy zbioru $A$.

a) $A = \{x \in \mathbf{Z}\colon |x| < 5\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{Z}\colon |x| \leqslant 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{Z}\colon |x| \leqslant \sqrt{8}\}$

d) $A = \{x \in \mathbf{Z}\colon |x| \geqslant 2 \text{ i } |x| \leqslant 4\}$

e) $A = \{x \in \mathbf{Z}\colon |x| > 3 \text{ i } |x| < 7\}$

f) $A = \{x \in \mathbf{Z}\colon |x| \geqslant \sqrt{2} \text{ i } |x| \leqslant \sqrt{10}\}$

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**11.** Wyznacz zbiory $A$ i $B$, jeżeli $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$ oraz:

a) $A \cap B = \{2,3,4\}$, $A \setminus B = \{5\}$,

b) $A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{3,4\}$,

c) $A \setminus B = \{1,3,5\}$, $B \setminus A = \{2,4,6\}$,

d) $A \setminus B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

**12.** Podaj liczbę elementów zbioru $A \cup B$, jeżeli:

a) zbiór $A \setminus B$ ma 7 elementów, $B$ – 8 elementów,

b) zbiór $A$ ma 7 elementów, $B$ – 8 elementów, $A \setminus B$ – 3 elementy,

c) zbiór $A$ ma 7 elementów, $B$ – 8 elementów, $A \cap B$ – 3 elementy,

d) $A$ jest zbiorem trzycyfrowych liczb naturalnych parzystych, $B$ jest zbiorem trzycyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 7.

**13.** Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Do których z nich należy liczba 5?

a) $A = \langle 4;8)$, $B = \langle 5;6\rangle$

b) $A = \langle 5;7)$, $B = (5;6\rangle$

c) $A = \langle -1;4) \cup (5;\infty)$, $B = (0;5\rangle$

d) $A = (-\infty;5\rangle \cup (6;8\rangle$, $B = \langle 5;7)$

**14.** Które ze zbiorów $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ zawierają przedział $\langle -2; 5)$?

a) $A = (-\infty; 3)$, $B = (2; 7\rangle$

b) $A = \langle -2; \infty)$, $B = \langle 5; 7\rangle$

c) $A = \langle -4; \infty)$, $B = (-3; 5\rangle$

d) $A = (-\infty; 5\rangle$, $B = (-2; \infty)$

**15.** Zaznacz na osi liczbowej zbiór $A \cap B$, jeżeli $A$ i $B$ są zbiorami rozwiązań podanych nierówności.

a) $A$: $4(2-x)^2 - (3+2x)^2 < 35$, $B$: $6 - (3-x)^2 \leqslant (3-x)(3+x)$

b) $A$: $3 - \frac{2+x}{4} \geqslant \frac{6-x}{3}$, $B$: $\frac{3-2x}{3} - 6 > \frac{x-5}{6}$

**16.** Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność podwójną.

a) $2x - 11 \leqslant 7 < 4x - 1$

b) $3 - 5x \leqslant 8 \leqslant 3x - 6$

c) $2x - 4 < 2 + x < 3x + 4$

d) $-9 < 5x - 2 \leqslant 5x + 3$

**17.** Sprawdź, czy podana równość zachodzi dla $x = 2$ i $y = -3$. Czy równość ta jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych?

a) $|x - y| = |y - x|$ b) $|x + y| = |x| + |y|$ c) $|x - y| = |x| - |y|$

**18.** Oblicz.

a) $\left|2\sqrt{2} + 1\right| - 2\left|\sqrt{2} - 2\right|$

b) $\left|\sqrt{11} - 2\sqrt{3}\right| \cdot (\sqrt{11} + 2\sqrt{3})$

c) $\sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2} - \left|\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right|$

d) $\sqrt{\left(8 - 3\sqrt{7}\right)^2} + \left|3\sqrt{7} - 7\right|$

**19.** Rozwiąż równanie.

a) $|x| = 9$

b) $|x| = 1{,}6$

c) $|x| = -2$

d) $|x| = 0$

e) $|x| = \sqrt{3} + 1$

f) $|x| = 1 - \sqrt{2}$

**20.** Rozwiąż równanie.

a) $|x - 2| = 3$

b) $|x - 1| = 6$

c) $|x + 3| = 0$

d) $|x + 1| = 3$

e) $|4 - x| = 4$

f) $\left|\frac{1}{2} - x\right| = \frac{1}{4}$

**21.** Rozwiąż równanie.

a) $2|2 - x| = 4$

b) $3|1 - x| = 9$

c) $|2 - x| + |x - 2| = 6$

**22.** Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3$

b) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \frac{9}{2}$

c) $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = 1$

d) $\sqrt{36 - 12x + x^2} = 2$

## Zestaw III – podsumowujący

**23.** Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle 1; 4\rangle$, $B = \langle 2; 5\rangle$

b) $A = (-2; 1\rangle$, $B = (1; 5)$

c) $A = (-\infty; 6)$, $B = (0; 2) \cup \langle 6; \infty)$

d) $A = (2; \infty)$, $B = \langle -5; 0\rangle \cup (4; \infty)$

e) $A = (1; 3\rangle$, $B = \{-2, 0, 3, 4\}$

f) $A = \{-2, 0, 1, 3, 5\}$, $B = (3; 7\rangle$

**24.** Wyznacz zbiory $A \cup (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \setminus B) \cap C$.

a) $A = \langle 1; 3\rangle$, $B = \langle 2; 5\rangle$, $C = \langle 3; 8\rangle$

b) $A = (0; 6\rangle$, $B = (1; 6)$, $C = (4; 6)$

c) $A = \langle 2; 7)$, $B = (-1; 7\rangle$, $C = \langle 2; \infty)$

d) $A = \langle 3; 6)$, $B = \{3, 5, 6\}$, $C = \{6, 7\}$

**25.** Rozwiąż nierówność.

a) $|x - 5| \leqslant 4$

b) $|x + 4| < 5$

c) $|x - 3| \geqslant 2$

d) $|x + 2| > 3$

e) $|6 - x| < 4$

f) $|2 - x| > 3$

**26.** Rozwiąż układ nierówności. Rozwiązanie zaznacz na osi liczbowej.

a) $\begin{cases} |x| \leqslant 4 \\ |x + 2| > 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |x - 3| \leqslant 6 \\ |x - 2| > 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x + 1| > 4 \\ |x - 1| \geqslant 7 \end{cases}$

**27.** Rozwiąż równanie.

a) $|5x + 10| = 20$

b) $|7 - 14x| = 7$

c) $|3x + 6| + |7x + 14| = 10$

d) $|4x - 12| = 5 - |3 - x|$

e) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} + |9x - 3| = 12$

f) $\sqrt{25 - 10x + x^2} = 8 - 3|x - 5|$

**28.** Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb, które spełniają podany warunek.

a) $1 \leqslant |x| < 4$

b) $2 < |x - 1| \leqslant 7$

c) $0 \leqslant |x + 3| < 8$

d) $1 \leqslant |x - 3| \leqslant 5$

**29.** Rozwiąż nierówność.

a) $|2x + 4| \leqslant 6$

b) $|2x + 3| > 1$

c) $|3x - 6| < 12$

d) $|4 - 2x| < 3$

e) $|4x - 8| + |5x - 10| \leqslant 18$

f) $|5 - 10x| \geqslant 4 + 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$

g) $|5x + 25| - |3x + 15| > 6$

h) $|3x - 3| - |1 - x| \leqslant 8$

**30.** Uprość wyrażenie.

a) $|x| - |-x| + |2x|$ dla $x \leqslant 0$

b) $|2x| - \sqrt{x^2} - |x-1|$ dla $x \geqslant 1$

c) $|x+3| - |x|$ dla $x \leqslant -3$

d) $|x+2| + |x-2| + \sqrt{9-6x+x^2}$ dla $-2 \leqslant x \leqslant 2$

**31.** Niech $A = \{x \in \mathbf{R}\colon |x+4| = x+4\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon |x-3| = 3-x\}$, $C = \{x \in \mathbf{R}\colon |4-2x| = 4-2x\}$. Zapisz zbiory $A$, $B$ i $C$ w postaci przedziałów, a następnie sprawdź, czy liczba 0 należy do podanego zbioru.

a) $\mathbf{R} \setminus A$ b) $\mathbf{R} \setminus (A \cap B)$ c) $\mathbf{R} \setminus (B \setminus C)$

**32.** Rozwiąż nierówność.

a) $|6x| - \sqrt{4x^2} > 0$

b) $|x| + \sqrt{2x^2} \leqslant 1$

c) $\sqrt{x^2-2x+1} + |3x-3| \leqslant 1$

d) $\sqrt{9x^2-6x+1} - \left|x - \frac{1}{3}\right| > 2$

**33.** Dane są zbiory $X = (-\infty; -3\rangle \cup \langle 4; \infty)$ i $Y = (-\infty; -5\rangle \cup \langle 9; \infty)$. Ile jest liczb całkowitych należących do zbioru $X \setminus Y$?

Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A. | 6, | ponieważ | 1. | $X \setminus Y = (-5; -3\rangle \cup \langle 4; 9)$ |
| B. | 7, | | 2. | $X \setminus Y = (-5; -3) \cup (4; 9)$ |
| C. | 8, | | 3. | $X \setminus Y = \langle -5; -3\rangle \cup \langle 4; 9\rangle$ |

**34.** Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Nierówność $\|x\| > 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą. | P | F |
| 2. | Nierówność $\|x\| \leqslant \pi$ jest spełniona przez siedem liczb całkowitych. | P | F |

**35.** Rozpatrzmy równanie $\sqrt{x^2-4x+4} + |x-2| = 4-2x$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Równanie to jest spełnione przez nieskończenie wiele liczb naturalnych. | P | F |
| 2. | Równanie to jest spełnione przez każdą liczbę ujemną. | P | F |

# 5.3. Funkcje

**Funkcją** ze zbioru $X$ w zbiór $Y$ nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

**Wykresem** funkcji $f : X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów $(x, y)$, że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

Zbiór $X$ nazywamy **dziedziną** funkcji, a jego elementy – **argumentami**.

**Zbiór wartości** funkcji $f\colon X \to Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$.

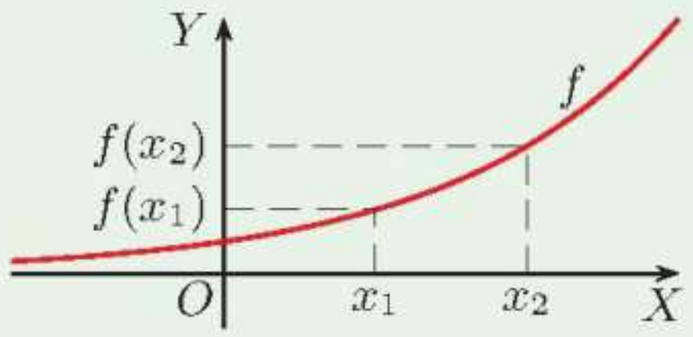
**Miejscem zerowym** funkcji $f$ nazywamy taki argument $x$, dla którego:

$$f(x) = 0$$

**Monotoniczność funkcji** $f\colon X \to \mathbf{R}$, gdzie $X \subset \mathbf{R}$

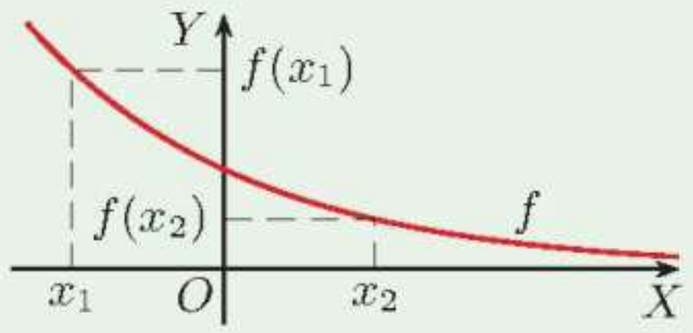
Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



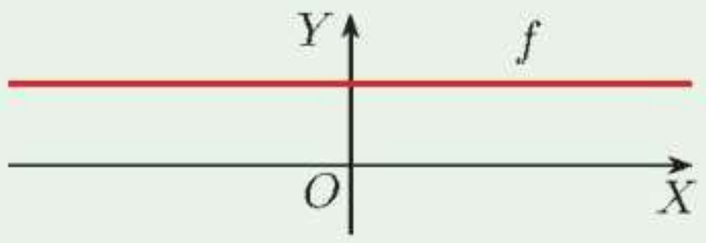

Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



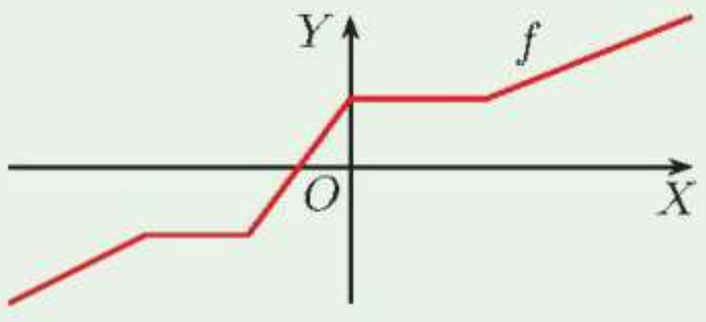

Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość:

$$f(x_1) = f(x_2)$$



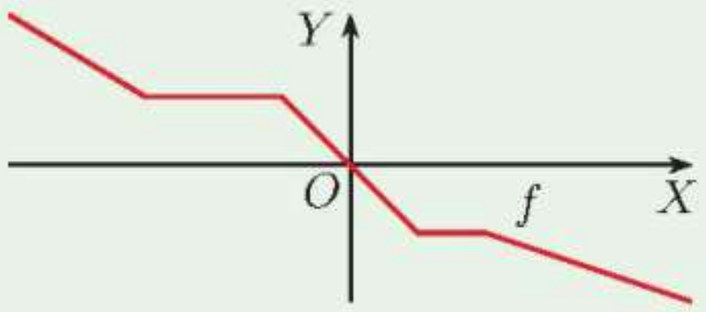

Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$




Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

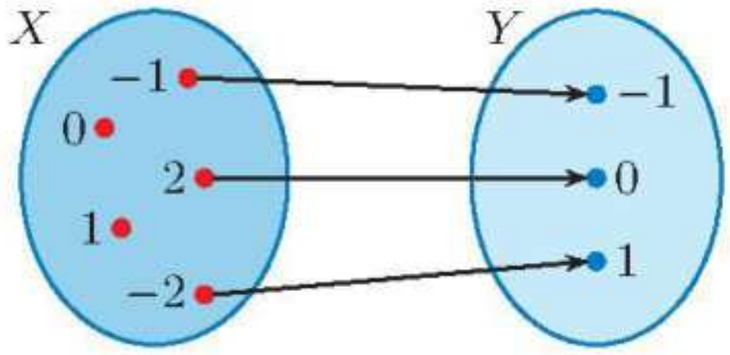



Funkcję, która jest rosnąca, malejąca, nierosnąca, niemalejąca lub stała, nazywamy **funkcją monotoniczną**.

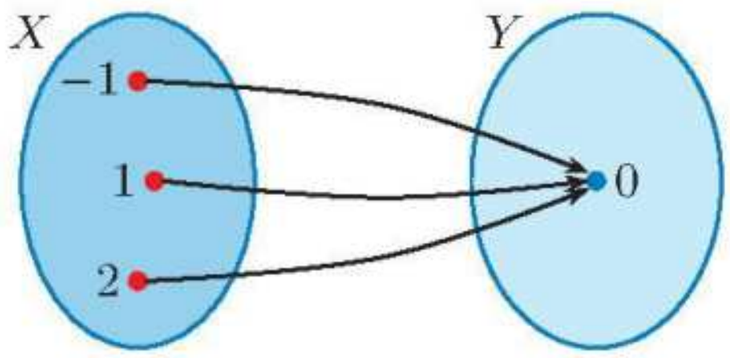
## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Odczytaj z grafu, którą liczbę przyporządkowano liczbie 1 oraz której liczbie przyporządkowano liczbę 0. Czy przyporządkowanie przedstawione za pomocą tego grafu jest funkcją? Jeśli tak, to narysuj wykres tej funkcji oraz podaj jej zbiór wartości.

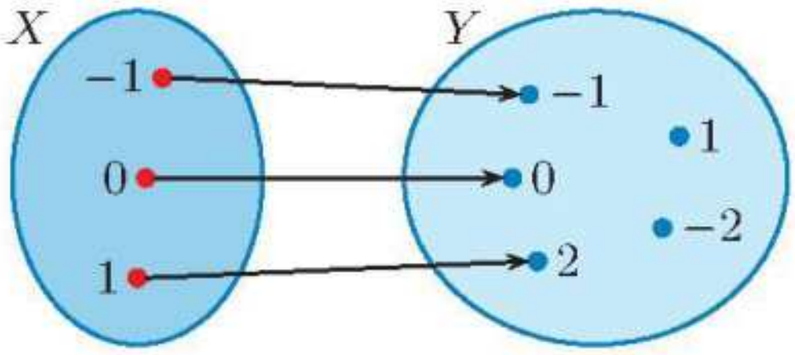
a)



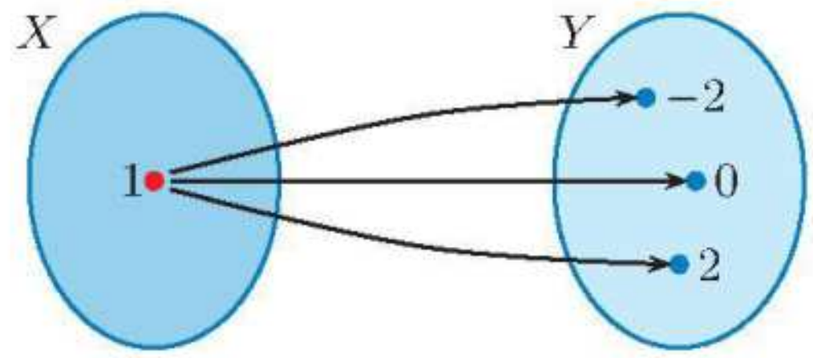

b)




c)




d)




**2.** Narysuj wykres funkcji $f\colon X \to \mathbf{R}$. Podaj jej zbiór wartości oraz wartości najmniejszą i największą (jeśli istnieją).

a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą parzystą} \\ 1, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$

b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $f(x)$ jest resztą z dzielenia $x$ przez 4

c) $X = \mathbf{R}$, $f(x)$ jest liczbą o 2 większą od $x$

**3.** Funkcję $f$ przedstawiono za pomocą tabeli. Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, wartości najmniejszą i największą. Narysuj wykres funkcji $f$.

a)

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $2$ | $3$ | $2$ | $1$ | $0$ | $-1$ |

b)

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $0$ | $5$ | $0$ | $-5$ | $0$ | $3$ |

**4.** Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę wartości funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Oblicz $f(\pi - 2)$ i $f(\sqrt{2} + 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leqslant 2 \\ x - 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

**5.** Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $f$.

a) $f(x) = \frac{x}{6-x}$

b) $f(x) = \frac{x+3}{x}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-1}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

e) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

f) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

**6.** Wyznacz dziedzinę funkcji $f$.

a) $f(x) = \sqrt{2x+8}$

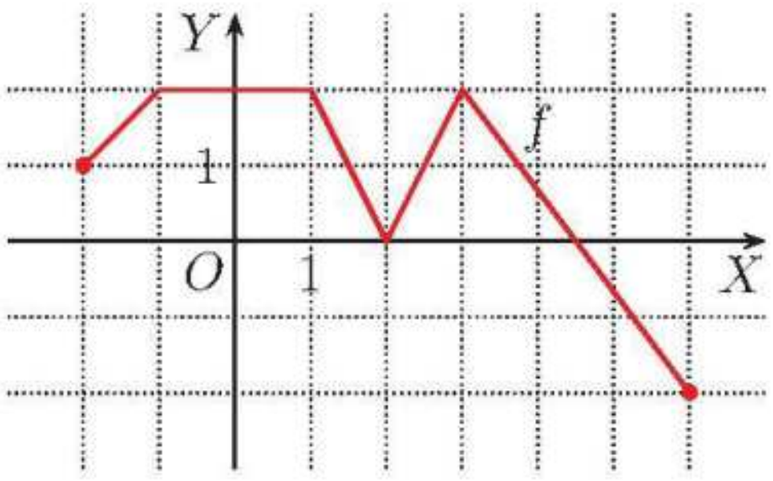
b) $f(x) = \sqrt{3-x}$

c) $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-4}$

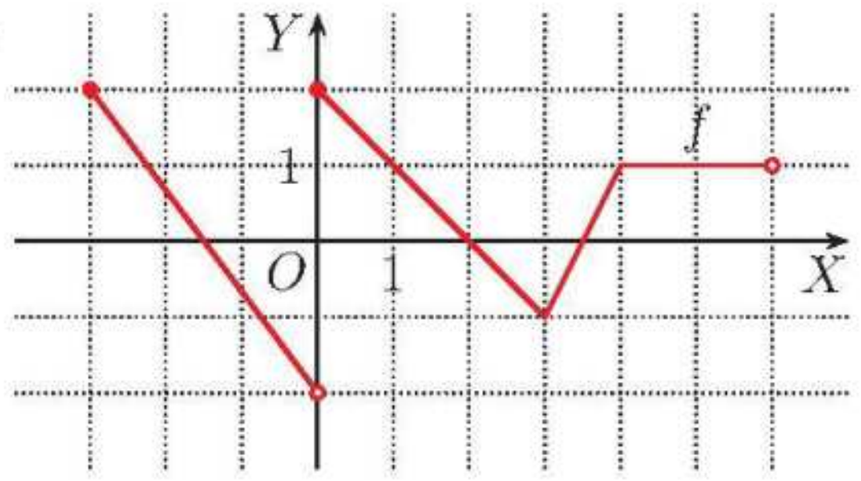
d) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+1)}$

**7.** Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji $f$.

a)

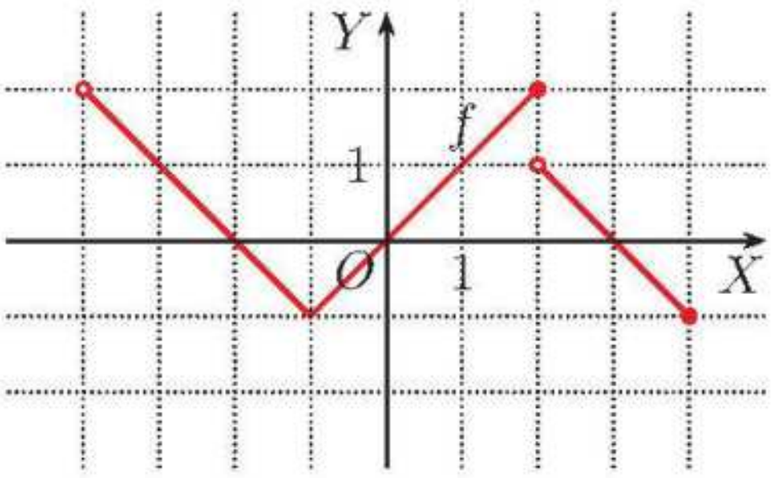



b)

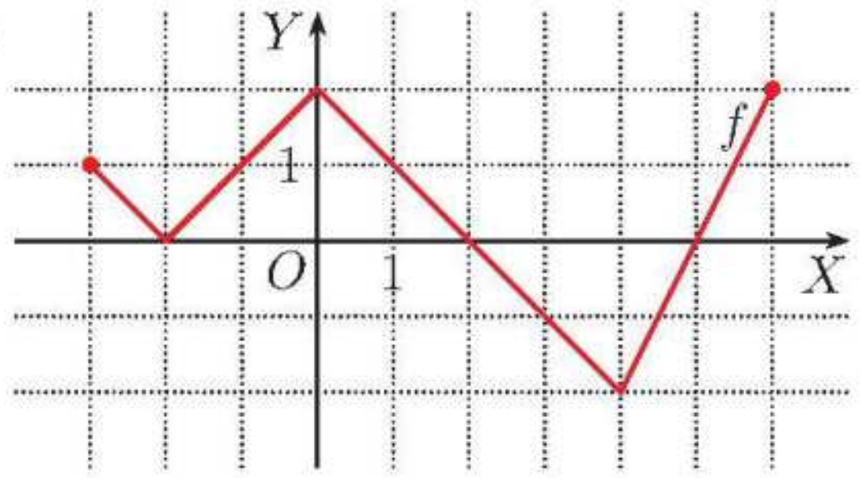



**8.** Odczytaj z wykresu funkcji $f$ jej dziedzinę i zbiór wartości. Podaj rozwiązania równania $f(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$.

a)



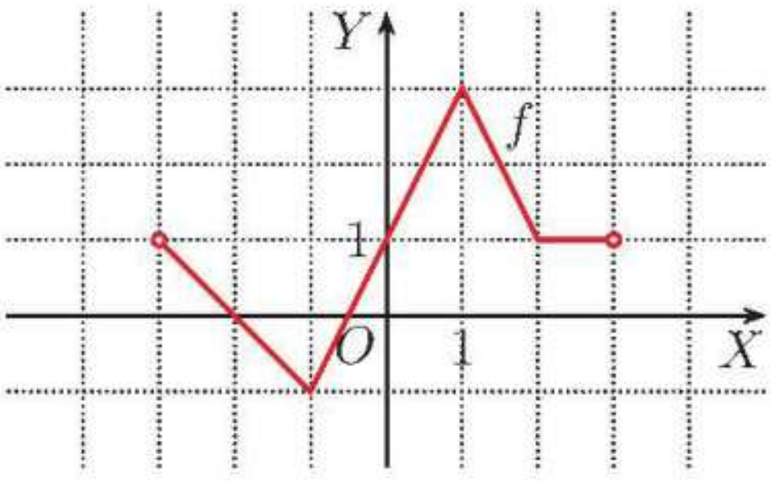

b)



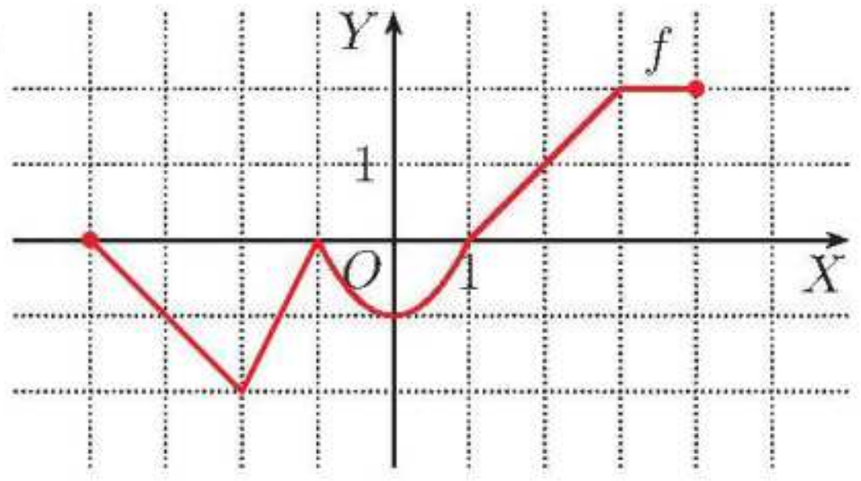

**9.** Odczytaj z wykresu funkcji $f$:

- jej dziedzinę i zbiór wartości,
- przedziały monotoniczności,
- argumenty, dla których przyjmuje ona wartości nieujemne,
- argumenty, dla których przyjmuje ona wartości większe od 1.

a)

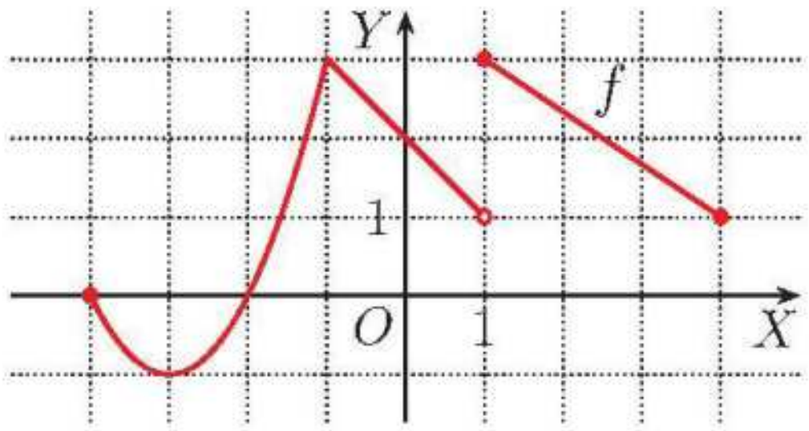



b)



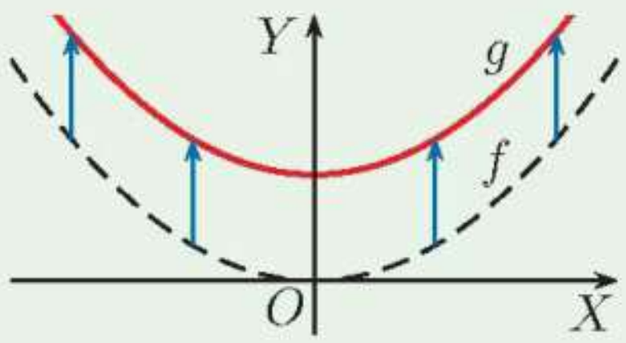
**10.** Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -4;4\rangle \to \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $f$ w przedziale:

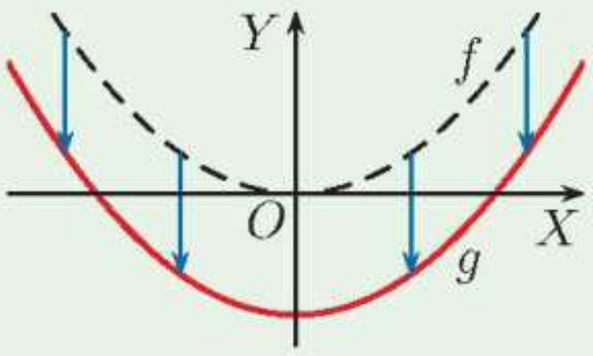
a) $\langle -3;0\rangle$, b) $\langle 1;4\rangle$, c) $\langle -4;4\rangle$.




## Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych

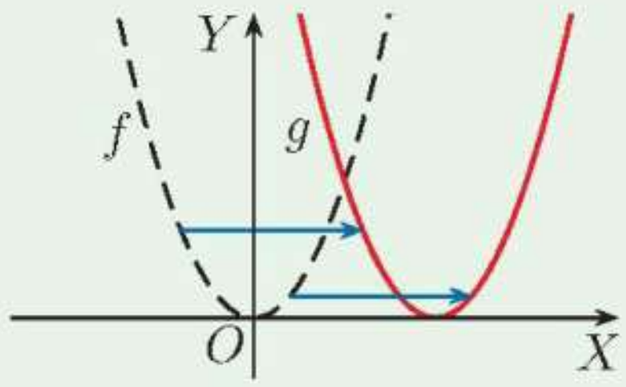
Wykres funkcji $g(x) = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f$ o $q$ jednostek **w górę** wzdłuż osi $OY$.

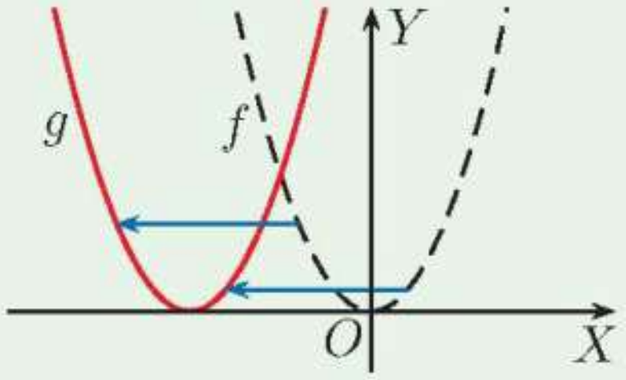



Wykres funkcji $g(x) = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f$ o $q$ jednostek **w dół** wzdłuż osi $OY$.

Wykres funkcji $g(x) = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f$ o $p$ jednostek **w prawo** wzdłuż osi $OX$.

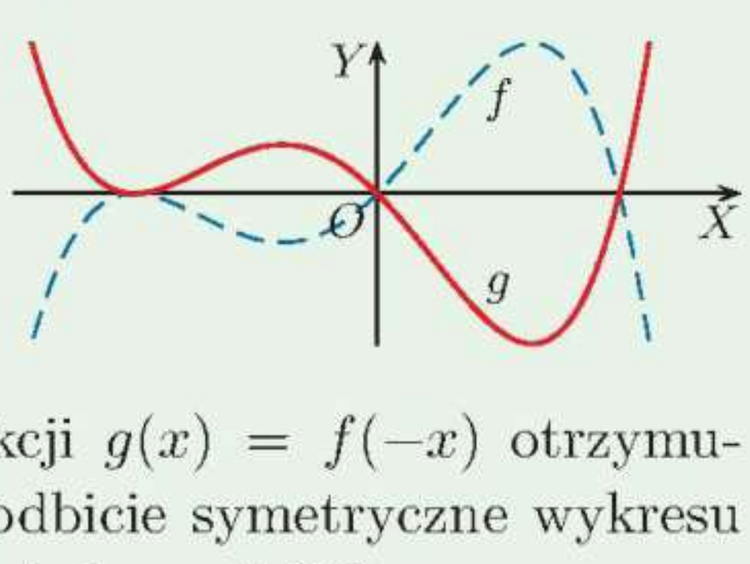


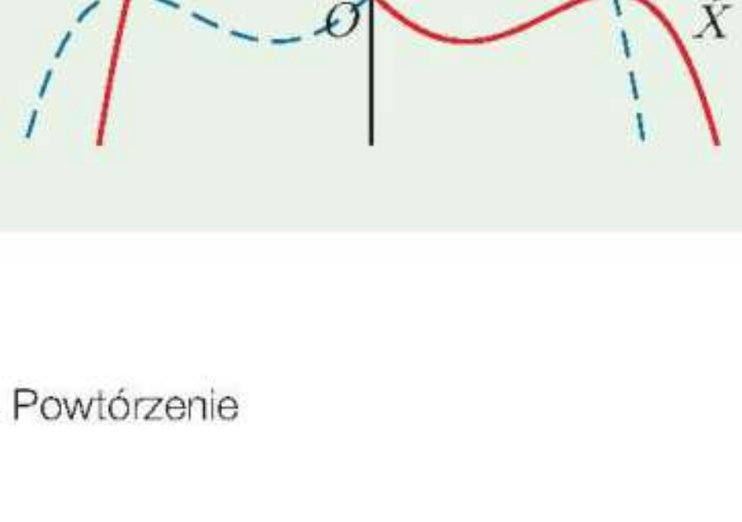




Wykres funkcji $g(x) = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f$ o $p$ jednostek **w lewo** wzdłuż osi $OX$.

## Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi układu współrzędnych

Wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu funkcji $f$ względem osi $OX$.




Wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu funkcji $f$ względem osi $OY$.

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**11.** Wyznacz wzór funkcji $g$, której wykres otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$:

a) o 3 jednostki w górę,

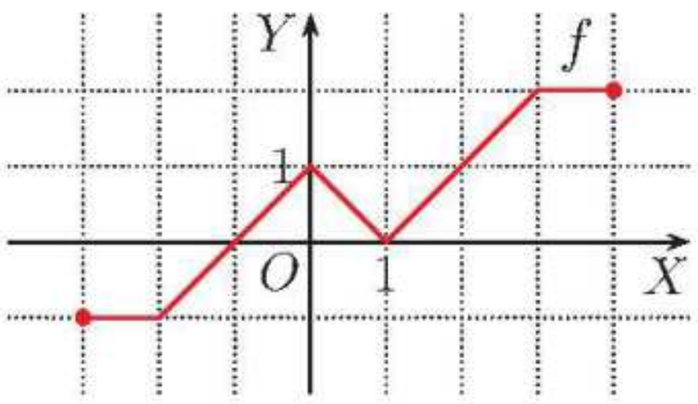
b) o 4 jednostki w dół,

c) o 2 jednostki w prawo,

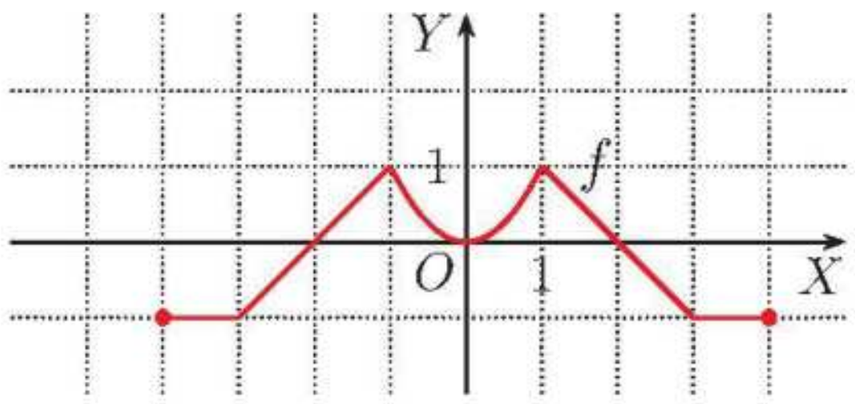
d) o 1 jednostkę w lewo.

**12.** Dany jest wykres funkcji $f$. Naszkicuj wykres, wyznacz dziedziny i zbiory wartości funkcji $f_1(x) = f(x) + 1$, $f_2(x) = f(x) - 2$, $f_3(x) = f(x + 4)$, $f_4(x) = f(x - 3)$.

a) $f\colon \langle -3; 4\rangle \to \mathbf{R}$

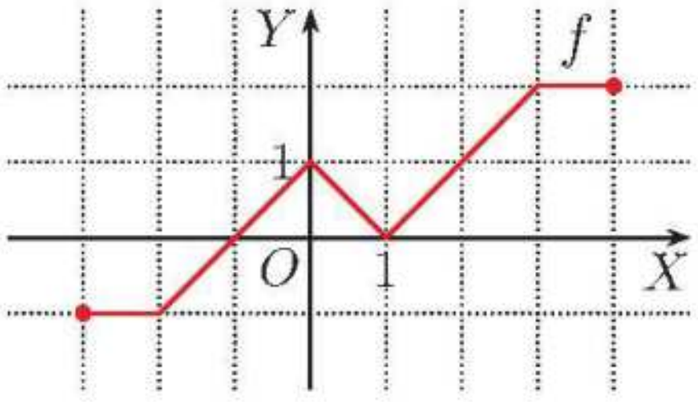



b) $f\colon \langle -4; 4\rangle \to \mathbf{R}$

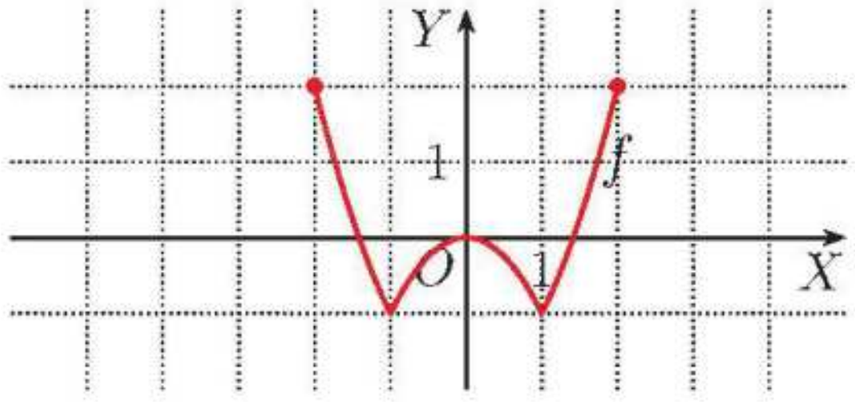



**13.** Dany jest wykres funkcji $f$. Naszkicuj wykresy, wyznacz dziedziny i zbiory wartości funkcji $f_1(x) = f(x + 4) + 1$ oraz $f_2(x) = f(x - 4) - 1$.

a) $f\colon \langle -3; 4\rangle \to \mathbf{R}$




b) $f\colon \langle -2; 2\rangle \to \mathbf{R}$



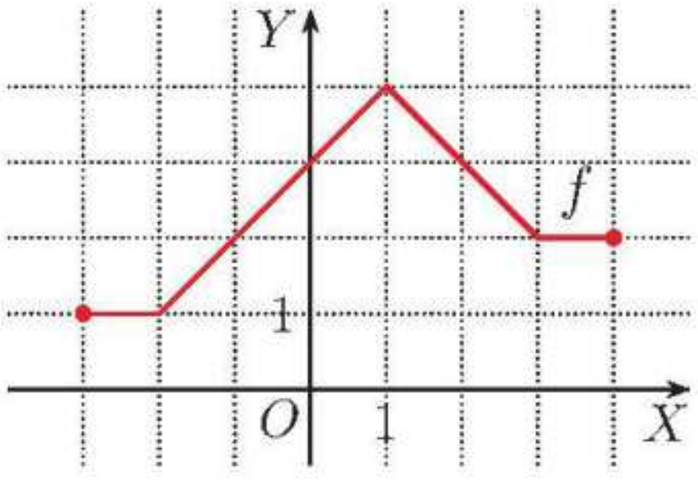

**14.** Wyznacz wzory funkcji $g$ i $h$, a następnie naszkicuj ich wykresy.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x - 3)$, $h(x) = f(x) - 2$

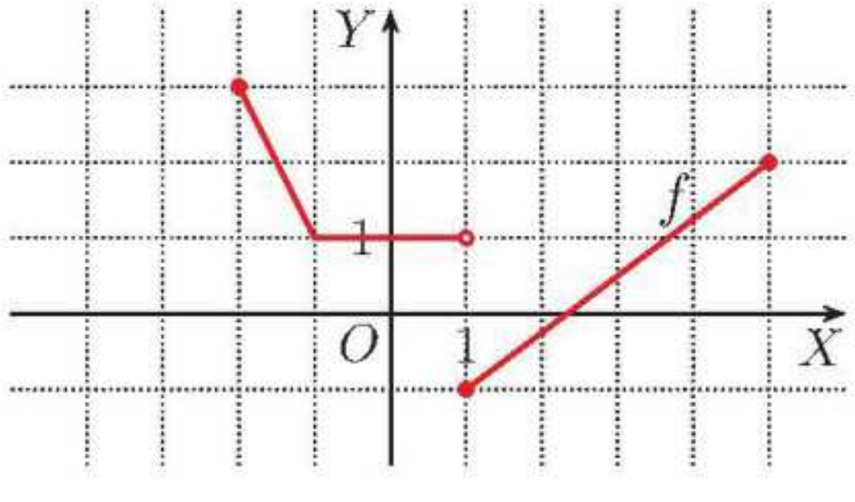
b) $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x + 4)$, $h(x) = f(x) + 2$

**15.** Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz $h(x) = -f(x)$.

a) $f\colon \langle -3; 4\rangle \to \mathbf{R}$




b) $f\colon \langle -2; 5\rangle \to \mathbf{R}$



**16.** Naszkicuj wykres funkcji $g$.

a) $g(x) = f(x+2)$, gdzie $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ x-2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = f(x-1)$, gdzie $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \langle -2; 2\rangle \\ 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \end{cases}$

**17.** Jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 2|x|$, aby otrzymać wykres funkcji $g$?

a) $g(x) = 2|x-4|$ b) $g(x) = 2|x+2|$ c) $g(x) = 2(|x|+3)$

**18.** Naszkicuj wykres funkcji $g$, przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = 2|x|$.

a) $g(x) = 2|x+3|$ c) $g(x) = 2(|x+1|-1)$ e) $g(x) = |2x-6|+3$

b) $g(x) = 2|4-x|$ d) $g(x) = -2|x+2|+1$ f) $g(x) = -|2x+8|-1$

**19.** Zbiorem wartości funkcji $f\colon \langle -5; 3\rangle \to \mathbf{R}$ jest przedział $\langle -3; 1\rangle$, a miejscem zerowym – liczba 2. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji $g$.

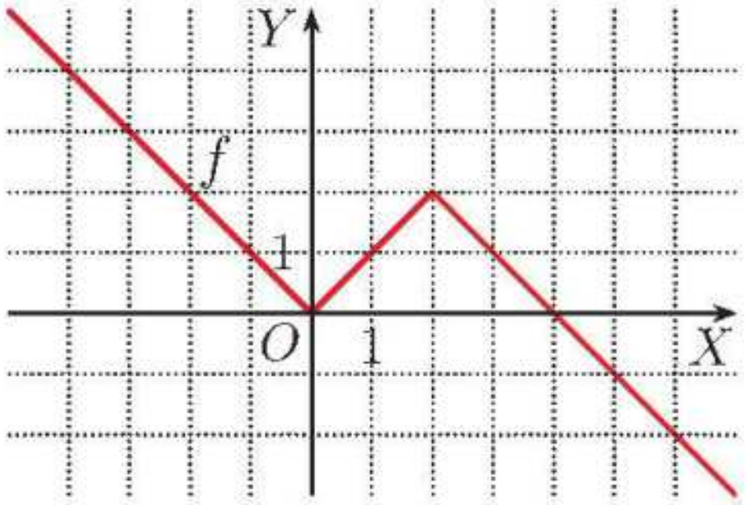
a) $g(x) = -f(x)$ b) $g(x) = -f(-x)$ c) $g(x) = f(x+1)-2$

**20.** Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Z wykresu odczytaj miejsca zerowe funkcji $f$, jej przedziały monotoniczności oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant -3$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{dla } x \in (-\infty; -1\rangle \\ -x+1 & \text{dla } x \in (-1; 4\rangle \\ -3 & \text{dla } x \in (4; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -1\rangle \\ x^2-4 & \text{dla } x \in (-1; 2\rangle \\ -x+4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

**21.** Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. W tym samym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f$ i $g$, a następnie odczytaj, dla jakich argumentów funkcje $f$ i $g$ przyjmują te same wartości, oraz podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant g(x)$.




a) $g(x) = 1$ b) $g(x) = x$ c) $g(x) = x^2$ d) $g(x) = 2 - x^2$

## Zestaw III – podsumowujący

**22.** Podaj liczbę miejsc zerowych funkcji, która każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje:
a) liczbę jej parzystych dzielników, b) kwadrat różnicy jej cyfr.

**23.** Funkcja $f$ przyporządkowuje każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej jej najmniejszy dzielnik różny od 1. Podaj liczbę argumentów, dla których wartość funkcji jest równa: a) 2, b) 5, c) 7.

**24.** Naszkicuj wykres funkcji $f$, a następnie odczytaj z niego rozwiązania równania $f(x) = -1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant -1$.

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1\rangle \\ -x+4 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1\rangle \\ 2x+1 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$

**25.** Wyznacz dziedzinę, uprość wzór, a następnie naszkicuj wykres funkcji $f$.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ d) $f(x) = \frac{x^2+x}{x}$

**26.** Oblicz wartości funkcji $f$ dla argumentów $-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2$.

a) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; 1\rangle \cup (2; \infty) \\ x^2-1 & \text{dla } x \in (1; 2\rangle \end{cases}$

**27.** Miejscami zerowymi funkcji $f$ są liczby $-2$ i 5. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $g$.

a) $g(x) = f(-x)$ b) $g(x) = f(x+4)$ c) $g(x) = f(4-x)$

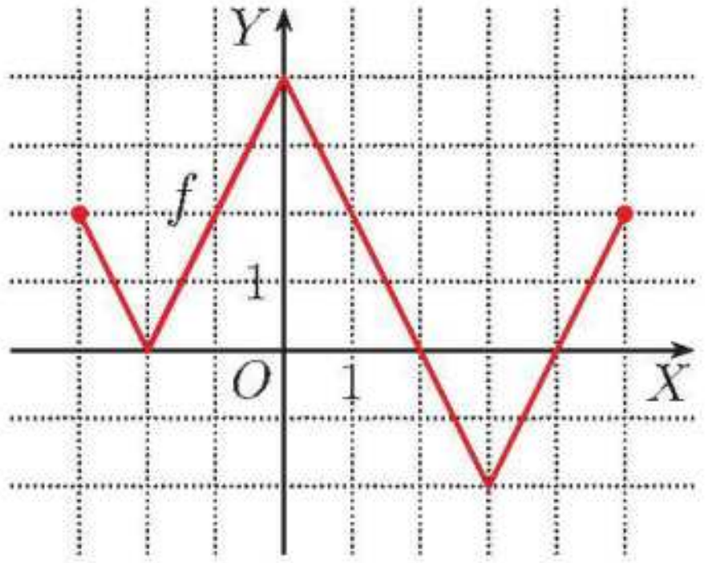
**28.** Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -3; 5\rangle \to \mathbf{R}$.

a) Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja $f$ przyjmuje wartości dodatnie.

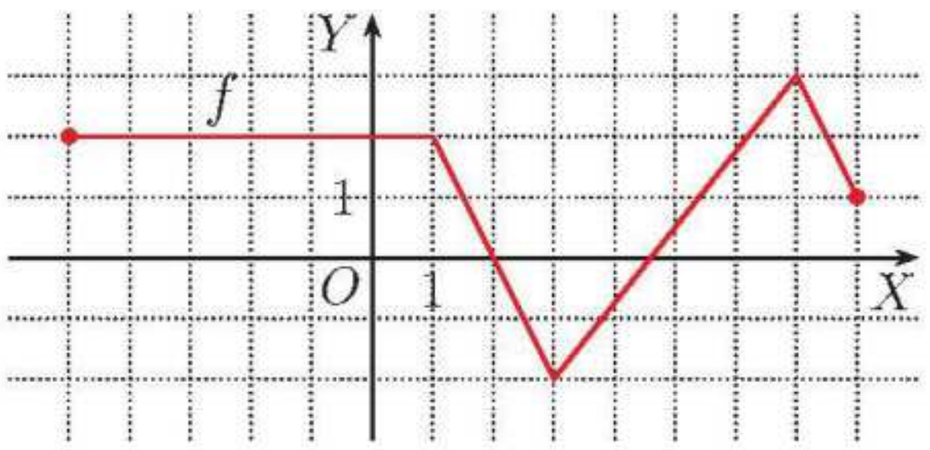
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji:
$$g(x) = f(-x)$$

c) Wyznacz zbiór wartości funkcji:
$$h(x) = 3 - f(x)$$

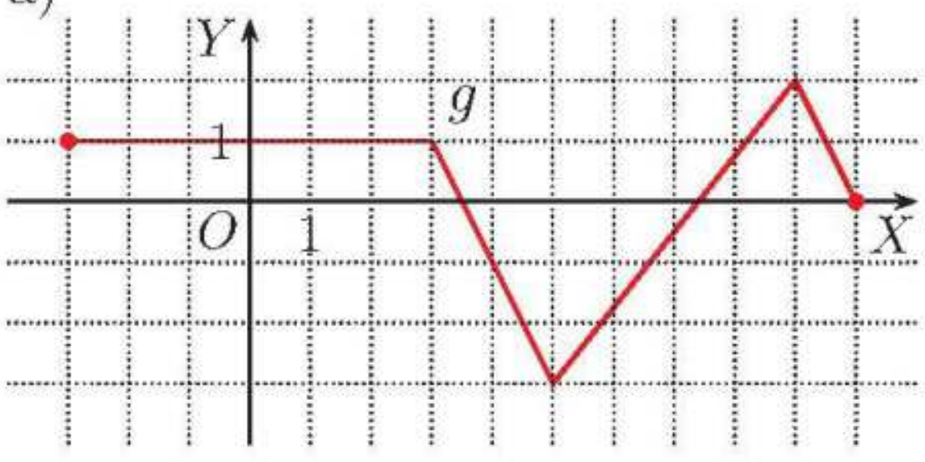
d) Podaj wartości $m \in \{-2, 3, 5\}$, dla których równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie.



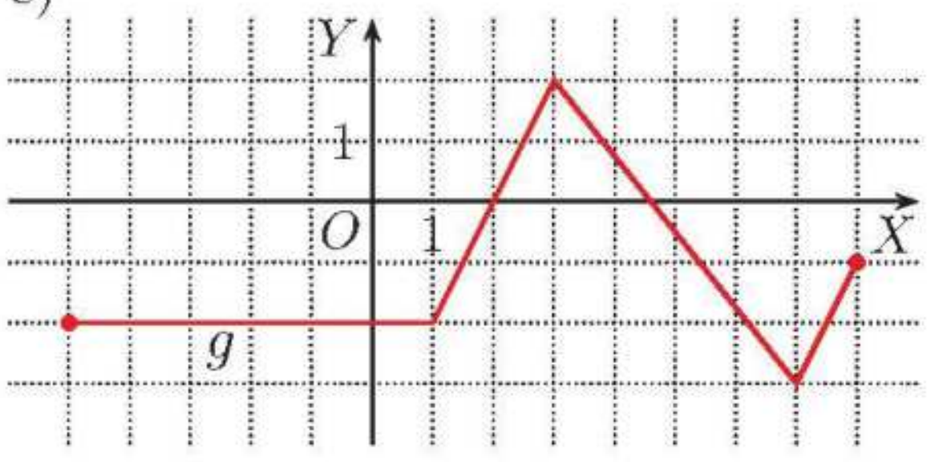
**29.** Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -5; 8\rangle \to \mathbf{R}$. Jak należy go przekształcić, aby otrzymać wykres funkcji $g$? Zapisz to przekształcenie za pomocą wzoru.



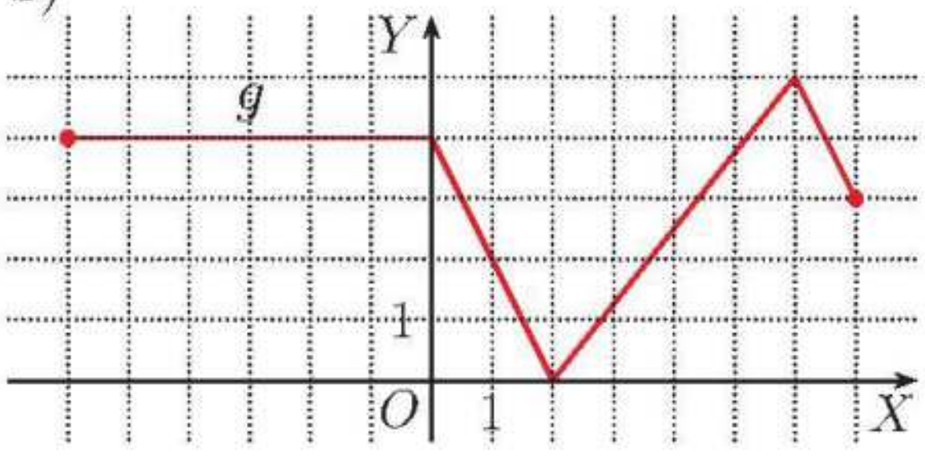

a)



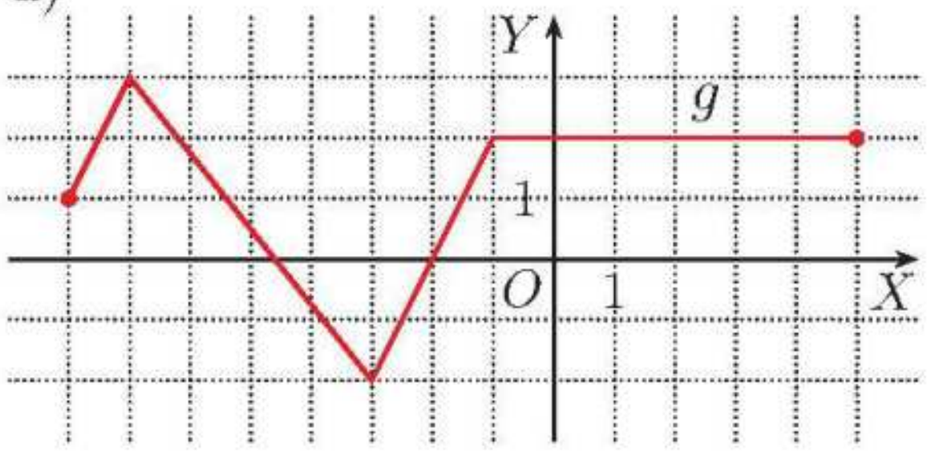

c)




b)




d)

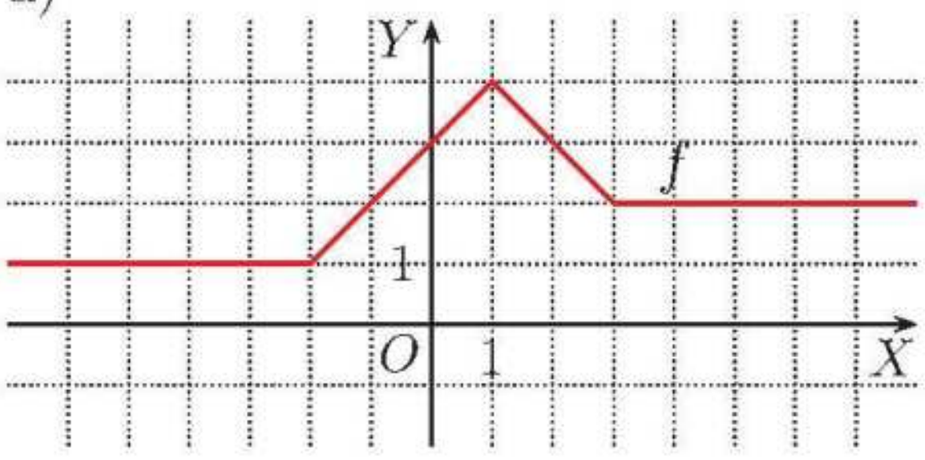



**30.** Naszkicuj wykresy funkcji $f$, $g(x) = -f(x)$ oraz $h(x) = f(-x)$, a następnie odczytaj ich zbiory wartości. Czy funkcje $f$, $g$ i $h$ są monotoniczne?

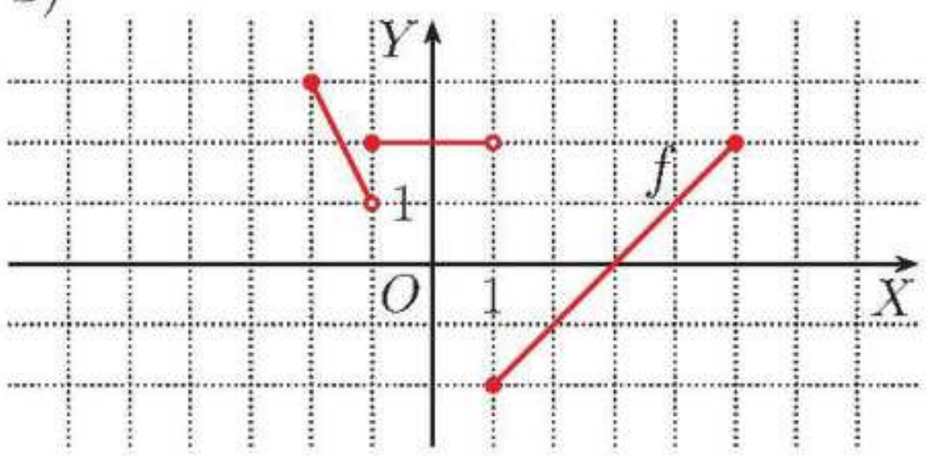
a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \langle -2; 0\rangle \\ x+1 & \text{dla } x \in (0; 2\rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in \langle -2; 0\rangle \\ -x+2 & \text{dla } x \in (0; 2\rangle \end{cases}$

**31.** Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz $h(x) = 3 - f(x)$ i na ich podstawie podaj rozwiązanie równania $f(-x) = 3 - f(x)$.

a)



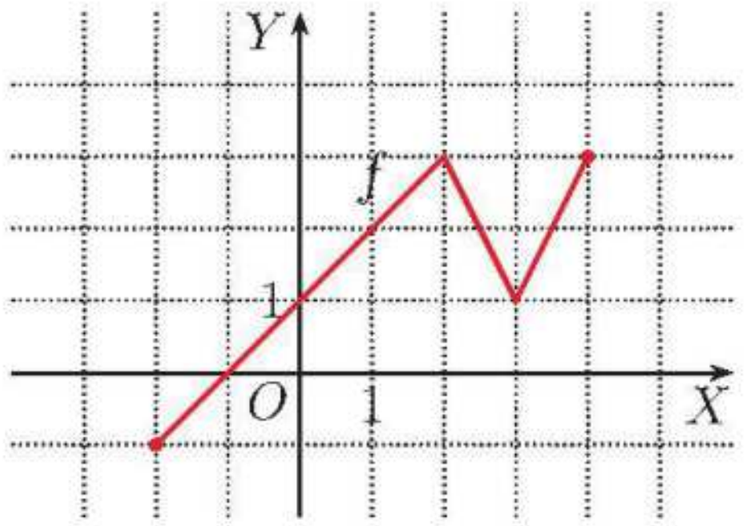

b)




**32.** Naszkicuj wykres funkcji $f$. Podaj wzory funkcji $g(x) = f(x+1) - 4$, $h(x) = 1 - f(x-2)$, $k(x) = f(2-x) - 2$ i naszkicuj ich wykresy.

a) $f(x) = 2x - 2$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = -|2x|$

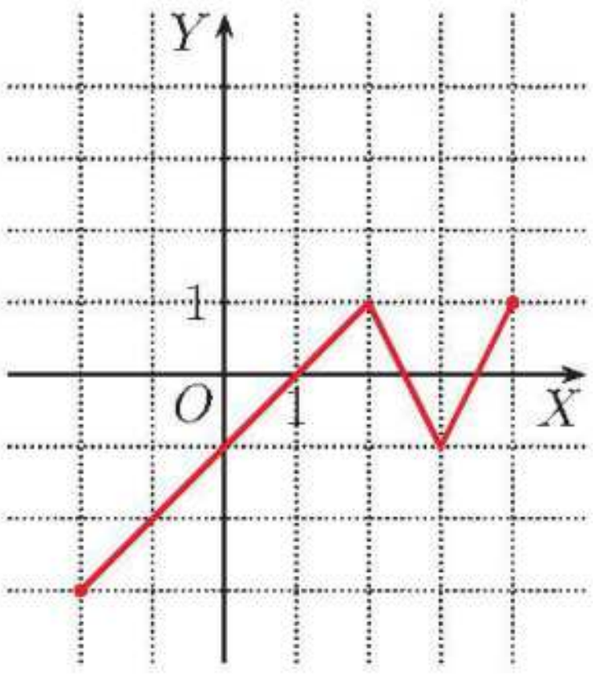
**33.** Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -2;4\rangle \to \mathbf{R}$. Funkcje $g$ oraz $h$ są określone za pomocą funkcji $f$:
$g(x) = -f(x) + 2$ oraz $h(x) = f(-x) - 2$.
Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji, w tym wykresy funkcji $g$ oraz $h$.



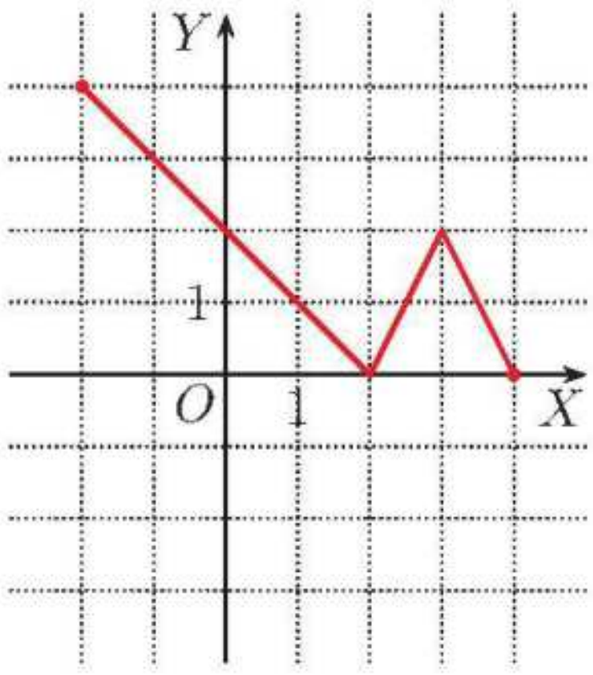

Każdej z funkcji $g$ oraz $h$ przyporządkuj jej wykres. Przerysuj do zeszytu tabelę i uzupełnij ją właściwymi odpowiedziami wybranymi spośród A–F.

| Funkcja | Rysunek |
|---|---|
| $g$ | ? |
| $h$ | ? |

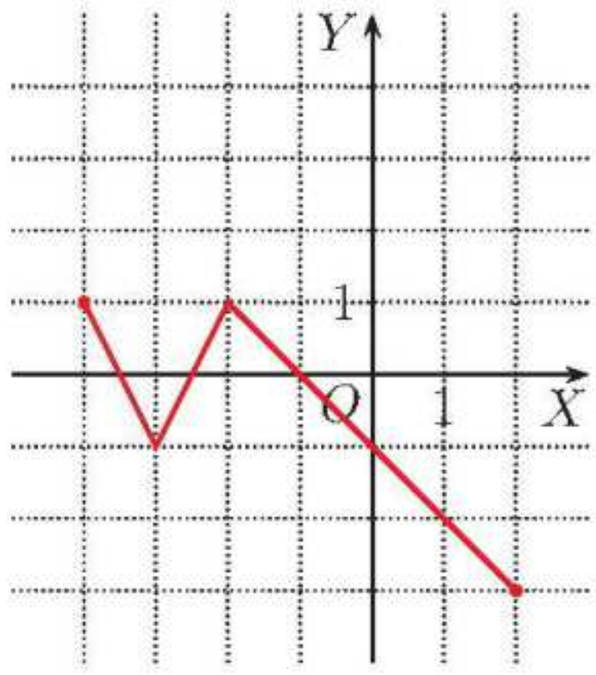
**A.**



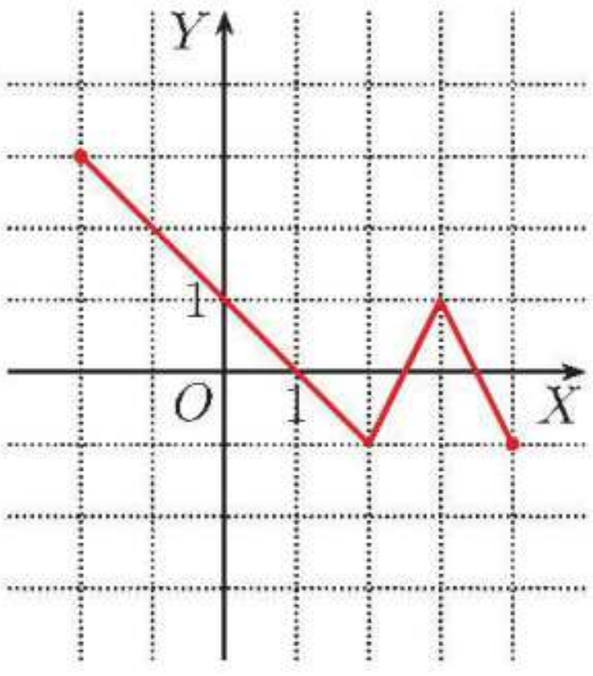

**B.**



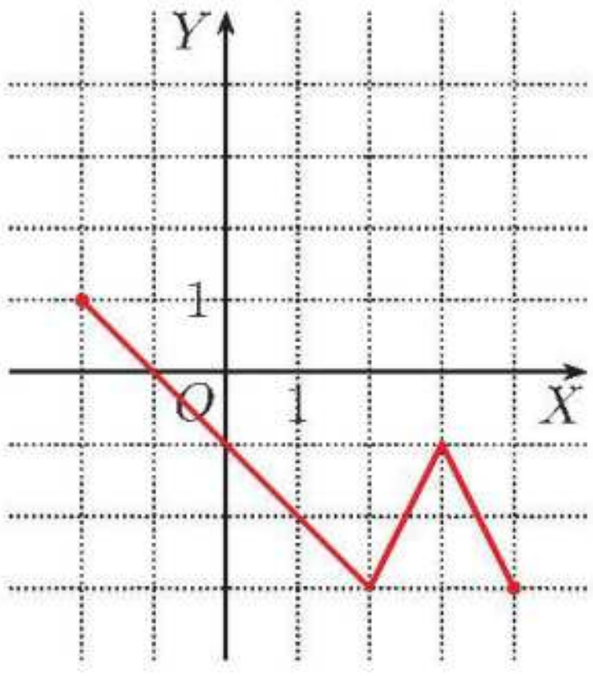

**C.**



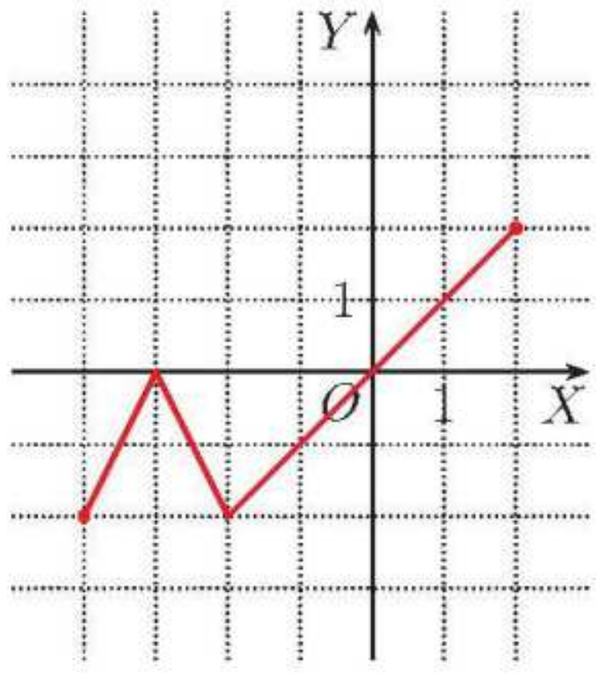

**D.**




**E.**



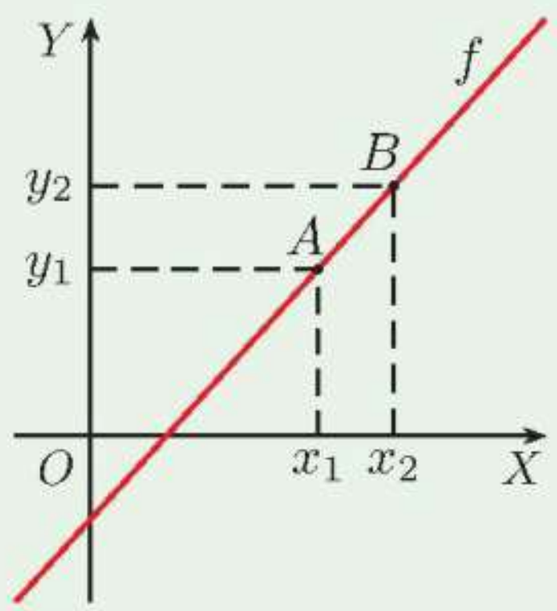

**F.**



# 5.4. Funkcja liniowa i układy równań liniowych

**Funkcją liniową** nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie $a$ i $b$ są stałymi.

**Wykresem funkcji liniowej** jest prosta. Liczbę $a$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej, a równanie $y = ax + b$ – **równaniem kierunkowym**.




Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$, przechodzącej przez dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, jest równy $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$ jest:

- **rosnąca** dla $a > 0$,
- **malejąca** dla $a < 0$,
- **stała** dla $a = 0$.

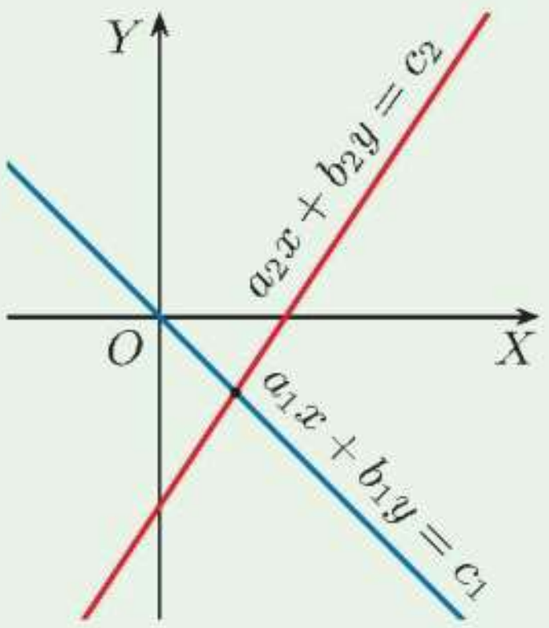
Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

- **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
- **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

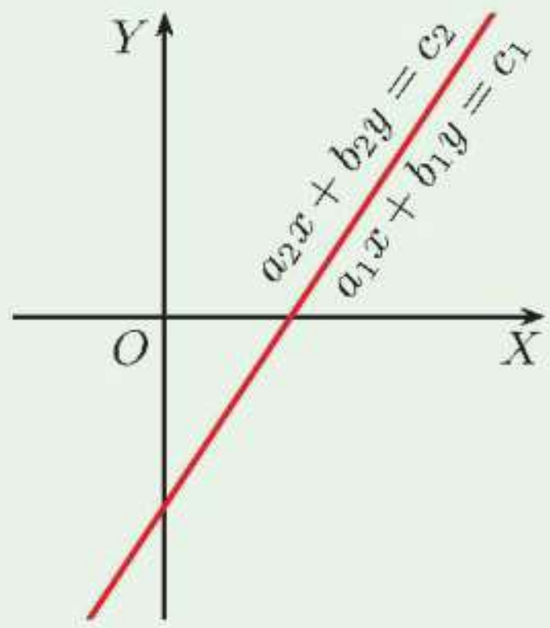
Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym** prostej.

Układ równań liniowych $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ nazywamy:

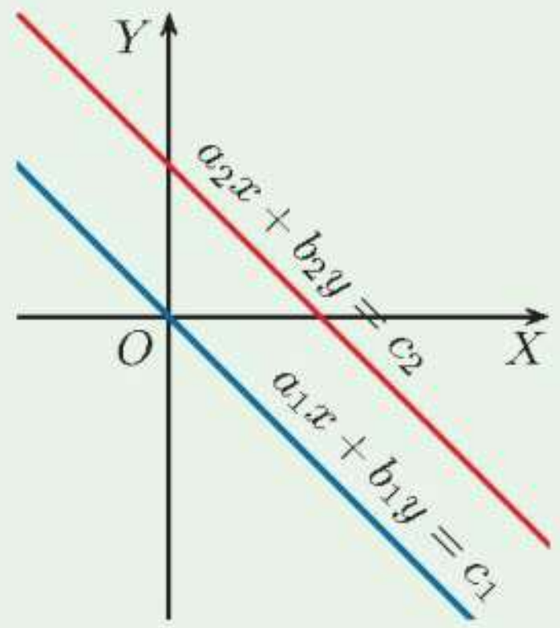
- **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań.




**Układ oznaczony** – proste opisane równaniami tego układu przecinają się w jednym punkcie.




**Układ nieoznaczony** – oba równania tego układu opisują tę samą prostą.




**Układ sprzeczny** – proste opisane równaniami tego układu są równoległe i się nie pokrywają.

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji $f$ z osiami układu współrzędnych i naszkicuj ten wykres. Określ monotoniczność funkcji $f$.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ b) $f(x) = -2x + 2$ c) $f(x) = 4x - 2$

**2.** Określ monotoniczność funkcji $f$.

a) $f(x) = 2 - 3x - 3(4 - 2x)$ c) $f(x) = (2 - x)(2 + x) + (2 + x)^2$

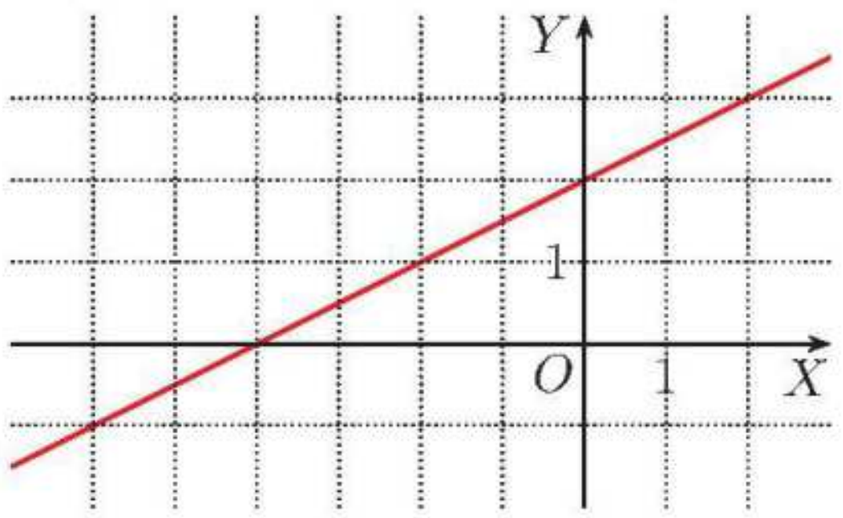
b) $f(x) = \frac{3x+2}{2} - \frac{x+3}{4} - \frac{4x-1}{3}$ d) $f(x) = (1 - 2x)^2 - (2 - x)^2 - 3x^2$

**3.** Prosta (rysunek obok) jest wykresem pewnej funkcji liniowej.

a) Podaj argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie.

b) Podaj argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartości nieujemne.

c) Wyznacz wzór tej funkcji.




**4.** Dana jest funkcja liniowa $f(x) = 2x + b$. Wyznacz $b$, jeżeli wiadomo, że:

a) funkcja $f$ przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów większych od 8,

b) funkcja $f$ przyjmuje wartości większe od 3 tylko dla argumentów większych od 5.

**5.** Wyznacz wzór funkcji liniowej $f$, która spełnia podane warunki.

a) $f(2) = 0$ i $f(0) = 4$ b) $f(\frac{5}{2}) = \frac{1}{4}$ i $f(2) = -1$

**6.** Do wykresu funkcji liniowej należą punkty $A$ i $B$. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej będącej wykresem tej funkcji. Wyznacz równanie tej prostej.

a) $A(-3, 0)$, $B(1, 4)$ b) $A(2, 0)$, $B(-1, 3\sqrt{3})$ c) $A(-2, 7)$, $B(6, 7)$

**7.** Sprawdź, czy punkty $A$, $B$ i $C$ należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.

a) $A(0, 2)$, $B(5, -\frac{1}{2})$, $C(-2, 3)$ b) $A(\frac{1}{3}, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(2, 3)$

**8.** Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji $f$ i przechodzi przez punkt $P$.

a) $f(x) = 3x$, $P(0, 2)$ c) $f(x) = \sqrt{2}\,x - 1$, $P(\sqrt{2}, -2)$

b) $f(x) = -2x + 1$, $P(1, 3)$ d) $f(x) = 5$, $P(3, 8)$

**9.** Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej $k$ i przechodzi przez punkt $P$.

a) $k$: $y = 2x$, $P(2, -1)$

b) $k$: $y = -4x + 1$, $P(8, 4)$

c) $k$: $x - 3y - 3 = 0$, $P(1, -1)$

d) $k$: $\sqrt{5}\,x - y + 3 = 0$, $P(\sqrt{5}, -3)$

**10.** Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki trapezu o wierzchołkach $A(-2, -3)$, $B(6, 3)$, $C(-1, 4)$, $D(-5, 1)$. Czy jest to trapez prostokątny?

**11.** Rozwiąż równanie (wynik zapisz w najprostszej postaci).

a) $\sqrt{2}\,x - 2 = \sqrt{2} - 1$

b) $\sqrt{3}\,t - 2 = t - \sqrt{3}$

c) $\sqrt{15}\,x - \sqrt{5} = \sqrt{5}\,x + \sqrt{20}$

d) $\sqrt{6}\,z - \sqrt{3} = \sqrt{12} - \sqrt{3}\,z$

**12.** Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+5}{5} > \frac{4x-1}{2}$

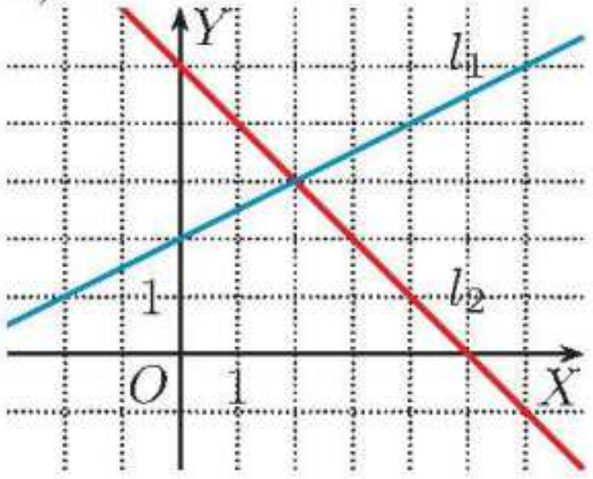
b) $\sqrt{3}(x - 1) \geqslant \sqrt{12}\,x$

c) $10(3x - 6) - 5(x - 2) \leqslant 2(4x - 8)$

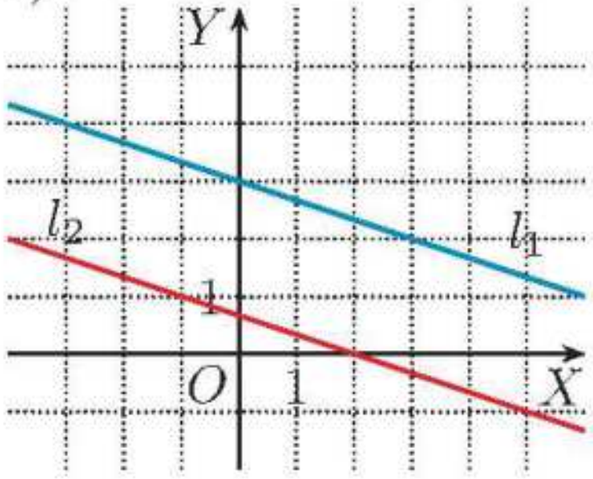
d) $(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) < 4 - (\sqrt{3} - x)^2$

**13.** Zapisz układ równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku. Jeśli układ ma rozwiązanie, to je podaj.

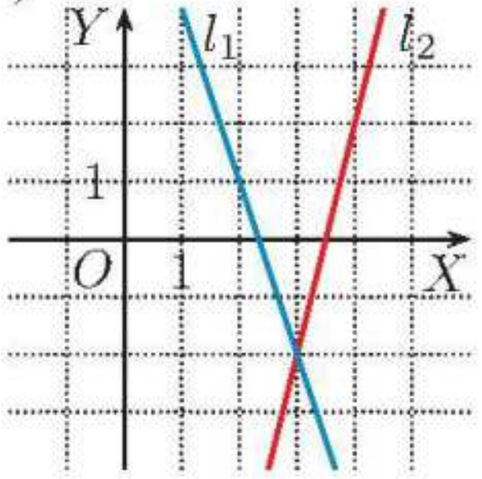
a)




b)




c)




**14.** Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -4x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x - 2y = -2 \\ 3y - 9x = 6 \end{cases}$

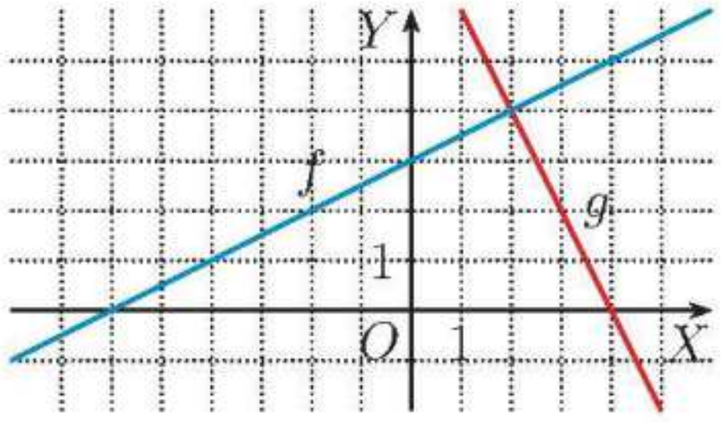
e) $\begin{cases} -0{,}1x + 0{,}2y = 1 \\ 2y = x + 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 0{,}5y = 1 \\ 0{,}5x + 0{,}25y = 0{,}5 \end{cases}$

**15.** Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji liniowych $f$ i $g$. Odczytaj, dla jakich argumentów:

a) wartości funkcji $f$ i $g$ mają różne znaki,

b) spełniona jest nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.



## Zestaw II – ćwiczeniowy

**16.** Dla jakich wartości $m$ funkcja $f$ jest stała?

a) $f(x) = (m+2)x+7$

b) $f(x) = \left(2+\frac{2}{m}\right)x+4$

**17.** Dla jakich wartości $m$ funkcja $f$ jest malejąca?

a) $f(x) = (m+3)x-7$

b) $f(x) = (\frac{2}{3}m-4)x+2$

c) $f(x) = (m^2-4)x+7$

d) $f(x) = (36-m^2)x-3$

**18.** Punkty $A$, $B$ i $C$ należą do wykresu tej samej funkcji liniowej. Oblicz współrzędną $a$.

a) $A(0,-2)$, $B(-2,2)$, $C(0,a)$

b) $A(1,3)$, $B(5,5)$, $C(a,0)$

c) $A(\frac{1}{2},7)$, $B(-6,7)$, $C(\sqrt{3},a)$

d) $A(3,2)$, $B(a,6)$, $C(-1,\frac{14}{3})$

**19.** Dla jakiej wartości $a$ miejscem zerowym funkcji $f$ jest liczba $p$?

a) $f(x) = (3-a)x+4,\ \ p=2$

b) $f(x) = (2a+1)x+7-a,\ \ p=-2$

**20.** Wyznacz miejsce zerowe funkcji $f$.

a) $f(x) = \frac{3x-1}{2} - \frac{x+4}{3} - \frac{5x-11}{4}$

b) $f(x) = 6(2x+2) - 2(5x+5)$

c) $f(x) = 11x-2(2(3x-1)-3x)-1$

d) $f(x) = x-(x-1)^2-(x+1)(1-x)$

**21.** Oblicz współczynnik kierunkowy prostej będącej wykresem funkcji $f$, jeżeli wiadomo, że ma ona wspólne miejsce zerowe z funkcją $g$ oraz $f(0)=3$.

a) $g(x) = \frac{x-3}{3} + \frac{x+3}{4}$

b) $g(x) = 1 - \frac{2x-1}{6} + \frac{x-1}{2}$

**22.** Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja $f$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja $g$.

a) $f(x) = \frac{x+5}{5},\ \ g(x) = \frac{4x-1}{2}$

b) $f(x) = \sqrt{3}(x-1),\ \ g(x) = \sqrt{12}x$

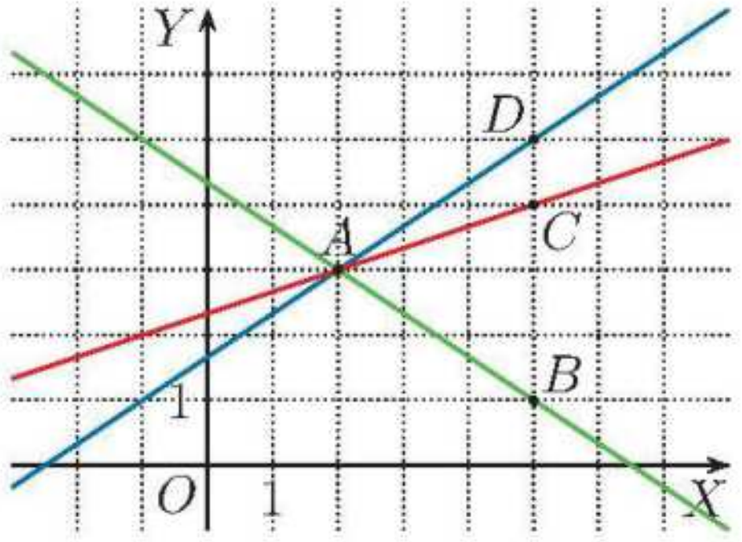
c) $f(x) = 2(4x-8),\ \ g(x) = 10(3x-6)-5(x-2)$

**23.** Dane są punkty $A(2,3)$, $B(5,1)$, $C(5,4)$ i $D(5,5)$ (rysunek poniżej).

a) Wyznacz współczynniki kierunkowe prostych $AB$, $AC$ i $AD$.

b) Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i prostą $AB$.

c) Dla jakich argumentów funkcja, której wykresem jest prosta $AC$, przyjmuje wartości ujemne?



D **24.** Boki trójkąta są zawarte w prostych $4x - 3y + 6 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$ oraz $7x + y - 27 = 0$. Uzasadnij, że trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków.

**25.** Rozwiąż algebraicznie układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{x-y-2}{2} - \frac{x+y}{4} = 1 \\ \frac{2x+y-1}{3} - \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{y+6}{3} + \frac{x}{4} = 5 - 2x \\ \frac{2y-3x}{4} = \frac{2}{3}y - 1 \end{cases}$

**26.** Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} 0{,}2y = 0{,}4 - 0{,}15x \\ 0{,}4y = 0{,}1x - 0{,}8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0{,}25y = x + 0{,}5 \\ 0{,}2y = -0{,}2x - 0{,}6 \end{cases}$

**27.** W pewnej liczbie dwucyfrowej suma cyfr wynosi 9. Jeżeli przestawimy cyfry, to otrzymamy liczbę o 27 większą. Jaka to liczba?

**28.** Ojciec jest trzy razy starszy od syna. Przed dwunastu laty ojciec był dziewięć razy starszy od syna. Ile lat ma ojciec, a ile syn?

**29.** Koszt (w złotych) wypożyczenia samochodu na jeden dzień opisuje funkcja $f(x) = 40 + 0{,}2x$, gdzie 40 zł jest opłatą stałą, 0,2 zł – opłatą za każdy przejechany kilometr, a $x$ – liczbą przejechanych kilometrów. Oblicz koszt wypożyczenia samochodu, zakładając, że przejechał on 500 km.

**30.** Koszt wypożyczenia samochodu na 3 dni składa się z opłaty stałej 100 zł oraz opłaty 0,2 zł za każdy przejechany kilometr. Podaj wzór funkcji opisującej koszt wypożyczenia samochodu w zależności od liczby przejechanych kilometrów. Naszkicuj wykres tej funkcji. Ile maksymalnie kilometrów można przejechać, aby koszt wypożyczenia samochodu na 3 dni nie przekroczył 300 zł?

**31.** Z miast $A$ i $B$, oddalonych od siebie o 300 km, wyjechały równocześnie naprzeciw siebie dwa samochody. Pierwszy z nich dotarł do miasta $B$ po 3 godzinach od momentu, kiedy się minęły, natomiast drugi dotarł do miasta $A$ po godzinie i 20 minutach od tego momentu. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

**32.** Inwestor za kwotę $K$ złotych zakupił akcje dwóch firm: $A$ i $B$. Po roku zysk ze sprzedaży akcji wyniósł 7%, w tym zysk ze sprzedaży akcji firmy $A$ – 4%, a firmy $B$ – 8%. Jaki procent zainwestowanej kwoty wydał inwestor na akcje firmy $A$, a jaki – na akcje firmy $B$?

## Zestaw III – podsumowujący

**33.** Wykresem funkcji liniowej $f$ jest prosta przechodząca przez punkt $A(-2, 3)$. Funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów mniejszych od 2 oraz ujemne dla argumentów większych od 2. Wyznacz wzór tej funkcji.

**34.** Funkcja liniowa $f$ przyjmuje wartości ujemne dla argumentów większych od $-2$ oraz dodatnie dla argumentów mniejszych od $-2$. Największa wartość funkcji $f$ w przedziale $\langle 0; 3\rangle$ jest równa $-12$. Wyznacz wzór tej funkcji.

**35.** Funkcja $f(x) = m(m-3)x + 8m - 8$ przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów większych od 4. Oblicz $m$.

**36.** Wykresy funkcji $f(x) = -ax + b$ oraz $g(x) = (b-2)x + a$ przecinają się w punkcie $P(1, 4)$. Wyznacz miejsce zerowe tej spośród tych dwóch funkcji, która jest rosnąca.

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są:
- równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$,
- prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

**37.** Dla jakich wartości $m$ proste $p_1$ i $p_2$ są równoległe, a dla jakich – prostopadłe?

a) $p_1$: $mx + 4y - 3 = 0$, $p_2$: $2x - 3y - 11 = 0$

b) $p_1$: $(1-m)x - 3y - 4 = 0$, $p_2$: $4x + 2y - 21 = 0$

c) $p_1$: $mx - 2y - 5 = 0$, $p_2$: $2x + (m-4)y - 3 = 0$

**38.** Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x+y) - 3(x-y) = 27 \\ 3(x+y) + (x-y) = -20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2x+y) - 6(x+2y) = 3 \\ (x+2y) + 2(2x+y) = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3(y-x)}{4} - \frac{2x-y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{2x-y}{2} - \frac{y-x}{3} = \frac{1}{6} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{3x-y}{2} - \frac{1-y}{3} = 0 \\ \frac{x-y}{2} + \frac{3x+y}{4} = 5 \end{cases}$

**39.** Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} (2x-1)^2 + 3(x-3y) = (2x-1)(2x+1) \\ 15x - 5y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+4)^2 - (y-1)^2 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) + (4-y)(4+y) \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

**40.** Oblicz pole trójkąta ograniczonego prostą $y = \frac{1}{2}x+3$ i wykresem funkcji $f$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2\rangle \\ x+3 & \text{dla } x \in (-2; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 1\rangle \\ 2x-3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

**41.** Wykres funkcji liniowej $f(x) = mx + 4m + 1$ przecina oś $OY$ w punkcie $P(0, p)$. Określ monotoniczność funkcji $f$, jeżeli wiadomo, że współrzędna $p$ spełnia podany warunek.

a) $\sqrt{2}p - 2 = \sqrt{2} - 1$

b) $2 - 2\sqrt{3}p = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{2}p + p = 4$

d) $\sqrt{3}p - 2 = p - \sqrt{3}$

**42.** Zbadaj wzajemne położenie wykresów funkcji $f$ i $g$. Dla jakich argumentów funkcja $f$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja $g$?

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 7, \;\; g(x) = -\frac{7}{6}x + 9$

b) $f(x) = \frac{x+2}{3} - \frac{x-3}{4}, \;\; g(x) = \frac{x+6}{9} - \frac{x+4}{6}$

**43.** Dla jakich wartości $a$ miejscem zerowym funkcji $f$ jest liczba większa od 0?

a) $f(x) = 2(x+1) - (3+ax)$

b) $f(x) = (a+1)x - a(x-2) + 4$

**44.** Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (m^2 - 9)x + 4$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Funkcja $f$ jest funkcją malejącą dla siedmiu różnych wartości całkowitych $m$. | P | F |
| 2. | Funkcja $f$ jest funkcją stałą jedynie dla $m = 3$. | P | F |

**45.** Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = ax + b$ oraz $g(x) = cx + d$. Wskaż dwa zdania prawdziwe.

**A.** $a \cdot b < 0$

**B.** $a > c$

**C.** $c \cdot d < 0$

**D.** $b - d > 0$

**E.** $f(0) \cdot g(0) > 0$

**F.** $f(13) < b$

**G.** $g(-2) < c$

# 5.5. Funkcja kwadratowa

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$ określoną dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**.

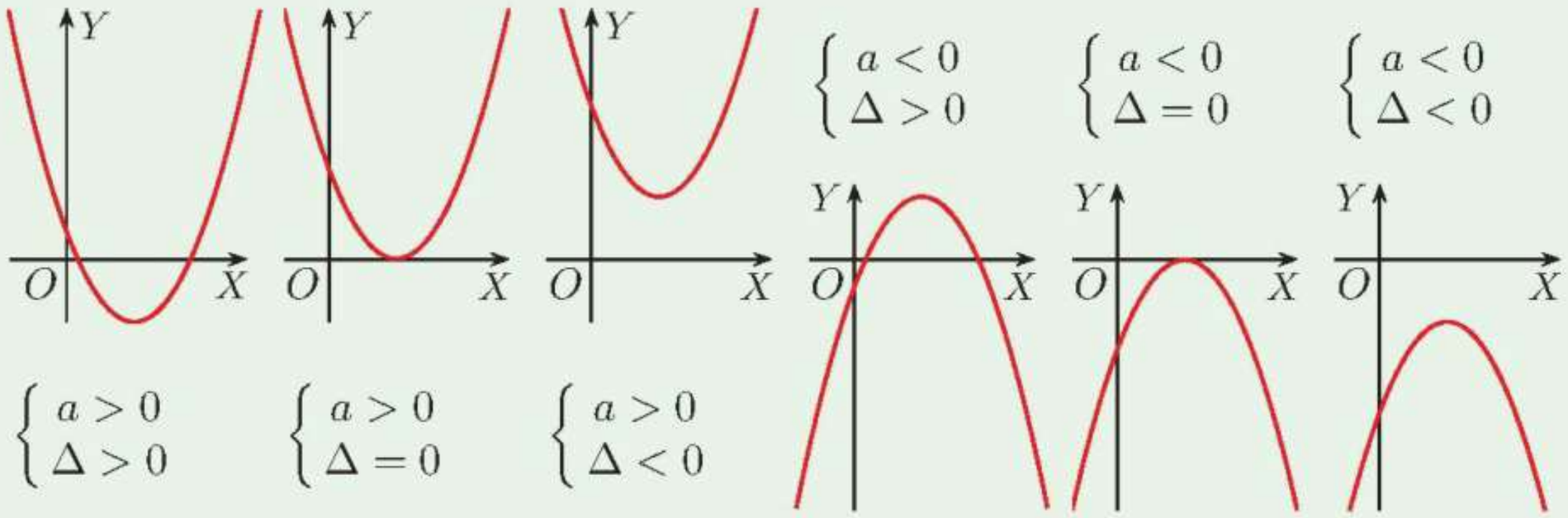
Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**.
Znak współczynnika $a$ decyduje o tym, czy ramiona paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

**Wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$.

**Miejsca zerowe funkcji kwadratowej** $y = ax^2 + bx + c$

- Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa różne miejsca zerowe:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$ (nazywamy je pierwiastkiem podwójnym).
- Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

**Położenie wykresu funkcji kwadratowej** $y = ax^2 + bx + c$ względem osi $OX$

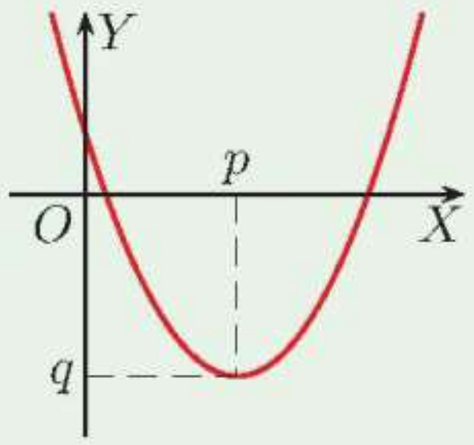



**Wzór funkcji kwadratowej**

- Postać **ogólna**: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$
- Postać **kanoniczna**: $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$

Punkt o współrzędnych $(p, q)$ jest wierzchołkiem paraboli oraz:

$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{i} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$



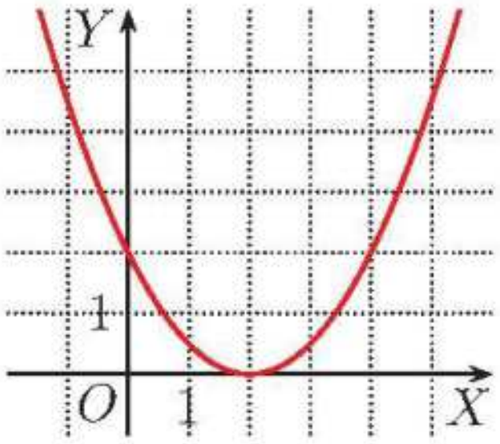

- Postać **iloczynowa**:

• jeśli $\Delta > 0$, to $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $x_1$ i $x_2$ są miejscami zerowymi;
• jeśli $\Delta = 0$, to $y = a(x - x_0)^2$, gdzie $x_0$ jest miejscem zerowym;
• jeśli $\Delta < 0$, to nie istnieje postać iloczynowa.

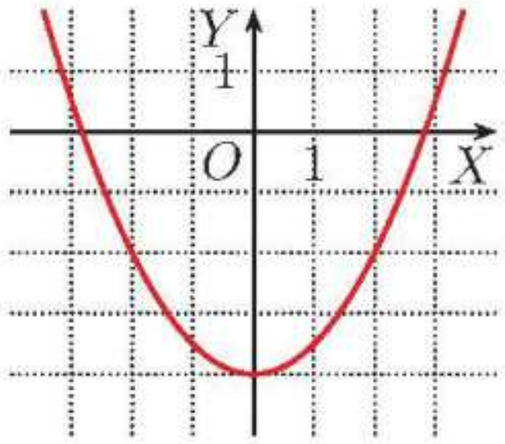
## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Podaj równanie paraboli przedstawionej na rysunku, jeżeli wiadomo, że powstała ona w wyniku przesunięcia paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$.

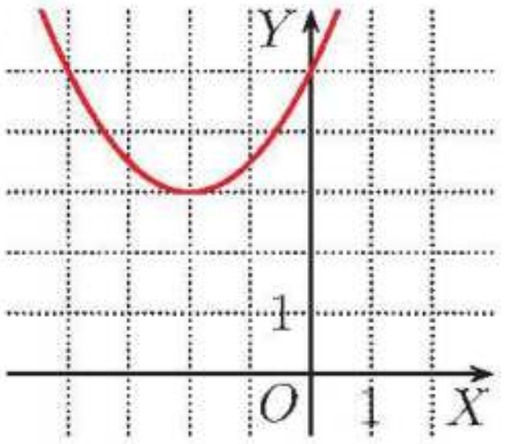
a)




b)




c)




**2.** Zapisz wzór funkcji $g$, której wykres otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ o 4 jednostki w prawo,

b) $f(x) = -2x^2$ o 0,5 jednostki w prawo i 2,5 jednostki w górę,

c) $f(x) = 0{,}4x^2$ o 1,5 jednostki w lewo i 0,2 jednostki w dół.

**3.** Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f$, $g$ i $h$.

a) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -(x-2)^2$, $h(x) = -(x-2)^2 + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$, $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$

**4.** Przedstaw wzór funkcji $f$ w postaci kanonicznej. Naszkicuj wykres tej funkcji i odczytaj z niego jej zbiór wartości.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 16$

b) $f(x) = x^2 - 4x$

c) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$

d) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

**5.** Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $W$. Oblicz współczynniki $b$ i $c$ oraz podaj zbiór wartości funkcji $f$.

a) $W(0,0)$

b) $W(-1,0)$

c) $W(0,-1)$

d) $W(1,4)$

e) $W(2,3)$

f) $W(-1,4)$

g) $W(4,1)$

h) $W(-1,-1)$

**6.** Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f$.

a) $f(x) = x^2 + 4\sqrt{2}x - 2$

b) $f(x) = -10x^2 + 200x + 3000$

**7.** Podany przedział jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + bx + 1$. Oblicz współczynnik $b$.

a) $\langle -3; \infty)$

b) $\langle 0; \infty)$

c) $\langle -8; \infty)$

**8.** Sprawdź, czy równanie ma rozwiązanie.

a) $x^2 - 3x + \sqrt{5} = 0$

b) $x^2 + 4x + 3\sqrt{2} = 0$

c) $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

**9.** Rozwiąż równanie.

a) $x(2x+1)=0$
b) $3x^2-6x=0$
c) $25x^2-1=0$
d) $x^2-3=0$
e) $x^2-6x+9=0$
f) $16x^2+8x+1=0$

**10.** Rozwiąż równanie.

a) $2x^2-3x+1=0$
b) $3x^2-3x-1=0$
c) $(x-4)^2=36$
d) $(2x+1)^2=16x^2$
e) $6x^2+4x-2=3x^2+3$
f) $\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$
g) $(x-3)(x-2)=(3-x)(x+2)$
h) $1-6x+9x^2=(1-3x)(1+3x)$

**11.** Wyznacz pierwiastki trójmianu i przedstaw go w postaci iloczynowej.

a) $y=6x^2+x-1$
b) $y=2x^2-5x+2$
c) $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{7}{2}$
d) $y=x^2+\sqrt{2}x-4$
e) $y=-9x^2+1$
f) $y=4x^2+9$

**12.** Przedstaw trójmian w postaci iloczynowej.

a) $y=-x^2+14x-49$
b) $y=-4x^2-12x-9$
c) $y=\frac{1}{4}x^2+2x+4$
d) $y=\frac{4}{3}x^2-4x+3$

**13.** Przedstaw trójmian w postaci iloczynowej. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych i wyznacz jej wierzchołek. Naszkicuj tę parabolę.

a) $y=x^2-6x+5$
b) $y=-x^2-4x-3$
c) $y=2x^2+2x$
d) $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$

**14.** Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f$ i zapisz jej wzór w postaci iloczynowej (o ile jest to możliwe). Naszkicuj wykres funkcji $f$ i odczytaj z niego, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie, a dla jakich – ujemne.

a) $f(x)=x^2+2x-24$
b) $f(x)=-x^2+3x+4$
c) $f(x)=3x^2-12x+9$
d) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$
e) $f(x)=x^2-6x+9$
f) $f(x)=-2x^2+4x-2$

**15.** Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2+x\leqslant 0$
b) $(x+7)^2>0$
c) $(2x+3)^2\leqslant 0$
d) $x^2-x+8>2$
e) $(x+2)(x-3)<6$
f) $(3-2x)(3+2x)\geqslant 1$
g) $\frac{3}{2}x+2\geqslant x^2$
h) $3x^2+1>2x$
i) $3x-5x^2>4$

**16.** Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające podaną nierówność.

a) $x^2\leqslant 16$
b) $9-x^2>0$
c) $x^2<4x$
d) $16+x^2\leqslant 8x$

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**17.** Funkcja $f$ dana jest wzorem $f(x) = (x-2)^2 + 1$. Wyznacz zbiór wartości funkcji $g$ oraz równanie osi symetrii jej wykresu.

a) $g(x) = f(x+1) - 1$ b) $g(x) = 1 - f(x)$ c) $g(x) = 1 - f(2-x)$

**18.** Wykres funkcji $f$ jest symetryczny do wykresu funkcji $g$ względem osi $OY$. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f$.

a) $g(x) = 2(x-2)^2 - 18$ b) $g(x) = (3x-1)^2 - (x+2)^2$

**19.** Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia paraboli o równaniu $y = (x+1)(x-2)$ przez:

a) symetrię względem osi $OX$, b) symetrię względem osi $OY$.

**20.** Wykres funkcji kwadratowej $f$, do którego należą punkty $A$ i $B$, jest osiowosymetryczny względem prostej $x = 1$. Zapisz wzór funkcji $f$ w postaci kanonicznej oraz podaj współrzędne wierzchołka jej wykresu.

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 6)$ b) $A(0, 0)$, $B(3, 6)$

**21.** Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych parabolę $y = -x^2 + 3$ oraz prostą $k$. Odczytaj współrzędne punktów przecięcia paraboli i prostej $k$.

a) $k$: $y = x + 1$ c) $k$: $y = 2x$ e) $k$: $y = -x - 3$

b) $k$: $y = -x + 1$ d) $k$: $y = 2x + 3$ f) $k$: $y = -3x + 5$

**22.** Wyznacz punkty wspólne paraboli i prostej.

a) $y = -6x^2 + 7x + 6$, $y = 1 - 6x$ b) $y = 3x^2 - 2x + 7$, $y = 4x - 4$

**23.** Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 - x + 3$ i $g(x) = x + 7$. Rozwiąż nierówność.

a) $f(x) \leqslant g(x)$ b) $f(x) + x \cdot g(x) \leqslant 0$ c) $f(x) + g(x) > 0$

**24.** Wyznacz dziedzinę funkcji $f$.

a) $f(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$ b) $f(x) = \sqrt{6 - 5x - 6x^2}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}$

**25.** Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R}\colon x^2 - 4x + 1 \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon 3x - x^2 \geqslant 0\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R}\colon x^2 + 3x + 1 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon x^2 - 5x + 4 < 0\}$

**26.** Naszkicuj wykres funkcji $f$. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f$ w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^2 - 2x$, $\langle -1; 3\rangle$ c) $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $\langle -4; -3\rangle$

b) $f(x) = -x^2 - 2x$, $\langle 0; 2\rangle$ d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$, $\langle 0; 3\rangle$

**27.** Dana jest funkcja $f(x) = a(x-7)(x+1)$, której najmniejsza wartość jest równa $-4$. Oblicz współczynnik $a$ oraz wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f$.

**28.** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, jeżeli wiadomo, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W(1,2)$ oraz:

a) jednym z miejsc zerowych jest 0, b) należy do niej punkt $A(3,4)$.

**29.** Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 5x + c$. Oblicz współczynnik $c$, jeśli:

a) do wykresu funkcji $f$ należy punkt $P(-2,1)$,

b) funkcja $f$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe,

c) najmniejsza wartość funkcji $f$ jest równa $-\frac{5}{4}$.

**30.** Oblicz współczynniki $b$ i $c$ trójmianu $y = x^2 + bx + c$, jeśli:

a) trójmian ten ma dwa pierwiastki 2 i $-5$,

b) trójmian ten osiąga najmniejszą wartość równą 7 dla $x = -1$,

c) trójmian ten przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-1;4)$,

d) wykres tego trójmianu jest symetryczny względem prostej $x = 3$ i przecina oś $OY$ w punkcie $(0,5)$.

**31.** Wyznacz wszystkie wartości współczynnika $c$, dla których funkcja $f$ ma dwa różne miejsca zerowe.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x - c$

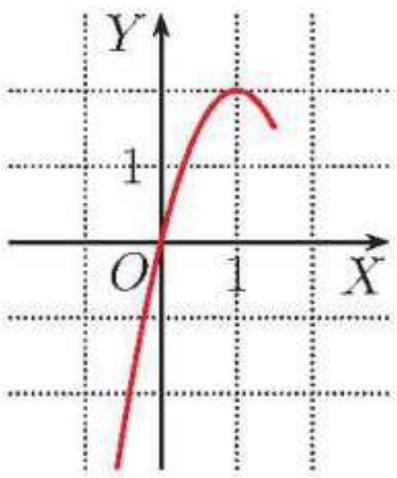
b) $f(x) = -x^2 + 5x + c$ d) $f(x) = x^2 - x - c$

**32.** Wyznacz wszystkie wartości współczynnika $b$, dla których funkcja $f$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

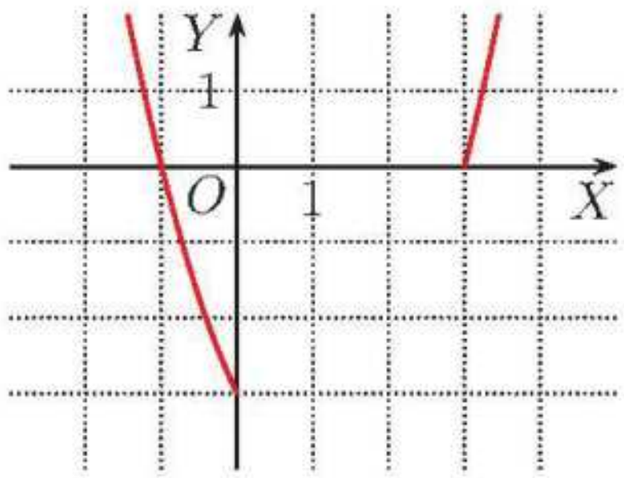
a) $f(x) = x^2 + bx + 3$ b) $f(x) = x^2 + bx - 4$ c) $f(x) = 2x^2 + bx$

**33.** Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej $f$. Podaj jej miejsca zerowe oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant 0$. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f$, przedziały monotoniczności oraz zapisz jej wzór w postaci iloczynowej i kanonicznej.

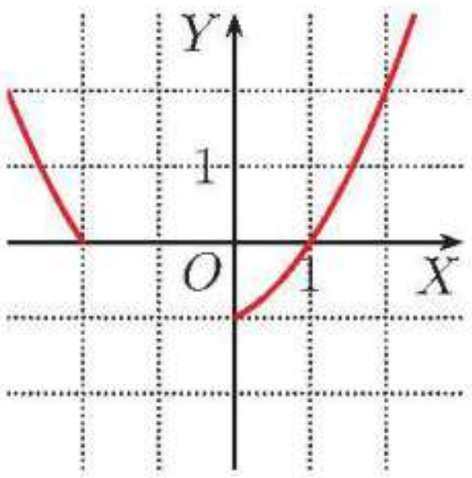
a)




b)




c)



## Zestaw III – podsumowujący

**34.** Prosta o równaniu $y = m$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z podaną parabolą. Oblicz $m$.

a) $y = x^2 - 4$ b) $y = -x^2 + 4x$ c) $y = x^2 + 5x - 7$

**35.** Określ liczbę punktów wspólnych prostej $l$ i paraboli będącej wykresem funkcji $f$.

a) $l: y = 3$, $f(x) = -x^2 + 4$ c) $l: y = -5$, $f(x) = x^2 - 6x + 2$

b) $l: y = 4$, $f(x) = 2x^2 + 6$ d) $l: y = -20$, $f(x) = x^2 + 8x - 4$

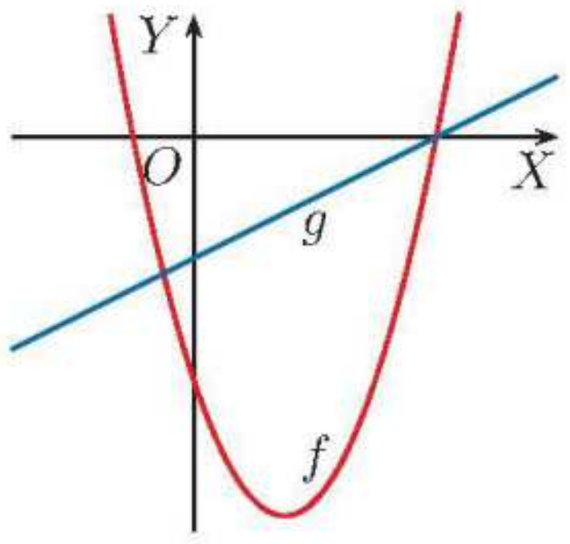
**36.** Naszkicuj prostą $l$ i parabolę będącą wykresem funkcji $f$. Odczytaj współrzędne punktów wspólnych prostej i paraboli.

a) $l: y = x + 4$, $f(x) = -x^2 - 4x$ b) $l: y = x - 3$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$

**37.** Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 3x - 4$ i $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

a) Wyznacz punkty wspólne tych wykresów.

b) Dla jakich argumentów $x$ funkcja $f$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $g$?




**38.** Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x^2 + 5 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x + 4 \end{cases}$

**39.** Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x - 3 \\ x + y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$

**40.** Rozwiąż równanie.

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ c) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ e) $x^4 + 20 = 9x^2$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ d) $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ f) $x^4 + x^2 = 12$

**41.** Rozwiąż równanie.

a) $(x-1)^4 - 8(x-1)^2 + 15 = 0$ c) $(x+2)^4 - 6(x+2)^2 + 8 = 0$

b) $(x-3)^4 - 3(x-3)^2 - 18 = 0$ d) $(x+5)^4 + 5(x+5)^2 - 6 = 0$

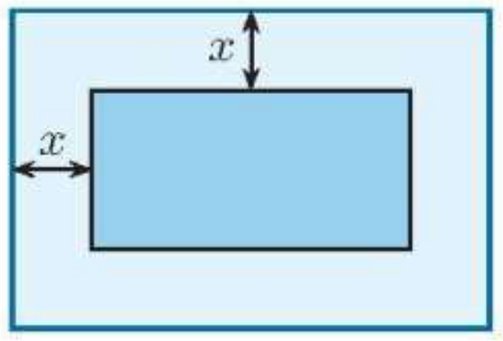
**42.** Kwadratowy trawnik o powierzchni 144 $m^2$ powiększono w ten sposób, że jeden bok wydłużono o $x$ m, a drugi – o $2x$ m i otrzymano trawnik o powierzchni 202,5 $m^2$. Oblicz $x$.

**43.** Znajdź dwie liczby, których suma jest równa 3 oraz:

a) suma ich kwadratów jest równa 65,

b) różnica ich kwadratów jest równa 33.

**44.** Wokół basenu o wymiarach 9 m $\times$ 4 m wyłożono kafelkami pas szerokości $x$. Jaka jest szerokość tego pasa, jeśli wiadomo, że zużyto 68 m$^2$ kafelków?



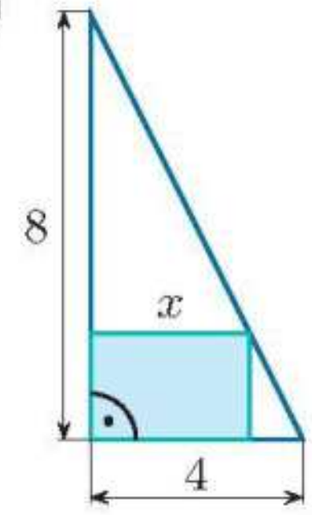

**45.** Wyznacz najmniejszą wartość sumy kwadratów liczb $x$ i $y$, jeśli:

a) $x + y = 3$, b) $x - y = 6$, c) $2x - y = 0$.

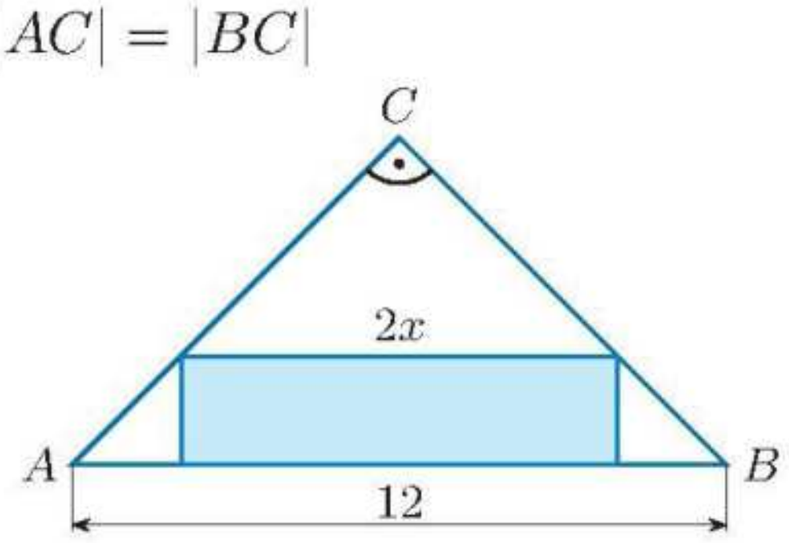
**46.** Drut o długości 68 cm dzielimy na dwie części – z jednej tworzymy ramkę kwadratową, a z drugiej – prostokątną. Stosunek długości boków ramki prostokątnej wynosi 3 : 1. Na części jakiej długości należy rozciąć drut, aby suma pól powierzchni ograniczonych przez ramki była najmniejsza?

**47.** Przedstaw pole $P$ prostokąta (rysunek poniżej) jako funkcję zmiennej $x$. Podaj dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres. Dla jakiego argumentu pole jest największe? Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu.

a)




b) $|AC| = |BC|$




**48.** Obwód prostokąta jest równy 24 cm. Jakie powinny być długości jego boków, aby walec, który powstanie przez obrót tego prostokąta wokół jednego z boków, miał jak największe pole powierzchni bocznej?

**49.** Punkt porusza się wzdłuż osi $OX$, a jego położenie w chwili $t$ dane jest wzorem $x(t) = 4t^2 + t$, gdzie $x$ wyrażone jest w metrach, a $t$ – w sekundach. Oblicz średnią prędkość punktu od chwili $t_1$ do chwili $t_2$.

a) $t_1 = 0$ s, $t_2 = 1$ s b) $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s c) $t_1 = 0$ s, $t_2 = 2$ s

**50.** Rowerzysta przejechał z miasta $A$ do miasta $B$ odległego od $A$ o 54 km. Wzór $s(t) = 36t - 6t^2$ opisuje długość $s$ (w kilometrach) drogi pokonanej przez rowerzystę po $t$ godzinach jazdy.

a) Oblicz, ile czasu jechał rowerzysta.

b) Oblicz średnie prędkości rowerzysty w pierwszej i w drugiej godzinie jazdy oraz na całej trasie (w km/h).

**51.** Z wysokości 5 m wypuszczono z łuku pionowo do góry strzałę z prędkością początkową 50 m/s. Wysokość strzały nad ziemią (w metrach) można przybliżyć wzorem:

$$h(t) = 5 + 50t - 5t^2$$

gdzie $t$ jest czasem lotu strzały (w sekundach).

a) Określ dziedzinę funkcji $h$.

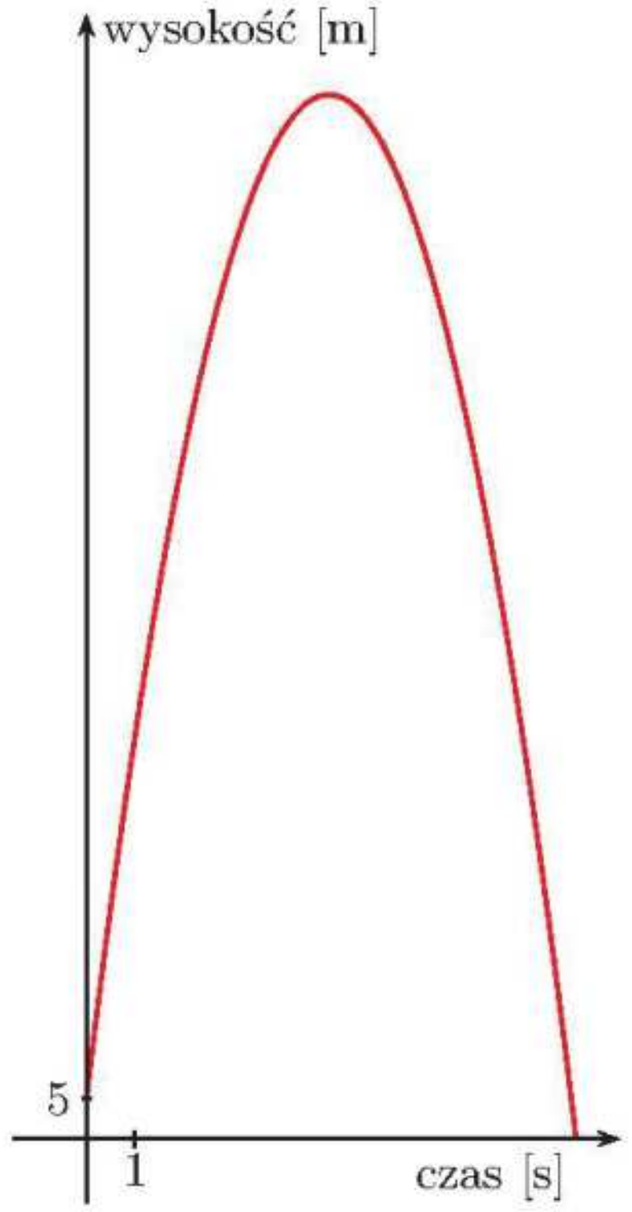
b) Przerysuj tabelę wartości funkcji $h$ do zeszytu i ją uzupełnij.

| $t$ [s] | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ [m] | 50 | 85 | ? | ? | ? | 125 | 110 | 85 | 50 |

c) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie wysokość, z której ją wypuszczono?

d) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie największą wysokość?

e) Na jaką największą wysokość doleci strzała?




**52.** Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = -2x^2 - bx + \frac{1}{4}$ dla każdej liczby rzeczywistej.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja $f$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A. | nie ma miejsc zerowych, | ponieważ | 1. | $b^2 + 2 > 0$. |
| B. | ma jedno miejsce zerowe, | | 2. | $b^2 + 2 = 0$. |
| C. | ma dwa miejsca zerowe, | | 3. | $b^2 + 2 < 0$. |

**53.** Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 - x + 3$ i $g(x) = x - 7$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Równanie $f(x) + g(x) = 0$ jest spełnione przez dwie liczby całkowite. | P | F |
| 2. | Nierówność $f(x) + g(x) < 0$ jest spełniona przez trzy liczby całkowite. | P | F |

# 5.6. Wielomiany

Funkcję zmiennej rzeczywistej $x$ daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, nazywamy **wielomianem** stopnia $n$.
Funkcję $w$ stale równą zero nazywamy **wielomianem zerowym** ($w \equiv 0$) i jego stopnia nie określamy.
Liczby $a_n$, $a_{n-1}$, ..., $a_1$, $a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu, a współczynnik $a_0$ – **wyrazem wolnym**.
Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Liczbę $a$ nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu $w$, jeśli $w(a) = 0$.

**Twierdzenie o reszcie**
Jeśli $r$ jest resztą z dzielenia wielomianu $w$ przez dwumian $x - a$, to $r = w(a)$.

**Twierdzenie Bézouta**
Liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $w$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $w$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

**Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych**
Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego $a_0$.

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Oblicz wartości wielomianu $w$ dla $x = -2$, $x = 0$ i $x = 2$.

a) $w(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 6$
b) $w(x) = -2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x + 2$
c) $w(x) = 0{,}25x^4 - 0{,}5x^2 + 2x - 1$
d) $w(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + x + 2$

**2.** Które z punktów $P$, $Q$ i $R$ należą do wykresu wielomianu $w$?

a) $w(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, $P(1, -4)$, $Q(-1, 6)$, $R\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
b) $w(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6$, $P(-2, 8)$, $Q\left(\sqrt{2}, 9 - 4\sqrt{2}\right)$, $R(-\sqrt{2}, 7 + 4\sqrt{2})$

**3.** Oblicz $w(x_0, y_0)$.

a) $w(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^3 + 3x^2y - 4xy^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$
b) $w(x, y) = -2x^3y^3 - 2xy^3 + 2xy - 2$, $x_0 = -2$, $y_0 = \frac{1}{2}$
c) $w(x, y) = 16x^4y^2 - 8x^3y + 4y^3 + 1$, $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{2}$

**4.** Oblicz współczynnik $a$ wielomianu $w$.

a) $w(x) = x^2 - ax + 2, \;\; w(2) = 4$

b) $w(x) = x^3 - 2x^2 + a, \;\; w(0) = -2$

c) $w(x) = ax^3 - 5x^2 + x, \;\; w(1) - w(-1) = \frac{3}{2}$

**5.** Oblicz współczynniki $a$ i $b$ wielomianu $w$.

a) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + ax + b, \;\; w(0) = 5, \; w(1) = -3$

b) $w(x) = ax^3 + x^2 + bx + 2, \;\; w(-3) = 11, \; w(2) = \frac{8}{3}$

c) $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 10, \;\; w(2) = -w(1), \; w(-2) = 16$

**6.** Oblicz współczynniki $a$ i $b$ wielomianu $w(x) = ax^{100} + 5x^{50} - 10x^{25} + b$, jeżeli wiadomo, że $w(1) = 3$ i $w(0) = -2$.

**7.** a) Wyznacz współczynnik $a$ wielomianu $w(x) = \sqrt{2}x^4 + ax^2 + 1 - \sqrt{2}$, jeżeli wiadomo, że $w(\sqrt{2}) - 4w(1) = 3\sqrt{2}$.

a) Wielomian $w(x) = -2x^4 + ax^2 + 2x + b$ spełnia warunki $w(1) = -w(-1)$ oraz $w(\sqrt{2}) = -w(-\sqrt{2})$. Wyznacz współczynniki $a$ i $b$.

**8.** Dane są wielomiany $w(x) = 2x^2 - 1$ i $u(x) = 3x^3 - x^2$. Wyznacz wielomian $k$ i podaj jego stopień.

a) $k(x) = u(x) + w(x)$

b) $k(x) = u(x) - w(x)$

c) $k(x) = w(x) + 2u(x)$

d) $k(x) = 3x \cdot w(x) - 2u(x)$

**9.** Dla jakich wartości $a$ i $b$ wielomiany $u$ i $w$ mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach?

a) $u(x) = 8x^3 - a, \;\; w(x) = (b+2)x^3 + 1$

b) $u(x) = x(x+a)^2 + b, \;\; w(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

c) $u(x) = x(ax - b)^2 + b, \;\; w(x) = 9x^3 + 6x^2 + x + 1$

**10.** Dane są wielomiany $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$ oraz $h(x) = 3 - x^3$. Wyznacz wielomian $w$ i podaj jego stopień.

a) $w(x) = f(x) \cdot g(x) + g(x) \cdot h(x)$

b) $w(x) = [h(x)]^2 - f(x)$

c) $w(x) = [f(x) - g(x)]^2 - h(x)$

**11.** Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = 2w(x) - [u(x)]^2$.

a) $u(x) = x^2 - 5x, \;\; w(x) = x^3 + x^2 + 2$

b) $u(x) = 2x^3 - x^2 + 2, \;\; w(x) = -5x^4 + x^2 - 3$

c) $u(x) = -2x^3 + 2x^2 - x + 1, \;\; w(x) = 4x^2 - x + 2$

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**12.** Wyznacz wielomian $v(x,y) = u(x,y) - [w(x,y)]^2$. Oblicz wartość wielomianu $v$ dla $x = 2$ i $y = \sqrt{2}$.

a) $u(x,y) = x^2y^2 - 3x^2y + 4, \;\; w(x,y) = xy^2 + 2xy$

b) $u(x,y) = \frac{1}{2}x^3y^2 + 2x^2y^2 - 4xy^3, \;\; w(x,y) = 2x - y^2 + xy$

**13.** Dla jakich wartości $m$ i $n$ wielomiany $u$ i $w$ mają takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej $x$?

a) $u(x) = (x^2 + 5x - 1)(x^2 - x), \;\; w(x) = mx^4 + nx^3 - 6x^2 + x$

b) $u(x) = (1 + x - x^3)(5x^3 + x + 5), \;\; w(x) = 6x + 5 - x^2(mx^4 + nx^2 - 1)$

c) $u(x) = (x^4 - m + 1)(2x^3 - x), \;\; w(x) = (mx^2 - n)(x^5 - x)$

**14.** Rozłóż wielomian $w$ na czynniki.

a) $w(x) = 9x^3 - x$

b) $w(x) = 50x^4 - 8x^2$

c) $w(x) = 12x^3 - 27x^5$

d) $w(x) = \frac{1}{8}x^6 - x^4$

e) $w(x) = 5x^5 - 20x^3$

f) $w(x) = x^5 - 125x^2$

**15.** Rozłóż wielomian $w$ na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 10x^3 + 25x^2$

b) $w(x) = 9x^4 + 6x^3 + x^2$

c) $w(x) = 2x^5 + 4x^4 - 6x^3$

d) $w(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

e) $w(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3$

f) $w(x) = -5x^5 + 30x^4 - 45x^3$

**16.** Rozłóż wielomian $w$ na czynniki.

a) $w(x) = (x^2 + x + 4)(x^2 + 6x - 7)$

b) $w(x) = (3x^2 + 5x - 2)(3x^2 + 2x - 1)$

c) $w(x) = (x^2 + 1)^2 - (x - 3)^2$

d) $w(x) = (2x^2 - x)^2 - (x - 4x^3)^2$

**17.** Rozłóż wielomian na czynniki. Skorzystaj z podanego wzoru.

a) $w(x) = x^5 - 1$

b) $w(x) = 32x^5 - 1$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)$$

**18.** Rozłóż wielomian $w$ na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $w(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

b) $w(x) = x^5 + x^4 - x - 1$

c) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$

d) $w(x) = 6x^3 - 9x^2 + 4x - 6$

e) $w(x) = 27x^3 - 9x^2 - 3x + 1$

f) $w(x) = 4x^6 - 9x^4 - 16x^2 + 36$

**19.** Rozłóż wielomian $w$ na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $w(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

b) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

c) $w(x) = 27x^3 - 6x^2 - 2x + 1$

d) $w(x) = 3x^4 - 10x^3 + 10x - 3$

e) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 6x - 4$

f) $w(x) = 4x^4 + 2x^3 + x - 1$

**20.** Rozwiąż równanie.

a) $3x^5 = 12x^3$
b) $5x^5 = 20x$
c) $x^6 = (2x)^3$
d) $27x^7 = -8x^4$
e) $\frac{1}{2}x^5 = 32x^2$
f) $x^2 = \sqrt{2}x^5$

**21.** Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$
b) $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 = 0$
c) $x^5 - 6x^4 = 7x^3$
d) $8x^6 + 15x^5 = 2x^4$
e) $x^4 + 2x^2 = 4x^3$
f) $x^5 + x^3 = 2\sqrt{5}x^4$

**22.** Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
b) $x^3 + 5x^2 + 3x + 15 = 0$
c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$
d) $4x^3 - 8x^2 = x - 2$
e) $12x^3 - 2 = 3x^2 - 8x$
f) $5x^3 + 2 = x^2 + 10x$

**23.** Rozwiąż równanie.

a) $2x^4 - x^3 + 16x - 8 = 0$
b) $x^4 - 3x^3 = 3 - x$
c) $x^4 - x^3 = 8x - 8$
d) $27x^4 - x = 9x^3 - \frac{1}{3}$

**24.** Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 2\sqrt{3}x^2 - x + 2\sqrt{3} = 0$
b) $x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 4x - 12\sqrt{2} = 0$
c) $3\sqrt{3}x^3 - x^2 - 6\sqrt{3}x + 2 = 0$
d) $x^3 + \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$

## Zestaw III – podsumowujący

**25.** Wykonaj dzielenie wielomianu $w$ przez dwumian $q$. Czy wielomian $w$ jest podzielny przez dwumian $q$?

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5, \ \ q(x) = x - 1$
b) $w(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 6, \ \ q(x) = x - 2$
c) $w(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 1, \ \ q(x) = x + 3$
d) $w(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x - 4, \ \ q(x) = x + 4$
e) $w(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 9x + 9, \ \ q(x) = x - 3$

**26.** Wykonaj dzielenie wielomianu $w$ przez dwumian $q$. Zapisz wielomian $w$ w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 5, \ \ q(x) = x - 5$
b) $w(x) = -x^3 + 2x - 5, \ \ q(x) = x + 2$
c) $w(x) = 2x^3 - 8x^2 + 3x, \ \ q(x) = x - 4$
d) $w(x) = 5x^4 + x, \ \ q(x) = x + 1$
e) $w(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 5, \ \ q(x) = x - \frac{1}{2}$

**27.** Wykonaj dzielenie wielomianu $w$ przez dwumian $q$. Zapisz wielomian $w$ w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 2, \;\; q(x) = 2x - 1$

b) $w(x) = 16x^4 - x^2 + 2x, \;\; q(x) = 4x + 3$

c) $w(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2, \;\; q(x) = 3x - 2$

d) $w(x) = x^4 - 4x^2 + 3x + 5, \;\; q(x) = \frac{1}{2}x + 1$

**28.** Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ przez dwumian $q$.

a) $q(x) = x - 2$ b) $q(x) = x + 2$ c) $q(x) = x - \sqrt{2}$

**29.** Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w$ przez dwumian $q$, nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = x^4 - 5x^2 + 7, \;\; q(x) = x + 2$

b) $w(x) = -2x^3 + 6x^2 + 2x - 8, \;\; q(x) = x - 3$

c) $w(x) = 8x^4 - 10x^3 + x - 3, \;\; q(x) = x + \frac{1}{2}$

d) $w(x) = 27x^3 - 3x^2 + 4, \;\; q(x) = 3x - 1$

**30.** Nie wykonując dzielenia, sprawdź, czy wielomian:

$$w(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$$

jest podzielny przez dwumian $q$.

a) $q(x) = x + 1$ c) $q(x) = x + 3$ e) $q(x) = x + 5$

b) $q(x) = x + 2$ d) $q(x) = x - 4$ f) $q(x) = x - 6$

**31.** Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian $w$ jest podzielny przez dwumian $q$.

a) $w(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2, \;\; q(x) = x - 1$

b) $w(x) = 3x^4 + x^3 - 4x^2 - 7x - 5, \;\; q(x) = x + 1$

c) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 3, \;\; q(x) = x - 2$

d) $w(x) = -x^3 - 4x^2 + 4x - 5, \;\; q(x) = x + 5$

**32.** Liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $w$. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian $w$ na czynniki.

a) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, \;\; a = -1$

b) $w(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7, \;\; a = 7$

c) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6, \;\; a = 2$

d) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 6x + 20, \;\; a = -5$

**33.** Dla jakich wartości $m$ wielomian $w$ jest podzielny przez dwumian $q$?

a) $w(x) = 2x^3 + mx^2 - 4x + 3$, $q(x) = x - 1$

b) $w(x) = mx^3 - x^2 + 2m^2x + 16$, $q(x) = x + 2$

c) $w(x) = -x^3 + mx^2 + 4x + m^2 + 23$, $q(x) = x - 3$

**34.** Współczynniki wielomianu $w(x) = x^5 + a_4x^4 + \ldots + a_1x + a_0$ są liczbami całkowitymi. Które z liczb $-3$, 0, 1, 2, 5 nie mogą być pierwiastkami wielomianu $w$, jeżeli:

a) $a_0 = 4$, b) $a_0 = 6$, c) $a_0 = 15$?

**35.** Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + x^2 - 3 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$

c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

d) $2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$

e) $x^3 + 6x^2 = -6x - 5$

f) $3x^3 - x = 12 - 10x^2$

g) $3x^3 + 4 = 5x^2 + 4x$

h) $5x^3 - 19x^2 = 38x - 40$

**36.** Wyznacz pierwiastki wielomianu $w$ i rozłóż go na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 14x - 8$

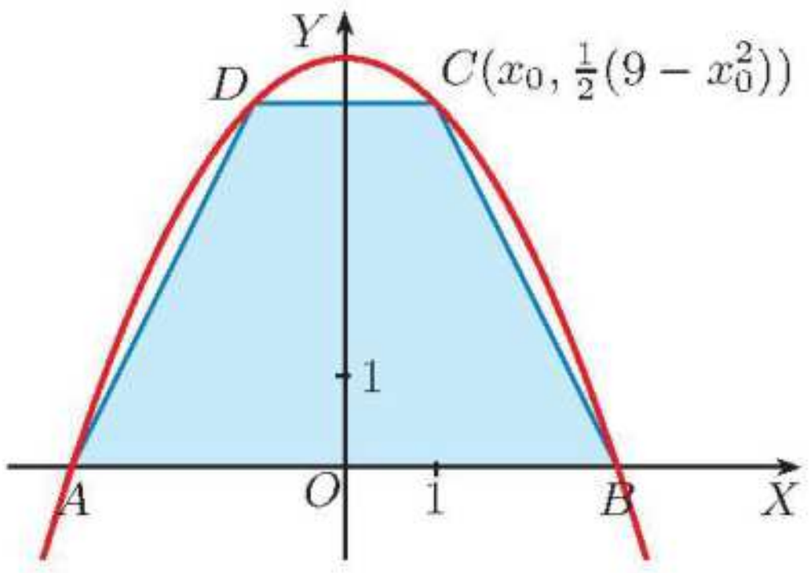
c) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

d) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

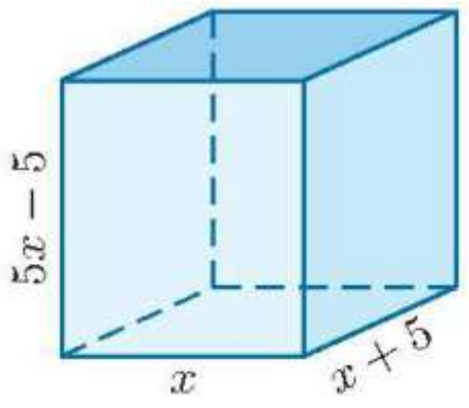
**37.** a) Wielomian $w(x) = 2x^3 + mx^2 + 2x - 3$ można zapisać w postaci $w(x) = (x + 1)p(x)$, gdzie $p$ jest trójmianem kwadratowym. Wyznacz współczynnik $m$ oraz wszystkie pierwiastki wielomianu $w$.

b) Wielomian $w(x) = 3x^3 - 4x^2 + mx + 6$ można zapisać w postaci $w(x) = (x - 3)p(x)$, gdzie $p$ jest trójmianem kwadratowym. Wyznacz współczynnik $m$ oraz wszystkie pierwiastki wielomianu $w$.

**38.** Wierzchołki trapezu $ABCD$ należą do paraboli $y = \frac{1}{2}(9 - x^2)$. Punkty $A$ i $B$ są punktami przecięcia paraboli z osią $OX$, a punkty $C$ i $D$ leżą powyżej osi $OX$. Wyznacz wielomian opisujący pole trapezu w zależności od $x_0$ (rysunek obok). Podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości $x_0$ pole trapezu jest równe 16?



**39.** Dany jest prostopadłościan (rysunek obok).




a) Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od $x$. Podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu dla $x = 5$.

c) Wyznacz wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu. Podaj dziedzinę tej funkcji.

**40.** Krawędzie prostopadłościanu mają długości $2x$, $x-2$, $x-1$. Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od $x$. Podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości $x$ objętość prostopadłościanu jest równa 12?

**41.** Krawędzie prostopadłościanu mają długości 1, 2 i 3. Po wydłużeniu każdej z nich o ten sam odcinek równy $x$ otrzymano drugi prostopadłościan.

a) Wyznacz wielomian $w$ zmiennej $x$ opisujący różnicę objętości większego i mniejszego prostopadłościanu. Podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakiej wartości $x$ różnica objętości tych prostopadłościanów jest równa 54?

**42.** Krawędzie prostopadłościanu mają długości 3, 5 i 7. Po wydłużeniu każdej z nich o ten sam odcinek równy $x$ otrzymano drugi prostopadłościan.

a) Wyznacz wielomian $w$ zmiennej $x$ opisujący objętość powstałego prostopadłościanu. Podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Oblicz $x$, jeśli wiadomo, że objętość drugiego prostopadłościanu jest trzykrotnie większa od objętości pierwszego.

**43.** Dany jest wielomian $w(x) = \left(1 - \sqrt{2}x\right)^3$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $w(\sqrt{18})$ jest liczbą wymierną. | P | F |
| 2. | $w(\sqrt{2}-1) = 5\sqrt{2} - 7$ | P | F |

**44.** Miejscem zerowym wielomianu $w(x) = x^3 - m - 6\sqrt{3}$ jest liczba $\sqrt{3}+1$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Współczynnik $m$ jest równy:

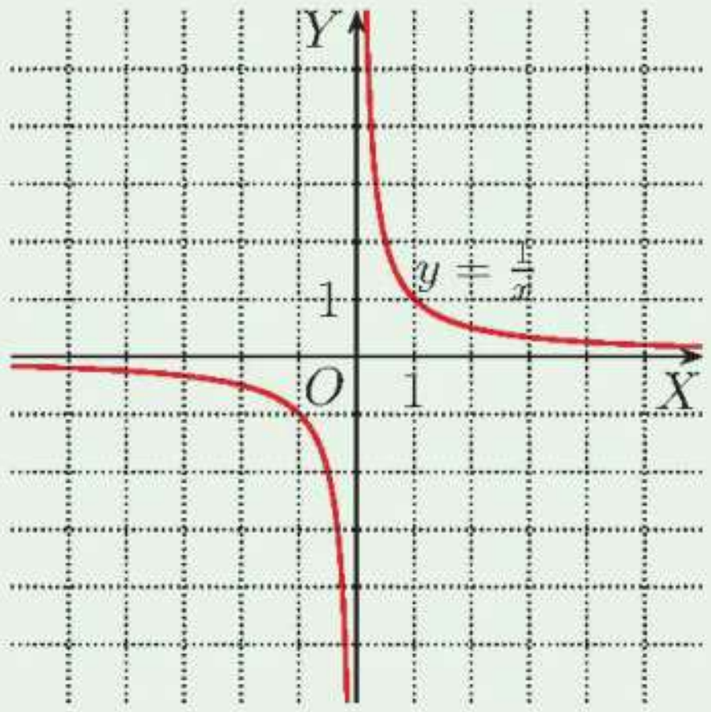
**A.** $6 - \sqrt{3}$, **B.** $2\sqrt{3} - 9$, **C.** 6, **D.** 10.

# 5.7. Funkcje wymierne

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}_+$ oraz $a$ jest stałą dodatnią, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**, wielkości $x$ i $y$ – **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą $a$ – **współczynnikiem proporcjonalności.**

Wykresem funkcji $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $a \neq 0$, jest **hiperbola.**

Prosta $y = 0$ jest jej **asymptotą poziomą**, a prosta $x = 0$ – jej **asymptotą pionową.**




Funkcję postaci $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$, gdzie $v$ i $w$ są wielomianami oraz $w$ nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $x$, dla których $w(x) \neq 0$.

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, wiedząc, że wielkości $x$ i $y$ są odwrotnie proporcjonalne.

| $x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | $2\sqrt{3}$ | ? | ? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ? | ? | ? | ? | ? | ? | $2\sqrt{3}$ | 3 | $\frac{1}{2}$ |

**2.** W szafce ustawiono 120 słoików w taki sposób, że na każdej półce stoi tyle samo słoików. Wyznacz wzór funkcji $y = f(x)$ opisującej zależność liczby półek $y$ od liczby słoików $x$ stojących na jednej półce.

a) Podaj dziedzinę funkcji $f$.

b) Oblicz $f(6)$ i $f(24)$.

c) Dla jakiego argumentu funkcja $f$ przyjmuje wartość 8?

d) Czy można ustawić po 9 słoików na każdej półce?

**3.** Do wykresu proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$ należy punkt $A$. Wyznacz jej wzór.

a) $A(-1, 5)$ b) $A(3, 2)$ c) $A\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ d) $A\left(\sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$

**4.** Naszkicuj wykres funkcji $f$.

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{6}{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2x}$ d) $f(x) = -\frac{3}{2x}$

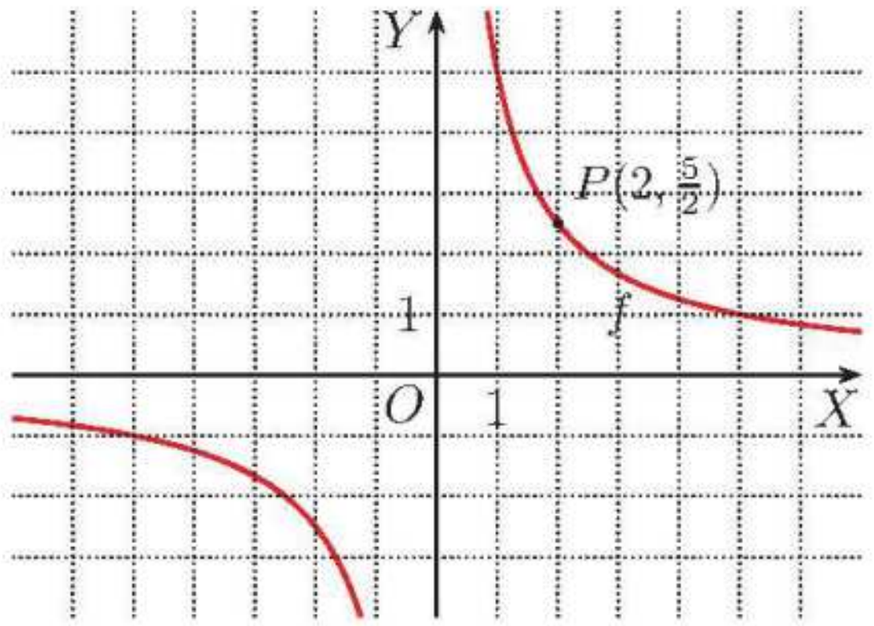
**5.** Naszkicuj wykres funkcji $f$. Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale $\langle 1; 2\rangle$.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = -\frac{2}{x}$ c) $f(x) = \frac{4}{x}$ d) $f(x) = -\frac{3}{x}$

**6.** Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz $a$.

a) Które spośród punktów $A(-5, 2)$, $B(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ i $C(\frac{1}{4}, -20)$ nie należą do wykresu funkcji $f$?

b) Podaj zbiór tych argumentów, dla których funkcja $f$ przyjmuje wartości mniejsze od 1.




**7.** Naszkicuj wykres funkcji $f$ i podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{6}{x}$ b) $f(x) = -\frac{8}{x}$

**8.** Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ jest przedział $\langle 1; 6\rangle$. Wyznacz $a$, jeżeli wiadomo, że:

a) największa wartość funkcji $f$ jest równa 5,

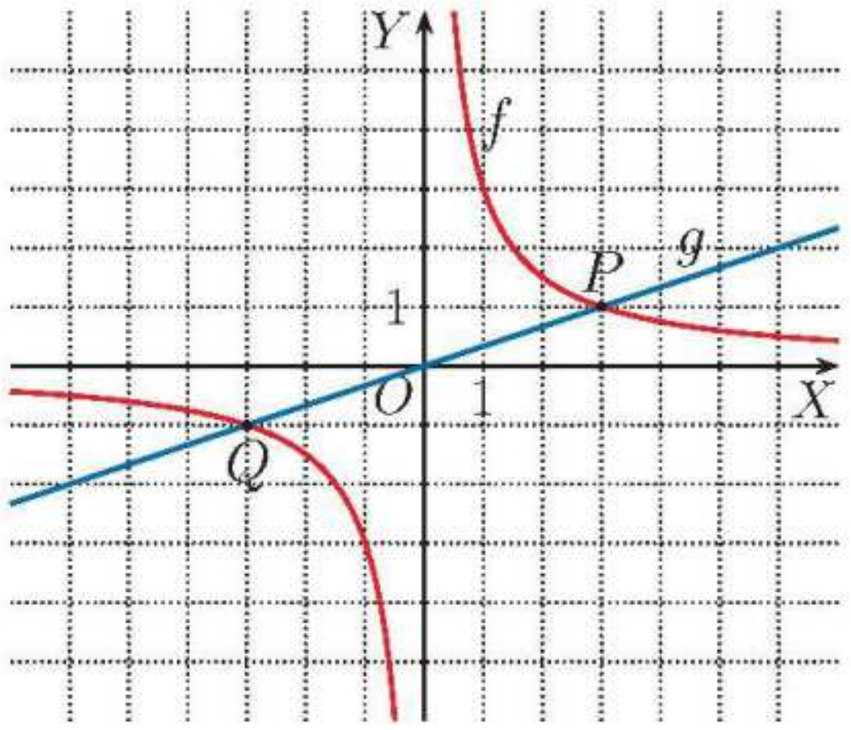
b) najmniejsza wartość funkcji $f$ jest równa $\frac{1}{4}$,

c) najmniejsza wartość funkcji $f$ jest równa $-4$.

**9.** Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ i $g(x) = bx$ przecinają się w punktach $P(3, 1)$ i $Q$ (rysunek obok).

a) Wyznacz $a$ i $b$.

b) Odczytaj z rysunku rozwiązania równania $f(x) = g(x)$ oraz nierówności $f(x) \leqslant g(x)$.




**10.** Naszkicuj wykresy funkcji $f$ i $g$. Podaj ich punkty wspólne.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = x + 1$ b) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = x - 4$

**11.** Prostopadłościan o podstawie kwadratowej ma pole powierzchni bocznej równe 48 dm$^2$. Podaj wzór opisujący zależność między wysokością $y$ tego prostopadłościanu a krawędzią $x$ jego podstawy.

a) Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres tej zależności.

b) Jakie są wymiary tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest o 200% dłuższa od długości krawędzi podstawy?

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**12.** Naszkicuj wykres funkcji $f$. Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości oraz odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności tej funkcji.

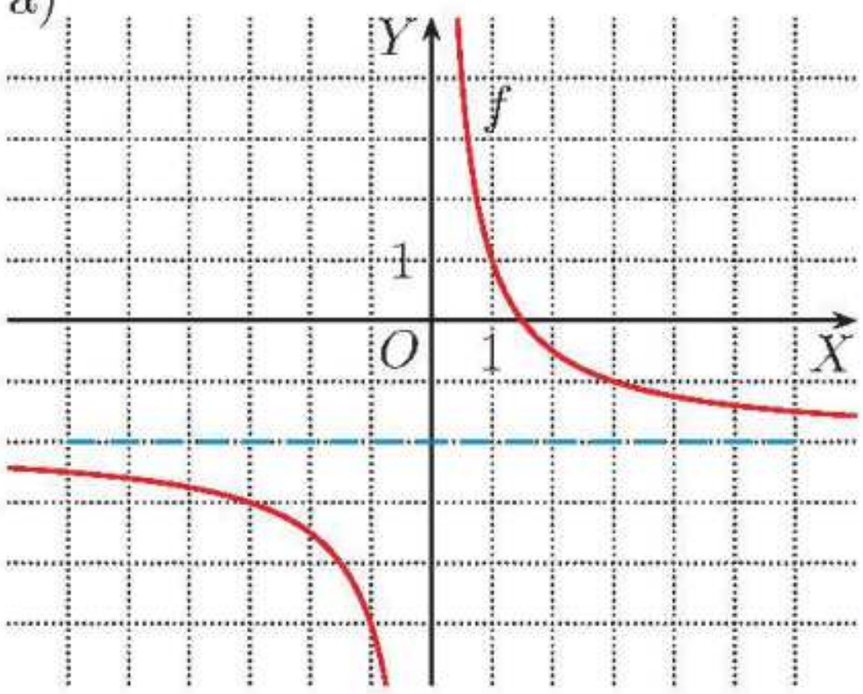
a) $f(x) = \frac{4}{x} - 1$ b) $f(x) = \frac{4}{x-2}$ c) $f(x) = 1 - \frac{4}{x}$

**13.** Dla jakiej wartości współczynnika $a$ punkt $P$ należy do wykresu funkcji $f$?

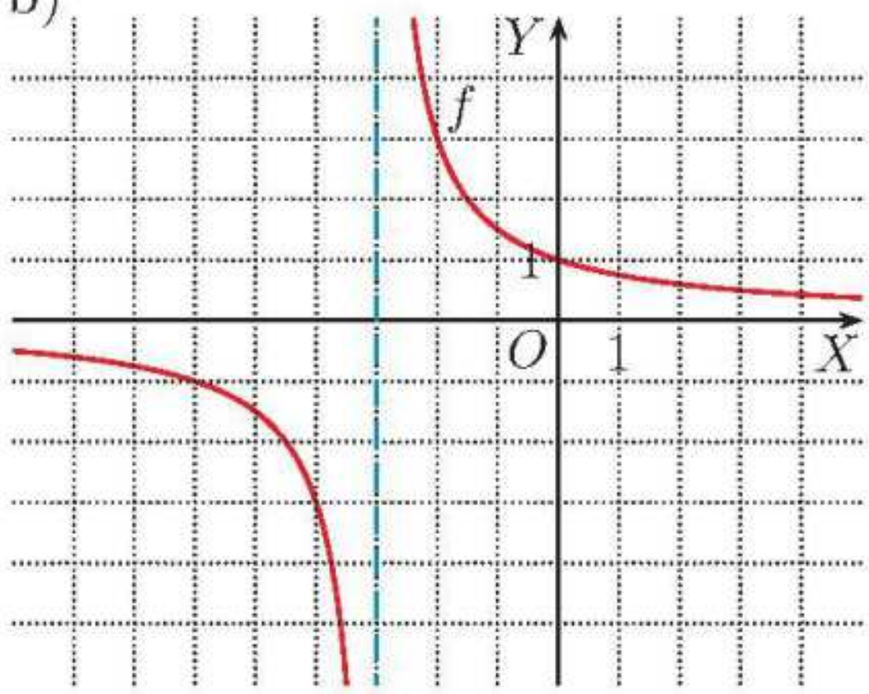
a) $f(x) = \frac{a}{x+1}$, $P(-2, 4)$ b) $f(x) = \frac{a}{x-5}$, $P(2\frac{1}{2}, 2)$

**14.** Wykres funkcji $f$ otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{3}{x}$ wzdłuż osi układu współrzędnych. Podaj wzór funkcji $f$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja $f$ przyjmuje wartości większe od 1.

a)




b)

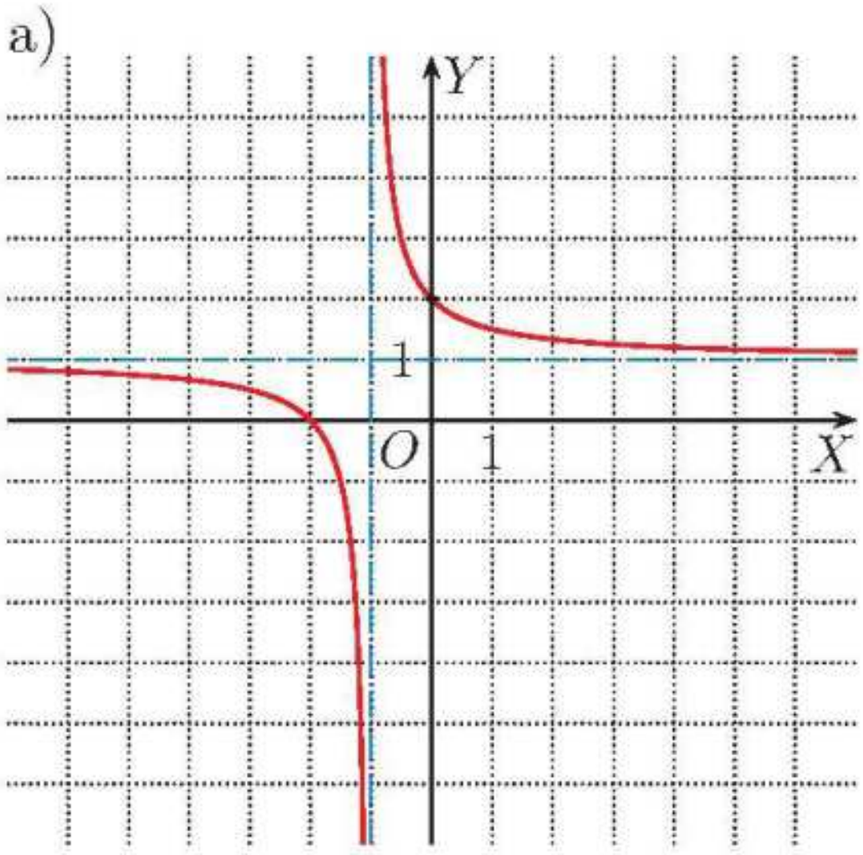



**15.** Naszkicuj wykres funkcji $f$. Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja $f$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich – ujemne.

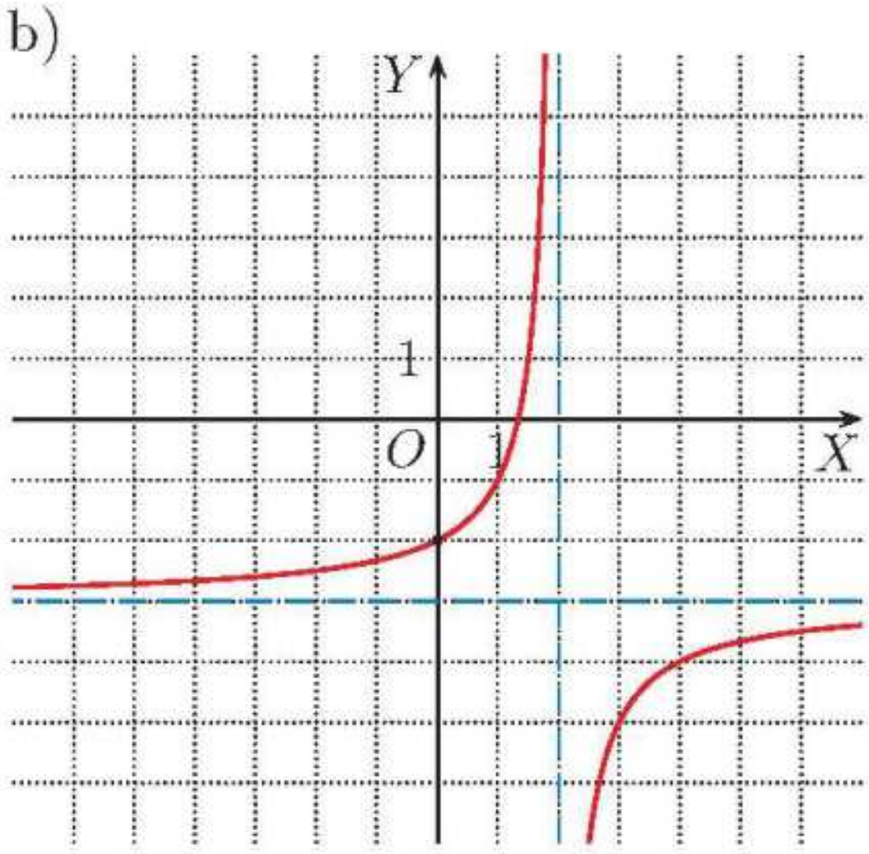
a) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ b) $f(x) = \frac{2}{x-3} + 2$ c) $f(x) = \frac{-3}{x-1} + 3$

**16.** Podaj wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku. Dla jakiej wartości współrzędnej $m$ punkt $P(m, 3)$ należy do tego wykresu?

a)




b)



**17.** Naszkicuj wykres funkcji $f$ i podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{4}{x-2} + 3$ b) $f(x) = \frac{2}{x+2} - 4$ c) $f(x) = 3 - \frac{1}{x+1}$

**18.** Wyznacz dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{x^2-x}{x-1}$ c) $\frac{x^2+x}{x^2}$ e) $\frac{x-1}{x^2-x}$

b) $\frac{x}{x^2-1}$ d) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$ f) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

**19.** Oblicz wartość wyrażenia dla tych spośród liczb $-\sqrt{2}$, 0, 1, $\sqrt{2}$, dla których jest to możliwe.

a) $\frac{2x+1}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x+2}$ c) $\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}$

**20.** Wyznacz dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartość dla $x = -2$.

a) $\frac{x^2-9}{x^3-3x^2}$ c) $\frac{x^2+9x+8}{2x+16}$ e) $\frac{x^2+10x+25}{x^2+4x-5}$

b) $\frac{x^5-81x}{x^2+9}$ d) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ f) $\frac{4x^2-1}{2x^3+x^2-6x-3}$

**21.** Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działania. Odpowiedź zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{x+3}{3x} \cdot \frac{x^2}{x^2-9}$ c) $\frac{x}{x^2+5x} \cdot \frac{x^2-25}{x+2}$ e) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{(x-2)^2}{x+1}$

b) $\frac{1}{x+7} \cdot \frac{x^2-49}{7x}$ d) $\frac{4x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{2x^2+x}$ f) $\frac{9+6x+x^2}{9-6x+x^2} \cdot \frac{3-x}{3+x}$

**22.** Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działania. Odpowiedź zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^2-6x}{x-6} : \frac{x}{x+2}$ c) $\frac{x^2-1}{x^2+x} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ e) $\frac{x+5}{x-5} : (x^2-25)$

b) $\frac{x}{x-6} : \frac{x^2+x}{x^2-36}$ d) $\frac{x}{x-4} : \frac{x^2}{x^2-16}$ f) $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+x}{3x-3}$

**23.** Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działania. Odpowiedź zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-3}{1-x}$ c) $\frac{3x+1}{x+1} + \frac{4x}{x+2}$ e) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2-1}$

b) $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$ d) $\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{3x}{x+1}$ f) $\frac{2}{x} + \frac{4}{x-3} + \frac{2x-1}{x^2-3x}$

**24.** Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x} = 3$ b) $\frac{3}{x} = 2$ c) $-\frac{6}{x} = \frac{1}{3}$

**25.** Rozwiąż równanie.

a) $\frac{6x-3}{x+3} = 3$ b) $\frac{x+5}{2x-1} = -3$ c) $\frac{-x-4}{x+2} = 2$

## Zestaw III – podsumowujący

**26.** Wyznacz dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartość dla $x = -7$.

a) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{16-x^4} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$ b) $(x^3-8) : \frac{x^2+2x+4}{x+2}$

**27.** Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci. Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $x = 2$.

a) $\frac{4}{x+2} + \frac{3}{x-1}$

b) $\frac{3x+1}{x+1} + \frac{x}{x+2}$

c) $\frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{3x}{x+1}$

d) $\frac{5x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} - 8$

e) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$

f) $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3x-2} + \frac{3}{9x^2-9x+2}$

**28.** Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 6$

b) $\frac{1}{5x} - \frac{1}{2x} = 12$

c) $\frac{5}{4x} + \frac{1}{9x} = x$

d) $\frac{4x-1}{x} = 3x$

e) $\frac{x+5}{3x} = 2x$

f) $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{x}$

g) $\frac{2x-1}{x} = \frac{2x}{x-2}$

h) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-2}{x+2}$

i) $\frac{x+4}{2x+1} = \frac{2x-1}{3-x}$

**29.** Rozwiąż równanie.

a) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)} = 0$

b) $\frac{(x-5)(x+4)}{(x+4)(x+5)} = 0$

c) $\frac{(x+3)(x+1)}{x^2-9} = 0$

d) $\frac{(x+2)(2x+6)}{x^2-4} = 0$

e) $\frac{x(x-3)(x+8)}{x^2-3x} = 0$

f) $\frac{x(x+6)(x-8)}{x^2+6x} = 0$

**30.** Rozwiąż równanie.

a) $\frac{(x+1)(x-2)(x-6)}{(x+2)(x-1)} = 0$

b) $\frac{(x+4)(x-3)(x+8)}{(x+8)(x-3)} = 0$

c) $\frac{(2x+6)(4-2x)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = 0$

d) $\frac{x(6x-2)(2x-1)(x+1)}{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})} = 0$

e) $\frac{x(6x-3)(3x+6)}{x^2-4} = 0$

f) $\frac{(x-3)^2(2x-4)^2}{(x+1{,}5)(x^2+9)} = 0$

**31.** Wyznacz dziedzinę wyrażenia, uprość je i określ, dla jakich $x$ przyjmuje ono wartość 0.

a) $\frac{x^2-6x}{x^2-9x}$ b) $\frac{4x^2-1}{x-2x^2}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}$ d) $\frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}$

**32.** Dwa samochody wyjechały jednocześnie z miasta $A$ do miasta $B$, oddalonego od $A$ o 560 km. Średnia prędkość pierwszego samochodu była o 10 km/h większa od średniej prędkości drugiego, więc przybył on na miejsce o godzinę wcześniej. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

**33.** Z dwóch miejscowości oddalonych od siebie o 126 km wyjechali naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Jeden z nich wyjechał godzinę później i jechał o 4 km/h szybciej. Rowerzyści spotkali się w połowie drogi. Oblicz średnią prędkość każdego z nich.

**34.** Odległość między dwiema przystaniami liczona wzdłuż rzeki wynosi 8 km. Łódka przepływa z jednej przystani do drugiej i z powrotem w czasie 1 h i 40 min, a prędkość prądu rzeki wynosi 2 km/h. Oblicz średnią prędkość łódki na wodzie stojącej.

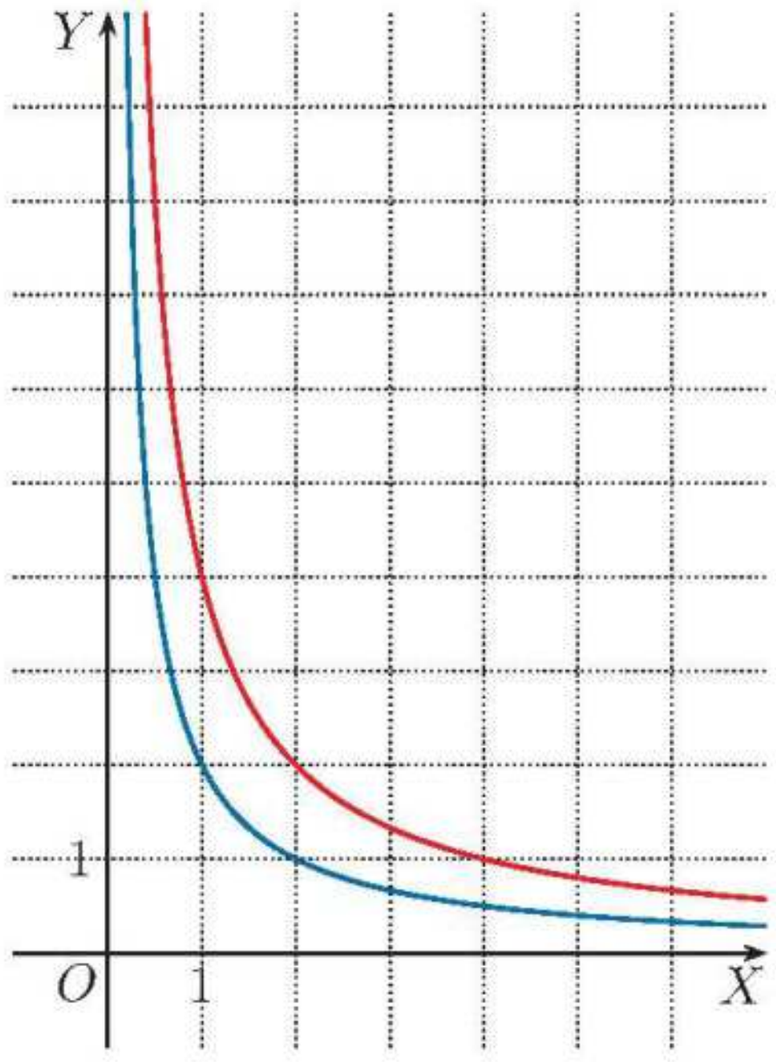
**35.** Motorówka pokonuje drogę w górę rzeki z punktu $A$ do punktu $B$ w czasie o 15 minut dłuższym niż drogę powrotną. Prędkość motorówki na wodzie stojącej jest równa 21 km/h, a odległość między punktami $A$ i $B$ wynosi 18 km. Oblicz prędkość prądu rzeki.

**36.** Dane jest wyrażenie $\frac{x}{2-x} - \frac{x}{2+x}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Podane wyrażenie jest określone dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$. | P | F |
| 2. | Podane wyrażenie można przekształcić do postaci równoważnej $\frac{4+2x}{4-x^2}$. | P | F |

**37.** Na rysunku obok przedstawiono wykresy dwóch proporcjonalności odwrotnych: $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = \frac{4}{x}$.




Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

Do wykresu funkcji $f$ należy punkt:

**A.** $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, **C.** $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

**B.** $\left(6, \frac{2}{3}\right)$, **D.** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Do wykresu funkcji $g$ należy punkt:

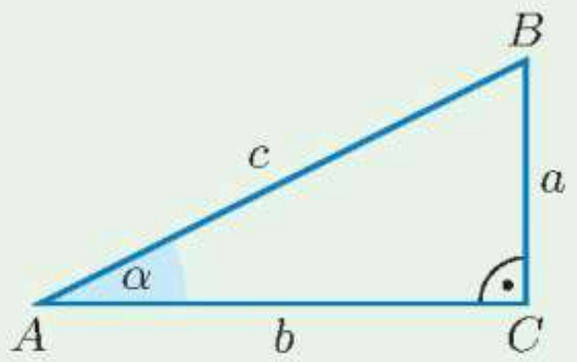
**E.** $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$, **G.** $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,

**F.** $\left(\frac{5}{2}, \frac{8}{4}\right)$, **H.** $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

# 5.8. Funkcje trygonometryczne

**Funkcje trygonometryczne kąta ostrego**

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$




| $\alpha$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy obliczenie długości wszystkich jego boków i miar wszystkich jego kątów.

**Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego**

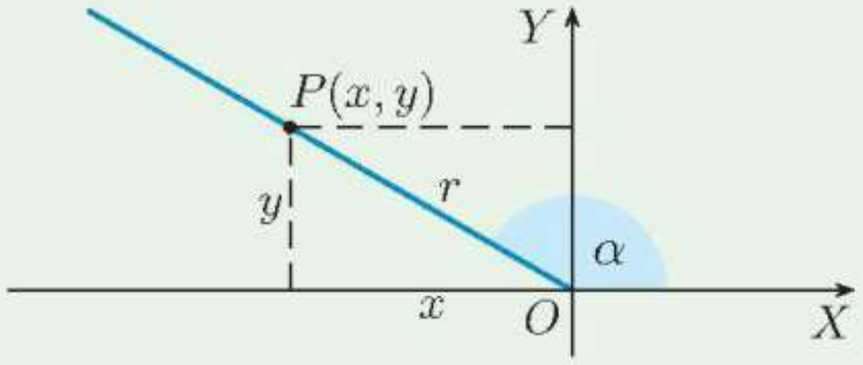
Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$.

Wtedy:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \ \cos\alpha = \frac{x}{r},$

gdzie $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0$, czyli $\alpha \neq 90^\circ)$




Dla dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ prawdziwe są zależności:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ$

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, mając dane długości jego przyprostokątnych.

a) 5, 12 $\qquad$ b) $\sqrt{2}, \sqrt{6}$ $\qquad$ c) 2, $\sqrt{6}$ $\qquad$ d) $\sqrt{6} + \sqrt{2}, \sqrt{6} - \sqrt{2}$

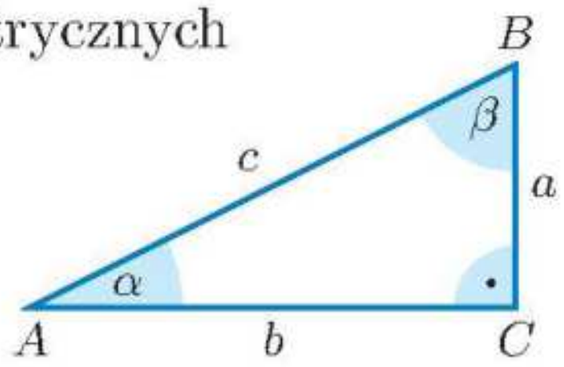
**2.** Oblicz długości pozostałych boków trójkąta prostokątnego $ABC$ (rysunek obok) oraz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) $a = 6, \operatorname{tg}\alpha = 2,$

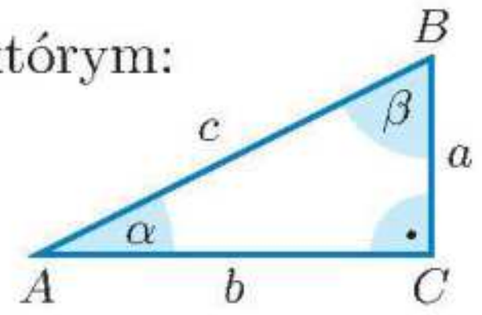
b) $a = 2, \sin\alpha = \frac{4}{5},$

c) $a = 6, \cos\alpha = \frac{1}{5},$

d) $c = \sqrt{5}, \operatorname{tg}\alpha = 3.$



**3.** Rozwiąż trójkąt prostokątny $ABC$ (rysunek obok), w którym:




a) $a = 2$, $\alpha = 12^\circ$,
b) $c = 20$, $\beta = 75^\circ$,
c) $a = 5$, $\sin\alpha = 0{,}342$,
d) $c = 15$, $\cos\alpha = 0{,}7071$.

**4.** Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych większego kąta ostrego trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna jest trzy razy krótsza od przeciwprostokątnej.

**5.** Który z symboli: $<$, $>$, $=$ należy wpisać w miejsce ? , aby otrzymać zdanie prawdziwe?

a) Jeżeli $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, to $\alpha$ ? $30^\circ$.
b) Jeżeli $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, to $\alpha$ ? $45^\circ$.
c) Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = 2$, to $\alpha$ ? $60^\circ$.
d) Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, to $\alpha$ ? $30^\circ$.

**6.** Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego $\alpha$, jeśli:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{12}{13}$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{4}$, c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{7}{24}$.

**7.** Oblicz, nie korzystając z tablic ani kalkulatora.

a) $4\sin 30^\circ + \sin 20^\circ - \cos 70^\circ$
b) $\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$
c) $\cos 20^\circ \sin 70^\circ + \sin 20^\circ \cos 70^\circ$
d) $\cos 40^\circ \cos 50^\circ - \sin 40^\circ \sin 50^\circ$

**8.** Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego $\alpha$.

a) $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ b) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$

**9.** Oblicz wartość wyrażenia, jeżeli $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ i $\alpha$ jest kątem ostrym.

a) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
b) $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha$
c) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$
d) $\frac{\sin\alpha - \sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha}$

**10.** Oblicz miarę kąta ostrego $\alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) $\frac{3-\sin\alpha}{5} = \frac{1}{2}$,
b) $\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha$,
c) $\sqrt{2}\sin\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$,
d) $\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha} = 0$,
e) $\frac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{3}{2}$,
f) $\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2$.

**11.** Czy istnieje kąt $\alpha$, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}$,
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{5}$,
c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$?

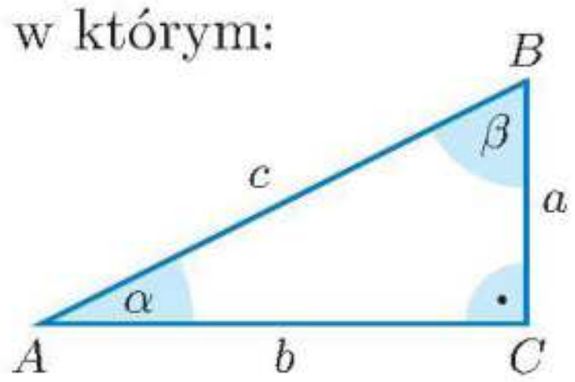
## Zestaw II – ćwiczeniowy

**12.** Rozwiąż trójkąt prostokątny $ABC$ (rysunek obok), w którym:

a) $a = 40$, $\alpha = 30^\circ$,

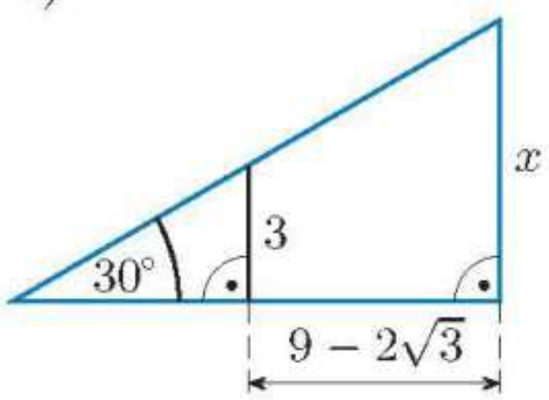
b) $b = 6$, $\alpha = 60^\circ$,

c) $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.

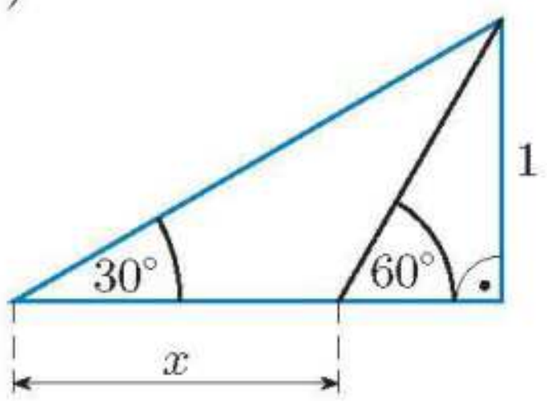



**13.** Oblicz $x$.

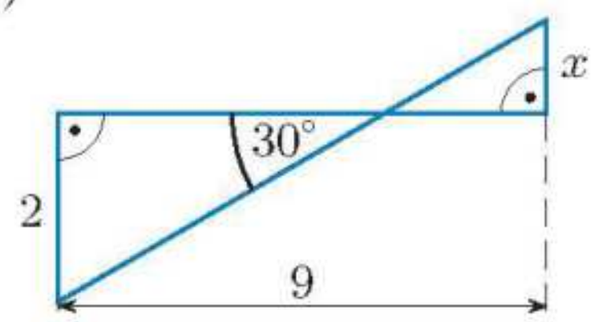
a)




b)




c)




**14.** Rozwiąż trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości 10 oraz kątach ostrych $\alpha$ i $\beta$ spełniających warunek:

a) $\sin\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = 1{,}2$, b) $5\cos\alpha - 3\sin(90^\circ - \alpha) = \sqrt{2}$.

**15.** Oblicz tangens najmniejszego z kątów trójkąta o bokach długości $2\sqrt{3}$, 3, $\sqrt{17}$.

**16.** Oblicz, nie korzystając z tablic ani kalkulatora.

a) $(\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 65^\circ)\sin 25^\circ \sin 65^\circ$

b) $\cos^2 15^\circ \operatorname{tg}^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ$

c) $(\sin 40^\circ + \cos 50^\circ)^2 + (\sin 50^\circ + \cos 40^\circ)^2$

d) $(\sin 40^\circ + \cos 40^\circ)^2 + (\sin 50^\circ - \cos 50^\circ)^2$

**17.** a) Kąt $\alpha$ jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{9\operatorname{tg}^2\alpha - 6}$.

b) Kąt $\alpha$ jest ostry oraz $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

**18.** Kąt $\alpha$ jest ostry oraz $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha) = \frac{1}{3}$. Oblicz $\cos\alpha$.

**19.** Kąt $\alpha$ jest ostry oraz $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Nie wyznaczając wartości $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\cos\alpha}$, b) $\frac{4\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$, c) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$.

D **20.** a) Uzasadnij tożsamość $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

b) Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego $\alpha$, jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

**21.** Uprość wyrażenie tak, aby występowała w nim jedynie funkcja cosinus. Oblicz jego wartość dla $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, jeżeli $\alpha$ jest kątem ostrym.

a) $\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$ b) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ c) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$

**22.** Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, jeżeli $\alpha$ jest kątem ostrym oraz:

$$\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha} = 0$$

**23.** Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$, jeżeli $\alpha$ jest kątem ostrym oraz $\frac{2\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \frac{2\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = 5$.

**24.** Kąt $\alpha$ jest ostry oraz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$, b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$, c) $\sin^2\alpha - \sin^4\alpha$.

**25.** Dla kątów ostrych $\alpha$ i $\beta$ pewnego trójkąta prostokątnego zachodzi równość $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{7}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\cos\alpha + \cos\beta$, b) $\sin\alpha \cdot \sin\beta$, c) $\cos\alpha \cdot \cos\beta$.

**26.** Iloczyn sinusów kątów ostrych pewnego trójkąta prostokątnego jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz sumę cosinusów tych kątów.

**27.** Wyznacz miarę kąta ostrego $\alpha$ spełniającego podane równanie.

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{3}(1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

**28.** Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha$, jeżeli wiadomo, że do ramienia końcowego tego kąta należy punkt $P$.

a) $P(-3,3)$ b) $P(-3,4)$ c) $P(-3,9)$ d) $P(-2\frac{2}{3},2)$

**29.** Oblicz.

a) $\cos 120^\circ + \sin 150^\circ$
b) $\sin 135^\circ + \cos 135^\circ$
c) $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$
d) $\operatorname{tg} 150^\circ \cdot \sin 60^\circ - \sin 150^\circ$

**30.** Oblicz.

a) $\frac{\cos^2 180^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 135^\circ}$ b) $\frac{\sin^4 135^\circ + \sin^2 135^\circ \cos^2 45^\circ}{\cos^2 135^\circ \operatorname{tg} 135^\circ}$

**31.** Oblicz sinus i cosinus kąta, który z osią $OX$ tworzy prosta o danym równaniu.

a) $y = 3x$ b) $x + y = 0$ c) $\sqrt{3}x + y = 0$ d) $12x - 5y = 0$

**32.** Sprawdź, czy istnieje kąt $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$, dla którego:

a) $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\cos\alpha = 0{,}8$,
b) $\sin\alpha = 0{,}5$ i $\cos\alpha = -0{,}5$,
c) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$,
d) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ i $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$.

## Zestaw III – podsumowujący

**33.** Dany jest kąt $\alpha$ taki, że $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) $\alpha$ jest kątem ostrym, b) $\alpha$ jest kątem rozwartym.

**34.** Dany jest kąt $\alpha$ taki, że $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) $\alpha$ jest kątem ostrym, b) $\alpha$ jest kątem rozwartym.

**35.** Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) $\alpha$ jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = 2$,

b) $\alpha$ jest kątem rozwartym i $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}5$.

**36.** Kąt $3\alpha$ jest ostry. Wyznacz miarę kąta $\alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$, b) $4\cos^2 2\alpha = 3$, c) $\operatorname{tg}^2 2\alpha = 1$.

**37.** Ramiona trapezu mają długości $6\sqrt{2}$ i $2\sqrt{6}$ oraz tworzą z dłuższą podstawą kąty ostre. Oblicz miary wszystkich kątów tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest równa $3\sqrt{2}$.

**38.** Pole trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem, jest równe $55\sqrt{3}$ cm$^2$. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego ramię ma długość 10 cm i tworzy z podstawą kąt $30^\circ$.

**39.** Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem $60^\circ$. Oblicz stosunek długości krótszego boku tego prostokąta do długości jego dłuższego boku.

**40.** Kąt ostry rombu o boku długości 13 ma miarę $60^\circ$. Oblicz długości przekątnych oraz wysokość tego rombu.

**41.** W trójkącie $ABC$ kąt $ACB$ ma miarę $60^\circ$ oraz $|AC| = 12$ i $|BC| = 6$.

a) Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka $B$.

b) Oblicz długość trzeciego boku i pozostałe kąty tego trójkąta.

**42.** Oblicz wysokość trójkąta równoramiennego o podstawie długości 8 i kącie między ramionami $120^\circ$.

**43.** Jedna z przyprostokątnych trójkąta jest o 2 krótsza od przeciwprostokątnej. Środkowa poprowadzona do tej przyprostokątnej ma długość $2\sqrt{6}$. Oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta z dokładnością do $1^\circ$ oraz długości jego pozostałych środkowych.

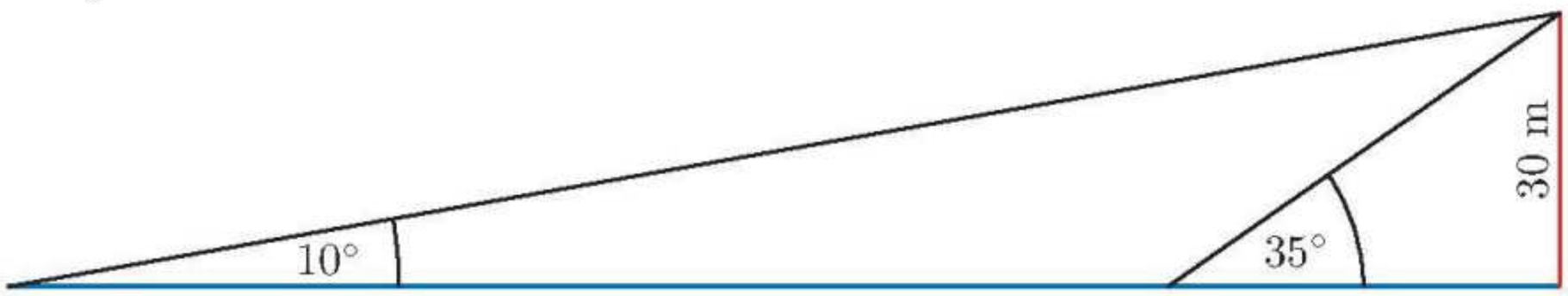
**44.** Ramię trapezu równoramiennego ma długość 10 cm, przekątna jest równa 15 cm, a kąt ostry ma miarę $50^\circ$. Oblicz pole tego trapezu z dokładnością do 1 $\text{cm}^2$.

**45.** Podstawy trapezu równoramiennego $ABCD$ mają długości $|AB| = 9$ cm i $|CD| = 5$ cm. Przekątna tego trapezu jest prostopadła do ramienia i ma długość $3\sqrt{7}$ cm. Rozwiąż trójkąt $BDC$.

**46.** Oblicz miarę kąta ostrego w rombie o boku długości 10 i krótszej przekątnej długości 8.

**47.** Oblicz wysokość drzewa, które rzuca cień długości 20 m w momencie, gdy promienie słoneczne padają pod kątem $53^\circ$ do powierzchni ziemi.

**48.** Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 30 m nad poziomem morza. W kierunku latarni płynął ponton, z którego było widać jej wierzchołek pod kątem $10^\circ$. Po pewnym czasie ponton zbliżył się do latarni tak, że jej wierzchołek było widać pod kątem $35^\circ$. Jaką odległość przebył ponton w tym czasie?




**49.** Z jednego okna latarni morskiej widać kuter pod kątem $10^\circ$, a z drugiego, położonego 4 m wyżej – pod kątem $11^\circ$. Oblicz odległość kutra od latarni.

**50.** Dany jest kąt rozwarty $\alpha$ taki, że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Dla kąta $\alpha$ spełnione jest równanie $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$. | P | F |
| 2. | Dla kąta $\alpha$ spełnione jest równanie $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$. | P | F |

**51.** Dany jest romb o przekątnych 6 cm i 8 cm.

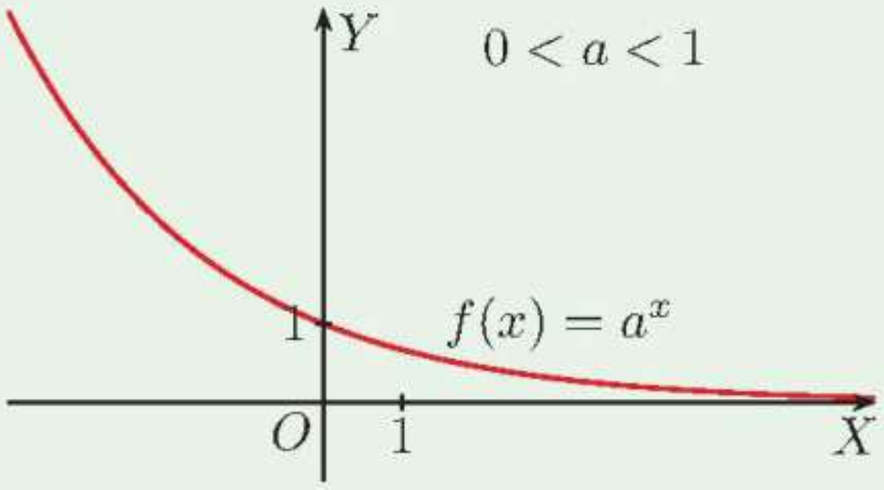
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Miara kąta ostrego tego rombu z dokładnością do $1^\circ$ jest równa:
   **A.** $37^\circ$, **B.** $54^\circ$, **C.** $64^\circ$, **D.** $74^\circ$.
2. Wysokość tego rombu jest równa:
   **E.** 3 cm, **F.** 3,2 cm, **G.** 4,8 cm, **H.** 5 cm.

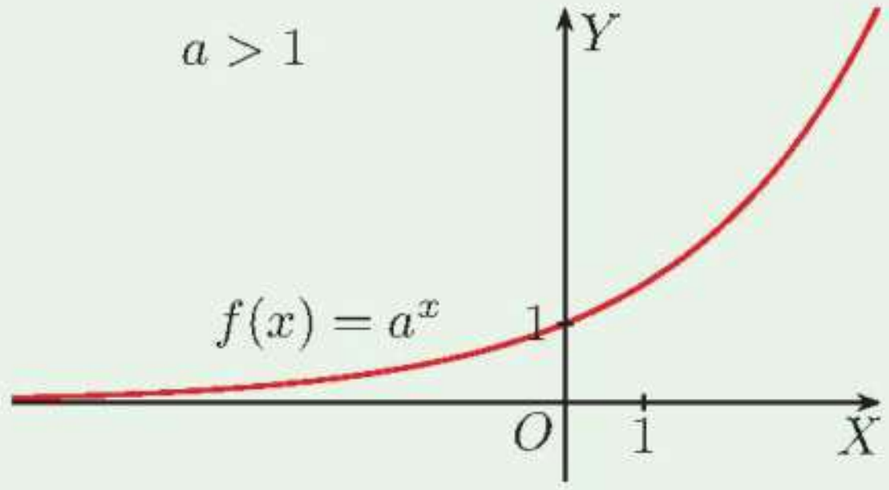
# 5.9. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

**Funkcja wykładnicza**

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą**.




Dla $a \in (0;1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.




Dla $a \in (1;\infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

**Logarytm**

Niech $a$ i $b$ będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, wówczas:

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Jeżeli $a$, $b$, $x$ i $y$ są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$\log_a a^x = x$

$a^{\log_a b} = b$

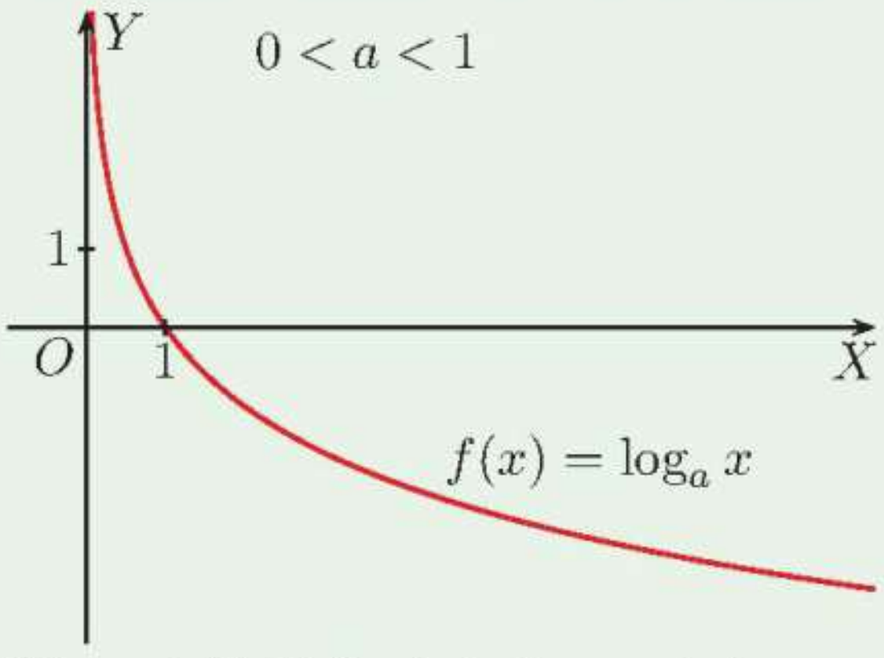
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

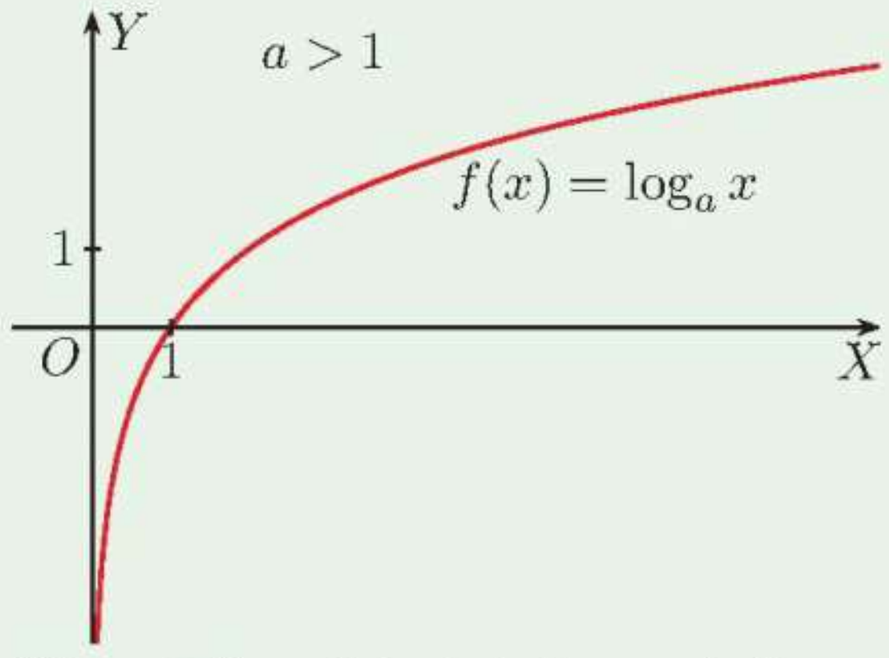
$\log_a x^p = p \log_a x$, gdzie $p \in \mathbf{R}$

**Funkcja logarytmiczna**

Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0;\infty)$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.




Dla $a \in (0;1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.




Dla $a \in (1;\infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Oblicz.

a) $27^{\frac{4}{3}} - 0{,}01^{-0{,}5} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$

b) $5 \cdot \left(\frac{25}{81}\right)^{-0{,}5} - \left(\sqrt[4]{3}\right)^{8}$

c) $0{,}125^{-\frac{2}{3}} + 32^{\frac{4}{5}} : \left(\sqrt[6]{4}\right)^{3}$

d) $\left(\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[6]{64^2} + 4 \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[6]{16}\right)^{0{,}5}$

**2.** Przedstaw liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

a) $81\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[9]{27}$

c) $27\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3}}$

**3.** Przedstaw liczbę w postaci $a^x$, gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.

a) $3^{\frac{7}{4}} \cdot 9^{-\frac{3}{8}}$

b) $25^{\frac{3}{4}} : 125^{-\frac{5}{2}}$

c) $32^{\frac{7}{5}} \cdot \sqrt[3]{2^4}$

d) $\sqrt[5]{64} : (0{,}5)^{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{27^3} \cdot \left(\sqrt[3]{9}\right)^{-2}$

f) $(0{,}04)^{-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[4]{5^3}$

**4.** Które z liczb $x$, $y$, $z$ są równe liczbie $a$? Iloczyn $xyz$ przedstaw w postaci $p^r$, gdzie $p \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{Q}$.

a) $a = 2^{\frac{7}{3}}$, $x = 2^7 \cdot \sqrt[3]{2}$, $y = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$, $z = 2^7 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

b) $a = 3^{-\frac{4}{3}}$, $x = 3^{\frac{3}{4}}$, $y = \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$, $z = \sqrt[3]{3^{-4}}$

c) $a = 2^{\frac{10}{3}} : \sqrt[3]{4}$, $x = 4\sqrt[3]{4}$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $z = 2^3 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$

d) $a = 12^{\frac{2}{3}} : \sqrt[4]{36}$, $x = 2\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$, $y = \left(\frac{12^4}{6^3}\right)^{\frac{1}{6}}$, $z = 2^{\frac{5}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

**5.** Oblicz.

a) $7^{4-\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}-2}$

b) $6^{\sqrt{2}+1{,}25} : 6^{\sqrt{2}-0{,}75}$

c) $3^{\sqrt{5}-1} : 9^{\frac{\sqrt{5}}{2}+1}$

d) $(\sqrt{5})^{\sqrt{5}-1} : 5^{0{,}5\sqrt{5}}$

e) $\left(2^{\sqrt{7}} \cdot 0{,}5^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

f) $\left(3^{1+\sqrt{2}} : 3^{1-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

**6.** Oblicz.

a) $\left[4 \cdot (0{,}5)^{\sqrt{3}}\right]^{2+\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{5}^{\sqrt{5}} \cdot 5^{\sqrt{5}+1} \cdot 125^{1-\frac{\sqrt{5}}{2}}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}}$

d) $(2-\sqrt{3})^{\sqrt{2}}(2+\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

**7.** Oblicz.

a) $\log_2 16$

b) $\log_{16} 2$

c) $\log_2 \frac{1}{8}$

d) $\log_{\frac{1}{16}} 2$

e) $\log_{0{,}5} 32$

f) $\log_8 \sqrt{2}$

g) $\log_{\sqrt{2}} 16$

h) $\log_{32} 2\sqrt{2}$

**8.** Oblicz.

a) $\log_{0{,}4} \frac{5}{3} + \log_{0{,}4} 3 - \log_{0{,}4} 2$

b) $\log_9 15 - \log_9 \frac{20}{3} + 2\log_9 6$

c) $3\log 2 - \log 0{,}2 + \log 25$

d) $\log_{\sqrt{2}} 6 + 2\log_{\sqrt{2}} 2 - \log_{\sqrt{2}} 3$

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**D** **9.** Uzasadnij, że podana liczba jest równa 1.

a) $0{,}5^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot 0{,}25^{\sqrt{2}}$ b) $(2-\sqrt{3})^{\sqrt{2}}(2+\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

**10.** Dla jakich wartości $x$ zachodzi podana równość?

a) $3^x = 243$ d) $5 \cdot 5^x = 625$ g) $4^x = 2^x$

b) $4^{x+1} = 64$ e) $0{,}25 \cdot 4^x = 256$ h) $3^{x+1} + 3^x = 36$

c) $2^{x-3} = 1024$ f) $\frac{2}{3} \cdot 3^x = 54$ i) $2^{x^2} = 16$

**11.** Punkty $A$, $B$ i $C$ należą do wykresu funkcji $f$. Oblicz $a$, $b$ i $c$.

a) $f(x) = 2^x$, $A(-2, a)$, $B\left(b, \frac{1}{8}\right)$, $C\left(c, \sqrt[3]{4}\right)$

b) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, $A\left(\frac{1}{2}, a\right)$, $B\left(b, \frac{4}{3}\right)$, $C(c, 1)$

**12.** Naszkicuj wykres funkcji $f$. Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja $f$ przyjmuje wartości większe od $p$.

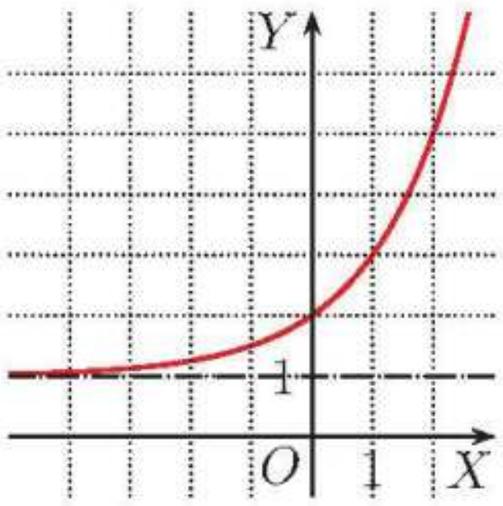
a) $f(x) = 2^x$, $p = 8$ c) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $p = 2\frac{1}{4}$

b) $f(x) = 3^{-x}$, $p = 9$ d) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$, $p = 4$

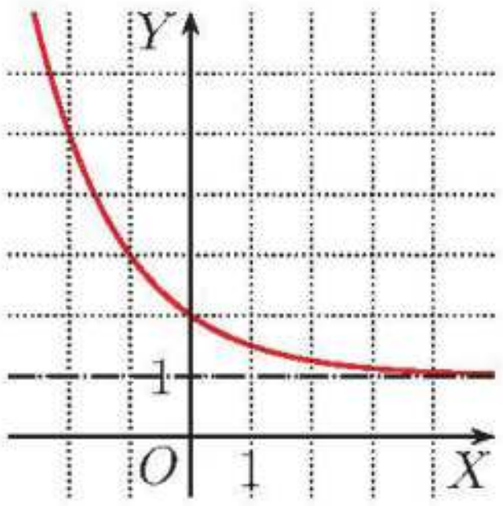
**13.** Dopasuj wzór funkcji do wykresu.

**A.** $f(x) = 2 \cdot 2^x$ **B.** $g(x) = 2^x + 1$ **C.** $h(x) = 2^{-x} + 1$

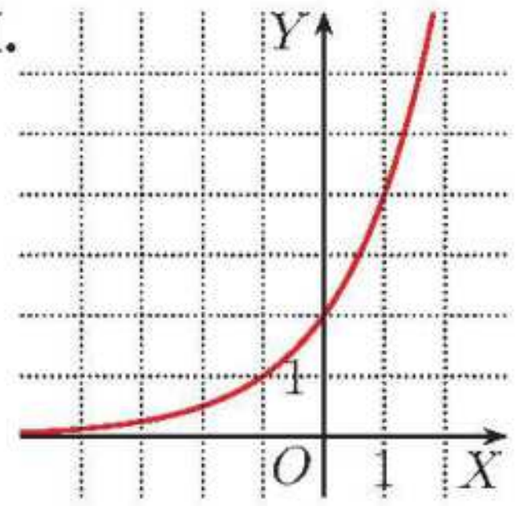
**I.**




**II.**




**III.**




**14.** Naszkicuj wykres funkcji $f$. Podaj jej zbiór wartości i określ monotoniczność tej funkcji.

a) $f(x) = 2^x - 8$ c) $f(x) = 3 + 2^{-x}$ e) $f(x) = 3^{x-1}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$ d) $f(x) = -4^{-x}$ f) $f(x) = 3^{2-x}$

**15.** Dla jakich wartości $m$ funkcja $f$ jest rosnąca?

a) $f(x) = (2m-3)^x$ b) $f(x) = (1-4m)^{-x}$ c) $f(x) = (2-m^2)^x$

**16.** Określ, do którego z przedziałów: $(0;1)$ czy $(1;\infty)$ należy liczba $a$, jeżeli:

a) $a^{\sqrt{2}} < a^{\sqrt{3}}$, b) $a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < a^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, c) $a^{-2} < a^{-3}$, d) $a^3 > \frac{1}{a^2}$.

**17.** Porównaj liczby. Wpisz odpowiedni symbol: $<$, $>$ lub $=$ w miejsce ?.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ ? $\sqrt{2}^{0,5}$ b) $0{,}6^{-3}$ ? $\left(\frac{5}{3}\right)^{2}$ c) $2{,}5^{2,5}$ ? $0{,}4^{-2,5}$

**18.** Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $9\sqrt{3}$, $27^{\frac{3}{2}}$, $3^{\sqrt{3}}$, $9^{2,1}$ b) $0{,}8^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{16}{25}\right)^{1,5}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1,8}$, $\left(\frac{4}{5}\right)^{\sqrt{5}}$

**19.** Naszkicuj wykres funkcji $f$. Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja $f$ przyjmuje wartości większe od 1.

a) $f(x) = 2 - 2^{-x}$ b) $f(x) = 27 \cdot 3^{x} - 2$ c) $f(x) = -2^{x+1} + 3$

**20.** Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = 4 \cdot 2^{x} - 1$, $g(x) = 3^{x+1}$ b) $f(x) = 2^{2x-4}$, $g(x) = \frac{9}{3^{x}}$

**21.** Punkt $A$ należy do wykresu funkcji $f$. Oblicz $a$.

a) $f(x) = 4^{x}$, $A(\log_2 6, a)$ b) $f(x) = 9^{x}$, $A(a, 5)$

## Zestaw III – podsumowujący

D **22.** Na podstawie definicji logarytmu uzasadnij, że $a^{\log_a b} = b$, a następnie oblicz:

a) $4^{\log_4 12}$, c) $3^{3\log_3 10}$, e) $25^{\log_5 4}$, g) $4^{2\log_2 3 + \log_2 5}$,

b) $10^{\log 13}$, d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$, f) $32^{\log_2 3}$, h) $9^{\log_3 6 - \log_4 16}$.

**23.** Oblicz podstawę logarytmu.

a) $\log_a 81 = 4$ c) $\log_a 9 = -2$ e) $\log_a \frac{8}{125} = 3$

b) $\log_a 81 = -4$ d) $\log_a 9 = \frac{1}{2}$ f) $\log_a \frac{8}{125} = -1$

**24.** Oblicz $x$.

a) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$ b) $\log_{\sqrt{3}} x = 3$ c) $\log_{(x+2)} 27 = 3$

**25.** Oblicz $x$.

a) $\log_4 x = 2\log_4 6 - \log_4 \frac{9}{4}$ c) $\log x = -2 + 3\log 5 - \log 0{,}25$

b) $\log_{0,5} x = 1 + 2\log_{0,5} 3$ d) $\log_3 x = 2\log_3 4 - \log_3 12 - 1$

**26.** Oblicz $\sqrt{abc}$.

a) $a = \log_4 16$, $b = \log_2 64$, $c = \log_{0,5} \frac{1}{8}$

b) $a = \log_2 32$, $\log_b 10 = 1$, $\log_2 c = 3$

**27.** Naszkicuj wykres funkcji $f$ i podaj jej miejsce zerowe.

a) $f(x) = \log_2 x - 1$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$ c) $f(x) = \log_2 x + 2$

**28.** Naszkicuj wykresy funkcji $f$ i $g$. Odczytaj z wykresu rozwiązania nierówności $f(x) \leqslant 1$ oraz $g(x) \leqslant 1$.

a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2(x-1)$ c) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_3(x-2)$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

**29.** Naszkicuj wykresy funkcji $f$ i $g$. Odczytaj z wykresu rozwiązania równań $f(x) = 1$ oraz $g(x) - 1 = 0$.

a) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = -\log_3 x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$

b) $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = \log_4(-x)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(-x)$

**30.** Naszkicuj wykres funkcji $f$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od 1.

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3)+1$ b) $f(x) = \log_2(x+1)-1$

Okres połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas $T$, po którym masa próbki tego izotopu zmniejszy się o połowę. Jeśli $m_0$ jest początkową masą próbki, to masa próbki po upływie czasu $t$ jest równa:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

**31.** Okres połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego pewnego pierwiastka wynosi 16 godzin. Po jakim czasie próbka tego izotopu straci:

a) 75% swojej masy, b) 87,5% swojej masy?

**32.** Okres połowicznego rozpadu izotopu węgla $^{14}C$ wynosi około 5730 lat. Jaką masę będzie miała próbka tego izotopu o masie początkowej 96 g po upływie: a) 17 190 lat, b) 22 920 lat?

**33.** Masa próbki izotopu promieniotwórczego pewnego pierwiastka wynosiła 48 g, a po 24 dniach zmniejszyła się do 6 g. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.

**34.** Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości $a$ cm, $b$ cm i $c$ cm, gdzie $\log_5 a = 2$, $\log b = 2$, $\log_{0,5} c = -2$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Objętość tego prostopadłościanu jest równa 106 $cm^3$. | P | F |
| 2. | Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wynosi 6000 $cm^2$. | P | F |

# 5.10. Ciągi

**Ciągiem nieskończonym** nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich. Ciąg $a$: $\mathbf{N}_+ \to \mathbf{R}$ oznaczamy $(a_n)$, a kolejne jego wartości nazywamy **wyrazami** i oznaczamy $a_1, a_2, a_3, \ldots$
**Ciągiem skończonym** $k$-wyrazowym nazywamy funkcję, której dziedziną jest skończony zbiór liczb $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

**Ciągi monotoniczne**

Ciąg $(a_n)$ nazywamy:

- **rosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} > a_n$,
- **malejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} < a_n$,
- **nierosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \leqslant a_n$,
- **niemalejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \geqslant a_n$,
- **stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy ciągu są równe.

**Ciąg arytmetyczny**

Ciąg liczbowy $(a_n)$ nazywamy **ciągiem arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba $r$, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Liczbę $r$ nazywamy **różnicą** ciągu $(a_n)$.

**Wzór ogólny ciągu arytmetycznego** $(a_n)$ o różnicy $r$:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

**Suma $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego** $(a_n)$ o różnicy $r$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

**Ciąg geometryczny**

Ciąg liczbowy $(a_n)$ nazywamy **ciągiem geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba $q$, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Liczbę $q$ nazywamy **ilorazem** ciągu $(a_n)$.

**Wzór ogólny ciągu geometrycznego** $(a_n)$ o ilorazie $q$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

**Suma $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego** $(a_n)$ o ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Oblicz $3a_9 + b_{12}$.

a) $a_n = 2n - 6,\ \ b_n = \frac{1}{4}n + 1$

b) $a_n = 2^{\frac{n}{2}},\ \ b_n = \frac{n^2+6}{2n+1}$

c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-6}{n},\ \ b_n = (-1)^{n+1}\sqrt{4n+1}$

d) $a_n = \log_3 n,\ \ b_n = \log_4(5n+4)$

**2.** Dany jest ciąg $(a_n)$. Które wyrazy tego ciągu są równe 20?

a) $a_n = 3n - 1$ b) $a_n = 12n - n^2$

**3.** Ile wyrazów ujemnych ma ciąg $(a_n)$? Oblicz pierwszy i ostatni z tych wyrazów.

a) $a_n = 4n - 15$ b) $a_n = n^2 - 10n + 16$ c) $a_n = (2n-3)(2n-9)$

**4.** Zaproponuj wzór ogólny ciągu.

a) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \ldots$

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ d) $2, -4, 6, -8, 10, \ldots$ f) $2, 2\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{3}, 2, \ldots$

D **5.** Wykaż, że ciąg $(a_n)$ jest malejący.

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$ b) $a_n = 2 + \frac{4}{n}$ c) $a_n = \frac{5}{2n+1}$

**6.** Zbadaj monotoniczność ciągu $(a_n)$.

a) $a_n = n^2 + n + 1$ c) $a_n = \frac{4n+1}{2n+1}$ e) $a_n = n^3 - n$

b) $a_n = n^2 - 6n + 8$ d) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ f) $a_n = (-1)^{n+1}$

**7.** Dane są pierwsze trzy wyrazy ciągu arytmetycznego $(a_n)$. Podaj wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy $a_5$ i $a_8$.

a) $1, 3, 5, \ldots$ b) $8, 3, -2, \ldots$ c) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \ldots$

**8.** Oblicz $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego $(a_n)$ o różnicy $r$.

a) $a_1 = -4,\ r = 2,\ n = 7$ c) $a_2 = 3,\ r = -2,\ n = 15$

b) $a_1 = 3,\ r = -5,\ n = 10$ d) $a_2 = 2,\ r = -\frac{1}{2},\ n = 20$

**9.** Dane są ciągi arytmetyczne: $a_n = n + 5$, $b_n = 5n + 3$, $c_n = 2n - 5$, $d_n = 5n + \frac{1}{2}$, $e_n = \frac{n}{5}$. Które z tych ciągów mają różnicę równą 5?

**10.** Sprawdź, czy ciąg $(a_n)$ jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = \frac{2n+1}{4}$ b) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = \sqrt{3}n - 1$ d) $a_n = \frac{n}{n+1}$

**11.** Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego $(a_n)$. Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_1 = 1,\ a_5 = 9$ b) $a_4 = -6,\ a_{10} = 12$ c) $a_3 = 0,\ a_6 = 2$

**12.** Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego $(a_n)$ spełniającego podane warunki.

a) $\begin{cases} a_1 + a_2 = -6 \\ a_2 + a_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 + a_3 = 2 \\ a_2 \cdot a_4 = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_3 \cdot a_5 = -8 \\ a_3 + a_7 = -2 \end{cases}$

**13.** Dla jakich wartości $x$ podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Podaj te wyrazy.

a) $2x - 1,\ 2x + 5,\ 3x + 4$ b) $(x+1)^2,\ (2x+1)^2,\ (3x-1)^2$

**14.** a) Wyznacz takie liczby $a$, $b$, $c$, aby liczby 3, $a$, $b$, $c$, 63 tworzyły ciąg arytmetyczny.

b) Między liczby $12+\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ wstaw pięć takich liczb, aby wszystkie razem tworzyły ciąg arytmetyczny.

**15.** a) W ciągu arytmetycznym suma wyrazów drugiego i trzeciego jest równa $-4$, natomiast różnica wyrazów szóstego i dziesiątego jest równa 8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

b) W ciągu arytmetycznym suma wyrazów drugiego i szóstego jest równa 4, natomiast iloczyn wyrazów czwartego i siódmego jest równy 22. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

**16.** Dane są trzy początkowe wyrazy ciągu geometrycznego $(a_n)$. Podaj wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy $a_6$ i $a_{10}$.

a) $2, 4, 8, \ldots$ b) $9, 3, 1, \ldots$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, \ldots$

**17.** Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego $(a_n)$. Oblicz wyrazy $a_4$ i $a_7$.

a) $a_1 = -3,\ q = 2$ c) $a_1 = 3,\ q = -\sqrt{2}$ e) $a_3 = 3,\ a_6 = -81$

b) $a_1 = 4,\ q = -1$ d) $a_2 = 2,\ a_3 = 1$ f) $a_1 = 2\sqrt{3},\ \frac{a_5}{a_2} = 3\sqrt{3}$

**18.** Dane są ciągi geometryczne: $a_n = 5 \cdot 2^n$, $b_n = 5^{n+1}$, $c_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$, $d_n = 3 \cdot 5^n$, $e_n = (-5)^{n-1}$. Które z tych ciągów mają iloraz równy 5?

**19.** Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego $(a_n)$. Określ jego monotoniczność.

a) $a_3 = 8,\ a_4 = 16$ b) $a_2 = 18,\ a_5 = \frac{16}{3}$ c) $a_2 = \frac{1}{2},\ a_7 = -2\sqrt{2}$

**20.** Oblicz iloraz rosnącego ciągu geometrycznego $(a_n)$, jeśli $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Który wyraz tego ciągu jest równy 48?

**21.** Sprawdź, czy ciąg $(a_n)$ jest ciągiem geometrycznym.

a) $a_n = \frac{2^n}{3}$ b) $a_n = 4 \cdot 5^{n+2}$ c) $a_n = 1 + 2^n$ d) $a_n = 3^n \cdot 5^{n-1}$

D **22.** Wykaż, że ciąg $a_n = 3 \cdot 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Czy ciąg $(b_n)$ jest ciągiem geometrycznym?

a) $b_n = (a_n)^2$ b) $b_n = 5 \cdot a_n$ c) $b_n = 1 - a_n$

**23.** a) Między liczby 7 i 189 wstaw dwie takie liczby, aby wszystkie razem tworzyły ciąg geometryczny.

b) Między liczby 6 i 96 wstaw trzy takie liczby, aby wszystkie razem tworzyły ciąg geometryczny rosnący.

c) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa $4\frac{1}{3}$, a ich iloczyn jest równy 1. Znajdź te liczby.

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**24.** Oblicz sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $(a_n)$.

a) $a_1 = \frac{3}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 12$ c) $a_1 = -3$, $a_3 + a_4 = 9$, $n = 15$

b) $a_1 = 1 - \sqrt{2}$, $r = \sqrt{2}$, $n = 9$ d) $a_2 = 2$, $a_{12} - a_9 = 15$, $n = 7$

**25.** Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich, które:

a) przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2,

b) są podzielne przez 4 lub są podzielne przez 6.

**26.** Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0, a suma jedenastu początkowych wyrazów jest równa 220. Który wyraz tego ciągu jest równy 25?

**27.** Czwarty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 6. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

**28.** Lewa strona równania jest sumą kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz $x$.

a) $2 + 4 + 6 + \ldots + x = 110$ c) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4x - 3) = 120$

b) $5 + 1 - 3 - \ldots - x = -72$ d) $-4 - 1 + 2 + \ldots + (3x + 2) = 72$

**29.** Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $(a_n)$ o różnicy $r$ należy dodać, aby otrzymana suma była równa 8?

a) $a_1 = -7$, $r = 1$ b) $a_1 = \frac{4}{5}$, $r = \frac{2}{5}$

**30.** Liczby $-1, 8, 17$ są początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu należących do przedziału $(100; 200)$.

**31.** W skończonym ciągu arytmetycznym ostatni wyraz jest równy 17, a suma wszystkich wyrazów $S_n = 35$. Wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu, jeśli wiadomo, że jego różnica jest równa 3.

**32.** Oblicz sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $(a_n)$.

a) $a_1 = 5$, $q = \frac{3}{2}$, $n = 5$

b) $a_1 = \sqrt{2}$, $q = -1$, $n = 45$

c) $a_3 = -1$, $a_6 = \frac{1}{8}$, $n = 6$

d) $a_1 \cdot a_4 = \sqrt{5}$, $a_2 = 1$, $n = 7$

**33.** a) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 2. Suma wyrazów drugiego i ósmego jest o 6 większa od sumy wyrazów trzeciego i dziewiątego. Podaj wzór ogólny tego ciągu i wyznacz jego dwunasty wyraz.

b) Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8. Suma wyrazów piątego i siódmego jest o 10 większa od wyrazu dziewiątego. Podaj wzór ogólny tego ciągu i wyznacz jego piętnasty wyraz.

**34.** Długości krawędzi czterech sześciennych pudełek tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{2}{3}$. Pudełka te ustawiono jedno na drugim i otrzymano wieżę o wysokości 65 cm. Sprawdź, czy najmniejsze pudełko ma objętość większą od 0,5 $dm^3$.

**35.** a) Suma wszystkich wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa $121\frac{1}{3}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$, a jego iloraz wynosi 3. Wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.

b) Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $\frac{77}{8}$. Iloraz tego ciągu wynosi $-\frac{1}{2}$. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

**36.** Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a jego iloraz wynosi $-2$. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu:

a) o numerach nieparzystych, b) o numerach parzystych.

**37.** Ciąg $(a_n)$ jest określony rekurencyjnie. Wypisz pięć początkowych wyrazów tego ciągu. Zbadaj, czy jest to ciąg monotoniczny.

a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$, $n \geqslant 1$

b) $a_1 = -4$, $a_{n+1} = a_n + n$, $n \geqslant 1$

c) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n - n^2$, $n \geqslant 1$

d) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$, $n \geqslant 1$

**38.** Ciąg $(a_n)$ jest określony rekurencyjnie. Czy jest to ciąg arytmetyczny lub geometryczny?

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n$, $n \geqslant 1$

b) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = a_n - 6$, $n \geqslant 1$

c) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$, $n \geqslant 1$

d) $a_1 = -5$, $a_{n+1} = 3^n a_n$, $n \geqslant 1$

## Zestaw III – podsumowujący

**39.** a) Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 4, a czwarty jest równy 16. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych.

b) Ciąg arytmetyczny składa się z szesnastu wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 256, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240. Oblicz pierwszy i ostatni wyraz tego ciągu.

**40.** W skończonym ciągu arytmetycznym wyrazy drugi, piąty i ostatni są równe odpowiednio $-4$, 2 i 42. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

**41.** W skończonym ciągu arytmetycznym trzeci wyraz jest równy 28, a dziesiąty – 0. Suma wszystkich wyrazów jest równa $-40$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

**42.** Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego $(a_n)$ jest równy 6. Dla pewnej liczby $k$ mamy $a_k = 48$, a suma $k$ początkowych wyrazów ciągu $S_k = 405$. Oblicz różnicę tego ciągu oraz $k$.

**43.** Suma $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 5 jest o 500 mniejsza od sumy następnych $n$ wyrazów tego ciągu. Oblicz $n$.

**44.** Skończony ciąg arytmetyczny ma nieparzystą liczbę wyrazów. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 2, a ostatni jest równy 42. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest o 242 większa od sumy wyrazów o numerach parzystych. Oblicz różnicę tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

**45.** Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Jedna z przyprostokątnych ma długość 6. Oblicz długości drugiej przyprostokątnej oraz przeciwprostokątnej (rozważ dwie możliwości).

**46.** Oblicz długości boków prostokąta, jeżeli długości dwóch z nich razem z długością przekątnej tworzą ciąg arytmetyczny oraz:
a) obwód prostokąta jest równy 14, b) pole prostokąta jest równe 48.

**47.** Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 36. Jeśli od pierwszej i drugiej liczby odejmiemy 7, a do trzeciej dodamy 9, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

**48.** Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 114. Jeśli pierwszą i drugą liczbę pozostawimy bez zmian, a od trzeciej odejmiemy 6, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

**49.** Kapitał w wysokości 1000 zł złożono w banku na procent składany. Jaka będzie wielkość kapitału po $n$ latach przy oprocentowaniu rocznym $r$?

a) $n = 2$, $r = 4\%$ b) $n = 6$, $r = 5\%$ c) $n = 10$, $r = 4\%$

**50.** Bank przyjął kwotę 10 000 zł na 3% rocznie i pożyczył ją na 8% rocznie. Ile zyska bank w ciągu czterech lat, a ile – w ciągu ośmiu lat?

**51.** Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 500 zł złożony w banku na pięć lat, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki są kapitalizowane:

a) co pół roku, b) co dwa miesiące, c) co miesiąc?

**52.** W bankach $A$, $B$, $C$ lokaty terminowe są oprocentowane 2% w skali roku. W banku $A$ odsetki są kapitalizowane co rok, w banku $B$ – co kwartał, a w banku $C$ – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 2000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

**53.** Banki $A$, $B$, $C$ i $D$ oferują następujące warunki oprocentowania lokat:
bank $A$ – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
bank $B$ – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,
bank $C$ – 5,75% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,
bank $D$ – 5,8% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.
Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

**54.** Dany jest ciąg $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{2}{n}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Liczby $a_1$, $a_2$, 3 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. | P | F |
| 2. | Trzeci wyraz ciągu $a_n$ jest równy $\frac{5}{3}$. | P | F |

**55.** Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg $a_n = 3n - n^2$ jest:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A. | nierosnący, | ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ różnica $a_{n+1} - a_n$ jest | 1. | nieujemna. |
| B. | niemalejący, | | 2. | równa zero. |
| C. | stały, | | 3. | niedodatnia. |

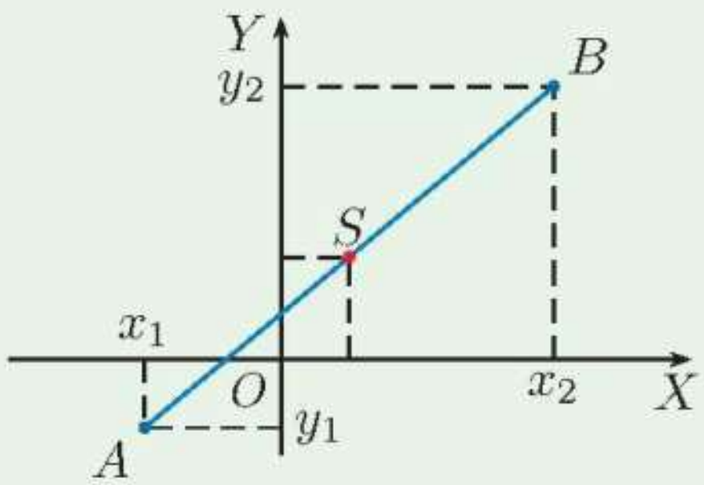
# 5.11. Geometria analityczna

Dane są punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.
**Środek odcinka** $AB$ ma współrzędne:

$$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

**Długość odcinka** $AB$ wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$




**Odległość punktu** $P(x_0, y_0)$ **od prostej** $l$ o równaniu $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Wyznacz współrzędne środka odcinka $AB$.

a) $A(-3, 2)$, $B(5, -6)$
b) $A(4, -3)$, $B(0, 2)$
c) $A(-4, 0)$, $B(4, -8)$
d) $A(6-\sqrt{2}, 1)$, $B(\sqrt{2}, -8)$

**2.** Punkt $S$ jest środkiem odcinka $AB$. Wyznacz współrzędne punktu $B$.

a) $A(5, -1)$, $S(-1, 1)$
b) $A(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $S(\frac{1}{2}, 3\sqrt{3})$

**3.** Punkt $S$ jest środkiem odcinka $AB$. Oblicz $a$ i $b$.

a) $A(1, -3)$, $B(2, 5)$, $S(a, b)$
b) $A(-3, a)$, $B(b, 2)$, $S(0, 5)$
c) $A(0, 4)$, $B(a, b)$, $S(2, -1)$
d) $A(a, 2)$, $B(2a, b)$, $S(b, a)$

**4.** Oblicz odległość punktu $A(3, 2)$ od środka odcinka $BC$.

a) $B(-5, -2)$, $C(3, 0)$
b) $B(7\frac{1}{2}, 2)$, $C(4\frac{1}{2}, -4)$

**5.** Dany jest punkt $A(-4, 1)$. Oblicz długość odcinka $AB$, jeśli wiadomo, że:

a) jego środkiem jest punkt $(1, -4)$,
b) jego środek leży na osi $OY$, a rzędna punktu $B$ jest równa $-5$.

**6.** Oblicz obwód trójkąta $ABC$.

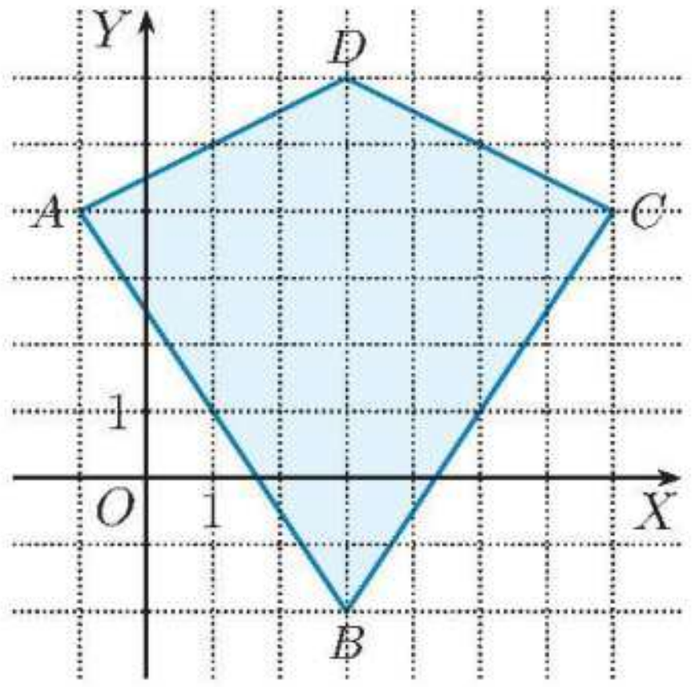
a) $A(2, -1)$, $B(6, 7)$, $C(2, 4)$
b) $A(0, 3)$, $B(2, -1)$, $C(6, 7)$

**7.** Oblicz długości środkowych trójkąta $ABC$.

a) $A(2, 1)$, $B(16, 7)$, $C(6, 11)$
b) $A(-2, -9)$, $B(2, -10)$, $C(3, 11)$

**8.** a) Oblicz obwód deltoidu przedstawionego na rysunku.

b) Oblicz obwód prostokąta, którego wierzchołkami są środki boków tego deltoidu.




**9.** Sprawdź, czy trójkąt $ABC$ jest równoramienny. Czy jest to trójkąt prostokątny?

a) $A(-2,-2)$, $B(7,1)$, $C(1,4)$

b) $A(4,2)$, $B(-2,6)$, $C(8,-3)$

D **10.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach:

a) $A(-3,2)$, $B(0,1)$ i $C(2,7)$ jest prostokątny, oraz oblicz jego pole,

b) $A(-2,1)$, $B(2,3)$ i $C(3,-4)$ jest równoramienny, oraz oblicz jego pole.

**11.** Wyznacz równania ogólne i kierunkowe (jeśli jest to możliwe) prostej $AB$.

a) $A(2,0)$, $B(-1,6)$

b) $A(-10,3)$, $B(10,3)$

c) $A(-4,-2)$, $B(5,4)$

d) $A(0,4)$, $B(2,0)$

e) $A(-4,5)$, $B(10,5)$

f) $A(\sqrt{2},0)$, $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$

**12.** Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-1,1)$ i równoległej do prostej $l$.

a) $l\colon 6x-y=0$ b) $l\colon 3x-3=0$ c) $l\colon x+6y=0$

**13.** Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(1,1)$ i prostopadłej do prostej $l$.

a) $l\colon 2x-6=0$ b) $l\colon 2x+y+3=0$ c) $l\colon \sqrt{2}x-y+5=0$

**14.** Wyznacz równanie osi symetrii odcinka $AB$.

a) $A(4,-14)$, $B(4,25)$ b) $A(-2,-2)$, $B(2,10)$ c) $A(-1,7)$, $B(5,-2)$

**15.** Oblicz wysokość trójkąta $ABC$ opuszczoną z wierzchołka $C$, a następnie pole tego trójkąta.

a) $A(-3,1)$, $B(2,-4)$, $C(3,3)$ b) $A(-2,2)$, $B(6,6)$, $C(3,-3)$

**16.** Oblicz pole rombu $ABCD$.

a) $A(2,1)$, $B(5,2)$, $C(6,5)$, $D(3,4)$ b) $A(0,1)$, $B(5,3)$, $C(7,8)$, $D(2,6)$

**17.** Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego bok $CD$ jest zawarty w prostej $k$.

a) $A(0,3)$, $B(4,1)$, $k\colon y=-\frac{1}{2}x+5$ b) $A(-1,-3)$, $B(5,-1)$, $k\colon x=3y-5$

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**18.** Punkty $A'$ i $A''$ są obrazami punktu $A$ odpowiednio w symetrii względem osi $OX$ i osi $OY$. Wyznacz ich współrzędne i oblicz długość odcinka $A'A''$.

a) $A(1,-3)$ b) $A(-\sqrt{2},4)$ c) $A(7,0)$

**19.** Wyznacz współrzędne wierzchołków prostokąta $A'B'C'D'$ będącego obrazem prostokąta $ABCD$ w symetrii względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole ich części wspólnej.

a) $A(-1,-2)$, $B(3,-2)$, $C(3,1)$, $D(-1,1)$

b) $A(0,-2)$, $B(5,3)$, $C(2,6)$, $D(-3,1)$

**20.** Punkty $A_1$ i $B_1$ są odpowiednio obrazami punktów $A(-2,-3)$ i $B(2,7)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A_1$ i $B_1$.

**21.** Wyznacz $p$ i $q$, wiedząc, że punkty $A(3,p+1)$ i $B(2q-1,5)$ są symetryczne względem: a) osi $OX$, b) osi $OY$, c) punktu $O(0,0)$.

**22.** Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta $ABC$ względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.

a) $A(-1,-3)$, $B(3,1)$, $C(-9,5)$ b) $A(-3,-2)$, $B(3,-2)$, $C(0,4)$

**Okrąg** o środku w punkcie $S(a,b)$ i promieniu $r$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu $S$ jest równa $r$.
Punkt $(x,y)$ należy do tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

**23.** Wyznacz środek i promień okręgu określonego podanym równaniem.

a) $(x-1)^2+(y-3)^2=36$ c) $(x+3)^2+(y+\frac{1}{4})^2=3$

b) $(x+2)^2+(y-6)^2=144$ d) $(x-4)^2+(y+8)^2=8$

**24.** Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S$ i promieniu $r$.

a) $S(3,4)$, $r=3$ b) $S(-5,3)$, $r=\frac{2}{3}$ c) $S(-3,-2)$, $r=3\sqrt{2}$

**25.** Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S$ przechodzącego przez punkt $P$.

a) $S(2,0)$, $P(1,3)$ b) $S(3,-6)$, $P(5,-4)$ c) $S(2,1)$, $P(-5,-3)$

**26.** Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek $CD$.

a) $C(3,5)$, $D(7,7)$ b) $C(-5,4)$, $D(1,0)$ c) $C(2,-1)$, $D(9,6)$

**27.** Sprawdź, czy okrąg o średnicy $AB$ jest symetryczny do okręgu o średnicy $CD$ względem osi $OX$, osi $OY$ lub początku układu współrzędnych.

a) $A(1,0)$, $B(3,-6)$, $C(-5,-4)$, $D(1,-2)$

b) $A(-3,-1)$, $B(5,5)$, $C(-4,2)$, $D(2,-6)$

**28.** Wyznacz równanie okręgu o środku $S(-1,4)$, który jest styczny do:

a) osi $OX$, b) osi $OY$, c) prostej $4x-3y=9$.

**29.** Punkt $A$ należy do okręgu stycznego do osi $OY$ w punkcie $B(0,2)$. Wyznacz równanie tego okręgu, jeśli: a) $A(6,2)$, b) $A(-2,-2)$.

**30.** Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A$ i $B$, którego środek należy do prostej $l$.

a) $A(3,-2)$, $B(5,0)$, $l: y=x+1$ b) $A(-1,4)$, $B(2,1)$, $l: y=2x+6$

**31.** Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki prostokąta $ABCD$.

a) $A(-2,1)$, $B(-2,-3)$, $C(6,-3)$, $D(6,1)$

b) $A(-5,-2)$, $B(2,-3)$, $C(3,4)$, $D(-4,5)$

**32.** Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym $ABC$.

a) $A(-1,2)$, $B(6,-2)$, $C(3,4)$ b) $A(2,3)$, $B(5,-1)$, $C(-3,-7)$

**33.** Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie $ABC$.

a) $A(-9,0)$, $B(-1,-4)$, $C(3,4)$ b) $A(-1,1)$, $B(3,-1)$, $C(3,5)$

**34.** Dany jest okrąg o środku $S(1,2)$ i promieniu 2. Określ wzajemne położenie tego okręgu oraz okręgu danego równaniem:

a) $x^2+(y-2)^2=1$, c) $(x-5)^2+(y+1)^2=25$,

b) $(x+2)^2+(y+2)^2=8$, d) $(x-2)^2+(y-2)^2=16$.

**35.** Określ, ile punktów wspólnych ma podana prosta z okręgiem o równaniu $(x+2)^2+(y-3)^2=25$.

a) $x-2y+18=0$ b) $2x-y-6=0$ c) $4x-3y-8=0$

**36.** Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia podanej prostej i okręgu $(x-3)^2+(y-1)^2=25$.

a) $y=x+3$ b) $y=x-7$ c) $y=-x+5$

## Zestaw III – podsumowujący

**37.** Punkty $A(-4,3)$ i $B(-12,-1)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego $ABC$. Oblicz obwód tego trójkąta.

D **38.** Wykaż, że czworokąt o wierzchołkach $A(-2,-3)$, $B(4,1)$, $C(8,7)$ i $D(2,3)$ jest rombem. Oblicz długości przekątnych i pole tego rombu.

D **39.** Dane są punkty $A(-3,-5)$, $B(9,1)$, $C(6,4)$ i $P(2,-1)$, $R(3,0)$, $S(-1,2)$. Wykaż, że trójkąty $ABC$ i $PRS$ są podobne. Podaj skalę podobieństwa.

**40.** Punkty $A(0,-2)$ i $B(6,1)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $S\left(1,\frac{3}{2}\right)$. Oblicz obwód tego równoległoboku.

**41.** Punkty $A(2,-9)$ i $C(-7,4)$ są końcami przekątnej kwadratu $ABCD$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten kwadrat.

**42.** Punkt $A$ leży na osi $OX$, a punkt $B$ ma współrzędne $(-5,-4)$. Środek odcinka $AB$ leży na prostej $y=2x$. Oblicz długość tego odcinka.

**43.** Dane są punkty $A(-1,1)$, $B(3,-1)$ i $C(7,5)$. Wyznacz równania prostych zawierających środkowe trójkąta $ABC$ oraz współrzędne punktu ich przecięcia.

**44.** Punkty $A(-2,0)$ i $B(2,0)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego $ABC$ o polu 8. Wyznacz współrzędne punktu $C$.

**45.** Punkty $A(0,1)$ i $C(0,3)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego $ABC$ o kącie prostym przy wierzchołku $C$. Wyznacz współrzędne punktu $B$, jeśli wiadomo, że pole trójkąta jest równe 5.

**46.** Punkty $A(0,0)$ i $B(10,0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku $C$. Przyprostokątna $AC$ jest zawarta w prostej $y=3x$. Wyznacz współrzędne punktu $C$ oraz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

**47.** Dane są dwa wierzchołki trójkąta $ABC$: $A(-3,1)$ i $B(3,-2)$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Jedna z jego wysokości jest zawarta w prostej $y=2x+2$. Wyznacz współrzędne wierzchołka $C$.

**48.** Prosta o równaniu $y=-x+3$ jest symetralną odcinka $AB$. Wyznacz równanie prostej $AB$ i współrzędne punktu $B$, jeśli $A(-1,-2)$.

**49.** Dany jest trapez o wierzchołkach $A(-2,1)$, $B(3,-4)$, $C(2,3)$ i $D(1,4)$.

a) Wyznacz równania prostych zawierających boki $AB$, $CD$ i $AD$.

D b) Uzasadnij, że trapez ten jest prostokątny, i oblicz jego pole.

**50.** Dane są punkty $A(0,0)$, $B(10,10)$ i $C(4,13)$. Z wierzchołka $A$ trójkąta $ABC$ poprowadzono wysokość $AD$. Wyznacz współrzędne punktu $D$ i oblicz pole trójkąta $ABC$.

**51.** Wyznacz równania prostych zawierających boki trójkąta $ABC$, jeśli dane są równania dwóch prostych zawierających jego wysokości oraz współrzędne wierzchołka $A$.

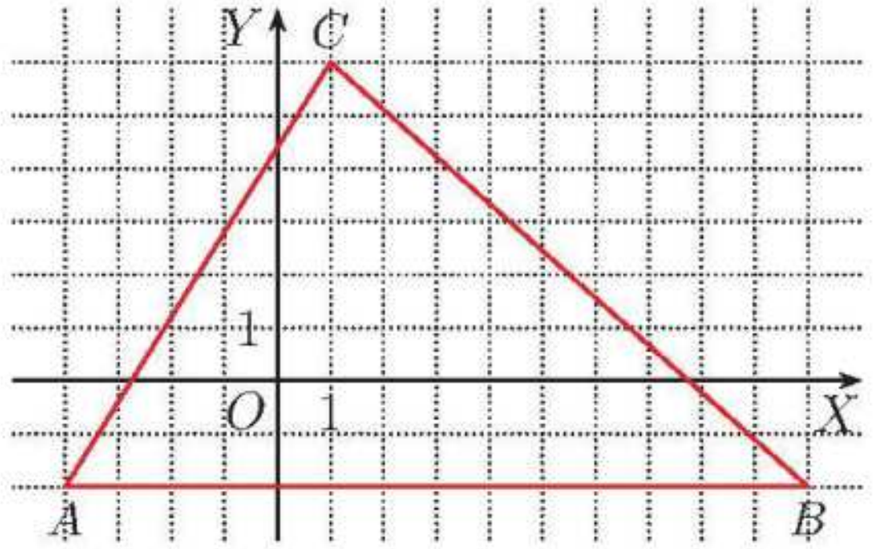
a) $x+y=0$, $y=3x$, $A(7,-1)$ b) $y=2x+7$, $x=-7$, $A(3,-2)$

**52.** Punkty $P$, $R$, $S$ są środkami boków pewnego trójkąta. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

a) $P(-3,1)$, $R(-2,-6)$, $S(0,0)$ b) $P(-4,-2)$, $R(0,-4)$, $S(2,2)$

**53.** Punkty $A(2,-3)$, $B(4,3)$ i $C(-2,5)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Wyznacz równanie osi symetrii tego trójkąta.

**54.** Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta $ABC$ (rysunek obok) względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.




**55.** Odcięta punktu $A$ jest równa 5, a rzędna punktu $C$ jest równa 8. Punkt $B$ jest symetryczny do punktu $A$ względem osi $OX$, a punkt $C$ – do punktu $B$ względem osi $OY$. Podaj współrzędne punktów $A$, $B$ i $C$.

**56.** Odcinek $A'B'$ jest obrazem odcinka $AB$ w symetrii względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka $AB$, mając dany środek $S'(7,-8)$ odcinka $A'B'$ oraz punkt $A(-6,4)$.

**57.** Oblicz $a$ i $b$, jeśli wiadomo, że punkty $A(a,3)$ i $B(4a+1,2-b)$ są symetryczne względem: a) osi $OX$, b) osi $OY$, c) punktu $(0,0)$.

**58.** Punkty $A(-3,-2)$, $B(5,2)$, $C(1,6)$ i $D$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz współrzędne punktu $D$.

**59.** Wyznacz punkty przecięcia okręgu z osiami układu współrzędnych.

a) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ b) $(x+3)^2+(y-2)^2=16$

**60.** Okrąg o środku w punkcie $S$ jest styczny do prostej $l$. Wyznacz równanie okręgu oraz współrzędne punktu styczności.

a) $S(4,-1)$, $l$: $3x+y-1=0$ c) $S(3,2)$, $l$: $y=\frac{1}{2}x-2$

b) $S(-4,3)$, $l$: $4x+3y-18=0$ d) $S(-4,2)$, $l$: $y=-\frac{2}{3}x-5$

**61.** Proste $y=2x+4$ i $y=2x-6$ są styczne do pewnego okręgu. Oblicz promień tego okręgu. Wyznacz równanie prostej równoległej do danych prostych, jeśli wiadomo, że należy do niej środek tego okręgu.

**62.** Punkty $A(2,-1)$, $B(5,2)$ i $C(0,7)$ są trzema wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Wyznacz równanie stycznej do okręgu, do którego należą wszystkie wierzchołki tego prostokąta, jeśli punktem styczności jest punkt $D$.

**63.** Punkty $A(-5,2)$ i $B(-1,-2)$ należą do okręgu $(x+1)^2+(y-2)^2=16$. Wyznacz współrzędne punktu $C$ należącego do tego okręgu tak, aby trójkąt $ABC$ o podstawie $AB$ był równoramienny.

**64.** Punkty $A(-1,-3)$ i $B(6,-2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$, którego osią symetrii jest prosta $y=3x$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Jednym z wierzchołków tego rombu jest punkt $(-6,2)$. | P | F |
| 2. | Drugą osią symetrii tego rombu jest prosta $y=-3x$. | P | F |

**65.** Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi tak, aby dla każdej z nich zdanie było prawdziwe.

Prostą styczną do okręgu $(x+4)^2+(y-2)^2=9$ jest prosta:

**A.** $x=-7$, **C.** $x=-3$, **E.** $y=-1$, **G.** $y=3$.

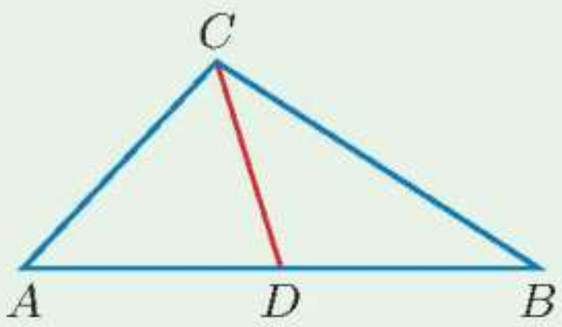
**B.** $x=-6$, **D.** $x=-2$, **F.** $y=2$,

**66.** Dany jest okrąg $(x+2)^2+(y+1)^2=5$.

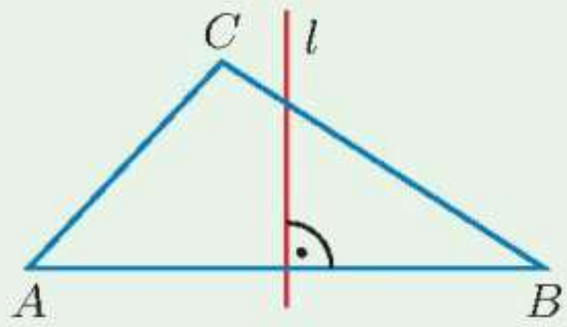
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Środek tego okręgu leży w I ćwiartce układu współrzędnych. | P | F |
| 2. | Okrąg ten przecina oś $OY$ w punktach $(0,0)$ i $(0,-2)$. | P | F |

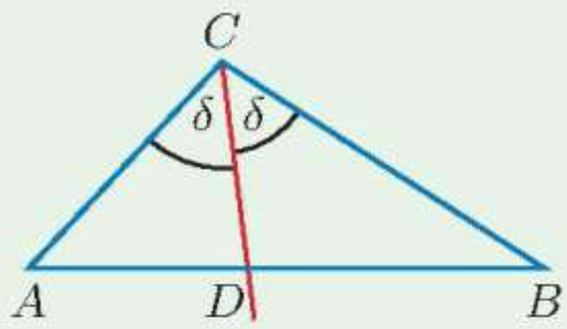
# 5.12. Planimetria




**Środkowa** trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku (np. odcinek $CD$).

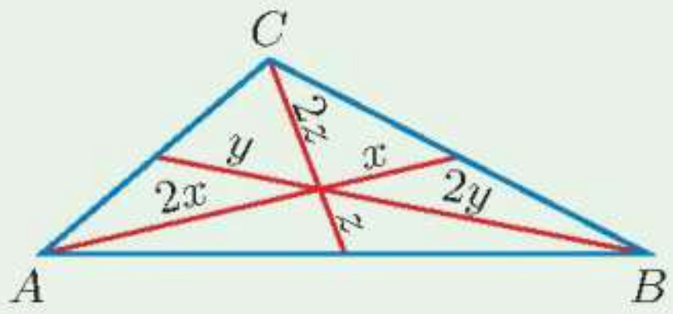



**Symetralna** boku trójkąta to prosta prostopadła do tego boku i przechodząca przez jego środek (np. prosta $l$).

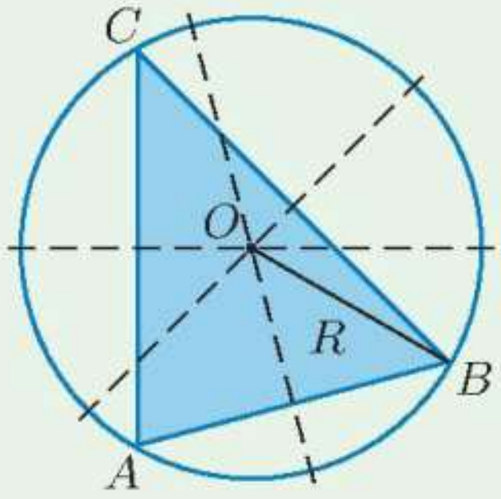


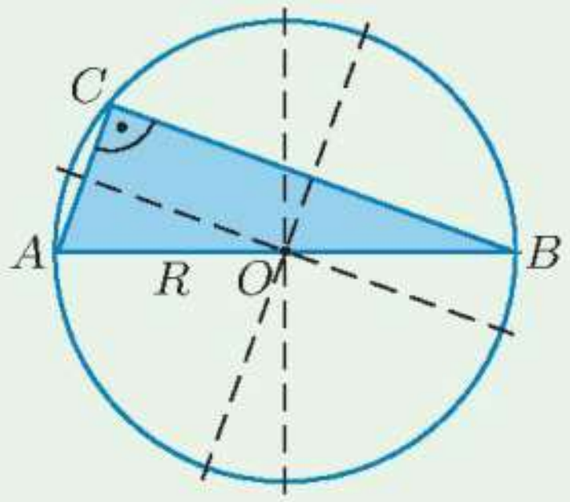

**Dwusieczna** kąta wewnętrznego trójkąta to półprosta o początku w wierzchołku tego kąta, dzieląca go na dwa kąty przystające (np. półprosta $CD$).

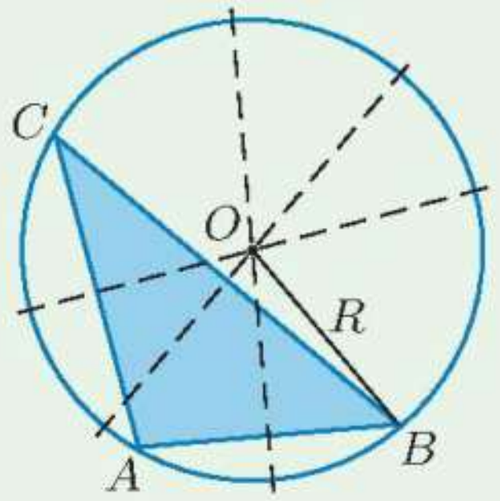
W dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, zwanym **środkiem ciężkości** trójkąta. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.



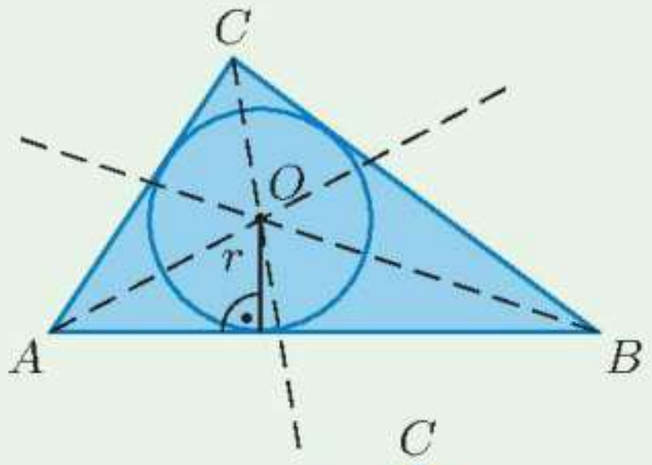

Symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu opisanego** na tym trójkącie.




Dwusieczne kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu wpisanego** w ten trójkąt.

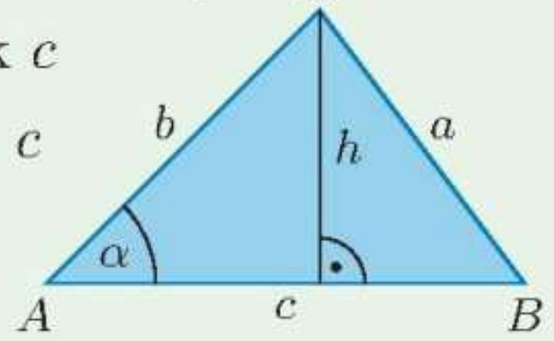



**Wzory na pole trójkąta**

$P = \frac{1}{2}ch$, gdzie $h$ jest wysokością opuszczoną na bok $c$

$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, gdzie $\alpha$ jest kątem między bokami $b$ i $c$

$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie $r$ jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt




$P = \frac{abc}{4R}$, gdzie $R$ jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie

$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$

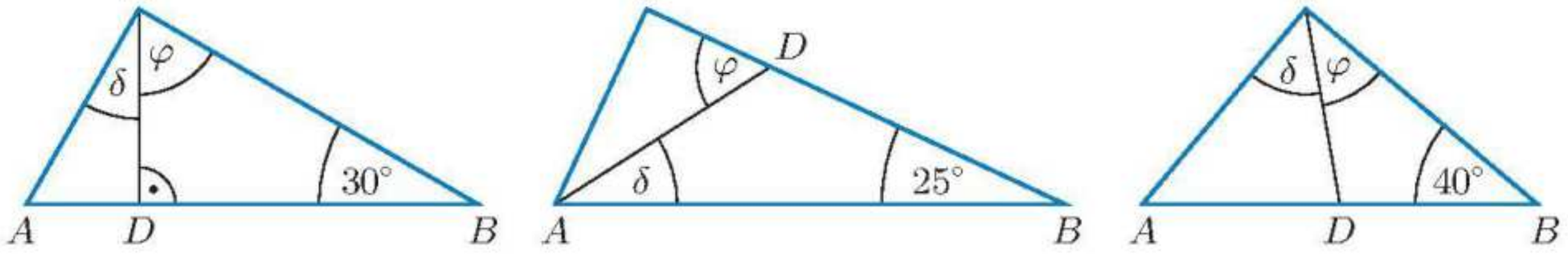
## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Trójkąt $ABC$ jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku $C$. Oblicz miary kątów $\delta$ i $\varphi$, jeśli wiadomo, że odcinek:

a) $CD$ jest wysokością,

b) $AD$ jest zawarty w dwusiecznej,

c) $CD$ jest środkową.




**Wskazówka do podpunktu c).** W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

**2.** Długość jednej z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 3. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

a) wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa $\sqrt{5}$,

b) środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego jest równa 2,5,

c) odcinek dwusiecznej kąta prostego zawarty w trójkącie jest równy $2\sqrt{2}$.

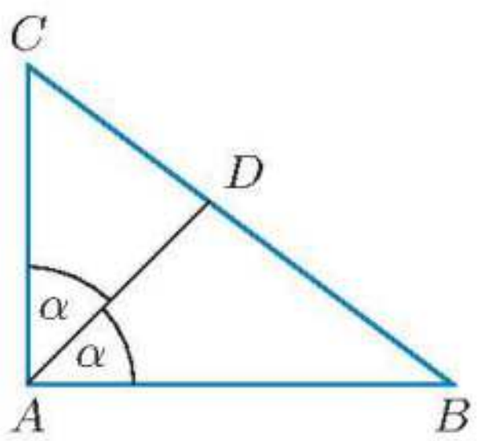
**Wskazówka do podpunktu c).** Zapisz pole trójkąta jako sumę pól trójkątów, na które podzieliła go dwusieczna.

**3.** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 cm i 4 cm. Oblicz:

a) długości środkowych tego trójkąta,

b) wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną,

c) długość odcinka $AD$ (rysunek obok).




**4.** Dwa boki trójkąta mają długości $3\sqrt{3}$ i 6, a kąt między nimi zawarty ma miarę $30°$. Oblicz:

a) pole tego trójkąta,

b) wszystkie wysokości tego trójkąta.

**5.** Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej długości 18 cm. Środkowe tego trójkąta przecinają się w punkcie $P$. Oblicz sumę odległości punktu $P$ od wierzchołków tego trójkąta.

**6.** W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Przeciwprostokątna została podzielona przez punkt styczności z okręgiem na odcinki o długościach 2 cm i 3 cm. Oblicz długości przyprostokątnych oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

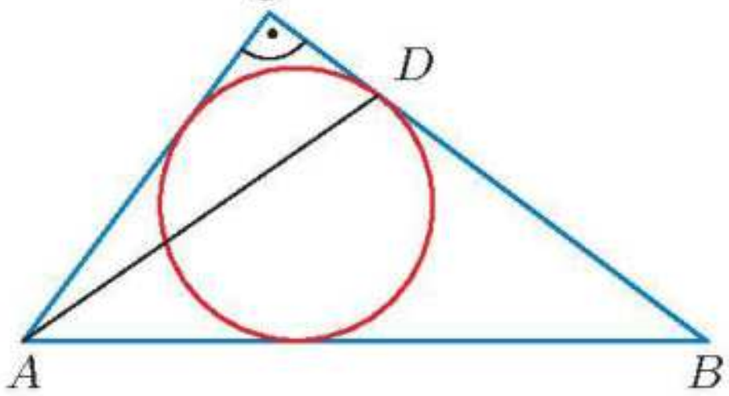
**7.** Oblicz pole trójkąta prostokątnego o jednej z przyprostokątnych długości 6 cm, jeśli wiadomo, że:

a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2 cm,

b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 4 cm.

**8.** Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 12,5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3. Oblicz pole tego trójkąta.

**9.** Dane są długości boków trójkąta prostokątnego $ABC$ (rysunek obok): $|AB| = 10$, $|BC| = 8$ i $|AC| = 6$. $D$ jest punktem styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z bokiem $BC$. Oblicz długość odcinka $AD$.




**10.** Podstawa w trójkącie równoramiennym ma długość 8 cm, a wysokość na nią opuszczona jest równa 4 cm. W trójkąt ten wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na które ramię trójkąta zostało podzielone przez punkt styczności z okręgiem.

**11.** W okrąg o promieniu 5 cm wpisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120°. Oblicz długości boków tego trójkąta.

**12.** Na okręgu o promieniu 6 cm opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120°. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

**Cechy podobieństwa trójkątów**

**Cecha BBB:** jeśli długości trzech boków jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

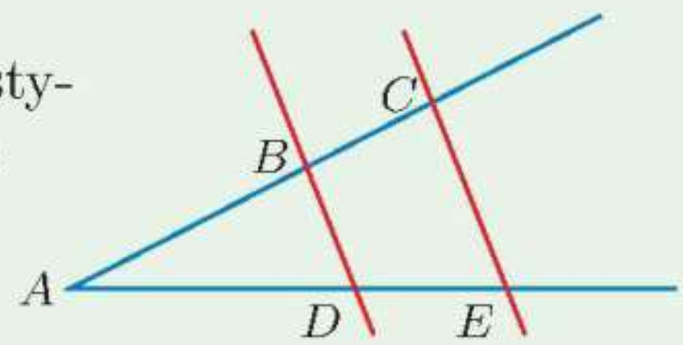
**Cecha BKB:** jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

**Cecha KKK:** jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

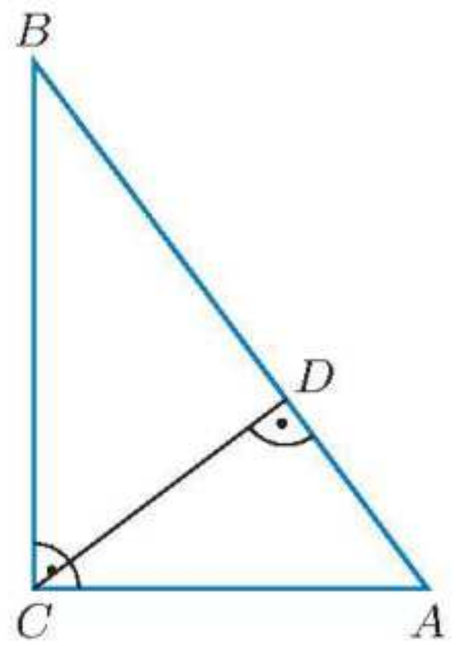
**Twierdzenie Talesa**

Jeżeli ramiona kąta $A$ przetniemy dwiema prostymi równoległymi $BD$ i $CE$ (rysunek obok), to:

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}, \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|}$$



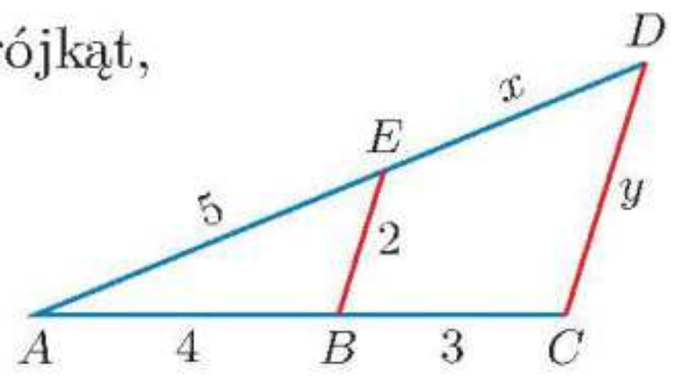
**13.** W trójkącie prostokątnym $ABC$ z wierzchołka kąta prostego opuszczono wysokość $CD$ (rysunek obok). Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty $ABC$, $ADC$ i $BCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 3$ oraz $|CD| = 4$.




**14.** W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki o długościach 4 cm i 9 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

**15.** W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku 1:4. Oblicz stosunek:
a) pól trójkątów, na które wysokość dzieli ten trójkąt,
b) długości przyprostokątnych tego trójkąta.

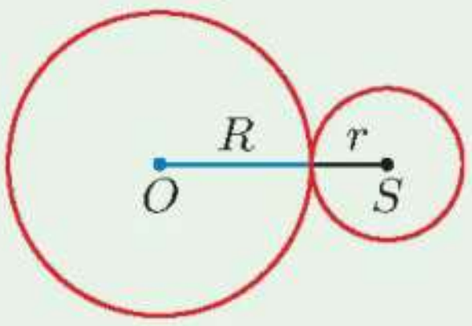
**16.** Odcinki $BE$ i $CD$ są równoległe (rysunek obok). Oblicz $x$ i $y$.




**17.** W trójkącie $ABC$ poprowadzono dwie proste równoległe do boku $AB$. Podzieliły one trójkąt na trzy figury o równych polach. Oblicz długości odcinków, na które te proste podzieliły bok $AC$, jeśli ma on długość $3\sqrt{3}$.

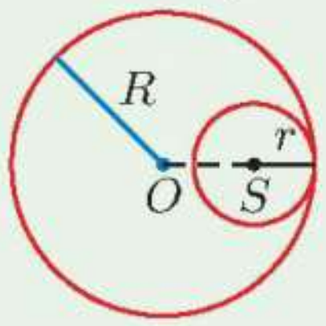
**Okręgi styczne** (mają jeden punkt wspólny)

styczne zewnętrznie



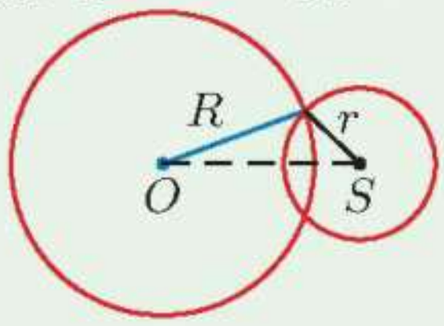

$|OS| = R + r$

styczne wewnętrznie




$|OS| = |R - r|$

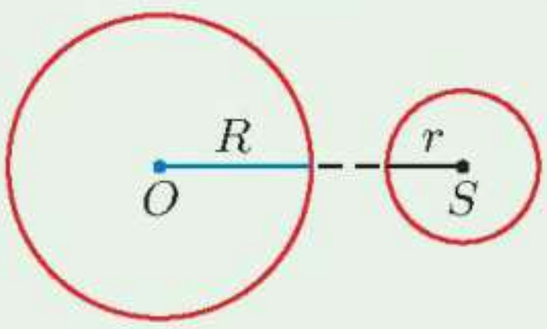
**Okręgi przecinające się** (mają dwa punkty wspólne)




$|R - r| < |OS| < R + r$

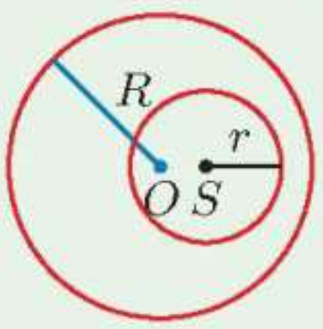
**Okręgi rozłączne** (nie mają punktów wspólnych)

rozłączne zewnętrznie




$|OS| > R + r$

rozłączne wewnętrznie




$|OS| < |R - r|$

**18.** Dane są dwa okręgi o promieniach $r$ i $R$. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli wiadomo, że odległość między ich środkami wynosi $2\sqrt{5}$ oraz:

a) $r = \sqrt{5}$, $R = 3$,

b) $r = 1$, $R = 2$,

c) $r = 2$, $R = 2(\sqrt{5} - 1)$,

d) $r = 1{,}5$, $R = 3{,}5$.

**19.** Promienie dwóch okręgów są równe 2 i $x + 3$, a odległość między ich środkami jest równa 6. Dla jakiej wartości $x$ okręgi te są:

a) styczne zewnętrznie,

b) styczne wewnętrznie?

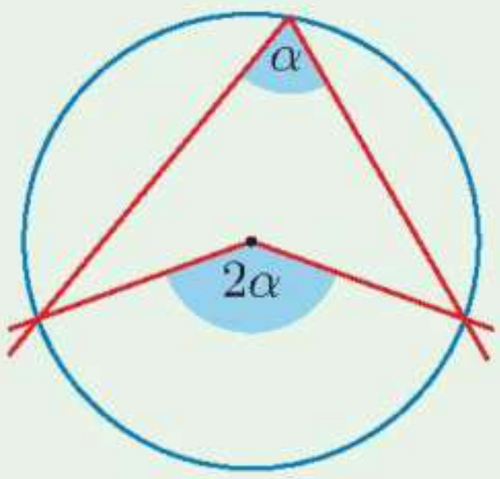
**20.** Dane są dwa okręgi o promieniach $r$ i $R$, a odległość między ich środkami jest równa $x$. Określ liczbę punktów wspólnych tych okręgów w zależności od $x$.

a) $r = 1$, $R = 5$

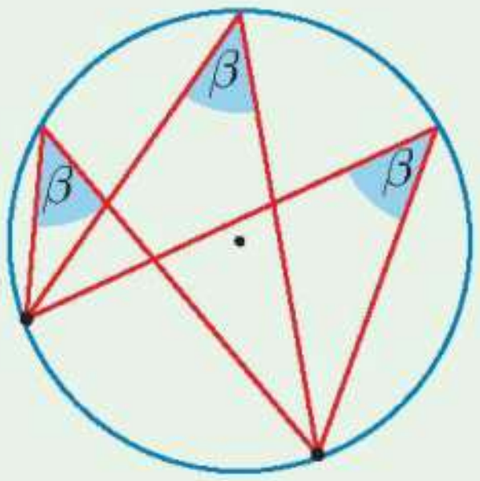
b) $r = \sqrt{3}$, $R = 2 - \sqrt{3}$

**21.** W trójkącie prostokątnym $ABC$ odcinek $CD$ jest wysokością, a przyprostokątne mają długości $|AC| = 5$ i $|BC| = 2\sqrt{5}$. Dane są również dwa okręgi: pierwszy o środku w wierzchołku $C$ i promieniu 1, drugi o środku w punkcie $D$ i promieniu $r$. Podaj liczbę punktów wspólnych tych okręgów w zależności od $r$.

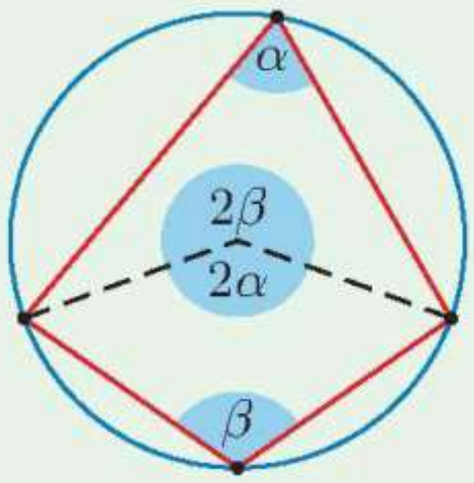
**22.** Dwa okręgi styczne zewnętrznie wpisano w kąt o wierzchołku $P$. Oblicz promienie tych okręgów, jeśli wiadomo, że odległość punktu $P$ od jednego ze środków okręgów wynosi 6 cm, a od drugiego – 14 cm.




Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwukrotnie większą od miary kąta wpisanego w ten okrąg opartego na tym samym łuku.



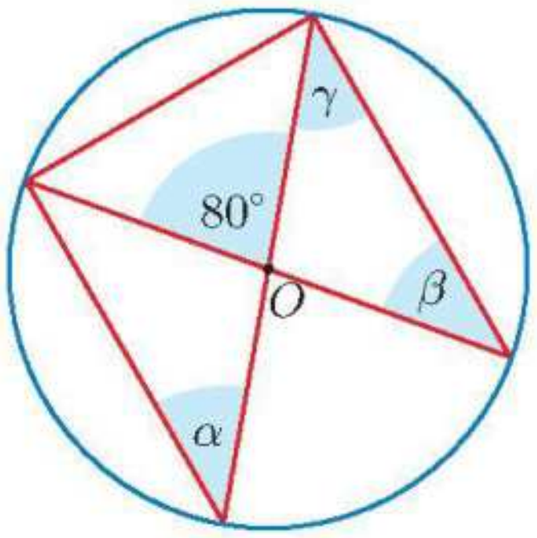

Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



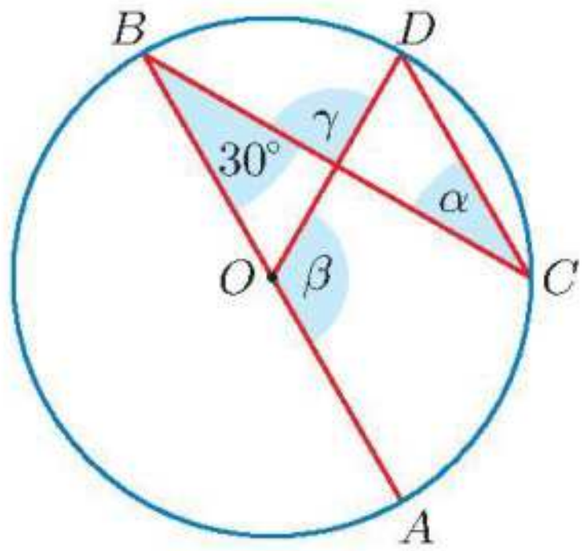

Suma miar kątów $\alpha$ i $\beta$ wpisanych w okrąg, jak na rysunku po lewej, jest równa $180°$.

**23.** Wyznacz miary kątów $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$.

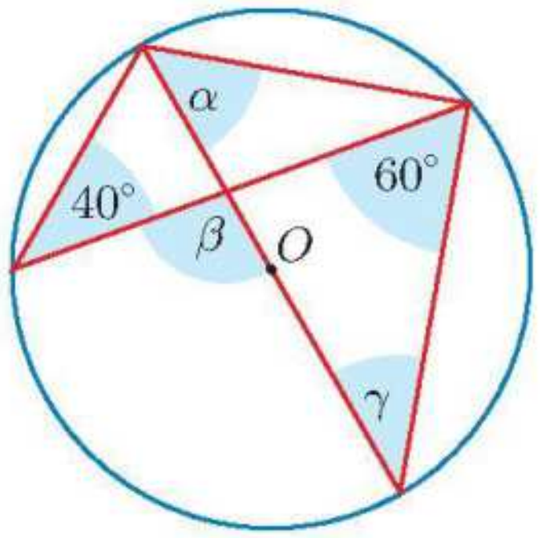
a)



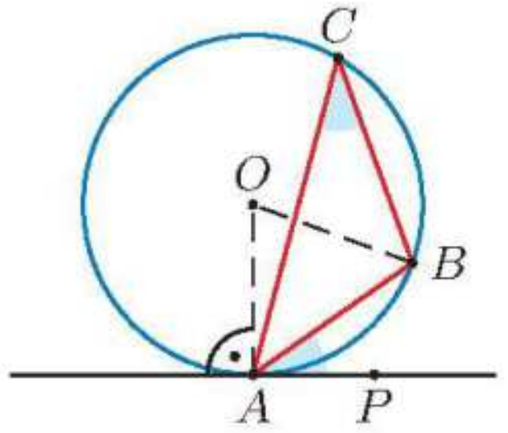

b) $AB \parallel CD$




c)



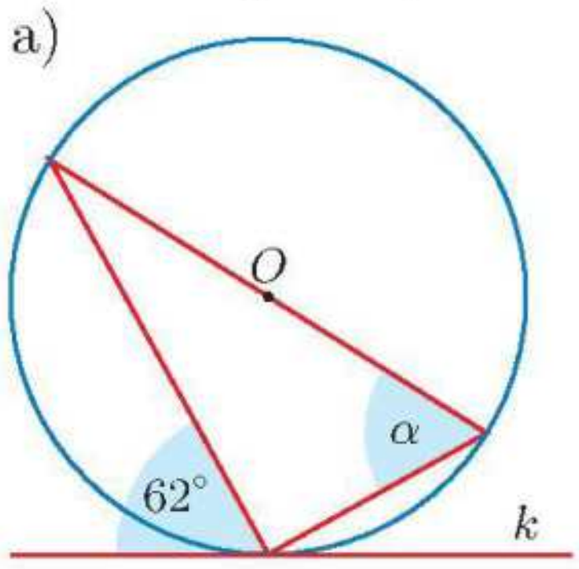

D **24.** Uzasadnij, że kąt $PAB$ między styczną do okręgu a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu $ACB$ opartemu na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy (rysunek obok).



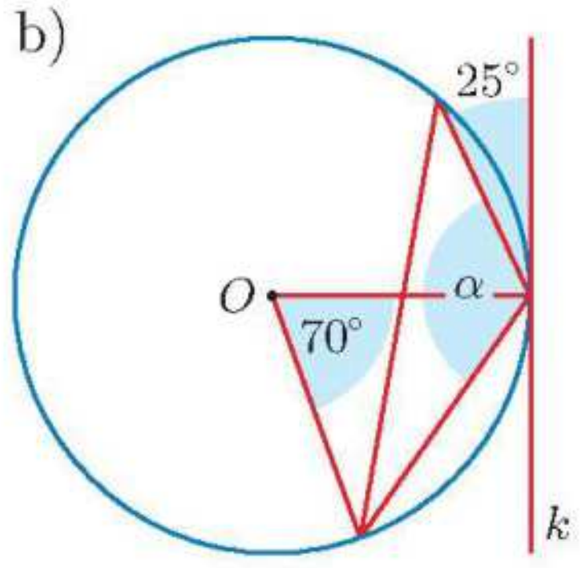

**25.** W okręgu o środku $O$ poprowadzono cięciwę $AB$. Miara kąta zawartego między cięciwą $AB$ a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie $B$ wynosi $58°$. Wyznacz miary kątów trójkąta $AOB$.

**26.** Prosta $k$ jest styczna do okręgu o środku $O$. Wyznacz miarę kąta $\alpha$.

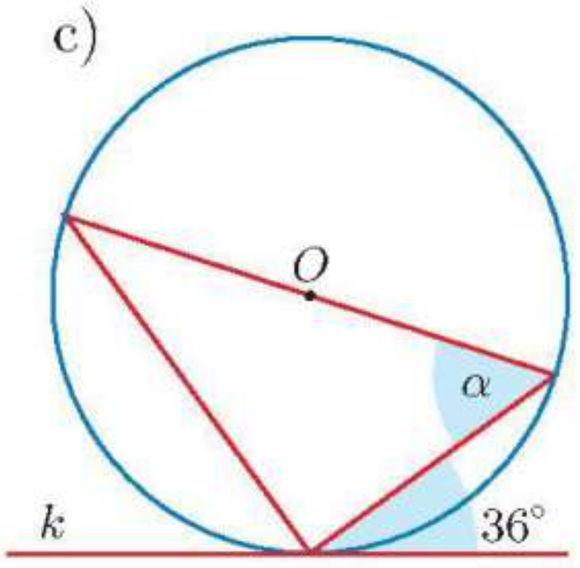
a)




b)




c)




**27.** W okręgu o promieniu 3 cm cięciwa $AB$ wyznacza łuk o długości $\frac{\pi}{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą $AB$ a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie $A$.

**28.** a) Podaj miary kątów wewnętrznych dziesięciokąta i dwunastokąta foremnego.

Wielokąt nazywamy **foremnym**, jeśli ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty wewnętrzne przystające.

D b) Wykaż, że kąty wewnętrzne $n$-kąta foremnego mają miarę $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$.

**29.** Oblicz długość boku wielokąta foremnego o obwodzie równym 20, jeśli suma miar kątów wewnętrznych tego wielokąta jest równa: a) $540°$, b) $1440°$.

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**30.** Różnica między długością przekątnej kwadratu a długością jego boku jest równa $d$. Wyznacz pole i obwód tego kwadratu.

**31.** a) Bok sześciokąta foremnego ma długość 1. Oblicz różnicę pola koła opisanego na tym sześciokącie i pola koła w niego wpisanego.

D b) Wykaż, że dla dowolnego wielokąta foremnego o boku długości $a$ różnica pola koła opisanego na tym wielokącie i pola koła w niego wpisanego jest równa $\frac{\pi}{4}a^2$.

**32.** Kąt ostry rombu ma miarę $70^\circ$. Oblicz miarę kąta zawartego między wysokościami poprowadzonymi z wierzchołka kąta rozwartego.

**33.** Przekątne równoległoboku mają długości 16 i 8, a kąt zawarty między nimi ma miarę $60^\circ$. Oblicz obwód tego równoległoboku.

**34.** Dłuższa podstawa trapezu ma długość 9 cm, a punkt przecięcia jego przekątnych dzieli je w stosunku $2:3$. Oblicz długość krótszej podstawy.

**35.** W trapezie równoramiennym przekątna ma długość $8\sqrt{5}$ cm, wysokość jest równa 8 cm, a stosunek długości podstaw wynosi $1:3$. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

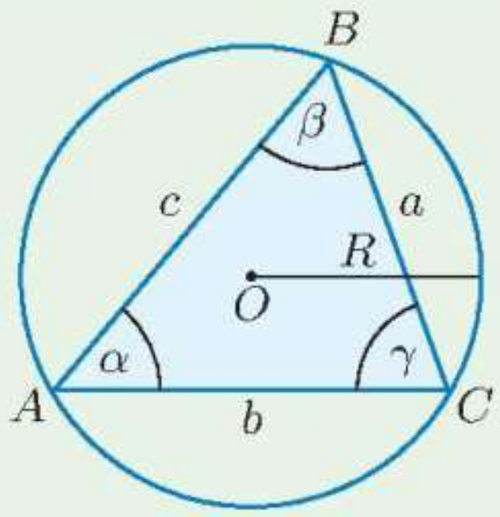
D **36.** a) Wykaż, że długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest średnią arytmetyczną długości jego podstaw.

b) Wysokość trapezu jest równa 5 cm, a odcinek łączący środki jego ramion ma długość 10 cm. Oblicz pole tego trapezu.

**Twierdzenie sinusów**

W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

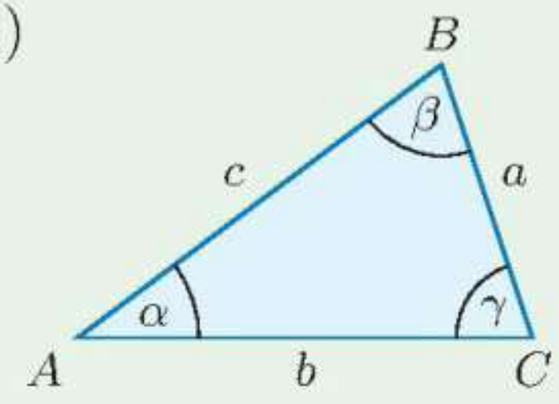
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$




**Twierdzenie cosinusów**

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



**37.** Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.
a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $c = 2\sqrt{3}$ b) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $b = 6$

**38.** Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta, w którym:
a) $a = 4\sqrt{3}$, $b = 4$, $\alpha = 60^\circ$, c) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 9$, $\alpha = 30^\circ$,
b) $b = 8$, $c = 4\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$, d) $b = 2\sqrt{2}$, $c = 4$, $\beta = 30^\circ$.

**39.** a) Najdłuższy bok trójkąta ma długość 12, a jeden z kątów ma miarę $135^\circ$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 5 ma miarę $120^\circ$. Oblicz długość najdłuższego boku tego trójkąta.

**40.** Oblicz długość boku $c$ trójkąta, w którym:
a) $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60^\circ$, b) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 2$, $\gamma = 150^\circ$.

**41.** Jeden z kątów trójkąta ma miarę $60^\circ$, a bok położony naprzeciwko tego kąta ma długość 9. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta, jeśli wiadomo, że jeden z nich jest dwa razy dłuższy od drugiego.

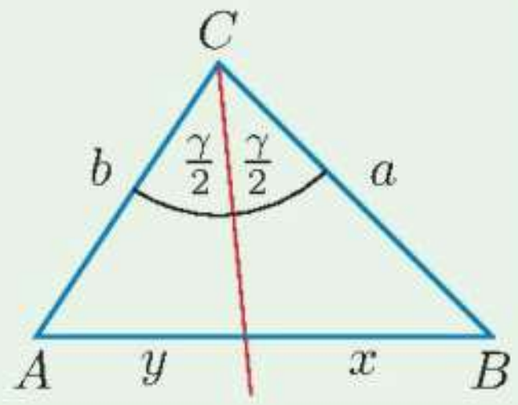
**42.** Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest rozwartokątny.
a) $a = 5$, $b = 8$, $c = 9$ b) $a = 10$, $b = 4$, $c = 7$

**43.** Długości boków równoległoboku są równe 4 i $4\sqrt{3}$, a jeden z kątów ma miarę $30^\circ$. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

**44.** Jeden z boków równoległoboku ma długość 7, a przekątne mają długości 6 i 10. Oblicz miarę kąta rozwartego zawartego między przekątnymi tego równoległoboku oraz długość jego drugiego boku.

**Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie**
Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok tego trójkąta na odcinki proporcjonalne do jego pozostałych boków.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$




**45.** W trójkącie $ABC$ kąt $ACB$ ma miarę $60^\circ$. Dwusieczna tego kąta przecina bok $AB$ w punkcie $D$. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że $|AD| = 2$ i $|BD| = 6$.

**46.** W trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej równej 12 cm dwusieczna jednego z kątów ostrych dzieli przeciwległy bok w stosunku $1:3$. Oblicz pole tego trójkąta.

## Zestaw III – podsumowujący

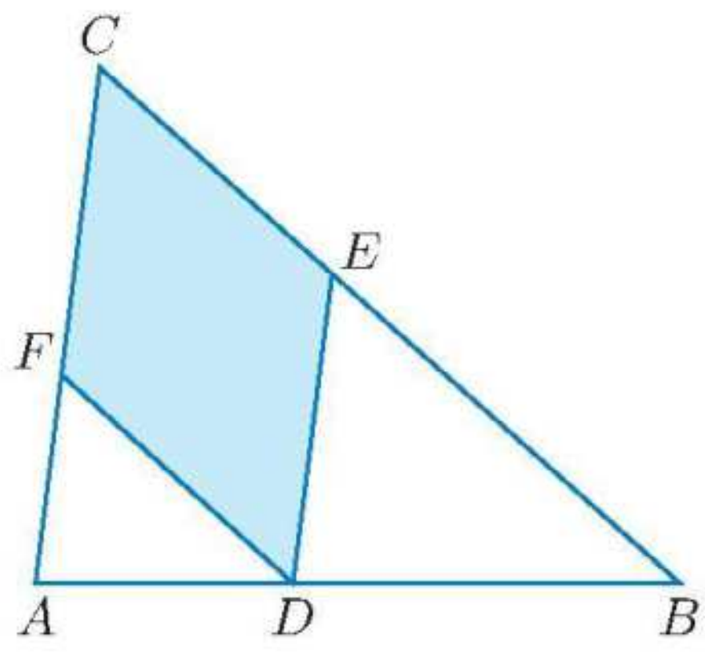
**47.** Podstawą trójkąta równoramiennego $ABC$ jest odcinek $AB$. Na boku $BC$ istnieje punkt $D$ taki, że $|AB| = |AD| = |CD|$. Oblicz miary kątów trójkąta $ABC$.

**48.** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 cm i 6 cm. Oblicz promień okręgu stycznego do obu przyprostokątnych, którego środek należy do przeciwprostokątnej.

**49.** Na boku $AD$ prostokąta $ABCD$ obrano taki punkt $E$, że trójkąty $ABE$, $DEC$ i $EBC$ są podobne. Wyznacz skale podobieństwa $\triangle ABE$ do $\triangle DEC$, $\triangle DEC$ do $\triangle EBC$, $\triangle ABE$ do $\triangle EBC$ i oblicz pole trójkąta $BEC$, jeśli wiadomo, że $\sphericalangle ECD = 60^\circ$ i $|DC| = 6$.

**50.** Podstawa $AB$ trójkąta równoramiennego $ABC$ ma długość 8 cm. Wysokość $CD$ równa jest długości odcinka $DE$ łączącego środek podstawy ze środkiem ramienia. Oblicz długość ramienia oraz pole tego trójkąta.

**51.** Dany jest trójkąt $ABC$ o bokach $|AC| = 4$ i $|BC| = 6$. Na bokach tego trójkąta obrano punkty $D$, $E$ i $F$ takie, że czworokąt $DECF$ jest rombem (rysunek obok). Oblicz długość boku tego rombu.




D **52.** W trójkącie równoramiennym $ABC$ o podstawie $AB$ wysokość $AD$ podzieliła bok $BC$ na odcinki długości $|BD| = k$ i $|CD| = l$. Wykaż, że $|AB| = \sqrt{2k(k+l)}$.

**53.** W trapezie równoramiennym kąty przy krótszej podstawie mają miarę dwa razy większą niż kąty przy dłuższej podstawie. Dłuższa podstawa ma długość 16 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

**54.** Długości podstaw trapezu prostokątnego są równe 7 cm i 3 cm, a ramię prostopadłe do podstaw ma długość 5 cm. Oblicz odległości punktu przecięcia się przekątnych tego trapezu od dłuższej podstawy i ramienia prostopadłego do podstaw.

**55.** Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe $a$ i $b$ $(a > b)$, a kąt ostry ma miarę $\alpha$. Wyznacz pole czworokąta, który powstał przez połączenie odcinkami środków sąsiednich boków tego trapezu.

**56.** Dany jest trapez prostokątny, którego dłuższa podstawa ma długość 6, ramię ma długość $3\sqrt{2}$ i tworzy z podstawą kąt ostry $\alpha$, a krótsza przekątna ma długość $\sqrt{6}$. Oblicz $\sin\alpha$ i obwód tego trapezu.

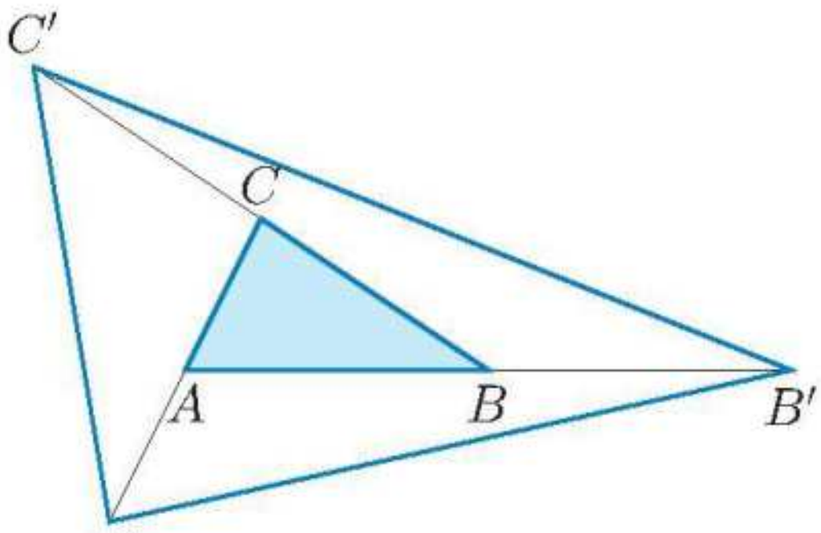
**57.** W trójkącie równoramiennym $ABC$ o podstawie $AB$ środkowe poprowadzone z wierzchołków $A$ i $B$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie $P$ oraz $|AP| = 6$. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

**58.** W trapezie kąty przy podstawie mają miary $60^\circ$ i $45^\circ$, a różnica kwadratów długości podstaw jest równa 30. Oblicz pole tego trapezu.

**59.** W równoległoboku $ABCD$ krótsza przekątna $BD$ ma długość $d$ i jest prostopadła do boków $AD$ i $BC$, a kąt ostry ma miarę $30^\circ$. Wyznacz długość przekątnej $AC$.

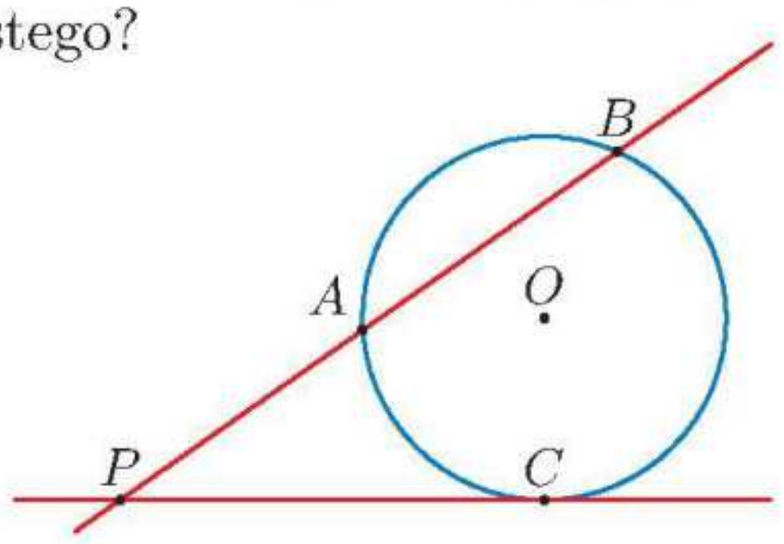
**60.** Długości podstaw trapezu są równe 6 i 9, a ramiona mają długości 2 i 4. Oblicz cosinusy kątów tego trapezu.

D **61.** Dane są trójkąty $ABC$ i $A'B'C'$ takie, że punkty $C$ i $A'$ są symetryczne względem punktu $A$, punkty $A$ i $B'$ – względem punktu $B$, a punkty $B$ i $C'$ – względem punktu $C$. Pole trójkąta $ABC$ jest równe $S$. Wykaż, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe $7S$.



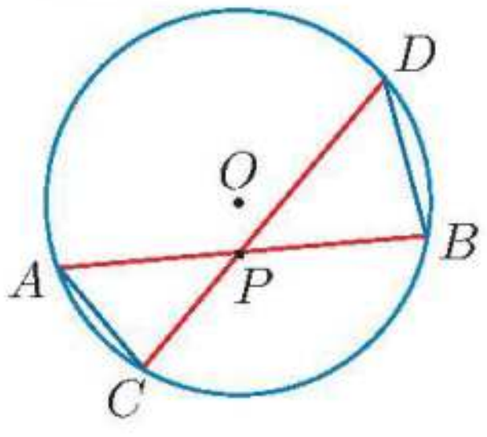

**62.** W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną w stosunku $2:3$. W jakim stosunku dzieli przeciwprostokątną wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego?

D **63.** Z punktu $P$ poprowadzono sieczną przecinającą dany okrąg w punktach $A$ i $B$ oraz styczną do okręgu w punkcie $C$ (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty $PCA$ i $PCB$ są podobne. Oblicz długości odcinków $PA$ i $PB$, jeśli $|PC| = 12$ i $|AB| = 10$.

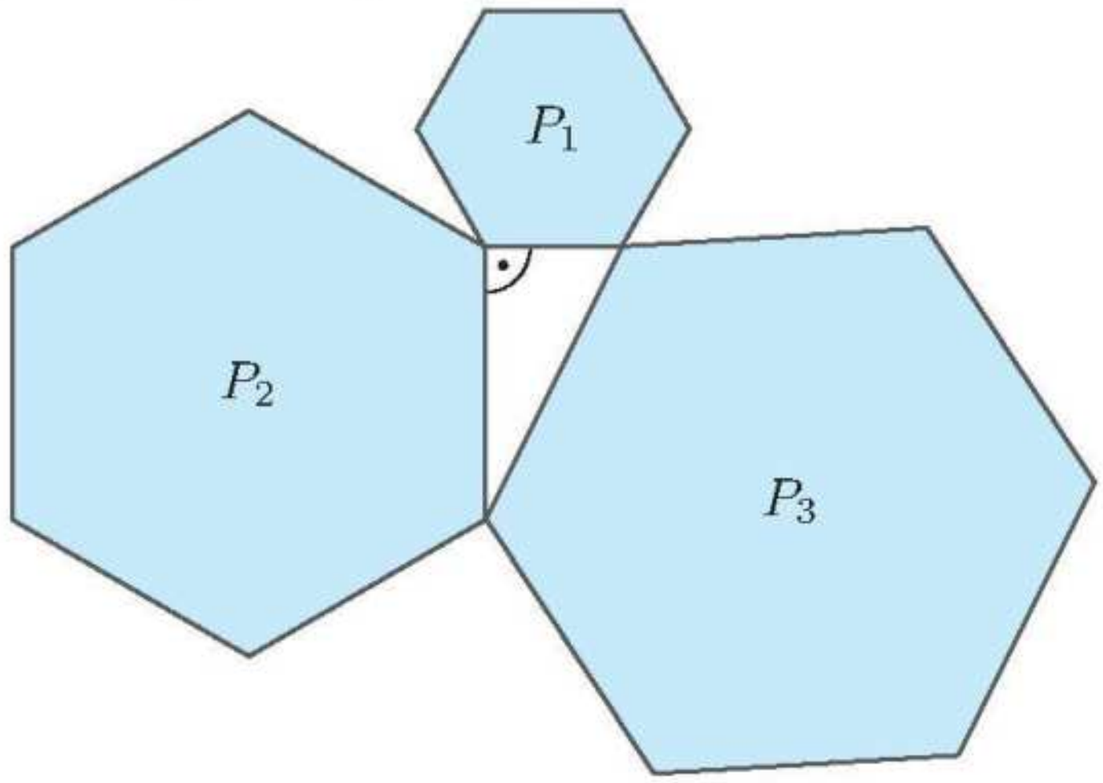



**Wskazówka.** Wykaż, że $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA$ oraz $\triangle PCA \sim \triangle PBC$.

D **64.** Wykaż, że trójkąty $ACP$ i $BDP$ (rysunek obok) są podobne, oraz uzasadnij, że $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$. Oblicz promień okręgu, jeśli $|AP| = 5$, $|PB| = 2$, $|CP| = 1$ i $\sphericalangle CBD = 150^\circ$.



**65.** Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano sześciokąty foremne o polach $P_1$, $P_2$, $P_3$ (rysunek poniżej).




D a) Wykaż, że $P_3 = P_1 + P_2$.

b) Przyprostokątne trójkąta mają długości 1 cm i 2 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki symetrii sześciokątów zbudowanych na tych przyprostokątnych.

**66.** W trójkącie równobocznym $ABC$ o obwodzie 6 na boku $AC$ wybrano punkt $P$ taki, że $\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{1}{5}$. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie $APB$.

**67.** Dany jest trójkąt $ABC$ o kątach $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 75^\circ$ oraz bokach $|AC| = 4\sqrt{3}$ i $|AB| = 6 + 2\sqrt{3}$. Oblicz długości środkowych tego trójkąta.

**68.** Pole trójkąta $ABC$ jest równe 60 cm$^2$. Punkt $P$ należy do boku $AB$ tego trójkąta, a punkt $Q$ – do boku $AC$. Oblicz pole trójkąta $APQ$.

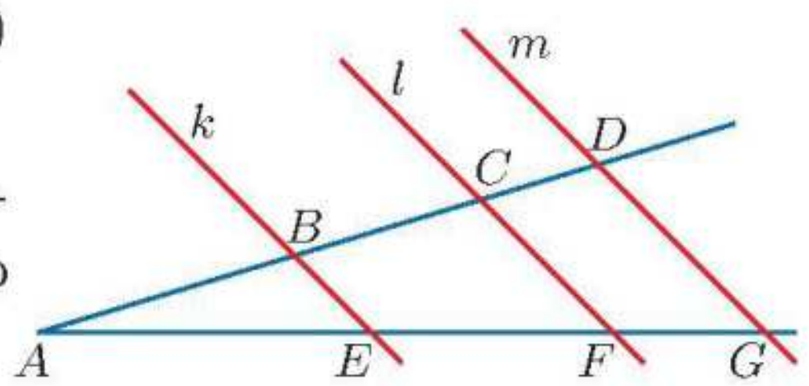
a) $|AP| = \frac{2}{3}|AB|$ i $|AQ| = \frac{1}{2}|AC|$ b) $|AP| = \frac{1}{4}|AB|$ i $|AQ| = \frac{3}{4}|AC|$

**69.** Dany jest trójkąt o bokach $a$, $b$ i $c$. Oblicz pole tego trójkąta oraz promień wpisanego w niego okręgu.

a) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$ b) $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$

**70.** Proste $k$, $l$, $m$ są równoległe (rysunek obok) oraz $|EF| = 8$, $|FG| = 5$, $|CD| = 4$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



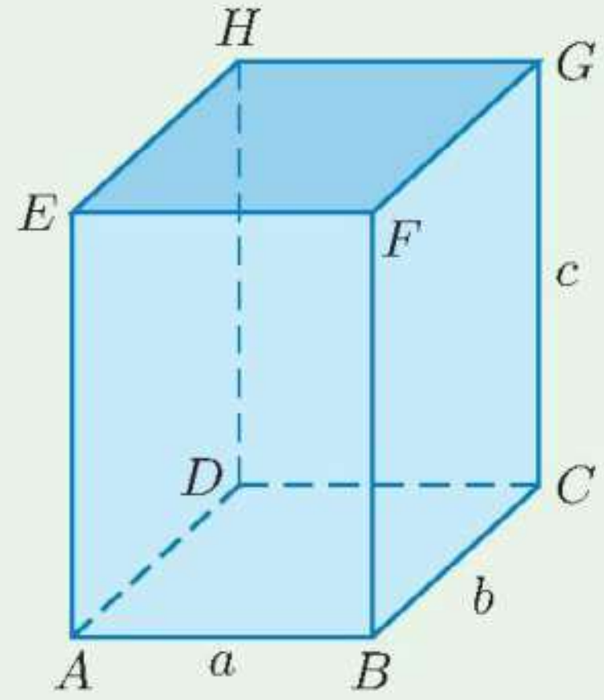

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\|BC\| = 6{,}5$ | P | F |
| 2. | Jeśli $\|AG\| = 24$, to $\|AB\| = 8$. | P | F |

# 5.13. Stereometria

**Oznaczenia**

$P_c$ – pole powierzchni całkowitej
$P_b$ – pole powierzchni bocznej
$P_p$ – pole powierzchni podstawy
$V$ – objętość

**Prostopadłościan**

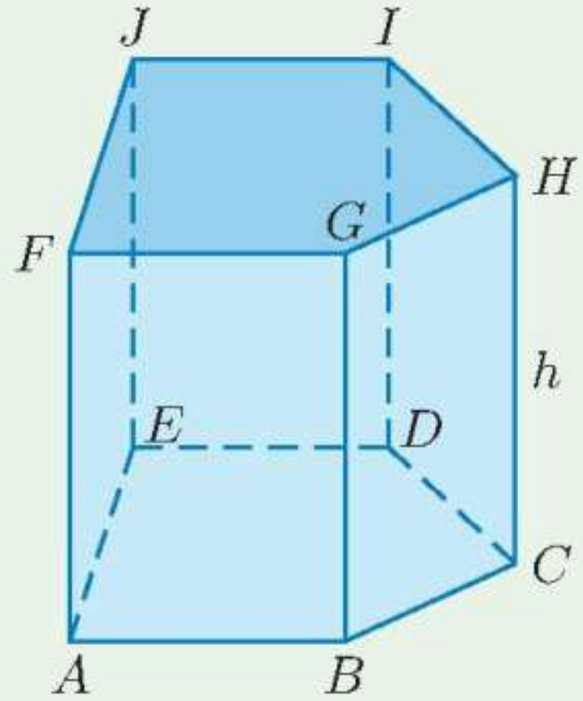



$P_c = 2(ab + bc + ac)$

$V = abc$

gdzie $a, b, c$ są długościami krawędzi prostopadłościanu

**Graniastosłup prosty**

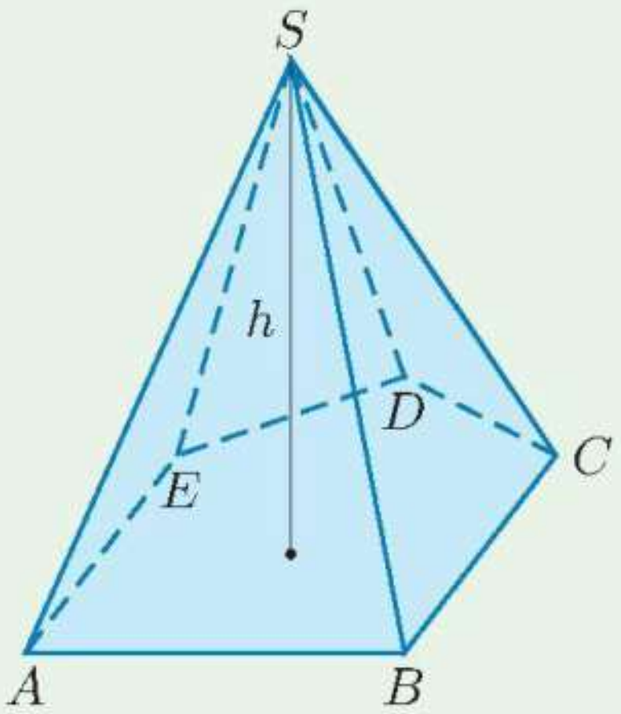



$P_b = p \cdot h$

$V = P_p \cdot h$

gdzie $p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa, a $h$ – jego wysokością

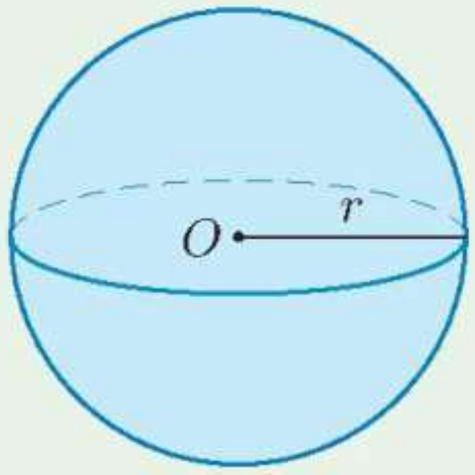
**Ostrosłup**




$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

gdzie $h$ jest wysokością ostrosłupa

**Kula**

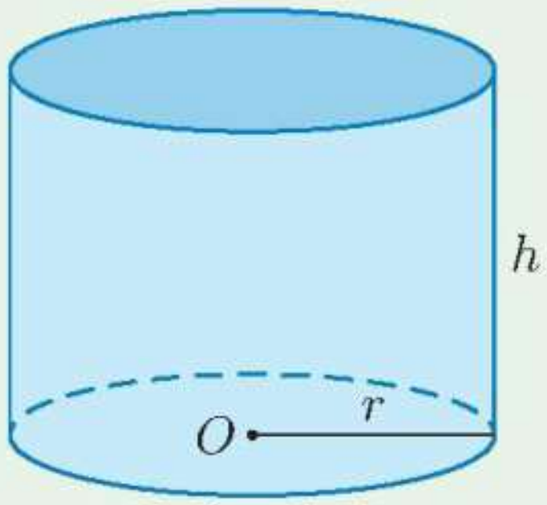



$P = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

gdzie $r$ jest promieniem kuli

**Walec**



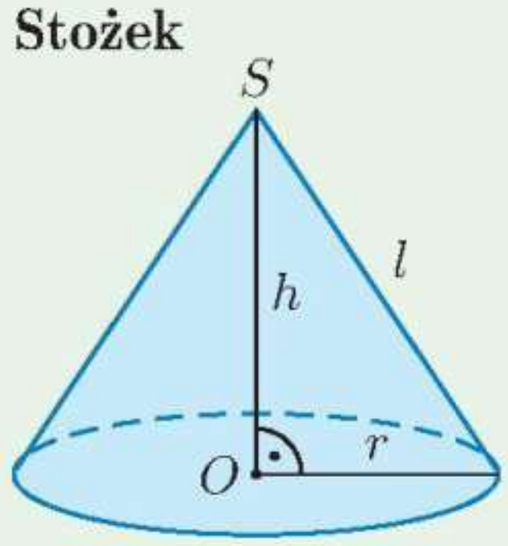

$P_b = 2\pi rh$

$P_c = 2\pi r(r+h)$

$V = \pi r^2 h$

gdzie $r$ jest promieniem podstawy walca, a $h$ – jego wysokością

**Stożek**




$P_b = \pi rl$

$P_c = \pi r(r+l)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

gdzie $r$ jest promieniem podstawy stożka, $h$ – jego wysokością, a $l$ – długością tworzącej

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Dany jest graniastosłup prosty, którego wysokość jest równa 10. Jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12. Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego graniastosłupa.

**2.** Wszystkie krawędzie graniastosłupa prostego są równe i mają po 12 cm. Jego podstawą jest romb o kącie ostrym 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

**3.** Dany jest graniastosłup prawidłowy o wysokości 10. Promień okręgu opisanego na jego podstawie jest równy 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeżeli wiadomo, że jest on:

a) trójkątny, b) czworokątny, c) sześciokątny.

**4.** Przerysuj do zeszytu sześcian przedstawiony poniżej i wskaż kąt, który przekątna $AH$ ściany bocznej tego sześcianu tworzy:

a) z przekątną podstawy wychodzącą z wierzchołka $A$,

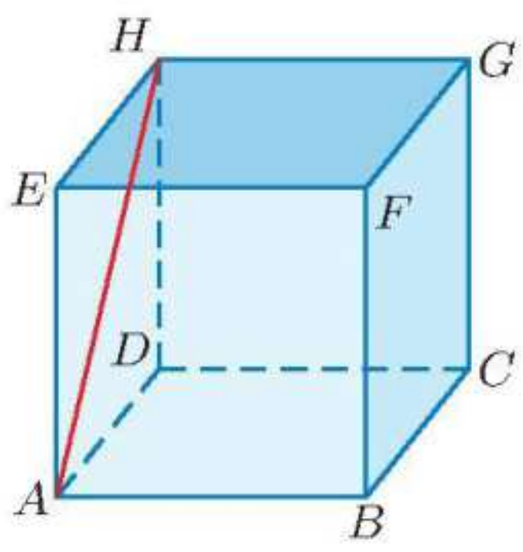
b) z krawędzią $AB$,

c) z podstawą $ABCD$,

d) z krawędzią $GH$,

e) ze ścianą $ABFE$.

Który z tych kątów jest kątem prostym?



**5.** Miara kąta zawartego między przekątnymi ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, jest równa $60^\circ$, a krawędź podstawy ma długość 4. Oblicz długość przekątnej tego graniastosłupa.

**6.** Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 i tworzy z podstawą kąt, którego tangens jest równy $2\sqrt{2}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

**7.** Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 10 i 12. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem $45^\circ$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

**8.** Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 8 i 2 oraz wysokości równej 3. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że jego przekątna ma długość $5\sqrt{2}$.

**9.** Podstawą graniastosłupa prostego o objętości równej 12 jest romb o kącie ostrym $60^\circ$. Wysokość tego graniastosłupa jest równa dłuższej przekątnej jego podstawy. Oblicz długość krawędzi tej podstawy.

**10.** Dany jest ostrosłup prawidłowy o krawędzi podstawy 4 i krawędzi bocznej 6. Oblicz wysokość tego ostrosłupa, jeżeli wiadomo, że jest on:

a) trójkątny, b) czworokątny, c) sześciokątny.

**11.** Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 6. Ściana boczna $ABS$ jest prostopadła do podstawy oraz $|AS| = |BS| = 5$. Narysuj siatkę tego ostrosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

**12.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, a krawędź boczna ma długość 4.

a) Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

b) Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**13.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $12\sqrt{3}$ i jest nachylona do podstawy pod kątem $60^\circ$. Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz tangens kąta nachylenia ściany bocznej do jego podstawy.

**14.** Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $\sqrt{3}$, a kąt nachylenia ściany bocznej do jego podstawy ma miarę $30^\circ$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**15.** Wysokość prostopadłościanu jest równa 12 cm, a jego podstawą jest prostokąt o bokach 3 cm i 4 cm. Oblicz z dokładnością do $1^\circ$ miary kątów, które przekątna tego prostopadłościanu tworzy z jego podstawą oraz ścianami bocznymi.

**16.** Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 i tworzy ze ścianą boczną kąt $30^\circ$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

**17.** Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 3, a krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{2}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

**18.** Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny $ABC$ o boku 12 cm. Ściana boczna $ABS$ jest prostopadła do podstawy oraz $|AS| = |BS| = 3\sqrt{13}$ cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**19.** Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe polu jego podstawy. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do podstawy tego ostrosłupa.

**20.** Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem $30^\circ$, a wysokość tej ściany jest równa $3\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**21.** Podstawą ostrosłupa o wierzchołku $S$ jest trójkąt $ABC$ o bokach długości $|AB| = 6$, $|AC| = |BC| = 5$. Wysokość ostrosłupa jest równa 2, a jej spodek jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany $ABS$ do podstawy ostrosłupa.

**22.** Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem o wymiarach $8\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Oblicz objętość tego walca (rozważ dwie możliwości).

**23.** Objętość walca jest równa $V$, a jego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem. Wyznacz wysokość tego walca.

**24.** Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do jego pola podstawy jest równy $\sqrt{2} : 1$. Objętość stożka jest równa objętości kuli o średnicy 6. Oblicz wysokość tego stożka oraz miarę kąta nachylenia tworzącej do podstawy.

**25.** Oblicz objętość stożka, którego:

a) pole podstawy jest równe 16, a pole powierzchni bocznej jest równe 20,

b) tworząca ma długość 16 i tworzy z wysokością stożka kąt $30^\circ$.

**26.** Tworząca stożka jest nachylona do jego podstawy pod kątem $\alpha$ takim, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$. Objętość tego stożka jest równa $32\pi$. Oblicz jego pole powierzchni bocznej.

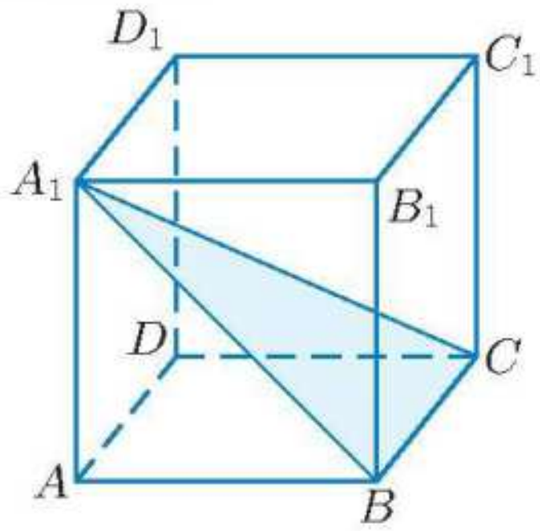
**27.** Od sześcianu, którego krawędź ma długość 2, odcięto naroża, zawierające po jednym wierzchołku, płaszczyznami przechodzącymi przez środki krawędzi wychodzących z tych wierzchołków. Oblicz objętość wielościanu otrzymanego w ten sposób.

**28.** Prostopadłościan o wysokości 6 cm, którego podstawą jest kwadrat, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy i nachyloną do niej pod kątem 30°. W przekroju otrzymano romb, którego dłuższa przekątna jest równa $2\sqrt{6}$ cm.

a) Oblicz długość krawędzi podstawy tego prostopadłościanu.

b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

**29.** Długość krawędzi $BC$ prostopadłościanu jest równa 2, a pole trójkąta $BCA_1$ jest równe 4 (rysunek obok). Oblicz objętość tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jego przekątna tworzy z podstawą kąt o mierze 45°.




**30.** Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 12 cm i tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

**31.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60°, a krawędź boczna ma długość 6. Oblicz objętość tego ostrosłupa i miarę kąta zawartego między jego przeciwległymi krawędziami bocznymi.

**32.** Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Ściana boczna $ADS$ jest trójkątem równobocznym leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do podstawy. Pole tej ściany jest równe $81\sqrt{3}$.

a) Oblicz objętość tego ostrosłupa.

b) Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

**33.** Sześcian o krawędzi 10 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem $\alpha$, którego cosinus jest równy $\frac{4}{5}$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

**34.** Wysokość ostrosłupa jest równa $\sqrt{3}$. Dwie jego sąsiednie ściany boczne są prostopadłe do podstawy będącej prostokątem, a dwie pozostałe są nachylone do podstawy pod kątami 30° i 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

## Zestaw III – podsumowujący

**35.** Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu $9\sqrt{3}$. Dwie jego sąsiednie ściany boczne są prostopadłe do podstawy, a pozostałe dwie tworzą z podstawą kąty $45^\circ$ i $60^\circ$. Oblicz długość najdłuższej krawędzi tego ostrosłupa.

**36.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 8 cm, a jego ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem $60^\circ$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**37.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem $30^\circ$, a jej długość wynosi $2\sqrt{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

**38.** Krawędź sześcianu ma długość 6. Środek symetrii $P$ jednej z jego ścian bocznych połączono odcinkami z wierzchołkami $A$, $B$, $C$, $D$ podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $ABCDP$.

**39.** Powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła wyznaczonym przez kąt środkowy o mierze $150^\circ$ i ma pole równe $60\pi$ cm$^2$. Oblicz objętość tego stożka.

**40.** Dane są dwie bryły: walec i stożek, których podstawy są przystające, a wysokości równe. Stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola powierzchni bocznej stożka wynosi $3:2$. Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka.

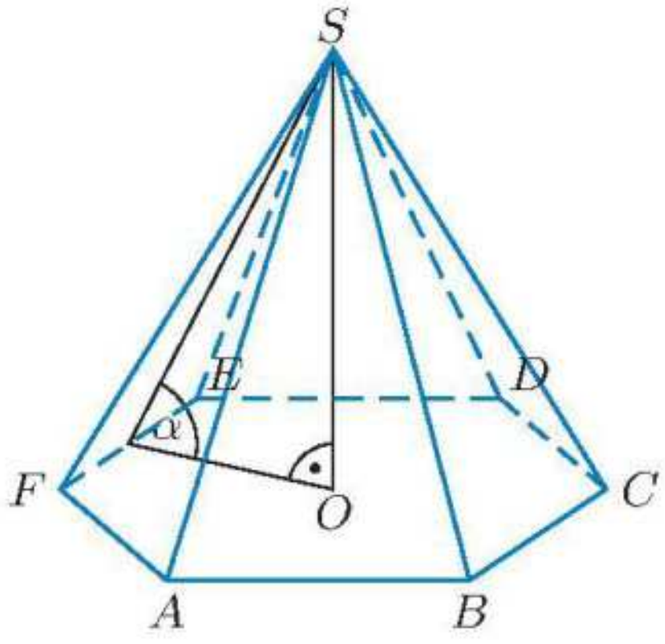
**41.** Sześcian o krawędzi 12 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy. W przekroju otrzymano prostokąt o polu $96\sqrt{3}$. Oblicz objętości wielościanów, na które płaszczyzna przekroju podzieliła ten sześcian.

**42.** Płaszczyzna przechodząca przez przekątną dolnej podstawy sześcianu i jeden wierzchołek górnej podstawy podzieliła ten sześcian na dwa wielościany o objętościach 36 i $V$, gdzie $V > 36$. Oblicz objętość tego sześcianu.

**43.** W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy jest równy $\alpha$ (rysunek obok).

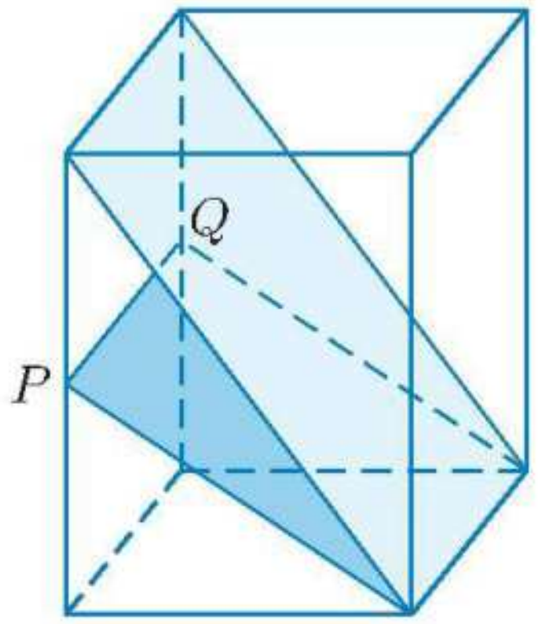
a) Wyznacz stosunek pola podstawy tego ostrosłupa do jego pola powierzchni bocznej.

b) Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że krótsza przekątna jego podstawy ma długość $2\sqrt{3}$, a $\alpha = 60^\circ$.



**44.** Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym $30°$. Przekątna ściany bocznej o najmniejszej powierzchni ma długość 4 cm i tworzy ze ścianą boczną o największej powierzchni kąt $20°$. Oblicz wysokość tego graniastosłupa. Wynik zaokrąglij do liczby całkowitej.

**45.** Graniastosłup prawidłowy czworokątny przecięto dwiema płaszczyznami i otrzymano przekroje o polach 20 i $8\sqrt{13}$ (rysunek obok). Oblicz objętość tego graniastosłupa, wiedząc, że punkty $P$ i $Q$ są środkami jego krawędzi bocznych.




**46.** Prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 15$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego trzy wierzchołki i otrzymano w przekroju trójkąt. Oblicz obwód tego trójkąta.

**47.** Kulę przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami odległymi od siebie o 8 w ten sposób, że środek kuli leży między nimi. Pola otrzymanych przekrojów są równe $9\pi$ i $25\pi$. Oblicz promień tej kuli.

**48.** Dwa naczynia, jedno w kształcie sześcianu, drugie w kształcie walca, mają jednakowe wysokości. Krawędź sześcianu jest równa promieniowi podstawy walca. Niech $V_s$ będzie objętością sześcianu, a $V_w$ – objętością walca. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A. | $V_s > V_w$, | | 1. | wysokości obu naczyń są równe. |
| B. | $V_s < V_w$, | ponieważ | 2. | pole ściany sześcianu jest mniejsze od pola podstawy walca. |
| C. | $V_s = V_w$, | | 3. | podstawy obu naczyń mają równe pola. |

**49.** Dane są kula o objętości $288\pi$ cm$^3$ oraz zamykane pudełko w kształcie walca o objętości $320\pi$ cm$^3$ i promieniu podstawy 8 cm.
Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A. | Kula zmieści się w pudełku, | ponieważ | 1. | objętość pudełka jest większa od objętości kuli. |
| | | | 2. | promień kuli jest dłuższy od promienia podstawy pudełka. |
| B. | Kula nie zmieści się w pudełku, | | 3. | promień kuli jest dłuższy od wysokości pudełka. |

# 5.14. Rachunek prawdopodobieństwa

**Permutacje**
Liczba sposobów, na które $n$ różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

**Wariacje z powtórzeniami**
Liczba sposobów, na które z $n$ różnych elementów można utworzyć ciąg składający się z $k$ niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa $n^k$.

**Wariacje bez powtórzeń**
Liczba sposobów, na które z $n$ różnych elementów można utworzyć ciąg składający się z $k$ różnych wyrazów $(1 \leqslant k \leqslant n)$, jest równa:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Prawdopodobieństwo klasyczne**
Jeżeli $\Omega$ jest zbiorem skończonym i niepustym, to **prawdopodobieństwem zdarzenia** $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

**Własności prawdopodobieństwa**

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$
- $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe), $P(\Omega) = 1$ ($\Omega$ – zdarzenie pewne)
- $P(A) \leqslant P(B)$ dla $A \subset B \subset \Omega$
- $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie $A'$ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $A$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Dane są zbiory $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ i $C = \{6,7,9\}$. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych takich, że pierwsza cyfra należy do zbioru $A$, druga – do zbioru $B$, a trzecia – do zbioru $C$?

**2.** Dane są zbiory $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$ i $C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych takich, że pierwsza cyfra należy do zbioru $A$, druga – do zbioru $B$, a trzecia – do zbioru $C$? Ile wśród nich jest liczb nieparzystych?

**3.** Na ile sposobów można ustawić w kolejce 4 osoby, a na ile – 6 osób?

**4.** Z miasta $A$ do miasta $B$ prowadzą cztery drogi, z miasta $B$ do miasta $C$ – dwie drogi, a z miasta $C$ do miasta $D$ prowadzi pięć dróg. Na ile sposobów można przebyć drogę z miasta $A$ przez miasto $B$, a następnie $C$ do miasta $D$, jeśli przez każde miasto można przejechać tylko raz?

**5.** Na ile sposobów można ustawić w kolejce:

a) pięcioro dziewcząt i trzech chłopców tak, aby dziewczęta stały przed chłopcami,

b) czworo dziewcząt i trzech chłopców tak, aby żadne dwie dziewczyny nie stały jedna za drugą?

**6.** Tworzymy kody, w których na początku występują cztery litery, a następnie pięć cyfr (cyfry i litery nie mogą się powtarzać). Ile jest takich kodów, jeżeli wykorzystujemy tylko litery i cyfry kodu ABCD12345?

**7.** Dziewięciorgu zawodnikom, wśród których jest pięć dziewcząt, przydzielono kolejne numery od 1 do 9.

a) Ile jest wszystkich sposobów przydzielenia numerów?

b) Ile jest takich sposobów przydzielenia numerów, aby dziewczęta dostały numery nieparzyste, a chłopcy dostali parzyste?

**8.** Pewien kod składa się z trzech liter na początku oraz z dwóch dowolnych cyfr na końcu. Litery należą do zbioru $\{A, B, C, D\}$. Ile można utworzyć takich kodów, jeżeli:

a) cyfry i litery się nie powtarzają, b) cyfry i litery mogą się powtarzać?

**9.** Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując tylko cyfry:

a) liczby 134 657, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać,

b) liczby 425 971, jeśli cyfry mogą się powtarzać?

**10.** Ile jest wszystkich liczb:

a) trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0 i 1 oraz żadna cyfra się nie powtarza,

b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0, 1 i 2 oraz żadna cyfra się nie powtarza,

c) pięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?

**11.** Ile jest wszystkich liczb:

a) pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2 i 4,

b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0,

c) parzystych trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 7 i 9?

## Zestaw II – ćwiczeniowy

**12.** Rzucamy trzy razy monetą. Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że co najwyżej raz wypadła reszka, $B$ – że co najwyżej dwa razy wypadła reszka, $C$ – że trzy razy wypadła reszka.

a) Podaj pary zdarzeń wykluczających się i pary zdarzeń przeciwnych.

b) Które ze zdarzeń $B \cup C$, $A' \cap B$, $A \cap C$ jest zdarzeniem niemożliwym, a które – zdarzeniem pewnym?

**13.** Z urny zawierającej cztery kule ponumerowane od 1 do 4 losujemy dwie kule. Niech $A$ będzie zdarzeniem polegającym na tym, że dwie wylosowane kule mają numery nieparzyste. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ tego doświadczenia, wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom $A$ i $A'$ oraz oblicz prawdopodobieństwa tych zdarzeń, jeśli losujemy:

a) bez zwracania, b) ze zwracaniem.

**14.** Rzucamy dwa razy kostką. Oznaczmy przez $A$ zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym rzucie wypadnie większa liczba oczek niż w drugim, a przez $B$ – że przynajmniej raz wypadnie jedynka. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom $A \cap B$, $A \cup B$ oraz oblicz prawdopodobieństwa tych zdarzeń.

**15.** Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna:

a) przez 2, b) przez 3, c) przez 2 lub 3.

**16.** Ze zbioru liczb dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna:

a) przez 10 i niepodzielna przez 3, b) przez 5 lub 8.

**17.** Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) suma oczek, które wypadną w obydwu rzutach, będzie mniejsza od 4,

b) iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, będzie równy 6,

c) w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.

**18.** W urnie są cztery kule oznaczone numerami 1, 2, 3 i 4. Losujemy kolejno cztery kule bez zwracania. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie: a) parzysta, b) większa od 1234.

**19.** Winda, w której są 3 osoby, zatrzymuje się na 5 piętrach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda osoba wysiądzie na innym piętrze.

**20.** Losowo ustawiamy w rzędzie 7 dziewcząt i 8 chłopców. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) żaden chłopiec nie stoi obok chłopca,

b) wszystkie dziewczęta stoją obok siebie.

**21.** Na egzaminie posadzono losowo w jednym rzędzie 10 osób, w tym dwie z jednej szkoły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie siedzą one obok siebie.

**22.** Spośród liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują cyfry 4, 5, 6, 7, 8, 9 (przy czym cyfry się nie powtarzają), losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna przez 9.

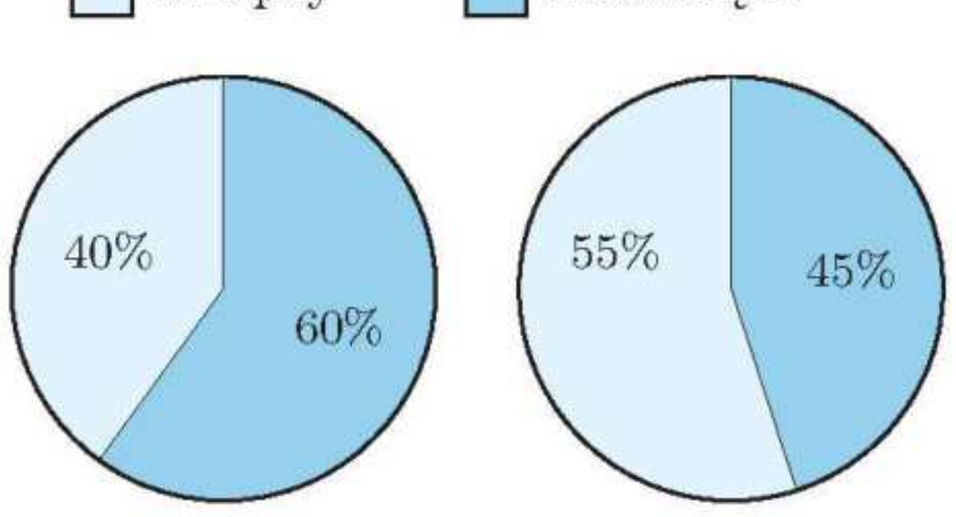
**23.** Liczby $1, 2, 3, \ldots, 10$ uporządkowano w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia w tym uporządkowaniu:

a) dwójki bezpośrednio przed ósemką,

b) dwójki przed ósemką.

**24.** W klasie IVa jest 25 uczniów, a w klasie IVb – 20 uczniów. Na diagramach przedstawiono, jaki procent uczniów każdej klasy stanowią dziewczęta, a jaki – chłopcy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba losowo wybrana spośród uczniów obu klas będzie:

a) chłopcem, b) dziewczyną.




**25.** W urnie jest siedem kul ponumerowanych od 1 do 7. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że numer drugiej kuli będzie większy od numeru pierwszej.

**26.** W pierwszej urnie są kule o numerach $1, 2, 3, 4, 5, 6$, a w drugiej – o numerach $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Z każdej urny losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma numerów wylosowanych kul będzie podzielna przez 3.

**27.** W pierwszej urnie są 3 kule białe, 3 kule czarne i 2 kule niebieskie, a w drugiej – 1 kula biała, 4 kule czarne i 5 kul niebieskich. Losujemy po jednej kuli z każdej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

## Zestaw III – podsumowujący

**28.** Dwie drużyny rozgrywają ze sobą mecz piłki nożnej. Ile jest możliwych wyników, jeśli wiadomo, że każda z drużyn strzeliła:

a) nie więcej niż 3 bramki, b) nie więcej niż 4 bramki?

**29.** Na ile sposobów można rozdzielić pięć różnych przedmiotów między dwie osoby tak, aby każda osoba dostała co najmniej jeden przedmiot?

**30.** Dwie siostry kupiły wspólnie 6 długopisów, każdy w innym kolorze. Oblicz, na ile sposobów mogą się nimi podzielić, jeśli każda ma dostać przynajmniej jeden długopis.

**31.** W rzędzie jest sześć krzeseł. Na ile sposobów mogą na nich usiąść dwie osoby tak, aby między nimi było tylko jedno wolne krzesło?

**32.** W partii 25 żarówek 16% jest uszkodzonych. Losujemy dwie żarówki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie żarówki będą dobre.

**33.** Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 3 czarne, losujemy kolejno 3 kule. Czy bardziej prawdopodobne jest wylosowanie trzech kul białych w wypadku losowania bez zwracania, czy ze zwracaniem?

**34.** Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ losujemy kolejno dwie różne liczby bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza liczba będzie parzysta, a iloczyn wylosowanych liczb będzie podzielny przez 6.

**35.** Dziecko dostało trzy klocki w kształcie sześcianu – czerwony, zielony i niebieski, trzy klocki w kształcie walca – czerwony, zielony i niebieski, oraz cztery klocki w kształcie stożka – czerwony, zielony, niebieski i biały. Dziecko wybiera trzy klocki, każdy innego kształtu. Na ile sposobów może to zrobić tak, aby:

a) nie wszystkie były tego samego koloru, b) każdy był innego koloru?

**36.** Losujemy jedną liczbę spośród liczb naturalnych czterocyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie wystąpią:

a) dokładnie dwie cyfry 5 i dokładnie jedna cyfra 4,

a) dokładnie dwie cyfry 4 i dokładnie jedna cyfra 5.

**37.** Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ oraz: a) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, b) $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym.

Niech $X$ będzie zmienną losową o wartościach $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ przyjmowanych z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$. **Wartością oczekiwaną** zmiennej $X$ nazywamy liczbę:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

**38.** Pewna gra polega na dwóch rzutach monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to wygrywamy 60 zł, jeśli dwie reszki – wygrywamy 30 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 36 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

**39.** Pewna gra polega na dwóch rzutach kostką. Jeśli iloczyn liczby oczek otrzymanych na kostkach jest parzysty, to wygrywamy 12 zł, w przeciwnym przypadku przegrywamy $p$ zł. Dla jakiej wartości $p$ gra jest sprawiedliwa?

**40.** Pewna gra polega na dwóch rzutach monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to wygrywamy 80 zł, jeśli dwie reszki – wygrywamy 40 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy $p$ zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry dla $p = 50$.

b) Dla jakiej wartości $p$ gra jest sprawiedliwa?

**41.** Pewna gra polega na rzucie dwiema kostkami i dodaniu liczby wyrzuconych oczek. Jeśli otrzymamy co najmniej 10 oczek, to wygrywamy $x$ zł, jeśli otrzymamy 7 oczek, to wygrywamy $2x$ zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 36 zł. Dla jakiej wartości $x$ gra jest sprawiedliwa?

**42.** Spośród liczb 3, 4 i 5 losujemy dwie. Zmienna losowa $X$ przyporządkowuje każdej parze liczb jej sumę. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej $X$, jeśli losujemy: a) bez zwracania, b) ze zwracaniem.

**43.** W pewnej grze należy skreślić dowolną liczbę cyfr na kuponie, który przedstawiono na rysunku.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Opisane skreślenia można wykonać na ponad 1000 sposobów. | P | F |
| 2. | Skreślenie dokładnie dziewięciu cyfr można wykonać na 10 sposobów. | P | F |

# 5.15. Statystyka

**Średnią arytmetyczną** $n$ liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

**Średnia ważona** $n$ liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$, którym przypisano odpowiednio wagi $w_1, w_2, \ldots, w_n$, będące liczbami dodatnimi, jest równa:

$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

**Medianą** uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru $n$ liczb $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ jest:

- dla $n$ nieparzystych: $x_{\frac{n+1}{2}}$ – wartość środkowa,
- dla $n$ parzystych: $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ – średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych.

**Dominanta** (wartość modalna, moda) jest wartością, która występuje wśród danych najczęściej.

**Wariancją** $n$ liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{x}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2$$

**Odchylenie standardowe** $\sigma$ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

## Zestaw I – wprowadzający

**1.** Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych liczb.

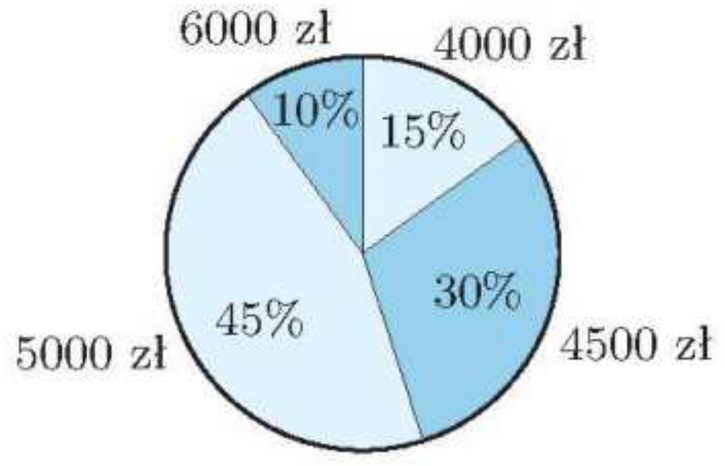
a) 4, 3, 1, 10, 10, 13, 8, 10, 4

b) 2, 2, 4, 4, 2, 6, 6, 4, 2, 2, 10

c) 3, 2, 3, 9, 4, 10, 14, 3

d) 16, 8, 8, 0, 8, 8, 14, 2

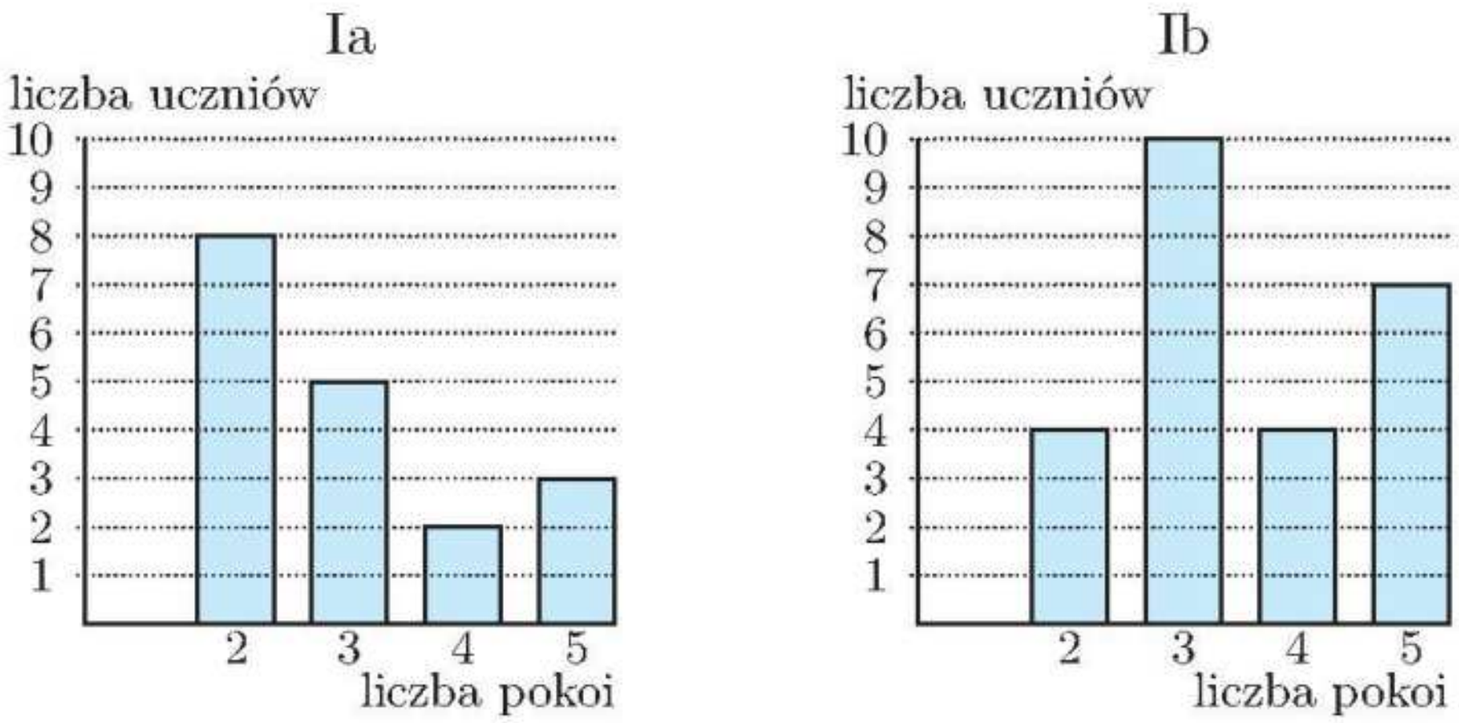
**2.** Pewna firma ma cztery oddziały. Na diagramie przedstawiono, jaki procent osób pracuje w poszczególnych oddziałach i jakie są w nich średnie zarobki. Oblicz średnią zarobków w tej firmie.




**3.** W pewnej szkole są trzy klasy drugie liczące kolejno 21, 23 i 23 uczniów. Średni wzrost uczniów w pierwszej z nich jest równy 172 cm, w drugiej – 174 cm, w trzeciej – 170 cm. Oblicz średni wzrost wszystkich uczniów klas drugich.

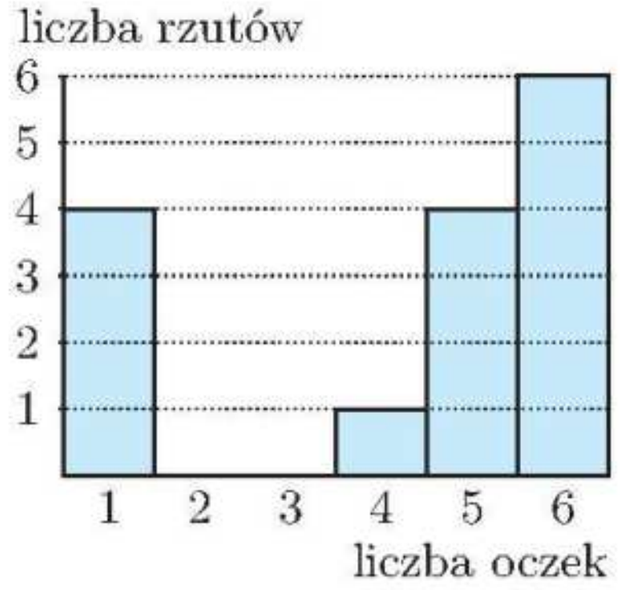
**4.** Uczniom klas Ia i Ib zadano pytanie: „Ile pokoi ma twoje mieszkanie?". Wyniki ankiety przedstawiono na poniższych diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla:

a) klasy Ia, b) klasy Ib, c) obu klas razem.




**5.** Pewien nauczyciel, aby wystawić oceny na półrocze, oblicza średnią arytmetyczną wszystkich ocen, a następnie zaokrągla wynik do liczby całkowitej. Oceny Ani to 5, 3, 4, 4, 4, 2 i 3. Jaką najniższą ocenę musi dostać Ania z ostatniego sprawdzianu, żeby na koniec semestru mieć ocenę dobrą?

**6.** Wykonano serię rzutów kostką – średnia liczba otrzymanych oczek jest równa 4. Na diagramie przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek, ale pominięto informację, ile razy wypadły 2 oraz 3 oczka – wiadomo, że każdy z tych wyników wyrzucono parzystą liczbę razy. Ile rzutów wykonano podczas tej serii?




**7.** W tabeli podane są liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną tych liczb.

a)

| Liczba | 2 | 3 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| Waga | 4 | 5 | 1 | 2 |

b)

| Liczba | 9 | 2 | 6 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| Waga | 0,2 | 0,4 | 0,25 | 0,05 | 0,1 |

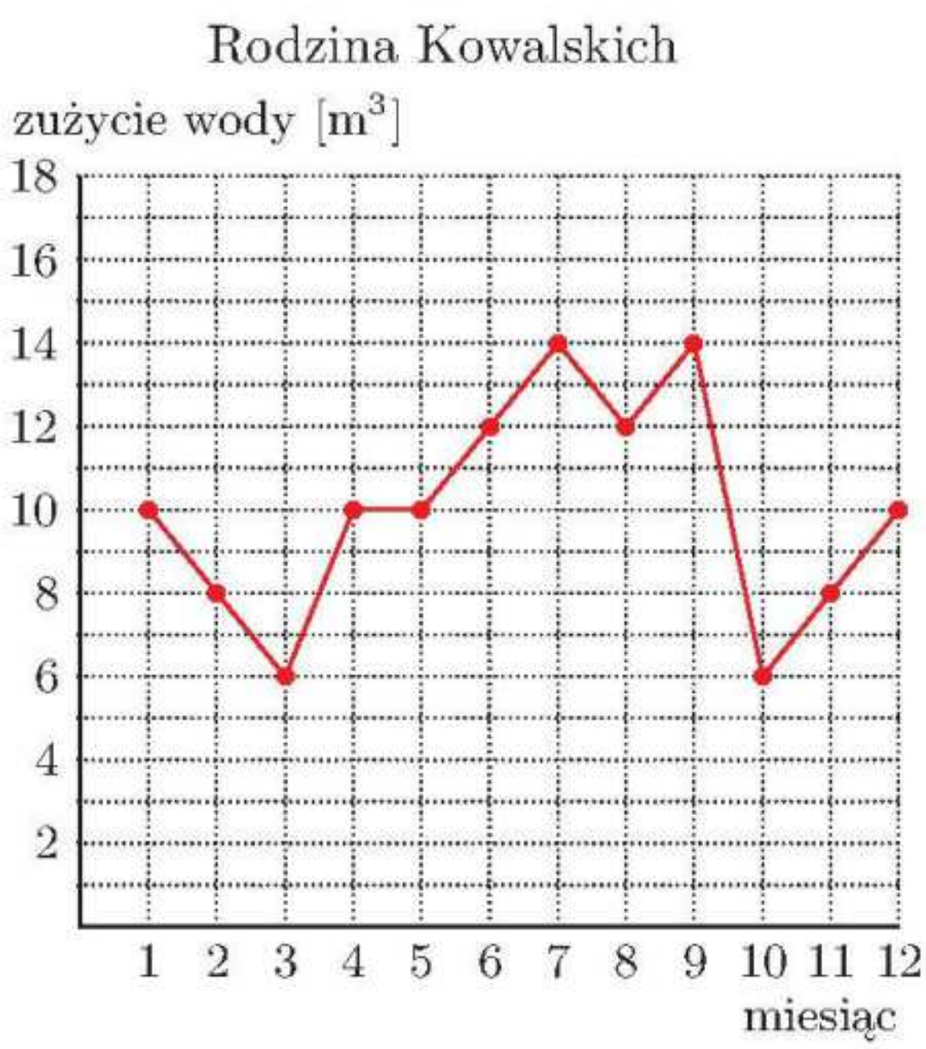
**8.** Ocena wystawiana na półrocze przez pewnego nauczyciela jest średnią ważoną (zaokrągloną do liczby całkowitej) ze średnich arytmetycznych ocen z prac klasowych, sprawdzianów i pracy na lekcji – z wagami odpowiednio 0,5, 0,3 i 0,2. Oceny Kuby z prac klasowych to 5, 4, 2, ze sprawdzianów – 4, 3, 3, 5, 2 i za pracę na lekcji – 4, 3. Jaką ocenę otrzyma Kuba na półrocze?

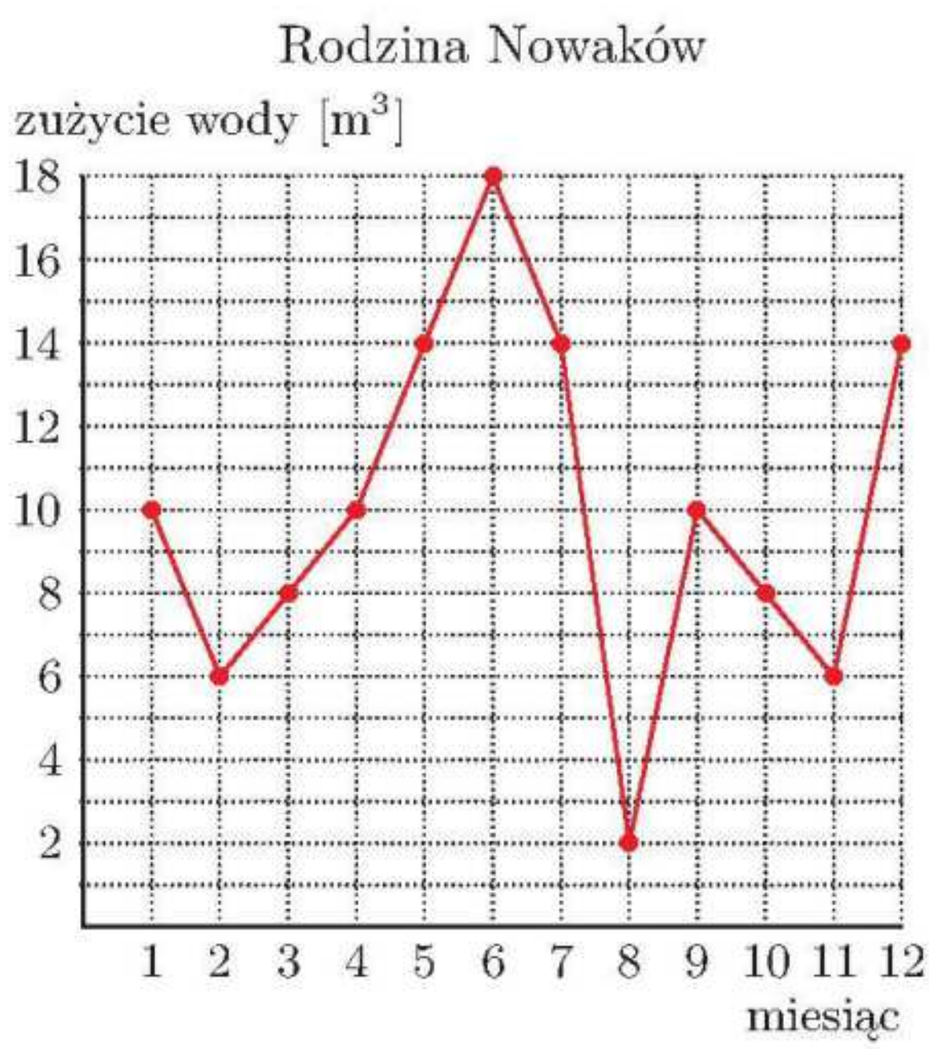
**9.** a) Średnia arytmetyczna liczb $14, 2, 4, 15, 14, x, 6x$ jest równa 12. Oblicz $x$ oraz wyznacz medianę i dominantę tych liczb.

b) Średnia arytmetyczna liczb $3, 1, 2, 5, 6, x, y$ jest równa 4. Oblicz $x$ i $y$, jeśli wiadomo, że dominanta tych liczb jest równa 1 oraz $x > y$.

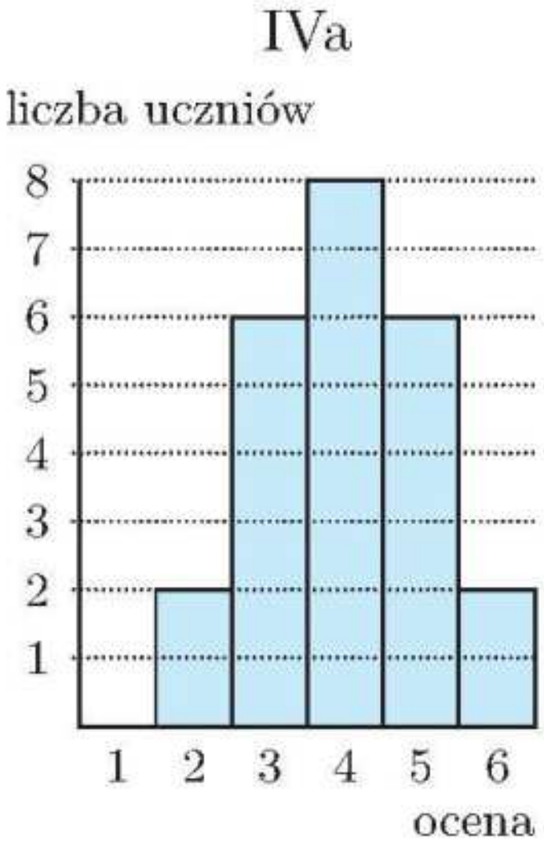
**10.** Na wykresach poniżej podano zużycie wody w kolejnych miesiącach przez rodziny Kowalskich i Nowaków. Sprawdź, czy średnie miesięczne zużycie wody w obu rodzinach jest takie samo. Oblicz odchylenie standardowe miesięcznego zużycia wody dla:

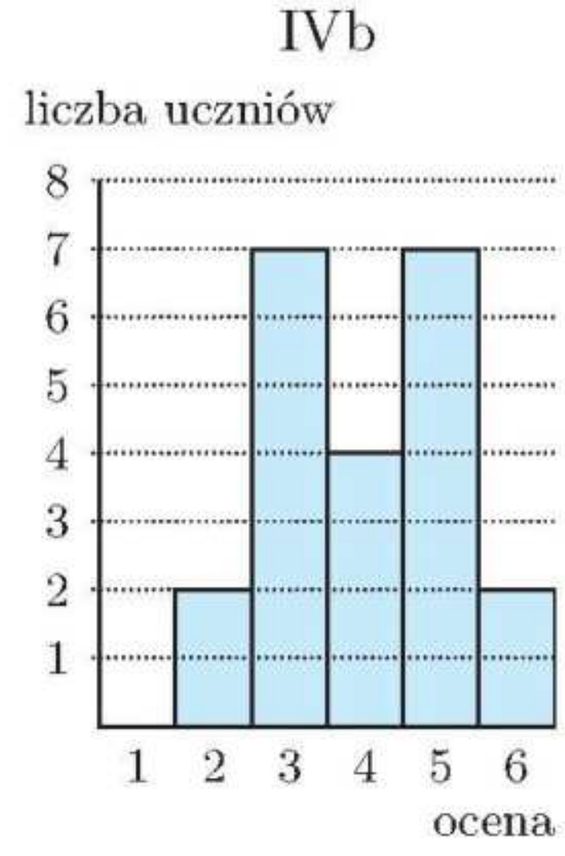
a) rodziny Kowalskich, b) rodziny Nowaków, c) obu rodzin razem.

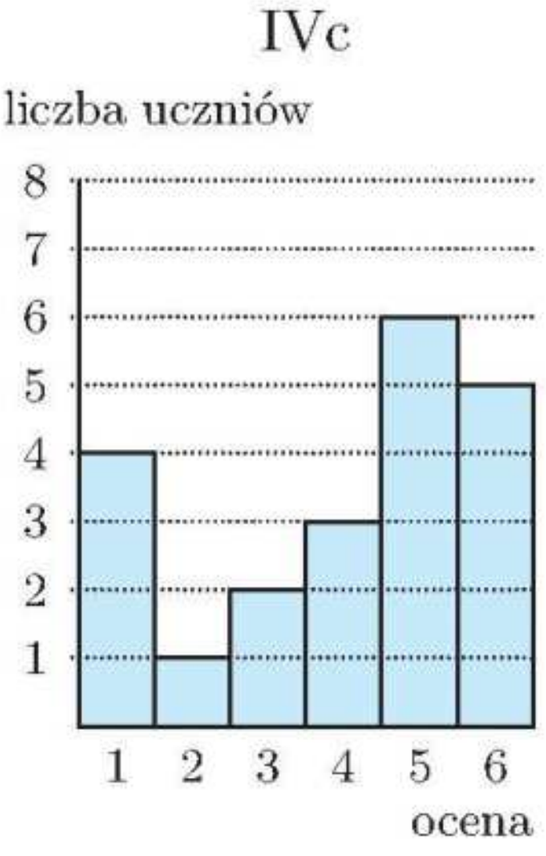



**11.** Na diagramach podano wyniki sprawdzianu w trzech klasach w pewnym liceum. Oblicz średnią ocen ze sprawdzianu w każdej klasie. W której z nich odchylenie standardowe ocen jest największe?



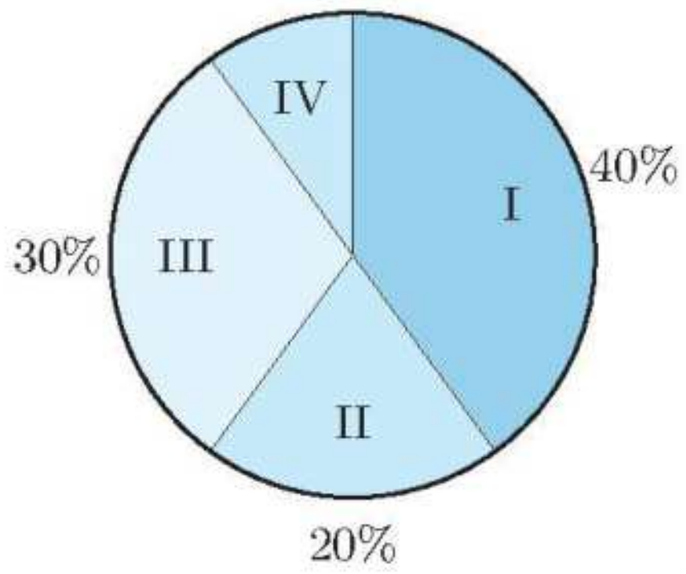



## Zestaw II – ćwiczeniowy

**12.** Pewna firma zatrudnia 120 osób w czterech oddziałach znajdujących się w różnych miastach. Średnie miesięczne wynagrodzenie w I oddziale wynosi 4400 zł, w II – 4800 zł, w III – 4200 zł, w IV – 6000 zł. Na diagramie poniżej został podany procentowy rozkład zatrudnienia w poszczególnych oddziałach.

a) Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.

b) Jak zmieni się średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie, jeśli w I oddziale zatrudnienie zmniejszy się o 25%, a średnia zarobków w tym oddziale nie ulegnie zmianie?




**13.** W pewnej firmie 20% pracowników zarabia średnio miesięcznie 7 tysięcy złotych. Średnia płaca pozostałych pracowników tej firmy wynosi 4,5 tysiąca złotych. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.

**14.** Podczas międzyszkolnych zawodów w łyżwiarstwie figurowym dziewięciu sędziów przyznawało noty za technikę i prezentację programu w skali od 0,0 do 6,0 punktów. Nota zarówno za technikę, jak i za prezentację programu była średnią arytmetyczną uzyskanych punktów. Jakie były końcowe noty dwóch par, których punktacja została podana w tabeli, jeśli końcowa nota była:

a) średnią arytmetyczną noty za technikę i noty za prezentację,

b) średnią ważoną, przy czym nota za technikę miała wagę 0,6, a nota za prezentację – wagę 0,4?

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Para I | technika | 5,0 | 5,1 | 5,0 | 5,2 | 5,5 | 5,0 | 5,3 | 5,1 | 5,6 |
| | prezentacja | 4,9 | 5,0 | 4,8 | 5,2 | 5,4 | 4,9 | 5,0 | 4,8 | 5,0 |
| Para II | technika | 6,0 | 5,8 | 5,9 | 6,0 | 5,7 | 5,8 | 5,7 | 5,9 | 5,4 |
| | prezentacja | 5,5 | 5,8 | 5,5 | 5,9 | 5,6 | 5,8 | 5,9 | 5,4 | 5,9 |

**15.** W pewnej firmie średnia płaca wynosi 4800 zł, przy czym średnia płaca pracowników ze stażem nie dłuższym niż 5 lat wynosi 4000 zł, natomiast tych ze stażem dłuższym – 4900 zł. Oblicz, jaki procent wszystkich pracowników stanowią pracownicy z krótszym stażem.

**16.** Oblicz średnią arytmetyczną $\overline{x}$, średnią arytmetyczną kwadratów $\overline{x^2}$ oraz wariancję poniższych danych.

a) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3

b) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5

c) 10, 20, 30, 40, 50

d) $-2, -2, -1, -1, 0, 5, 5$

D **17.** Wykaż, że jeżeli $\overline{x^2}$ jest średnią arytmetyczną kwadratów liczb $x_1, \ldots, x_k$, a $\overline{y^2}$ jest średnią arytmetyczną kwadratów liczb $y_1, \ldots, y_l$, to średnia arytmetyczna kwadratów wszystkich tych liczb jest równa:

$$\frac{k \cdot \overline{x^2} + l \cdot \overline{y^2}}{k + l}$$

**18.** W pewnej klasie jest 12 dziewcząt i 8 chłopców. W tabeli podano średnie ocen z klasówki ze statystyki w tej klasie oraz odchylenia standardowe (z podziałem na dziewczęta i chłopców).

| | Dziewczęta | Chłopcy |
|---|---|---|
| Średnia ocen | 4 | 4,2 |
| Odchylenie standardowe | 0,9 | 1,5 |

Oblicz średnią ocen z tej klasówki i odchylenie standardowe dla całej klasy. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

**19.** W firmie $A$ pracuje 10 osób, a w firmie $B$ – 20 osób. Średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie $A$ wynosi 4000 zł, a odchylenie standardowe – 500 zł, natomiast w firmie $B$ średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 5000 zł, a odchylenie standardowe – 1000 zł. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie oraz odchylenie standardowe dla obu firm łącznie. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

**20.** Średnie zarobki w pewnej firmie wynoszą 6000 zł, a odchylenie standardowe wynosi 500 zł. Oblicz, jak zmieni się średnie wynagrodzenie i odchylenie standardowe, jeżeli każdy z pracowników dostanie:

a) 5% podwyżki,

b) 200 zł podwyżki.

**21.** Średnia arytmetyczna liczb $x, y, 2, 6, 6, 4, 3, 4$ jest równa 4, a odchylenie standardowe jest równe 1,5. Oblicz $x$ i $y$, jeśli wiadomo, że $x < y$.

**22.** Wśród 10 ocen z matematyki pewnego ucznia są tylko trójki i czwórki. Oblicz, ile jest czwórek, jeśli wiadomo, że wariancja ocen wynosi 0,16 oraz czwórek jest więcej niż trójek.

## Zestaw III – podsumowujący

**23.** Średnia wyników w skoku wzwyż 12 uczniów wyniosła 140 cm. Dwóch uczniów skoczyło na wysokość 150 cm. Ile wynosiłaby średnia, gdyby skoczyli oni o 10 cm wyżej?

**24.** Pewna firma ma dwa oddziały. Średnie miesięczne wynagrodzenie w I oddziale wynosi 4600 zł, a w II – 5800 zł. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w obu oddziałach razem, jeżeli wiadomo, że:

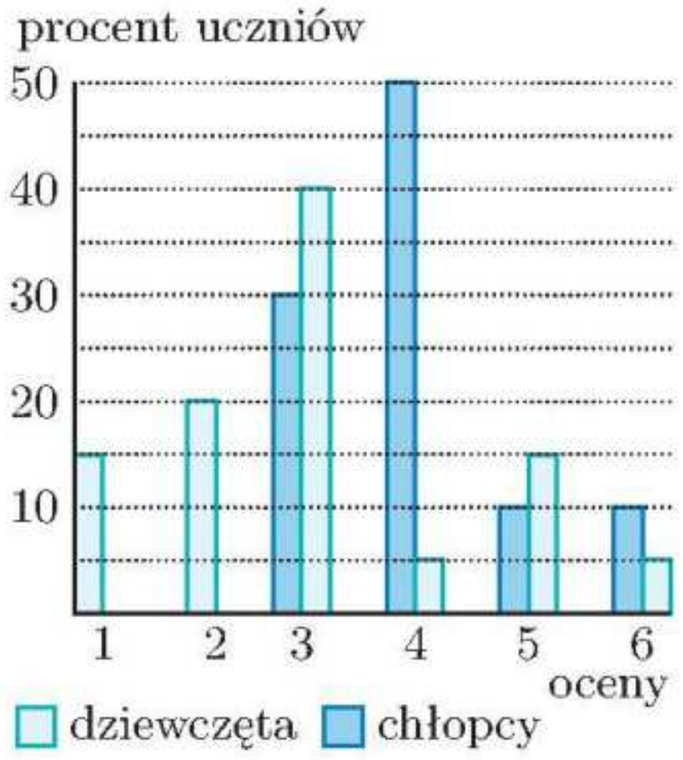
a) I oddział zatrudnia dwa razy więcej pracowników niż II oddział,

b) I oddział zatrudnia o 40% pracowników mniej niż II oddział.

**25.** W tabeli podano miesięczne wynagrodzenia pracowników pewnej firmy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany pracownik z tej firmy zarabia powyżej mediany.

| Liczba pracowników | 12 | 6 | 2 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Wynagrodzenie [zł] | 3000 | 3500 | 4000 | 5000 | 7000 |

**26.** W klasach drugich pewnej szkoły przeprowadzono test sprawdzający z matematyki, w którym wzięło udział 60 uczniów, w tym 20 dziewcząt. Na diagramie podano oceny oddzielnie w grupie dziewcząt i w grupie chłopców.




a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ocena losowo wybranej dziewczyny będzie się różniła od średniej w grupie dziewcząt o więcej niż odchylenie standardowe. Ile wynosi to samo prawdopodobieństwo w grupie chłopców?

b) Wybieramy losowo dziewczynę i chłopca. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ocena dziewczyny będzie nie mniejsza od średniej w grupie dziewcząt, a ocena chłopca – nie mniejsza od średniej w grupie chłopców.

**27.** Niech $m$ będzie średnią arytmetyczną liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, a $n$ – średnią arytmetyczną liczb 11, 21, 31, 41, 51, 61.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Średnia arytmetyczna liczb 12, 23, 34, 45, 56, 67 jest równa $m + n$. | P | F |
| 2. | Zachodzi równość $n = 11m$. | P | F |

# Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

### 1.1. Reguła mnożenia

Ć **1.** 260

**2.** 28

**3.** 56

**4.** **a)** 32 000 **b)** 518 616 **c)** 456 976 000

Z **1.** **a)** 35 **b)** 72

**2.** **a)** 1600 **b)** 67 600

**3.** **a)** 6912 **b)** 82 944

**4.** **a)** 210 **b)** 20 **c)** 42

**5.** 240

**6.** 72

### Prezentacja wyników doświadczenia za pomocą drzewa

**1.** 9

**2.** **a)** Jest ich 8.

**3.** parzystych: 9, podzielnych przez 6: 3

### 1.2. Permutacje

Ć **1.** **a)** 35, 53

**b)** 357, 375, 537, 573, 735, 753

**c)** 3579, 3597, 3759, 3795, 3957, 3975, 5379, 5397, 5739, 5793, 5937, 5973, 7359, 7395, 7539, 7593, 7935, 7953, 9357, 9375, 9537, 9573, 9735, 9753

**2.** **a)** 4 **b)** 8 **c)** 12

**3.** **a)** 5 **b)** 42 **c)** $\frac{1}{90}$ **d)** 10 302 **e)** $n+1$ **f)** $\frac{1}{n}$ **g)** $n^2+3n+2$ **h)** $\frac{1}{n^2-n}$

**4.** **a)** 720 **b)** 5040 **c)** 3 628 800 **d)** 479 001 600

Z **1.** **a)** 120 **b)** 720

**2.** **a)** 362 880 **b)** 3 265 920

**3.** **a)** 96 **b)** 72

**4.** **a)** 120 **b)** 360

**5.** **a)** 4 **b)** 5 **c)** 8 **d)** 10

**6.** **a)** 7 **b)** 11 lub 12

**7.** **a)** 24 **b)** 120

**8.** **a)** 5040 **b)** 40 320

**9.** **a)** 362 880 **b)** 2880 **c)** 4320

**10.** **a)** 56 **b)** $\frac{1}{420}$ **c)** 35 **d)** 120 **e)** $\frac{1}{55}$ **f)** 75 **g)** $\frac{5}{6}$ **h)** $\frac{7}{5}$ **i)** $n^2-5n+6$ **j)** $n^2+n$ **k)** $n^2$ **l)** $1+\frac{1}{n}$

**11.** **a)** 5 **b)** 3

**12.** **a)** 3 **b)** 7 **c)** 24

**13.** **a)** 6 **b)** 24 **c)** 720

**14.** **a)** 12 **b)**, **c)** 144

**15.** 120

**16.** **a)** 40 320 **b)** 5040

### Permutacje z powtórzeniami

**1.** **a)** 210 **b)** 30 240

**2.** **a)** 16 800 **b)** 12 600

### 1.3. Wariacje bez powtórzeń

Ć **1.** **a)** 360 **b)** 358 800

Z **1.** **a)** 504

**b)** trzycyfrowych: 60, czterocyfrowych: 120

**2.** trzycyfrowych: 648, czterocyfrowych: 4536

**3.** **a)** 2520 **b)** 840

**4.** 970 200

**5.** **a)** 5040 **b)** 840

**6.** trzycyfrowych

**7.** 720

### 1.4. Wariacje z powtórzeniami

Ć **1.** **a)** 16 **b)** 15 625

**2.** 11 881 376

**3.** **a)** 100 **b)** 1024

Z **1.** **a)** 729 **b)** 512 **c)** 343 **d)** 448

**2.** **a)** 1000 **b)** 9000

**3.** **a)** $W_2^3 < W_3^2$ **b)** $W_4^3 < W_3^4$

**5.** **a)** 19 683 **b)** 729

**6.** **a)** $10^6$ **b)** $6^{10}$

**8.** **a)** 32 **b)** 2048 **c)** $2^n$

**9.** **a)** 162 **b)** 118 098 **c)** $2 \cdot 3^{n-1}$

**10.** **a)** 216 **b)** 720 **c)** 36 **d)** 324

**11.** **a)** 38 000 **b)** 43 299 **c)** 3125 **d)** 86 875

**12.** **a)** dwucyfrowych **b)** czterocyfrowych

**13.** 25

**14.** 4096

**15.** 10

### 1.5. Reguła dodawania

Ć **1.** **a)** 10 **b)** 9

**2.** **a)** 781 **b)** 6556

**3.** 320

**4.** **a)** 2592 **b)** 432 **c)** 108 **d)** 3132

**5.** 214

Z **1.** **a)** 20 **b)** 32

**2.** **a)** 21 **b)** 16 **c)** 13

**4.** **a)** 216 **b)** 720 **c)** 36 **d)** 324

**5.** **a)** 81 **b)** 585 **c)** 3609 **d)** 18 729

**6.** **a)** 36 **b)** 6

**7.** trzycyfrowych: 448,
czterocyfrowych: 2688

**8.** 44

**9.** **a)** 32 **b)** 128 **c)** 1024

**10.** 110 000

**11.** 1 111 100 000

**12.** 38

**13.** **a)** 1000 **b)** 900

### 1.6. Zdarzenia losowe

Ć **1.** **a)** $\Omega = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$
**b)** $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$

**2.** $A = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$,
$B = \{(2,5), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,5)\}$

**3.** $A = \{(r,r,o,o), (r,o,r,o), (r,o,o,r), (o,r,r,o), (o,r,o,r), (o,o,r,r), (r,o,o,o), (o,r,o,o), (o,o,r,o), (o,o,o,r), (o,o,o,o)\}$,
$B = \{(r,r,o,o), (r,o,r,o), (r,o,o,r), (o,r,r,o), (o,r,o,r), (o,o,r,r)\}$,

**4.** $A = \{(r,r,r), (o,r,r), (r,o,r), (r,r,o)\}$,
$B = \{(r,r,r), (o,r,r), (r,o,r), (r,r,o), (r,o,o), (o,r,o), (o,o,r)\}$,
$C = \{(o,r,r), (r,o,r), (r,r,o)\}$,
$D = \{(o,o,o)\}$,
$E = \{(r,o,o), (o,r,o), (o,o,r), (o,o,o)\}$
zdarzenia wykluczające się:
$A$ i $D$, $A$ i $E$, $B$ i $D$, $C$ i $D$, $C$ i $E$,
zdarzenia przeciwne: $A$ i $E$, $B$ i $D$

Z **1.** $A = \{(5,6,6), (6,5,6), (6,6,5)\}$,
$B = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,2,1), (1,2,2), (1,2,3), (1,3,1), (1,3,2), (1,4,1), (2,1,1), (2,1,2), (2,1,3), (2,2,1), (2,2,2), (2,3,1), (3,1,1), (3,1,2), (3,2,1), (4,1,1)\}$,
$C = \{(1,6,6), (2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,3,4), (3,4,3), (3,6,2), (4,3,3), (6,1,6), (6,2,3), (6,3,2), (6,6,1)\}$

**2.** $A' = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$,
$B' = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$;
żadna nie zachodzi

**3.** **a)** $A = \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,2), (3,4), (4,2), (5,2), (5,4)\}$,
$B = \{(1,4), (4,1)\}$,
$C = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$
**b)** $A \cup B = \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (5,2), (5,4)\}$,
$A \cap B = B \cap C = A \cap B \cap C = \{(1,4)\}$

**4.** $A = B = \{(o,o)\}$,
$C = \{(o,o), (o,r), (r,o), (r,r)\}$

**5.** $A = \{(o,o,o), (o,r,o), (r,o,o), (r,r,o)\}$,
$B = C = \{(o,o,r), (o,r,o), (r,o,o), (o,o,o)\}$

### 1.7. Prawdopodobieństwo klasyczne

Ć **1.** a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$

**2.** $\frac{5}{16}$

**3.** $\frac{31}{32}$

**4.** a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{1}{36}$

**5.** a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$

Z **1.** $C$

**2.** $\frac{1}{2}$

**3.** a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{16}$

**4.** a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{4}{9}$

**5.** a) $\frac{1}{27}$ b) $\frac{1}{12}$

**6.** $\frac{1}{216}$

**7.** a) $(2,4), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)$; $\frac{3}{8}$
b) $\frac{5}{32}$

**8.** a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{5}$

**9.** a) $\frac{4}{45}$ b) $\frac{1}{15}$

**10.** a) $\frac{1}{300}$ b) $\frac{1}{150}$

**11.** a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{7}$

**12.** co najmniej 5 i mniej niż 25

**13.** a) $\frac{5}{18}$ b) $\frac{1}{216}$

**14.** $\frac{10!}{10^{10}} = \frac{9!}{10^9} = 0{,}00036288$

**15.** $\frac{1}{5}$

**16.** a) $\frac{1}{49}$ b) $\frac{30}{49}$

### 1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne – zadania

**1.** a) $\frac{5}{26}$ b) $\frac{1}{4}$

**2.** $\frac{11}{40}$

**3.** 32

**4.** 50

**5.** a) 16 b) 36

**6.** 20

**7.** $\frac{4}{5}$

**8.** a) $\frac{1}{66}$ b) $\frac{1}{462}$

**9.** a) $\frac{1}{1024}$ b) $\frac{11}{1024}$

**10.** $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{7}{8}$

**11.** $P(A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_3) = \frac{1}{18}$, $P(A_4) = \frac{1}{12}$

**12.** $P(A) = \frac{11}{36}$, $P(B) = \frac{4}{9}$, $P(C) = \frac{1}{4}$

**13.** $\frac{7}{36}$

### 1.9. Rozkład prawdopodobieństwa

Ć **1.** $P(\{1,3,5\}) = \frac{13}{30}$,
$P(\{3,4,5,6\}) = \frac{19}{30}$

Z **1.**

| $\omega_i$ | $o$ | $r$ |
|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

**2.** $\frac{29}{60}$

| $\omega_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ |

**3.** a)

| $\omega_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

b)

| $\omega_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**4.**

| $\omega_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |

**5.** a) $\frac{7}{20}$ b) $\frac{13}{20}$

### 1.10. Własności prawdopodobieństwa

Ć **1.** a) $\frac{15}{16}$ b) $\frac{91}{216}$

**2.** $P(A') = \frac{1}{12}$, $P(A) = \frac{11}{12}$

**3.** a) $\frac{11}{12}$ b) $\frac{53}{54}$

**4.** $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$,
$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$; równość zachodzi

**5.** a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{17}{36}$

**6.** a) $\frac{1}{12}$ b) 0

**7.** $\frac{27}{40}$

**8.** $\frac{1}{54}$

**9.** a) 0,45 b) $\frac{5}{12}$

Z **1.** $P(A') = \frac{1}{6}$, $P(A) = \frac{5}{6}$,
$P(B') = \frac{11}{36}$, $P(B) = \frac{25}{36}$

**2.** $P(A) = \frac{11}{12}$, $P(B) = \frac{8}{9}$

**3.** a), b) $\frac{15}{16}$

**4.** a) $\frac{215}{216}$ b) $\frac{35}{36}$

**5.** $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$,
$P(A \cap B) = 0{,}15$, $P(A \cup B) = 0{,}65$;
równość zachodzi

**6.** **a)** 0,66 **b)** 0,6

**7.** $P(A) = \frac{7}{18}$, $P(B) = \frac{1}{3}$

**8.** 0,55

**9.** **a)** $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$, $P(A \setminus B) = \frac{5}{8}$

**b)** $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$, $P(A \setminus B) = \frac{1}{12}$

**10.** **a)** 0,1 **b)** $\frac{11}{39}$

**11.** **b)** 0,47

**12.** **a)** nie **b)** tak

**13.** $\frac{3}{20}$

**14.** $\frac{31}{32}$

**15.** **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{22}{45}$

**16.** **a)** 0,82 **b)** 0,55

### 1.11. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Ć **1.**

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

**2.** **a)**

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |

**b)**

| $x_i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

**3.** **b)** 5 zł

**4.** **b)** 147

Z **1.** **a)** −5 zł **b)** 75 zł

**2.** **a)** 30 **b)** 108

**3.** **a)** w pierwszej **b)** 20 zł

**4.** **a)** 7 **b)** 3

**5.** **a)** $-\frac{15}{16}$ zł **b)** $\frac{3}{32}$ zł

**6.** **a)** około 13 888 889 zł

**b)** około 9 835 888 zł

**c)** około 3,64 zł

**7.** **a)** −30 **b)** 30 **c)** −90

**8.** **a)** 2 **b)** 5

### 1.12. Zagadnienia uzupełniajce

**1.** $\frac{7}{15}$

**2.** $\frac{17}{24}$

**3.** $\frac{13}{36}$

**4.** **a)** $\frac{7}{20}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{5}$

**5.** $\frac{83}{188}$

**6.** $\frac{3}{8}$

**7.** **b)** $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$

**8.** **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $x = 75$

**9.** $\frac{1}{6}$

**10.** $\frac{107}{348}$

**11.** **a)** $\frac{5}{8}$ **b)** $n = 1$

**12.** $\frac{7}{16}$

### Zestaw powtórzeniowy I

**1.** **a)** 120 **b)** 720 **c)** 40 320

**2.** **a)** 5040 **b)** 1440 **c)** 72

**3.** **a)** 60 **b)** 125

**4.** **a)** 81 **b)** 128

**5.** parzystych: 60, nieparzystych: 36

**6.** **a)** 8 **b)** 360

**7.** w trzech: 81, w pięciu: 625

**8.** zaczynających się od 45: 100 000, zaczynających się od 345: 10 000

**9.** **a)** nie **b)**, **c)** tak

**10.** $P(A) = \frac{5}{16}$, $P(B) = \frac{11}{16}$, $P(A \setminus B) = 0$, $P(B \setminus A) = \frac{3}{8}$

**11.** **a)** 40 320 **b)** 5040

**12.** 58

**13.** **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{3}{4}$

**14.** **a)** 0,1512 **b)** $10^{-5}$

**15.** **a)**, **b)** $\frac{5}{9}$

**16.** losowanie dwóch: $\frac{3}{5}$, losowanie trzech: $\frac{2}{5}$

### Zestaw powtórzeniowy II

**1.** $P(A) = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{1}{9}$, $P(A') = \frac{31}{36}$, $P(B') = \frac{8}{9}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{18}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{36}$

**2.** **a)** $\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{12}$ **d)** $\frac{1}{18}$

**3.** **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{4}$

**4.** **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{11}{18}$

**5.** 0,2

**6.** **a)** $\frac{11}{24}$ **b)** $\frac{13}{24}$ **c)** $\frac{1}{3}$

**7.** **a)** $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{3}{5}$

**8.** $\frac{1}{11}$

**9.** **a)** 0,36 **b)** 0,52

**10.** **a)** 0,5 **b)** $\frac{4}{5}$

**11.** **a)** 0,5 **b)** $\frac{2}{3}$

**12.** **a)** 0,4 **b)** $\frac{1}{4}$

**13.** **a)** 7,5 **b)** $-1$

**14.** $x = 40$

**15.** 1

**Zadania testowe**

**1.** D **2.** B **3.** A **4.** D **5.** C **6.** D
**7.** D **8.** C **9.** A

**Przed obowiązkową maturą z matematyki**

**1.** 0,9

**2.** $n = 5$

**3.** 192

**4.** $\frac{81}{625}$

**5.** $\frac{4}{9}$

**6.** 329

**7.** $\frac{2}{5}$

**8.** $\frac{2}{5}$

**9.** $-0{,}5$ zł

### 2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Ć **1.** **a)** $BCC_1B_1$ **b)** $ABB_1A_1$

**2.** Wzdłuż prostej $l$ przecinają się płaszczyzny $P_1$ i $P_4$. Wzdłuż prostej $k$ przecinają się płaszczyzny $P_2$ i $P_3$.

**3.** np. $A$, $B_1$, $C_1$

**4.** $SC$, $SD$

**5.** **a)** $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ **b)** $AB$, $BC$, $CD$, $AD$, $A_1B_1$, $B_1C_1$, $C_1D_1$, $A_1D_1$

**6.** $B$ i $C_1$, $B$ i $D_1$, $C$ i $B_1$, $C$ i $D_1$, $D$ i $B_1$, $D$ i $C_1$

**7.** nie

Z **1.** **a)** proste równoległe: $BC_1$, $AD_1$, proste prostopadłe: $BE$, $AB$, $AE$, $CF$, $DC$, $DF$, $B_1E_1$, $A_1B_1$, $A_1E_1$, $C_1F_1$, $D_1C_1$, $D_1F_1$, $E_1F$, $B_1C$, $A_1D$
**b)** proste równoległe: $B_1F_1$, $AC$, $BF$, proste prostopadłe: $D_1B_1$, $C_1E_1$, $DB$, $CE$, $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$, $EE_1$, $FF_1$, $D_1B$, $B_1D$, $C_1E$, $E_1C$

**2.** **a)** $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$
**b)** nie

**3.** proste prostopadłe przecinające prostą $DB$: $BB_1$, $DD_1$, proste prostopadłe skośne do prostej $DB$: $AA_1$, $CC_1$

**4.** $M$, $P$ i $Q$ – środki krawędzi sześcianu odpowiednio $A_1B_1$, $CC_1$ i $CD$
**a)** np. $MC$ **b)** np. $MQ$
**c)** np. $MA$ **d)** np. $MP$

**6.** trzy, dla krawędzi $AB$: $ABCD$, $ABB_1A_1$, $ABC_1D_1$

**7.** **a)** $D_1B_1$ **b)** $AD_1$ **c)** $C_1B$

### 2.2. Graniastosłupy

Ć **1.** 768 $\text{cm}^2$

**2.** **a)** 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków
**b)** 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków
**c)** 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków

**3.** **a)** tak – graniastosłup siedmiokątny
**b)** nie – liczba krawędzi graniastosłupa musi być podzielna przez 3

**4.** **a)** 2,6 cm **b)** 3,6 cm

**5.** $6\sqrt{6}$ cm

**6.** **a)**, **b)**, **d)** tak **c)** nie

Z **1.** 240 $\text{cm}^2$

**2.** 288 $\text{cm}^2$

**3.** **a)** 528 $\text{cm}^2$ **b)** 700 $\text{cm}^2$

**4.** **a)** 20 cm **b)** 15 cm

**5.** $4(25 + 6\sqrt{3})$ $\text{cm}^2$

**6.** 4

**7.** $8(3 + \sqrt{3})$ $\text{cm}^2$ lub $2(12 + \sqrt{3})$ $\text{cm}^2$

**8.** 66 $\text{cm}^2$ lub 80 $\text{cm}^2$

**9.** **a)** $32(4 + \sqrt{2})$ **b)** $16(7 + 2\sqrt{3})$
**c)** $16(4 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3})$

**10.** $S = 70$, $P_c = 175$

**11.** $88(2+\sqrt{3})$ cm$^2$

**12.** **a)** $18(10+\sqrt{3})$ **b)** $16(7+3\sqrt{2})$ **c)** 180

**13.** **a)** $2(6+\sqrt{3})$ cm$^2$ **b)** 24 cm$^2$
**c)** $12(2+\sqrt{3})$ cm$^2$

### 2.3. Odcinki w graniastosłupach

Ć **1.** 770 cm$^2$

**2.** **a)** $18(\sqrt{3}+12\sqrt{2})$ cm$^2$
**b)** $9(3\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3})$ cm$^2$

**3.** $32\sqrt{7}$ cm$^2$

**5.** **a)** przekątne ścian: $\sqrt{106}$, 13, 15;
przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{10}$
**b)** przekątne ścian: 10, $3\sqrt{29}$, 17;
przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{13}$

**6.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\alpha\approx 35^\circ$

Z **1.** **a)** $50(1+\frac{2}{3}\sqrt{3})$ cm$^2$
**b)** $50(1+2\sqrt{3})$ cm$^2$
**c)** $50(1+2\sqrt{2})$ cm$^2$

**3.** **a)** 8 cm **b)** $8\sqrt{2}$ cm **c)** 8 cm

**4.** 160

**5.** $|BE_1|=4\sqrt{5}$ cm,
$|BD_1|=|BF_1|=8$ cm

**6.** $\frac{525}{4}\sqrt{3}$ cm$^2$

**7.** $2(\sqrt{5}+2)$ cm

**9.** $\frac{\sqrt{33}}{33}$

**10.** $216\sqrt{23}$ cm$^2$

**11.** $n=8$

**12.** $80\sqrt{119}$ cm$^2$

**13.** $d=9$ cm, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

### 2.4. Objętość graniastosłupa

Ć **1.** $P_2$

**2.** 0,125 dm$^3$

**3.** $V_A=30$ cm$^3$, $V_B=50$ cm$^3$

**4.** **a)** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ **b)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

**5.** **a)** $180\sqrt{3}$ cm$^3$ **b)** $\frac{125}{8}$ cm$^3$

**6.** 78 m$^3$

Z **1.** **a)** $84\sqrt{3}$ cm$^3$ **b)** 972 cm$^3$

**2.** **a)** 112 cm$^3$ **b)** $125\sqrt{2}$ cm$^3$

**3.** $x=14$ cm

**4.** $9(2\sqrt{3}-3)$

**5.** A – nie, B – tak, $V=96\sqrt{3}$

**6.** krawędź podstawy: 6 cm,
wysokość graniastosłupa: 1,5 cm

**7.** **a)** $16\sqrt{3}$ cm$^3$ **b)** 324 cm$^3$

**8.** $V_1=1500$ cm$^3$, $V_2=4500$ cm$^3$,
$V_3=7500$ cm$^3$, $V_4=13\,500$ cm$^3$

**9.** 0,45 m$^3$

### Graniastosłupy pochyłe

**1.** $\frac{4}{3}\sqrt{6}$

**2.** **a)** $27\sqrt{2}$ cm$^2$ **b)** 12,29 cm$^3$

### 2.5. Ostrosłupy

Ć **2.** **a), c)** nie
**b)** tak, $P_c=4(1+2\sqrt{2})$

**3.** $4(3+\sqrt{3})$ cm$^2$

**4.** $10\sqrt{3}$

**5.** $36(1+\sqrt{3})$ cm$^2$

**6.** **a)** $25\sqrt{3}$ cm$^2$ **b)** 42 cm

Z **1.** $64+\frac{25}{2}\sqrt{3}$

**2.** $h=\sqrt{11}$ cm lub $h=\sqrt{39}$ cm

**3.** 360 cm$^2$

**4.** $8(3+\sqrt{3})$ cm$^2$

**5.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}(3+\sqrt{73})$ cm$^2$

**6.** $2\sqrt{3}$ cm$^2$

**7.** $12(4\sqrt{3}+9\sqrt{2})$ cm$^2$

**9.** $\cos\sphericalangle SAB=\cos\sphericalangle ASB=\frac{2\sqrt{2}}{5}$,
$\cos\sphericalangle ABS=\frac{9}{25}$,
$\sphericalangle SAB=\sphericalangle ASB\approx 56^\circ$, $\sphericalangle ABS\approx 68^\circ$

**10.** **a)** 340 cm$^2$ **b)** $(25\sqrt{3}+180)$ cm$^2$
**c)** $(150\sqrt{3}+360)$ cm$^2$

**11.** $8(\sqrt{34}+10)$

### 2.6. Objętość ostrosłupa

Ć **1.** $V_1=\frac{64}{3}$ cm$^3$, $V_2=\frac{512}{3}$ cm$^3$

**2.** **a)** 228 **b)** 864

**3.** $P_c=64$ cm$^2$, $V=\frac{64\sqrt{2}}{3}$ cm$^3$

**4.** $972\sqrt{3}$ cm$^3$

**5.** **a)** $256\sqrt{3}$ cm$^3$ **b)** $2304\sqrt{3}$ cm$^3$

**6.** **a)** $\frac{32}{3}\sqrt{2}$ cm$^3$ **b)** $9\sqrt{2}$ cm$^3$

**7.** **a)** $18\sqrt{2}$ cm$^3$ **b)** $36\sqrt{3}$ cm$^2$

Z **1.** a) $180\ \mathrm{cm}^3$ b) $80\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$ c) $120\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

**2.** $36\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$

**3.** $\frac{100}{3}\sqrt{119}\ \mathrm{cm}^3$

**4.** $\frac{64\sqrt{15}}{3}\ \mathrm{cm}^3$

**5.** $\frac{128}{3}\sqrt[4]{27}\ \mathrm{cm}^3$

**6.** a) $5$ cm b) $7$ cm

**7.** $\frac{3\sqrt{39}}{4}$

**8.** $54\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

**9.** a) $\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

b) $2\sqrt{3}(140+99\sqrt{2})\ \mathrm{cm}^3$

**10.** $\frac{8\sqrt{17}}{3}\ \mathrm{cm}^3$

**11.** $36\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$

**12.** a) $4$ b) $8$

**13.** $\frac{1000\sqrt{2}}{3}\ \mathrm{cm}^3$

**14.** $\frac{250\sqrt{2}}{3}\ \mathrm{cm}^3$

### 2.7. Kąt między prostą a płaszczyzną

Ć **1.** $30^\circ$, około $27^\circ$

**2.** $\frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

**3.** $\frac{256}{3}\ \mathrm{cm}^3$

**4.** $49\sqrt{572}\ \mathrm{cm}^3$

**5.** a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

**6.** a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{1365}}{39}$

Z **1.** a) $\frac{6\sqrt{77}}{77}$ b) $\frac{4\sqrt{77}}{77}$ c) $\frac{5\sqrt{77}}{77}$

**2.** $\frac{\sqrt{21}}{5}$

**3.** a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$

**4.** a) $512\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$ b) $25(3+2\sqrt{6})\ \mathrm{cm}^2$

**5.** $P_c = 16(3+2\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2$, $V = 32\ \mathrm{cm}^3$

**6.** a) $288\ \mathrm{cm}^3$ b) $96\ \mathrm{cm}^3$

**7.** a) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

**8.** $P_c = 12\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$, $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}^3$

**9.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

**10.** $\frac{375\sqrt{3}}{32}\ \mathrm{cm}^3$

**11.** $d\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\alpha}$

**14.** a) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

**15.** a) $P_c = \frac{16(3+2\sqrt{3})}{3}$, $V = \frac{32\sqrt{3}}{9}$

b) $P_c = 18(1+\sqrt{2})$, $V = 9\sqrt{2}$

c) $P_c = 108$, $V = 36\sqrt{3}$

### 2.8. Kąt dwuścienny

Ć **1.** a) $60^\circ$ b) $108^\circ$ c) $120^\circ$

**2.** a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

**3.** a) $30^\circ$ b) $9\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$

**4.** $-\frac{1}{15}$

**5.** $\frac{32}{3}\sqrt[4]{27}\ \mathrm{cm}^3$

Z **1.** $90^\circ$, około $74^\circ$, około $16^\circ$

**2.** $\frac{24\sqrt{601}}{601}$

**3.** a) około $18^\circ$ b) $-\frac{25}{144}$

**4.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**5.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$

**6.** około $49^\circ$

**7.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

**8.** $\frac{5}{2}$

**9.** a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

**12.** a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

### 2.9. Przekroje prostopadłościanów

Ć **1.** $25\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$

**2.** a) $80\ \mathrm{cm}^2$ b) $\frac{80\sqrt{6}}{3}\ \mathrm{cm}^2$ c) $32\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$

**4.** a) $\frac{100\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}^2$ b) $50\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$

**5.** a) $9\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^2$ b) $13{,}5\ \mathrm{cm}^2$ c) $\frac{9}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

**6.** $8\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^2$

**7.** $72\ \mathrm{cm}^2$

Z **1.** a) $24\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{41}\ \mathrm{cm}^2$

**2.** Suma pól jest najmniejsza dla cięcia przechodzącego przez przekątną ściany o wymiarach $4\ \mathrm{dm} \times 5\ \mathrm{dm}$, a największa – dla przechodzącego przez przekątną ściany o wymiarach $3\ \mathrm{dm} \times 4\ \mathrm{dm}$.

**3.** $47:1$

**4.** a) $Ob = 16\sqrt{2}$ cm, $P = 16\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

b) $Ob = 20$ cm, $P = 4\sqrt{34}\ \mathrm{cm}^2$

**5.** a) $(10+9\sqrt{2})$ cm b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

**6.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

**7.** $27$

**8.** $\frac{3\sqrt{17}}{17}$

**9.** a) $P = 6\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $P = 182\ \mathrm{cm}^2$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

**10.** a) $12\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$ b) $6\sqrt{17}\ \mathrm{cm}^2$ c) $12\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$

**11.** $P_1 = 2(3+\sqrt{3})$ cm$^2$,
$P_2 = 2(45+\sqrt{3})$ cm$^2$,
$V_1 = 1\frac{1}{3}$ cm$^3$, $V_2 = 62\frac{2}{3}$ cm$^3$

**12.** $4\sqrt{22}$ cm$^2$

### 2.10. Zagadnienia uzupełniające

**1.** do uzupełnienia kolejno:
czworościan: 4, 6, 4,
ośmiościan: 8, 12, 6,
dwunastościan: 12, 30, 20,
dwudziestościan: 20, 30, 12

**2.** $P_c = 32\sqrt{3}$ cm$^2$, $V = \frac{64}{3}\sqrt{2}$ cm$^3$

**3.** $P_c = 64\sqrt{3}$ cm$^2$, $V = 85\frac{1}{3}$ cm$^3$

**4.** $18\sqrt{2}$ cm$^2$

**5.** 2:1

**6.** $\frac{128}{27}\sqrt{2}$ cm$^3$

**7.** **a)** 4 **b)** 3 **c)** 2

**8.** nie

**9.** $7(1+\frac{2}{3}\sqrt{2})$ cm$^3$

**10.** $3(\sqrt{2}-1)$ cm

**Zestaw powtórzeniowy I**

**1.** **a)** 2 **b)** $4-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **c)** $2-\sqrt{3}$

**2.** $P_c = 12(\sqrt{3}+2)$,
$V = 2(5+3\sqrt{3})$

**3.** $4\sqrt{15}$

**4.** 1620 cm$^2$

**6.** **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**7.** **a)** $P_c = 12(3+2\sqrt{3})$, $V = 12\sqrt{3}$
**b)** $P_c = 9(2+\sqrt{3})$, $V = 3\sqrt{3}$
**c)** $P_c = 54(2+\sqrt{3})$, $V = 54\sqrt{3}$

**8.** $28+\sqrt{43}$

**9.** $30^\circ$

**Zestaw powtórzeniowy II**

**1.** $V = \frac{27}{2}$, $P_c = 9(\sqrt{3}+2)$, $d_1 = \sqrt{15}$,
$d_2 = 2\sqrt{3}$

**2.** **b)** $\frac{16}{25}$

**3.** $S = 4(6+\sqrt{5})$, $P_b = 8(1+\sqrt{5})$

**4.** $|CD_1| = \sqrt{2}$, $|CE| = |ED_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$,
$\cos\alpha = \frac{1}{5}$

**5.** $\frac{1}{12}$

**6.** **a)** 64 **b)** $24\sqrt{3}$ **c)** $48\sqrt{3}$

**7.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

**8.** **a)** $\frac{75\sqrt{2}}{4}$ cm$^2$ **b)** $25\sqrt{2}$ cm$^2$
**c)** $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm$^2$

**Zadania testowe**

**1.** B **2.** D **3.** B **4.** A **5.** D **6.** C **7.** A

**Przed obowiązkową maturą z matematyki**

**1.** $4\sqrt{5}$ cm

**2.** 4

**3.** $2(3+\sqrt{3})$ cm$^2$

**4.** $486\sqrt{3}$ cm$^3$

**5.** $64\sqrt{2}$

**6.** $162\sqrt{15}$ cm$^3$

**7.** $250\sqrt{6}$ cm$^3$

**8.** $25\sqrt{119}$

### 3.1. Walec

Ć **1.** **b)** $10\pi(7-3\sqrt{5})$ cm$^2$

**2.** **a)** $192\pi$ cm$^2$ **b)** $72\pi$ cm$^2$

**3.** **a)** $18\pi(3+2\sqrt{3})$ cm$^2$
**b)** $240\pi$ cm$^2$

**4.** **a)** $128\pi$ cm$^3$ **b)** $72\pi$ cm$^3$ lub $96\pi$ cm$^3$

**5.** **a)** $V = 320\pi$, $P_c = 192\pi$
**b)** $V = 640\pi$, $P_c = 288\pi$

**6.** **a)** $128\pi$ cm$^3$ **b)** $243\pi$ cm$^3$

Z **1.** **a)** $P_c = 9\pi(\frac{3}{2}+\sqrt{3})$, $V = \frac{81}{4}\pi$
**b)** $P_c = 8\pi(1+2\sqrt{3})$, $V = 16\sqrt{3}\pi$
**c)** $P_c = 108\pi$, $V = 108\sqrt{2}\pi$

**2.** **a)** $320\pi$ cm$^2$ **b)** $\frac{13\,000}{41}\pi$ cm$^2$
**c)** $32\pi(6+\sqrt{6})$ cm$^2$

**3.** $P_p = 196\pi$, $V = 2744\pi$

**4.** $V = 288\pi$ cm$^3$, $P_c = 176\pi$ cm$^2$ lub
$V = 648\pi$ cm$^3$, $P_c = 306\pi$ cm$^2$

**7.** 40 cm$^2$

**8.** **a)** $27\sqrt{3}\pi$ cm$^3$
**b)** $7\sqrt{21}\pi$ cm$^3$

**9.** $2000\pi$

**10.** tak

**11.** $4\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ lub $4\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

**12.** $\frac{81}{4\pi}$ lub $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$

**14.** nie

**15.** $V = \frac{343\pi}{4}$ cm$^3$, $P_c = \frac{147\pi}{2}$ cm$^2$

**16.** **a)** $30^\circ$ **b)** $45^\circ$

**17.** $80\pi\sqrt{5}$ cm$^3$

### 3.2. Stożek

Ć **1.** **b)** $108\pi$ cm$^2$

**2.** A

**3.** **a)** $P_p = 4\pi$, $P_c = 16\pi$
**b)** $\frac{272\pi}{5}$ cm$^2$

**4.** $240^\circ$

**5.** $90^\circ$

**6.** **a)** $384\pi$ cm$^3$ **b)** $100\pi$ cm$^3$

**7.** **a)** $432\pi$ cm$^3$ **b)** $100\pi$ cm$^3$

**8.** **a)** $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$ cm$^3$ **b)** $30^\circ$

**9.** **a)** $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$ cm$^3$ **b)** $16\pi(\frac{2\sqrt{5}}{3}+1)$

Z **1.** **a)** $P_p = 4\pi$ cm$^2$, $V = \frac{8}{3}\pi\sqrt{35}$ cm$^3$
**b)** $P_p = 36\pi$ cm$^2$, $V = 72\pi\sqrt{3}$ cm$^3$
**c)** $P_p = 64\pi$ cm$^2$, $V = \frac{256}{3}\pi\sqrt{5}$ cm$^3$
**d)** $P_p = 81\pi$ cm$^2$, $V = 81\pi\sqrt{7}$ cm$^3$

**2.** **a)** $72^\circ$ **b)** $\frac{25\sqrt{5}}{4}$ cm$^2$

**3.** **a)** $P_c = 18\pi(1+\sqrt{2})$ cm$^2$,
$V = 18\pi\sqrt{2}$ cm$^3$
**b)** $60^\circ$ **c)** $36\pi(3+2\sqrt{3})$ cm$^2$

**4.** **a)** $\frac{8}{3}\pi\sqrt{3}$ cm$^3$
**b)** $P = 9$ cm$^2$, $V = \frac{9}{2}\pi(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm$^3$

**5.** $45^\circ$

**6.** $1{,}5\pi$ l, $20\sqrt[3]{4}$ cm

**7.** **a)** $80\pi$ cm$^3$
**b)** $4\pi(2\sqrt{29}+\sqrt{41})$ cm$^2$

**9.** $36\pi$ cm$^3$

**10.** $48\pi$ cm$^2$

**11.** $96\pi$ cm$^3$

**Linie geodezyjne**

**1.** **a)** $2\sqrt{9\pi^2+16}$
**b)** $2\sqrt{9\pi^2+4}$

**2.** **a)** $12\sqrt{3}$ **b)** $6\sqrt{7}$

### 3.3. Kula

Ć **1.** **a)** $51\pi$ cm$^2$ **b)** 3 cm

**2.** **a)** $\frac{a}{2}$ **b)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**3.** **a)** $P = 9\pi$ cm$^2$, $V = \frac{9}{2}\pi$ cm$^3$
**b)** $P = 12\pi$ cm$^2$, $V = 4\sqrt{3}\pi$ cm$^3$
**c)** $P = 32\pi$ cm$^2$, $V = \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$ cm$^3$

**4.**

| $r$ | 6 | 3 | 8 | 2 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $144\pi$ | $36\pi$ | $256\pi$ | $16\pi$ | $3{,}24\pi$ |
| $V$ | $288\pi$ | $36\pi$ | $\frac{2048}{3}\pi$ | $\frac{32}{3}\pi$ | $0{,}972\pi$ |

Z **1.** **a)** $P = 192\pi$ cm$^2$, $V = 256\pi\sqrt{3}$ cm$^3$
**b)** $P = 400\pi$ cm$^2$, $V = \frac{4000}{3}\pi$ cm$^3$
**c)** $P = 144\pi$ cm$^2$, $V = 288\pi$ cm$^3$

**2.** $(\sqrt{55}-4\sqrt{3})$ cm lub $(\sqrt{55}+4\sqrt{3})$ cm

**3.** **a)** $108\sqrt{3}\pi$ **b)** $15\pi$

**4.** **a)** $16\pi$ cm$^2$
**b)** $3\sqrt{3}$ cm lub $3\sqrt{5}$ cm

**5.** **a)** $48\pi$ cm$^2$ **b)** $144\pi$ cm$^2$
**c)** $75\pi$ cm$^2$

**8.** **a)** 4 **b)** $4\sqrt{3}$

**9.** $r\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

**10.** **a)** $\frac{8}{3}\pi\sqrt{5}$ cm
**b)** $6\pi$ cm

**11.** **a)** $P = 72\pi$ cm$^2$, $V = 72\pi\sqrt{2}$ cm$^3$
**b)** $P = 324\pi$ cm$^2$, $V = 972\pi$ cm$^3$
**c)** $P = 2\pi$ cm$^2$, $V = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ cm$^3$

**12.** **a)** o $900\pi$ cm$^2$ **b)** o $700\pi$ cm$^2$

### 3.4. Bryły podobne

Ć **1.** **a)** $x = 2{,}4$, skala podobieństwa: $k = \frac{2}{5}$
**b)** $x = 5{,}4$, skala podobieństwa: $k = \frac{3}{5}$

**2.** $8:1$

**3.** $V_2 = 288\pi$ cm$^3$, $1:4$

**4.** $\pi$ cm$^3$, $26\pi$ cm$^3$

Z **1.** **a)** nie **b)** tak

**2.** **a)** 9 cm

**3.** **a)** $2:3$ **b)** $1:2$ **c)** $3:4$ **d)** $4:1$

**4.** **a)** $\frac{27}{37}$ **b)** $\frac{8}{117}$ **c)** $\frac{8}{19}$

**5.** $1:(\sqrt[3]{2}-1)$

**6.** **a)** $\frac{1}{36}$ **b)** $\frac{25}{9}$ **c)** 0,36 **d)** 0,16

**7.** 12 cm

**8.** o 72,8%

**9.** $2\pi$ cm$^3$, $126\pi$ cm$^3$

### 3.5. Zagadnienia uzupełniające

**1.** $\frac{136\sqrt{34}}{3}\pi$ cm$^3$

**2.** $54\pi$ cm$^3$

**3.** $4\sqrt{3}\pi$ cm$^3$

4. $12\pi$ cm$^3$

### Zestaw powtórzeniowy I

**1.** **a)** $P_c = 40\pi$, $V = 24\pi\sqrt{2}$
**b)** $P_c = 24\pi(1+\sqrt{3})$, $V = 72\pi$
**c)** $P_c = 8\pi(3+2\sqrt{3})$, $V = 48\pi$

**2.** 9:4

**3.** $1000\pi$ cm$^3$

4. $8\pi(\sqrt{2}+1)$ cm$^2$

**5.** **a)** $P_c = 9\pi(\sqrt{2}+1)$, $V = 9\pi$
**b)** $P_c = 27\pi$, $V = 9\pi\sqrt{3}$
**c)** $P_c = 16\pi(2\sqrt{3}+3)$, $V = 64\pi$

**6.** $\frac{225\sqrt{39}}{8}\pi$ cm$^3$

**7.** $\frac{5}{4}\pi$

**8.** **a)** $\frac{16\,384}{3}\pi$ cm$^3$ **b)** $\frac{62\,500}{3}\pi$ cm$^3$
**c)** $72\pi\sqrt{2}$ cm$^3$

**9.** **a)** $9\pi$ cm$^2$ **b)** $576\pi$ cm$^2$ **c)** $72\pi\sqrt[3]{4}$ cm$^2$

### Zestaw powtórzeniowy II

**1.** $\frac{35}{\pi}$ cm$^2$

**2.** $576\pi$ lub $768\pi$

**3.** $128\pi$

4. 3:1

**5.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

**6.** **a)** $\frac{80}{3}\pi$ **b)** $\frac{100}{3}\pi$

**7.** $288\pi$

**8.** 2

**9.** **a)** $9{,}6\pi$ cm **b)** $6\pi\sqrt{3}$ cm

### Zadania testowe

**1.** A **2.** B **3.** B **4.** C **5.** B **6.** A **7.** C
**8.** A **9.** C

### Przed obowiązkową maturą z matematyki

**1.** $\frac{3}{2}$

**2.** $\sqrt{15}$

**3.** $9\pi\sqrt{3}$ cm$^3$

4. $180\pi\sqrt{5}$ cm$^3$

**5.** 10 szklanek

**6.** $432\pi$ cm$^3$

**7.** $V = 63\pi$, $P_c = 3\pi\sqrt{3}(6+\sqrt{127})$

**8.** $52\pi$ cm$^2$

**9.** $4\sqrt[3]{4}$ cm

### 5.1. Liczby rzeczywiste

**1.** **a)** $x_1 = \frac{4}{15}$, $x_2 = \frac{17}{60}$, $x_3 = \frac{3}{10}$, $x_4 = \frac{19}{60}$
**b)** $x_1 = \frac{17}{80}$, $x_2 = \frac{9}{40}$, $x_3 = \frac{19}{80}$, $x_4 = \frac{21}{80}$

**2.** np. **a)** $2^{-19}$ **b)** $3^{-28}$ **c)** $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ **d)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{12}$
**e)** $(\sqrt[3]{2})^{-2}$ **f)** $(\sqrt[6]{3})^{17}$

**3.** **a)** 7 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{9}{25}$ **d)** $\frac{1}{25}$ **e)** $-1$ **f)** 0,8

**4.** **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{13}{6}$ **c)** $\frac{17}{4}$ **d)** $\frac{10}{7}$ **e)** $\frac{12}{1}$ **f)** $\frac{3}{25}$

**5.** **a)** $3{,}3 \cdot 10^{16}$ **b)** $5 \cdot 10^{10}$ **c)** $5 \cdot 10^{-10}$
**d)** $3 \cdot 10^{-2}$ **e)** $1{,}8 \cdot 10^{-2}$ **f)** $7 \cdot 10^2$

**6.** **a)** 14,167, z nadmiarem
**b)** 10,625, wartość dokładna
**c)** 1,879, z nadmiarem
**d)** 0,099, z niedomiarem

**7.** **a)** 1,7783 **b)** 1778,28 **c)** 0,017 78

**8.** **a)** $6\sqrt{2}$ **b)** $7\sqrt{2}$ **c)** $5\sqrt[3]{4}$
**d)** $4\sqrt[3]{2}$ **e)** $5\sqrt[3]{5}$

**9.** **a)** 15 **b)** 24 **c)** $-3$ **d)** 1
**e)** $\frac{13}{3}$ **f)** $\frac{5}{2}$ **g)** $\frac{5}{3}$ **h)** $\frac{9}{4}$

**10.** **a)**, **c)**, **d)**, **e)**, **f)** tak **b)** nie

**11.** **a)** 2 **b)** $-11$ **c)** 1 **d)** 49 **e)** $12\sqrt{7}$ **f)** 25

**12.** **a)** 4 **b)** 140 **c)** 40 **d)** 26

**13.** **a)** $B$ **b)** $B$ **c)** $A$

**14.** **a)** Zmaleje o 4%.
**b)** Nie zmieni się.

**15.** 25

**16.** **a)** $2\sqrt{5}+4$ **b)** $\frac{3\sqrt{7}-7}{2}$
**c)** $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3}-4$

**17.** **a)** 7 **b)** $-13+5\sqrt{5}$ **c)** $-17-7\sqrt{5}$
**d)** $-\frac{7}{4}+\frac{7}{4}\sqrt{5}$

**18.** **a)** 1 **b)** 8 **c)** $2\sqrt{3}$ **d)** 10

**19.** **a)** tak **b)** nie

**20.** **a)**, **c)** 2, wymierna
**b)** $-\frac{4}{25}$, wymierna

**21.** **a)** 1 **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** $2\sqrt{3}$ **d)** $-2\sqrt{2}$
**e)** $2\sqrt{3}-2$ **f)** $2\sqrt{3}+2$
**g)** $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ **h)** 0

**22.** **a)** $4x^3$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **b)** $4x^2$, 3
**c)** $2x^3$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

**23.** **a)** $-2y^2$, $2(-9+4\sqrt{2})$ **b)** 0

**26.** $b$ o 75%

**27.** **a)** 75% **b)** 375%

**28.** 201,30 zł

**29.** 2000 zł

**30.** **a)** o 24%
**b)** o 1 punkt procentowy

**31.** **a)** $(11-7x)(11+7x)$
**b)** $(\frac{2}{3}x-\frac{5}{4}y)(\frac{2}{3}x+\frac{5}{4}y)$
**c)** $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$
**d)** $(3x-\frac{1}{2}y)(3x+\frac{1}{2}y)(9x^2+\frac{1}{4}y^2)$
**e)** $3(3x-1)(x+1)$
**f)** $4(x-2)(2x-1)$
**g)** $(x-2)^2(x+2)^2$
**h)** $(3x-1)^2(3x+1)^2$
**i)** $(2x-3)^2(2x+3)^2$

**32.** **a)** 7 **b)** 49

**35.** **a)** $x^3+6x^2+12x+8$
**b)** $27x^3-27x^2+9x-1$
**c)** $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$
**d)** $125x^3+150x^2+60x+8$
**e)** $\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+8$
**f)** $x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$

**36.** **a)** $10+6\sqrt{3}$
**b)** $16-8\sqrt{5}$
**c)** $135-78\sqrt{3}$
**d)** $124+53\sqrt{5}$
**e)** $\frac{45+29\sqrt{2}}{27}$
**f)** $\frac{124-53\sqrt{5}}{8}$

**37.** **a)** $-198$ **b)** $25+15\sqrt{2}$

**38.** **a)** $x^3-27$ **b)** $8x^3+27$
**c)** $x^3-8y^3$ **d)** $x^4-x^3-x+1$

**39.** **a)** $(x+4)(x^2-4x+16)$
**b)** $(2x-1)(4x^2+2x+1)$
**c)** $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$
**d)** $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$
**e)** $(x^2+5)(x^4-5x^2+25)$
**f)** $(3x-4y^2)(9x^2+12xy^2+16y^4)$

**49.** 1. P, 2. F

**50.** 1. F, 2. P

**51.** C. 2.

### 5.2. Zbiory, przedziały i nierówności

**1.** $A=\{-1,0,2,4,5,7\}$,
$B=\{-2,-1,0,1,3,4\}$,
$A\cup B=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,7\}$,
$A\cap B=\{-1,0,4\}$,
$A\setminus B=\{2,5,7\}$, $B\setminus A=\{-2,1,3\}$

**2.** **a)** $A\cup B=\{-2,-1,0,1,2\}$, $A\cap B=\{0\}$,
$A\setminus B=\{1,2\}$, $B\setminus A=\{-2,-1\}$
**b)** $A\cup B=\{-1,0,1\}$, $A\cap B=\{0,1\}$,
$A\setminus B=\{-1\}$, $B\setminus A=\emptyset$
**c)** $A\cup B=A$, $A\cap B=B$, $A\setminus B=\{2,6\}$,
$B\setminus A=\emptyset$
**d)** $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A\cap B=\emptyset$,
$A\setminus B=A$, $B\setminus A=B$

**3.** **a)** $A\cup B=(-7;5)$, $A\cap B=\langle -3;2\rangle$,
$A\setminus B=(-7;-3)$, $B\setminus A=(2;5)$
**b)** $A\cup B=A=(-\infty;3\rangle$,
$A\cap B=B=\langle -1;1)$,
$A\setminus B=(-\infty;-1)\cup\langle 1;3\rangle$, $B\setminus A=\emptyset$
**c)** $A\cup B=\mathbf{R}$, $A\cap B=\langle -3;-2\rangle\cup\langle 2;3\rangle$,
$A\setminus B=(-2;2)$,
$B\setminus A=(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$

**4.** **a)** $A=(-\infty;2)$, $B=\langle 0;\infty)$, $A\cup B=\mathbf{R}$,
$A\cap B=\langle 0;2)$, $A\setminus B=(-\infty;0)$,
$B\setminus A=\langle 2;\infty)$
**b)** $A=(-\infty;9\rangle$, $B=(0;\infty)$, $A\cup B=\mathbf{R}$,
$A\cap B=(0;9\rangle$, $A\setminus B=(-\infty;0\rangle$,
$B\setminus A=(9;\infty)$

**5.** **a)** $A\cap B=\langle 0;2\rangle$, 0, 1, 2
**b)** $A\cap B=\langle 2;6\rangle$, 2, 3, 4, 5, 6
**c)** $A\cap B=(0;1\rangle\cup\langle 4;8)$, 1, 4, 5, 6, 7
**d)** $A\cap B=\{0\}\cup(2;4\rangle$, 0, 3, 4
**e)** $A\cap B=\langle -2;-1\rangle\cup(4;6)$, $-2$, $-1$, 5
**f)** $A\cap B=\langle -3;2)$, $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1

**6.** **a)** $A = (-\infty; 2)$, $B = \langle -1; \infty)$,
$A \cap B = \langle -1; 2)$, $A \setminus B = (-\infty; -1)$
**b)** $A = \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$, $B = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$,
$A \cap B = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $A \setminus B = \left\langle \frac{1}{2}; \infty\right)$
**c)** $A = (-2; 3\rangle$, $B = \langle 0; 2)$,
$A \cap B = \langle 0; 2)$,
$A \setminus B = (-2; 0) \cup \langle 2; 3\rangle$
**d)** $A = \langle -1; 5\rangle$, $B = \left\langle -2; \frac{1}{2}\right)$,
$A \cap B = \left\langle -1; \frac{1}{2}\right)$, $A \setminus B = \left\langle \frac{1}{2}; 5\right\rangle$

**7.** **a)** $x \in \langle 4; \infty)$ **b)** $x \in \langle 5; \infty)$
**c)** $x \in (-\infty; 10\rangle$ **d)** $x \in (-7; \infty)$
**e)** $x \in (-\infty; 2\rangle$ **f)** $x \in (0; \infty)$
**g)** $x \in \langle 4; \infty)$ **h)** $x \in \left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$

**8.** **a)** $x \in (-1; 8\rangle$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
**b)** $x \in (1; 6\rangle$, 2, 3, 4, 5, 6
**c)** $x \in (-1; 0)$, brak liczb całkowitych

**9.** **a)** 1 **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $2 - \sqrt{3}$
**d)** $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ **e)** 3 **f)** 1

**10.** **a)** $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
**b)** $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$
**c)** $-2, -1, 0, 1, 2$
**d)** $-4, -3, -2, 2, 3, 4$
**e)** $-6, -5, -4, 4, 5, 6$
**f)** $-3, -2, 2, 3$

**11.** **a)** $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
**b)** $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$
**c)** $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$
**d)** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \emptyset$

**12.** **a)** 15 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 514

**13.** **a)** $A \cup B = A$, $A \cap B = B$,
$A \setminus B = \langle 4; 5) \cup (6; 8)$, $B \setminus A = \emptyset$,
$5 \in A \cup B$ i $5 \in A \cap B$
**b)** $A \cup B = A$, $A \cap B = B$,
$A \setminus B = \{5\} \cup (6; 7)$, $B \setminus A = \emptyset$,
$5 \in A \cup B$ i $5 \in A \setminus B$
**c)** $A \cup B = \langle -1; \infty)$, $A \cap B = (0; 4)$,
$A \setminus B = \langle -1; 0\rangle \cup (5; \infty)$, $B \setminus A = \langle 4; 5\rangle$,
$5 \in A \cup B$ i $5 \in B \setminus A$
**d)** $A \cup B = (-\infty; 8\rangle$,
$A \cap B = \{5\} \cup (6; 7)$,
$A \setminus B = (-\infty; 5) \cup \langle 7; 8\rangle$, $B \setminus A = (5; 6)$,
$5 \in A \cup B$ i $5 \in A \cap B$

**14.** **a)** $A \cup B$ **b)** $A \cup B$, $A \setminus B$
**c)** $A \cup B$, $A \cap B$ **d)** $A \cup B$

**15.** **a)** $(-1; 2\rangle$ **b)** $\langle -6; -5)$

**16.** **a)** $x \in (2; 9\rangle$; 3 **b)** $x \in \left\langle \frac{14}{3}; \infty\right)$; 5
**c)** $x \in (-1; 6)$; 0 **d)** $x \in \left(-\frac{7}{5}; \infty\right)$; $-1$

**17.** **a)** prawdziwa dla $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$
**b)** fałszywa dla $x = 2$ i $y = -3$
**c)** fałszywa dla $x = 2$ i $y = -3$

**18.** **a)** $4\sqrt{2} - 3$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** 1

**19.** **a)** $x = -9$, $x = 9$
**b)** $x = -1{,}6$, $x = 1{,}6$
**c)** sprzeczne **d)** $x = 0$
**e)** $x = -\sqrt{3} - 1$, $x = \sqrt{3} + 1$
**f)** sprzeczne

**20.** **a)** $x = -1$, $x = 5$
**b)** $x = -5$, $x = 7$
**c)** $x = -3$ **d)** $x = -4$, $x = 2$
**e)** $x = 0$, $x = 8$
**f)** $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$

**21.** **a)** $x = 0$, $x = 4$
**b)** $x = -2$, $x = 4$
**c)** $x = -1$, $x = 5$

**22.** **a)** $x = 0$, $x = 6$
**b)** $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{17}{2}$
**c)** $x = -6$, $x = -4$
**d)** $x = 4$, $x = 8$

**23.** **a)** $A \cup B = \langle 1; 5\rangle$, $A \cap B = \langle 2; 4\rangle$,
$A \setminus B = \langle 1; 2)$, $B \setminus A = (4; 5\rangle$
**b)** $A \cup B = (-2; 5)$, $A \cap B = \emptyset$,
$A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$
**c)** $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = (0; 2)$,
$A \setminus B = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; 6)$,
$B \setminus A = \langle 6; \infty)$
**d)** $A \cup B = \langle -5; 0\rangle \cup (2; \infty)$,
$A \cap B = (4; \infty)$,
$A \setminus B = (2; 4\rangle$, $B \setminus A = \langle -5; 0\rangle$
**e)** $A \cup B = \{-2, 0, 4\} \cup (1; 3\rangle$,
$A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = (1; 3)$,
$B \setminus A = \{-2, 0, 4\}$
**f)** $A \cup B = \{-2, 0, 1\} \cup \langle 3; 7\rangle$,
$A \cap B = \{5\}$,
$A \setminus B = \{-2, 0, 1, 3\}$,
$B \setminus A = (3; 5) \cup (5; 7\rangle$

**24.** **a)** $A \cup (B \cap C) = \langle 1; 5\rangle$,
$A \cap (B \cup C) = \langle 2; 3\rangle$,
$(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
**b)** $A \cup (B \cap C) = A$,
$A \cap (B \cup C) = B$,
$(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
**c)** $A \cup (B \cap C) = \langle 2; 7\rangle$,
$A \cap (B \cup C) = A$,
$(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
**d)** $A \cup (B \cap C) = \langle 3; 6\rangle$,
$A \cap (B \cup C) = \{3, 5\}$,
$(A \setminus B) \cap C = \emptyset$

**25.** **a)** $x \in \langle 1; 9\rangle$ **b)** $x \in (-9; 1)$
**c)** $x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 5; \infty)$
**d)** $x \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$
**e)** $x \in (2; 10)$
**f)** $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$

**26.** **a)** $x \in \langle -4; -3) \cup (-1; 4\rangle$
**b)** $x \in \langle -3; 0) \cup (4; 9\rangle$
**c)** $x \in (-\infty; -6\rangle \cup \langle 8; \infty)$

**27.** **a)** $x = -6$, $x = 2$ **b)** $x = 0$, $x = 1$
**c)** $x = -3$, $x = -1$ **d)** $x = 2$, $x = 4$
**e)** $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{4}{3}$ **f)** $x = 3$, $x = 7$

**28.** **a)** $x \in (-4; -1\rangle \cup \langle 1; 4)$
**b)** $x \in \langle -6; -1) \cup (3; 8\rangle$
**c)** $x \in (-11; 5)$ **d)** $x \in \langle -2; 2\rangle \cup \langle 4; 8\rangle$

**29.** **a)** $x \in \langle -5; 1\rangle$
**b)** $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$
**c)** $x \in (-2; 6)$ **d)** $x \in (\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$
**e)** $x \in \langle 0; 4\rangle$
**f)** $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 1; \infty)$
**g)** $x \in (-\infty; -8) \cup (-2; \infty)$
**h)** $x \in \langle -3; 5\rangle$

**30.** **a)** $-2x$ **b)** $1$ **c)** $-3$ **d)** $-x + 7$

**31.** $A = \langle -4; \infty)$, $B = (-\infty; 3\rangle$,
$C = (-\infty; 2\rangle$
**a)**, **b)** nie należy **c)** należy

**32.** **a)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ **b)** $x \in \langle 1 - \sqrt{2}; \sqrt{2} - 1\rangle$
**c)** $x \in \langle \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\rangle$
**d)** $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (\frac{4}{3}; \infty)$

**33.** B. 1

**34.** 1. F, 2. P

**35.** 1. F, 2. P

## 5.3. Funkcje

**1.** **a)**, **d)** Nie jest funkcją.
**b)** Jest funkcją, zbiór wartości: $\{0\}$.
**c)** Jest funkcją, zbiór wartości: $\{-1, 0, 2\}$.

**2.** **a)** $f(D) = \{0, 1\}$,
wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 1
**b)** $f(D) = \{0, 1, 2, 3\}$,
wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 3
**c)** $f(D) = \mathbf{R}$, nie przyjmuje wartości największej ani najmniejszej

**3.** **a)** $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$f(D) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,
miejsce zerowe: 2,
wartość najmniejsza: $-1$,
wartość największa: 3
**b)** $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$f(D) = \{-5, -2, 0, 3, 5\}$,
miejsca zerowe: $-2$, 0, 2,
wartość najmniejsza: $-5$,
wartość największa: 5

**4.** $f(\pi - 2) = 1$, $f(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}$

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |

**5.** **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{6\}$, $f(0) = 0$
**b)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(-3) = 0$
**c)** $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 0$
**d)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(2) = 0$
**e)** $D = \mathbf{R}$, $f(-1) = f(1) = 0$
**f)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, brak miejsc zerowych

**6.** **a)** $D = \langle -4; \infty)$ **b)** $D = (-\infty; 3\rangle$
**c)** $D = \langle 4; \infty)$
**d)** $D = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$

**7.** **a)** rośnie w $\langle -2; -1\rangle$ i w $\langle 2; 3\rangle$, maleje w $\langle 1; 2\rangle$ i w $\langle 3; 6\rangle$, jest stała w $\langle -1; 1\rangle$
**b)** rośnie w $\langle 3; 4\rangle$, maleje w $\langle -3; 0)$ i w $\langle 0; 3\rangle$, jest stała w $\langle 4; 6)$

**8.** **a)** $D = (-4; 4\rangle$, $f(D) = \langle -1; 2\rangle$,
$f(x) = 1$ dla $x = -3$, $x = 1$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -2) \cup (0; 3)$

**8.** **b)** $D = \langle -3; 6\rangle$, $f(D) = \langle -2; 2\rangle$,
$f(x) = 1$ dla $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$,
$x = 5\frac{1}{2}$, $f(x) > 0$ dla
$x \in \langle -3; -2) \cup (-2; 2) \cup (5; 6\rangle$

**9.** **a)** $D = (-3; 3)$, $f(D) = \langle -1; 3\rangle$,
$f$ rośnie w $\langle -1; 1\rangle$, maleje w $(-3; -1\rangle$
i w $\langle 1; 2\rangle$, jest stała w $\langle 2; 3)$,
$f(x) \geqslant 0$ dla $x \in (-3; -2\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}; 3)$,
$f(x) > 1$ dla $x \in (0; 2)$
**b)** $D = \langle -4; 4\rangle$, $f(D) = \langle -2; 2\rangle$,
$f$ rośnie w $\langle -2; -1\rangle$ i w $\langle 0; 3\rangle$,
maleje w $\langle -4; -2\rangle$ i w $\langle -1; 0\rangle$,
jest stała w $\langle 3; 4\rangle$,
$f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \{-4, -1\} \cup \langle 1; 4\rangle$,
$f(x) > 1$ dla $x \in (2; 4\rangle$

**10.** **a)** $f_{\min}(-3) = -1$, $f_{\max}(-1) = 3$
**b)** $f_{\min}(4) = 1$, $f_{\max}(1) = 3$
**c)** $f_{\min}(-3) = -1$,
$f_{\max}(-1) = f_{\max}(1) = 3$

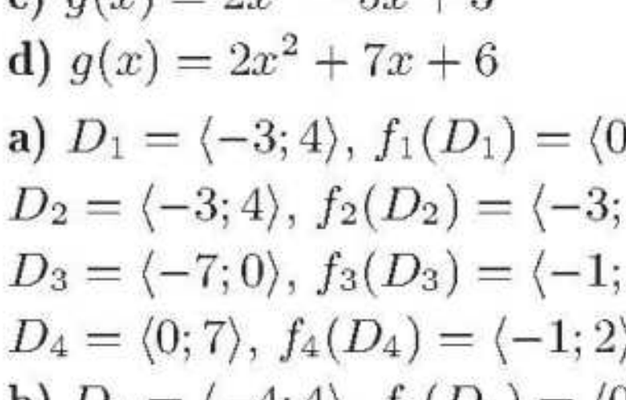
**11.** **a)** $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$
**b)** $g(x) = 2x^2 + 3x - 3$
**c)** $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$
**d)** $g(x) = 2x^2 + 7x + 6$

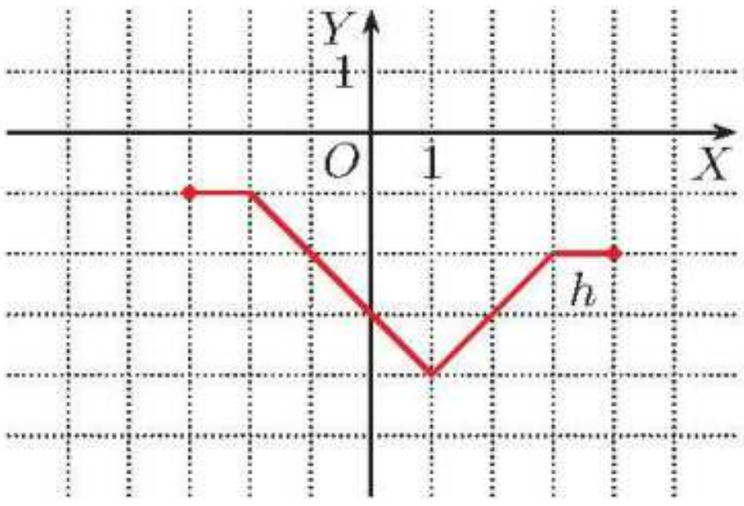
**12.** **a)** $D_1 = \langle -3; 4\rangle$, $f_1(D_1) = \langle 0; 3\rangle$,
$D_2 = \langle -3; 4\rangle$, $f_2(D_2) = \langle -3; 0\rangle$,
$D_3 = \langle -7; 0\rangle$, $f_3(D_3) = \langle -1; 2\rangle$,
$D_4 = \langle 0; 7\rangle$, $f_4(D_4) = \langle -1; 2\rangle$
**b)** $D_1 = \langle -4; 4\rangle$, $f_1(D_1) = \langle 0; 2\rangle$,
$D_2 = \langle -4; 4\rangle$, $f_2(D_2) = \langle -3; -1\rangle$,
$D_3 = \langle -8; 0\rangle$, $f_3(D_3) = \langle -1; 1\rangle$,
$D_4 = \langle -1; 7\rangle$, $f_4(D_4) = \langle -1; 1\rangle$

**13.** **a)** $D_1 = \langle -7; 0\rangle$, $f_1(D_1) = \langle 0; 3\rangle$,
$D_2 = \langle 1; 8\rangle$, $f_2(D_2) = \langle -2; 1\rangle$
**b)** $D_1 = \langle -6; -2\rangle$, $f_1(D_1) = \langle 0; 3\rangle$,
$D_2 = \langle 2; 6\rangle$, $f_2(D_2) = \langle -2; 1\rangle$

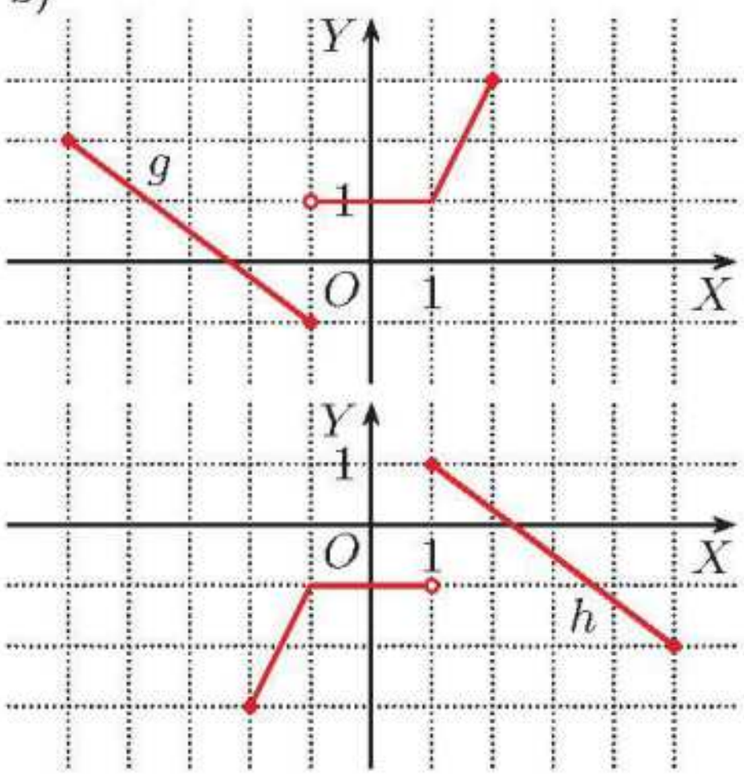
**14.** **a)** $g(x) = (x - 3)^2$, $h(x) = x^2 - 2$
**b)** $g(x) = |x + 4|$, $h(x) = |x| + 2$

**15.** **a)**

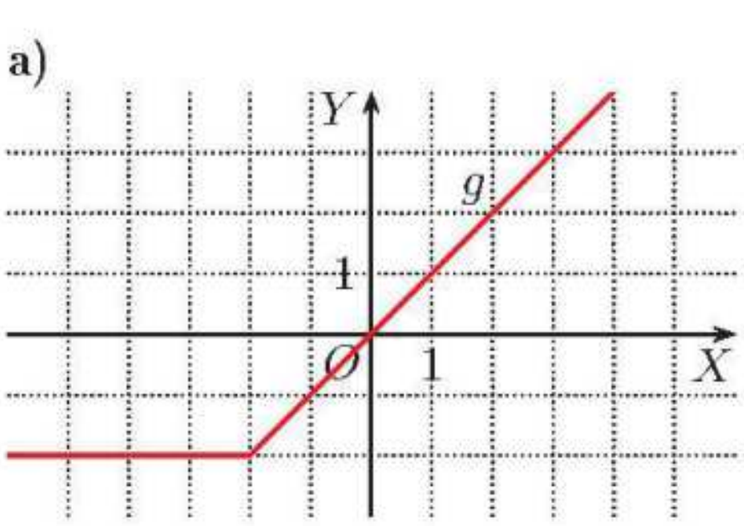


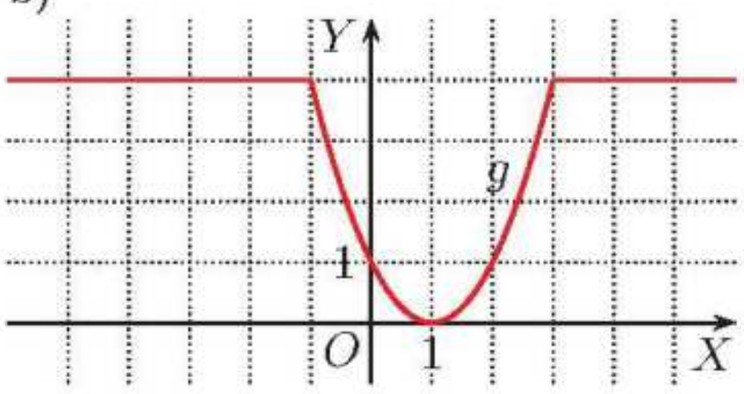

**b)**




**16.** **a)**




**b)**




**17.** **a)** przesunąć o 4 jednostki w prawo
**b)** przesunąć o 2 jednostki w lewo
**c)** przesunąć o 6 jednostek w górę

**18.** **a)** $g(x) = f(x + 3)$
**b)** $g(x) = f(x - 4)$
**c)** $g(x) = f(x + 1) - 2$
**d)** $g(x) = -f(x + 2) + 1$
**e)** $g(x) = f(x - 3) + 3$
**f)** $g(x) = -f(x + 4) - 1$

**19.** **a)** $D = \langle -5; 3\rangle$, $g(D) = \langle -1; 3\rangle$,
miejsce zerowe: 2
**b)** $D = \langle -3; 5\rangle$, $g(D) = \langle -1; 3\rangle$,
miejsce zerowe: $-2$
**c)** $D = \langle -6; 2\rangle$, $g(D) = \langle -5; -1\rangle$,
brak miejsc zerowych

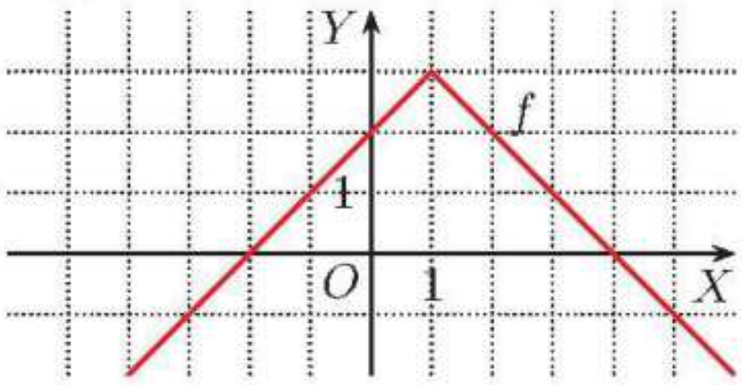
**20.** **a)** $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 1\}$,
$f$ rośnie w $(-\infty; -1\rangle$,
maleje w $\langle -1; 4\rangle$,
jest stała w $\langle 4; \infty)$,
$f(x) \geqslant -3$ dla $x \in \langle -3\frac{1}{2}; \infty)$
**b)** $f(x) = 0$ dla $x \in \{2, 4\}$,
$f$ rośnie w $\langle 0; 2\rangle$,
maleje w $\langle -1; 0\rangle$ i w $(2; \infty)$,
jest stała w $(-\infty; -1\rangle$,
$f(x) \geqslant -3$ dla $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; 7\rangle$

**21.** **a)** $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 1, 3\}$,
$f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in \langle -1; 1\rangle \cup \langle 3; \infty)$
**b)** $f(x) = g(x)$ dla $x \in \langle 0; 2\rangle$,
$f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in \langle 0; \infty)$
**c)** $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 0, 1\}$,
$f(x) \leqslant g(x)$ dla
$x \in (-\infty; -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1; \infty)$
**d)** $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 1\}$,
$f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in \langle -1; 1\rangle$

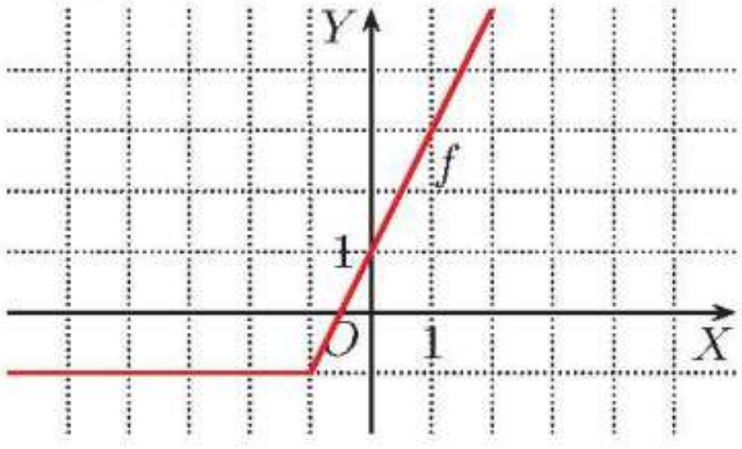
**22.** **a)** 45 **b)** 9

**23.** **a)** 45 **b)** 6 **c)** 3

**24.** **a)** $f(x) = -1$ dla $x \in \{-3, 5\}$,
$f(x) \geqslant -1$ dla $x \in \langle -3; 5\rangle$




**b)** $f(x) = -1$ dla $x \in (-\infty; -1\rangle$,
$f(x) \geqslant -1$ dla $x \in \mathbf{R}$




**25.** **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = 1$
**b)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x$
**c)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = x - 2$
**d)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x + 1$

**26.** **a)** 1, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4-\sqrt{2}}{7}$, $\frac{2}{5}$
**b)** 0, 0, 0, 0, 1, 3

**27.** **a)** $-5$, 2 **b)** $-6$, 1 **c)** $-1$, 6

**28.** **a)** $x \in \langle -3; -2) \cup (-2; 2) \cup (4; 5\rangle$
**b)** $-4$, $-2$, 2
**c)** $\langle -1; 5\rangle$
**d)** $m \in \{-2, 3\}$

**29.** **a)** $g(x) = f(x - 2) - 1$
**b)** $g(x) = f(x + 1) + 2$
**c)** $g(x) = -f(x)$
**d)** $g(x) = f(-x)$

**30.** **a)** $f(D) = h(D) = \langle 1; 3\rangle$,
$g(D) = \langle -3; -1\rangle$,
$f$ jest niemalejąca,
$g$ i $h$ są nierosnące
**b)** $f(D) = h(D) = \langle 0; 2\rangle$,
$g(D) = \langle -2; 0\rangle$,
$f$, $g$ i $h$ są niemonotoniczne

**31.** **a)** $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; \infty)$
**b)** brak rozwiązania

**32.** **a)** $g(x) = 2x - 4$,
$h(x) = -2x + 7$,
$k(x) = -2x$
**b)** $g(x) = |x + 1| - 4$,
$h(x) = 1 - |x - 2|$,
$k(x) = |x - 2| - 2$
**c)** $g(x) = -2|x + 1| - 4$,
$h(x) = 2|x - 2| + 1$,
$k(x) = -2|x - 2| - 2$

**33.** $g$ – D, $h$ – C

### 5.4. Funkcja liniowa i układy równań liniowych

**1.** **a)** $(0, 1)$, $(-3, 0)$, rosnąca
**b)** $(0, 2)$, $(1, 0)$, malejąca
**c)** $(0, -2)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, rosnąca

**2.** **a)**, **c)** rosnąca
**b)** malejąca
**d)** stała

**3.** **a)** $x \in (-4; \infty)$
**b)** $x \in \langle -4; \infty)$
**c)** $y = \frac{1}{2}x + 2$

**4.** **a)** $b = -16$
**b)** $b = -7$

**5.** **a)** $f(x) = -2x + 4$
**b)** $f(x) = \frac{5}{2}x - 6$

**6.** **a)** $a = 1$, $y = x + 3$
**b)** $a = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$
**c)** $a = 0$, $y = 7$

**7.** **a)** tak **b)** nie

**8.** **a)** $y = 3x + 2$
**b)** $y = -2x + 5$
**c)** $y = \sqrt{2}x - 4$
**d)** $y = 8$

**9.** **a)** $y = -\frac{1}{2}x$
**b)** $y = \frac{1}{4}x + 2$
**c)** $y = -3x + 2$
**d)** $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x - 2$

**10.** $AB$: $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$,
$BC$: $y = -\frac{1}{7}x + \frac{27}{7}$,
$CD$: $y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{4}$,
$AD$: $y = -\frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$,
trapez jest prostokątny

**11.** **a)** $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
**b)** $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
**c)** $x = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$
**d)** $z = 3(\sqrt{2} - 1)$

**12.** **a)** $x < \frac{5}{6}$
**b)** $x \leqslant -1$
**c)** $x \leqslant 2$
**d)** $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

**13.** **a)** $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases}$
$x = 2$, $y = 3$
**b)** $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + 3 \end{cases}$
**c)** $\begin{cases} y = -3x + 7 \\ y = 4x - 14 \end{cases}$
$x = 3$, $y = -2$

**14.** **a)** $x = 6$, $y = 2$
**b)** $x = 1$, $y = 1$
**c)** $x = 0$, $y = 5$
**d), e)** układ sprzeczny
**f)** układ nieoznaczony: $x \in \mathbf{R}$, $y = -2x + 2$

**15.** **a)** $x \in (-\infty; -6) \cup (4; \infty)$
**b)** $x \in (-\infty; 2\rangle$

**16.** **a)** $m = -2$
**b)** $m = -1$

**17.** **a)** $m < -3$
**b)** $m < 6$
**c)** $m \in (-2; 2)$
**d)** $m \in (-\infty; -6) \cup (6; \infty)$

**18.** **a)** $a = -2$
**b)** $a = -5$
**c)** $a = 7$
**d)** $a = -3$

**19.** **a)** $a = 5$
**b)** $a = 1$

**20.** **a)** 11 **b)** $-1$ **c)** $-\frac{3}{5}$ **d)** $\frac{2}{3}$

**21.** **a)** $-7$ **b)** $\frac{3}{4}$

**22.** **a)** $(-\infty; \frac{5}{6}\rangle$
**b)** $(-\infty; -1\rangle$
**c)** $(-\infty; 2\rangle$

**23.** **a)** $AB$: $-\frac{2}{3}$, $AC$: $\frac{1}{3}$, $AD$: $\frac{2}{3}$
**b)** $\frac{169}{12}$
**c)** $x \in (-\infty; -7)$

**24.** $(0, 2)$, $(3, 6)$, $(4, -1)$

**25.** **a)** $x = -1$, $y = -3$
**b)** $x = \frac{4}{3}$, $y = 0$

**26.** **a)** $x = 4$, $y = -1$
**b)** $x = -1$, $y = -2$

**27.** 36

**28.** ojciec: 48 lat, syn: 16 lat

**29.** 140 zł

**30.** $f(x) = 100 + 0{,}2x$, 1000 km

**31.** $v_A = 60$ km/h, $v_B = 90$ km/h

**32.** 25% – firma $A$, 75% – firma $B$

**33.** $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

**34.** $f(x) = -6x - 12$

**35.** $m = -1$

**36.** funkcja $g$, $-\frac{1}{3}$

**37.** **a)** równoległe dla $m = -\frac{8}{3}$,
prostopadłe dla $m = 6$
**b)** równoległe dla $m = 7$,
prostopadłe dla $m = -\frac{1}{2}$
**c)** równoległe dla $m = 2$,
nie ma $m$, dla którego są prostopadłe

**38.** **a)** $x = -7$, $y = 4$
**b)** $x = 2$, $y = -1$
**c)** $x = 2$, $y = 3$
**d)** $x = -4\frac{1}{2}$, $y = -42\frac{1}{2}$

**39.** **a)** $x = 1{,}1$, $y = 0{,}1$
**b)** $x = -3$, $y = 11$

**40.** **a)** 2 **b)** 13,5

**41.** **a)**, **c)** rosnąca **b)**, **d)** malejąca

**42.** **a)** Przecinają się,
$f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \geqslant 6$.
**b)** Przecinają się,
$f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \geqslant -10{,}2$.

**43.** **a)** $a < 2$ **b)** $a < -2$

**44.** 1. F, 2. F

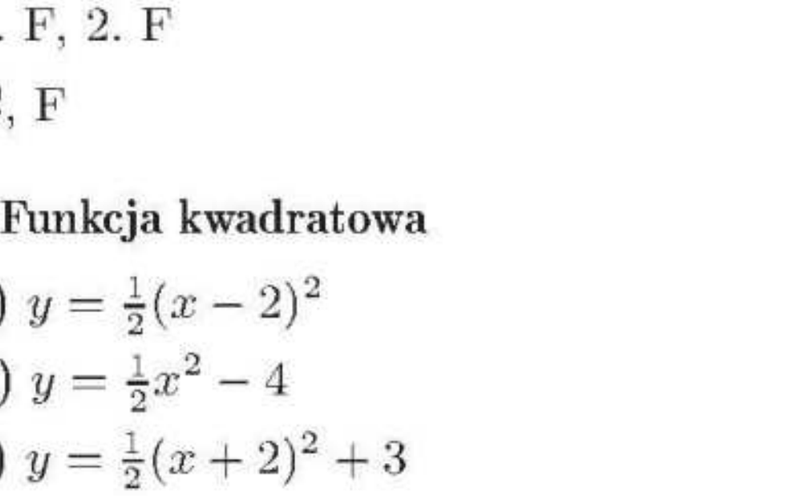
**45.** C, F

### 5.5. Funkcja kwadratowa

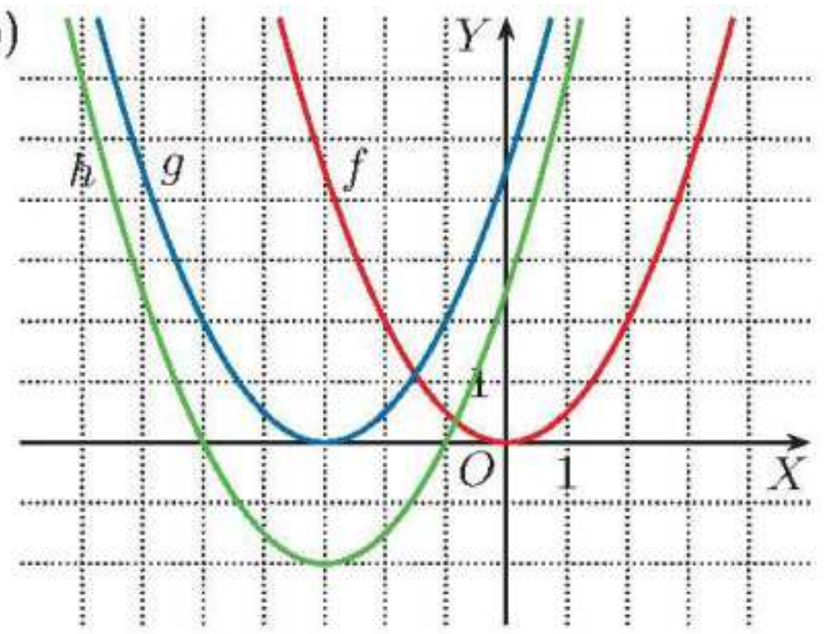
**1.** **a)** $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$
**b)** $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$
**c)** $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$

**2.** **a)** $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$
**b)** $g(x) = -2x^2 + 2x + 2$
**c)** $g(x) = 0{,}4x^2 + 1{,}2x + 0{,}7$

**3.** **a)**




**b)**




**4.** **a)** $f(x) = (x+4)^2$, $f(D) = \langle 0; \infty)$
**b)** $f(x) = (x-2)^2 - 4$, $f(D) = \langle -4; \infty)$
**c)** $f(x) = -(x+3)^2 + 4$, $f(D) = (-\infty; 4\rangle$
**d)** $f(x) = -2(x-1)^2$, $f(D) = (-\infty; 0\rangle$

**5.** **a)** $b = c = 0$, $f(D) = \langle 0; \infty)$
**b)** $b = 2$, $c = 1$, $f(D) = \langle 0; \infty)$
**c)** $b = 0$, $c = -1$, $f(D) = \langle -1; \infty)$
**d)** $b = -2$, $c = 5$, $f(D) = \langle 4; \infty)$
**e)** $b = -4$, $c = 7$, $f(D) = \langle 3; \infty)$
**f)** $b = 2$, $c = 5$, $f(D) = \langle 4; \infty)$
**g)** $b = -8$, $c = 17$, $f(D) = \langle 1; \infty)$
**h)** $b = 2$, $c = 0$, $f(D) = \langle -1; \infty)$

**6.** **a)** maleje w $(-\infty; -2\sqrt{2}\rangle$,
rośnie w $\langle -2\sqrt{2}; \infty)$
**b)** maleje w $\langle 10; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 10\rangle$

**7.** **a)** $b = -4$, $b = 4$
**b)** $b = -2$, $b = 2$
**c)** $b = -6$, $b = 6$

**8.** **a)** ma **b)** nie ma **c)** ma

**9.** **a)** $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$
**b)** $x = 0$, $x = 2$
**c)** $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{5}$
**d)** $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$
**e)** $x = 3$
**f)** $x = -\frac{1}{4}$

**10.** **a)** $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$
**b)** $x = \frac{3-\sqrt{21}}{6}$, $x = \frac{3+\sqrt{21}}{6}$
**c)** $x = -2$, $x = 10$
**d)** $x = -\frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{2}$
**e)** $x = \frac{-2-\sqrt{19}}{3}$, $x = \frac{-2+\sqrt{19}}{3}$
**f)** $x = \frac{1-\sqrt{21}}{10}$, $x = \frac{1+\sqrt{21}}{10}$
**g)** $x = 0$, $x = 3$
**h)** $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$

**11.** **a)** $y = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
**b)** $y = 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
**c)** $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-7)$
**d)** $y = (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
**e)** $y = -9\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
**f)** nie ma postaci iloczynowej

**12.** **a)** $y = -(x-7)^2$ **b)** $y = -4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$
**c)** $y = \frac{1}{4}(x+4)^2$
**d)** $y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

**13.** **a)** $y = (x-1)(x-5)$,
$P_1(1,0)$, $P_2(5,0)$, $P_3(0,5)$, $W(3,-4)$
**b)** $y = -(x+3)(x+1)$,
$P_1(-3,0)$, $P_2(-1,0)$, $P_3(0,-3)$, $W(-2,1)$
**c)** $y = 2x(x+1)$,
$P_1(-1,0)$, $P_2(0,0)$, $W\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
**d)** $y = -\frac{1}{2}(x+5)(x+1)$, $P_1(-5,0)$,
$P_2(-1,0)$, $P_3\left(0,-\frac{5}{2}\right)$, $W(-3,2)$

**14.** **a)** $f(x) = (x-4)(x+6)$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty;-6) \cup (4;\infty)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (-6;4)$
**b)** $f(x) = -(x-4)(x+1)$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-1;4)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty;-1) \cup (4;\infty)$
**c)** $f(x) = 3(x-1)(x-3)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (1;3)$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty;1) \cup (3;\infty)$
**d)** $f(x) = \frac{1}{2}x(x+4)$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty;-4) \cup (0;\infty)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (-4;0)$
**e)** $f(x) = (x-3)^2$,
$f(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
wartości ujemnych nie przyjmuje
**f)** $f(x) = -2(x-1)^2$,
$f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
wartości dodatnich nie przyjmuje

**15.** **a)** $x \in \langle -\frac{1}{2}; 0\rangle$
**b)** $x \in (-\infty;-7) \cup (7;\infty)$
**c)** $x = -\frac{3}{2}$ **d)** $x \in \mathbf{R}$
**e)** $x \in (-3;4)$
**f)** $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$
**g)** $x \in \langle \frac{3-\sqrt{41}}{4}; \frac{3+\sqrt{41}}{4}\rangle$
**h)** $x \in \mathbf{R}$ **i)** sprzeczna

**16.** **a)** $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
**b)** $-2, -1, 0, 1, 2$ **c)** $1, 2, 3$ **d)** $4$

**17.** **a)** $g(D) = \langle 0;\infty)$, $x = 1$
**b)** $g(D) = (-\infty;0\rangle$, $x = 2$
**c)** $g(D) = (-\infty;0\rangle$, $x = 0$

**18.** **a)** $-5, 1$ **b)** $-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$

**19.** **a)** $y = -x^2 + x + 2$
**b)** $y = x^2 + x - 2$

**20.** **a)** $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$, $W(1,8)$
**b)** $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$, $W(1,-2)$

**21.** **a)** $(-2,-1)$, $(1,2)$
**b)** $(-1,2)$, $(2,-1)$
**c)** $(-3,-6)$, $(1,2)$
**d)** $(-2,-1)$, $(0,3)$
**e)** $(-2,-1)$, $(3,-6)$
**f)** $(2,-1)$, $(1,2)$

**22.** **a)** $(2\frac{1}{2}, -14)$, $(-\frac{1}{3}, 3)$
**b)** brak punktów wspólnych

**23.** **a)** $x \in \langle -1;2\rangle$
**b)** $x = -1$ **c)** $x \in \mathbf{R}$

**24.** **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$
**b)** $D = \langle -\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\rangle$
**c)** $D = (-\infty;3) \cup (5;\infty)$

**25.** **a)** $A \cap B = \langle 2 - \sqrt{3}; 3\rangle$,
$A \setminus B = (3; 2 + \sqrt{3}\rangle$
**b)** $A \cap B = (1;4)$,
$A \setminus B = \left(-\infty; -\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}; 1\right\rangle \cup$
$\cup \langle 4;\infty)$

**26.** **a)** $f_{\min} = -1$, $f_{\max} = 3$
**b)** $f_{\min} = -8$, $f_{\max} = 0$
**c)** $f_{\min} = 1$, $f_{\max} = 4$
**d)** $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 8$

**27.** $a = \frac{1}{4}$, $W(3,-4)$

**28.** **a)** $y = -2x^2 + 4x$
**b)** $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$

**29.** **a)** $c = 7$ **b)** $c = \frac{25}{4}$ **c)** $c = 5$

**30.** **a)** $b = 3$, $c = -10$
**b)** $b = 2$, $c = 8$
**c)** $b = -3$, $c = -4$
**d)** $b = -6$, $c = 5$

**31.** **a)** $c < 2$ **b)** $c > -\frac{25}{4}$
**c)** $c > -36$ **d)** $c > -\frac{1}{4}$

**32.** **a)** $b = -2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$
**b)** Nie ma takich wartości.
**c)** $b = 0$

**33.** **a)** $f(x) = -2x(x-2) = -2(x-1)^2 + 2$,
$f(D) = (-\infty; 2\rangle$, $f(0) = f(2) = 0$,
$f$ maleje w $\langle 1; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 1\rangle$,
$f(x) \leqslant 0$ dla $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$
**b)** $f(x) = (x+1)(x-3) = (x-1)^2 - 4$,
$f(D) = \langle -4; \infty)$, $f(-1) = f(3) = 0$,
$f$ maleje w $(-\infty; 1\rangle$, rośnie w $\langle 1; \infty)$,
$f(x) \leqslant 0$ dla $x \in \langle -1; 3\rangle$
**c)** $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1) = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{8}$,
$f(D) = \langle -\frac{9}{8}; \infty)$, $f(-2) = f(1) = 0$,
$f$ maleje w $(-\infty; -\frac{1}{2}\rangle$, rośnie w $\langle -\frac{1}{2}; \infty)$,
$f(x) \leqslant 0$ dla $x \in \langle -2; 1\rangle$

**34.** **a)** $m = -4$ **b)** $m = 4$
**c)** $m = -13\frac{1}{4}$

**35.** **a)** 2 **b)** 0 **c)** 2 **d)** 1

**36.** **a)** $(-4, 0)$, $(-1, 3)$
**b)** $(0, -3)$, $(3, 0)$

**37.** **a)** $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$, $(4, 0)$
**b)** $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (4; \infty)$

**38.** **a)** $x = -1$, $y = -2$ lub $x = 2$, $y = 1$
**b)** $x = -1$, $y = 4$ lub $x = 3$, $y = -4$
**c)** $x = 4$, $y = 8$ lub $x = -2$, $y = 2$

**39.** **a)** $x = -4$, $y = -3$ lub $x = -1$, $y = -6$
**b)** $x = 1$, $y = 3$ lub $x = 4$, $y = 0$
**c)** $x = 4$, $y = -1$ lub $x = 6$, $y = 1$

**40.** **a)** $x = -2$, $x = 2$
**b)** $x = -3$, $x = 3$
**c)** $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$
**d)** $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
**e)** $x = -\sqrt{5}$, $x = -2$, $x = 2$, $x = \sqrt{5}$
**f)** $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

**41.** **a)** $x = 1 - \sqrt{5}$, $x = 1 - \sqrt{3}$,
$x = 1 + \sqrt{3}$, $x = 1 + \sqrt{5}$
**b)** $x = 3 - \sqrt{6}$, $x = 3 + \sqrt{6}$
**c)** $x = -4$, $x = -2 - \sqrt{2}$,
$x = -2 + \sqrt{2}$, $x = 0$
**d)** $x = -6$, $x = -4$

**42.** $x = 1{,}5$

**43.** **a)** $-4$, 7 lub 7, $-4$ **b)** 7, $-4$

**44.** $x = 2$ m

**45.** **a)** 4,5 **b)** 18 **c)** 0

**46.** $29\frac{1}{7}$ cm (ramka kwadratowa)
i $38\frac{6}{7}$ cm (ramka prostokątna)

**47.** **a)** $P(x) = 2x(4-x)$, $D_P = (0; 4)$,
pole największe dla $x = 2$,
wymiary prostokąta: $2 \times 4$
**b)** $P(x) = 2x(6-x)$, $D_P = (0; 6)$,
pole największe dla $x = 3$,
wymiary prostokąta: $6 \times 3$

**48.** kwadrat o boku 6 cm

**49.** **a)** 5 m/s **b)** 13 m/s **c)** 9 m/s

**50.** **a)** 3 h
**b)** pierwsza godzina: 30 km/h,
druga godzina: 18 km/h,
cała trasa: 18 km/h

**51.** **a)** $D = \langle 0; 5 + \sqrt{26}\rangle$
**b)** kolejno uzupełniamy: 110, 125, 130
**c)** po 10 s **d)** po 5 s **e)** 130 m

**52.** C. 1.

**53.** 1. F, 2. P

### 5.6. Wielomiany

**1.** **a)** $w(-2) = -20$, $w(0) = -6$, $w(2) = 24$
**b)** $w(-2) = 5\frac{1}{2}$, $w(0) = 2$, $w(2) = -25\frac{1}{2}$
**c)** $w(-2) = -3$, $w(0) = -1$, $w(2) = 5$
**d)** $w(-2) = -4$, $w(0) = 2$, $w(2) = 4$

**2.** **a)** $P$, $R$ **b)** $Q$

**3.** **a)** $-162$ **b)** $-\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{1}{4}$

**4.** **a)** $a = 1$ **b)** $a = -2$ **c)** $a = -\frac{1}{4}$

**5.** **a)** $a = -9$, $b = 5$
**b)** $a = \frac{1}{3}$, $b = -3$
**c)** $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

**6.** $a = 10$, $b = -2$

**7.** **a)** $a = -\frac{3}{2}$ **b)** $a = 6$, $b = -4$

**8.** **a)** $k(x) = 3x^3 + x^2 - 1$, $\mathrm{st}(k) = 3$
**b)** $k(x) = 3x^3 - 3x^2 + 1$, $\mathrm{st}(k) = 3$
**c)** $k(x) = 6x^3 - 1$, $\mathrm{st}(k) = 3$
**d)** $k(x) = 2x^2 - 3x$, $\mathrm{st}(k) = 2$

**9.** **a)** $a = -1$, $b = 6$
**b)** $a = -3$, $b = 0$
**c)** $a = -3$, $b = 1$

**10.** **a)** $w(x) = -x^5+4x^4-6x^3+10x^2-11x+3$, $\mathrm{st}(w) = 5$
**b)** $w(x) = x^6 - 6x^3 - x^2 + 2x + 9$, $\mathrm{st}(w) = 6$
**c)** $w(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$, $\mathrm{st}(w) = 3$

**11.** **a)** $f(x) = x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x$, $g(x) = -x^4 + 12x^3 - 23x^2 + 4$
**b)** $f(x) = -10x^7 + 5x^6 + 2x^5 - 11x^4 + - 6x^3 + 5x^2 - 6$, $g(x) = -4x^6+4x^5-11x^4-8x^3+6x^2-10$
**c)** $f(x) = -8x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 9x^2 + - 3x + 2$, $g(x) = -4x^6+8x^5-8x^4+8x^3+3x^2+3$

**12.** **a)** $v(x,y) = -x^2y^4 - 4x^2y^3 - 3x^2y^2 + - 3x^2y + 4$, $v(2,\sqrt{2}) = -4(11\sqrt{2}+9)$
**b)** $v(x,y) = \frac{1}{2}x^3y^2 + x^2y^2 - 4x^2y - 4x^2 + - 2xy^3 + 4xy^2 - y^4$, $v(2,\sqrt{2}) = 12(1-2\sqrt{2})$

**13.** **a)** $m = 1$, $n = 4$
**b)** $m = 5$, $n = -4$
**c)** $m = 2$, $n = 1$

**14.** **a)** $w(x) = 9x\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$
**b)** $w(x) = 50x^2\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)$
**c)** $w(x) = -27x^3\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$
**d)** $w(x) = \frac{1}{8}x^4\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)$
**e)** $w(x) = 5x^3(x+2)(x-2)$
**f)** $w(x) = x^2(x-5)(x^2+5x+25)$

**15.** **a)** $w(x) = x^2(x-5)^2$
**b)** $w(x) = 9x^2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$
**c)** $w(x) = 2x^3(x+3)(x-1)$
**d)** $w(x) = x\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
**e)** $w(x) = x^3\left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right)$
**f)** $w(x) = -5x^3(x-3)^2$

**16.** **a)** $w(x) = (x^2+x+4)(x+7)(x-1)$
**b)** $w(x) = 9(x+2)(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$
**c)** $w(x) = (x^2-x+4)(x+2)(x-1)$
**d)** $w(x) = -16x^3(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

**17.** **a)** $w(x) = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
**b)** $w(x) = 32\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+ + \frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\right)$

**18.** **a)** $w(x) = (x+1)(x-1)^2$
**b)** $w(x) = (x^2+1)(x+1)^2(x-1)$
**c)** $w(x) = 2(x+1)(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$
**d)** $w(x) = 6\left(x^2+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$
**e)** $w(x) = 27\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$
**f)** $w(x) = 4(x^2+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+\sqrt{2})\cdot \cdot(x-\sqrt{2})\left(x-\frac{3}{2}\right)$

**19.** **a)** $w(x) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2)$
**b)** $w(x) = 2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$
**c)** $w(x) = 3(9x^2-5x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)$
**d)** $w(x) = 3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)(x-3)$
**e)** $w(x) = (x+2)(x+\sqrt{2})(x+1)(x-\sqrt{2})$
**f)** $w(x) = 2(2x^2+1)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

**20.** **a)** $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
**b)** $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$
**c)** $x = 0$, $x = 2$
**d)** $x = -\frac{2}{3}$, $x = 0$
**e)** $x = 0$, $x = 4$
**f)** $x = 0$, $x = \frac{\sqrt[6]{32}}{2}$

**21.** **a)** $x = 0$, $x = 2$
**b)** $x = -3$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
**c)** $x = -1$, $x = 0$, $x = 7$
**d)** $x = -2$, $x = 0$, $x = \frac{1}{8}$
**e)** $x = 2-\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = 2+\sqrt{2}$
**f)** $x = \sqrt{5}-2$, $x = 0$, $x = \sqrt{5}+2$

**22.** **a)** $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$
**b)** $x = -5$
**c)** $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$
**d)** $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$
**e)** $x = \frac{1}{4}$
**f)** $x = -\sqrt{2}$, $x = \frac{1}{5}$, $x = \sqrt{2}$

**23.** **a)** $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$
**b)** $x = -1$, $x = 3$
**c)** $x = 1$, $x = 2$
**d)** $x = \frac{1}{3}$

**24.** **a)** $x = -1$, $x = 1$, $x = 2\sqrt{3}$
**b)** $x = -3\sqrt{2}$, $x = -2$, $x = 2$
**c)** $x = -\sqrt{2}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $x = \sqrt{2}$
**d)** $x = -\sqrt{2}$, $x = -\sqrt[4]{2}$, $x = \sqrt[4]{2}$

**25.** **a)** $x^2 - x$, reszta $-5$, nie jest
**b)** $3x^2 + x + 3$, jest
**c)** $-2x^2 + 12x - 39$, reszta 118, nie jest
**d)** $x^3 - 8x^2 + 33x - 135$, reszta 536, nie jest
**e)** $-x^3 + x^2 + 2x - 3$, jest

**26.** **a)** $w(x) = (x^2 + x - 2)(x - 5) - 5$
**b)** $w(x) = (-x^2 + 2x - 2)(x + 2) - 1$
**c)** $w(x) = (2x^2 + 3)(x - 4) + 12$
**d)** $w(x) = (5x^3 - 5x^2 + 5x - 4)(x + 1) + 4$
**e)** $w(x) = (4x^2 + 6)\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2$

**27.** **a)** $w(x) = (x^2 - x - 1)(2x - 1) + 1$
**b)** $w(x) = (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)(4x + 3) + 3$
**c)** $w(x) = (x^2 + 2x + 1)(3x - 2)$
**d)** $w(x) = (2x^3 - 4x^2 + 6)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 1$

**28.** **a)** 31 **b)** 11 **c)** $3\sqrt{2} + 7$

**29.** **a)** 3 **b)** $-2$ **c)** $-\frac{7}{4}$ **d)** $\frac{14}{3}$

**30.** **a)**, **c)**, **d)**, **f)** nie jest **b)**, **e)** jest

**31.** **a)**, **b)**, **d)** jest
**c)** nie jest

**32.** **a)** $w(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$
**b)** $w(x) = (x - 1)^2(x - 7)$
**c)** $w(x) = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 3)$
**d)** $w(x) = (x + 5)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 2)$

**33.** **a)** $m = -1$
**b)** $m = -3$, $m = 1$
**c)** $m = -8$, $m = -1$

**34.** **a)** $-3$, 0, 5 **b)** 0, 5 **c)** 0, 2

**35.** **a)** $x = 1$
**b)** $x = -2 - \sqrt{2}$, $x = -1$, $x = -2 + \sqrt{2}$
**c)** $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$
**d)** $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$
**e)** $x = -5$
**f)** $x = -3$, $x = -\frac{4}{3}$, $x = 1$
**g)** $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 2$
**h)** $x = -2$, $x = \frac{4}{5}$, $x = 5$

**36.** **a)** $w(x) = (x^2 + 1)(x - 1)^2$
**b)** $w(x) = (2x^2 - 5x + 4)(x + 2)(x - 1)$
**c)** $w(x) = (x^2 + x + 1)(x + 5)(x - 3)$
**d)** $w(x) = \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(x - 1) \cdot \left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x - 2)$

**37.** **a)** $m = 7$, $x = -3$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$
**b)** $m = -17$, $x = -2$, $x = \frac{1}{3}$, $x = 3$

**38.** $P(x_0) = \frac{1}{2}(3 + x_0)^2(3 - x_0)$, $D = (0; 3)$, $P(1) = 16$

**39.** **a)** $V(x) = 5x^3 + 20x^2 - 25x$, $x > 1$
**b)** $V(5) = 1000$
**c)** $P(x) = 22x^2 + 40x - 50$, $x > 1$

**40.** $V(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$, $x > 2$, $V(3) = 12$

**41.** **a)** $w(x) = x^3 + 6x^2 + 11x$, $x > 0$
**b)** $x = 2$

**42.** **a)** $w(x) = x^3 + 15x^2 + 71x + 105$, $x > 0$
**b)** $x = 2$

**43.** 1. P, 2. P

**44.** D

### 5.7. Funkcje wymierne

**1.**

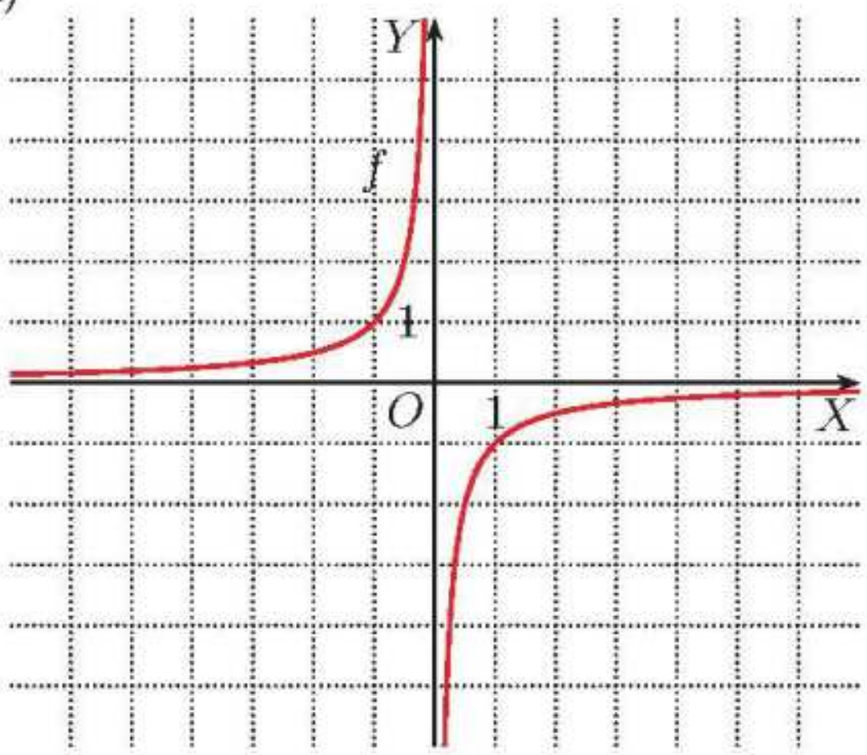
| $x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 48 | 36 | 24 | 12 |

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 4 | 3 | $\frac{1}{2}$ |

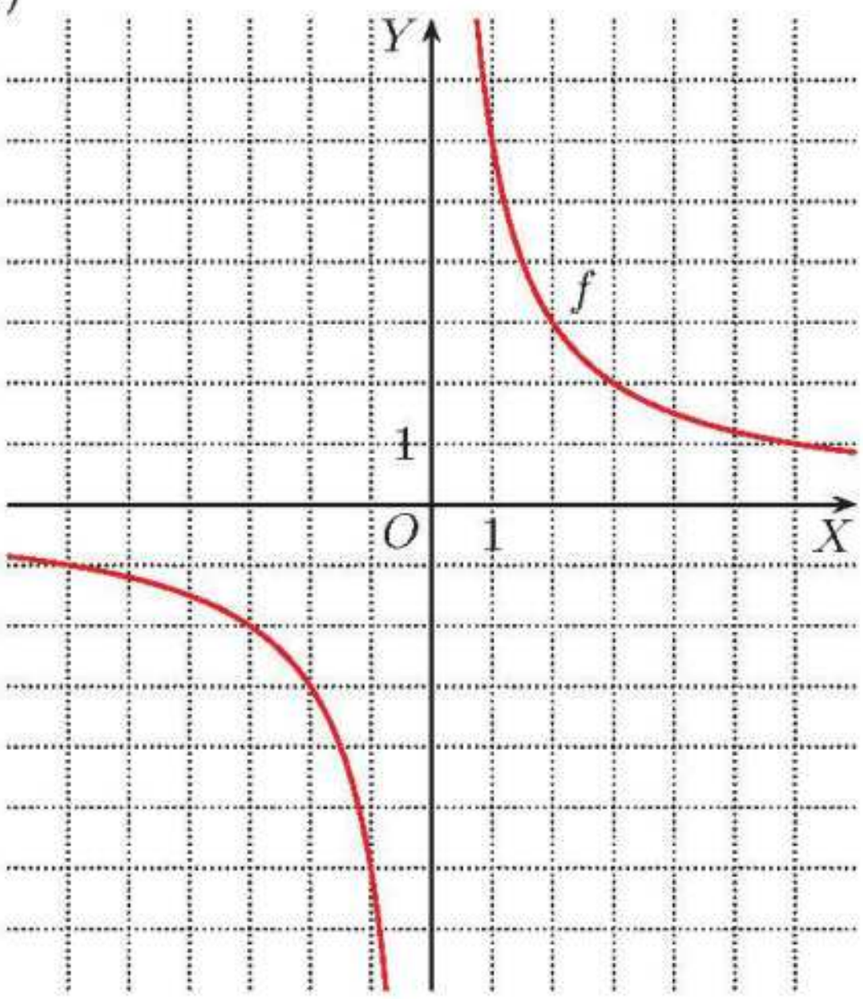
**2.** $f(x) = \frac{120}{x}$
**a)** $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$
**b)** $f(6) = 20$, $f(24) = 5$
**c)** $x = 15$ **d)** nie

**3.** **a)** $y = -\frac{5}{x}$ **b)** $y = \frac{6}{x}$
**c)** $y = -\frac{2}{x}$ **d)** $y = \frac{2\sqrt{3}}{x}$

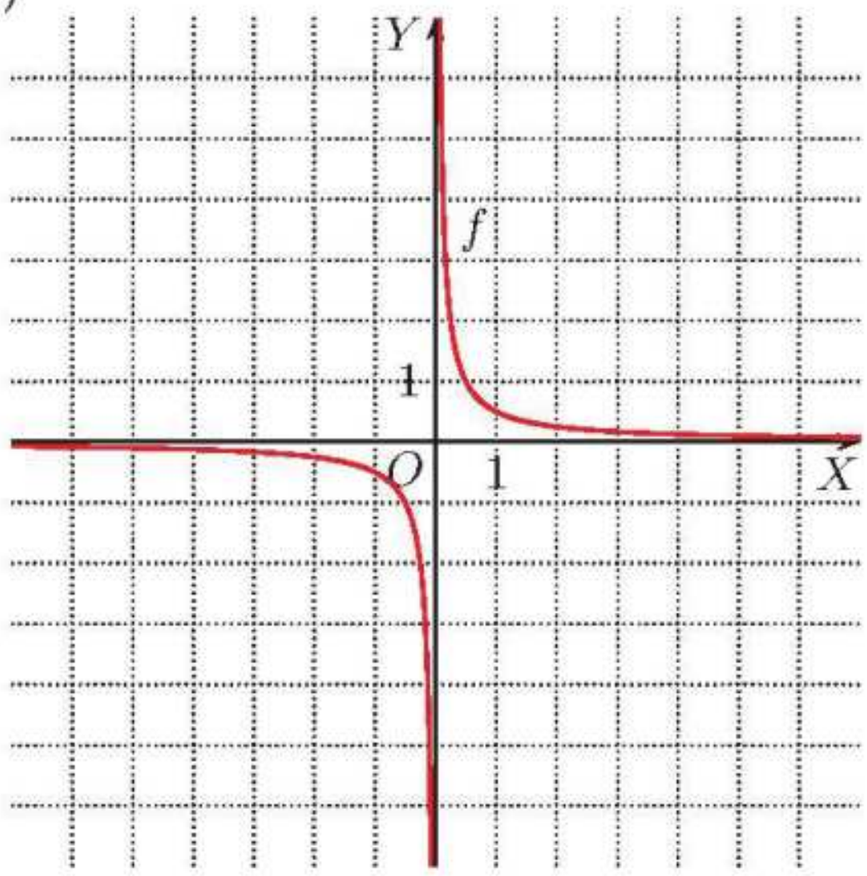
**4.** **a)**



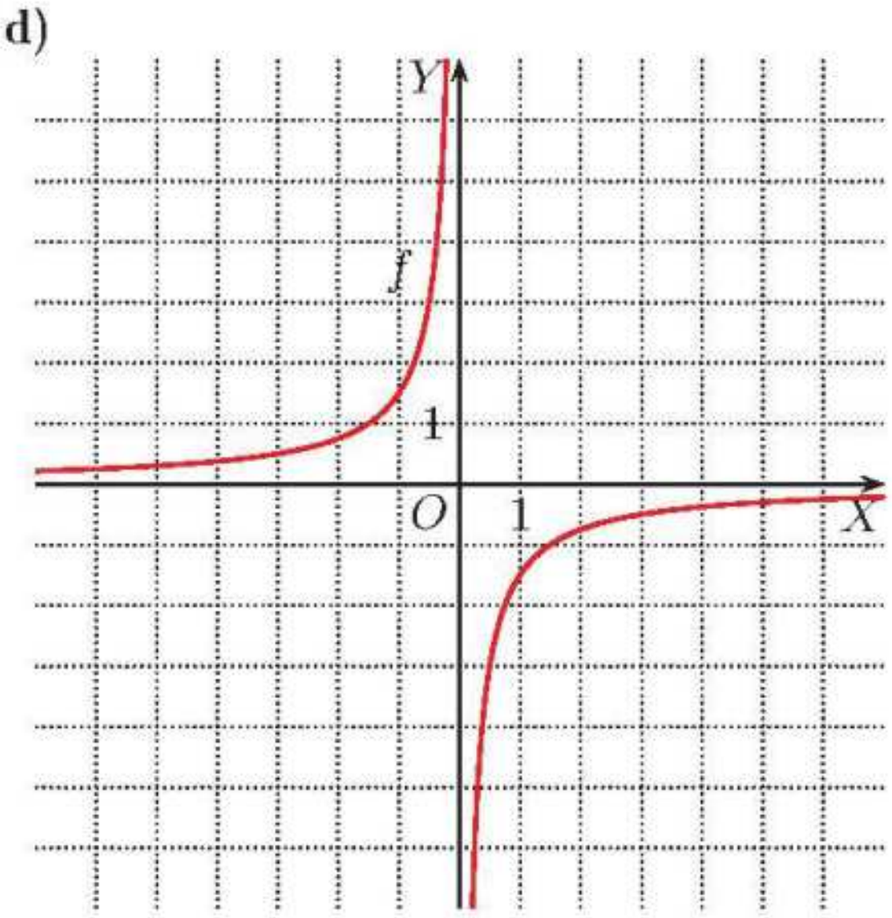
**4.** **b)**




**c)**




**d)**




**5.** **a)** najmniejsza wartość: 1,
największa wartość: 2
**b)** najmniejsza wartość: $-2$,
największa wartość: $-1$
**c)** najmniejsza wartość: 2,
największa wartość: 4
**d)** najmniejsza wartość: $-3$,
największa wartość: $-\frac{3}{2}$

**6.** $a = 5$ **a)** $A$, $C$
**b)** $x \in (-\infty; 0) \cup (5; \infty)$

**7.** **a)** maleje w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$
**b)** rośnie w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$

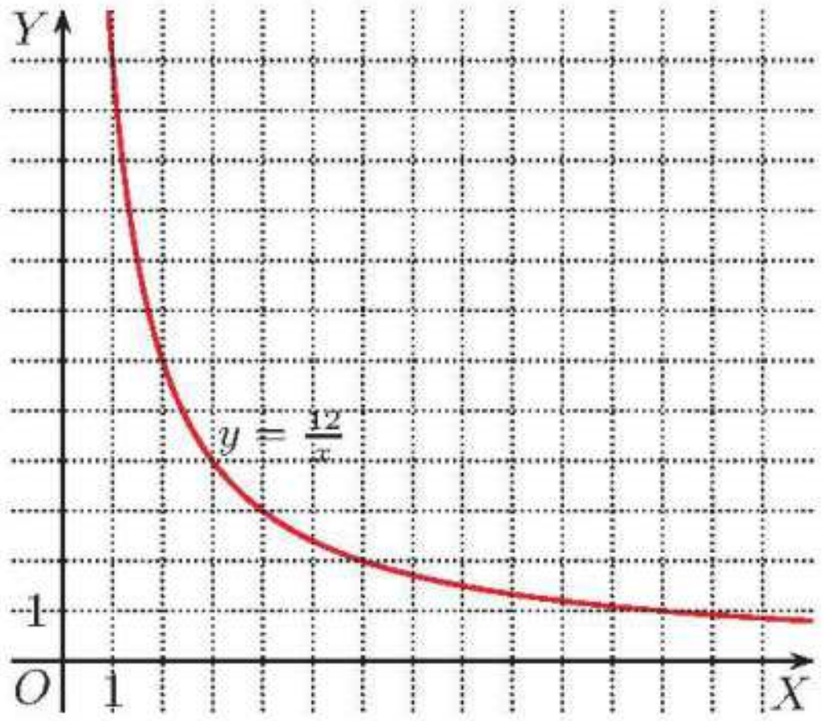
**8.** **a)** $a = 5$ **b)** $a = \frac{3}{2}$ **c)** $a = -4$

**9.** **a)** $a = 3$, $b = \frac{1}{3}$
**b)** $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-3, 3\}$,
$f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in \langle -3; 0) \cup \langle 3; \infty)$

**10.** **a)** $(-2, -1)$, $(1, 2)$
**b)** $(1, -3)$, $(3, -1)$

**11.** $y = \frac{12}{x}$, $x > 0$

**a)**




**b)** $x = 2$ dm, $y = 6$ dm

**12.** **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
maleje w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$
**b)** $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
**c)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
rośnie w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$

**13.** **a)** $a = -4$ **b)** $a = -5$

**14.** **a)** $f(x) = \frac{3}{x} - 2$,
$f(x) > 1$ dla $x \in (0; 1)$
**b)** $f(x) = \frac{3}{x+3}$,
$f(x) > 1$ dla $x \in (-3; 0)$

**15.** **a)** $f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 0)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
**b)** $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (2; 3)$
**c)** $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (1; 2)$

**16.** **a)** $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
$m = -\frac{1}{2}$
**b)** $f(x) = \frac{-2}{x-2} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
$m = 1\frac{2}{3}$

**17.** **a)** maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
**b)** maleje w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty)$
**c)** rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$

**18.** **a)** $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ **b)** $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
**c)** $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ **d)** $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$
**e)** $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ **f)** $\mathbf{R} \setminus \{1\}$

**19.** **a)** $-\sqrt{2}$: $5 - 3\sqrt{2}$, 0: $-1$,
$\sqrt{2}$: $3\sqrt{2} + 5$
**b)** $-\sqrt{2}$: $-3 - 2\sqrt{2}$, 0: $-1$, 1: $-\frac{1}{3}$,
$\sqrt{2}$: $2\sqrt{2} - 3$
**c)** $-\sqrt{2}$: $-\frac{4+\sqrt{2}}{7}$, 0: 0, 1: $-\frac{1}{6}$,
$\sqrt{2}$: $\frac{\sqrt{2}-4}{7}$

**20.** **a)** $\frac{x+3}{x^2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{1}{4}$
**b)** $x(x^2 - 9)$, $D = \mathbf{R}$, 10
**c)** $\frac{x+1}{2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-8\}$, $-\frac{1}{2}$
**d)** $\frac{x+3}{x+1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $-1$
**e)** $\frac{x+5}{x-1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 1\}$, $-1$
**f)** $\frac{2x-1}{x^2-3}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}\}$, $-5$

**21.** **a)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $\frac{x}{3(x-3)}$
**b)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-7, 0\}$, $\frac{x-7}{7x}$
**c)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-5, -2, 0\}$, $\frac{x-5}{x+2}$
**d)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$, $\frac{2x-1}{x^2}$
**e)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$, $x + 1$
**f)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{x+3}{3-x}$

**22.** **a)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 6\}$, $x + 2$
**b)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-6, -1, 0, 6\}$, $\frac{x+6}{x+1}$
**c)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\frac{x^2+1}{x^2-x}$
**d)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$, $\frac{x+4}{x}$
**e)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$, $\frac{1}{x^2-10x+25}$
**f)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\frac{3}{x}$

**23.** **a)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $\frac{1}{x-1}$
**b)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $-\frac{3x+1}{x^2-1}$
**c)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$, $\frac{7x^2+11x+2}{x^2+3x+2}$
**d)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}$
**e)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{5x-4}{x^2-1}$
**f)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{8x-7}{x^2-3x}$

**24.** **a)** $x = \frac{4}{3}$ **b)** $x = \frac{3}{2}$ **c)** $x = -18$

**25.** **a)** $x = 4$ **b)** $x = -\frac{2}{7}$ **c)** $x = -\frac{8}{3}$

**26.** **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$, $-\frac{x-1}{x^2+4}$, $\frac{8}{53}$
**b)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $x^2 - 4$, 45

**27.** **a)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$, $\frac{7x+2}{x^2+x-2}$, 4
**b)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$, $\frac{4x^2+8x+2}{x^2+3x+2}$, $\frac{17}{6}$
**c)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{-3x^2-3x+1}{x^2+2x+1}$, $-\frac{17}{9}$
**d)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{2x+8}{x^2-1}$, 4
**e)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{x^2+9}{x^2-9}$, $-\frac{13}{5}$
**f)** $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$, $\frac{6x}{9x^2-9x+2}$, $\frac{3}{5}$

**28.** **a)** $x = \frac{1}{4}$ **b)** $x = -\frac{1}{40}$
**c)** $x = -\frac{7}{6}$, $x = \frac{7}{6}$ **d)** $x = \frac{1}{3}$, $x = 1$
**e)** $x = -\frac{5}{6}$, $x = 1$ **f)** $x = -1$, $x = 2$
**g)** $x = \frac{2}{5}$ **h)** $x = 0$, $x = 1$
**i)** $x = -\frac{1+3\sqrt{29}}{10}$, $x = \frac{-1+3\sqrt{29}}{10}$

**29.** **a)** $x = 2$, $x = 3$ **b)** $x = 5$
**c)** $x = -1$ **d)** $x = -3$
**e)** $x = -8$ **f)** $x = 8$

**30.** **a)** $x = -1$, $x = 2$, $x = 6$ **b)** $x = -4$
**c)** $x = -1$ **d)** $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
**e)** $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ **f)** $x = 2$, $x = 3$

**31.** **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 9\}$, $\frac{x-6}{x-9}$, $x = 6$
**b)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, $-\frac{2x+1}{x}$, $-\frac{1}{2}$
**c)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, $\frac{x+3}{x}$,
nie przyjmuje wartości 0
**d)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$, $\frac{x+2}{x-1}$,
nie przyjmuje wartości 0

**32.** $v_1 = 80$ km/h, $v_2 = 70$ km/h

**33.** $v_1 = 18$ km/h, $v_2 = 14$ km/h

**34.** 10 km/h

**35.** 3 km/h

**36.** 1. F, 2. F

**37.** D, G

## 5.8. Funkcje trygonometryczne

**1.** **a)** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$
**b)** $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$
**c)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{15}}{5}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$
**d)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2-\sqrt{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = 2+\sqrt{3}$

**2.** **a)** $b = 3$, $c = 3\sqrt{5}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
**b)** $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{5}{2}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$
**c)** $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $c = \frac{5\sqrt{6}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{6}$
**d)** $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

**3.** **a)** $\beta = 78^\circ$, $b \approx 9{,}41$, $c \approx 9{,}62$
**b)** $\alpha = 15^\circ$, $a \approx 5{,}18$, $b \approx 19{,}32$
**c)** $\alpha \approx 20^\circ$, $\beta \approx 70^\circ$, $b \approx 13{,}74$, $c \approx 14{,}62$
**d)** $\alpha \approx 45^\circ$, $\beta \approx 45^\circ$, $a \approx 10{,}61$, $b \approx 10{,}61$

**4.** $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$

**5.** **a)** $<$ **b)** $<$ **c)** $>$ **d)** $<$

**6.** **a)** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$
**b)** $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$
**c)** $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$

**7.** **a)** 2 **b)** 1 **c)** 1 **d)** 0

**8.** **a)** $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$
**b)** $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$
**c)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$
**d)** $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

**9.** **a)** $\frac{161}{289}$ **b)** $\frac{161}{120}$ **c)** $\frac{2}{17}$ **d)** $\frac{15}{8}$

**10.** **a)** $30^\circ$ **b)** $60^\circ$ **c), d), e)** $45^\circ$ **f)** $60^\circ$

**11.** **a), b)** nie **c)** tak

**12.** **a)** $b = 40\sqrt{3}$, $c = 80$, $\beta = 60^\circ$
**b)** $a = 6\sqrt{3}$, $c = 12$, $\beta = 30^\circ$
**c)** $c = 2(\sqrt{2}-1)$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$

**13.** **a)** $x = 1+3\sqrt{3}$ **b)** $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **c)** $x = 3\sqrt{3}-2$

**14.** **a)** $\alpha \approx 37^\circ$, $\beta \approx 53^\circ$ oraz $a = 10$, $b = \frac{40}{3}$, $c = \frac{50}{3}$ lub $a = \frac{15}{2}$, $b = 10$, $c = \frac{25}{2}$
**b)** $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $a = b = 10$, $c = 10\sqrt{2}$

**15.** $\frac{\sqrt{26}}{5}$

**16.** **a)** 1 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 2

**17.** **a)** 1 **b)** 18

**18.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**19.** **a)** $1\frac{2}{5}$ **b)** $13\frac{2}{3}$ **c)** 16

**20.** **b)** $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$

**21.** **a)** $\frac{1}{(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha}$, $5\frac{1}{3}$
**b)** $2\cos^2\alpha - 1$, $-\frac{1}{2}$
**c)** $1-\cos^2\alpha$, $\frac{3}{4}$

**22.** $\frac{1}{2}$

**23.** $\frac{7}{5}$

**24.** **a)** $1\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{9}$

**25.** **a)** $\frac{7}{5}$ **b)** $\frac{12}{25}$ **c)** $\frac{12}{25}$

**26.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$

**27.** $60^\circ$

**28.** **a)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$
**b)** $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$
**c)** $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$
**d)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$

**29.** **a)** 0 **b)** 0 **c)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}-1$ **d)** $-1$

**30.** **a)** $\frac{7}{8}$ **b)** $-1$

**31.** **a)** $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$
**b)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
**c)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$
**d)** $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

**32.** **a)** tak **b)** nie **c)** nie **d)** tak

**33.** **a)** $\frac{3+\sqrt{7}}{4}$ **b)** $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$

**34.** **a)** $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ **b)** $-\frac{11\sqrt{2}}{12}$

**35.** **a)** $\frac{2}{5}$ **b)** $-\frac{2}{5}$

**36.** **a)** $\alpha = 10^\circ$ **b)** $\alpha = 15^\circ$ **c)** $\alpha = 22{,}5^\circ$

**37.** $30^\circ$, $60^\circ$, $120^\circ$, $150^\circ$

**38.** $6\sqrt{3}$ cm, $16\sqrt{3}$ cm

**39.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**40.** przekątne: 13, $13\sqrt{3}$, wysokość: $\frac{13\sqrt{3}}{2}$

**41.** **a)** $3\sqrt{3}$
**b)** $|AB| = 6\sqrt{3}$, $\sphericalangle CAB = 30^\circ$, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$

**42.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**43.** $42^\circ$, $48^\circ$, 3, $\sqrt{21}$

**44.** 99 $\text{cm}^2$

**45.** $|BC| = 3\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle BCD \approx 118^\circ$, $\sphericalangle CBD \approx 34^\circ$, $\sphericalangle BDC \approx 28^\circ$

**46.** około $48^\circ$

**47.** około 26,54 m

**48.** około 127,3 m

**49.** około 221,5 m

**50.** 1. F, 2. P

**51.** 1. D, 2. G

### 5.9. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

**1.** **a)** 1 **b)** 0 **c)** 12 **d)** 5

**2.** **a)** $3^{\frac{13}{3}}$ **b)** $3^{\frac{3}{2}}$ **c)** $3^{\frac{23}{6}}$

**3.** **a)** $3^1$ **b)** $5^9$ **c)** $2^{\frac{25}{3}}$ **d)** $2^{\frac{9}{5}}$ **e)** $3^{\frac{11}{12}}$ **f)** $5^1$

**4.** **a)** $a = y$, np. $xyz = 2^{17}$
**b)** $a = y = z$, np. $xyz = 3^{-\frac{23}{12}}$
**c)** $a = x = z$, np. $xyz = 2^{\frac{7}{3}}$
**d)** $a = x = y = z$, np. $xyz = 96^{\frac{1}{2}}$

**5.** **a)** 49 **b)** 36 **c)** $\frac{1}{27}$ **d)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **e)** 4 **f)** 81

**6.** **a)** 2 **b)** 625 **c)** 1 **d)** 1

**7.** **a)** 4 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $-3$ **d)** $-\frac{1}{4}$ **e)** $-5$ **f)** $\frac{1}{6}$
**g)** 8 **h)** 0,3

**8.** **a)** $-1$ **b)** 2 **c)** 3 **d)** 6

**10.** **a)** $x = 5$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 13$
**d)** $x = 3$ **e)** $x = 5$ **f)** $x = 4$
**g)** $x = 0$ **h)** $x = 2$ **i)** $x = -2$, $x = 2$

**11.** **a)** $a = \frac{1}{4}$, $b = -3$, $c = \frac{2}{3}$
**b)** $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = -1$, $c = 0$

**12.** **a)** $x > 3$ **b)** $x < -2$ **c)** $x > 2$ **d)** $x > 4$

**13.** I – B, II – C, III – A

**14.** **a)** $f(D) = (-8; \infty)$, rosnąca
**b)** $f(D) = (-4; \infty)$, malejąca
**c)** $f(D) = (3; \infty)$, malejąca
**d)** $f(D) = (-\infty; 0)$, rosnąca
**e)** $f(D) = (0; \infty)$, rosnąca
**f)** $f(D) = (0; \infty)$, malejąca

**15.** **a)** $m \in (2; \infty)$ **b)** $m \in (0; \frac{1}{4})$
**c)** $m \in (-1; 1)$

**16.** **a), d)** $a \in (1; \infty)$ **b), c)** $a \in (0; 1)$

**17.** **a)** $<$ **b)** $>$ **c)** $=$

**18.** **a)** $3^{\sqrt{3}} < 9\sqrt{3} < 9^{2,1} < 27^{\frac{3}{2}}$
**b)** $\left(\frac{16}{25}\right)^{1,5} < \left(\frac{4}{5}\right)^{\sqrt{5}} < \left(\frac{5}{4}\right)^{-1,8} < 0{,}8^{\sqrt{2}}$

**19.** **a)** $x \in (0; \infty)$ **b)** $x \in (-2; \infty)$
**c)** $x \in (-\infty; 0)$

**20.** **a)** $x = -1$, $x = 0$ **b)** $x = 2$

**21.** **a)** $a = 36$ **b)** $a = \log_9 5$

**22.** **a)** 12 **b)** 13 **c)** 1000 **d)** $\frac{1}{5}$
**e)** 16 **f)** 243 **g)** 2025 **h)** $\frac{4}{9}$

**23.** **a)** $a = 3$ **b)** $a = \frac{1}{3}$ **c)** $a = \frac{1}{3}$ **d)** $a = 81$
**e)** $a = \frac{2}{5}$ **f)** $a = \frac{125}{8}$

**24.** **a)** $x = 27$ **b)** $x = 3\sqrt{3}$ **c)** $x = 1$

**25.** **a)** $x = 16$ **b)** $x = 4{,}5$ **c)** $x = 5$ **d)** $x = \frac{4}{9}$

**26.** **a)** 6 **b)** 20

**27.** **a)** 2 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{4}$

**28.** **a)** $f(x) \leqslant 1$ dla $x \in (0; 2\rangle$, $g(x) \leqslant 1$ dla $x \in (1; 3\rangle$
**b)** $f(x) \leqslant 1$ dla $x \in \langle \frac{1}{2}; \infty)$, $g(x) \leqslant 1$ dla $x \in \langle -\frac{3}{2}; \infty)$
**c)** $f(x) \leqslant 1$ dla $x \in (0; 3\rangle$, $g(x) \leqslant 1$ dla $x \in (2; 5\rangle$
**d)** $f(x) \leqslant 1$ dla $x \in \langle \frac{1}{3}; \infty)$, $g(x) \leqslant 1$ dla $x \in \langle -\frac{2}{3}; \infty)$

**29.** **a)** $f(x) = 1$ dla $x = 3$, $g(x) = 1$ dla $x = \frac{1}{3}$
**b)** $f(x) = 1$ dla $x = 4$, $g(x) = 1$ dla $x = -4$
**c)** $f(x) = 1$ dla $x = \frac{1}{3}$, $g(x) = 1$ dla $x = 3$
**d)** $f(x) = 1$ dla $x = \frac{1}{4}$, $g(x) = 1$ dla $x = -\frac{1}{4}$

**30.** **a)** $x \in (-3; -2)$ **b)** $x \in (3; \infty)$

**31.** **a)** 32 h **b)** 48 h

**32.** **a)** 12 g **b)** 6 g

**33.** 8 dni

**34.** 1. F, 2. P

## 5.10. Ciągi

**1.** **a)** 40 **b)** $6(1+8\sqrt{2})$ **c)** $-8$ **d)** 9

**2.** **a)** $a_7$ **b)** $a_2$, $a_{10}$

**3.** **a)** trzy, $a_1 = -11$, $a_3 = -3$
**b)** pięć, $a_3 = -5$, $a_7 = -5$
**c)** trzy, $a_2 = -5$, $a_4 = -5$

**4.** **a)** $a_n = n^2$ **b)** $a_n = \frac{1}{2n-1}$ **c)** $a_n = \frac{n}{n+1}$
**d)** $a_n = (-1)^{n+1}2n$ **e)** $a_n = \frac{1}{3^n}$
**f)** $a_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2+\frac{2}{n+2} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

**6.** **a)**, **c)**, **e)** rosnący **b)**, **f)** niemonotoniczny
**d)** malejący

**7.** **a)** $a_n = 2n-1$, $a_5 = 9$, $a_8 = 15$
**b)** $a_n = -5n+13$, $a_5 = -12$, $a_8 = -27$
**c)** $a_n = \frac{1}{2}n - 1\frac{1}{2}$, $a_5 = 1$, $a_8 = 2\frac{1}{2}$

**8.** **a)** $a_7 = 8$ **b)** $a_{10} = -42$ **c)** $a_{15} = -23$
**d)** $a_{20} = -7$

**9.** $(b_n)$, $(d_n)$

**10.** **a)** tak **b)** nie **c)** tak **d)** nie

**11.** **a)** $a_n = 2n-1$, rosnący
**b)** $a_n = 3n-18$, rosnący
**c)** $a_n = \frac{2}{3}n - 2$, rosnący

**12.** **a)** $r = 2$ **b)** $r = \frac{1}{2}$ **c)** $r = -4\frac{1}{2}$

**13.** **a)** $x = 7$ **b)** $x = 0$, $x = 6$

**14.** **a)** $a = 18$, $b = 33$, $c = 48$ **b)** $10+\sqrt{2}$, $8+\sqrt{2}$, $6+\sqrt{2}$, $4+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$

**15.** **a)** $a_1 = 1$, $r = -2$ **b)** $a_n = 3n-10$

**16.** **a)** $a_n = 2^n$, $a_6 = 64$, $a_{10} = 1024$
**b)** $a_n = \frac{27}{3^n}$, $a_6 = \frac{1}{27}$, $a_{10} = \frac{1}{2187}$
**c)** $a_n = (\sqrt{2})^{n-2}$, $a_6 = 4$, $a_{10} = 16$

**17.** **a)** $a_n = -3\cdot 2^{n-1}$, $a_4 = -24$, $a_7 = -192$
**b)** $a_n = 4\cdot(-1)^{n-1}$, $a_4 = -4$, $a_7 = 4$
**c)** $a_n = 3\cdot(-\sqrt{2})^{n-1}$, $a_4 = -6\sqrt{2}$, $a_7 = 24$ **d)** $a_n = \frac{1}{2^{n-3}}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_7 = \frac{1}{16}$
**e)** $a_n = \frac{(-3)^{n-1}}{3}$, $a_4 = -9$, $a_7 = 243$
**f)** $a_n = 2\cdot(\sqrt{3})^n$, $a_4 = 18$, $a_7 = 54\sqrt{3}$

**18.** $(b_n)$, $(d_n)$

**19.** **a)** $a_n = 2^n$, rosnący
**b)** $a_n = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, malejący
**c)** $a_n = \frac{1}{4}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^n$, niemonotoniczny

**20.** $q = 2$, $a_5 = 48$

**21.** **a)** tak **b)** tak **c)** nie **d)** tak

**22.** **a)** tak **b)** tak **c)** nie

**23.** **a)** 21, 63 **b)** 12, 24, 48
**c)** $\frac{1}{3}$, 1, 3 lub 3, 1, $\frac{1}{3}$

**24.** **a)** $S_{12} = 51$ **b)** $S_9 = 9(1+3\sqrt{2})$
**c)** $S_{15} = 270$ **d)** $S_7 = 84$

**25.** **a)** 981 **b)** 1566

**26.** $a_7$

**27.** 42

**28.** **a)** $x = 20$ **b)** $x = 23$
**c)** $x = 8$ **d)** $x = 6$

**29.** **a)** 16 **b)** 5

**30.** 1672

**31.** 10

**32.** **a)** $S_5 = \frac{1055}{16}$ **b)** $S_{45} = \sqrt{2}$
**c)** $S_6 = -\frac{21}{8}$ **d)** $S_7 = 31 + \frac{156\sqrt{5}}{5}$

**33.** **a)** $a_n = -3n+5$, $a_{12} = -31$
**b)** $a_n = 2n+4$, $a_{15} = 34$

**34.** tak

**35.** **a)** 6 **b)** 14

**36.** **a)** 1048575 **b)** $-2097150$

**37.** **a)** stały **b)** rosnący **c)**, **d)** malejący

**38.** **a)** geometryczny **b)** arytmetyczny
**c)**, **d)** ani arytmetyczny, ani geometryczny

**39.** **a)** 580 **b)** $a_1 = 16$, $a_{16} = 46$

**40.** $a_1 = -6$, $n = 25$

**41.** $a_1 = 36$, $n = 20$

**42.** $r = 3$, $k = 15$

**43.** $n = 10$

**44.** $r = 2$, $n = 21$

**45.** 8, 10 lub $4\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$

**46.** **a)** 3, 4 **b)** 6, 8

**47.** 8, 12, 16 lub 32, 12, $-8$

**48.** 54, 36, 24 lub 24, 36, 54

**49.** **a)** 1081,60 zł **b)** 1340,10 zł
**c)** 1480,24 zł

**50.** po 4 latach: 2349,80 zł,
po 8 latach: 5841,60 zł

**51.** **a)** 609,50 zł **b)** 610,30 zł **c)** 610,50 zł

**52.** największe odsetki w banku $C$, w banku $A$ o 2%, w banku $B$ o około 2,015%, w banku $C$ o około 2,018%

**53.** bank $C$

**54.** 1. F, 2. P

**55.** A. 3

### 5.11. Geometria analityczna

**1.** **a)** $(1,-2)$ **b)** $(2,-\frac{1}{2})$ **c)** $(0,-4)$ **d)** $(3,-\frac{7}{2})$

**2.** **a)** $B(-7,3)$ **b)** $B(1-\sqrt{2},5\sqrt{3})$

**3.** **a)** $a=\frac{3}{2}$, $b=1$ **b)** $a=8$, $b=3$ **c)** $a=4$, $b=-6$ **d)** $a=4$, $b=6$

**4.** **a)** $5$ **b)** $3\sqrt{2}$

**5.** **a)** $10\sqrt{2}$ **b)** $10$

**6.** **a)** $10+4\sqrt{5}$ **b)** $6\sqrt{5}+2\sqrt{13}$

**7.** **a)** $\sqrt{145}$, $\sqrt{145}$, $\sqrt{58}$ **b)** $\frac{\sqrt{442}}{2}$, $\frac{\sqrt{493}}{2}$, $\frac{\sqrt{1717}}{2}$

**8.** **a)** $4(\sqrt{5}+\sqrt{13})$ **b)** $16$

**9.** **a)** równoramienny i prostokątny
**b)** nierównoramienny i nieprostokątny

**10.** **a)** $10$ **b)** $15$

**11.** **a)** $2x+y-4=0$, $y=-2x+4$
**b)** $y-3=0$, $y=3$
**c)** $2x-3y+2=0$, $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$
**d)** $2x+y-4=0$, $y=-2x+4$
**e)** $y-5=0$, $y=5$
**f)** $x-\sqrt{2}=0$

**12.** **a)** $y=6x+7$ **b)** $x=-1$ **c)** $y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$

**13.** **a)** $y=1$ **b)** $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ **c)** $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

**14.** **a)** $y=\frac{11}{2}$
**b)** $y=-\frac{1}{3}x+4$
**c)** $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}$

**15.** **a)** $h=4\sqrt{2}$, $P=20$
**b)** $h=3\sqrt{5}$, $P=30$

**16.** **a)** $8$ **b)** $21$

**17.** **a)** $8$ **b)** $26$

**18.** **a)** $A'(1,3)$, $A''(-1,-3)$, $|A'A''|=2\sqrt{10}$
**b)** $A'(-\sqrt{2},-4)$, $A''(\sqrt{2},4)$, $|A'A''|=6\sqrt{2}$
**c)** $A'(7,0)$, $A''(-7,0)$, $|A'A''|=14$

**19.** **a)** $A'(1,2)$, $B'(-3,2)$, $C'(-3,-1)$, $D'(1,-1)$, $P=4$
**b)** $A'(0,2)$, $B'(-5,-3)$, $C'(-2,-6)$, $D'(3,-1)$, $P=8$

**20.** $y=\frac{5}{2}x-2$

**21.** **a)** $p=-6$, $q=2$ **b)** $p=4$, $q=-1$ **c)** $p=-6$, $q=-1$

**22.** **a)** $A'(1,3)$, $B'(-3,-1)$, $C'(9,-5)$, $P=12$
**b)** $A'(3,2)$, $B'(-3,2)$, $C'(0,-4)$, $P=12$

**23.** **a)** $S(1,3)$, $r=6$ **b)** $S(-2,6)$, $r=12$ **c)** $S(-3,-\frac{1}{4})$, $r=\sqrt{3}$ **d)** $S(4,-8)$, $r=2\sqrt{2}$

**24.** **a)** $(x-3)^2+(y-4)^2=9$
**b)** $(x+5)^2+(y-3)^2=\frac{4}{9}$
**c)** $(x+3)^2+(y+2)^2=18$

**25.** **a)** $(x-2)^2+y^2=10$
**b)** $(x-3)^2+(y+6)^2=8$
**c)** $(x-2)^2+(y-1)^2=65$

**26.** **a)** $(x-5)^2+(y-6)^2=5$
**b)** $(x+2)^2+(y-2)^2=13$
**c)** $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{49}{2}$

**27.** **a)** względem osi $OY$
**b)** względem początku układu współrzędnych

**28.** **a)** $(x+1)^2+(y-4)^2=16$
**b)** $(x+1)^2+(y-4)^2=1$
**c)** $(x+1)^2+(y-4)^2=25$

**29.** **a)** $(x-3)^2+(y-2)^2=9$
**b)** $(x+5)^2+(y-2)^2=25$

**30.** **a)** $(x-1)^2+(y-2)^2=20$
**b)** $(x+4)^2+(y+2)^2=45$

**31.** **a)** $(x-2)^2+(y+1)^2=20$
**b)** $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

**32.** **a)** $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{65}{4}$
**b)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{125}{4}$

**33.** **a)** $(x+3)^2+(y-2)^2=40$
**b)** $(x-2)^2+(y-2)^2=10$

**34.** **a)** styczne wewnętrznie
**b)** rozłączne zewnętrznie
**c)** przecinają się
**d)** rozłączne wewnętrznie

**35.** **a)** $2$ **b)** $0$ **c)** $1$

**36.** **a), b)** $5\sqrt{2}$ **c)** $7\sqrt{2}$

**37.** $12\sqrt{5}$

**38.** $|AC| = 10\sqrt{2}$, $|BD| = 2\sqrt{2}$, $P = 20$

**39.** 3

**40.** $6\sqrt{5} + 8\sqrt{2}$

**41.** $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

**42.** $4\sqrt{5}$

**43.** $y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$, $y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}$, $(3, \frac{5}{3})$

**44.** $C(0,-4)$ lub $C(0,4)$ lub $C(-2,-4)$ lub $C(-2,4)$ lub $C(2,-4)$ lub $C(2,4)$

**45.** $B(-5,3)$ lub $B(5,3)$

**46.** $C(1,3)$, $S(5,0)$

**47.** $C(1,4)$ lub $C(-3,-4)$

**48.** $y = x - 1$, $B(5,4)$

**49.** **a)** $AB$: $y = -x - 1$, $CD$: $y = -x + 5$, $AD$: $y = x + 3$
**b)** 18

**50.** $D(6,12)$, $P = 45$

**51.** **a)** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = x - 8$, $y = 7x + 16$
**b)** $y = -2$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = -2x - 11$

**52.** **a)** $(-1,7)$, $(1,-7)$, $(-5,-5)$
**b)** $(-2,4)$, $(6,0)$, $(-6,-8)$

**53.** $y = \frac{1}{2}x + 1$

**54.** $A'(4,2)$, $B'(-10,2)$, $C'(-1,-6)$, $P = 22$

**55.** $A(5,-8)$, $B(5,8)$, $C(-5,8)$

**56.** $2\sqrt{17}$

**57.** **a)** $a = -\frac{1}{3}$, $b = 5$
**b)** $a = -\frac{1}{5}$, $b = -1$
**c)** $a = -\frac{1}{5}$, $b = 5$

**58.** $D(-7,2)$

**59.** **a)** $(0,0)$, $(0,8)$, $(6,0)$
**b)** $(0, 2-\sqrt{7})$, $(0, 2+\sqrt{7})$, $(-3-2\sqrt{3}, 0)$, $(-3+2\sqrt{3}, 0)$

**60.** **a)** $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 10$, $(1,-2)$
**b)** $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$, $(0,6)$
**c)** $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$, $(4,0)$
**d)** $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 13$, $(-6,-1)$

**61.** $r = \sqrt{5}$, $y = 2x - 1$

**62.** $y = 4x + 16$

**63.** $C(-2\sqrt{2}-1, -2\sqrt{2}+2)$ lub $C(2\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}+2)$

**64.** 1. P, 2. F

**65.** A, E

**66.** 1. F, 2. P

### 5.12. Planimetria

**1.** **a)** $\delta = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ **b)** $\delta = 32^\circ 30'$, $\varphi = 57^\circ 30'$ **c)** $\delta = 50^\circ$, $\varphi = 40^\circ$

**2.** **a)** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$, $\frac{9}{2}$ **b)** 5, 4 **c)** 6, $3\sqrt{5}$

**3.** **a)** $\frac{5}{2}$ cm, $\sqrt{13}$ cm, $\frac{\sqrt{73}}{2}$ cm
**b)** $\frac{12}{5}$ cm **c)** $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ cm

**4.** **a)** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 3, $3\sqrt{3}$

**5.** $6(1+\sqrt{10})$ cm

**6.** $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $r = 1$ cm

**7.** **a)** 24 cm$^2$ **b)** $6\sqrt{7}$ cm$^2$

**8.** 84

**9.** $2\sqrt{10}$

**10.** 4 cm, $4(\sqrt{2}-1)$ cm

**11.** 5 cm, 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm

**12.** $12(\sqrt{3}+2)$ cm

**13.** $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{3}$, 1

**14.** $P = 39$ cm$^2$, $Ob = (13 + 5\sqrt{13})$ cm

**15.** **a)** 1:4 **b)** 1:2

**16.** $x = \frac{15}{4}$, $y = \frac{7}{2}$

**17.** 3, $3(\sqrt{2}-1)$, $3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

**18.** **a)** przecinają się **b)** rozłączne zewnętrznie **c)** styczne zewnętrznie **d)** przecinają się

**19.** **a)** $x = 1$ **b)** $x = 5$

**20.** **a)** 0 punktów dla $x \in \langle 0;4) \cup (6;\infty)$,
1 punkt dla $x \in \{4,6\}$,
2 punkty dla $x \in (4;6)$
**b)** 0 pkt dla $x \in \langle 0; 2\sqrt{3}-2) \cup (2;\infty)$,
1 punkt dla $x \in \{2\sqrt{3}-2, 2\}$,
2 punkty dla $x \in (2\sqrt{3}-2; 2)$

**21.** 0 punktów dla $r \in (0; 2\frac{1}{3}) \cup (4\frac{1}{3}; \infty)$,
1 punkt dla $r \in \{2\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}\}$,
2 punkty dla $r \in (2\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3})$

**22.** 2,4 cm, 5,6 cm

**23.** **a)** $\alpha = \beta = \gamma = 40^\circ$
**b)** $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
**c)** $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 40^\circ$

**25.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 32^\circ$, $\sphericalangle O = 116^\circ$

**26.** **a)** $62^\circ$ **b)** $120^\circ$ **c)** $54^\circ$

**27.** $15^\circ$

**28.** **a)** dziesięciokąt foremny: $144^\circ$,
dwunastokąt foremny: $150^\circ$

**29.** **a)** 4 **b)** 2

**30.** $P = d^2(3 + 2\sqrt{2})$, $Ob = 4d(\sqrt{2} + 1)$

**31.** **a)** $\frac{\pi}{4}$

**32.** $70^\circ$

**33.** $8(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

**34.** 6 cm

**35.** $P = 128$ cm$^2$, $Ob = 16(2 + \sqrt{2})$ cm

**36.** **b)** 50 cm$^2$

**37.** **a)** $a \approx 3{,}1$, $b \approx 2{,}5$, $\gamma = 75^\circ$
**b)** $a \approx 16{,}4$, $c \approx 20{,}1$, $\gamma = 120^\circ$

**38.** **a)** $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
**b)** $\alpha = 105^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
**c)** $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ lub $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
**d)** $\alpha = 105^\circ$, $\gamma = 45^\circ$ lub $\alpha = 15^\circ$, $\gamma = 135^\circ$

**39.** **a)** $6\sqrt{2}$ **b)** $5\sqrt{3}$

**40.** **a)** $3\sqrt{3}$ **b)** 7

**41.** $3\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$

**42.** **a)** nie jest **b)** jest

**43.** 4, $4\sqrt{7}$

**44.** $120^\circ$, $\sqrt{19}$

**45.** $|BC| = \frac{24\sqrt{7}}{7}$, $|AC| = \frac{8\sqrt{7}}{7}$, $|AB| = 8$

**46.** $16\sqrt{2}$ cm$^2$

**47.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 72^\circ$, $\sphericalangle C = 36^\circ$

**48.** 2,4 cm

**49.** $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = \frac{1}{2}$, $P = 24\sqrt{3}$

**50.** $b = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm, $P = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm$^2$

**51.** 2,4

**53.** $P = 60\sqrt{3}$ cm$^2$, $Ob = 44$ cm

**54.** od podstawy: 3,5 cm,
od ramienia: 2,1 cm

**55.** $\frac{1}{8}(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\alpha$

**56.** $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $Ob = 4(2 + \sqrt{2})$

**57.** $10\pi\sqrt{2}$

**58.** $\frac{15}{2}(3 - \sqrt{3})$

**59.** $d\sqrt{13}$

**60.** $-\frac{7}{8}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$

**62.** 4 : 9

**63.** $|PA| = 8$, $|PB| = 18$

**64.** 11

**65.** **b)** $\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$ cm

**66.** $\frac{31}{27}\pi$

**67.** $|AA_1| = \sqrt{6(2\sqrt{3} + 5)}$,
$|BB_1| = 2\sqrt{3(\sqrt{3} + 4)}$,
$|CC_1| = \sqrt{6(8 - \sqrt{3})}$

**68.** **a)** 20 cm$^2$ **b)** 11,25 cm$^2$

**69.** **a)** $P = 4\sqrt{6}$, $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$
**b)** $P = 3\sqrt{15}$, $r = \frac{\sqrt{15}}{3}$

**70.** 1. F, 2. F

### 5.13. Stereometria

**1.** $P_c = 360$, $V = 300$

**2.** 720 cm$^2$

**3.** **a)** $234\sqrt{3}$
**b)** $48(3 + 5\sqrt{2})$
**c)** $36(10 + 3\sqrt{3})$

**4.** Przekątna $AH$ tworzy kąt prosty z krawędziami $AB$ oraz $GH$.

**5.** $4\sqrt{3}$

**6.** $8\sqrt{2}$

**7.** $24(5 + 2\sqrt{61})$

**8.** 60

**9.** 2

**10.** **a)** $\frac{2}{3}\sqrt{69}$ **b)** $2\sqrt{7}$ **c)** $2\sqrt{5}$

**11.** $6(13 + \sqrt{13})$

**12.** **a)** $30^\circ$ **b)** $6\sqrt{3}$

**13.** $V = 486\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}$

**14.** $V = 27$, $P_b = 54$

**15.** $67^\circ$, $18^\circ$, $13^\circ$

**16.** $27\sqrt{2}$

**17.** $V = 32$, $P_c = 8(4 + \sqrt{34})$

**18.** $108\sqrt{3}$ cm$^3$

**19.** $\frac{\sqrt{255}}{17}$

**20.** $60\frac{3}{4}$

**21.** $2\frac{2}{7}$

**22.** $\frac{160}{\pi}$ cm$^3$ lub $\frac{200}{\pi}$ cm$^3$

**23.** $\sqrt[3]{4\pi V}$

**24.** $3\sqrt[3]{4}$, $45^\circ$

**25.** **a)** $\frac{16\sqrt{\pi}}{\pi}$ **b)** $\frac{512\sqrt{3}}{3}\pi$

**26.** $8\pi\sqrt{13}$

**27.** $6\frac{2}{3}$

**28.** **a)** 3 cm **b)** 54 cm$^3$

**29.** $4\sqrt{15}$

**30.** $144\sqrt{2}$ cm$^3$

**31.** $V = 36\sqrt{2}$, $90^\circ$

**32.** **a)** $972\sqrt{3}$
**b)** $36(3 + \sqrt{2})$

**33.** 62,5 cm$^2$

**34.** $\sqrt{3}$

**35.** $3\sqrt{7}$

**36.** $\frac{1536\sqrt{7}}{49}$ cm$^3$

**37.** $V = 13{,}5$, $P_b = \frac{9\sqrt{39}}{2}$

**38.** $9(5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5})$

**39.** $\frac{25}{3}\pi\sqrt{119}$ cm$^3$

**40.** około $83^\circ$

**41.** $288\sqrt{3}$, $288(6 - \sqrt{3})$

**42.** 216

**43.** **a)** $\cos\alpha$
**b)** $6\sqrt{3}$

**44.** $4\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2 20^\circ} \approx 4$ [cm]

**45.** 96

**46.** $3(9 + \sqrt{29})$

**47.** $\sqrt{34}$

**48.** B. 2

**49.** B. 3

## 5.14. Rachunek prawdopodobieństwa

**1.** 72

**2.** 42, nieparzystych: 24

**3.** 4 osoby: 24, 6 osób: 720

**4.** 40

**5.** **a)** 720 **b)** 144

**6.** 2880

**7.** **a)** 362 880 **b)** 2880

**8.** **a)** 2160 **b)** 6400

**9.** **a)** 720 **b)** 46 656

**10.** **a)** 336 **b)** 840 **c)** 27 216

**11.** **a)** 243 **b)** 6561 **c)** 280

**12.** **a)** pary zdarzeń wykluczających się:
$A$ i $C$ oraz $B$ i $C$,
para zdarzeń przeciwnych: $B$ i $C$
**b)** zdarzenie niemożliwe: $A \cap C$,
zdarzenie pewne: $B \cup C$

**13.** **a)** $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(A') = \frac{5}{6}$
**b)** $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{3}{4}$

**14.** $P(A \cap B) = \frac{5}{36}$,
$P(A \cup B) = \frac{7}{12}$

**15.** **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}$

**16.** **a)** $\frac{1}{15}$ **b)** $\frac{3}{10}$

**17.** **a)** $\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** $\frac{5}{9}$

**18.** **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{23}{24}$

**19.** $\frac{12}{25}$

**20.** **a)** $\frac{8!\cdot 7!}{15!} = \frac{1}{6435}$
**b)** $\frac{9!\cdot 7!}{15!} = \frac{1}{715}$

**21.** $\frac{4}{5}$

**22.** $\frac{3}{20}$

**23.** **a)** $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{2}$

**24.** **a)** $\frac{7}{15}$ **b)** $\frac{8}{15}$

**25.** $\frac{1}{2}$

**26.** $\frac{1}{3}$

**27.** $\frac{5}{16}$

**28.** **a)** 16 **b)** 25

**29.** 30

**30.** 62

**31.** 8

**32.** 0,7

**33.** bez zwracania: $\frac{5}{28}$, ze zwracaniem: $\frac{125}{512}$, bardziej prawdopodobne przy losowaniu ze zwracaniem

**34.** $\frac{19}{66}$

**35.** **a)** 33 **b)** 12

**36.** **a)** $\frac{7}{1800}$ **b)** $\frac{29}{4500}$

**37.** **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{5}{6}$

**38.** 4,50 zł

**39.** 36

**40.** **a)** 5 **b)** 60

**41.** 48

**42.** **a)**, **b)** 8

**43.** 1. P, 2. P

### 5.15. Statystyka

**1.** **a)** $\overline{x} = 7$, $M = 8$, $D = 10$
**b)** $\overline{x} = 4$, $M = 4$, $D = 2$
**c)** $\overline{x} = 6$, $M = 3{,}5$, $D = 3$
**d)** $\overline{x} = 8$, $M = 8$, $D = 8$

**2.** 4800 zł

**3.** 172 cm

**4.** **a)** $\overline{x} = 3$, $M = 3$, $D = 2$
**b)** $\overline{x} = 3{,}56$, $M = 3$, $D = 3$
**c)** $\overline{x} \approx 3{,}33$, $M = 3$, $D = 3$

**5.** 3

**6.** 17 lub 19

**7.** **a)** 4 **b)** 6,1

**8.** 4

**9.** **a)** $x = 5$, $M = 14$, $D = 14$
**b)** $x = 10$, $y = 1$

**10.** $\overline{x}_K = \overline{x}_N = 10$ m$^3$
**a)** około 2,58 m$^3$ **b)** około 4,24 m$^3$
**c)** około 3,51 m$^3$

**11.** $\overline{x}_a = 4$, $\sigma_a \approx 1{,}08$, $\overline{x}_b = 4$, $\sigma_b \approx 1{,}17$, $\overline{x}_c = 4$, $\sigma_c \approx 1{,}8$

**12.** **a)** 4580 zł **b)** zwiększy się o 20 zł

**13.** 5000 zł

**14.** **a)** para I: 5,1, para II: 5,75
**b)** para I: 5,12, para II: 5,76

**15.** około 11,1%

**16.** **a)** $\overline{x} = 2$, $\overline{x^2} = 4\frac{2}{3}$, $\sigma^2 = \frac{2}{3}$
**b)** $\overline{x} = 3$, $\overline{x^2} = 11$, $\sigma^2 = 2$
**c)** $\overline{x} = 30$, $\overline{x^2} = 1100$, $\sigma^2 = 200$
**d)** $\overline{x} = \frac{4}{7}$, $\overline{x^2} = 8\frac{4}{7}$, $\sigma^2 = 8\frac{12}{49}$

**18.** $\overline{x} = 4{,}08$, $\sigma \approx 1{,}18$

**19.** $\overline{x} \approx 4666{,}67$ zł, $\sigma \approx 986{,}01$ zł

**20.** **a)** średnia i odchylenie – wzrost o 5%: odpowiednio 6300 zł i 525 zł
**b)** średnia – wzrost o 200 zł: 6200 zł, odchylenie bez zmian: 500 zł

**21.** $x = 2$, $y = 5$

**22.** 8

**23.** $141\frac{2}{3}$ cm

**24.** **a)** 5000 zł **b)** 5350 zł

**25.** $\frac{7}{25}$

**26.** **a)** $\frac{7}{20}$ ($\overline{x}_D = 3$, $\sigma_D \approx 1{,}38$), $\frac{1}{2}$ ($\overline{x}_C = 4$, $\sigma_C \approx 0{,}89$) **b)** 0,455

**27.** 1. P, 2. F

# Indeks


argument funkcji 167
asymptota
  pionowa hiperboli 198
  pozioma hiperboli 198

bryła platońska 100
bryły
  Archimedesa 103
  podobne 124

cechy podobieństwa trójkątów 231
ciąg
  arytmetyczny 215
  geometryczny 215
  malejący 215
  monotoniczny 215
  niemalejący 215
  nierosnący 215
  nieskończony 215
  rosnący 215
  skończony 215
  stały 215
częstość zdarzeń 31
czworościan foremny 79, 100, 101

długość odcinka 222
dominanta 253
doświadczenie wieloetapowe 50
dowód nie wprost 142
dwudziestościan foremny 100, 101
dwunastościan foremny 100, 101
dwusieczna kąta wewnętrznego
  trójkąta 229
działania
  na pierwiastkach 154
  na potęgach 154
dziedzina funkcji 167

funkcja 167
  kwadratowa 183
  liniowa 176
  logarytmiczna 210
  malejąca 167
  monotoniczna 167
  niemalejąca 167
  nierosnąca 167
funkcja
  rosnąca 167
  stała 167
  wykładnicza 210
  wymierna 198
funkcje trygonometryczne
  kąta ostrego 204
  kąta wypukłego 204

gra sprawiedliwa 47, 252
graniastosłup 66
  pochyły 66, 77
  prawidłowy 68
  prosty 66, 240

hiperbola 198

igła Buffona 31
iloczyn
  zbiorów 161
  zdarzeń 29
iloraz ciągu geometrycznego 215
implikacja 136

kąt
  dwuścienny 91
  między prostą a płaszczyzną 87
  płaski przy wierzchołku ostrosłupa
    prawidłowego 79
  rozwarcia stożka 115
  środkowy w okręgu 233
  wpisany w okrąg 233
koło wielkie kuli 119
krawędź
  boczna graniastosłupa 66
  boczna ostrosłupa 78
  podstawy graniastosłupa 66
  podstawy ostrosłupa 78
kula 119, 240

liczby
  całkowite 154
  naturalne 154
  niewymierne 154
  pierwsze 154
  wymierne 154

linia
geodezyjna 118
śrubowa 118
logarytm 210

mediana 253
miara kąta dwuściennego 91
miejsca zerowe funkcji kwadratowej 183
miejsce zerowe funkcji 167
monotoniczność funkcji liniowej 176

następnik implikacji 136

objętość
czworościanu foremnego 85
graniastosłupa 74, 240
kuli 120, 240
ostrosłupa 83, 240
prostopadłościanu 74, 240
stożka 115, 241
sześcianu 74
walca 111, 241
odchylenie standardowe 253
odległość punktu od prostej 222
okrąg 224
okres połowicznego rozpadu 214
okręgi
przecinające się 232
rozłączne wewnętrznie 232
rozłączne zewnętrznie 232
styczne wewnętrznie 232
styczne zewnętrznie 232
ostrosłup 78, 240
prawidłowy 78
prosty 78
oś
stożka 114
walca 110
ośmiościan foremny 100, 101

parabola 183
permutacje 14, 15, 247
z powtórzeniami 18
pierwiastek wielomianu 191
płaszczyzna styczna do kuli 119
płaszczyzny
przecinające się 62
równoległe 62
podstawa
graniastosłupa 66
ostrosłupa 78
stożka 114
walca 110
podzbiór 161
pole powierzchni
bocznej graniastosłupa 240
bocznej stożka 114, 241
bocznej walca 110, 241
całkowitej graniastosłupa 66
całkowitej ostrosłupa 78
całkowitej stożka 114, 241
całkowitej walca 110, 241
kuli 120, 240
poprzednik implikacji 136
postać
iloczynowa funkcji kwadratowej 183
kanoniczna funkcji kwadratowej 183
ogólna funkcji kwadratowej 183
potęga o wykładniku
całkowitym 154
wymiernym 154
powierzchnia boczna graniastosłupa 66
prawdopodobieństwo
klasyczne 32
różnicy zdarzeń 42
sumy zdarzeń 41, 42
zdarzenia 32, 40
proporcjonalność odwrotna 198
prosta
prostopadła do płaszczyzny 64
przecinająca płaszczyznę 64
równoległa do płaszczyzny 64
proste
prostopadłe 63, 176
przecinające się 63
równoległe 63, 176
skośne 63
prostopadłościan 67, 240
przekątna
graniastosłupa 71
prostopadłościanu 71, 72
przekrój osiowy
stożka 115
walca 110
przekształcenia wykresu funkcji 170

przestrzeń zdarzeń elementarnych 28
przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi
  układu współrzędnych 170

reguła
  dodawania 25
  mnożenia 10, 11
romboedr 77
rozkład
  prawdopodobieństwa 38
  zmiennej losowej 46
równanie
  kierunkowe prostej 176
  ogólne prostej 176
  okręgu 224
różnica
  ciągu arytmetycznego 215
  zbiorów 161
  zdarzeń 29
rzut prostokątny
  figury na płaszczyznę 64
  punktu na płaszczyznę 64

schemat klasyczny
  prawdopodobieństwa 32
sfera 119
silnia 15
skala podobieństwa brył 124
spodek wysokości
  ostrosłupa 78
  stożka 114
stożek 114, 241
suma
  $n$ początkowych wyrazów ciągu
    arytmetycznego 215
  $n$ początkowych wyrazów ciągu
    geometrycznego 215
  zbiorów 161
  zdarzeń 29
symetralna boku trójkąta 229
sześcian 67, 100, 101

ściana boczna
  graniastosłupa 66
  ostrosłupa 78
średnia
  arytmetyczna 253
  ważona 253

środek
  ciężkości trójkąta 229
  odcinka 222
  okręgu opisanego na trójkącie 229
  okręgu wpisanego w trójkąt 229
środkowa trójkąta 229

talia kart 26
tożsamości trygonometryczne 204
trójmian kwadratowy 183
twierdzenie
  Bézouta 191
  cosinusów 235
  o dwusiecznej kąta w trójkącie 152, 236
  o pierwiastkach całkowitych
    wielomianu 191
  o prostej prostopadłej
    do płaszczyzny 64
  o reszcie 191
  sinusów 235
  Talesa 231
tworząca
  stożka 114
  walca 110

układ równań
  nieoznaczony 176
  oznaczony 176
  sprzeczny 176

walec 110, 241
wariacje
  bez powtórzeń 19, 247
  z powtórzeniami 21, 22, 247
wariancja 253
wartość
  bezwzględna 161
  oczekiwana 47, 252
wielkości odwrotnie proporcjonalne 198
wielokąt foremny 234
wielomian 191
  zerowy 191
wielościan foremny 100
wierzchołek
  graniastosłupa 66
  ostrosłupa 78
  stożka 114
własności logarytmów 210

własności prawdopodobieństwa 40, 247
współczynnik
kierunkowy prostej 176
proporcjonalności odwrotnej 198
wielomianu 191
współrzędne
środka odcinka 222
wierzchołka paraboli 183
wykres funkcji liniowej 176
wynik sprzyjający zdarzeniu 28
wyraz wolny wielomianu 191
wyróżnik trójmianu kwadratowego 183
wysokość
czworościanu foremnego 85
graniastosłupa 66
ostrosłupa 78
stożka 114
walca 110
wzory
na pole trójkąta 229
skróconego mnożenia 154, 159
wzór ogólny ciągu
arytmetycznego 215
geometrycznego 215

zbiory rozłączne 25
zbiór wartości funkcji 167
zdarzenia rozłączne 29
zdarzenie
elementarne 28
losowe 28
niemożliwe 28
pewne 28
przeciwne 29
zmienna losowa 46

## Tablice logarytmów dziesiętnych

| $b$ | $b+0{,}00$ | $b+0{,}01$ | $b+0{,}02$ | $b+0{,}03$ | $b+0{,}04$ | $b+0{,}05$ | $b+0{,}06$ | $b+0{,}07$ | $b+0{,}08$ | $b+0{,}09$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 0,0000 | 0,0043 | 0,0086 | 0,0128 | 0,0170 | 0,0212 | 0,0253 | 0,0294 | 0,0334 | 0,0374 |
| 1,1 | 0,0414 | 0,0453 | 0,0492 | 0,0531 | 0,0569 | 0,0607 | 0,0645 | 0,0682 | 0,0719 | 0,0755 |
| 1,2 | 0,0792 | 0,0828 | 0,0864 | 0,0899 | 0,0934 | 0,0969 | 0,1004 | 0,1038 | 0,1072 | 0,1106 |
| 1,3 | 0,1139 | 0,1173 | 0,1206 | 0,1239 | 0,1271 | 0,1303 | 0,1335 | 0,1367 | 0,1399 | 0,1430 |
| 1,4 | 0,1461 | 0,1492 | 0,1523 | 0,1553 | 0,1584 | 0,1614 | 0,1644 | 0,1673 | 0,1703 | 0,1732 |
| 1,5 | 0,1761 | 0,1790 | 0,1818 | 0,1847 | 0,1875 | 0,1903 | 0,1931 | 0,1959 | 0,1987 | 0,2014 |
| 1,6 | 0,2041 | 0,2068 | 0,2095 | 0,2122 | 0,2148 | 0,2175 | 0,2201 | 0,2227 | 0,2253 | 0,2279 |
| 1,7 | 0,2304 | 0,2330 | 0,2355 | 0,2380 | 0,2405 | 0,2430 | 0,2455 | 0,2480 | 0,2504 | 0,2529 |
| 1,8 | 0,2553 | 0,2577 | 0,2601 | 0,2625 | 0,2648 | 0,2672 | 0,2695 | 0,2718 | 0,2742 | 0,2765 |
| 1,9 | 0,2788 | 0,2810 | 0,2833 | 0,2856 | 0,2878 | 0,2900 | 0,2923 | 0,2945 | 0,2967 | 0,2989 |
| 2,0 | 0,3010 | 0,3032 | 0,3054 | 0,3075 | 0,3096 | 0,3118 | 0,3139 | 0,3160 | 0,3181 | 0,3201 |
| 2,1 | 0,3222 | 0,3243 | 0,3263 | 0,3284 | 0,3304 | 0,3324 | 0,3345 | 0,3365 | 0,3385 | 0,3404 |
| 2,2 | 0,3424 | 0,3444 | 0,3464 | 0,3483 | 0,3502 | 0,3522 | 0,3541 | 0,3560 | 0,3579 | 0,3598 |
| 2,3 | 0,3617 | 0,3636 | 0,3655 | 0,3674 | 0,3692 | 0,3711 | 0,3729 | 0,3747 | 0,3766 | 0,3784 |
| 2,4 | 0,3802 | 0,3820 | 0,3838 | 0,3856 | 0,3874 | 0,3892 | 0,3909 | 0,3927 | 0,3944 | 0,3962 |
| 2,5 | 0,3979 | 0,3997 | 0,4014 | 0,4031 | 0,4048 | 0,4065 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4116 | 0,4133 |
| 2,6 | 0,4150 | 0,4166 | 0,4183 | 0,4200 | 0,4216 | 0,4232 | 0,4249 | 0,4265 | 0,4281 | 0,4298 |
| 2,7 | 0,4314 | 0,4330 | 0,4346 | 0,4362 | 0,4378 | 0,4393 | 0,4409 | 0,4425 | 0,4440 | 0,4456 |
| 2,8 | 0,4472 | 0,4487 | 0,4502 | 0,4518 | 0,4533 | 0,4548 | 0,4564 | 0,4579 | 0,4594 | 0,4609 |
| 2,9 | 0,4624 | 0,4639 | 0,4654 | 0,4669 | 0,4683 | 0,4698 | 0,4713 | 0,4728 | 0,4742 | 0,4757 |
| 3,0 | 0,4771 | 0,4786 | 0,4800 | 0,4814 | 0,4829 | 0,4843 | 0,4857 | 0,4871 | 0,4886 | 0,4900 |
| 3,1 | 0,4914 | 0,4928 | 0,4942 | 0,4955 | 0,4969 | 0,4983 | 0,4997 | 0,5011 | 0,5024 | 0,5038 |
| 3,2 | 0,5051 | 0,5065 | 0,5079 | 0,5092 | 0,5105 | 0,5119 | 0,5132 | 0,5145 | 0,5159 | 0,5172 |
| 3,3 | 0,5185 | 0,5198 | 0,5211 | 0,5224 | 0,5237 | 0,5250 | 0,5263 | 0,5276 | 0,5289 | 0,5302 |
| 3,4 | 0,5315 | 0,5328 | 0,5340 | 0,5353 | 0,5366 | 0,5378 | 0,5391 | 0,5403 | 0,5416 | 0,5428 |
| 3,5 | 0,5441 | 0,5453 | 0,5465 | 0,5478 | 0,5490 | 0,5502 | 0,5514 | 0,5527 | 0,5539 | 0,5551 |
| 3,6 | 0,5563 | 0,5575 | 0,5587 | 0,5599 | 0,5611 | 0,5623 | 0,5635 | 0,5647 | 0,5658 | 0,5670 |
| 3,7 | 0,5682 | 0,5694 | 0,5705 | 0,5717 | 0,5729 | 0,5740 | 0,5752 | 0,5763 | 0,5775 | 0,5786 |
| 3,8 | 0,5798 | 0,5809 | 0,5821 | 0,5832 | 0,5843 | 0,5855 | 0,5866 | 0,5877 | 0,5888 | 0,5899 |
| 3,9 | 0,5911 | 0,5922 | 0,5933 | 0,5944 | 0,5955 | 0,5966 | 0,5977 | 0,5988 | 0,5999 | 0,6010 |
| 4,0 | 0,6021 | 0,6031 | 0,6042 | 0,6053 | 0,6064 | 0,6075 | 0,6085 | 0,6096 | 0,6107 | 0,6117 |
| 4,1 | 0,6128 | 0,6138 | 0,6149 | 0,6160 | 0,6170 | 0,6180 | 0,6191 | 0,6201 | 0,6212 | 0,6222 |
| 4,2 | 0,6232 | 0,6243 | 0,6253 | 0,6263 | 0,6274 | 0,6284 | 0,6294 | 0,6304 | 0,6314 | 0,6325 |
| 4,3 | 0,6335 | 0,6345 | 0,6355 | 0,6365 | 0,6375 | 0,6385 | 0,6395 | 0,6405 | 0,6415 | 0,6425 |
| 4,4 | 0,6435 | 0,6444 | 0,6454 | 0,6464 | 0,6474 | 0,6484 | 0,6493 | 0,6503 | 0,6513 | 0,6522 |
| 4,5 | 0,6532 | 0,6542 | 0,6551 | 0,6561 | 0,6571 | 0,6580 | 0,6590 | 0,6599 | 0,6609 | 0,6618 |
| 4,6 | 0,6628 | 0,6637 | 0,6646 | 0,6656 | 0,6665 | 0,6675 | 0,6684 | 0,6693 | 0,6702 | 0,6712 |
| 4,7 | 0,6721 | 0,6730 | 0,6739 | 0,6749 | 0,6758 | 0,6767 | 0,6776 | 0,6785 | 0,6794 | 0,6803 |
| 4,8 | 0,6812 | 0,6821 | 0,6830 | 0,6839 | 0,6848 | 0,6857 | 0,6866 | 0,6875 | 0,6884 | 0,6893 |
| 4,9 | 0,6902 | 0,6911 | 0,6920 | 0,6928 | 0,6937 | 0,6946 | 0,6955 | 0,6964 | 0,6972 | 0,6981 |
| 5,0 | 0,6990 | 0,6998 | 0,7007 | 0,7016 | 0,7024 | 0,7033 | 0,7042 | 0,7050 | 0,7059 | 0,7067 |
| 5,1 | 0,7076 | 0,7084 | 0,7093 | 0,7101 | 0,7110 | 0,7118 | 0,7126 | 0,7135 | 0,7143 | 0,7152 |
| 5,2 | 0,7160 | 0,7168 | 0,7177 | 0,7185 | 0,7193 | 0,7202 | 0,7210 | 0,7218 | 0,7226 | 0,7235 |
| 5,3 | 0,7243 | 0,7251 | 0,7259 | 0,7267 | 0,7275 | 0,7284 | 0,7292 | 0,7300 | 0,7308 | 0,7316 |

| $b$ | $b+0{,}00$ | $b+0{,}01$ | $b+0{,}02$ | $b+0{,}03$ | $b+0{,}04$ | $b+0{,}05$ | $b+0{,}06$ | $b+0{,}07$ | $b+0{,}08$ | $b+0{,}09$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,4 | 0,7324 | 0,7332 | 0,7340 | 0,7348 | 0,7356 | 0,7364 | 0,7372 | 0,7380 | 0,7388 | 0,7396 |
| 5,5 | 0,7404 | 0,7412 | 0,7419 | 0,7427 | 0,7435 | 0,7443 | 0,7451 | 0,7459 | 0,7466 | 0,7474 |
| 5,6 | 0,7482 | 0,7490 | 0,7497 | 0,7505 | 0,7513 | 0,7520 | 0,7528 | 0,7536 | 0,7543 | 0,7551 |
| 5,7 | 0,7559 | 0,7566 | 0,7574 | 0,7582 | 0,7589 | 0,7597 | 0,7604 | 0,7612 | 0,7619 | 0,7627 |
| 5,8 | 0,7634 | 0,7642 | 0,7649 | 0,7657 | 0,7664 | 0,7672 | 0,7679 | 0,7686 | 0,7694 | 0,7701 |
| 5,9 | 0,7709 | 0,7716 | 0,7723 | 0,7731 | 0,7738 | 0,7745 | 0,7752 | 0,7760 | 0,7767 | 0,7774 |
| 6,0 | 0,7782 | 0,7789 | 0,7796 | 0,7803 | 0,7810 | 0,7818 | 0,7825 | 0,7832 | 0,7839 | 0,7846 |
| 6,1 | 0,7853 | 0,7860 | 0,7868 | 0,7875 | 0,7882 | 0,7889 | 0,7896 | 0,7903 | 0,7910 | 0,7917 |
| 6,2 | 0,7924 | 0,7931 | 0,7938 | 0,7945 | 0,7952 | 0,7959 | 0,7966 | 0,7973 | 0,7980 | 0,7987 |
| 6,3 | 0,7993 | 0,8000 | 0,8007 | 0,8014 | 0,8021 | 0,8028 | 0,8035 | 0,8041 | 0,8048 | 0,8055 |
| 6,4 | 0,8062 | 0,8069 | 0,8075 | 0,8082 | 0,8089 | 0,8096 | 0,8102 | 0,8109 | 0,8116 | 0,8122 |
| 6,5 | 0,8129 | 0,8136 | 0,8142 | 0,8149 | 0,8156 | 0,8162 | 0,8169 | 0,8176 | 0,8182 | 0,8189 |
| 6,6 | 0,8195 | 0,8202 | 0,8209 | 0,8215 | 0,8222 | 0,8228 | 0,8235 | 0,8241 | 0,8248 | 0,8254 |
| 6,7 | 0,8261 | 0,8267 | 0,8274 | 0,8280 | 0,8287 | 0,8293 | 0,8299 | 0,8306 | 0,8312 | 0,8319 |
| 6,8 | 0,8325 | 0,8331 | 0,8338 | 0,8344 | 0,8351 | 0,8357 | 0,8363 | 0,8370 | 0,8376 | 0,8382 |
| 6,9 | 0,8388 | 0,8395 | 0,8401 | 0,8407 | 0,8414 | 0,8420 | 0,8426 | 0,8432 | 0,8439 | 0,8445 |
| 7,0 | 0,8451 | 0,8457 | 0,8463 | 0,8470 | 0,8476 | 0,8482 | 0,8488 | 0,8494 | 0,8500 | 0,8506 |
| 7,1 | 0,8513 | 0,8519 | 0,8525 | 0,8531 | 0,8537 | 0,8543 | 0,8549 | 0,8555 | 0,8561 | 0,8567 |
| 7,2 | 0,8573 | 0,8579 | 0,8585 | 0,8591 | 0,8597 | 0,8603 | 0,8609 | 0,8615 | 0,8621 | 0,8627 |
| 7,3 | 0,8633 | 0,8639 | 0,8645 | 0,8651 | 0,8657 | 0,8663 | 0,8669 | 0,8675 | 0,8681 | 0,8686 |
| 7,4 | 0,8692 | 0,8698 | 0,8704 | 0,8710 | 0,8716 | 0,8722 | 0,8727 | 0,8733 | 0,8739 | 0,8745 |
| 7,5 | 0,8751 | 0,8756 | 0,8762 | 0,8768 | 0,8774 | 0,8779 | 0,8785 | 0,8791 | 0,8797 | 0,8802 |
| 7,6 | 0,8808 | 0,8814 | 0,8820 | 0,8825 | 0,8831 | 0,8837 | 0,8842 | 0,8848 | 0,8854 | 0,8859 |
| 7,7 | 0,8865 | 0,8871 | 0,8876 | 0,8882 | 0,8887 | 0,8893 | 0,8899 | 0,8904 | 0,8910 | 0,8915 |
| 7,8 | 0,8921 | 0,8927 | 0,8932 | 0,8938 | 0,8943 | 0,8949 | 0,8954 | 0,8960 | 0,8965 | 0,8971 |
| 7,9 | 0,8976 | 0,8982 | 0,8987 | 0,8993 | 0,8998 | 0,9004 | 0,9009 | 0,9015 | 0,9020 | 0,9025 |
| 8,0 | 0,9031 | 0,9036 | 0,9042 | 0,9047 | 0,9053 | 0,9058 | 0,9063 | 0,9069 | 0,9074 | 0,9079 |
| 8,1 | 0,9085 | 0,9090 | 0,9096 | 0,9101 | 0,9106 | 0,9112 | 0,9117 | 0,9122 | 0,9128 | 0,9133 |
| 8,2 | 0,9138 | 0,9143 | 0,9149 | 0,9154 | 0,9159 | 0,9165 | 0,9170 | 0,9175 | 0,9180 | 0,9186 |
| 8,3 | 0,9191 | 0,9196 | 0,9201 | 0,9206 | 0,9212 | 0,9217 | 0,9222 | 0,9227 | 0,9232 | 0,9238 |
| 8,4 | 0,9243 | 0,9248 | 0,9253 | 0,9258 | 0,9263 | 0,9269 | 0,9274 | 0,9279 | 0,9284 | 0,9289 |
| 8,5 | 0,9294 | 0,9299 | 0,9304 | 0,9309 | 0,9315 | 0,9320 | 0,9325 | 0,9330 | 0,9335 | 0,9340 |
| 8,6 | 0,9345 | 0,9350 | 0,9355 | 0,9360 | 0,9365 | 0,9370 | 0,9375 | 0,9380 | 0,9385 | 0,9390 |
| 8,7 | 0,9395 | 0,9400 | 0,9405 | 0,9410 | 0,9415 | 0,9420 | 0,9425 | 0,9430 | 0,9435 | 0,9440 |
| 8,8 | 0,9445 | 0,9450 | 0,9455 | 0,9460 | 0,9465 | 0,9469 | 0,9474 | 0,9479 | 0,9484 | 0,9489 |
| 8,9 | 0,9494 | 0,9499 | 0,9504 | 0,9509 | 0,9513 | 0,9518 | 0,9523 | 0,9528 | 0,9533 | 0,9538 |
| 9,0 | 0,9542 | 0,9547 | 0,9552 | 0,9557 | 0,9562 | 0,9566 | 0,9571 | 0,9576 | 0,9581 | 0,9586 |
| 9,1 | 0,9590 | 0,9595 | 0,9600 | 0,9605 | 0,9609 | 0,9614 | 0,9619 | 0,9624 | 0,9628 | 0,9633 |
| 9,2 | 0,9638 | 0,9643 | 0,9647 | 0,9652 | 0,9657 | 0,9661 | 0,9666 | 0,9671 | 0,9675 | 0,9680 |
| 9,3 | 0,9685 | 0,9689 | 0,9694 | 0,9699 | 0,9703 | 0,9708 | 0,9713 | 0,9717 | 0,9722 | 0,9727 |
| 9,4 | 0,9731 | 0,9736 | 0,9741 | 0,9745 | 0,9750 | 0,9754 | 0,9759 | 0,9763 | 0,9768 | 0,9773 |
| 9,5 | 0,9777 | 0,9782 | 0,9786 | 0,9791 | 0,9795 | 0,9800 | 0,9805 | 0,9809 | 0,9814 | 0,9818 |
| 9,6 | 0,9823 | 0,9827 | 0,9832 | 0,9836 | 0,9841 | 0,9845 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9859 | 0,9863 |
| 9,7 | 0,9868 | 0,9872 | 0,9877 | 0,9881 | 0,9886 | 0,9890 | 0,9894 | 0,9899 | 0,9903 | 0,9908 |
| 9,8 | 0,9912 | 0,9917 | 0,9921 | 0,9926 | 0,9930 | 0,9934 | 0,9939 | 0,9943 | 0,9948 | 0,9952 |
| 9,9 | 0,9956 | 0,9961 | 0,9965 | 0,9969 | 0,9974 | 0,9978 | 0,9983 | 0,9987 | 0,9991 | 0,9996 |

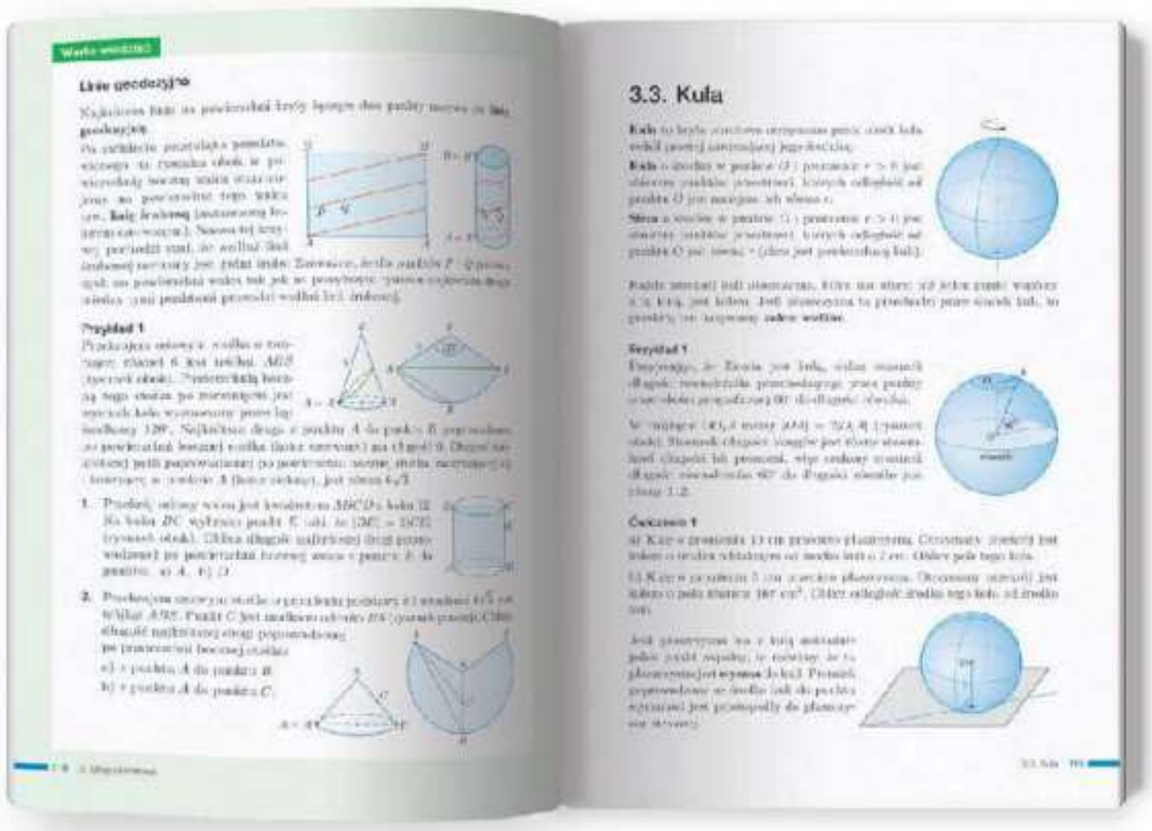
## Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

| $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | – | 45° | 0,7071 | 0,7071 | 1,0000 | 1,0000 |
| 1° | 0,0175 | 0,9998 | 0,0175 | 57,290 | 46° | 0,7193 | 0,6947 | 1,0355 | 0,9657 |
| 2° | 0,0349 | 0,9994 | 0,0349 | 28,636 | 47° | 0,7314 | 0,6820 | 1,0724 | 0,9325 |
| 3° | 0,0523 | 0,9986 | 0,0524 | 19,081 | 48° | 0,7431 | 0,6691 | 1,1106 | 0,9004 |
| 4° | 0,0698 | 0,9976 | 0,0699 | 14,301 | 49° | 0,7547 | 0,6561 | 1,1504 | 0,8693 |
| 5° | 0,0872 | 0,9962 | 0,0875 | 11,430 | 50° | 0,7660 | 0,6428 | 1,1918 | 0,8391 |
| 6° | 0,1045 | 0,9945 | 0,1051 | 9,5144 | 51° | 0,7771 | 0,6293 | 1,2349 | 0,8098 |
| 7° | 0,1219 | 0,9925 | 0,1228 | 8,1443 | 52° | 0,7880 | 0,6157 | 1,2799 | 0,7813 |
| 8° | 0,1392 | 0,9903 | 0,1405 | 7,1154 | 53° | 0,7986 | 0,6018 | 1,3270 | 0,7536 |
| 9° | 0,1564 | 0,9877 | 0,1584 | 6,3138 | 54° | 0,8090 | 0,5878 | 1,3764 | 0,7265 |
| 10° | 0,1736 | 0,9848 | 0,1763 | 5,6713 | 55° | 0,8192 | 0,5736 | 1,4281 | 0,7002 |
| 11° | 0,1908 | 0,9816 | 0,1944 | 5,1446 | 56° | 0,8290 | 0,5592 | 1,4826 | 0,6745 |
| 12° | 0,2079 | 0,9781 | 0,2126 | 4,7046 | 57° | 0,8387 | 0,5446 | 1,5399 | 0,6494 |
| 13° | 0,2250 | 0,9744 | 0,2309 | 4,3315 | 58° | 0,8480 | 0,5299 | 1,6003 | 0,6249 |
| 14° | 0,2419 | 0,9703 | 0,2493 | 4,0108 | 59° | 0,8572 | 0,5150 | 1,6643 | 0,6009 |
| 15° | 0,2588 | 0,9659 | 0,2679 | 3,7321 | 60° | 0,8660 | 0,5000 | 1,7321 | 0,5774 |
| 16° | 0,2756 | 0,9613 | 0,2867 | 3,4874 | 61° | 0,8746 | 0,4848 | 1,8040 | 0,5543 |
| 17° | 0,2924 | 0,9563 | 0,3057 | 3,2709 | 62° | 0,8829 | 0,4695 | 1,8807 | 0,5317 |
| 18° | 0,3090 | 0,9511 | 0,3249 | 3,0777 | 63° | 0,8910 | 0,4540 | 1,9626 | 0,5095 |
| 19° | 0,3256 | 0,9455 | 0,3443 | 2,9042 | 64° | 0,8988 | 0,4384 | 2,0503 | 0,4877 |
| 20° | 0,3420 | 0,9397 | 0,3640 | 2,7475 | 65° | 0,9063 | 0,4226 | 2,1445 | 0,4663 |
| 21° | 0,3584 | 0,9336 | 0,3839 | 2,6051 | 66° | 0,9135 | 0,4067 | 2,2460 | 0,4452 |
| 22° | 0,3746 | 0,9272 | 0,4040 | 2,4751 | 67° | 0,9205 | 0,3907 | 2,3559 | 0,4245 |
| 23° | 0,3907 | 0,9205 | 0,4245 | 2,3559 | 68° | 0,9272 | 0,3746 | 2,4751 | 0,4040 |
| 24° | 0,4067 | 0,9135 | 0,4452 | 2,2460 | 69° | 0,9336 | 0,3584 | 2,6051 | 0,3839 |
| 25° | 0,4226 | 0,9063 | 0,4663 | 2,1445 | 70° | 0,9397 | 0,3420 | 2,7475 | 0,3640 |
| 26° | 0,4384 | 0,8988 | 0,4877 | 2,0503 | 71° | 0,9455 | 0,3256 | 2,9042 | 0,3443 |
| 27° | 0,4540 | 0,8910 | 0,5095 | 1,9626 | 72° | 0,9511 | 0,3090 | 3,0777 | 0,3249 |
| 28° | 0,4695 | 0,8829 | 0,5317 | 1,8807 | 73° | 0,9563 | 0,2924 | 3,2709 | 0,3057 |
| 29° | 0,4848 | 0,8746 | 0,5543 | 1,8040 | 74° | 0,9613 | 0,2756 | 3,4874 | 0,2867 |
| 30° | 0,5000 | 0,8660 | 0,5774 | 1,7321 | 75° | 0,9659 | 0,2588 | 3,7321 | 0,2679 |
| 31° | 0,5150 | 0,8572 | 0,6009 | 1,6643 | 76° | 0,9703 | 0,2419 | 4,0108 | 0,2493 |
| 32° | 0,5299 | 0,8480 | 0,6249 | 1,6003 | 77° | 0,9744 | 0,2250 | 4,3315 | 0,2309 |
| 33° | 0,5446 | 0,8387 | 0,6494 | 1,5399 | 78° | 0,9781 | 0,2079 | 4,7046 | 0,2126 |
| 34° | 0,5592 | 0,8290 | 0,6745 | 1,4826 | 79° | 0,9816 | 0,1908 | 5,1446 | 0,1944 |
| 35° | 0,5736 | 0,8192 | 0,7002 | 1,4281 | 80° | 0,9848 | 0,1736 | 5,6713 | 0,1763 |
| 36° | 0,5878 | 0,8090 | 0,7265 | 1,3764 | 81° | 0,9877 | 0,1564 | 6,3138 | 0,1584 |
| 37° | 0,6018 | 0,7986 | 0,7536 | 1,3270 | 82° | 0,9903 | 0,1392 | 7,1154 | 0,1405 |
| 38° | 0,6157 | 0,7880 | 0,7813 | 1,2799 | 83° | 0,9925 | 0,1219 | 8,1443 | 0,1228 |
| 39° | 0,6293 | 0,7771 | 0,8098 | 1,2349 | 84° | 0,9945 | 0,1045 | 9,5144 | 0,1051 |
| 40° | 0,6428 | 0,7660 | 0,8391 | 1,1918 | 85° | 0,9962 | 0,0872 | 11,430 | 0,0875 |
| 41° | 0,6561 | 0,7547 | 0,8693 | 1,1504 | 86° | 0,9976 | 0,0698 | 14,301 | 0,0699 |
| 42° | 0,6691 | 0,7431 | 0,9004 | 1,1106 | 87° | 0,9986 | 0,0523 | 19,081 | 0,0524 |
| 43° | 0,6820 | 0,7314 | 0,9325 | 1,0724 | 88° | 0,9994 | 0,0349 | 28,636 | 0,0349 |
| 44° | 0,6947 | 0,7193 | 0,9657 | 1,0355 | 89° | 0,9998 | 0,0175 | 57,290 | 0,0175 |

Twoje mocne strony

# MATeMAtyka

Podręcznik *MATeMAtyka 4* do zakresu podstawowego w spójny i przystępny sposób wprowadza ucznia w zagadnienia matematyczne.




## Czytelny układ

Przejrzyste przedstawienie nowych treści, przykłady, ćwiczenia i zadania.

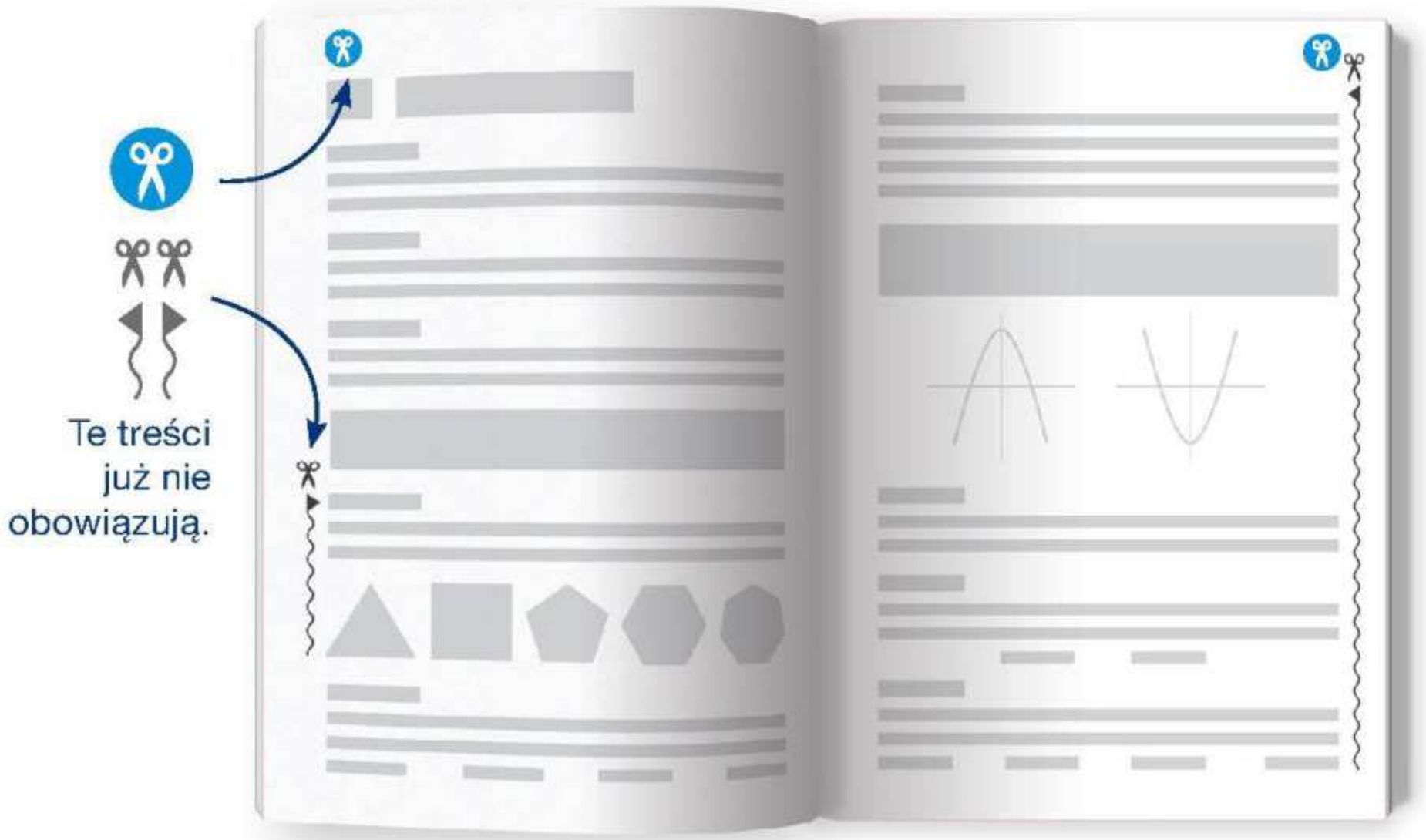
## Przydatne sekcje

*Warto powtórzyć* pomagają przygotować się do wybranych lekcji.
*Warto wiedzieć* rozszerzają treści z lekcji.

## Wiesz, umiesz, zdasz

Ostatni rozdział podręcznika zawiera przekrojowe powtórzenie materiału z całego cyklu nauczania.

## W podręczniku znajdziesz oznaczenia treści, które od września 2024 r. nie są już wymagane.




Niebieska ikona na górze strony wskazuje, że na tej stronie znajdują się treści, które nie są wymagane – oznaczono je szarą ikoną i falką.

Nowa Era Sp. z o.o.
www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5112-7
9 788326 751127