Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA 4

Podręcznik do liceów i techników

ZAKRES ROZSZERZONY

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr. hab. Jacka Jędrzejewskiego, dr. Witolda Pająka, mgr. Klemensa Stróżyńskiego.
Zakres kształcenia: rozszerzony
Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: szkoły ponadpodstawowe
Rok dopuszczenia: 2022

Numer dopuszczenia/numer ewidencyjny w wykazie: 979/4/2022

Podręcznik zgodny z programem „Matematyka. Solidnie od podstaw. Program nauczania w liceach i w technikach. Zakres rozszerzony"

Kod dostępu do cyfrowego odzwierciedlenia podręcznika w wersji papierowej znajduje się na końcu książki.

Projekt okładki i strony tytułowej
Bożena Sawicka

Projekt graficzny, rysunki, skład i łamanie
Anna Ugniewska

Redakcja
Bernardeta Milewska

Fotografia na okładce: *The existence of triangles*
Autor: Olga Kamenskaya
Międzynarodowy Konkurs Fotograficzny „Matematyka w obiektywie"
www.mwo.usz.edu.pl

© Copyright by Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
Warszawa 2022 r.

Wydanie II, Warszawa 2024 r.

Druk i oprawa
Druk-Serwis Sp. z o.o.
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
pazdro@pazdro.com.pl
www.pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-223-1

Spis treści

Wstęp 5

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie 7
Funkcja wykładnicza i jej własności 16
Przekształcenia wykresów funkcji wykładniczych 25
Równania wykładnicze 33
Nierówności wykładnicze 41
Zastosowanie własności funkcji wykładniczej w zadaniach 49
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1. 54

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm – powtórzenie wiadomości 57
Funkcja logarytmiczna – powtórzenie i uzupełnienie wiadomości 63
Przekształcenia wykresów funkcji logarytmicznych 71
Równania logarytmiczne 79
Nierówności logarytmiczne 86
Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym 93
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2. 100

3. Elementy statystyki

Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej 104
Średnia z próby 109
Mediana z próby i moda z próby. Skala centylowa 114
Wariancja i odchylenie standardowe 123
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3. 130

4. Rachunek prawdopodobieństwa

Kombinatoryka – powtórzenie wiadomości 133
Doświadczenie losowe 145
Zdarzenia. Działania na zdarzeniach 150
Określenie prawdopodobieństwa 155
Prawdopodobieństwo klasyczne 162
Doświadczenia losowe wieloetapowe 173
Prawdopodobieństwo warunkowe 181
Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa 188
Niezależność zdarzeń 195
Schemat Bernoulliego 201
Zmienna losowa. Wartość oczekiwana zmiennej losowej 208
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4. 216

5. Geometria przestrzenna. Wielościany

Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne 219
Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni 229
Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę 237
Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych 246
Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny 252
Graniastosłupy 256
Ostrosłupy 266
Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu 279
Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów 284
Przekroje wielościanów – konstrukcje 295
Przekroje wielościanów – zadania 299
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5. 308

6. Geometria przestrzenna. Bryły obrotowe

Walec 311
Stożek 316
Kula i sfera 322
Bryły obrotowe – zadania różne 326
Podobieństwo figur w przestrzeni 331
Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej 337
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6. 346

Skorowidz ważniejszych terminów 348

Odpowiedzi do zadań 349

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych 384

Ważne od 1.09.2024 Ważne od 1.09.2024 Ważne od 1.09.2024 Ważne od 1.09.2024

Ważne **Kolorem szarym oznaczono treści, które – zgodnie z rozporządzeniem z dnia 28 czerwca 2024r. – są nieobowiązujące.** **Ważne**

Ważne od 1.09.2024 Ważne od 1.09.2024 Ważne od 1.09.2024 Ważne od 1.09.2024

Wstęp

Klasę czwartą rozpoczynamy od powtórzenia i uzupełnienia wiadomości dotyczących działań na potęgach i funkcji wykładniczej. Następnie przypominamy i poszerzamy podstawowe zagadnienia dotyczące logarytmów i funkcji logarytmicznej. Kolejny rozdział poświęcony jest elementom statystyki. Rozdział czwarty zawiera powtórzenie wiadomości z kombinatoryki oraz podstawy rachunku prawdopodobieństwa. Ostatnie dwa rozdziały obejmują zagadnienia z zakresu geometrii przestrzennej – w rozdziale piątym omawiamy własności wielościanów, a w rozdziale szóstym własności brył obrotowych. W rozdziale piątym jeden z tematów poświęcony jest własnościom rzutu równoległego na płaszczyznę. Jest to temat dodatkowy, ale bardzo ułatwiający poprawne rysowanie figur przestrzennych.

Podobnie jak w klasach poprzednich, ważne definicje i twierdzenia zostały oznaczone kolorowymi ramkami z jasnoszarym tłem. Inne istotne informacje, na które warto zwrócić uwagę, zostały oznaczone jasnobrązowym tłem. Głębsze zrozumienie omawianych zagadnień umożliwiają rozwiązane przykłady oraz ćwiczenia przeznaczone do samodzielnego rozwiązania. Każdy temat kończy się zestawem zadań, zatytułowanym *Sprawdź, czy rozumiesz*. Na końcu każdego rozdziału znajdują się zadania powtórzeniowe zatytułowane *Sprawdź, czy umiesz*. Wszystkie zadania na dowodzenie zostały oznaczone symbolem $\mathcal{D}$. Na końcu podręcznika znajdują się odpowiedzi do większości zadań.

Życzymy sukcesów w uczeniu się matematyki!

Autorzy

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie

Definicja 1. *Potęga o wykładniku naturalnym*
Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą, zaś n – dowolną liczbą naturalną. Wówczas:

- $a^1 = a$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$, jeśli $n > 1$
- $a^0 = 1$, jeśli $a \neq 0$

Ćwiczenie 1. Uporządkuj rosnąco podane liczby:

$$3^4,\ \left(-1\frac{2}{5}\right)^2,\ (-2)^5,\ \left(3^{-\frac{1}{5}}+1\right)^0,\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}+3}\right)^1,\ \left(\sqrt{3}-1\right)^3$$

Definicja 2. *Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym*
Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera, zaś n – dowolną liczbą naturalną dodatnią. Wówczas:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Ćwiczenie 2. Oblicz:

a) 5^{-4} b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$ c) $0{,}01^{-2}$ d) $\left(\sqrt{2}\right)^{-4}$ e) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ f) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^{-2}$

Definicja 3. *Potęga o wykładniku wymiernym*
Niech $n \in \boldsymbol{N} - \{0, 1\}$ oraz $m \in \boldsymbol{N}_+$. Wówczas:

1) $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, jeśli $a \geqslant 0$ 2) $a^{-\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^m$, jeśli $a > 0$

Przykład 1.

Obliczymy potęgi:

a) $27^{-\frac{1}{3}}$ b) $16^{0,75}$ c) $6,25^{-\frac{5}{2}}$

Ad a) Obliczamy:

$$27^{-\frac{1}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^1 = \frac{1}{3}$$

Ad b) Wykładnik potęgi przedstawiamy w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

$$16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Ad c) Podstawę danej potęgi możemy przedstawić w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

$$6,25^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{25}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{\frac{25}{4}}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

Ćwiczenie 3. Porównaj liczby x i y.

a) $x = 125^{\frac{2}{3}}$, $y = 0,04^{-1}$ b) $x = 81^{-0,75}$, $y = \left(3\sqrt{3}\right)^{-2}$ c) $x = 64^{\frac{4}{3}}$, $y = 0,25^{-4,5}$

Wiesz już, że prawdziwe jest następujące twierdzenie dotyczące działań na potęgach.

Twierdzenie 1. *Własności potęg o wykładnikach rzeczywistych*

Jeśli a, b są dodatnimi liczbami rzeczywistymi oraz x, y – dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2) $a^x : a^y = a^{x-y}$
3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
5) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Ćwiczenie 4. Oblicz wartości danych wyrażeń, korzystając z twierdzenia 1.

a) $7^{1,5} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{2}} : 125^{\frac{1}{6}}$ c) $\left(121^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$ d) $\sqrt[3]{3} \cdot 9^{\frac{1}{3}}$

Poniższe przykłady pomogą Ci powtórzyć i utrwalić wcześniej zdobyte umiejętności.

Przykład 2.

Obliczymy, jakim procentem liczby $\frac{15\cdot 5^5+29\cdot 5^6}{10^5}$ jest liczba $\frac{3^{-7}+\frac{2}{3}\cdot 3^{-6}}{3^{-5}}$.

Oznaczmy pierwszą liczbę przez a, zaś drugą przez b. Obliczamy:

$$a=\frac{15\cdot 5^5+29\cdot 5^6}{10^5}=\frac{3\cdot 5\cdot 5^5+29\cdot 5^6}{(2\cdot 5)^5}=\frac{3\cdot 5^6+29\cdot 5^6}{2^5\cdot 5^5}=\frac{32\cdot 5^6}{32\cdot 5^5}=5$$

$$b=\frac{3^{-7}+\frac{2}{3}\cdot 3^{-6}}{3^{-5}}=\frac{3^{-6}\cdot\left(3^{-1}+\frac{2}{3}\right)}{3^{-5}}=\frac{3^{-6}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)}{3^{-5}}=\frac{3^{-6}}{3^{-5}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

Otrzymaliśmy $a=5$, $b=\frac{1}{3}$. Wówczas

$$\frac{b}{a}\cdot 100\%=\frac{\frac{1}{3}}{5}\cdot 100\%=\frac{1}{15}\cdot 100\%=6\frac{2}{3}\%$$

Liczba b stanowi $6\frac{2}{3}\%$ liczby a.

Ćwiczenie 5. Przedstaw liczbę $\frac{\frac{1}{18}\cdot 6^4+\frac{4}{9}\cdot 3^4}{2\cdot 3^{-7}+3\frac{1}{3}\cdot 9^{-3}}$ w postaci potęgi o podstawie 3.

Przykład 3.

Przybliżenie dziesiętne liczby $10^{0,25}$ jest równe 1,778279. Wyznaczymy przybliżenie dziesiętne liczby $10^{-\frac{3}{4}}$ z dokładnością do siódmego miejsca po przecinku.

Mamy:

$$10^{-\frac{3}{4}}=10^{-1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{10}\cdot 10^{0,25}\approx\frac{1}{10}\cdot 1,778279=0,1778279$$

Przybliżenie dziesiętne liczby $10^{-\frac{3}{4}}$ jest równe 0,1778279.

Ćwiczenie 6. Przybliżenie dziesiętne liczby $10^{-\frac{4}{5}}$ jest równe 0,158489. Oblicz przybliżenie dziesiętne liczby $10^{1,2}$ w zaokrągleniu do trzeciego miejsca po przecinku.

Przykład 4.

Zapiszemy liczbę $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}}$ w postaci potęgi o podstawie 5.

Obliczamy, stosując prawa działań na potęgach:

$$\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}}=\sqrt{5\sqrt[3]{5\cdot 5^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{5\sqrt[3]{5^{1+\frac{1}{2}}}}=\sqrt{5\cdot\sqrt[3]{5^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{5\cdot\left(5^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\sqrt{5\cdot 5^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}}=\sqrt{5^1\cdot 5^{\frac{1}{2}}}=\left(5^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{4}}$$

Liczba $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}}$ jest równa $5^{\frac{3}{4}}$

Ćwiczenie 7. Przedstaw liczbę $\sqrt[3]{81\cdot\sqrt[4]{27}}$ w postaci potęgi o podstawie 3.

Przykład 5.

Wykażemy, że liczba $\left(4-2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(4+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ jest liczbą całkowitą.

Zamieniamy potęgi na pierwiastki. Wówczas dana liczba przyjmuje postać

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Zauważ, że jest to liczba ujemna, bowiem

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}<\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Oznaczmy daną liczbę przez x. Obliczymy kwadrat tej liczby, korzystając z dwóch wzorów skróconego mnożenia: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ oraz $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$x^2=\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=4-2\sqrt{3}-2\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}+4+2\sqrt{3}=$$

$$=8-2\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=8-2\sqrt{16-12}=8-2\sqrt{4}=8-4=4$$

Otrzymaliśmy, że liczba ujemna x spełnia równanie $x^2=4$. Zatem $x=-2$.

Liczba $\left(4-2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(4+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ jest równa -2, jest więc liczbą całkowitą.

Ćwiczenie 8. Porównaj liczby:

a) $3^{12}-2^{18}$ oraz 3^6+2^9

b) $\left(4^{\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ oraz $\left[\left(3-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{3}}$

Przykład 6.

Porównamy liczby $3^{\sqrt{2}}$ oraz $2^{\sqrt{3}}$.

Liczby $3^{\sqrt{2}}$ i $2^{\sqrt{3}}$ są dodatnie. Podnosimy obie liczby do potęgi $\sqrt{3}$ i otrzymujemy:

$$\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}=3^{\sqrt{6}} \quad \text{oraz} \quad \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=2^3=8$$

Wiemy, że

$$\sqrt{6}>\sqrt{4}, \text{ czyli } \sqrt{6}>2$$

Zatem

$$3^{\sqrt{6}}>3^2>8$$

a to znaczy, że

$$\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}>\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$$

stąd

$$3^{\sqrt{2}}>2^{\sqrt{3}}$$

Liczba $3^{\sqrt{2}}$ jest większa od liczby $2^{\sqrt{3}}$.

Przykład 7.

Doprowadzimy wyrażenie $\left(\frac{4}{x-27}-\frac{x^{\frac{1}{3}}-3}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9}\right)\cdot\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-1}$ do najprostszej postaci, wiedząc, że $x\in\langle 0,1)\cup(1,27)\cup(27,+\infty)$.

Wspólnym mianownikiem ułamków w nawiasie może być wyrażenie $x-27$, bowiem

$$x-27=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3-3^3=\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9\right)$$

Wówczas $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-3}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9}=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^2}{x-27}$

Teraz przekształcamy dane wyrażenie do najprostszej postaci:

$$\left(\frac{4}{x-27}-\frac{x^{\frac{1}{3}}-3}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9}\right)\cdot\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-1}=\left(\frac{4}{x-27}-\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^2}{x-27}\right)\cdot\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-1}=$$

$$=\frac{4-\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^2}{x-27}\cdot\frac{x-27}{x^{\frac{1}{3}}-1}=\frac{4-\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^2}{x^{\frac{1}{3}}-1}=\frac{2^2-\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^2}{x^{\frac{1}{3}}-1}=$$

$$=\frac{\left(2-x^{\frac{1}{3}}+3\right)\left(2+x^{\frac{1}{3}}-3\right)}{x^{\frac{1}{3}}-1}=\frac{\left(5-x^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)}=5-x^{\frac{1}{3}}$$

Dane wyrażenie ma postać $5-\sqrt[3]{x}$, gdzie $x\in\langle 0,1)\cup(1,27)\cup(27,+\infty)$.

Przykład 8.

Wykażemy, że liczba $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ jest równa 3.

Oznaczamy daną liczbę jako x. Otrzymujemy równość:

$$x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\,,\qquad \text{gdzie } x>0.$$

Podnosimy obie strony otrzymanej równości do sześcianu. Następnie po prawej stronie stosujemy wzór skróconego mnożenia $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Mamy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^3$$

$$x^3=9+\sqrt{80}+3\cdot\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+3\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{\left(9-\sqrt{80}\right)^2}+9-\sqrt{80}$$

Teraz korzystamy z prawa działań na pierwiastkach $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$ i otrzymujemy:

$$x^3=18+3\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)^2\left(9-\sqrt{80}\right)}+3\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)^2}$$

Zauważ, że wyrażenia pod pierwiastkami możemy zapisać w prostszej postaci, jeśli skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$\left(9+\sqrt{80}\right)^2\left(9-\sqrt{80}\right)=\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)=\left(9+\sqrt{80}\right)(81-80)=9+\sqrt{80}$$

Podobnie

$$\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)^2 = 9-\sqrt{80}$$ sprawdź!

Otrzymujemy równanie:

$$x^3 = 18+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+3\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

$$x^3 = 18+3\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)$$

Ale $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = x$, więc równanie przyjmuje postać

$x^3 = 18 + 3x$

$x^3 - 3x - 18 = 0$

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki metodą grupowania wyrazów.

$x^3 - 9x + 6x - 18 = 0$

$x(x^2 - 9) + 6(x - 3) = 0$

$x(x-3)(x+3) + 6(x-3) = 0$

$(x-3)(x^2 + 3x + 6) = 0$

$x - 3 = 0$ lub $x^2 + 3x + 6 = 0$

$x = 3$ $\Delta < 0$, równanie sprzeczne

Jedynym rozwiązaniem otrzymanego równania jest liczba 3, $3 > 0$. Zatem liczba mająca postać $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ jest równa 3, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz:

a) $(-0{,}4)^3$ b) $\left(2\frac{3}{5}\right)^{-1}$ c) $\left(2-\sqrt{5}\right)^{-2}$ d) $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-2}$

e) $0{,}027^{\frac{1}{3}}$ f) $\left(\frac{81}{625}\right)^{\frac{3}{4}}$ g) $\left(1\frac{7}{9}\right)^{-1{,}5}$ h) $\left(3\frac{13}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$

i) $\left(7\frac{19}{32}\right)^{-\frac{2}{5}}$ j) $\left(3^2+4^2\right)^{0{,}5}$ k) $\left(6^{-2}+8^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ l) $\left[\left(1\frac{3}{4}\right)^2+\left(1\frac{31}{225}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{7}{2}}$

2. Oblicz, korzystając z praw działań na potęgach:

a) $\frac{\left(5^4\cdot 5^9\right):5^{10}}{\left(2\cdot 5\right)^3}$ b) $\frac{\left(3^{-2}\right)^9:3^{-5}}{27^{-1}\cdot 81^{-2}}$ c) $\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\cdot 8^{\frac{4}{3}}}{0{,}5^{-2}\cdot 32^{\frac{1}{3}}}$

d) $10:21^{\frac{1}{2}}\cdot 84^{0{,}5}$ e) $40^{\frac{2}{3}}:5^{\frac{11}{6}}\cdot 5^{\frac{7}{6}}$ f) $\left(3^{-\frac{4}{3}}:9^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{81}\right)^{-\frac{6}{7}}$

3. Oblicz, korzystając z praw działań na potęgach:

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 2^{\frac{1}{6}}$ b) $3^{-2} : (-27)^4 \cdot \left[\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}\right]^3$ c) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

d) $\left(3^{-9} + 3^{-9} + 3^{-9}\right)^{0,5} : 3^{-6}$ e) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\sqrt{11} + \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ f) $\left[\left(\sqrt{5}\right)^{2-\sqrt{2}}\right]^{2+\sqrt{2}}$

4. Przedstaw daną liczbę w postaci a^w, gdzie a jest liczbą naturalną, natomiast w jest liczbą wymierną.

a) $\sqrt[4]{9^{\frac{1}{3}} \cdot 3\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{36^{-0,5}} \cdot 2^{-3}}{81^{0,75}}$ c) $\frac{64^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{18}}{\sqrt[3]{108}}$

D 5. Wykaż, że wartość wyrażenia $5 \cdot 2^{-3} + \left[\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}\right]^0 + 3 \cdot 4^{-\frac{3}{2}} + 64^{\frac{4}{3}} - (-2)^3$ można przedstawić w postaci iloczynu trzech różnych liczb pierwszych.

D 6. Wykaż, że:

a) $\frac{\sqrt[3]{25} \cdot 0,04^{-\frac{2}{3}}}{60^{\frac{1}{2}} : 2\sqrt{3}} = 5\sqrt{5}$ b) $\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{-3} \cdot 9\sqrt{3} : 5\frac{1}{16}}{\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{24}}{3}$

7. Wiadomo, że przybliżenie dziesiętne liczby $100^{\frac{1}{6}}$ jest równe 2,15443469. Podaj przybliżenia dziesiętne podanych niżej liczb. Wynik zaokrąglij do piątego miejsca po przecinku.

a) $100^{-\frac{5}{6}}$ b) $100^{-\frac{1}{3}}$ c) $10^{\frac{2}{3}}$ d) $100^{\frac{1}{12}}$

8. Oblicz:

a) o ile procent liczba $\sqrt{44^2 + 33^2} - 21$ jest większa od liczby $2\sqrt[3]{4} \cdot 5\sqrt[3]{2}$,

b) o ile procent liczba $\frac{2 \cdot 3^3 + 3^7}{83}$ jest mniejsza od liczby $5\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[6]{50}$.

D 9. Wykaż, że wartość danego wyrażenia jest liczbą naturalną.

a) $\sqrt{358^2 \cdot 6^2 + 8^2 \cdot 358^2}$

b) $\sqrt[3]{\left(45^2 - 36^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

c) $\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

d) $\left[\left(\sqrt[3]{9}-1\right)\left(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+1\right)\right]^{\frac{1}{3}}$

10. Porównaj liczby x i y.

a) $x = 128^{12},\ y = 81^{21}$

b) $x = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{81}}\right)^{-15},\ y = 27^3 \cdot \sqrt[5]{9\sqrt{3}}$

c) $x = 3^{12} + 5^9,\ y = 5^{18} - 3^{24}$

d) $x = \left(3^{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{6}+\sqrt{2}},\ y = \left(2^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}+1}$

11. Porównaj liczby $\left[\left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(3+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ oraz $\frac{1}{\left(3^{\sqrt{3}-2}\right)^{\sqrt{3}+2}}$.

D 12. Wykaż, że liczba $\left(7-24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(7+24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ jest liczbą całkowitą.

D 13. Wykaż, że liczba $8^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{2}}$ jest rozwiązaniem równania $x^2 + 2^{3,5} = 18$.

14. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{a^{-3} - a^{-1}}{\left(1+a^{-1}\right)^2}$, jeśli $a = \sqrt{2}$,

b) $\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^3 - b^3} \cdot (ab)^2 \cdot (a+b)^{-1}$, jeśli $a = 1-\sqrt{3}$, $b = 1+\sqrt{3}$.

D 15. Wykaż, że jeśli $x = \frac{3+\sqrt{21}}{12}$, to wartość wyrażenia

$$\frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2x^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{2x^{\frac{1}{3}} + 1}{4x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1}\right)$$ jest równa $\frac{-1}{12}$.

D 16. Wykaż, że $\sqrt[3]{38 + \sqrt{1445}} - \sqrt[3]{\sqrt{1445} - 38} = 4$.

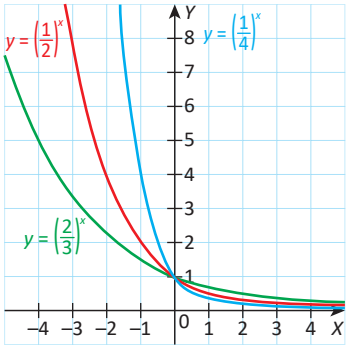
Funkcja wykładnicza i jej własności

Definicja 1.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = a^x$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy funkcji wykładniczych. Ze względu na podstawę potęgi rozważamy dwa przypadki.

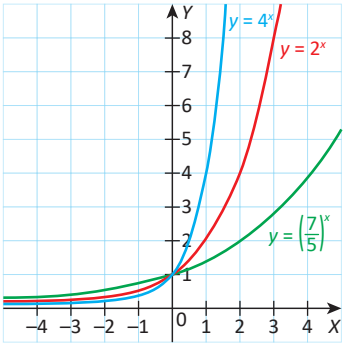
I przypadek: $a \in (0, 1)$



Wykresy przykładowych funkcji wykładniczych:

$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

II przypadek: $a \in (1, +\infty)$

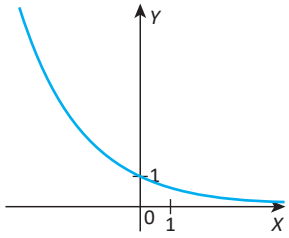
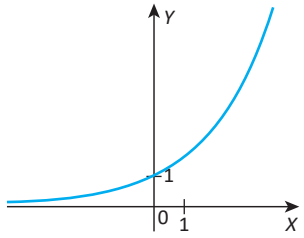


Wykresy przykładowych funkcji wykładniczych:

$y = 4^x$ $y = 2^x$ $y = \left(\frac{7}{5}\right)^x$

Wykresem funkcji wykładniczej jest krzywa, przecinająca oś OY w punkcie $(0, 1)$.

Własności funkcji wykładniczej $y = a^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ i $x \in \boldsymbol{R}$, przedstawiamy w poniższej tabeli.

$y = a^x, \quad 0 < a < 1$	$y = a^x, \quad a > 1$
	
Funkcja wykładnicza nie ma miejsc zerowych.	
Funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie; $ZW = (0, +\infty)$.	
Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.	
Jeśli $a \in (0, 1)$, to funkcja wykładnicza jest malejąca.	Jeśli $a \in (1, +\infty)$, to funkcja wykładnicza jest rosnąca.

Przykład 1.

Uporządkujemy w kolejności rosnącej liczby k, l, m, n, p, jeśli:

$$k = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi} \qquad l = \frac{3}{\sqrt{3}} \qquad m = 9^{-\frac{1}{4}} \qquad n = \sqrt[3]{9\sqrt{3}} \qquad p = \left(-\frac{1}{27}\right)^{-2\sqrt{2}}$$

Zapisujemy każdą liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

$$k = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi} = 3^{\pi} \qquad l = \frac{3}{\sqrt{3}} = 3^1 : 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$m = 9^{-\frac{1}{4}} = \left(3^2\right)^{-\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{1}{2}} \qquad n = \sqrt[3]{9\sqrt{3}} = \left(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{6}}$$

$$p = \left(-\frac{1}{27}\right)^{-2\sqrt{2}} = \left[\left(-\frac{1}{27}\right)^{-2}\right]^{\sqrt{2}} = \left[(-27)^2\right]^{\sqrt{2}} = \left(27^2\right)^{\sqrt{2}} = \left[\left(3^3\right)^2\right]^{\sqrt{2}} = 3^{6\sqrt{2}}$$

Funkcja wykładnicza $y = 3^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest rosnąca. Zatem dla większego argumentu przyjmuje większą wartość. Porządkujemy rosnąco wykładniki potęg i podobnie otrzymane potęgi:

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{5}{6} < \pi < 6\sqrt{2}$$

$$3^{-\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{5}{6}} < 3^{\pi} < 3^{6\sqrt{2}}$$

Ostatecznie otrzymujemy: $m < l < n < k < p$.

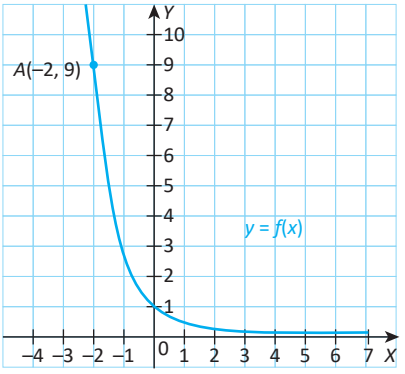
Ćwiczenie 1. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby a, b, c, d, jeśli:

$$a=\left(\sqrt{3}-1\right)^2,\quad b=\frac{2}{\sqrt{3}+1},\quad c=\left(\sqrt{3}-1\right)^{2\sqrt{3}},\quad d=\left[\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{3}\right]^{-1,5}$$

Przykład 2.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji wykładniczej f. Do wykresu tej funkcji należy punkt $A(-2, 9)$.

a) Wyznaczymy wzór funkcji f.
b) Obliczymy wartość funkcji f dla argumentu $-1,5$.
c) Odczytamy z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $1 \leqslant f(x) < 9$.



Ad a) Szukamy wzoru mającego postać $y = a^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
Do wykresu funkcji f należy punkt $A(-2, 9)$. Otrzymujemy:

$$9 = a^{-2}$$
$$\frac{1}{a^2} = 9$$
$$a = -\frac{1}{3} \vee a = \frac{1}{3}$$

Liczba $-\frac{1}{3}$ nie należy do zbioru $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Zatem wzór funkcji f jest następujący: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Ad b) Obliczamy wartość funkcji f dla argumentu $-1,5$:

$$f(-1,5) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1,5} = 3^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{3}\right)^3 = 3\sqrt{3}$$

Dla argumentu $-1,5$ funkcja przyjmuje wartość równą $3\sqrt{3}$.

Ad c) Zbiorem rozwiązań nierówności $1 \leqslant f(x) < 9$ jest zbiór wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f należą do przedziału $\langle 1, 9)$.
Wiemy, że $f(0) = 1$ oraz $f(-2) = 9$. Na podstawie wykresu funkcji f stwierdzamy, że

$$1 \leqslant f(x) < 9 \iff x \in \langle -2, 0\rangle$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\langle -2, 0\rangle$.

Ćwiczenie 2. Do wykresu funkcji wykładniczej f należy punkt $B\left(-2,\frac{4}{9}\right)$.

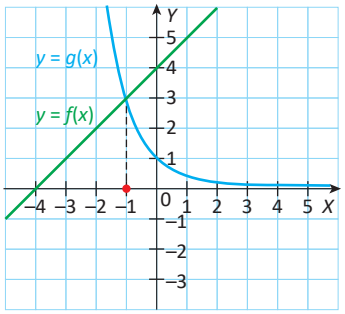
a) Napisz wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.
b) Oblicz $f(-4)$.
c) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od $\frac{16}{81}$?

Przykład 3.

Rozwiążemy graficznie równanie $x+4=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Szkicujemy we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$f(x)=x+4$ oraz $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Funkcja f jest rosnąca, zaś funkcja g jest malejąca. Wykresy obu funkcji przecinają się w jednym punkcie, który ma współrzędne $(-1, 3)$, bowiem

$f(-1)=-1+4=3$

oraz

$$g(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$$

stąd

$$f(-1)=g(-1)$$

Jedynym rozwiązaniem równania $x+4=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ jest liczba -1.

Przykład 4.

Rozwiążemy graficznie nierówność $2^x < -\frac{3}{4}(x-2)^2 + 4$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $2^x < -\frac{3}{4}(x-2)^2 + 4$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja wykładnicza $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja kwadratowa $g(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^2 + 4$.

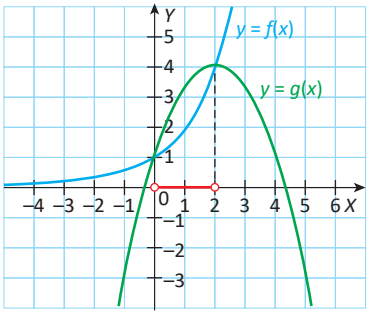
Wykresem funkcji $f(x) = 2^x$ jest krzywa wykładnicza przechodząca przez punkty: $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$.

Wykresem funkcji kwadratowej g jest parabola, która ma ramiona skierowane do dołu, a jej wierzchołkiem jest punkt $W(2, 4)$. Osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 2$. Wówczas:

$$g(0) = -\frac{3}{4}\cdot(0-2)^2 + 4 = 1 \quad \text{oraz} \quad g(4) = 1$$

więc również punkty $(0, 1)$ i $(4, 1)$ należą do wykresu funkcji g.

Wykresy obu funkcji ilustruje poniższy rysunek.



Wykresy funkcji f i g przecinają się w dwóch punktach: $(0, 1)$ oraz $(2, 4)$.
Z rysunku odczytujemy, że

$$f(x) < g(x) \iff x \in (0, 2)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $2^x < -\frac{3}{4}(x-2)^2 + 4$ jest przedział liczbowy $(0, 2)$.

Ćwiczenie 3. Rozwiąż graficznie nierówność $0{,}25x^2 + x + 5 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^x$, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

Przykład 5.

Wyznaczymy największą wartość funkcji $f(x)=4^{2x}-6\cdot 4^{x}+3$, gdzie $x\in\langle 0,1\rangle$ oraz argument funkcji f, dla którego ta wartość jest przyjmowana.

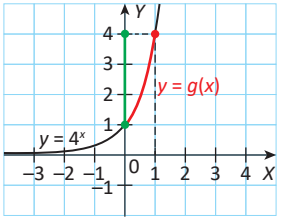
Wzór funkcji f można zapisać w postaci

$$f(x)=\left(4^{x}\right)^{2}-6\cdot 4^{x}+3, \text{ gdzie } x\in\langle 0,1\rangle$$

Funkcja f jest funkcją ciągłą, złożoną z dwóch funkcji ciągłych:
z funkcji wewnętrznej $g(x)=4^{x}$, gdzie $x\in\langle 0,1\rangle$ oraz

z funkcji zewnętrznej $h(t)=t^{2}-6t+3$,

której dziedziną jest zbiór wartości funkcji g. Możemy zapisać $f=h\circ g$.



Zauważamy, że

$g(0)=1$ oraz $g(1)=4$.

Z wykresu oraz monotoniczności i różnowartościowości funkcji g wynika, że zbiorem wartości funkcji g jest przedział $\langle 1,4\rangle$. Każdą z wartości funkcja g przyjmuje tylko jeden raz.

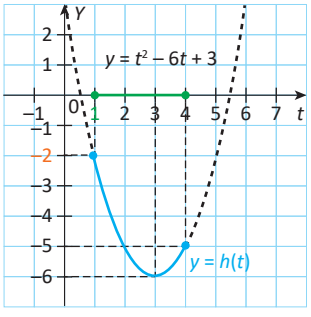
Zbiór wartości funkcji

$$f(x)=\left(4^{x}\right)^{2}-6\cdot 4^{x}+3, \text{ gdzie } x\in\langle 0,1\rangle$$

jest taki sam, jak zbiór wartości funkcji

$h(t)=t^{2}-6t+3$, gdzie $t\in\langle 1,4\rangle$

Wówczas największa wartość funkcji f jest równa największej wartości funkcji h.



Na rysunku obok kolorem niebieskim jest naszkicowany wykres funkcji h.

Funkcja h największą wartość przyjmuje dla argumentu 1.

Obliczamy tę największą wartość:

$h(1)=1-6\cdot 1+3=-2$

Wiemy, że

$g(0)=1$ oraz $h(1)=-2$

Funkcja f dla argumentu 0 przyjmuje największą wartość, równą -2.

Przykład 6.

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x}$, gdzie $x\in\left\langle 1,4\frac{1}{2}\right\rangle$.

Funkcja f jest funkcją ciągłą, złożoną z dwóch funkcji ciągłych: funkcji wewnętrznej $g(x)=x^2-4x$, gdzie $x\in\left\langle 1,4\frac{1}{2}\right\rangle$ oraz z funkcji zewnętrznej $h(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t$, której dziedziną jest zbiór wartości funkcji g. Możemy zatem zapisać $f=h\circ g$.

1) Wyznaczamy zbiór wartości funkcji $g(x)=x^2-4x$, gdzie $x\in\left\langle 1,4\frac{1}{2}\right\rangle$.

- Obliczamy odciętą wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji $y=x^2-4x$:
  $x_w=\frac{-(-4)}{2\cdot 1}=2$
- Zauważamy, że $2\in\left\langle 1,4\frac{1}{2}\right\rangle$ oraz współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji g jest dodatni. Zatem dla argumentu 2 funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość, równą $g(2)$, czyli -4 (wykonaj obliczenia).
- Szukamy największej wartości funkcji g na końcach przedziału $\left\langle 1,4\frac{1}{2}\right\rangle$:
  $g(1)=1^2-4\cdot 1=-3$ oraz
  $g\left(4\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{9}{2}\right)^2-4\cdot\frac{9}{2}=\frac{81}{4}-\frac{72}{4}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$

  Ponieważ $-3<2\frac{1}{4}$, więc funkcja g w przedziale $\left\langle 1,4\frac{1}{2}\right\rangle$ przyjmuje największą wartość, równą $2\frac{1}{4}$.

Z ciągłości funkcji g wynika, że zbiorem wartości funkcji g jest przedział $\left\langle -4,2\frac{1}{4}\right\rangle$.

2) Wyznaczamy zbiór wartości funkcji f.

- Funkcja f ma taki sam zbiór wartości, jak funkcja
  $h(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t$, gdzie $t\in\left\langle -4,2\frac{1}{4}\right\rangle$
  Funkcja h jest malejącą funkcją ciągłą. Dla najmniejszego argumentu funkcja h przyjmuje wartość największą, a dla największego argumentu – wartość najmniejszą.

- Obliczamy wartości funkcji h dla liczb -4 oraz $2\frac{1}{4}$:

$$h(-4)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=2^4=16$$ – największa wartość funkcji f

$$h\left(2\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^9}=\frac{1}{\sqrt[4]{2^8\cdot 2}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{8}}{8}$$ – najmniejsza wartość funkcji f

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle \frac{\sqrt[4]{8}}{8}, 16\right\rangle$.

Ćwiczenie 4. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x)=\left(\sqrt{5}\right)^{4-x^2}$, gdzie $x \in \langle -2, 2\rangle$.

Przykład 7.

Wykażemy, że funkcja $f(x)=\frac{3^{2x}-1}{3^{x+1}}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest nieparzysta.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$, więc dla każdego argumentu x należącego do dziedziny funkcji f liczba przeciwna $-x$ też należy do dziedziny tej funkcji. Wystarczy zatem pokazać, że $f(-x)=-f(x)$. Obliczamy:

$$f(-x)=\frac{3^{-2x}-1}{3^{-x+1}}=\frac{\frac{1}{3^{2x}}-1}{3^{-x+1}}=\frac{\frac{1-3^{2x}}{3^{2x}}}{3^{-x+1}}=\frac{1-3^{2x}}{3^{2x}\cdot 3^{-x+1}}=\frac{1-3^{2x}}{3^{x+1}}$$

$$-f(x)=-\frac{3^{2x}-1}{3^{x+1}}=\frac{-\left(3^{2x}-1\right)}{3^{x+1}}=\frac{1-3^{2x}}{3^{x+1}}$$

Otrzymaliśmy, że dla dowolnego argumentu x funkcji f prawdziwa jest równość $f(-x)=-f(x)$. Zatem funkcja f jest nieparzysta.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Naszkicuj wykres funkcji f i omów jej własności.

   a) $f(x)=4^x$ b) $f(x)=0{,}2^x$ c) $f(x)=\left(\sqrt{3}\right)^x$ d) $f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

2. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby k, l, m, n, p.

   a) $k=\left(3\sqrt{2}\right)^5$, $l=\left(3\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$, $m=\left(3\sqrt{2}\right)^{\pi+1}$, $n=\left(3\sqrt{2}\right)^{-2}$, $p=\left(3\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}-1}$

   b) $k=0{,}75^3$, $l=0{,}75^{-\sqrt{2}}$, $m=0{,}75^{1+\sqrt{3}}$, $n=0{,}75^{\pi}$, $p=0{,}75^{\pi-3}$

c) $k=4^{\pi}$, $l=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $m=8^{0,25}$, $n=\frac{1}{16^{\sqrt{3}}}$, $p=64^{1-\pi}$

d) $k=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$, $l=\left|2\sqrt{2}-3\right|^{\frac{3}{2}}$, $m=\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^{-3}$, $n=1$, $p=\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}}\right)^{-1,5}$

3. Na podstawie poniższej równości podaj, czy liczba x jest dodatnia, czy ujemna.

a) $0,8^x=\frac{1}{3}$ b) $2,7^x=\frac{2}{5}$ c) $\left(\frac{2}{9}\right)^x=6$ d) $\left(3\frac{1}{3}\right)^x=15$

4. Napisz wzór funkcji wykładniczej f, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt:

a) $A\left(-1, 2\frac{1}{2}\right)$ b) $B(2, 25)$ c) $C(-3, 8)$ d) $D(4, 9)$

5. Do wykresu funkcji wykładniczej f należy punkt $A(-4, 16)$.
   a) Napisz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres.
   b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 3,5.
   c) Podaj argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 2.
   d) Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $f(x)<2$.

6. Rozwiąż graficznie równanie, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $2^x=\frac{2}{x}$ b) $\frac{1}{3^x}=-4x+1$ c) $\sqrt{2^x}=x$

7. Rozwiąż graficznie nierówność, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $5^x\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $4^x>3x+1$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x<-x^2-2x-1$

8. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x)=8^x+3\cdot 4^x-4$, $x\in\boldsymbol{R}$ b) $f(x)=7^{x-|x|}$, $x\in\langle -1, 3\rangle$

c) $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{-x^2+2x+2}$, $x\in\langle -1, 2\rangle$ d) $f(x)=49^x-7^x-6$, $x\in\boldsymbol{R}$

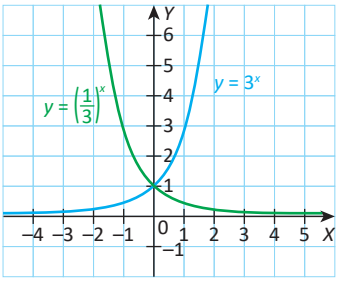
D 9. Wykaż, że funkcja:

a) $f(x)=4^x+4^{-x}$ jest parzysta b) $g(x)=\frac{5^x-1}{5^x+1}$ jest nieparzysta.

D 10. Funkcja $f(x)=25^x+25^{-x}$ przyjmuje dla pewnego argumentu x_0 wartość równą 34. Wykaż, że funkcja $g(x)=5^x+5^{-x}$, dla argumentu x_0 przyjmuje wartość równą 6.

Przekształcenia wykresów funkcji wykładniczych

Na poniższym rysunku we wspólnym układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji $f(x) = 3^x$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



Zauważ, że wykresy funkcji

$$f(x) = 3^x \text{ oraz } g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

są symetryczne względem osi *OY*.

Twierdzenie 1.

Krzywe wykładnicze o równaniach $y = a^x$ oraz $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ są symetryczne względem osi *OY*.

Założenie: $f(x) = a^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $x \in \boldsymbol{R}$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Teza: Wykresy funkcji *f* i *g* są symetryczne względem osi *OY*.

Dowód: Jeśli przekształcimy wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię osiową względem osi *OY*, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(-x)$. Zatem jeśli $f(x) = a^x$, to mamy:

$$f(-x) = a^{-x} = \left(a^{-1}\right)^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = g(x),$$ co kończy dowód.

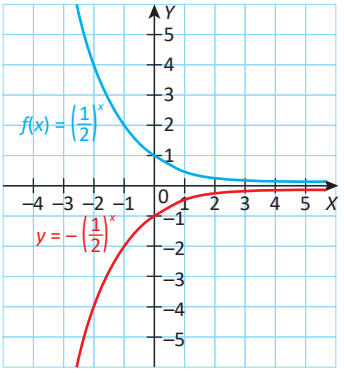
Przykład 1.

Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, przekształcimy:

a) w symetrii osiowej względem osi *OX*,
b) w symetrii środkowej względem punktu $(0, 0)$.

Napiszemy wzór funkcji, której wykres otrzymamy w tym przekształceniu.

Ad a) Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji f i jego obraz w symetrii osiowej względem osi OX.



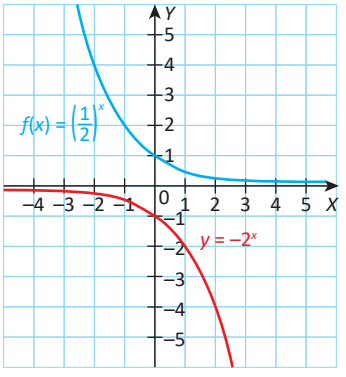
Jeśli przekształcimy wykres funkcji $y = f(x)$ w symetrii osiowej względem osi OX, to otrzymamy wykres funkcji

$$y = -f(x).$$

W naszym przypadku otrzymaliśmy wykres funkcji

$$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Ad b) Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji f i jego obraz w symetrii środkowej względem punktu $(0, 0)$.



Jeśli przekształcimy wykres funkcji f w symetrii środkowej względem punktu $(0, 0)$, to otrzymamy wykres funkcji

$$y = -f(-x).$$

Funkcja, której wykres otrzymaliśmy w tym przekształceniu, ma wzór

$$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}, \text{ czyli } y = -2^x.$$

Ćwiczenie 1. Naszkicuj wykres funkcji: a) $y = 4^{-x}$, $x \in \boldsymbol{R}$ b) $y = -4^{-x}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Przykład 2.

Wykres funkcji $f(x) = 5^{-x}$ przesuniemy równolegle:

a) o 2 jednostki w dół wzdłuż osi OY

b) o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX.

Napiszemy wzór funkcji, której wykres otrzymamy w tym przekształceniu.

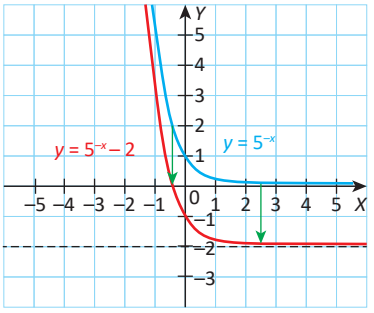
Ad a) Jeśli przesuniemy równolegle wykres funkcji $y = f(x)$ o 2 jednostki w dół, czyli o wektor $[0, -2]$, to otrzymamy wykres funkcji

$$y = f(x) - 2$$

Zatem jeśli $f(x) = 5^{-x}$, to otrzymamy wykres funkcji

$$y = 5^{-x} - 2$$

Wykresy obu funkcji przedstawia rysunek obok.

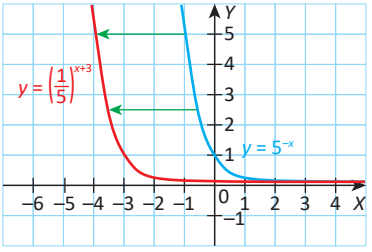


Ad b) Jeśli przesuniemy równolegle wykres funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w lewo, czyli o wektor $[-3, 0]$, to otrzymamy wykres funkcji

$$y = f(x + 3)$$

Zatem jeśli $f(x) = 5^{-x}$, to otrzymamy wykres funkcji

$$y = 5^{-(x+3)}, \quad \text{czyli} \quad y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+3}$$



Ćwiczenie 2. Naszkicuj wykres funkcji: a) $y = 2^{x-4}$, $x \in \boldsymbol{R}$ b) $y = -2^x + 1$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Przykład 3.

Naszkicujemy wykres funkcji $y = 1 - \dfrac{3^{x+5}}{27}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Najpierw sprowadzamy wzór danej funkcji do prostszej postaci.

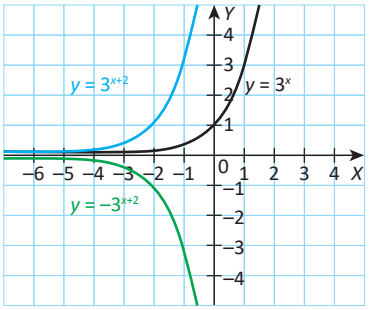
$$1 - \frac{3^{x+5}}{27} = 1 - \frac{3^{x+5}}{3^3} = 1 - 3^{x+5-3} = 1 - 3^{x+2}$$

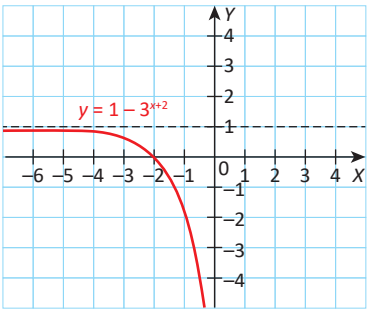
Daną funkcję można opisać wzorem $y = 1 - 3^{x+2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Aby naszkicować jej wykres, skorzystamy z przekształceń wykresów odpowiednich funkcji.

1) Przesuniemy równolegle wykres funkcji $y = 3^x$ o wektor $[-2, 0]$ i otrzymamy wykres funkcji $y = 3^{x+2}$.
2) Przekształcimy wykres funkcji $y = 3^{x+2}$ w symetrii osiowej względem osi OX i otrzymamy wykres funkcji $y = -3^{x+2}$
3) Przesuniemy równolegle wykres funkcji $y = -3^{x+2}$ o wektor $[0, 1]$ i otrzymamy wykres funkcji $y = 1 - 3^{x+2}$.

Rysunki poniżej przedstawiają wykresy poszczególnych funkcji.





Zauważ, że wzór funkcji $y = 1 - 3^{x+2}$ możemy również zapisać w postaci $y = -\left(3^{x+2} - 1\right)$. Zatem wykres tej funkcji otrzymamy także, przesuwając równolegle wykres funkcji $f(x) = 3^x$ o wektor $[-2, -1]$, a następnie otrzymany wykres funkcji przekształcając przez symetrię osiową względem osi *OX*.

Ćwiczenie 3. Na podstawie wykresu funkcji $y = 1 - 3^{x+2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, przedstawionego w przykładzie 3., omów następujące własności tej funkcji: zbiór wartości, miejsca zerowe oraz argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie i argumenty, dla których przyjmuje wartości ujemne.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że wzór funkcji $f(x) = \dfrac{32 - 4^{\frac{1}{2}x+1}}{8}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, można zapisać w postaci $f(x) = 4 - 2^{x-1}$. Następnie opisz, jak na podstawie wykresu funkcji $y = 2^x$ można naszkicować wykres funkcji *f*.

Przykład 4.

Do wykresu funkcji $f(x) = c \cdot a^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ i $x \in \boldsymbol{R}$, należą punkty $M(1, 32)$ oraz $P\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$.

a) Wyznaczymy liczby *a* i *c* oraz zapiszemy wzór funkcji *f*.

b) Naszkicujemy wykres funkcji *g* określonej wzorem $g(x) = f\left(-\dfrac{x}{2}\right)$.

Ad a) Punkty $M(1, 32)$ i $P\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$ należą do wykresu funkcji $f(x) = c \cdot a^x$,

$32 = c \cdot a^1$ oraz $\dfrac{1}{2} = c \cdot a^{-2}$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} ac = 32 \\ \frac{1}{2} = \frac{c}{a^2} \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} ac = 32 \\ c = \frac{1}{2}a^2 \end{cases}$$

W miejsce c do pierwszego równania układu równań podstawiamy $\frac{1}{2}a^2$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a^3 = 32 \\ c = \frac{1}{2}a^2 \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a^3 = 64 \\ c = \frac{1}{2}a^2 \end{cases}, \quad \text{więc} \quad \begin{cases} a = 4 \\ c = 8 \end{cases}$$

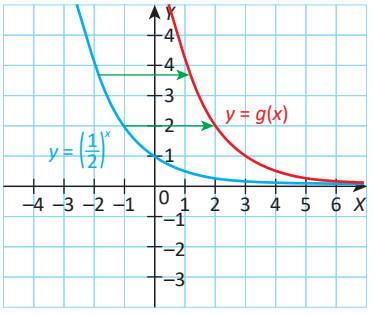
Otrzymaliśmy: $f(x) = 8 \cdot 4^x$, czyli $f(x) = 2^{2x+3}$.

Ad b) Funkcja g ma wzór $g(x) = f\left(-\frac{x}{2}\right)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Przekształcamy wzór tej funkcji do prostszej postaci:

$$f\left(-\frac{x}{2}\right) = 2^{2\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)+3} = 2^{-x+3} = 2^{-1\cdot(x-3)} = \left(2^{-1}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$$

Funkcję g opisuje wzór $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Wykres funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ otrzymujemy, przesuwając równolegle wykres funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ o 3 jednostki w prawo, jak na rysunku obok.



Ćwiczenie 5. Do wykresu funkcji $f(x) = k \cdot a^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ i $x \in \boldsymbol{R}$, należą punkty $A(-1, 27)$ oraz $B(2, 1)$. Wyznacz wzór funkcji f.

Przykład 5.

Naszkicujemy wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = 2^{|x-1|-|x|}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Wzór funkcji f zapiszemy bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

Mamy trzy przypadki dotyczące wykładnika potęgi o podstawie 2:

- jeśli $x \in (-\infty, 0)$, to $|x-1|-|x| = -x+1+x = 1$
- jeśli $x \in \langle 0, 1)$, to $|x-1|-|x| = -x+1-x = -2x+1$
- jeśli $x \in \langle 1, +\infty)$, to $|x-1|-|x| = x-1-x = -1$

Ostatecznie wzór funkcji f możemy zapisać następująco:

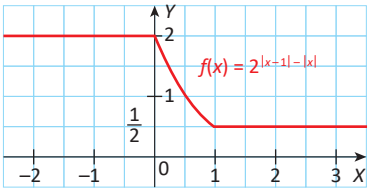
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ 2^{-2x+1}, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 1) \\ \frac{1}{2}, & \text{jeśli } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$$

Zauważmy również, że

$$2^{-2x+1} = 2^{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-\frac{1}{2}}$$

Aby otrzymać fragment wykresu funkcji f odpowiadający argumentom z przedziału $\langle 0, 1)$, wystarczy przesunąć równolegle wykres funkcji $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ o wektor $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$ i wybrać odpowiedni fragment tego wykresu.

Wykres funkcji f ilustruje poniższy rysunek.



Ćwiczenie 6. Naszkicuj wykres funkcji $y = 4 - 2^{|x|}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Przykład 6.

Funkcję f opisuje wzór $f(x) = 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots$, $x \in \boldsymbol{R}$, w którym prawa strona jest szeregiem geometrycznym zbieżnym. Naszkicujemy wykres tej funkcji.

Pierwszy wyraz a_1 nieskończonego ciągu geometrycznego $(3^x, 3^{x-1}, 3^{x-2}, \ldots)$ jest równy 3^x. Iloraz q tego ciągu wynosi $\frac{1}{3}$, więc spełnia warunek $|q| < 1$.

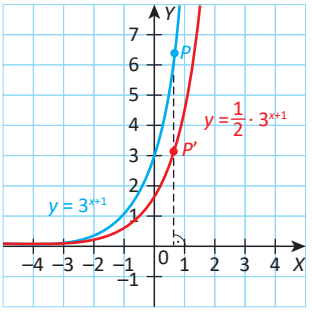
Zatem suma S szeregu istnieje i można ją obliczyć ze wzoru $S=\frac{a_1}{1-q}$. Wówczas wzór funkcji f przyjmuje postać

$$f(x)=\frac{3^x}{1-\frac{1}{3}}, \qquad \text{czyli}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot 3^{x+1}$$

Wykres funkcji f otrzymamy, przekształcając wykres funkcji $y=3^{x+1}$ w powinowactwie prostokątnym o osi OX i skali $\frac{1}{2}$.

Na rysunku poniżej wykres funkcji f jest naszkicowany kolorem czerwonym.



Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wykres funkcji $f(x)=2^x$, $x\in \boldsymbol{R}$ przekształcono i otrzymano wykres funkcji g, gdzie:
   a) $g(x)=f(x+1)$ b) $g(x)=8-f(x)$
   c) $g(x)=f(x-4)-1$ d) $g(x)=f(-3-x)+4$
   1) Napisz wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres. 2) Omów własności funkcji g.

2. Wykres funkcji f przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}$ i otrzymano wykres funkcji g. Podaj wzór funkcji g, jeśli:
   a) $f(x)=-3^{x+1}-2$, $\vec{u}=[5,-4]$ b) $f(x)=4^{-x+3}+5$, $\vec{u}=[-1,2]$.

3. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x)=a^x$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$, należy punkt $A(-2,4)$.
   a) Oblicz a.
   b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=1-f(x+4)$.
   c) Czy punkt $B\left(-2\frac{1}{2},\frac{4-\sqrt{2}}{4}\right)$ należy do wykresu funkcji g?
   d) Na podstawie wykresu funkcji g podaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x)<-1$.

4. Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2x+8}-2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

   a) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY.
   b) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) > x-5$.

5. Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji, rozwiąż graficznie równania.

   a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}=3$ b) $4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3$ c) $\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x=2\cdot\left(2^{x+2}+1\right)$

6. Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji, rozwiąż graficznie nierówności.

   a) $2^{x-3}\geqslant 4$ b) $0{,}25^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}<1$ c) $4-\left(\frac{1}{2}\right)^x\geqslant 9^{-\frac{1}{2}x}-1$

7. Do wykresu funkcji $f(x)=b\cdot a^x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+-\{1\}$, $x \in \boldsymbol{R}$, należy punkt $K(2, 1)$. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie o rzędnej 4.

   a) Wyznacz liczby a, b.
   b) Naszkicuj wykres funkcji f i oblicz wartość funkcji f dla argumentu -3.

8. Punkty $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$ oraz $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ należą do wykresu funkcji $f(x)=c\cdot a^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

   a) Wyznacz liczby a, c.
   b) Naszkicuj wykres funkcji g określonej wzorem $g(x)=f\left(-\frac{x}{2}\right)$.

D 9. Wykaż, że jeśli do wykresu funkcji $h(x)=a^x+b$ należą punkty $T(1, -1)$ oraz $S(3, 5)$, to $a^b=\frac{1}{8}$.

10. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem:

    a) $f(x)=\left|3^{-x}-3\right|$ b) $g(x)=2^{|2x-2|}-4$ c) $h(x)=-\left|2^{|x-3|}-4\right|+5$

11. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem:

    a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|-2}$ b) $y=-2^{1-|x|}$ c) $y=\frac{2^{|x-2|+|x|}}{4}$

12. Dany jest wzór funkcji $f(x)=2^x+\frac{7}{8}\cdot 2^x+\frac{49}{64}\cdot 2^x+\frac{343}{512}\cdot 2^x+\ldots$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

    Wiadomo, że prawa strona tego wzoru jest szeregiem geometrycznym zbieżnym. Naszkicuj wykres funkcji f.

Równania wykładnicze

Równanie wykładnicze to równanie, w którym niewiadoma występuje tylko w wykładniku potęgi. Oto przykłady równań wykładniczych z niewiadomą x:

$2^x = 2^{3x+4}$ $\quad 3^{x^2} = 9^{\frac{x-2}{x}}$ $\quad 5^{2x-3} = \sqrt[3]{5} \cdot 5^{x+2}$ $\quad 2^{2x} + 2^x = 6$

W rozwiązywaniu równań wykładniczych korzystamy z tego, że funkcja wykładnicza $y = a^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, jest funkcją różnowartościową.

Twierdzenie 1.
Jeśli $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ oraz $x_1 \in \boldsymbol{R}$, $x_2 \in \boldsymbol{R}$, to

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

W tym temacie przedstawimy metody rozwiązywania równań wykładniczych.

A. Proste równania wykładnicze

Proste równania wykładnicze dają się sprowadzić do postaci

$$a^{w_1} = a^{w_2}$$

gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, zaś w_1, w_2 – to wyrażenia algebraiczne jednej zmiennej.

W rozwiązywaniu takich równań korzystamy z praw działań na potęgach oraz z twierdzenia 1.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $4^{2x-1} = 1$.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$.
Zauważ, że

$$1 = 4^0$$

zatem równanie można zapisać następująco:

$$4^{2x-1} = 4^0$$

Po zastosowaniu twierdzenia 1. otrzymujemy :

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Rozwiązaniem danego równania jest liczba $\frac{1}{2}$.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie wykładnicze $27\cdot 9^{\frac{1}{x+1}}=3\sqrt{3}$.

Po lewej stronie równania w wykładniku potęgi występuje wyrażenie $\frac{1}{x+1}$, które jest określone wtedy i tylko wtedy, gdy $x\neq -1$. Zatem

$D=\boldsymbol{R}-\{-1\}$

Obie strony równania zapiszemy w postaci potęgi o podstawie 3.
Mamy:

$27=3^3,\qquad 9=3^2,\qquad 3\sqrt{3}=3^1\cdot 3^{\frac{1}{2}}$

Przekształcamy dane równanie, stosując prawa działań na potęgach:

$3^3\cdot\left(3^2\right)^{\frac{1}{x+1}}=3^1\cdot 3^{\frac{1}{2}}$ $\qquad (a^m)^n=a^{m\cdot n}$

$3^3\cdot 3^{\frac{2}{x+1}}=3^1\cdot 3^{\frac{1}{2}}$ $\qquad a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$3^{3+\frac{2}{x+1}}=3^{\frac{3}{2}}$

Korzystamy z twierdzenia 1. i otrzymujemy

$3+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{2}$

$\frac{2}{x+1}=-\frac{3}{2}$

$-3(x+1)=4$ $\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$, jeśli $b\neq 0$ i $d\neq 0$

$-3x-3=4$

$-3x=7$

$x=-2\frac{1}{3}\qquad -2\frac{1}{3}\in D$

Równanie $27\cdot 9^{\frac{1}{x+1}}=3\sqrt{3}$ ma jedno rozwiązanie. Rozwiązaniem tego równania jest liczba $-2\frac{1}{3}$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż równania.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x^2-1}=1$ b) $\left(\frac{2}{9}\right)^{3x-7}=\left(\frac{9}{2}\right)^{7x-3}$ c) $2^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{8}\right)^x$

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\frac{4^{\frac{x-1}{2}}\cdot 5}{5^x}=\frac{1}{9}\cdot 3^{2x}$.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych, $D=\boldsymbol{R}$.
Lewą stronę równania przekształcamy następująco:

$$\frac{4^{\frac{x-1}{2}}\cdot 5}{5^x}=4^{\frac{x-1}{2}}\cdot\frac{5}{5^x}=\left(2^2\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\frac{1}{5^x\cdot 5^{-1}}=2^{x-1}\cdot\frac{1}{5^{x-1}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$$

Wskaż prawa działań na potęgach, które zastosowaliśmy powyżej.

Prawą stronę doprowadzamy do potęgi o podstawie 9:

$$\frac{1}{9}\cdot 3^{2x}=9^{-1}\cdot\left(3^2\right)^x=9^{-1}\cdot 9^x=9^{x-1}$$

Otrzymujemy równanie:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=9^{x-1}$$

Po obu stronach ostatniego równania występują potęgi o różnych podstawach, ale o jednakowych wykładnikach. Obie strony równania podzielimy przez wyrażenie 9^{x-1}, które jest różne od zera.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=9^{x-1}\qquad /:9^{x-1}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}}{9^{x-1}}=1$$

Stosujemy wzór $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$ i otrzymujemy:

$$\left(\frac{2}{45}\right)^{x-1}=1$$

$$\left(\frac{2}{45}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{45}\right)^0$$

$x-1=0$ z twierdzenia 1.
$x=1$

Jedynym rozwiązaniem danego równania jest liczba 1.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż równania.

a) $\frac{1}{3}\cdot 9^x=\frac{2^{2x}}{2}$

b) $\frac{2^{x+1}\cdot 5^{1-2x}}{5^x\cdot 4^{2x}}=\left(\frac{2}{7}\right)^{1-3x}$

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $5 \cdot 5^4 \cdot 5^7 \cdot 5^{10} \cdot 5^{13} \cdot \ldots \cdot 5^{3n-2} = 0{,}2^{-35}$ z niewiadomą n, wiedząc, że $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Lewa strona równania jest iloczynem potęg o podstawie 5, zatem jest równa potędze o podstawie 5 i wykładniku równym sumie wykładników tych potęg.

$$5 \cdot 5^4 \cdot 5^7 \cdot 5^{10} \cdot 5^{13} \cdot \ldots \cdot 5^{3n-2} = 5^{1+4+7+10+13+\ldots+(3n-2)}$$

Prawą stronę danego równania również przedstawiamy w postaci potęgi o podstawie 5:

$$0{,}2^{-35} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-35} = 5^{35}$$

Równanie przekształcamy do postaci:

$$5^{1+4+7+10+13+\ldots+(3n-2)} = 5^{35}$$

Po zastosowaniu twierdzenia 1. mamy

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3n-2) = 35$$

Wyrażenie $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3n-2)$ jest sumą n kolejnych, początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 3n - 2$.
Korzystamy ze wzoru

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ gdzie } a_1 = 1,\ a_n = 3n - 2$$

i otrzymujemy:

$$1+4+7+10+13+\ldots+(3n-2) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{3n^2 - n}{2} = 35, \quad \text{gdzie } n \in \boldsymbol{N}_+$$

$$3n^2 - n - 70 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-70) = 841, \qquad \sqrt{\Delta} = 29$$

$$n_1 = \frac{1-29}{2 \cdot 3} = -4\frac{2}{3}, \qquad n_2 = 5 \qquad \text{oraz} \qquad -4\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{N}_+, \quad 5 \in \boldsymbol{N}_+$$

Jedynym rozwiązaniem równania $5 \cdot 5^4 \cdot 5^7 \cdot 5^{10} \cdot 5^{13} \cdot \ldots \cdot 5^{3n-2} = 0{,}2^{-35}$ jest liczba 5.

Ćwiczenie 3.

Rozwiąż równanie $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = 8^{10}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

B. Równania wykładnicze, które rozwiązujemy przez podstawienie zmiennej pomocniczej

Przykład 5.

Rozwiążemy równanie $\frac{3^x-1}{4}=\frac{3^x+7}{3^x-1}$.

Wyznaczamy dziedzinę równania. Mianownik ułamka występującego po prawej stronie równania jest różny od 0 wtedy, gdy

$3^x-1\neq 0$, czyli $3^x\neq 3^0$, stąd $x\neq 0$

Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{0\}$.

Podstawiamy t w miejsce 3^x. Otrzymujemy równanie

$$\frac{t-1}{4}=\frac{t+7}{t-1}$$

Korzystamy z własności proporcji i rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$(t-1)^2=4t+28$

$t^2-6t-27=0$

$\Delta=36+4\cdot 27=144, \qquad \sqrt{\Delta}=12$

$t=-3 \quad \vee \quad t=9$

Wówczas

$3^x=-3$ lub $3^x=9$

Równanie $3^x=-3$ jest sprzeczne, bo wyrażenie 3^x przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Równanie $3^x=9$ ma jedno rozwiązanie: 2, $2\in \boldsymbol{R}-\{0\}$.

Rozwiązaniem równania $\frac{3^x-1}{4}=\frac{3^x+7}{3^x-1}$ jest liczba 2.

Przykład 6.

Rozwiążemy równanie $2^{3x}-2^{2x+3}=4\cdot 2^x-32$.

Dziedziną danego równania jest zbiór liczb rzeczywistych, $D=\boldsymbol{R}$.

Zauważamy, że

$2^{3x}=(2^x)^3, \qquad 2^{2x+3}=2^3\cdot(2^x)^2$

Równanie $2^{3x}-2^{2x+3}=4\cdot 2^x-32$ sprowadzamy do postaci

$(2^x)^3-2^3\cdot(2^x)^2=4\cdot 2^x-32,$ stąd

$(2^x)^3-8\cdot(2^x)^2-4\cdot 2^x+32=0$

Podstawiamy $t=2^x$ i otrzymujemy równanie wielomianowe z niewiadomą t.

$t^3-8t^2-4t+32=0$

Wielomian występujący po lewej stronie ostatniego równania zapiszemy w postaci iloczynowej. Zastosujemy metodę grupowania wyrazów.

$t^3 - 8t^2 - 4t + 32 = 0$

$t^2 \cdot (t-8) - 4 \cdot (t-8) = 0$ $\qquad a \cdot \boldsymbol{b} - c \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot (a-c)$

$(t-8) \cdot (t^2-4) = 0$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(t-8) \cdot (t-2) \cdot (t+2) = 0$

Teraz skorzystamy z własności iloczynu: $a \cdot b \cdot c = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0)$.
Otrzymujemy:

$t-8=0$ lub $t-2=0$ lub $t+2=0$

$t=8$ lub $t=2$ lub $t=-2$

Ale $t = 2^x$, zatem mamy trzy proste równania wykładnicze:

$2^x = 8$ $\qquad 2^x = 2$ $\qquad 2^x = -2$

Równanie $2^x = -2$ jest sprzeczne, bo funkcja wykładnicza $y = 2^x$ przyjmuje tylko wartości dodatnie. Zatem

$2^x = 2^3$ lub $2^x = 2^1$

$x = 3$ lub $x = 1$

Równanie $2^{3x} - 2^{2x+3} = 4 \cdot 2^x - 32$ ma dwa rozwiązania. Są to liczby 3 oraz 1.

Przykład 7.

Rozwiążemy równanie $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 10.$

Dziedziną równania $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Zauważamy, że

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right) = 5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 25-24 = 1$$

wówczas:

$$5-2\sqrt{6} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}}$$

Dane równanie można zapisać następująco:

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{1}{5+2\sqrt{6}}\right)^{\frac{x}{2}} = 10$$

Po podstawieniu zmiennej pomocniczej t, gdzie $t = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}x}$, mamy

$t + \frac{1}{t} = 10$, stąd

$t^2 - 10t + 1 = 0$

$\Delta = 96, \quad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{6}$

$t = 5-2\sqrt{6} \quad \vee \quad t = 5+2\sqrt{6}$

Otrzymujemy dwa równania wykładnicze.

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}=5-2\sqrt{6} \quad \vee \quad \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}=5+2\sqrt{6}$$

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^{-1} \quad \vee \quad \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^{1}$$

Korzystamy z twierdzenia 1. i otrzymujemy

$$\frac{x}{2}=-1 \quad \vee \quad \frac{x}{2}=1$$

$$x=-2 \quad \vee \quad x=2$$

Rozwiązaniami równania są dwie liczby: -2 oraz 2.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż równania.

a) $5^x=125$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=81$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{27}{8}$

d) $\left(\sqrt{8}\right)^x=1$ e) $0{,}6^x=0$ f) $\left(\frac{9}{5}\right)^{x-3}=1{,}8$

2. Rozwiąż równania.

a) $\frac{9}{64}=0{,}375^x$ b) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x-2}=1{,}2^{x+1}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-9}-1{,}5^{2-x}=0$

d) $2^{-x^2+5x}=64$ e) $\left(\sqrt[5]{5}\right)^x=25^{\frac{5}{2x}}$ f) $3^{x^3+2x^2}-\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$

3. Rozwiąż równania.

a) $5^{|x+3|}=25$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{|x-1|}=2{,}25$

c) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{|2-x|}=9^{|x-2|}$ d) $3^{|2x-1|}\cdot 9-81^{|1-2x|}=0$

4. Rozwiąż równania.

a) $3^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$ b) $8^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}}=2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{3x}$ c) $\frac{4^{x^2+4}}{16}=\left(\frac{1}{64}\right)^{-1}$

d) $0{,}4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{x-3}}=2{,}5^{-\frac{1}{3}}$ e) $\frac{3^{x+1}}{81}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{x}}$ f) $\frac{\left(\sqrt[3]{25}\right)^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{5}}=\left(\sqrt[4]{0{,}04}\right)^{1-x^2}$

5. Rozwiąż równania.

a) $0{,}125\cdot 16^{2x-1}=\left(\sqrt[3]{0{,}25}\right)^{3x-6}\cdot 8^{x-1}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{3x+2}=\left(\frac{8}{27}\right)^{x+5}$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2+5x}=\left(\frac{9}{16}\right)^{x-2}\cdot 0{,}75^{x^2}$

d) $0{,}5^{x^3}\cdot 4^{x^2-x}=\frac{1}{32^x}$

e) $3^{\frac{2}{x}}\cdot 9^{\frac{1}{x-1}}=81$

f) $\frac{5^{\frac{x+3}{x-1}}}{25}=25^{\frac{x+1}{x-1}}$

6. Rozwiąż równania.

a) $10^{2+6+10+\ldots+(4n-2)}=0{,}1^{-98}$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$

b) $3^{-4}\cdot 3^{-1}\cdot 3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\cdot\ldots\cdot 3^{3n-7}=243^7$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$

7. Rozwiąż równania.

a) $5^{x-3}=7^{3-x}$

b) $9^{x+2}=625\cdot 5^{2x}$

c) $\frac{5^{2x+1}\cdot 2^{3x+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}}=9\cdot 81^x$

d) $3^{x-2}\cdot 4^{2x+3}=3^{2x}\cdot 2^{3x+4}$

e) $6^{x-4}\cdot 3^{2x-8}=18^{x-4}$

f) $3^{3x-2}\cdot 2^{4x-2}=4\cdot 6^{2x}$

8. Rozwiąż równania.

a) $\frac{3^x-2}{3^x-1}=\frac{1}{2}$

b) $5^{-x}+5^x=2$

c) $\frac{2^x-1}{9}=\frac{7}{2^{2x}+2^x+1}$

9. Rozwiąż równania.

a) $4^x+32=3\cdot 2^{x+2}$

b) $2^{3x}-2^{x+4}=2^{2x+1}-32$

c) $3^{8x}=10\cdot 81^x-9$

d) $6\cdot 8^x=2\cdot 4^{1{,}5x}+16$

e) $5^{3x}+25-5^{x+2}=25^x$

f) $4^{3x+0{,}5}-8\cdot 4^x=4^{2x}-4$

10. Rozwiąż równania.

a) $\frac{2^{x^2-1}-1}{2^{x^2+2}+2}=\frac{7}{66}$

b) $3^{\sqrt{x+4}+1}+9^{\sqrt{x+4}}=4$

c) $6\cdot 4^{|x+3|}-8=4^{|2x+6|}$

d) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$

Nierówności wykładnicze

Nierównością wykładniczą nazywamy nierówność, w której niewiadoma znajduje się tylko w wykładniku potęgi.

Nierównościami wykładniczymi są na przykład nierówności:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} \geqslant 2^x$ $\qquad 3^{x-1}\cdot\sqrt[4]{27} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+5}$ $\qquad 5^x\cdot 16^{2x} < 25^{x^2}$

Funkcja wykładnicza $y = a^x$, gdzie $a \in (0, 1)$, jest malejąca. To znaczy, że wraz ze wzrostem argumentów wartości tej funkcji maleją. Jeśli $a \in (1, +\infty)$, to funkcja $y = a^x$ jest rosnąca, czyli wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji rosną.

Twierdzenie 1.

1) Jeśli $a \in (0, 1)$ i $x_1 \in \boldsymbol{R}$, $x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

2) Jeśli $a \in (1, +\infty)$ i $x_1 \in \boldsymbol{R}$, $x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

A. Proste nierówności wykładnicze

Proste nierówności wykładnicze można sprowadzić do postaci $a^{w_1} < a^{w_2}$ lub $a^{w_1} > a^{w_2}$, lub $a^{w_1} \leqslant a^{w_2}$, lub $a^{w_1} \geqslant a^{w_2}$, gdzie w_1, w_2 – to wyrażenia algebraiczne jednej zmiennej.

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówności:

a) $\left(3\sqrt{27}\right)^x > 9^{2x-1}$ $\qquad$ b) $0{,}5^{x^2-3} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Ad a) Dziedziną nierówności $\left(3\sqrt{27}\right)^x > 9^{2x-1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$.

Stosując odpowiednie prawa działań na potęgach, zapiszemy obie strony nierówności w postaci potęgi o tej samej podstawie, na przykład o podstawie 3.

$$\left[3\cdot\left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}\right]^x > \left(3^2\right)^{2x-1}$$

$$\left(3\cdot 3^{\frac{3}{2}}\right)^x > 3^{4x-2}$$

$$3^{\frac{5}{2}x} > 3^{4x-2}$$

Teraz stosujemy twierdzenie 1. Podstawą potęg po obu stronach nierówności jest liczba 3, która należy do przedziału $(1, +\infty)$. Zatem, przechodząc do porównania wykładników tych potęg, znak nierówności pozostawiamy bez zmiany.

$$\frac{5}{2}x > 4x - 2$$

$$-\frac{3}{2}x > -2 \qquad /:\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$x < 1\frac{1}{3}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\left(3\sqrt{27}\right)^x > 9^{2x-1}$ jest przedział $\left(-\infty, 1\frac{1}{3}\right)$.

Ad b) Dziedziną nierówności $0{,}5^{x^2-3} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$.

Przedstawimy obie strony nierówności w postaci potęgi o podstawie $\frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3} < \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

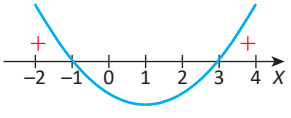
Podstawą obu potęg jest liczba $\frac{1}{2}$, która należy do przedziału $(0, 1)$. Zatem, przechodząc do porównania wykładników tych potęg, znak nierówności zmieniamy na przeciwny – na mocy twierdzenia 1. Wówczas otrzymujemy:

$x^2 - 3 > 2x$, stąd

$x^2 - 2x - 3 > 0$

$(x + 1)(x - 3) > 0$

Teraz wystarczy rozwiązać nierówność kwadratową.
Szkicujemy wykres pomocniczy i podajemy zbiór rozwiązań tej nierówności.



$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Zbiorem rozwiązań nierówności $0{,}5^{x^2-3} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ jest suma przedziałów $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż nierówności.

a) $64^x > 4$ b) $0{,}75^x \geqslant 1$ c) $7^x \leqslant 49^{1+x}$ d) $0{,}64^{x-1} < 0{,}8^{x-3}$

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówność $6^{2x-3} \cdot 3^{x-2} < 6^{x-1}$.

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$. Dla każdej liczby rzeczywistej x liczba 6^{x-1} jest dodatnia. Można podzielić obie strony nierówności przez 6^{x-1}. Otrzymujemy:

$6^{2x-3} \cdot 3^{x-2} < 6^{x-1} \qquad / : 6^{x-1}$

$\frac{6^{2x-3}}{6^{x-1}} \cdot 3^{x-2} < 1 \qquad a^n : a^m = a^{n-m}$

$6^{(2x-3)-(x-1)} \cdot 3^{x-2} < 1$

$6^{x-2} \cdot 3^{x-2} < 1 \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$(6 \cdot 3)^{x-2} < 1$

$18^{x-2} < 1$

$18^{x-2} < 18^0, \qquad$ stąd

$x - 2 < 0, \qquad$ bo $18 \in (1, +\infty)$

$x < 2$

Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $(-\infty, 2)$.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż nierówność $3^{2x+1} > 5^{4x+2}$.

B. Nierówności wykładnicze, które rozwiązujemy przez podstawienie zmiennej pomocniczej

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $2^{x+1} + 4^x \leqslant 80$.

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$. Nierówność zapisujemy w postaci:

$4^x + 2^{x+1} - 80 \leqslant 0$

$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 80 \leqslant 0$

Podstawiamy

$t = 2^x$

i sprowadzamy nierówność wykładniczą do nierówności kwadratowej

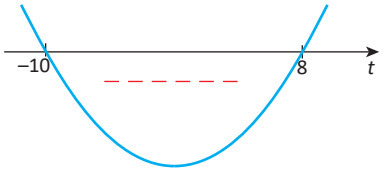
$t^2 + 2t - 80 \leqslant 0$

Rozwiązujemy nierówność kwadratową. Obliczamy:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-80) = 324, \quad \sqrt{\Delta} = 18$

$t_1 = \frac{-2-18}{2} = -10, \quad t_2 = \frac{-2+18}{2} = 8$

Szkicujemy wykres i odczytujemy zbiór rozwiązań tej nierówności.



$t \in \langle -10, 8 \rangle$

To znaczy, że

$-10 \leqslant t \leqslant 8$

Ale $t = 2^x$. Po dokonaniu podstawienia rozwiązujemy układ dwóch nierówności wykładniczych:

$2^x \geqslant -10$ i $2^x \leqslant 8$

$2^x \leqslant 2^3, \ 2 \in (1, +\infty)$

$x \in \boldsymbol{R}$ i $x \leqslant 3$

Nierówność $2^x \geqslant -10$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, bo wyrażenie 2^x jest dodatnie dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Zbiorem rozwiązań nierówności $2^x \leqslant 8$ jest przedział $(-\infty, 3\rangle$.

Znajdujemy część wspólną obu otrzymanych zbiorów:

$\boldsymbol{R} \cap (-\infty, 3\rangle = (-\infty, 3\rangle$

Zbiorem rozwiązań nierówności $2^{x+1} + 4^x \leqslant 80$ jest przedział $(-\infty, 3\rangle$.

Ćwiczenie 3. Rozwiąż nierówności.

a) $(3^x - 1)(3^x - 9) > 0$ b) $(3^x + 1)(3^x - 9) \geqslant 0$

Przykład 4.

Rozwiążemy nierówność $3^{-x} \geqslant \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x}{3 - 3^{-x}}$.

Określamy dziedzinę nierówności. Mianownik ułamka, występującego po prawej stronie nierówności, nie może być równy zero.

Zatem:

$3 - 3^{-x} \neq 0$, stąd $3 \neq 3^{-x}$, więc $1 \neq -x$, czyli $x \neq -1$

Dziedziną nierówności jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{-1\}$.

Nierówność rozwiążemy przez podstawienie zmiennej pomocniczej

$$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Mamy nierówność wymierną:

$$t \geqslant \frac{2\cdot t}{3-t}, \qquad \text{gdzie } t \neq 3$$

$$t-\frac{2\cdot t}{3-t}\geqslant 0$$

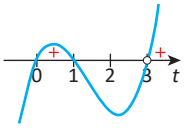
$$\frac{t\cdot(3-t)-2t}{3-t}\geqslant 0$$

$$\frac{-t^2+t}{3-t}\geqslant 0 \quad /\cdot(3-t)^2$$ Mnożymy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika.

$$(-t^2+t)\cdot(3-t)\geqslant 0$$

$$t\cdot(1-t)\cdot(3-t)\geqslant 0 \qquad \text{i} \qquad t\neq 3$$

Wielomian występujący po lewej stronie ostatniej nierówności ma trzy pierwiastki jednokrotne: 0, 1, 3. Aby podać zbiór rozwiązań nierówności wymiernej, szkicujemy przybliżony wykres tego wielomianu i uwzględniamy założenie $t \neq 3$.



Otrzymujemy
$t \in \langle 0, 1\rangle \cup (3, +\infty)$

Zatem

$0 \leqslant t \leqslant 1 \quad$ lub $\quad t > 3$

Podstawiamy $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Otrzymujemy:

$$0\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^x\leqslant 1 \qquad \vee \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^x > 3$$

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x\geqslant 0\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^0\end{cases} \qquad \vee \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

Zauważając, że $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ przyjmuje tylko wartości dodatnie oraz na podstawie twierdzenia 1. mamy:

$$\begin{cases} x \in \boldsymbol{R} \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \vee \quad x < -1$$

stąd

$x \in \langle 0, +\infty) \quad \vee \quad x \in (-\infty, -1)$, czyli
$x \in (-\infty, -1) \cup \langle 0, +\infty)$

Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest suma przedziałów $(-\infty, -1) \cup \langle 0, +\infty)$.

Ćwiczenie 4. Rozwiąż nierówność $\left(4^x - 64\right)\left(4^{2x} - 1\right) < 4^x - 64$.

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówność $20^x - 5^{2x} > 25 \cdot 4^x - 5^{x+2}$.

Dziedziną nierówności jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Wiemy, że

$20^x = 5^x \cdot 4^x$

Daną nierówność doprowadzamy do postaci:

$4^x \cdot 5^x - (5^x)^2 > 25 \cdot 4^x - 25 \cdot 5^x$

Oznaczmy:

$4^x = a$ oraz $5^x = b$

Otrzymujemy:

$a \cdot b - b^2 > 25a - 25b$
$b \cdot (a - b) > 25(a - b)$
$b \cdot (a - b) - 25(a - b) > 0$
$(a - b)(b - 25) > 0$

Iloczyn jest dodatni, jeśli oba czynniki iloczynu mają taki sam znak, czyli wtedy, gdy

$$\begin{cases} a - b > 0 \\ b - 25 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a - b < 0 \\ b - 25 < 0 \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} a > b \\ b > 25 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a < b \\ b < 25 \end{cases}$$

Ale $a = 4^x$ oraz $b = 5^x$. Zatem

$$\begin{cases} 4^x > 5^x \quad / : 5^x \\ 5^x > 25 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 4^x < 5^x \quad / : 5^x \\ 5^x < 25 \end{cases}$$

Mamy

$$\begin{cases}\left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^0 \\ 5^x > 5^2\end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases}\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^0 \\ 5^x < 5^2\end{cases}$$

Korzystamy z twierdzenia 1. Mamy:

$$\begin{cases}x < 0 \\ x > 2\end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases}x > 0 \\ x < 2\end{cases}$$

Pierwszy układ nierówności jest sprzeczny. Zbiorem rozwiązań drugiego układu jest przedział $(0, 2)$.

Ostatecznie, zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $(0, 2)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż nierówności.

   a) $\frac{1}{125^x} > \left(\frac{1}{25}\right)^{x-3}$ b) $\sqrt[3]{\frac{216}{125}} \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^{3x}$ c) $81^{\frac{2}{3}} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

2. Rozwiąż nierówność $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 0{,}25^{-2} \cdot 2^{-x^2}$, sprowadzając obie strony nierówności do potęg:

   a) o podstawie $\frac{1}{2}$,

   b) o podstawie 2.

3. Rozwiąż nierówności.

   a) $\sqrt[3]{625} < \left(\sqrt[3]{5}\right)^{|x-1|}$ b) $2^{x^2} \leqslant 8^{2x+9}$

   c) $\frac{2}{7} \geqslant \left(\frac{49}{4}\right)^{8x^2-4x}$ d) $\left(\frac{5}{3}\right)^{|x-2|+3} > \left(\frac{9}{25}\right)^{|2-x|}$

   e) $0{,}125^{3x^2} < \left(\frac{1}{16}\right)^{3x-1}$ f) $9^{1-|-x-3|} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+3|}$

4. Rozwiąż nierówności.

   a) $\frac{1}{81} \cdot 9^x > 3^{x+2} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-x}$ b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{3x-6} \leqslant \frac{16^{x^2+1}}{4 \cdot 4^x}$ c) $\frac{25^{x^2}}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^{8x}} \leqslant \frac{625}{5^{4x}}$

5. Rozwiąż nierówności.

a) $2^{x+4}\cdot 7^{x+4} > 2^{3x}\cdot 7^{3x}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x+1} > 8\cdot 2^{3x}$ c) $\frac{4^{x-2}}{5^{4-2x}} \leqslant 100^{x-2}$

6. Rozwiąż nierówność, wprowadzając pomocniczą niewiadomą.

a) $2^{3+x} - 5\cdot 2^x < 3\cdot 2^x + 2^{2+x} - 16$ b) $\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} + \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \geqslant \frac{8}{9}$

c) $2^{2x} - 7\cdot 2^{x+1} < 32$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} - 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1 \geqslant 0$

7. Rozwiąż nierówności.

a) $2^{1+6+11+\ldots+(5n-4)} \leqslant 64^3$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$

b) $\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{11}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{3n-1} \geqslant \left(\frac{1}{36}\right)^{6n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$

8. Rozwiąż nierówności.

a) $32^{x^2}\cdot 8^{x^3} \geqslant 4^x$ b) $3^{-3x} + 9 \leqslant 3^{2-2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

9. Rozwiąż nierówności.

a) $\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{x+9}}{5^{|x-4|}} \geqslant 5^{|x+1|}$ b) $3^{-3x} + 27 > \frac{3}{3^x} + 9^{1-x}$

c) $2^x \leqslant \frac{9\cdot 2^{x+1} - 32}{2^{x+1} - 2}$ d) $\frac{1}{2^{3x} - 4} + \frac{1}{64^{\frac{x}{2}} + 2} \geqslant \frac{14 + 8^x}{4^{3x} - 2^{3x+1} - 8}$

10. Rozwiąż nierówności.

a) $10^x - 4\cdot 5^x < 125\cdot 2^x - 500$ b) $3^{2x} + 8\cdot 3^x < 2^{x+3} + 6^x$

c) $14^{-x} - 7\cdot 2^{-x} \geqslant 21 - 3\cdot 7^{-x}$ d) $6^x + 3\cdot 7^x < 21^x + 3\cdot 2^x$

11. Rozwiąż nierówności z niewiadomą x.

a) $\left(\sqrt{27}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots} \leqslant \frac{1}{3^{x^3}\cdot 9^x}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \ldots > 2\cdot\sqrt{\frac{1+2^{x+1}}{2^x}}$

Zastosowanie własności funkcji wykładniczej w zadaniach

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie z klasy trzeciej informacje o szeregu geometrycznym zbieżnym.

Przykład 1.

Wyznaczymy zbiór wszystkich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}$, dla których równanie

$$\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} + \ldots} = \frac{m-3}{m+2}$$

ma rozwiązanie.

Ciąg $\left(\frac{1}{2}\right)^x, -\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}, \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}, -\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}, \ldots$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie $-\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu istnieje tylko wtedy, gdy $\left|-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right| < 1$. Rozwiązujemy otrzymaną nierówność:

$$\left|-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right| < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \overset{\text{tw. 1. str. 41}}{\Leftrightarrow} x > 0$$

Jeśli $x \in (0, +\infty)$, to szereg geometryczny $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} + \ldots$ jest zbieżny. Obliczamy sumę S tego szeregu:

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1 - \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]} = \frac{\frac{1}{2^x}}{1 + \frac{1}{2^x}} = \frac{1}{2^x + 1} \qquad S = \frac{a_1}{1-q}$$

Zatem dane równanie ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy równanie

$$2^{x+1} + 2 = \frac{m-3}{m+2}, \qquad \text{gdzie } x \in (0, +\infty) \text{ i } m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}$$

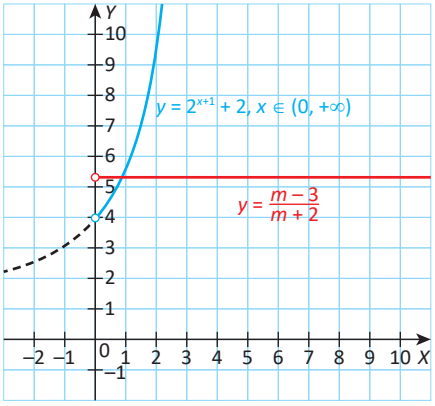
ma rozwiązanie. Rozważmy funkcje

$$f(x) = 2^{x+1} + 2 \qquad \text{oraz} \qquad g(x) = \frac{m-3}{m+2}, \text{ gdzie } x \in (0, +\infty) \text{ i } m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}.$$

Rozpatrywane równanie ma rozwiązanie, gdy wykresy funkcji f i g mają co najmniej jeden punkt wspólny.

Szkicujemy we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g, zobacz rysunek obok.

Zauważ, że równanie ma rozwiązanie wówczas, gdy funkcja stała g przyjmuje wartości większe od 4.



Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{m-3}{m+2}>4 \qquad \text{gdzie } m\in \boldsymbol{R}-\{-2\}$$

$$\frac{m-3}{m+2}-4>0$$

$$\frac{-3m-11}{m+2}>0$$

$$(-3m-11)(m+2)>0$$

$$m\in\left(-3\frac{2}{3},-2\right)$$

Rozważane równanie ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy $m\in\left(-3\frac{2}{3},-2\right)$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie

$$49^x+(1-2m)\cdot 7^x+9=0$$

ma dwa rozwiązania rzeczywiste.

Równanie możemy zapisać w postaci

$$(7^x)^2+(1-2m)\cdot 7^x+9=0$$

Po podstawieniu $7^x=t$ otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t:

$$t^2+(1-2m)\cdot t+9=0, \quad \text{gdzie } t>0.$$

Dane równanie wykładnicze ma dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania t_1, t_2, które są dodatnie. Wówczas każde z równań $7^x=t_1$ oraz $7^x=t_2$ będzie mieć rozwiązanie. Liczby t_1, t_2 są dodatnie, jeśli spełnione są jednocześnie następujące trzy nierówności:

$$\Delta>0 \qquad t_1+t_2>0 \qquad t_1\cdot t_2>0$$

Mamy:

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow (1-2m)^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -2\frac{1}{2}\right) \cup \left(3\frac{1}{2}, +\infty\right)$ sprawdź!
- $t_1 + t_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-(1-2m)}{1} > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- $t_1 \cdot t_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{1} > 0 \Leftrightarrow m \in \boldsymbol{R}$

Wzory Viete'a:
$t_1 + t_2 = \frac{-b}{a}$
$t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a}$

Częścią wspólną trzech otrzymanych zbiorów jest przedział $\left(3\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Równanie wykładnicze ma dwa rozwiązania wtedy, gdy $m \in \left(3\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $0{,}2^{\cos 2x} - \frac{1}{25^{\cos^2 x}} < \frac{4}{5\sqrt{5}}$.

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \boldsymbol{R}$.
Nierówność zapisujemy w postaci:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\cos 2x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Po zastosowaniu wzoru $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x - 1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos^2 x} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Funkcja wykładnicza $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ jest malejąca. Zatem

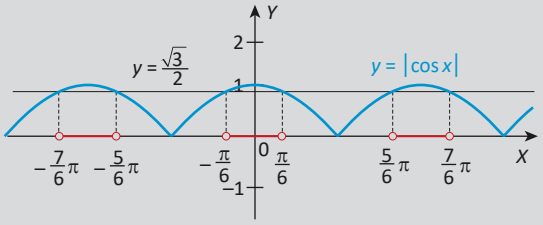
$$2\cos^2 x > \frac{3}{2}$$

$$\cos^2 x > \frac{3}{4}$$

Obie strony ostatniej nierówności są nieujemne, więc ta nierówność jest równoważna nierówności

$$\sqrt{\cos^2 x} > \sqrt{\frac{3}{4}}, \qquad \text{czyli} \qquad |\cos x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Szkicujemy fragment wykresu funkcji $y = |\cos x|$. Funkcja jest okresowa, a jej okres podstawowy jest równy π.



Nierówność $|\cos x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste należące do sumy przedziałów mających postać $\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi\right)$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $0{,}2^{\cos 2x} - \frac{1}{25^{\cos^2 x}} < \frac{4}{5\sqrt{5}}$ jest suma przedziałów mających postać $\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi\right)$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$.

Przykład 4.

Wykażemy, że $8 \cdot 2^x + 5 \cdot 4^x - 8^x \leqslant 48$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Wystarczy pokazać, że funkcja $f(x) = 8 \cdot 2^x + 5 \cdot 4^x - 8^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, przyjmuje wartości nie większe niż 48.
Podstawiamy $t = 2^x$, 2^x przyjmuje tylko wartości dodatnie, więc $t > 0$. Otrzymujemy wzór funkcji wielomianowej

$$W(t) = 8 \cdot t + 5 \cdot t^2 - t^3, \text{ gdzie } t \in (0, +\infty)$$

Funkcja wielomianowa W ma taki sam zbiór wartości, jak funkcja f.
Zbadamy, czy funkcja W ma wartość największą, a jeśli tak – to ile ta wartość jest równa.

Funkcja $y = W(t)$ jest różniczkowalna. Szukamy ekstremów lokalnych tej funkcji. Wiesz z klasy trzeciej, że jeśli funkcja różniczkowalna ma w danym punkcie ekstremum, to pochodna funkcji w tym punkcie jest równa 0.
Obliczamy pochodną funkcji $y = W(t)$:

$$W'(t) = 8 + 10t - 3t^2, \text{ gdzie } t \in (0, +\infty)$$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej.

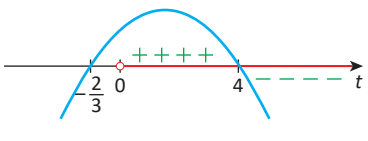
$-3t^2 + 10t + 8 = 0$

$\Delta = 100 + 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196, \qquad \sqrt{\Delta} = 14$

$t_1 = \frac{-10-14}{-6} = 4, \qquad t_2 = \frac{-10+14}{-6} = -\frac{2}{3} \qquad -\frac{2}{3} \notin (0, +\infty)$

Jedynym miejscem zerowym pochodnej funkcji $y = W(t)$, gdzie $t \in (0, +\infty)$, jest liczba 4. Określamy znak pochodnej w przedziałach $(0, 4)$ oraz $(4, +\infty)$.

Jeśli $t \in (0, 4)$, to $W'(t) > 0$.
Jeśli $t \in (4, +\infty)$, to $W'(t) < 0$.



Otrzymujemy, że funkcja

$W(t) = 8 \cdot t + 5 \cdot t^2 - t^3$, gdzie $t \in (0, +\infty)$,

w przedziale $(0, 4\rangle$ jest rosnąca, a w przedziale $\langle 4, +\infty)$ jest malejąca.
W punkcie 4 funkcja W ma maksimum, które jest jednocześnie wartością największą tej funkcji. Obliczamy tę największą wartość:

$W(4) = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 - 4^3 = 32 + 80 - 64 = 48$

Otrzymaliśmy, że jeśli $t \in (0, +\infty)$, to $W(t) \leqslant 48$. Zatem dla każdej liczby rzeczywistej x

$8 \cdot 2^x + 5 \cdot 4^x - 8^x \leqslant 48,$ co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie kwadratowe $x^2 + 2^{a+1} \cdot x - 4^a + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.
2. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie wykładnicze $16^x - 2p \cdot 4^x + p^2 - 1 = 0$ ma:
   a) dwa rozwiązania b) jedno rozwiązanie.
3. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, równanie wykładnicze $4 \cdot 9^x + 4m \cdot 3^x - 3m + 4 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie?
4. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $4^x + k \cdot 2^{x+1} + k + 2 = 0$ z niewiadomą x ma rozwiązanie.
5. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 4 \cdot 2^{x-1} - 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R} - \{-2\}$, dla których równanie $\left|f(1-x) - 5\right| = \frac{m-3}{m+2}$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

D 6. Wykaż, że równanie $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$ ma w przedziale $(0, 2\pi)$ trzy rozwiązania, a suma tych rozwiązań jest równa 3π.

D 7. Wykaż, że $36 \cdot 3^x - 6 \cdot 9^x - 27^x \leqslant 40$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1.

Test

1. Cyfrą jedności liczby $\sqrt{9^{10}+40\cdot 9^{8}}$ jest:

   A. 9 B. 3 C. 1 D. 0

2. Liczba $\left[\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}\right]^{2}$ należy do przedziału:

   A. $\langle 32, 33\rangle$ B. $\langle 26, 27\rangle$ C. $\langle 20, 21\rangle$ D. $\langle 18, 19\rangle$

3. Wiadomo, że $\left(\sqrt{2}-1\right)^{a}=\sqrt{2}+1$. Wówczas:

   A. $a=-2$ B. $a=-1$ C. $a=\frac{1}{2}$ D. $a=2$

4. Rozwiązanie równania $0{,}16^{-0{,}25}+\frac{1}{2}\cdot 4^{0{,}25}=\frac{x}{\sqrt[4]{6{,}25}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ jest liczbą:

   A. ujemną B. pierwszą C. złożoną D. niewymierną

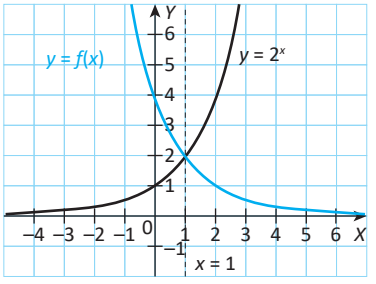
5. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x)=a^{x}$ należy punkt $A(-3, 27)$. Wobec tego:

   A. $f(-1)=\frac{1}{3}$ B. $f(2)=9$ C. $f(-0{,}5)=\sqrt{3}$ D. $f(0)=\frac{1}{3}$

6. Zbiorem wartości funkcji $g(x)=2^{x}-4$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$, jest przedział:

   A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(-4, +\infty)$ D. $(-\infty, -4)$

7. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji $y=2^{x}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$, oraz wykres funkcji f, który jest symetryczny do wykresu funkcji $y=2^{x}$ względem prostej $x=1$. Funkcję f można opisać wzorem:

   A. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ B. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+3$

   C. $f(x)=2^{1-x}+2$ D. $f(x)=2^{2-x}$

8. Zbiorem rozwiązań nierówności $\left(3^{-x}+1\right)\left(3^{-x}-1\right)<0$ jest przedział:

   A. $(-1, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Zadania otwarte

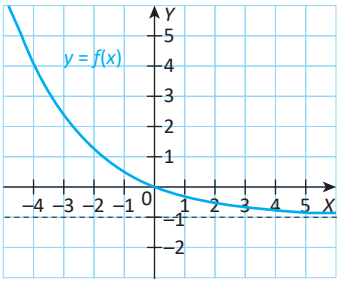
9. Oblicz:

a) $\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1} - 27^{\frac{1}{2}}\right]^2$

b) $\frac{\left(3^{2,8} - 6 \cdot \sqrt[5]{81}\right)^5}{\left(3^{\sqrt{6}-1}\right)^{\sqrt{6}+1}}$

D 10. Wykaż, że jeśli $x = \sqrt{3}$ oraz $y = 2 + \sqrt{3}$, to wartość wyrażenia $\frac{x}{2\sqrt{x} - y} : \frac{2\sqrt{x} + y}{y - 2}$ jest liczbą wymierną.

11. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu -3.
b) Oblicz argument, dla którego wartość funkcji f jest równa $-\frac{65}{81}$.
c) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od $-\frac{5}{9}$?
d) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(-x)$.

12. Wyznacz liczby a i b we wzorze funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty $K(1, -1)$ oraz $L(2, 1)$. Następnie:
a) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.
D b) Wykaż, że miejsce zerowe funkcji f należy do przedziału $(1, 2)$.
c) Naszkicuj wykres funkcji f.
d) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 29?

13. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 3^{-x} - 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.
a) Podaj wartość funkcji dla argumentu 4.
b) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < -2x$.
c) Wykres funkcji g powstaje z przesunięcia równoległego wykresu funkcji f wzdłuż osi OX o 2 jednostki w prawo. Podaj wzór funkcji g.
d) Korzystając z wykresu funkcji g, rozwiąż równanie $g(x) = 2^x$.

14. Rozwiąż równania.
a) $4^{\frac{x-5}{3}} = \frac{2^{5x}}{8^{x+1}}$
b) $3^{2x+2} \cdot 4^{x+1} = 36^{x+1}$
c) $9^{x-2,5} - 27^{\frac{1}{x}} = 0$

15. Rozwiąż nierówności.
a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{1-2x} < \frac{25}{36}$
b) $16^x - 2 \geqslant 4^x$

16. Doprowadź wyrażenie $\left(\frac{18+x^{\frac{1}{3}}}{x-27}+\frac{2x^{\frac{1}{3}}+6}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9}\right)\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}-27x^{\frac{5}{3}}}{1+2x^{\frac{1}{3}}}$ do najprostszej postaci, wiedząc, że $x \in \boldsymbol{R}_+ - \{27\}$.

D 17. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ jest liczbą naturalną.

18. Naszkicuj wykresy funkcji.

a) $f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-4\right|-2, x \in \boldsymbol{R}$

b) $g(x)=2^{|x-3|-1}, x \in \boldsymbol{R}$

19. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x)=-2^{|x|}-4$ b) $f(x)=2^{\sin x}-3$ c) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x-2^{-x+1}$

D 20. Wykaż, że funkcja $g(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-6x}$, gdzie $x \in \langle 1, 2\rangle$, przyjmuje najmniejszą wartość równą $\frac{1024}{243}$.

21. Rozwiąż równania.

a) $\left(\sqrt[3]{4\sqrt[4]{4}}\right)^{6x+6}=8^{\frac{1}{3}x^2+3}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-|3x-5|}+4\cdot 3^{|5-3x|-1}=45$

c) $25^x+9^x=2\cdot 15^x$

d) $2^x+2^{3x}+2^{5x}+\ldots=\frac{4}{15}$

22. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{4x-3}{x+2}} \geqslant \sqrt[4]{\frac{49}{9}}$

b) $3^{3x+1}+3>7\left(9^x+3^x\right)$

c) $10^{3x+5}-5^{2x-1}\cdot 2^{4x+11}>0$

d) $\sqrt{5^{2x}-5^{x+1}}<5^x\cdot 8^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots}$

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm – powtórzenie wiadomości

Logarytmy i ich własności poznaliśmy w pierwszej klasie szkoły średniej. W tym temacie przypomnimy i utrwalimy już zdobytą wiedzę.

Definicja 1.
Logarytmem liczby dodatniej b, przy dodatniej i różnej od jedności podstawie a, nazywamy liczbę c, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę b.

Tę definicję możemy zapisać krócej:

Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$ i $b > 0$, to $\left(\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b\right)$.

Logarytm, którego podstawą jest liczba 10, nazywamy **logarytmem dziesiętnym**. Logarytm dziesiętny liczby b oznaczamy $\log b$.

Ćwiczenie 1. Oblicz: a) $\log_2 16$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ c) $\log_{125} 5$ d) $\log 0{,}01$.

Ćwiczenie 2. Wyznacz wartości x, dla których istnieje liczba $\log_{3-x}(x+2)$.

Przykład 1.

Obliczymy $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(64\sqrt[3]{2}\right)$.

Oznaczmy szukany logarytm jako x. Korzystamy z definicji 1. i otrzymujemy równanie wykładnicze. Mamy:

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(64\sqrt[3]{2}\right) = x \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x = 64\sqrt[3]{2}$$

Sprowadzamy obie strony otrzymanego równania do potęg o podstawie 2.

$$\left(2^{\frac{1}{2}} : 2\right)^x = 2^6 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$2^{-\frac{1}{2}x} = 2^{\frac{19}{3}}, \quad \text{stąd} \quad -\frac{1}{2}x = \frac{19}{3}, \quad \text{czyli} \quad x = -12\frac{2}{3}$$

Liczba $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(64\sqrt[3]{2}\right)$ jest równa $-12\frac{2}{3}$.

Ćwiczenie 3. Wykaż, że jeśli $\log_{5\sqrt[3]{5}} 25 = a$ oraz $\log_{9\sqrt[5]{3}}\left(27\sqrt[3]{9}\right) = b$, to $2ab = 5$.

Przykład 2.

Wyznaczymy p ze wzoru $a = b \cdot 5^{3p}$, wiedząc, że liczby a, b są dodatnie.

Obie strony równości $a = b \cdot 5^{3p}$ dzielimy przez b, $b > 0$. Otrzymujemy:

$$\frac{a}{b} = 5^{3p}, \quad \text{gdzie} \quad \frac{a}{b} > 0, \qquad 5 > 0 \ \text{ i } \ 5 \neq 1.$$

Z definicji logarytmu wynika, że

$$3p = \log_5 \frac{a}{b}, \qquad \text{czyli} \qquad p = \frac{1}{3}\log_5 \frac{a}{b}$$

Ćwiczenie 4. Wyznacz k ze wzoru $2 = \dfrac{b}{a \cdot 3^k}$, wiedząc, że liczby a, b są dodatnie.

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące własności logarytmu.

Twierdzenie 1. *Podstawowe własności logarytmów*

Jeśli $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$ i $b \in \boldsymbol{R}_+$ i $r \in \boldsymbol{R}$, to:

a) $\log_a a = 1$ b) $\log_a 1 = 0$ c) $\log_a a^r = r$ d) $a^{\log_a b} = b$

Przykład 3.

Obliczamy:

a) $\log_3 (81 \cdot 729) = \log_3 \left(3^4 \cdot 3^6\right) = \log_3 3^{10} = 10$ Stosujemy twierdzenie 1 c) i 1 a).

b) $8^{\log_2 5} = \left(2^3\right)^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^3 = 5^3 = 125$ Stosujemy twierdzenie 1 d).

Prawa działań na logarytmach przedstawia kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Jeśli $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, $b \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$ oraz $x > 0$ i $y > 0$, $r \in \boldsymbol{R}$, to:

a) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$ b) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$

c) $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$ d) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Przykład 4.

Obliczymy wartość wyrażenia $2\log_2 \sqrt{3} - \log_2 0{,}75$.

Na podstawie twierdzenia 2c) mamy:

$$2\log_2 \sqrt{3} = \log_2 \left(\sqrt{3}\right)^2 = \log_2 3$$

Wówczas:

$$2\log_2\sqrt{3}-\log_2 0{,}75=\log_2 3-\log_2\frac{3}{4}=$$ Korzystamy z twierdzenia 2 b).

$$=\log_2 3-\left(\log_2 3-\log_2 4\right)=\log_2 4=2$$

Wartość danego wyrażenia jest równa 2.

Przykład 5.

Wykażemy, że liczba $\log_5 2\cdot\log_2 5+\frac{\log_7 64}{\log_7 8}$ jest liczbą naturalną.

Korzystamy z twierdzenia 2d). Zauważamy, że

$$\log_2 5=\frac{\log_5 5}{\log_5 2}=\frac{1}{\log_5 2},\ \text{zatem}\ \log_5 2\cdot\log_2 5=\log_5 2\cdot\frac{1}{\log_5 2}=1$$

$$\frac{\log_7 64}{\log_7 8}=\log_8 64=2$$

Ostatecznie

$$\log_5 2\cdot\log_2 5+\frac{\log_7 64}{\log_7 8}=1+2=3,\quad 3\in\boldsymbol{N},$$ co kończy dowód.

Ćwiczenie 5. Wykaż, że $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b i jednocześnie różnych od 1.

Ćwiczenie 6. Wykaż, że liczba $9^{\log_3 5-0{,}5}+\frac{1}{3}\cdot\log_2 5\cdot\log_5 4$ jest liczbą całkowitą, podzielną przez 3.

Przykład 6.

Wiadomo, że $\log 3=a$ i $\log 2=b$. Wyznaczymy liczby $\log 108$ oraz $\log 5$ w zależności od liczb a i b.

Mamy:

$$\log 108=\log\left(27\cdot 4\right)\underset{\text{tw. 2a)}}{=}\log 27+\log 4=\log 3^3+\log 2^2\underset{\text{tw. 2c)}}{=}3\log 3+2\log 2=$$

$$=3a+2b$$

$$\log 5=\log\frac{10}{2}\underset{\text{tw. 2b)}}{=}\log 10-\log 2\underset{\text{tw. 1a)}}{=}1-b$$

Ćwiczenie 7. Wykaż, że jeśli $a = \log_6 5$ oraz $b = \log_6 2$, to $\log_3 10 = \frac{a+b}{1-b}$.

Przykład 7.

Skrócimy ułamek $\frac{\log_6^3 4 + \log_6^3 9}{\log_6^2 2 - \log_6 3 \cdot (\log_6 2 - \log_6 3)}$.

W liczniku ułamka skorzystamy z twierdzenia 1c).

$$\frac{\log_6^3 4 + \log_6^3 9}{\log_6^2 2 - \log_6 3 \cdot (\log_6 2 - \log_6 3)} = \frac{\left(\log_6 2^2\right)^3 + \left(\log_6 3^2\right)^3}{\log_6^2 2 - \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6^2 3} =$$

$$= \frac{(2\log_6 2)^3 + (2\log_6 3)^3}{\log_6^2 2 - \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6^2 3} = \frac{8\left(\log_6^3 2 + \log_6^3 3\right)}{\log_6^2 2 - \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6^2 3}$$

Następnie zastosujemy wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ oraz twierdzenie 1a).

$$\frac{8 \cdot (\log_6 2 + \log_6 3) \cdot \cancel{\left(\log_6^2 2 - \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6^2 3\right)}^{1}}{\cancel{\left(\log_6^2 2 - \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6^2 3\right)}_{1}} = 8 \cdot (\log_6 2 + \log_6 3) =$$

$$= 8 \cdot \log_6 6 = 8$$

Otrzymaliśmy, że $\frac{\log_6^3 4 + \log_6^3 9}{\log_6^2 2 - \log_6 3 \cdot (\log_6 2 - \log_6 3)} = 8$.

Przykład 8.

Pokażemy, że jeśli ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest ciągiem geometrycznym, to ciąg $(\log a, \log b, \log c)$ jest ciągiem arytmetycznym.

Przypomnijmy: ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy

$b^2 = a \cdot c$

Z założenia $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$. Zatem istnieją logarytmy $\log b^2$ i $\log(a \cdot c)$ oraz

$\log b^2 = \log(a \cdot c)$ Korzystamy z twierdzenia 2c) i 2a).

$2 \cdot \log b = \log a + \log b$, czyli $\log b = \frac{\log a + \log c}{2}$

Otrzymaliśmy, że środkowy wyraz ciągu $(\log a, \log b, \log c)$ jest średnią arytmetyczną dwóch sąsiednich wyrazów. To znaczy, że ten ciąg jest arytmetyczny, co kończy dowód.

Wiesz już, że niewymierna liczba e, zwana liczbą Eulera, jest granicą ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, a jej przybliżenie dziesiętne z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku jest równe 2,72.

Logarytm o podstawie e nazywamy **logarytmem naturalnym**.
Logarytm naturalny liczby *b* oznaczamy ln *b*.

Na przykład:
$\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln e^4 = 4$, itd.
Logarytm naturalny stosowany jest w naukach ścisłych, w ekonomii oraz w naukach przyrodniczych.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz:
   a) $\log_4 16$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 81$ c) $\log_{216}\frac{1}{6}$ d) $\log_{\sqrt{5}} 1$
   e) $\log_{625} 5$ f) $\log_{\frac{2}{5}} 0{,}4$ g) $\log_{0,8} 1\frac{9}{16}$ h) $\log_{1,6}\sqrt[3]{\frac{25}{64}}$

2. Oblicz:
   a) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{32}{\sqrt[4]{8}}$ b) $\log_{2\sqrt[3]{2}}\left(8\sqrt[5]{16}\right)$ c) $\log_{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}\left(81\sqrt[5]{27}\right)$ d) $\log_{\frac{\sqrt[5]{3}}{9}}\sqrt[3]{81\sqrt[4]{3}}$

3. Liczby *B*, *M*, *t*, *p*, *c*, są dodatnie i różne od 1. Wyznacz z danego wzoru wskazaną obok niego wielkość.
   a) $B = p\cdot 5^t$, t b) $p = M^{c-1} - t$, c c) $M + B = 3\cdot c^{-p}$, p

4. Oblicz wartość wyrażenia:
   a) $\log_2 24 - \log_2 3$ b) $\log_3 1\frac{1}{3} + \log_3 6\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}\log_4 8 - \log_4 32$
   d) $2\log_3 5 - \log_3 75$ e) $3^{\log_3 4} + \log_3\sqrt[3]{3}$ f) $25^{\log_5\sqrt{2}} - \frac{1}{\log_8 2}$

5. Przedstaw daną liczbę w postaci $\log_a b$, gdzie $a \in (0,1)\cup(1,+\infty)$, $b \in (0,+\infty)$.
   a) $1 + \log_3 7$ b) $\log 8 + 2$ c) $\log_{\frac{2}{3}} 4 - 1$
   d) $\frac{1}{3} - \log_2 5$ e) $-\frac{2}{3} + 2\log_8 3$ f) $\frac{4}{3} - \frac{1}{5}\log_{27} 32$

D 6. Wykaż, że wartość danego wyrażenia jest liczbą całkowitą.
   a) $(\log_{0,5} 6 - \log_{0,5} 3)\cdot(2\log 5 + \log 4)$ b) $16^{\log_2\sqrt{2}+0,5} - \frac{\log_3 25}{\log_3 5}$

c) $\log_2 20-\left(3+\frac{1}{\log 2}\right)$ d) $\log_{15}^2 3+\log_{15}^2 5+\log_{15} 5\cdot\log_{15} 9$

7. Skróć dany ułamek.

a) $\frac{\log_5^3 4+\log_5^3 9}{\log_5^2 2+\log_5^2 3-\log_5 2\cdot\log_5 3}$ b) $\frac{8-\log^3 20}{\log 5}$ c) $\frac{\log_7^3 2-\log_7^3 5}{\log_7 0{,}4}$

8. Porównaj liczby a i b.

$a=\frac{\log_{0,5}^3 2{,}25-\log_{0,5}^3 9}{4\left(\log_{0,5}^2 1{,}5+\log_{0,5} 1{,}5\cdot\log_{0,5} 3+\log_{0,5}^2 3\right)}$, $b=\log 5\cdot\log 20+\log^2 2$

D 9. Wykaż, że:

a) liczba $64^{\frac{\log_7 3}{\log_7 9}}$ jest liczbą parzystą,

b) liczba $\log_9\left(\log_2\sqrt[3]{3}\right)-\log_9\left(\log_2 3\right)$ jest ujemną liczbą wymierną,

c) liczba $\frac{5\log_4\left(3\sqrt{5}-3\right)+5\log_4\left(3\sqrt{5}+3\right)}{2+\log_4 81}$ jest dodatnią liczbą wymierną.

D 10. Wykaż, że iloczyn $m\cdot n$, gdzie $m=\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}$ i $n=\log_2\log_2\sqrt[4]{\sqrt{2}}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

D 11. Wykaż, że jeśli $a=\log_3 2$ i $b=\log_3 7$, to $\log_{81} 84=\frac{2a+b+1}{4}$.

D 12. Wykaż, że jeśli $a=\log_{15} 10$ i $b=\log_{15} 3$, to $\log_5 30=\frac{a+b}{1-b}$.

D 13. Wykaż, że
$(\log_2 5)^{-1}+(\log_3 5)^{-1}+(\log_4 5)^{-1}+(\log_5 5)^{-1}+(\log_6 5)^{-1}=1+2\log_5 12$.

D 14. Wykaż, że liczba $\log_{\frac{3}{7}}^2 21-\log_{\frac{3}{7}} 81\cdot\log_{\frac{3}{7}} 7$ jest liczbą całkowitą.

D 15. Wykaż, że jeśli $a=8^{\log_4 36}+\log_2 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$ i $b=10^{\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}$, to liczba $a+b$ jest liczbą całkowitą podzielną przez 11.

D 16. Wykaż, że: a) $\frac{3-0{,}5\cdot\ln 4}{\ln 5}=\log_5\frac{e^3}{2}$ b) $\frac{\frac{\ln 8}{\ln 2}+\ln 9\cdot\log_9 e}{\ln\left(e^2+2e+1\right)}=2\log_{e+1} e$

Funkcja logarytmiczna – powtórzenie i uzupełnienie wiadomości

Wykres i własności funkcji logarytmicznej znasz z klasy pierwszej. Teraz powtórzymy i rozszerzymy zdobytą wiedzę.

Definicja 1.

Funkcją logarytmiczną o dodatniej i różnej od 1 podstawie a, nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = \log_a x$. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

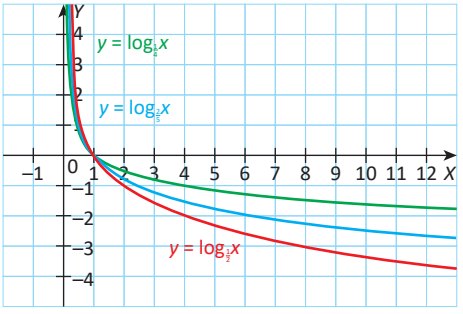
Omówimy własności funkcji logarytmicznej. W tym celu rozpatrzymy dwa przypadki ze względu na podstawę logarytmu.

I przypadek $a \in (0, 1)$

Przykłady funkcji logarytmicznych:

$y = \log_{\frac{1}{4}} x$, $y = \log_{\frac{2}{5}} x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Na rysunku obok przedstawione są wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych.

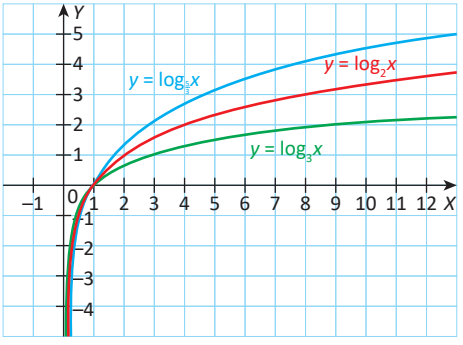


II przypadek $a \in (1, +\infty)$

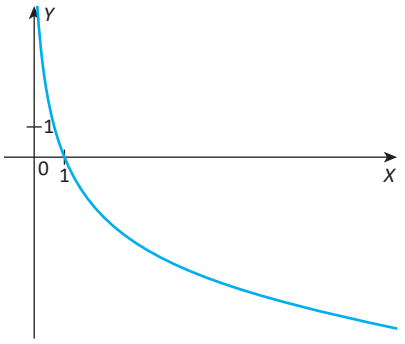
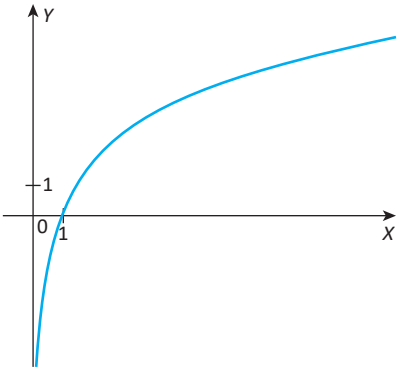
Przykłady funkcji logarytmicznych:

$y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{5}{3}} x$

Wykresy funkcji logarytmicznych znajdują się na rysunku obok.



Własności funkcji logarytmicznej.

<table>
<tr><th>$y=\log_a x,\ \ 0<a<1$</th><th>$y=\log_a x,\ \ a>1$</th></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wykresem funkcji logarytmicznej jest krzywa logarytmiczna, położona w I i IV ćwiartce układu współrzędnych.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funkcja przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, $ZW=\boldsymbol{R}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funkcja ma jedno miejsce zerowe. Jest to liczba 1.</td></tr>
<tr><td>Funkcja przyjmuje wartości:
dodatnie w przedziale $(0,\,1)$,
ujemne w przedziale $(1,\,+\infty)$.</td><td>Funkcja przyjmuje wartości:
dodatnie w przedziale $(1,\,+\infty)$,
ujemne w przedziale $(0,\,1)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funkcja jest różnowartościowa.</td></tr>
<tr><td>Funkcja logarytmiczna jest malejąca.</td><td>Funkcja logarytmiczna jest rosnąca.</td></tr>
</table>

Ćwiczenie 1. Naszkicuj wykres funkcji logarytmicznej f i omów jej własności.

a) $f(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$ b) $f(x)=\log_4 x$

Przykład 1.

Porównamy liczby k, l, m, n, gdzie:

$$k=\frac{1}{2},\quad l=\frac{\log\pi}{\log 3},\quad m=2\log_3\left(\sqrt{3}-1\right),\quad n=\log_3 2^{\log_2 0,4}$$

Każdą z podanych liczb możemy zapisać w postaci logarytmu o podstawie 3. Skorzystamy z praw działań na logarytmach.

$$k=\frac{1}{2}\cdot\log_3 3=\log_3\sqrt{3}$$

$$l=\frac{\log\pi}{\log 3}=\log_3\pi$$

$$m=2\log_3\left(\sqrt{3}-1\right)=\log_3\left(\sqrt{3}-1\right)^2=\log_3\left(4-2\sqrt{3}\right)$$

$$n=\log_3 2^{\log_2 0{,}4}=\log_3 0{,}4$$

Wiemy, że funkcja logarytmiczna o podstawie większej od 1 jest rosnąca, zatem dla większych argumentów przyjmuje większe wartości. Ponieważ

$0{,}4<4-2\sqrt{3}<\sqrt{3}<\pi$, więc otrzymujemy $n<m<k<l$.

Ćwiczenie 2. Dane są liczby a, b, c, d, gdzie:

$$a=\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{9}},\quad b=\log_{\frac{4}{9}}\frac{3}{4},\quad c=-1,\quad d=-\frac{1}{2}\log_{\frac{4}{9}}25.$$

Wykaż, że $d>a>b>c$.

Przykład 2.

Wykażemy, że jeśli $a\in\boldsymbol{R}_+-\{1\}$, to liczby $2^{\log_a 3}$ oraz $3^{\log_a 2}$ są równe.

Funkcje wykładnicze $y=2^x$ oraz $y=3^x$ przyjmują tylko wartości dodatnie dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Zatem

$2^{\log_a 3}>0$ oraz $3^{\log_a 2}>0$

Istnieją logarytmy przy podstawie a liczb $2^{\log_a 3}$ oraz $3^{\log_a 2}$. Wówczas:

- $\log_a 2^{\log_a 3}=\log_a 3\cdot\log_a 2$
- $\log_a 3^{\log_a 2}=\log_a 2\cdot\log_a 3$

Otrzymaliśmy, że

$$\log_a 2^{\log_a 3}=\log_a 3^{\log_a 2}$$

Funkcja logarytmiczna $y=\log_a x$ jest różnowartościowa. To znaczy, że logarytmy dwóch liczb są równe wtedy i tylko wtedy, gdy te liczby są równe. Zatem z równości

$\log_a 2^{\log_a 3}=\log_a 3^{\log_a 2}$ wynika równość

$2^{\log_a 3}=3^{\log_a 2}$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 3. Wykaż, że $3^{\log_5 2}<2^{\log_5 4}$.

Przykład 3.

Wykresy funkcji $f(x)=2^{x-4}-3$, $x\in\boldsymbol{R}$ oraz $g(x)=\log_a x$, gdzie $a\in\boldsymbol{R}_+-\{1\}$ i $x>0$, przecinają się w punkcie o rzędnej -2.

a) Wyznaczymy wzór funkcji g.
b) Naszkicujemy wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych. Następnie porównamy liczby $f\left(\sqrt{5}\right)$ i $g\left(\sqrt{5}\right)$.

Ad a) Rzędna punktu wspólnego wykresów funkcji f i g jest równa -2. Obliczymy odciętą tego punktu, korzystając ze wzoru funkcji f. Otrzymujemy:

$$2^{x-4}-3=-2$$
$$2^{x-4}=1$$
$$2^{x-4}=2^0$$
$$x=4$$

Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie o współrzędnych $(4, -2)$.

Wówczas

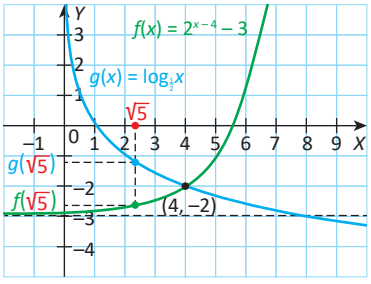
$$\log_a 4=-2$$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$$a^{-2}=4, \quad \text{stąd}$$
$$a^2=\frac{1}{4}$$
$$a=-\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad a=\frac{1}{2}$$

Tylko liczba $a=\frac{1}{2}$ spełnia założenie: $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$. Zatem funkcja g ma wzór $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, gdzie $x>0$.

Ad b) Wykres funkcji f otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji $y=2^x$ o wektor $[4, -3]$, czyli 4 jednostki w prawo i 3 jednostki w dół.
Wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych przedstawia rysunek obok.



Z wykresów funkcji f i g wynika, że dla argumentu $\sqrt{5}$ funkcja g przyjmuje większą wartość niż funkcja f, zatem $g\left(\sqrt{5}\right)>f\left(\sqrt{5}\right)$.

Ćwiczenie 4. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x)=\log_a x$ należy punkt o współrzędnych $(9, 2)$. Oblicz a. Na podstawie wykresu funkcji f podaj zbiór argumentów, dla których wartości funkcji f są mniejsze od 2.

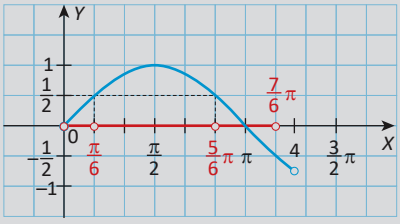
Przykład 4.

Wyznaczymy dziedzinę funkcji f określonej wzorem: $f(x)=\log_{\sin x+0,5}(4x-x^2)$.

Logarytm jest określony wtedy i tylko wtedy, gdy jego podstawa jest dodatnia i różna od 1 oraz liczba logarytmowana jest dodatnia. Zatem otrzymujemy układ warunków:

$$\begin{cases}\sin x+0,5>0\\ \sin x+0,5\neq 1\\ 4x-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>-0,5\\ \sin x\neq 0,5\\ x\in(0,4)\end{cases}$$

Układ ten rozwiążemy na podstawie wykresu funkcji $y=\sin x$, gdzie $x\in(0,4)$.



Dziedziną funkcji $f(x)=\log_{\sin x+0,5}(4x-x^2)$ jest zbiór $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{7}{6}\pi\right)$.

Ćwiczenie 5. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k\in\boldsymbol{R}$, dla których dziedziną funkcji $f(x)=\log_{k^2-1}(x^2-2kx+3)$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Przykład 5.

Zbadamy parzystość funkcji f określonej wzorem $f(x)=\log\frac{5-x}{5+x}$.

Wyznaczamy dziedzinę funkcji f.

$$\left(\frac{5-x}{5+x}>0\wedge x\neq -5\right)\Leftrightarrow(5-x)(5+x)>0\Leftrightarrow x\in(-5,5)$$

Dziedziną funkcji f jest przedział $(-5,5)$ symetryczny względem punktu 0. Zatem dla dowolnej liczby x należącej do dziedziny tej funkcji liczba $(-x)$ też do tej dziedziny należy.

Obliczamy wartość funkcji f dla argumentu $(-x)$.

$$f(-x)=\log\frac{5-(-x)}{5+(-x)}=\log\frac{5+x}{5-x}=\log\left(\frac{5-x}{5+x}\right)^{-1}=-\log\frac{5-x}{5+x}=-f(x)$$

Otrzymaliśmy, że $f(-x)=-f(x)$ dla dowolnej liczby x należącej do dziedziny funkcji f. To znaczy, że funkcja f jest nieparzysta.

Przykład 6.

Zbadamy, na podstawie definicji, monotoniczność funkcji $g(x)=\log_5^2 x$ w przedziale $(0, 1)$.

Niech $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (0, 1)$ oraz $x_1 < x_2$. Obliczamy różnicę $g(x_1) - g(x_2)$.

$$g(x_1)-g(x_2)=\log_5^2 x_1-\log_5^2 x_2=(\log_5 x_1-\log_5 x_2)(\log_5 x_1+\log_5 x_2)=$$
$$=(\log_5 x_1-\log_5 x_2)\cdot\log_5(x_1\cdot x_2)$$

- Funkcja logarytmiczna $y=\log_5 x$ jest rosnąca, zatem z założenia $x_1 < x_2$ wynika, że $\log_5 x_1 < \log_5 x_2$, stąd $\log_5 x_1 - \log_5 x_2 < 0$
- Argumenty x_1, x_2 należą do przedziału $(0, 1)$, więc $x_1 \cdot x_2 \in (0, 1)$, stąd $\log_5(x_1 \cdot x_2) < 0$
- Iloczyn dwóch liczb ujemnych jest dodatni, więc otrzymujemy $(\log_5 x_1 - \log_5 x_2) \cdot \log_5(x_1 \cdot x_2) > 0$, czyli $g(x_1) > g(x_2)$

Dla dowolnych argumentów x_1, x_2 należących do przedziału $(0, 1)$, z założenia $x_1 < x_2$ wynika, że $g(x_1) > g(x_2)$. To znaczy, że funkcja $g(x)=\log_5^2 x$ jest malejąca w zbiorze $(0, 1)$.

Ćwiczenie 6. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja $h(x) = \log_3(x - 4)$ jest rosnąca w przedziale $(4, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, gdzie $x > 0$. Następnie:
   a) oblicz wartość funkcji dla argumentu $\sqrt[5]{9}$,
   b) oblicz argument, dla którego wartość funkcji jest równa -4.
2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$, gdzie $x > 0$. Następnie:
   a) oblicz argument, dla którego wartość funkcji f jest równa $\frac{2}{3}$,
   b) oblicz wartość wyrażenia $f(4) - f(3) + f(6)$.
3. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$ oraz $x \in \boldsymbol{R}_+$, należy punkt $A(2\sqrt{2}, 3)$. Oblicz a. Na podstawie wykresu funkcji f podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 3.

4. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x)=\log_a x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$ oraz $x \in \boldsymbol{R}_+$, należy punkt $A\left(2\frac{1}{2}, -1\right)$. Oblicz a. Na podstawie wykresu funkcji f podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie większe niż -1.

5. Uporządkuj w kolejności malejącej liczby k, l, m, n.
   a) $k=\log_2\left[\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right]$, $l=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}$, $m=\frac{1}{2}$, $n=\log_2 2^{\log_2\sqrt{5}}$
   b) $k=\log_{\frac{1}{2}}\left(3+2\sqrt{2}\right)^2$, $l=2\log_{\frac{1}{2}}3$, $m=4$, $n=\log_{\frac{1}{2}}8-\log_{\frac{1}{2}}2\pi$.

6. Liczba rzeczywista p należy do przedziału $(k, k+1)$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Wyznacz k.
   a) $p=\log_3 2\frac{1}{2}$ b) $p=\log_4 20$ c) $p=\log_{\frac{1}{2}}7$ d) $p=\log_{\frac{1}{5}}0{,}12$

7. Określ, czy dana liczba jest dodatnia, czy ujemna.
   a) $\log_{\frac{1}{2}}6\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{7}$ b) $\log_4 3-\log_2 5$ c) $\log_{\frac{1}{3}}4+\log_{0,4}\frac{4}{25}$

8. Porównaj liczby a i b.
   a) $a=5^{\log_7 2}$ oraz $b=2^{\log_7 6}$ b) $a=7^{\log_{0,5}3}$ oraz $b=5^{\log_{0,5}7}$

9. Wykres funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-8}+2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, przecina wykres funkcji $g(x)=\log_a x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, $x>0$, w punkcie o rzędnej 3.
   a) Wyznacz wzór funkcji g.
   D b) Wykaż, że wartość wyrażenia $g(3)+g(5)-2^{g(2)}$ jest równa $\log_2 3{,}75$.

10. Do wykresu funkcji $f(x)=r\cdot\log x+p$, gdzie $x>0$, należą punkty $A\left(\frac{1}{100}, 3\right)$ oraz $B(1, 7)$. Wyznacz liczby p i r. Następnie oblicz wartość tej funkcji dla argumentu 0,001.

11. Rozwiąż daną nierówność. Wskaż dwie liczby całkowite, które należą do zbioru rozwiązań tej nierówności.
   a) $x-\log_3\frac{16}{9}>x\log_3 4$ b) $3+x\log_{\frac{1}{2}}3<2x$

12. Wyznacz dziedzinę funkcji f.
   a) $f(x)=\log_2\frac{x}{5-x}$ b) $f(x)=\log_\pi(x^3+2x^2)$

c) $f(x)=\log_{\frac{4}{5}}\left(3^{4x^2}-9^x\right)$ d) $f(x)=\log_x\left(3-|x+1|\right)$

13. Wyznacz dziedzinę funkcji f.
a) $f(x)=\log_{x^2+5}\left(x^2+2x+8\right)$ b) $f(x)=\log_{|x-2|}x^2$
c) $f(x)=\log_{7-x}\left(4^x-32\sqrt{2}\right)$ d) $f(x)=\log_{\cos x-\frac{1}{2}}\left(-2x^2+13x-6\right)$

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których dziedziną funkcji $f(x)=\log\left(mx^2-mx+1\right)$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

15. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których dziedziną funkcji $g(x)=\ln\left[(m^2-1)x+(m+1)x+1\right]$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

16. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja $f(x)=\log_{k^3-3k+3}x$ jest rosnąca.

17. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja $g(x)=\log_{4-|2k-3|}x$ jest malejąca.

D 18. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja f określona wzorem $f(x)=\log^2 x$ jest rosnąca w zbiorze $(1, +\infty)$.

D 19. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja g określona wzorem $g(x)=\log_{0,25}(3-x)$ jest rosnąca w zbiorze $(-\infty, 3)$.

D 20. Wykaż, że funkcja $f(x)=\log_3(2-x)-\log_3(x+2)$ jest nieparzysta.

D 21. Wykaż, że funkcja $g(x)=\dfrac{\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{4x^2+1}$ jest parzysta.

D 22. Wykaż, że w przedziale $\langle 0, 3\rangle$ funkcja $f(x)=\log_{\frac{\sqrt{6}}{6}}\left(x^2-2x+7\right)$ przyjmuje największą wartość, równą -2.

D 23. Wykaż, że w przedziale $\langle 2e, 7\rangle$ funkcja $g(x)=\ln\left(x^2-ex\right)$ przyjmuje najmniejszą wartość, równą $2+\ln 2$.

24. Zbadaj, czy funkcje f i g są równe.
a) $f(x)=\log_\pi(x-4)-\log_\pi(5-x)$, $g(x)=\log_\pi\dfrac{4-x}{x-5}$
b) $f(x)=\log\left(x^2+4x+4\right)$, $g(x)=2\log(x+2)$
c) $f(x)=\dfrac{1}{2}\log_3 x^2$, $g(x)=\log_3|x|$

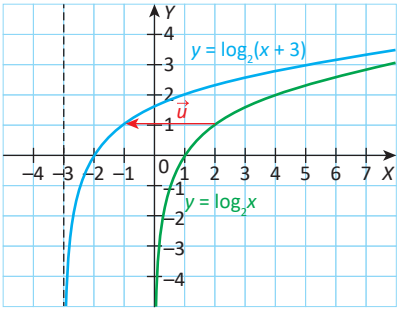
Przekształcenia wykresów funkcji logarytmicznych

Przykład 1.

Na podstawie wykresu funkcji $y = \log_2 x$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, naszkicujemy wykres funkcji: a) $y = \log_2(x+3)$ b) $y = \log_2 x - 1$.

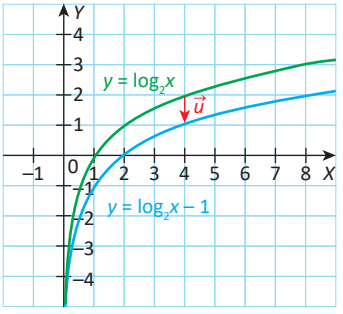
Ad a) Wykres funkcji
$y = \log_2(x+3)$
otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji $y = \log_2 x$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi *OX*, czyli o wektor
$[-3, 0]$.

Wykres funkcji $y = \log_2(x+3)$ przedstawia rysunek obok.



Ad b) Wykres funkcji
$y = \log_2 x - 1$
otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji $y = \log_2 x$ o 1 jednostkę w dół wzdłuż osi *OY*, czyli o wektor
$[0, -1]$.

Wykres funkcji $y = \log_2 x - 1$ przedstawiony jest na rysunku obok.

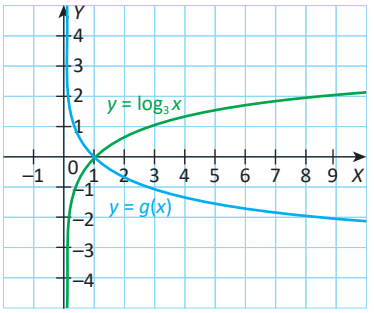


Ćwiczenie 1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_2(x+3) - 1$. Następnie odczytaj z wykresu miejsce zerowe funkcji f oraz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 0.

Przykład 2.

Wykres funkcji $f(x) = \log_3 x$ przekształcimy w symetrii osiowej względem osi *OX*. Następnie pokażemy, że otrzymany wykres jest wykresem funkcji logarytmicznej, którą można opisać wzorem $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji f oraz jego obraz w symetrii osiowej względem osi OX, czyli wykres funkcji g.



Nową funkcję można opisać wzorem
$g(x) = -f(x)$.

Wówczas:

$g(x) = -\log_3 x$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$$g(x) = -\frac{\log_{\frac{1}{3}} x}{\log_{\frac{1}{3}} 3}$$

$$g(x) = -\frac{\log_{\frac{1}{3}} x}{-1}$$

$g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Przekształcając wykres funkcji $f(x) = \log_3 x$ przez symetrię osiową względem osi OX, otrzymujemy wykres funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Ćwiczenie 2. Wykaż, że jeśli przesuniemy równolegle wykres funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 5 jednostek w prawo i dwie jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji, którą opisuje wzór $y = \log_{\frac{1}{3}}(9x - 45)$.

Przykład 3.

We wspólnym układzie współrzędnych naszkicujemy wykresy funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ oraz $g(x) = \frac{3}{7}x + \frac{3}{7}$. Następnie:

a) rozwiążemy graficznie równanie $\log_{\frac{1}{2}}(-x) = \frac{3}{7}x + \frac{3}{7}$,

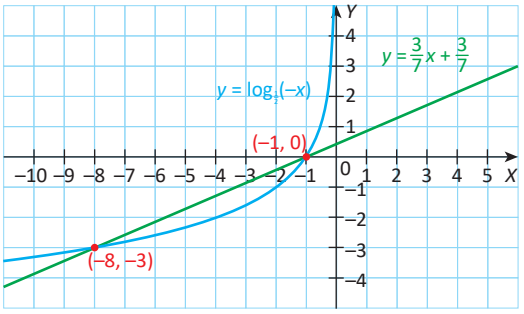
b) podamy zbiór rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{2}}(-x) > \frac{3}{7}x + \frac{3}{7}$.

Dziedziną funkcji g jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Wyznaczamy dziedzinę funkcji f:

$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$, stąd $D_f = (-\infty, 0)$

Wykres funkcji f otrzymamy, przekształcając wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ przez symetrię osiową względem osi OY. Wykresem funkcji g jest prosta, przechodząca przez punkty $(-1, 0)$, $(6, 3)$. Na rysunku poniżej, we wspólnym układzie współrzędnych, znajdują się wykresy funkcji f i g.

Ad a) Dziedziną równania jest część wspólna dziedzin funkcji f i g, czyli przedział $(-\infty, 0)$. Z rysunku odczytujemy współrzędne punktów przecięcia obu wykresów, następnie wykonujemy rachunkowo sprawdzenie poprawności odczytu.



Wykresy funkcji f i g przecinają się w dwóch punktach $(-8, -3)$ oraz $(-1, 0)$. Sprawdzamy:

- $f(-8) = \log_{\frac{1}{2}}\left[-(-8)\right] = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, $\quad g(-8) = \frac{3}{7}\cdot(-8) + \frac{3}{7} = \frac{-21}{7} = -3$,

  $f(-8) = g(-8)$
- $f(-1) = \log_{\frac{1}{2}}\left[-(-1)\right] = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, $\quad g(-1) = \frac{3}{7}\cdot(-1) + \frac{3}{7} = 0$,

  $f(-1) = g(-1)$

Rozwiązaniami równania $\log_{\frac{1}{2}}(-x) = \frac{3}{7}x + \frac{3}{7}$ są dwie liczby: -8 oraz -1.

Ad b) Podobnie jak w przypadku powyższego równania, dziedziną nierówności

$$\log_{\frac{1}{2}}(-x) > \frac{3}{7}x + \frac{3}{7}$$

jest przedział $(-\infty, 0)$. Odczytujemy z wykresu obu funkcji argumenty należące do przedziału $(-\infty, 0)$, dla których wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g (wykres funkcji f leży nad wykresem funkcji g):

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -8) \cup (-1, 0)$

Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest suma przedziałów: $(-\infty, -8) \cup (-1, 0)$.

Przykład 4.

Wyznaczymy dziedzinę funkcji $f(x)=\left|\log_2 \frac{x-2}{x^2-4}\right|$. Naszkicujemy wykres funkcji *f*.

Wyznaczamy dziedzinę funkcji *f*.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4}>0 \\ x^2-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+2}>0 \\ x\in \boldsymbol{R}-\{-2,2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\in \boldsymbol{R}-\{-2,2\} \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2,2)\cup(2,+\infty)$$

Dziedziną funkcji *f* jest zbiór $(-2, 2)\cup(2, +\infty)$.

Teraz przekształcamy wzór funkcji *f* do prostszej postaci.

$$\left|\log_2 \frac{x-2}{x^2-4}\right|=\left|\log_2 \frac{1}{x+2}\right|=\left|\log_2 (x+2)^{-1}\right|=\left|-\log_2 (x+2)\right|=\left|\log_2 (x+2)\right|$$

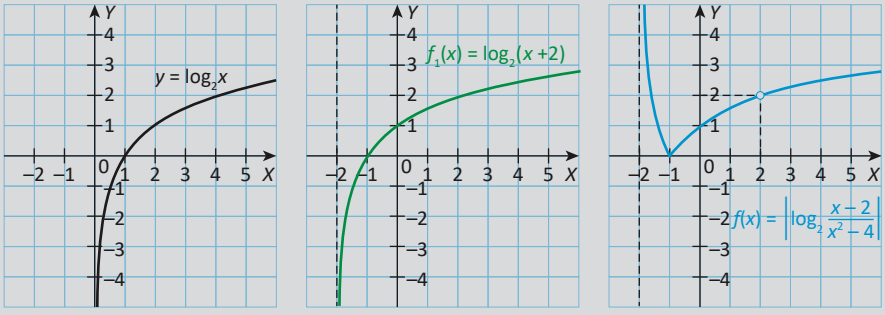
Mamy:

$f(x)=\left|\log_2 (x+2)\right|$, gdzie $x\in(-2, 2)\cup(2, +\infty)$

Wykres funkcji $f(x)=\left|\log_2 (x+2)\right|$ otrzymamy, przekształcając wykres funkcji $y=\log_2 x$ następująco:

$$y=\log_2 x \xrightarrow{T_{\vec{u}}=[-2,0]} f_1(x)=\log(x+2) \xrightarrow{y=|f_1(x)|} f(x)=\left|\log_2 (x+2)\right|$$

Kolejne przekształcenia ilustrują poniższe rysunki.



Przykład 5.

Rozwiążemy graficznie równanie $-0,5\log_{\frac{1}{3}} x^2=\frac{1}{2}|x|-\frac{1}{2}$.

Interpretujemy równanie jako równość wartości dwóch funkcji:

$f(x)=-0,5\log_{\frac{1}{3}} x^2$ oraz $g(x)=\frac{1}{2}|x|-\frac{1}{2}$

Dziedziną funkcji *f* jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{0\}$, dziedziną funkcji *g* jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Zatem dziedziną rozważanego równania jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{0\}$.

Przekształcamy wzór funkcji *f*.

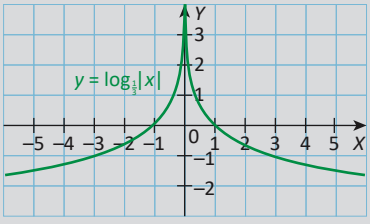
$$-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x^2 = -\log_{\frac{1}{3}}\left[\left(x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = -\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2} = -\log_{\frac{1}{3}}|x|, \quad \text{stąd}$$

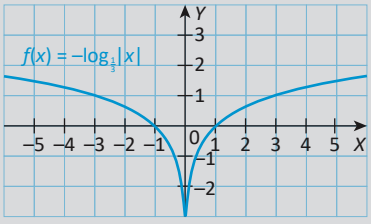
$$f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}|x|, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$$

Wykres funkcji *f* otrzymamy na podstawie wykresu funkcji $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, po zastosowaniu następujących przekształceń:

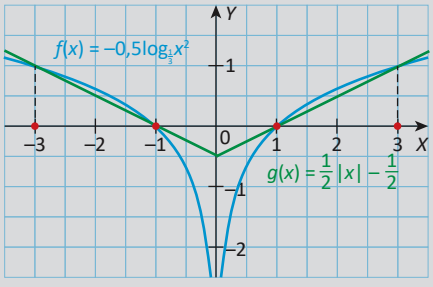
$$h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \xrightarrow{y=h(|x|)} y = \log_{\frac{1}{3}}|x| \xrightarrow{S_{OX}} f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}|x|$$

Rysunki poniżej przedstawiają wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{3}}|x|$ i wykres funkcji *f*.





Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{2}$ otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji $y = \frac{1}{2}|x|$ o wektor $\left[0, -\frac{1}{2}\right]$. Szkicujemy wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych. Znajdujemy puwnkty wspólne obu wykresów.



Sprawdzamy odczytane rozwiązania:

$$f(-3) = f(3) = -0{,}5\log_{\frac{1}{3}} 9 = -0{,}5\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 1$$

$$g(-3) = g(3) = \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2} = 1$$

$$f(-3) = g(-3) \quad \text{oraz} \quad f(3) = g(3)$$

Podobnie

$$f(-1) = f(1) = -0{,}5\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0 \qquad g(-1) = g(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$f(-1) = g(-1) \qquad \text{oraz} \qquad f(1) = g(1)$$

Równanie $-0{,}5\log_{\frac{1}{3}} x^2 = \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{2}$ ma cztery rozwiązania: –3, –1, 1, 3.

Ćwiczenie 3. Porównaj dziedziny funkcji: $f(x)=\log_4(x-1)^2$ oraz $g(x)=2\log_4(x-1)$. Naszkicuj wykresy tych funkcji.

Przykład 6.

Rozwiążemy graficznie nierówność $x^2-1\leqslant\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x)-\log_{\frac{1}{4}}(4-x)$.

Przyjmijmy oznaczenia:

$f(x)=x^2-1$ oraz $g(x)=\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x)-\log_{\frac{1}{4}}(4-x)$.

Wyznaczamy dziedzinę nierówności. Funkcja *f* określona jest w zbiorze ***R***. Dziedzinę funkcji *g* wyznaczymy, rozwiązując następujący układ nierówności:

$$\begin{cases}x^2-4x>0\\4-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-4)>0\\x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)\\x<4\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$$

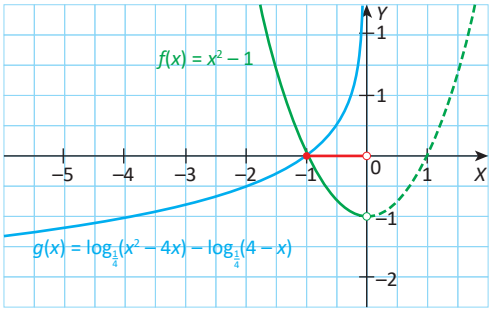
Dziedziną funkcji *g* jest zbiór $(-\infty, 0)$. Wówczas dziedziną nierówności jest część wspólna dziedzin obu funkcji, czyli przedział $(-\infty, 0)$.

Wzór funkcji *g* możemy przekształcić do prostszej postaci.

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x)-\log_{\frac{1}{4}}(4-x)=\log_{\frac{1}{4}}\frac{x(x-4)}{4-x}=\log_{\frac{1}{4}}(-x),\ \text{stąd}$$

$$g(x)=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$$

Rozwiązać nierówność $f(x)\leqslant g(x)$, to znaczy wyznaczyć zbiór tych argumentów należących do przedziału $(-\infty, 0)$, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości nie większe niż funkcja *g* (wykres funkcji *f* leży pod wykresem funkcji *g* lub wykresy te mają punkty wspólne). Szkicujemy we wspólnym układzie współrzędnych wykresy obu funkcji, w przedziale $(-\infty, 0)$.



Sytuację tę ilustruje rysunek obok. Wykresy przecinają się w punkcie $(-1, 0)$. Sprawdzamy poprawność odczytu:

$$g(-1)=\log_{\frac{1}{4}}5-\log_{\frac{1}{4}}5=0$$

$f(-1)=1-1=0$, zatem $g(-1)=f(-1)$.

Z rysunku odczytujemy:

$f(x)\leqslant g(x)\Leftrightarrow x\in\langle-1, 0)$

Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $\langle-1, 0)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$ i naszkicuj wykres tej funkcji.
   a) Oblicz wartość funkcji *f* dla argumentu 12.
   b) Odczytaj z wykresu argument, dla którego wartość funkcji *f* jest równa –1.
2. Wyznacz dziedzinę funkcji $g(x)=-2+\log_3(x+1)$ i naszkicuj wykres tej funkcji.
   a) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji *g* i osi *OY*.
   b) Oblicz wartość funkcji *g* dla argumentu 8. Następnie odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja *g* przyjmuje wartości ujemne.
3. Naszkicuj wykres funkcji $h(x)=-\log_2 x+3$, gdzie $x\in(0,+\infty)$.
   a) Rozwiąż graficznie równanie $h(x)=1$.
   b) Rozwiąż graficznie nierówność $h(x)\leqslant x$.
4. Podaj dziedzinę funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(-x)-1$ i naszkicuj wykres tej funkcji.
   a) Sprawdź, czy punkty $A\left(-\frac{1}{3},0\right)$ oraz $B\left(-3\sqrt{3},-2\frac{1}{2}\right)$ należą do wykresu funkcji *f*.
   b) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{3}}(-x)-1\geqslant 0$.
   c) Rozwiąż graficznie równanie $f(x)=|x|-2$.
5. Rozwiąż graficznie równania.
   a) $1=-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ b) $\log_2(x+2)=\frac{3x+3}{7}$ c) $\log_5(-x)=\frac{-5}{x}$
6. Rozwiąż graficznie nierówności.
   a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\leqslant x-3$ b) $\log_2 x-1\geqslant\frac{1}{4}(x-2)^2$ c) $-\log_{\frac{1}{3}}x<\frac{2x}{3}$
7. Wyznacz dziedzinę funkcji *f* i naszkicuj wykres tej funkcji.
   a) $f(x)=\log_3(3x+12)$ b) $f(x)=\log_2\frac{1}{4x}$
   c) $f(x)=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{-1}{x}\right)$ d) $f(x)=\log_{0,5}(5x+10)-\log_{0,5}5$
8. Wyznacz dziedzinę funkcji $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$. Następnie naszkicuj wykres funkcji *g*, korzystając z wykresu funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$.

9. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\log_2(3x-x^2)-\log_2(3-x)$. Następnie:
   a) naszkicuj wykres funkcji f i podaj zbiór wartości tej funkcji,
   b) podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie większe niż 1.

10. Dane są funkcje: $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+10x+25)$ oraz $g(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+5)$.
   a) Wyznacz dziedzinę funkcji f i dziedzinę funkcji g. Naszkicuj wykresy tych funkcji.
   b) Podaj rozwiązanie równania $g(x)=-4$.
   c) Rozwiąż graficznie nierówność $\frac{1}{2}\cdot f(x)\leqslant|x+5|-3$.

11. Wyznacz dziedzinę funkcji $h(x)=\log_3\frac{9}{x-1}$. Następnie:
   a) naszkicuj wykres funkcji h,
   b) rozwiąż graficznie nierówność $h(x)\geqslant\frac{x-1}{3}$.

12. Dany jest wzór funkcji. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.
   a) $f(x)=-|\log_3(x-1)|$ b) $g(x)=\left|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\right|-2$ c) $h(x)=\log_2\frac{x^2-4}{|x|+2}$

13. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2-9}{|x|-3}$. Następnie:
   a) naszkicuj wykres funkcji f i podaj zbiór wartości tej funkcji,
   b) rozwiąż graficznie nierówność $f(x)>-2$.

14. Rozwiąż graficznie równania.
   a) $\log_2(-x)=2^{-x-1}-1$
   b) $\log_2|x+3|=6-|x+3|$

15. Rozwiąż graficznie nierówności.
   a) $2\log_3 3x<x+1$
   b) $\log_{\frac{1}{3}}|x|\geqslant\frac{-3}{|x|}$

16. Rozwiąż graficznie układy równań.
   a) $\begin{cases}y=3^{x-1}+2\\ y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+5\end{cases}$
   b) $\begin{cases}y=\sqrt{4^{\log_2 x^2}}\\ y=\log_{\frac{1}{2}}|x|+1\end{cases}$

Równania logarytmiczne

Równaniem logarytmicznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje tylko w wyrażeniu logarytmowanym lub w podstawie logarytmu.

Przykłady równań logarytmicznych:

$\log_2(x+1)=4$ $\quad$ $\log_{x-1}(2x+3)=1$ $\quad$ $\log_{\frac{1}{3}} x^2 = 2\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_{\frac{1}{3}} x$

Podczas rozwiązywania równań logarytmicznych należy pamiętać o następujących założeniach wynikających z definicji logarytmu:

1) podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1,
2) wyrażenie logarytmowane jest dodatnie.

A. Proste równania logarytmiczne, które można rozwiązać bezpośrednio z definicji logarytmu

Przypomnijmy:
jeśli $a>0$, $a\neq 1$ i $b>0$, to $(\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c)$.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $\log_3(2x-1)=2$.

Najpierw wyznaczymy dziedzinę równania. Podstawa logarytmu jest równa 3, więc jest dodatnia i różna od 1. Wyrażenie $2x-1$ jest dodatnie tylko wtedy, gdy $2x-1>0$, zatem $D=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Rozwiązujemy równanie.

$\log_3(2x-1)=2$
$2x-1=3^2$
$2x=10$
$x=5, \qquad 5\in D$

Rozwiązaniem równania $\log_3(2x-1)=2$ jest liczba 5.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $\log_{x-3}16=2$.

Tym razem niewiadoma występuje w podstawie logarytmu.

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x-3\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(3,4)\cup(4,+\infty)$$

Otrzymaliśmy dziedzinę równania: $D=(3,4)\cup(4,+\infty)$.

Rozwiązujemy równanie:

$\log_{x-3} 16 = 2$
$(x-3)^2 = 16$ – na podstawie definicji logarytmu
$(x-3)^2 - 16 = 0$
$(x-3-4)(x-3+4) = 0$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$(x-7)(x+1) = 0$
$x-7=0 \quad \vee \quad x+1=0$
$x=7 \quad \vee \quad x=-1, \qquad 7 \in D, \qquad -1 \notin D$

Równanie $\log_{x-3} 16 = 2$ ma jedno rozwiązanie. Jest nim liczba 7.

Zamiast wyznaczać dziedzinę danego równania, możemy postąpić następująco.

1) Przekształcamy dane równanie i wyznaczamy liczby, spełniające kolejne równania, otrzymane w wyniku tych przekształceń. Jeśli początkowe równanie ma rozwiązania, to znajdują się one wśród otrzymanych liczb.
2) Sprawdzamy, które z otrzymanych liczb spełniają początkowe równanie. Te właśnie liczby są rozwiązaniami danego równania.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_{2x}(6x)\right] = -1$.

Niewiadoma x spełnia następujący układ nierówności:

$2x>0 \quad \wedge \quad 2x \neq 1 \quad \wedge \quad 6x>0 \quad \wedge \quad \log_{2x}(6x) > 0$

Rozwiązujemy równanie:

$\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_{2x}(6x)\right] = -1$

$\log_{2x}(6x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ – z definicji logarytmu

$\log_{2x}(6x) = 2$
$6x = (2x)^2$ – z definicji logarytmu
$6x = 4x^2$
$x=0 \quad \vee \quad x=1{,}5$

Liczba 0 nie spełnia równania $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_{2x}(6x)\right] = -1$ (sprawdź!). Sprawdzamy, czy liczba 1,5 spełnia równanie. Mamy: $6 \cdot 1{,}5 = 9$, $2 \cdot 1{,}5 = 3$, więc $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 9) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$.

Jedyną liczbą, która jest rozwiązaniem danego równania, jest liczba 1,5.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż równanie $\log_{\frac{1}{x-1}} 16 = -2$.

B. Równania logarytmiczne, które można rozwiązać przez podstawienie pomocniczej niewiadomej

Podstawienie do równania pomocniczej niewiadomej często ułatwia rozwiązanie równania. Wówczas rozwiązanie równania składa się z dwóch etapów.

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $\frac{9}{10-\log x}=\log x$.

Zapisujemy założenia.

$x>0 \quad \wedge \quad 10-\log x\neq 0$

$\log x\neq 10, \quad$ więc $\quad x\neq 10^{10}$

Dziedziną równania jest zbiór $(0, 10^{10})\cup(10^{10}, +\infty)$. Podstawiamy:

$\log x = t$

Otrzymujemy równanie wymierne, które rozwiązujemy (pierwszy etap).

$\frac{9}{10-t}=t$

$9=10t-t^2$

$t^2-10t+9=0$

$\Delta=64$

$t=1 \quad \vee \quad t=9$

Równanie wymierne ma dwa rozwiązania. Wracamy do podstawienia i rozwiązujemy proste równania logarytmiczne (drugi etap):

$\log x=1 \quad \vee \quad \log x=9$

$x=10 \quad \vee \quad x=10^9$ – z definicji logarytmu

Otrzymane liczby należą do dziedziny równania.

Rozwiązaniami równania $\frac{9}{10-\log x}=\log x$ są liczby 10 oraz 10^9.

C. Równania logarytmiczne, w których występuje równość logarytmów o jednakowej podstawie

W rozwiązaniu takich równań korzystamy z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Jeśli $a\in(0, 1)\cup(1, +\infty)$ oraz $x_1\in \boldsymbol{R}_+$, $x_2\in \boldsymbol{R}_+$, to

$\log_a x_1=\log_a x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

Twierdzenie 1. wynika z różnowartościowości funkcji logarytmicznej.

Przykład 5.

Rozwiążemy równanie $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\log_{\frac{1}{3}}(3-x)-1$.

Wyznaczamy dziedzinę równania:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-1,+\infty) \\ x\in(-\infty,3) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1,3)$$

Dziedziną równania jest przedział $(-1, 3)$.

Rozwiązujemy równanie. Liczba 1 jest równa $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$. Wówczas:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\log_{\frac{1}{3}}(3-x)-\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} \qquad \log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\log_{\frac{1}{3}}\left[(3-x)\cdot 3\right]$$

Korzystamy z twierdzenia 1. Otrzymujemy:

$x+1=(3-x)\cdot 3$
$x+1=9-3x$
$4x=8$
$x=2, \qquad 2\in(-1,3)$

Rozwiązaniem równania jest liczba 2.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż równanie $\log(3x-1)=\log(3x-1)^2$.

D. Równania logarytmiczne, w których występują logarytmy o różnych podstawach

Przykład 6.

Rozwiążemy równanie $\log_x 2+2\log_{4x}2=-2\frac{1}{3}$.

Wyznaczamy dziedzinę równania. Liczby logarytmowane są dodatnie. Wystarczy założyć, że podstawy logarytmu są dodatnie i różne od 1. Mamy:

$$(x>0\wedge x\neq 1\wedge 4x>0\wedge 4x\neq 1)\Leftrightarrow\left(x>0\wedge x\neq 1\wedge x\neq\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow x\in\boldsymbol{R}_+-\left\{\frac{1}{4},1\right\}$$

$$D=\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},1\right)\cup(1,+\infty)$$

Logarytmy występujące w równaniu mają różne podstawy, ale można je sprowadzić do jednakowych podstaw, korzystając ze wzoru:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$ – ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu

Otrzymujemy:

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x} \quad \text{oraz} \quad \log_{4x} 2 = \frac{1}{\log_2 (4x)} = \frac{1}{\log_2 4 + \log_2 x} = \frac{1}{2 + \log_2 x}$$

Równanie logarytmiczne przyjmuje postać:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{2 + \log_2 x} = -\frac{7}{3}$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą t, $t = \log_2 x$.
Otrzymujemy równanie wymierne z niewiadomą t.

$$\frac{1}{t} + \frac{2}{2+t} = -\frac{7}{3}$$

$$\frac{2+3t}{2t+t^2} = -\frac{7}{3}$$

$$7t^2 + 23t + 6 = 0$$

$$t = -3 \ \vee \ t = -\frac{2}{7}$$

Wracamy do podstawienia:

$$\log_2 x = -3 \quad \vee \quad \log_2 x = -\frac{2}{7}$$

$$x = 2^{-3} \quad \vee \quad x = 2^{-\frac{2}{7}}$$

$$x = \frac{1}{8} \quad \vee \quad x = \frac{1}{\sqrt[7]{4}}$$

Obie liczby należą do dziedziny równania.

Rozwiązaniami równania $\log_x 2 + 2\log_{4x} 2 = -2\frac{1}{3}$ są dwie liczby: $\frac{1}{8}$ oraz $\frac{1}{\sqrt[7]{4}}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż równania. Podaj dziedzinę każdego równania.

a) $\log_3 (x+2) = 1$

b) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} (4-8x) = -2$

c) $\log_{\frac{1}{3}} |x-3| = -1$

d) $\log_{\sqrt{3}} |2x+1| = 4$

e) $\log_2 \frac{5}{x} = \frac{1}{2}$

f) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{3}{x-2} = -2$

2. Rozwiąż równania. Podaj dziedzinę każdego równania.

a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+3\right)=-2$ b) $\log_5\left(x^2-4\right)=1$

c) $\log_5(3-x)^2=2$ d) $\log_{\frac{2}{3}}\left(x^2+10x+25\right)=-2$

e) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x\right)=-1$ f) $\log_{\sqrt{3}}\left(x-x^2\right)=2$

3. Rozwiąż równania. Podaj dziedzinę każdego równania.

a) $\log_{\sqrt{5}}\left(4x^2+x+1\right)=0$ b) $\log_7\left(x^2-2x-8\right)=1$

c) $\log_2\left(|x-1|-2\right)=3$ d) $\log_{\frac{1}{3}}\left(|x|+5\right)=-4$

e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(5-|x+3|\right)=-4$ f) $\log_{\sqrt{5}}\left(|-1-x|+1\right)=0$

4. Rozwiąż równania. Podaj dziedzinę każdego równania.

a) $\log_{x-2}4=1$ b) $\log_x 9=-2$

c) $\log_{x+1}49=2$ d) $\log_{2-x}8=3$

e) $\log_{4-x}(4-x)=2$ f) $\log_{2+3x}\frac{x}{5}=-1$

5. Rozwiąż równania.

a) $\log_{2x+3}(x+1)=-1$ b) $\log_{x+1}(3x+1)=3$

c) $\log_{2-x}(8-3x)=3$ d) $\log_{x^2-3}\left(5-x^2\right)=2$

6. Rozwiąż równania.

a) $\log_3(\log_2 x)=0$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4 x)=-2$

c) $\log_{\frac{1}{4}}\left[2+\log_2(x-1)\right]=-1$ d) $\log_2\left\{\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_3(x+1)\right]+10\right\}=3$

7. Rozwiąż równanie, wprowadzając zmienną pomocniczą.

a) $\log_3 x=5\log_3 x-2$ b) $\left[\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)\right]^3+27=0$

c) $\log_{\frac{1}{2}} x\cdot\left(2\log_{\frac{1}{2}} x+5\right)=3$ d) $\log_4^3(x-1)+\log_4(x-1)=2$

8. Rozwiąż równania.

a) $2\cdot\left[\log_{\frac{1}{3}}^2(x+3)-1\right]=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)-\log_{\frac{1}{3}}^3(x+3)$

b) $\log^2(x-2)\cdot[\log(x-2)-1]+[\log(x-2)+1]\cdot[\log(x-2)-1]=7$

c) $\dfrac{\log_2^2(1-2x)-3\cdot\left[\log_2(1-2x)-1\right]}{\log_2(1-2x)}=1$

d) $\dfrac{11}{\ln(x+1)}-6=\dfrac{6}{\ln^2(x+1)}-\ln(x+1)$

9. Rozwiąż równania.

a) $\log 5+\log(x+10)-1=\log(21x-20)-\log(2x-1)$

b) $\ln 3+\ln(2x-1)-2\ln(x+2)=-\ln(2x+1)$

c) $\log_3(x-2)+0{,}5\log_3(x-4)^2=0$

d) $\dfrac{\log\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\log\left(\sqrt{x-1}+7\right)}=\dfrac{1}{2}$

10. Liczby $\log_2(x-4)$, $\log_2(2x)$, $\log_2 x^2$, dla pewnej rzeczywistej wartości x, są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz x oraz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

11. Liczby $2\log_2(x-2)$, $\log_2(x-2)$, $\dfrac{1}{2}$, dla pewnej rzeczywistej wartości x, są trzema początkowymi kolejnymi dodatnimi wyrazami ciągu geometrycznego (b_n). Wyznacz x oraz wyraz ogólny tego ciągu.

12. Rozwiąż równania.

a) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x=\dfrac{5}{4}-\log_{\frac{1}{9}} x$

b) $\log_4(x+3)^2=\log_2(x^2+3)$

c) $\log_{25}(x+1)^2-\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{x}{2}=\log_{125}x^3$

d) $3\log_x 4\cdot\log_{2x}4=2$

e) $\log_x 9-\log_{3x}\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

f) $\log_{\frac{x}{2}}2+\log_{4x}2=\dfrac{\log_2(2x^2)}{4}$

13. Rozwiąż równania.

a) $2\log_2 x^2-\log_2^2(-x)=4$

b) $\log_{\frac{1}{3}}^2(-x-3)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+6x+9)+3$

c) $x^{1+\log_3 x}=9x^2$

d) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$

Nierówności logarytmiczne

Nierównością logarytmiczną nazywamy nierówność, w której niewiadoma występuje tylko w wyrażeniu logarytmowanym lub w podstawie logarytmu. Nierównościami logarytmicznymi są na przykład:

$\log_2(x-1) > \log_2(3-2x)$ $\qquad$ $\log_x(x+3) \leqslant 2$ $\qquad$ $\log_3(\log_4 x) > 1$

Z monotoniczności funkcji logarytmicznej wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

a) Jeśli $a \in (0, 1)$ i $x_1 \in \boldsymbol{R}_+$, $x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to
$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

b) Jeśli $a \in (1, +\infty)$ i $x_1 \in \boldsymbol{R}_+$, $x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to
$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Powyższe twierdzenie stosujemy w rozwiązaniach nierówności logarytmicznych. Nierówności logarytmiczne najczęściej rozwiązujemy jedną z dwóch następujących metod:

- przekształcamy obie strony nierówności tak, aby otrzymać logarytmy o takich samych podstawach
- wprowadzamy zmienną pomocniczą.

Obie te metody zilustrujemy przykładami.

A. Nierówności logarytmiczne, w których - po przekształceniu - po obu stronach znaku nierówności można otrzymać logarytmy o takiej samej podstawie

Nierówność logarytmiczną przekształcamy równoważnie do postaci, w której porównujemy dwa logarytmy o tej samej podstawie. Następnie korzystamy z twierdzenia 1. i porównujemy liczby logarytmowane według następującej zasady:

- jeśli podstawa logarytmu należy do przedziału $(0, 1)$, to znak nowej nierówności będzie przeciwny do znaku nierówności logarytmicznej,
- jeśli podstawa logarytmu należy do przedziału $(1, +\infty)$, to znak nowej nierówności będzie taki sam, jak znak nierówności logarytmicznej.

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówność $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > 2$.

Najpierw wyznaczymy dziedzinę nierówności.

Logarytm występujący po lewej stronie nierówności $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)>2$ jest określony, jeśli wyrażenie logarytmowane jest dodatnie.

$2x-1>0$, stąd $x>\frac{1}{2}$, $\quad D=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

Rozwiązujemy nierówność. Liczbę 2, występującą po prawej stronie nierówności, przedstawiamy w postaci logarytmu o podstawie $\frac{1}{3}$, czyli $2=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$. Mamy:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$$

Jednakowa podstawa obu logarytmów należy do przedziału $(0,\,1)$. Z twierdzenia 1a) wynika, że porównując liczby logarytmowane, zmieniamy znak nierówności na przeciwny:

$$2x-1<\frac{1}{9}$$

$$x<\frac{5}{9}$$

Teraz uwzględniamy dziedzinę nierówności.

$$\begin{cases} x<\frac{5}{9} \\ x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in\left(\frac{1}{2},\frac{5}{9}\right)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)>2$ jest przedział $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{9}\right)$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż nierówność $\log_{0,5}\left(\log_2(3x)\right)\leqslant -1$.

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówność $\log_2(x^2-2x)\leqslant \log_2 18-\log_2 6$.

Wyznaczamy dziedzinę nierówności:
$x^2-2x>0 \Leftrightarrow x(x-2)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,\,0)\cup(2,\,+\infty)$, zatem
$D=(-\infty,\,0)\cup(2,\,+\infty)$

Prawą stronę nierówności zapisujemy w postaci logarytmu o podstawie 2:

$$\log_2 18-\log_2 6=\log_2\frac{18}{6}=\log_2 3$$

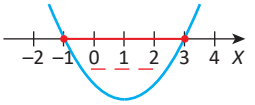
$\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c}$

Otrzymujemy:

$\log_2(x^2-2x) \leqslant \log_2 3$

Teraz korzystamy z twierdzenia 1b).
Podstawa obu logarytmów należy do przedziału $(1, +\infty)$. Porównując liczby logarytmowane, znak nierówności pozostawiamy bez zmiany.

$x^2-2x \leqslant 3$
$x^2-2x-3 \leqslant 0$
$(x-3)(x+1) \leqslant 0$
$x \in \langle -1, 3\rangle$



Należy jeszcze uwzględnić dziedzinę nierówności:

$$\begin{cases} x \in \langle -1, 3\rangle \\ x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \langle -1, 0) \cup (2, 3\rangle$$

Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest zbiór $\langle -1, 0) \cup (2, 3\rangle$.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż nierówność $\log(x-3) + \log x < 1$.

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $\log_x(3x-1) > \log_x 5$.

Najpierw wyznaczamy dziedzinę tej nierówności.

$$(x>0 \ \wedge \ x \neq 1 \ \wedge \ 3x-1>0\ ) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

$$D = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

Teraz rozwiązujemy daną nierówność. Ze względu na podstawę logarytmu rozważamy dwa przypadki.

I przypadek: $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

Na mocy twierdzenia 1b) mamy:

$\log_x(3x-1) > \log_x 5$
$3x-1 < 5$
$x < 2$

$x \in (-\infty, 2) \quad \wedge \quad x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, stąd

$x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

II przypadek: $x \in (1, +\infty)$
Na mocy twierdzenia 1a) mamy:

$\log_x(3x-1) > \log_x 5$
$3x-1 > 5$
$x > 2$
$x \in (2, +\infty) \quad \wedge \quad x \in (1, +\infty)$, stąd
$x \in (2, +\infty)$

Sumujemy zbiory rozwiązań obu przypadków:

$$x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (2, +\infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\log_x(3x-1) > \log_x 5$ jest zbiór $\left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (2, +\infty)$.

Ćwiczenie 3. Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $\log_{2x}(8x) < 2$.

B. Nierówności logarytmiczne, które można rozwiązać przez wprowadzenie pomocniczej niewiadomej

Przykład 4.

Rozwiążemy nierówność $\frac{\log_3 x + 1}{\log_3 x - 1} \leqslant \log_3 9$.

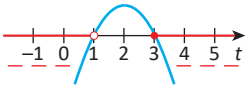
Wyznaczamy dziedzinę nierówności:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,3) \cup (3, +\infty)$$

Zatem $D = (0, 3) \cup (3, +\infty)$.

Stosujemy podstawienie: $t = \log_3 x$. Otrzymujemy nierówność wymierną:

$$\frac{t+1}{t-1} \leqslant 2$$
$$\frac{t+1}{t-1} - 2 \leqslant 0$$
$$\frac{3-t}{t-1} \leqslant 0 \qquad /\cdot (t-1)^2, \qquad \text{gdzie } t \neq 1$$
$$(3-t)(t-1) \leqslant 0$$
$$t \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty)$$



Mamy:

$t < 1 \quad \vee \quad t \geqslant 3$

$\log_3 x < 1 \quad \vee \quad \log_3 x \geqslant 3$

$\log_3 x < \log_3 3 \quad \vee \quad \log_3 x \geqslant \log_3 27$

Na podstawie twierdzenia 1b), otrzymujemy:

$x < 3 \quad \vee \quad x \geqslant 27$

$x \in (-\infty, 3) \cup \langle 27, +\infty)$

Po uwzględnieniu dziedziny D, gdzie $D = (0, 3) \cup (3, +\infty)$ stwierdzamy, że zbiorem rozwiązań danej nierówności jest zbiór $(0, 3) \cup \langle 27, +\infty)$.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że zbiór rozwiązań nierówności $\log^4_{0,5} x + \log^2_{0,5} x \leqslant 2\log^3_{0,5} x$ jest dwuelementowy.

W kolejnym przykładzie wykonamy dzielenie nierówności stronami przez logarytm, który jest liczbą ujemną. Następnie zastosujemy dwukrotnie wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówność $\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_4 x > 8\log_4 \frac{1}{9}$.

Dziedziną nierówności jest przedział $(0, +\infty)$.

Zauważ, że $\log_4 \frac{1}{9}$ jest liczbą ujemną, bo funkcja logarytmiczna $y = \log_4 x$, dla argumentów należących do przedziału $(0, 1)$ przyjmuje wartości ujemne. Obie strony nierówności podzielimy przez $\log_4 \frac{1}{9}$. Wówczas należy zmienić znak nierówności na przeciwny.

$$\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_4 x > 8 \cdot \log_4 \frac{1}{9} \quad / : \underbrace{\log_4 \frac{1}{9}}_{\text{liczba ujemna}}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \frac{\log_4 x}{\log_4 \frac{1}{9}} < 8$$

Korzystamy ze wzoru $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ i otrzymujemy nierówność:

$$\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_{\frac{1}{9}} x < 8$$

Z powyższego wzoru na zamianę podstaw logarytmu wynika również, że

$$\log_{\frac{1}{9}} x = \frac{\log_{\frac{1}{3}} x}{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}} = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x$$

Zatem daną nierówność przekształcamy:

$$\log_{\frac{1}{3}} x \cdot \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x < 8,$$

$$\frac{1}{2}\log^2_{\frac{1}{3}} x < 8 \quad / \cdot 2$$

$$\log^2_{\frac{1}{3}} x < 16$$

Dokonujemy podstawienia: $t = \log_{\frac{1}{3}} x$. Mamy:

$$t^2 < 16$$

$$|t| < 4 \qquad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$t > -4 \quad \wedge \quad t < 4$$

Otrzymujemy:

$$\log_{\frac{1}{3}} x > -4 \quad \wedge \quad \log_{\frac{1}{3}} x < 4$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 81 \ \wedge \ \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$$

$$x < 81 \quad \wedge \quad x > \frac{1}{81} \qquad \text{– z twierdzenia 1a)}$$

$$x \in \left(\frac{1}{81}, 81\right)$$

Po uwzględnieniu dziedziny stwierdzamy, że zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $\left(\frac{1}{81}, 81\right)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_{0,2}(3-x) > \log_{0,2}(x+1)$

b) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(3-x) \geqslant -2$

c) $\log_5 |2x+3| \leqslant 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) - 2 < \log_{\frac{1}{2}}(5x)$

2. Rozwiąż nierówności.
   a) $\log_{0,75} x^2 \leqslant \log_{0,75}(x+2)$
   b) $\log_3(x^2+4x+4) < 2$
   c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geqslant -2$
   d) $\log_{\frac{1}{2}}(5-x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} x-2$

3. Rozwiąż nierówności.
   a) $\log_2 x \cdot (\log_2 x+1) \leqslant 2$
   b) $\log^3_{\frac{1}{4}} x-\log^2_{\frac{1}{4}} x \geqslant \left(\log_{\frac{1}{4}} x-1\right)\left(\log_{\frac{1}{4}} x+2\right)$
   c) $\frac{\log_3(x-2)}{\log_3(x-2)-1} > \frac{1}{2}$
   d) $\frac{\ln x-1}{\ln x} > \frac{1}{\ln x+1}+1$

4. Wyznacz dziedzinę funkcji f.
   a) $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{2}{3}}(x-3)+2}$
   b) $f(x)=\log_5\left[1+\log_{\frac{1}{9}}(x+8)\right]$

5. Rozwiąż nierówności.
   a) $\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{16}$
   b) $\log_3 \frac{1}{8}-\log_{\frac{1}{8}} x \cdot \log_3 x < 0$
   c) $\log_3[\log_2(x^2-1)] < 1$
   d) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_5 \frac{x}{4-x}\right) > 0$

6. Rozwiąż nierówności.
   a) $\log_{\sqrt{5}} x-2\log_{25} x > \log_{625} x+1{,}5$
   b) $4\log^2_{\frac{1}{2}} x+3 > 42\log_{\frac{1}{64}} x-18\log_8 x$
   c) $2\log_x 9+\log_{9x} 81 > 3$
   d) $\log_{4x} 2 \cdot \log_2 8 \cdot \log_{8x} 2 \geqslant 0$

7. Rozwiąż nierówność $\log_{2x-5} 4 > 2$.

D 8. Wykaż, że nierówność $\log_{x-2} \frac{x-1}{5-x} > 0$ jest spełniona przez każdą liczbę należącą do jej dziedziny.

D 9. Wykaż, że nierówność $\log_{\frac{2}{x}}(x-1) > 0$ jest sprzeczna.

10. Rozwiąż nierówności.
   a) $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x+3} > \log_{\frac{1}{2}} x+1$
   b) $\sqrt{2-\log x} \geqslant \log x$

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

Funkcję wykładniczą i funkcję logarytmiczną stosuje się w wielu modelach matematycznych, które opisują różne zjawiska w przyrodzie. Zastosowanie tych funkcji ma miejsce w ekonomii, biologii, chemii, fizyce i sejsmologii.

W podręczniku do klasy pierwszej omówiliśmy model wykładniczy, opisujący rozwój bakterii, eliminację z organizmu przyjmowanych leków przez pacjentów oraz przedstawiliśmy sposób określania wieku znalezisk za pomocą izotopu ^{14}C.
Pokazaliśmy zastosowanie logarytmów dziesiętnych w chemii do określania odczynu roztworu oraz w fizyce – do określania natężenia dźwięku. W tym temacie zilustrujemy przykładami kolejne zastosowania.

Przykład 1.

Wartość samochodu maleje z upływem lat. Funkcja wykładnicza $W(t) = w_0 \cdot 0{,}8^t$ opisuje przeciętną wartość samochodu po t latach od chwili zakupu, gdzie w_0 – oznacza cenę nowego samochodu w złotych. Kilka lat temu pan Nowak zapłacił za nowy samochód 60 000 zł. Obliczymy:

a) o ile złotych zmniejszyła się wartość samochodu po roku eksploatacji,
b) po ilu latach, od dnia zakupu, wartość samochodu zmalała do kwoty 24 576 zł.

Ad a) Korzystamy ze wzoru:

$$W(t) = w_0 \cdot 0{,}8^t$$

gdzie $w_0 = 60\,000$, $t = 1$

$$W(1) = 60\,000 \cdot 0{,}8^1 = 48\,000$$

Po roku wartość samochodu wynosiła 48 000 zł, czyli zmniejszyła się o 12 000 zł w stosunku do ceny zakupu.

Ad b) Otrzymujemy równanie wykładnicze:

$$24\,576 = 60\,000 \cdot 0{,}8^t \quad /: 60\,000$$

$$0{,}4096 = 0{,}8^t$$

Obliczamy logarytmy o podstawie 0,8 liczb, występujących po obu stronach równania:

$$\log_{0,8} 0{,}4096 = \log_{0,8} 0{,}8^t$$

$$\log_{0,8} 0{,}4096 = t \cdot \log_{0,8} 0{,}8$$

stąd

$$t = \log_{0,8} 0{,}4096$$

$$t = 4$$

Po czterech latach użytkowania wartość samochodu zmalała do kwoty 24 576 zł.

Przykład 2.

Pani Kowalska założyła w banku lokatę w wysokości K_0 zł na procent składany, z kwartalną kapitalizacją odsetek. Roczne oprocentowanie tej lokaty wynosi 6%. Obliczymy, po ilu kwartałach kwota na lokacie się podwoi. Uwzględnimy 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

Niech x oznacza szukaną liczbę kwartałów. Liczba $2K_0$ oznacza kwotę, jaką będzie miała na lokacie pani Kowalska po x kwartałach, po odliczeniu 19-procentowego podatku od dochodów kapitałowych. Wówczas

$$2K_0 = K_0\left(1+\frac{0{,}06}{4}\cdot 0{,}81\right)^x$$

stąd

$$2 = (1 + 0{,}015 \cdot 0{,}81)^x$$
$$2 = 1{,}01215^x$$

Logarytmujemy obie strony równania (obie strony są dodatnie):

$$\log 2 = \log 1{,}01215^x$$
$$\log 2 = x \cdot \log 1{,}01215$$
$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}01215}$$

$\log 2 \approx 0{,}30103$ $\log 1{,}01215 \approx 0{,}005245$

stąd

$$x \approx 57{,}39$$

Kwota złożona w banku podwoi się po 58 kwartałach.

Ćwiczenie 1. Oblicz, po ilu latach kwota na lokacie pani Kowalskiej z przykładu 2. wzrosłaby o 50%, gdybyśmy nie uwzględnili podatku od dochodów kapitałowych.

Logarytmy znalazły zastosowanie w sejsmologii – nauce, która zajmuje się trzęsieniami ziemi. Trzęsienia ziemi wywoływane są przez zaburzenia stanu równowagi we wnętrzu Ziemi. Najczęściej związane są z ruchami tektonicznymi, wybuchami wulkanów oraz zapadaniem się jaskiń. Do określenia siły trzęsienia ziemi stosuje się skalę Richtera. Tę siłę obliczamy ze wzoru

$$R = \log\frac{A}{A_0},$$

gdzie:
R – siła trzęsienia ziemi mierzona w stopniach w skali Richtera,
A – amplituda trzęsienia ziemi wyrażona w centymetrach, która jest mierzona w odległości 100 km od epicentrum,
A_0 – amplituda wzorcowa o wartości 10^{-4} cm, która odpowiada drganiom niewyczuwalnym przez człowieka.

Przykład 3.

W 1908 roku w Messynie we Włoszech odnotowano trzęsienie ziemi o wartości 7,5 stopnia w skali Richtera. Obliczymy amplitudę drgań tego trzęsienia ziemi.

Korzystamy ze wzoru $R = \log\frac{A}{A_0}$. Przekształcamy wzór tak, aby wyznaczyć niewiadomą A.

$$R = \log\frac{A}{A_0}$$

$$10^R = \frac{A}{A_0}$$ – z definicji logarytmu

$$A = A_0 \cdot 10^R$$
$$A = 10^{-4} \cdot 10^{7,5}$$
$$A = 10^{3,5}$$
$$A = 10^3 \cdot 10^{\frac{1}{2}}$$
$$A = 1000 \cdot \sqrt{10}$$ $\sqrt{10} \approx 3,162$

$$A \approx 3162 \text{ cm}$$
$$A \approx 32 \text{ m}$$

Amplituda drgań podczas trzęsienia ziemi w Messynie wynosiła około 32 metry.

W Polsce trzęsienia ziemi występują sporadycznie i mają niewielkie amplitudy. W Krakowie odnotowano trzęsienie ziemi w 1443 r., w Warszawie w 1680 r., w okolicach Płocka, Kielc i Lublina w 1932 r., a w 2004 r. w okolicy Suwałk.

Ćwiczenie 2. Oblicz, ile stopni w skali Richtera miało trzęsienie ziemi w okolicy Suwałk w 2004 r., wiedząc, że amplituda tego trzęsienia była równa 10 cm.

Istnieje ciekawy związek między liczbą cyfr dodatniej liczby naturalnej, a logarytmem dziesiętnym tej liczby. Aby przekonać się o tym, przypomnimy notację wykładniczą liczby naturalnej.

Każdą liczbę naturalną można przedstawić w notacji wykładniczej
$a \cdot 10^n$, gdzie $a \in \langle 1, 10)$ i $n \in \boldsymbol{N}$.
Na przykład:
$3 = 3 \cdot 10^0$ $\quad 235 = 2{,}35 \cdot 10^2$ $\quad 1004 = 1{,}004 \cdot 10^3$ $\quad 21\,000 = 2{,}1 \cdot 10^4$

Zauważ, że liczba naturalna dodatnia $a \cdot 10^n$ ma $n + 1$ cyfr.

Obliczmy logarytm dziesiętny tej liczby:

$$\log\left(a \cdot 10^n\right) = \log a + \log 10^n = \log a + n\log 10 = \log a + n$$

Liczba $\log a$ należy do przedziału $\langle 0, 1)$, bowiem $a \in \langle 1, 10)$. Zatem liczba n jest największą liczbą naturalną, która nie jest większa od $\log\left(a \cdot 10^n\right)$.

Definicja 1.
Największą liczbę całkowitą, która nie jest większa od liczby x, nazywamy **częścią całkowitą** liczby x i oznaczamy $[x]$.

Na przykład:

$[4,7] = 4$ $\quad [9] = 9$ $\quad \left[\sqrt{2}\right] = 1$ $\quad [-5] = -5$ $\quad [-3,1] = -4$

W przypadku liczby naturalnej $a \cdot 10^n$, gdzie $a \in \langle 1, 10)$, liczba n jest częścią całkowitą logarytmu dziesiętnego tej liczby, czyli $\left[\log\left(a \cdot 10^n\right)\right] = n$. Zatem liczba cyfr dowolnej liczby naturalnej x jest równa $\left[\log x\right] + 1$.

Przykład 4.

Obliczymy, ile cyfr rozwinięcia dziesiętnego mają liczby 9^{99} i 9^{9^9}. Posłużymy się kalkulatorem.

Obliczamy $\log 9^{99}$. Korzystamy najpierw z własności logarytmu, następnie na kalkulatorze obliczamy $\log 9$.

$\log 9^{99} = 99 \cdot \log 9 = 94{,}4700084\ldots$, bo $\log 9 = 0{,}9542425\ldots$

$\left[\log 9^{99}\right] + 1 = 94 + 1 = 95$

Liczba 9^{99} ma w rozwinięciu dziesiętnym 95 cyfr.

Podobnie wyznaczamy liczbę cyfr liczby 9^{9^9}:

$\log 9^{9^9} = 9^9 \cdot \log 9 = 387420489 \cdot \log 9 = 369693099{,}6315703587\ldots$

$\left[\log 9^{9^9}\right] + 1 = 369\,693\,099 + 1 = 369\,693\,100$

Liczba 9^{9^9} ma w rozwinięciu dziesiętnym 369 693 100 cyfr.

UWAGA: Zauważ, że jeśli $x = a \cdot 10^n$, gdzie $a \in \langle 1, 10)$ i $n \in \boldsymbol{Z}$, to $\log a$ jest częścią ułamkową logarytmu x.

Korzystając z części całkowitej i części ułamkowej logarytmu dziesiętnego liczby x, możemy zapisać przybliżenia liczb z przykładu 4. w notacji wykładniczej.
Mamy:

$9^{99} = a \cdot 10^{94}$ oraz $\log a = 0{,}4700084\ldots$, stąd $a = 10^{0{,}4700084\ldots} \approx 2{,}95127$

Otrzymaliśmy oszacowanie liczby 9^{99}:

$9^{99} \approx 2{,}95127 \cdot 10^{94}$

Podobnie

$9^{9^9} = b \cdot 10^{369\,693\,099}$ oraz $\log b = 0{,}6315703\ldots$, stąd $b = 10^{0{,}6315703\ldots} \approx 4{,}28124$

$9^{9^9} \approx 4{,}28124 \cdot 10^{369693099}$

Ćwiczenie 3. Zapisz w notacji wykładniczej liczby a i b, jeśli $a = 21^{21}$, $b = 11^{26}$. Która z tych liczb jest większa ?

Kolejnym ciekawym zagadnieniem jest rozpad promieniotwórczych izotopów. Szybkość samorzutnego rozpadu jąder atomowych jest cechą danego izotopu promieniotwórczego. Najczęściej stosowaną miarą szybkości rozpadu promieniotwórczego jest okres połowicznego zaniku. Określa on czas, w ciągu którego rozpada się połowa początkowej liczby jąder.

Jeśli w chwili początkowej t_0 liczba jąder wynosiła N_0, to liczbę jąder, które nie rozpadły się w czasie t od chwili t_0 można obliczyć ze wzoru:

$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$,

gdzie $e \approx 2{,}72$ oraz λ – stała rozpadu promieniotwórczego, zależna od indywidualnych właściwości izotopu promieniotwórczego.

Z ostatniego wzoru wynika, że liczba atomów, które nie uległy rozpadowi, maleje w czasie wykładniczo.

Przykład 5.

Czas połowicznego rozpadu izotopu strontu $^{90}_{38}Sr$ wynosi 20 lat.

a) Wyznaczymy stałą rozpadu izotopu strontu.
b) Obliczymy, ile procent pierwotnej liczby jąder pozostanie po upływie 10 lat.

Ad a) Liczbę N jąder po czasie t rozpadu izotopu strontu wyraża wzór $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, gdzie N_0 jest początkową liczbą jąder izotopu strontu, λ jest szukaną stałą.
Ponieważ czas połowicznego rozpadu wynosi 20 lat $(t = 20)$, więc po upływie 20 lat pozostanie połowa początkowej liczby jąder, czyli $\frac{N_0}{2}$. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-20\lambda} \qquad /:N_0$$

$$\frac{1}{2} = e^{-20\lambda}$$

Obie strony równania są dodatnie. Logarytmujemy strony równania przy podstawie e. Otrzymujemy:

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-20\lambda}$$

zatem

$\ln 2^{-1} = -20\lambda \ln e$ $\quad \ln e = 1$

$-\ln 2 = -20\lambda$

$\lambda = \frac{\ln 2}{20}$

Ad b) Obliczymy teraz, ile procent jąder izotopu strontu pozostanie po upływie dziesięciu lat.

$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

$N = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{20} \cdot 10}$

$N = N_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\ln 2}$

$N = N_0 \cdot e^{\ln \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$N = N_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707 \cdot N_0$

Po upływie 10 lat pozostanie około 70,7% liczby jąder izotopu strontu.

Ćwiczenie 4. Oblicz, ile procent jąder izotopu strontu $^{90}_{38}\mathrm{Sr}$ pozostanie po upływie 70 lat od chwili t_0.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Ilość leku pozostałego w organizmie pacjenta po t godzinach od chwili zażycia dawki $d\,(\mathrm{mg})$ wyraża wzór $P(t) = d \cdot 0{,}75^t$, gdzie $t \geqslant 0$.
   a) Chory przyjął 40 mg pewnego leku. Ile mg leku znajduje się w organizmie chorego po upływie trzech godzin od chwili zażycia leku?
   b) Ile procent leku pozostającego w organizmie jest eliminowane w ciągu każdej godziny?
   c) Ile co najmniej godzin musiało upłynąć od podania leku, jeśli zawartość leku w organizmie jest mniejsza niż 4 mg?

2. Zauważono na podstawie eksperymentu, że liczba bakterii pewnej kolonii podwaja się każdego dnia. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Czas (dni)	0	1	2	3	4	5	6
Liczba bakterii (w przybliżeniu)	40	80	160	320	640	1280	2560

Jeśli t oznacza czas obserwacji kolonii liczony w dniach, zaś $f(t)$ – przybliżoną liczbę bakterii po t dniach, to zależność przedstawioną w tabeli opisuje wzór $f(t) = c \cdot a^t$, gdzie $a > 0$, $c > 0$ i $t \geqslant 0$.

a) Wyznacz współczynniki a i c.
b) Ile dni upłynęło od początku obserwacji, jeśli kolonia liczy obecnie 163 840 bakterii?
c) Naszkicuj fragment wykresu funkcji f, ilustrujący liczbę bakterii tej kolonii w ciągu czterech początkowych dni obserwacji.

3. Paleontolog znalazł kość prehistorycznego zwierzęcia. Badanie kości wykazało, że zawarty w niej obecnie izotop ^{14}C stanowi 70% ilości początkowej. Korzystając ze wzoru $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie m_0 – masa początkowa pierwiastka, T – okres połowicznego rozpadu, który dla izotopu ^{14}C wynosi 5730 lat, oblicz, ile lat ma znaleziona kość.

4. Najsilniejsze trzęsienie ziemi zanotowano w Chile w 1960 roku. Miało ono siłę 9,5 stopnia w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

5. Poziom głośności dźwięku możemy obliczyć ze wzoru $L = 10 \cdot \log\frac{I}{I_0}$, gdzie L – poziom głośności dźwięku (dB), I – badane natężenie dźwięku (W/m^2), $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$ – natężenie dźwięku odpowiadające progowi słyszalności człowieka $(0\ \text{dB})$.
a) Szelest liści drzew ma wartość 10 dB, zaś rozmowa 60 dB. Oblicz, ile razy natężenie dźwięku rozmowy jest większe od natężenia dźwięku szelestu liści.
b) Oblicz, o ile decybeli wzrośnie poziom głośności dźwięku, jeśli natężenie dźwięku zwiększymy czterokrotnie.

6. Korzystając z kalkulatora z funkcją logarytmu dziesiętnego, oblicz, ile cyfr w rozwinięciu dziesiętnym mają liczby naturalne a i b. Porównaj te liczby.
a) $a = 23^{25},\ b = 25^{23}$ b) $a = 5^{33},\ b = 7^{29}$ c) $a = 7^{7^7},\ b = 1000^{999}$

7. Oblicz, ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba pierwsza równa $2^{43112609} - 1$. Zapisz przybliżenie tej liczby w postaci $a \cdot 10^n$, gdzie $a \in \langle 1, 10)$ i $n \in \boldsymbol{N}$.

8. Czas połowicznego rozpadu jodu ^{131}I wynosi 8 dni.
a) Korzystając ze wzoru $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, gdzie λ – stała rozpadu promieniotwórczego, wykaż, że funkcję f, ilustrującą przebieg rozpadu 80 g jodu w zależności od czasu t liczonego w dniach, opisuje wzór $f(t) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$.
b) Naszkicuj wykres, który ilustruje rozpad 80 g jodu w ciągu 32 dni.
c) Oblicz, ile procent pierwotnej liczby atomów jodu pozostanie po upływie 60 dni.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2.

Test

1. Wyrażenie $\left(\frac{1}{2}+\log_8\frac{1}{2}\right)^{-1}$ jest równe:

   A. -1 B. 6 C. 5 D. $-0{,}4$

2. Liczba $\log_3\left[\left(\sqrt{3}\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^7\cdot\left(\sqrt{3}\right)^6\right]$ jest podzielna przez:

   A. 8 B. 5 C. 6 D. 3

3. Iloraz liczby x przez y, gdzie $x=\log 0{,}6+\log 16\frac{2}{3}$ oraz $y=4^{\log_2 3}$ jest równy:

   A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{9}$

4. Jeśli $\log_2 3=a$, to liczba $\frac{1}{3}\log_2 108$ jest równa:

   A. $\frac{3a+2}{3}$ B. $\frac{2a+3}{3}$ C. $\frac{3a+1}{2}$ D. $\frac{2}{3a+3}$

5. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x)=-\log_a x$ należy punkt $A(3,-1)$. Wówczas:

   A. $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$ B. $f(1)=3$ C. $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}$ D. $f(9)=2$

6. Miejscem zerowym funkcji $g(x)=\log x-3\log 2$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}_+$, jest liczba:

   A. $3\log 2$ B. 3 C. 6 D. 8

7. Wykresy funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ oraz $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ są symetryczne względem prostej o równaniu:

   A. $y=0$ B. $y=x$ C. $y=-x$ D. $x=0$

8. Funkcja $y=\log_{2m-1}(x+5)$ jest malejąca tylko wtedy, gdy:

   A. $m\in(-\infty,1)$ B. $m\in(1,+\infty)$ C. $m\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ D. $m\in(1,2)$

9. Funkcja $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x+2$ oraz funkcja $g(x)=2^{x-m}-4$ mają wspólne miejsce zerowe, jeśli:

   A. $m=-6$ B. $m=-3$ C. $m=5$ D. $m=7$

10. Jeśli $a=\log_{0,5}3$, $b=\log_3 2$, $c=\dfrac{\log 5}{\log 0,5}$, to:

A. $a<c<b$ B. $c<a<b$ C. $b<c<a$ D. $c<a<b$

Zadania otwarte

11. Oblicz:

a) $\dfrac{2-\log_3 6+\log_3 18}{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{5}} 125}$ b) $16^{\log_2\sqrt{5}-0,25}\cdot\sqrt{\dfrac{\log_2 625}{\log_2 5}}$

12. Wykaż, że jeśli $x=\sqrt{6}-\sqrt{5}$ oraz $y=\sqrt{6}+\sqrt{5}$, to wartość wyrażenia $\log\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x+y}$ jest liczbą wymierną.

13. Wykaż, że liczby $\dfrac{1}{2}\cdot 9^{\frac{1}{\log_2 3}}$ oraz $\log_{\sqrt{3}}\left(\log_3 6\cdot\log_6 27\right)$ są równe.

14. Wykaż, że liczba spełniająca równanie $\log_2 x=3$ jest o 220% większa od liczby $\log_4 32$.

15. Wykaż, że liczba będąca rozwiązaniem równania $3\cdot 9^x=3^{x+2}$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$.

16. Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji, rozwiąż równanie $\log_3 x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$.

17. Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji, rozwiąż nierówność $3^x-2\geqslant\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$.

18. Do wykresu funkcji $f(x)=\log_a x+b$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}_+$, należą punkty $M(1,1)$ i $N\left(\dfrac{1}{4},3\right)$.

Wyznacz a i b. Następnie:

a) oblicz miejsce zerowe funkcji f,

b) odczytaj z wykresu funkcji f, dla jakich argumentów ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne,

c) oblicz argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość równą -4.

19. Wykresy funkcji $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-a}+2$ oraz $g(x)=\log_2(x+b)$ przecinają się w punkcie $(6, 3)$.

a) Wyznacz liczby a i b.

b) Naszkicuj wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych.

c) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x)<g(x)$.

20. Na podstawie wykresu funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$:

a) ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby a, b, c, wiedząc, że $a=\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{5}-1\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{5}+1\right)$, $b=\log_{\frac{1}{2}} 12-\log_{\frac{1}{2}} 2$, $c=2\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)$,

b) naszkicuj wykres funkcji $y=3-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$.

21. Rozwiąż równania.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(5-2x)=-4$

b) $\log_{x-2} 4=2$

c) $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_2(x-1)\right]=-1$

d) $\dfrac{3\log_2 x}{2-\log_2 x}=\dfrac{\log_2 x+2}{\log_2 x}$

22. Liczby -1, $\log_2 x$, $3\log_2 x-3$ są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n).

a) Wyznacz x.

b) Podaj ogólny wyraz ciągu (a_n).

c) Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu (b_n), określonego wzorem $b_n=2^{a_n}$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$.

D 23. Wykaż, że jeśli trzy dodatnie liczby x, y, z są różne od 1 i spełniają założenia: $xy\neq 1$, $\log_z x=2$ oraz $\log_z y=3$, to $\log_{xy} z=0{,}2$.

D 24. Wykaż, że jeśli $a\in(4,+\infty)$ oraz $4^{\log_2(a-4)}=25$, to $\log_{81} a=0{,}5$.

D 25. Wykaż, że jeśli $9^{a+b}=1$ oraz $2^{a-\frac{1}{2}b}=\sqrt{8}$, to $\log_2\left(a^2+b^2\right)=1$.

26. Liczba mieszkańców pewnego miasta na początku 2015 roku wynosiła 600 000. Przyrost naturalny w tym mieście jest stały i równy 0,4% w skali roku.

a) Napisz wzór funkcji, opisującej liczbę ludności tego miasta po n latach.

b) Wyznacz liczbę ludności tego miasta na koniec 2017 roku. Wynik zaokrąglij do pełnych dziesiątek.

c) Oblicz, o ile procent zwiększyła się liczba ludności na koniec 2019 roku, po upływie pięciu lat.

27. Na początku obserwacji kolonia liczyła 500 bakterii. W ciągu każdej godziny liczba bakterii w kolonii powiększała się o 30%.

a) Napisz wzór funkcji opisujący liczbę bakterii w tej kolonii po n godzinach od chwili rozpoczęcia obserwacji.

b) Oblicz, ile bakterii było w kolonii po ośmiu godzinach obserwacji. Wynik zaokrąglij do pełnych dziesiątek.

c) Po ilu godzinach, od chwili rozpoczęcia obserwacji, liczba bakterii będzie dziesięć razy większa od liczby początkowej?

28. Naszkicuj wykres funkcji *f*.

a) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(16-x^2)-\log_{\frac{1}{2}}(x+4)$ b) $f(x)=\left|\log_2\frac{4}{x+3}\right|$ c) $f(x)=\log_3 x^2$

29. Wyznacz dziedzinę funkcji *f*.

a) $f(x)=\log_{|2x-5|}(x^2-2x+1)$ b) $f(x)=\log_{4x-x^2}(27^x-3^{2x+1})$

D 30. Wykaż, że funkcja $f(x)=\log_{\sqrt{5}}(x^2+2x+3)$, gdzie $x\in\left\langle -1\frac{1}{2},0\right\rangle$, przyjmuje najmniejszą wartość równą $\log_{\sqrt{5}}2$.

D 31. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja określona wzorem $f(x)=3-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ jest rosnąca w zbiorze $(-1, +\infty)$.

D 32. Wykaż, że:

a) funkcja $f(x)=x^2\cdot\log|\sin x|$ jest parzysta,

b) funkcja $g(x)=\log_4(3-2x)-\log_4(2x+3)$ jest nieparzysta.

33. Rozwiąż równania.

a) $\frac{\log(x-5)}{2}+1=\log 30-\log\sqrt{2x-3}$ b) $\frac{\log x^2}{\log(6x-5)}=1$

c) $\log_2^4(x-1)+3\log_2^2(x-1)=4$ d) $2\log_x 3\cdot\log_{3x}3=\log_{9\sqrt{x}}3$

34. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_{0,75}\frac{5-x}{x+2}>1$ b) $\log_2 x\cdot\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant\log_{\frac{1}{3}}16$

c) $\log_x(x+1)+\log_x(2-x)<0$ d) $\log_8 x+\log_8^2 x+\log_8^3 x+\ldots\leqslant\frac{1}{2}$

D 35. Wykaż, że jeśli liczby *x*, *y* są dodatnie oraz $2x>y$ i $4x^2+y^2=8xy$, to $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-y}{2}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{xy}$.

36. Czas połowicznego rozpadu dla radonu wynosi 4 dni.

a) Oblicz stałą rozpadu radonu. Wynik zaokrąglij do trzech miejsc po przecinku.

b) Napisz wzór funkcji, określający ilość radonu w czasie *t* od chwili, gdy masa promieniotwórczego radonu wynosiła 160 g. Naszkicuj wykres tej funkcji.

c) W którym dniu obserwacji masa radonu zmaleje do 8 g?

3. Elementy statystyki

Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

Statystyka jest nauką, która zajmuje się badaniem zjawisk masowych. Jednym z etapów badania statystycznego jest **obserwacja statystyczna,** którą przeprowadza się za pomocą wywiadu kwestionariuszowego, ankiety, monitoringu lub rejestracji. Badaniem statystycznym obejmuje się zwykle pewien zbiór obiektów, który nazywamy **populacją generalną** lub zbiorowością generalną. Badanie obejmujące wszystkie elementy populacji nazywamy **badaniem pełnym.**

Najczęściej ankieterzy przeprowadzają badania częściowe, czyli obejmujące tylko część populacji. Podzbiór populacji, bezpośrednio objęty badaniem statystycznym, nazywamy **próbą,** a liczbę elementów wchodzących w skład próby – **liczebnością próby.** Próba, która podlega badaniu statystycznemu, powinna być odpowiednio dobrana. Struktura próby ma odzwierciedlać strukturę badanej populacji tak, aby istniała możliwość uogólnienia otrzymanych wyników na całą populację.

Obserwacji statystycznej podlegają różne właściwości populacji, które nazywamy **cechami statystycznymi.** Cechy, które można wyrazić za pomocą liczb (np. wzrost, wiek, waga) nazywamy **cechami mierzalnymi.** Cechy, które można wyrazić jedynie za pomocą słów (np. kolor oczu, płeć, miejsce zamieszkania) nazywamy **cechami niemierzalnymi.**

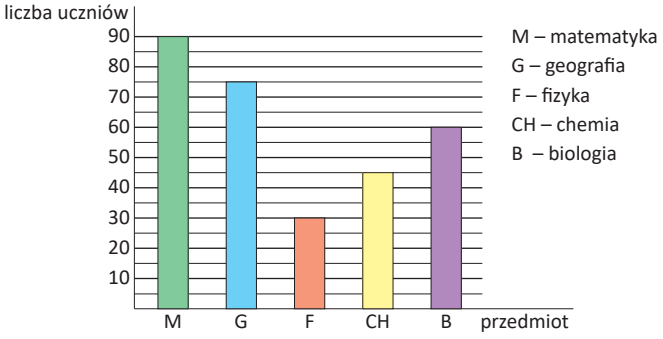
Przykład 1.

Przeprowadzono badanie statystyczne na próbie 300 uczniów pewnego liceum. Obserwacja statystyczna polegała na przeprowadzeniu ankiety, a badaną cechą był ulubiony przedmiot młodzieży licealnej z grupy przedmiotów matematyczno-przyrodniczych. Każdy ankietowany musiał wskazać jeden przedmiot. Okazało się, że matematykę wybrało 90 osób, geografię – 75 osób, fizykę – 30 osób, chemię – 45 osób, a biologię – 60 osób. Przedstawimy różne sposoby opisu otrzymanych informacji.

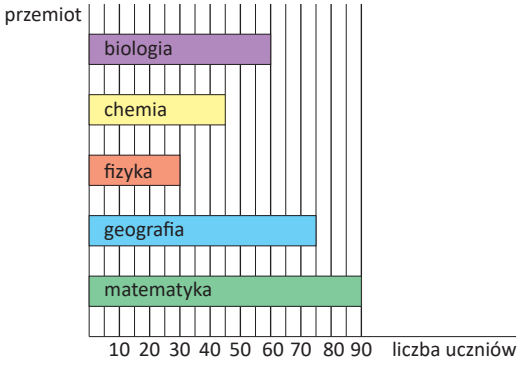
1. Otrzymane informacje przedstawiamy w **tabeli liczebności**, gdzie różnym wartościom badanej cechy przyporządkowujemy ich liczebności. Pierwszy wiersz lub pierwsza kolumna tabeli to otrzymane wyniki badanej cechy, którą w tym wypadku jest ulubiony przedmiot matematyczno-przyrodniczy. Drugi wiersz (druga kolumna) przedstawia liczebności tych wyników. Suma liczb w drugim wierszu (w drugiej kolumnie) jest równa liczbie ankietowanych, czyli 300. Podajemy przykładową tabelę przedstawiającą uzyskane wyniki.

Przedmiot	Matematyka	Geografia	Fizyka	Chemia	Biologia
Liczba uczniów	90	75	30	45	60

2. Otrzymane informacje przedstawiamy na **diagramie kolumnowym**.
Na osi poziomej zapisujemy otrzymane wyniki, czyli nazwy przedmiotów. Na osi pionowej zaznaczamy w skali liczebności otrzymanych wyników. Rysujemy pionowe kolumny w następujący sposób: podstawą każdej kolumny jest nazwa danego przedmiotu, a wysokość kolumny odpowiada liczbie głosów oddanych na ten przedmiot; im wyższa kolumna, tym więcej głosów.
Na diagramie poniżej nazwy przedmiotów zostały zastąpione początkowymi literami, o czym informuje legenda zamieszczona dodatkowo obok diagramu.



3. Otrzymane informacje przedstawiamy na **diagramie słupkowym**.
Tym razem nazwy danych przedmiotów umieszczamy na osi pionowej. Nazwy mogą być też zapisane na słupkach. Oś pozioma informuje o liczbie głosów oddanych na dany przedmiot. Słupki są poziome, a ich długości odpowiadają liczbie ankiet wskazujących dany przedmiot: im dłuższy słupek, tym więcej głosów.



Jeżeli chcemy podkreślić, jaką część badanej próby stanowi każdy wynik, to dane statystyczne przedstawiamy w tabeli częstości względnych lub na diagramie częstości względnych, lub na diagramie kołowym.

Częstość względna – to ułamek, równy stosunkowi liczby wyników przypisanych danemu przedmiotowi do ogólnej liczby wyników.

Przykład 2.

W klasie liczącej 24 uczniów odbył się sprawdzian z języka polskiego. Wyniki tego sprawdzianu zostały objęte obserwacją statystyczną. Okazało się, że dwie osoby otrzymały ocenę 6, trzy osoby – ocenę 5, sześć osób – ocenę 4, 8 osób – ocenę 3 i 5 osób – ocenę 2. Przedstawimy dane statystyczne w tabeli częstości względnych, na diagramie kolumnowym częstości względnych i na diagramie kołowym.

Częstość względna występowania oceny 6 w pełnej próbie 24 osób jest równa $\frac{2}{24}$, czyli $\frac{1}{12}$

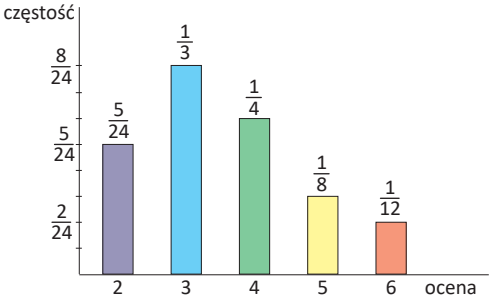
Podobnie obliczamy pozostałe częstości.

1. Poniżej przedstawiamy wyniki w tabeli częstości względnych.

Ocena ze sprawdzianu	6	5	4	3	2
Częstość względna	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$

Suma częstości przedstawionych w drugim wierszu jest równa 1 (sprawdź!). Zauważ, że z tabeli częstości nie odczytamy liczebności próby objętej badaniem statystycznym.

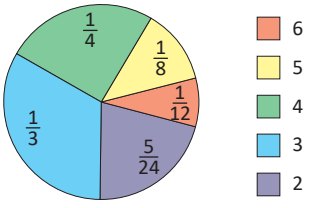
2. Poniżej przedstawiamy diagram kolumnowy częstości względnych.



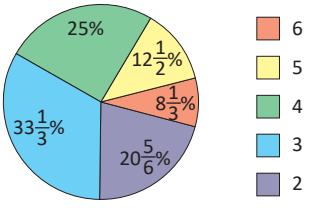
3. Aby przedstawić dane statystyczne na diagramie kołowym, dzielimy kąt środkowy koła, równy 360°, na kąty środkowe, odpowiadające częstościom względnym danych wyników. Na przykład, częstości równej $\frac{1}{12}$ odpowiada dwunasta część kąta pełnego, czyli kąt o mierze 30°. Częstości równej $\frac{1}{8}$ odpowiada kąt środkowy równy $\frac{360°}{8}$, czyli 45°. Podobnie, ułamkowi $\frac{1}{4}$ odpowiada kąt równy 90°, ułamkowi $\frac{1}{3}$ – kąt 120°, a ułamkowi $\frac{5}{24}$ – kąt 75°.

Poniżej prezentujemy dane ze sprawdzianu na diagramie kołowym.

a)



b)

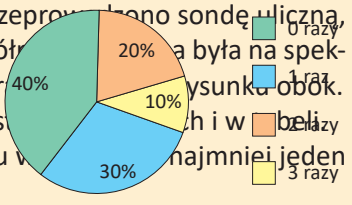


Na rysunku b) diagram kołowy przedstawia częstości wyrażone w procentach. Wyniki sprawdzianu wskazują, że ocenę 6 uzyskało $8\frac{1}{3}\%$ procent uczniów, ocenę 5 – 12,5% uczniów, ocenę 4 – 25% uczniów, ocenę 3 – $33\frac{1}{3}\%$ uczniów i ocenę 2 – $20\frac{5}{6}\%$ wszystkich uczniów.

Ćwiczenie 1. Przedstaw: a) tabelę częstości względnych, b) diagram kołowy procentowy wyników uzyskanych w przykładzie 1. Jakie kąty środkowe na diagramie kołowym odpowiadają poszczególnym przedmiotom?

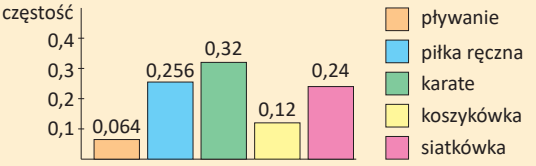
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Na próbie 50 przypadkowo spotkanych osób przeprowadzono sondę uliczną, w której zapytano, ile razy w ciągu ostatniego półr[oku] a była na spektaklu w teatrze. Wyniki sondy przedstawia diagr[am] ysunku obok.



   a) Zaprezentuj podane dane na diagramie częst[otliwości] h i w tabeli.
   b) Ile osób w badanej próbie było na spektaklu w[co] najmniej jeden raz w ciągu ostatniego półrocza?

2. Badaniem statystycznym objęto 125 uczniów pewnej szkoły, którzy uprawiają tylko jedną dyscyplinę sportową. Diagram częstości względnych przedstawiony obok informuje o wyborach tych uczniów.



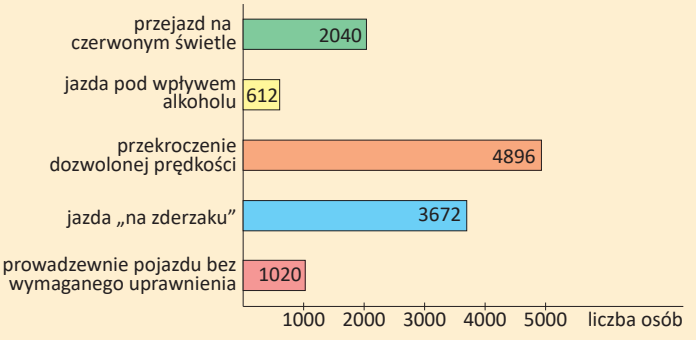
a) Oblicz, o ile procent więcej osób uprawia piłkę ręczną niż koszykówkę.
b) Sporządź tabelę liczebności poszczególnych dyscyplin sportowych.
c) Wykonaj prezentację otrzymanych wyników na diagramie słupkowym.

3. Z obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym można uzyskać maksymalnie 50 punktów. Przystępujący do egzaminu zda ten egzamin tylko wtedy, gdy otrzyma co najmniej 30% punktów możliwych do zdobycia. W tabeli liczebności poniżej zamieszczono pełną próbę wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym w wybranym roku w jednej ze szkół średnich.

Liczba punktów	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-50
Liczba uczniów	3	7	14	12	14	30	28	6	4	2

a) Ilu maturzystów przystąpiło w tej szkole do egzaminu maturalnego z matematyki w zakresie podstawowym?
b) Ile osób zdało ten egzamin? Jaki to procent przystępujących do egzaminu?
c) Przedstaw dane z tabeli na diagramie kolumnowym.

4. Z raportu przedstawionego przez policję wynika, że w pewnym mieście w ciągu roku zostało ukaranych mandatami 12 240 kierowców. Rodzaj przewinienia i jego liczebność ilustruje poniższy diagram słupkowy.



a) Wykonaj diagram kołowy procentowy, ilustrujący wyniki raportu.
b) O ile procent więcej kierowców przekroczyło dozwoloną prędkość, niż jechało „na zderzaku”?

Średnia z próby

Termin średniej arytmetycznej występuje często w statystyce i dotyczy danych, które zawierają wartości cechy mierzalnej, czyli cechy wyrażonej liczbą.

Definicja 1.

Niech liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej.

Średnią arytmetyczną z próby liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$,

którą oznaczamy $\overline{x}$.

Przykład 1.

Tabela poniżej przedstawia cząstkowe oceny Janka z języka angielskiego z kartkówek. Obliczymy średnią tych ocen. Zakładamy, że znak „+” przy ocenie ma wartość 0,5.

Ocena	2+	3+	4	5
Liczebność	1	4	3	2

Cechą mierzalną jest uzyskana ocena z każdej kartkówki. Liczba wszystkich ocen z kartkówek jest równa $1+4+3+2$, czyli 10. Obliczamy średnią 10 ocen:

$$\overline{x} = \frac{2{,}5+3{,}5+3{,}5+3{,}5+3{,}5+4+4+4+5+5}{10} = \frac{38{,}5}{10} = 3{,}85$$

Średnia ocen z kartkówek jest równa 3,85.

Jeśli wartości cechy się powtarzają, to sumę w liczniku można zapisać krócej:

$$\overline{x} = \frac{1\cdot 2{,}5+4\cdot 3{,}5+3\cdot 4+2\cdot 5}{1+4+3+2} = \frac{38{,}5}{10} = 3{,}85$$

Przykład 2.

W pewnym technikum przeprowadzono sprawdzian dyrektorski z matematyki w trzech klasach czwartych: IVa, IVb i IVc. W 34-osobowej klasie IVa średnia ocen z tego sprawdzianu była równa 2,5, w 30-osobowej klasie IVb średnia ocen była równa 2,8 oraz w 20-osobowej klasie IVc średnia ocen była równa 4. Jaka była średnia ocen z tego sprawdzianu?

Mogłoby się wydawać, że średnią ocen można obliczyć następująco:

$$\frac{2{,}5+2{,}8+4}{3} = \frac{9{,}3}{3} = 3{,}1$$

Ten wynik byłby prawdziwy tylko wówczas, gdyby wszystkie klasy były równoliczne. Ale tak nie jest. Aby wyznaczyć żądaną średnią, należy obliczyć sumy ocen ze sprawdzianu w każdej klasie, wyniki dodać i otrzymaną sumę podzielić przez liczbę wszystkich uczniów klas czwartych.

Sumy ocen ze sprawdzianu w poszczególnych klasach są następujące:

w IVa – $34 \cdot 2{,}5$ w IVb – $30 \cdot 2{,}8$ w IVc – $20 \cdot 4{,}0$

Obliczamy średnią ocen ze sprawdzianu:

$$\frac{34 \cdot 2{,}5 + 30 \cdot 2{,}8 + 20 \cdot 4}{34 + 30 + 20} = \frac{85 + 84 + 80}{84} = \frac{249}{84} \approx 2{,}96$$

Średnia ocen ze sprawdzianu jest równa w przybliżeniu 2,96.

Ze względu na większą liczebność klas IVa i IVb, większy wpływ na średnią ocen ze sprawdzianu miały średnie tych klas, aniżeli średnia klasy IVc. Możemy powiedzieć, że wagi ocen 2,5 oraz 2,8 są większe niż waga oceny 4,0.

Definicja 2.

Niech liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą wartościami pewnej cechy mierzalnej, a liczby dodatnie $w_1, w_2, \ldots, w_n$ będą wagami, odpowiadającymi tym wartościom cechy.
Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z wagami odpowiednio $w_1, w_2, \ldots, w_n$ nazywamy liczbę $\frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \ldots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$, którą oznaczamy $\overline{x}_w$.

Przykład 3.

Zmieszano cukierki owocowe, miętowe i czekoladowe w stosunku 5 : 6 : 9. Cena za 1 kg cukierków owocowych wynosiła 14 zł, cukierków miętowych – 16 zł, a cukierków czekoladowych – 20 zł. Obliczymy cenę 1 kg mieszanki.

Wartością cechy mierzalnej jest cena 1 kg cukierków o danym smaku, zatem:

$x_1 = 14$ zł $x_2 = 16$ zł $x_3 = 20$ zł

Udziały ilościowe cukierków o danym smaku to wagi nadane tym cukierkom, czyli:

$w_1 = 5$ $w_2 = 6$ $w_3 = 9$

Obliczamy cenę 1 kg mieszanki:

$$\overline{x}_w = \frac{14 \cdot 5 + 16 \cdot 6 + 20 \cdot 9}{5 + 6 + 9} = \frac{70 + 96 + 180}{20} = \frac{346}{20} = 17{,}3$$

Cena 1 kg mieszanki jest równa 17 zł 30 gr.

Ćwiczenie 1. W skupie cena za 1 kg podgrzybków jest zróżnicowana ze względu na wielkość grzybów. Za 1 kg małych podgrzybków płaci się dostawcy 40 zł, średnich – 35 zł, a dużych – 30 zł. Dostawca przywiózł do skupu podgrzybki, wśród których małe stanowiły 20%, a duże 50% dostawy. Resztę stanowiły grzybki średniej wielkości. Oblicz średnią cenę 1 kg podgrzybków dostarczonych do skupu.

Przykład 4.

Na początku roku szkolnego nauczyciel matematyki przedstawił uczniom zasady oceniania ich pracy. Odpowiednim formom sprawdzania wiedzy przypisał wagi podane w tabeli.

Forma sprawdzania wiedzy	Prace klasowe	Krótkie sprawdziany i odpowiedzi ustne	Prace domowe
Waga	3	2	1

Obliczymy średnią ważoną i średnią arytmetyczną ocen ucznia, który w całym semestrze uzyskał z matematyki następujące oceny:

- prace klasowe: 2, 3, 1, 3
- odpowiedzi ustne: 4
- krótkie sprawdziany: 4, 5
- prace domowe: 5, 5

Obliczamy średnią ważoną uzyskanych ocen.

$$\overline{x}_w = \frac{2\cdot 3+3\cdot 3+1\cdot 3+3\cdot 3+4\cdot 2+4\cdot 2+5\cdot 2+5\cdot 1+5\cdot 1}{3+3+3+3+2+2+2+1+1} =$$

$$= \frac{3\cdot(2+3+1+3)+2\cdot(4+4+5)+1\cdot(5+5)}{4\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 1} =$$

$$= \frac{3\cdot 9+2\cdot 13+1\cdot 10}{20} = \frac{63}{20} = 3{,}15$$

Obliczamy średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

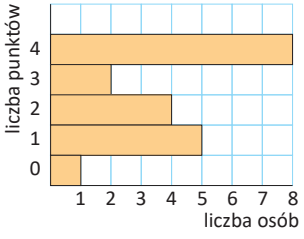
$$\overline{x} = \frac{2+3+1+3+4+4+5+5+5}{9} = \frac{32}{9} = 3{,}(5)$$

Średnia arytmetyczna ocen jest większa od średniej ważonej o ok. 0,4.

Przykład 5.

Właściciel herbaciarni, chcąc wprowadzić na rynek nową herbatę „Zimowa bajka", przeprowadził badanie statystyczne na grupie 20 losowo wybranych bywalców lokalu. Wybrane osoby oceniły herbatę w trzech kategoriach: B – barwa, S – smak, C – cena, przyznając punkty w skali od 0 do 4 w każdej kategorii. Poniżej są przedstawione wyniki obserwacji.

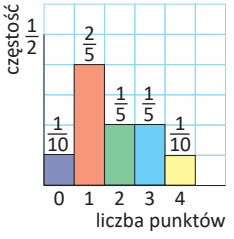
Barwa



Smak

Liczba punktów	0	1	2	3	4
Liczba osób	0	0	6	2	12

Cena



Po zebraniu informacji właściciel oblicza średnie arytmetyczne $\overline{x}_B$, $\overline{x}_S$ oraz $\overline{x}_C$ uzyskanych punktów. O wprowadzeniu herbaty do sprzedaży decyduje średnia ważona liczb $\overline{x}_B$, $\overline{x}_S$ oraz $\overline{x}_C$, z wagami odpowiednio 3, 5, 2. Właściciel wprowadza herbatę do stałej sprzedaży tylko wtedy, gdy średnia ważona jest większa od 2,5. Ocenimy, czy herbata „Zimowa bajka" będzie sprzedawana w tej herbaciarni.

- Obliczamy średnie arytmetyczne punktów, jakie uzyskała herbata „Zimowa bajka" w poszczególnych kategoriach.

$$\overline{x}_B = \frac{1\cdot 0+2\cdot 3+4\cdot 2+5\cdot 1+8\cdot 4}{20} = 2{,}55$$

$$\overline{x}_S = \frac{0\cdot 0+0\cdot 1+6\cdot 2+2\cdot 3+12\cdot 4}{20} = 3{,}3$$

$$\overline{x}_C = \frac{0\cdot \frac{1}{10}\cdot 20+1\cdot \frac{2}{5}\cdot 20+2\cdot \frac{1}{5}\cdot 20+3\cdot \frac{1}{5}\cdot 20+4\cdot \frac{1}{10}\cdot 20}{20} = 1{,}8$$

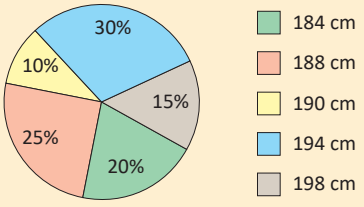
- Obliczamy średnią ważoną liczb $\overline{x}_B$, $\overline{x}_S$ oraz $\overline{x}_C$, z wagami odpowiednio 3, 5, 2.

$$\overline{x}_w = \frac{2{,}55\cdot 3+3{,}3\cdot 5+1{,}8\cdot 2}{3+5+2} = \frac{27{,}75}{10} = 2{,}775$$

Średnia ważona jest większa od 2,5. Właściciel herbaciarni wprowadzi herbatę „Zimowa bajka" do stałej sprzedaży.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Na diagramie kołowym procentowym przedstawiono wyniki pomiaru wzrostu siatkarzy z pewnego klubu sportowego.



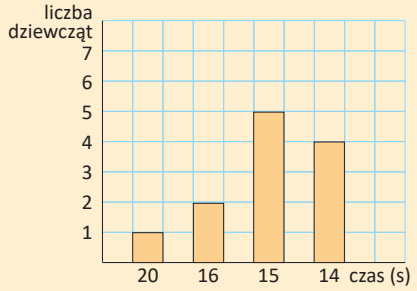
Oblicz średnią wzrostu siatkarzy tego klubu.

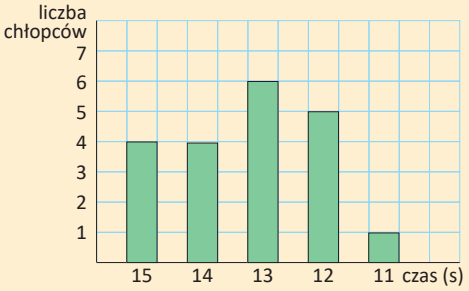
2. Średnia płaca w zakładzie zatrudniającym 24 osoby była równa 3250 zł. Po zatrudnieniu nowego pracownika średnia płaca wzrosła o 4%. Jaką płacę otrzymał nowy pracownik?

3. W tabeli poniżej znajduje się zestawienie miesięcznych zarobków wszystkich pracowników pewnej firmy. Oblicz średnie wynagrodzenie w tej firmie. Wynik zaokrąglij do 1 zł.

Wynagrodzenie	1950	2100	2500	3200	4850	6900
Liczba osób	3	4	8	7	6	2

4. Nauczyciel wychowania fizycznego przeprowadził w klasie IVa sprawdzian z biegu na 100 m. Pomiary czasu dziewcząt i chłopców ilustrują poniższe diagramy.





Oblicz:
a) średni czas biegu dziewcząt,
b) średni czas biegu chłopców,
c) średni czas biegu wszystkich uczniów klasy IVa.

5. Właściciel dwóch hoteli *Czajka* i *Mewa* przeprowadził ankietę na próbie 10 gości z każdego hotelu, badającą zadowolenie gości z pobytu w tych ośrodkach. Ankietowane osoby oceniały swój pobyt w trzech kategoriach: standard pokoju, wyżywienie oraz kulturę obsługi, przyznając każdej z tych kategorii ocenę cząstkową w skali ocen szkolnych od 1 do 6. Oto wyniki tej ankiety:

Pensjonat *Czajka*		
Kategoria	Ocena cząstkowa	Liczba osób
Standard pokoju	4	4
	3	2
	2	4
Wyżywienie	6	2
	5	8
Kultura obsługi	5	6
	4	4

Pensjonat *Mewa*		
Kategoria	Ocena cząstkowa	Liczba osób
Standard pokoju	6	7
	4	3
Wyżywienie	4	6
	5	3
	2	1
Kultura obsługi	4	5
	3	5

Na podstawie zebranych danych wystawiono końcowe oceny obu hoteli, równe średnim ważonym otrzymanych ocen cząstkowych. Wiedząc, że standard pokoju miał wagę 4, wyżywienie – wagę 3, a kultura obsługi – wagę 2, porównaj końcowe oceny obu hoteli.

Mediana z próby i moda z próby. Skala centylowa

Aby możliwie precyzyjnie scharakteryzować zbiór danych statystycznych nie można poprzestać na obliczeniu średniej z próby. Przydatne do tego są również inne wielkości takie jak mediana i moda z próby, które omówimy w tym temacie.

Moda z próby

Przykład 1.

Wśród wybranych 22 rodzin przeprowadzono badanie statystyczne. Badaną cechą była liczba dzieci w rodzinie. Otrzymano następujące wyniki:

0 3 0 2 3 7 1 1 4 1 2 2 3 2 1 3 1 0 4 2 5 2

Sprawdzimy, która liczba powtarza się najczęściej.

W tym celu porządkujemy zebrane dane statystyczne, zapisując je w postaci niemalejącego ciągu liczb:

0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 5 7

Zebrane wyniki możemy także zapisać w tabeli liczebności:

Liczba dzieci w rodzinie	0	1	2	3	4	5	7
Liczba rodzin	3	5	6	4	2	1	1

Wartość cechy, która powtarza się najczęściej, to 2. Powiemy, że wynik „dwoje dzieci” jest modą zbioru liczb dzieci w rodzinie.

Definicja 1.

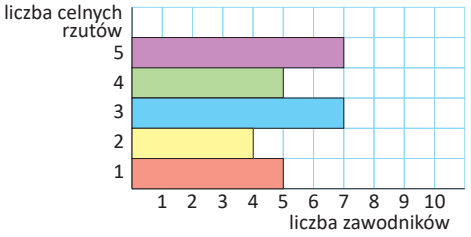
Modą lub **dominantą** zbioru danych statystycznych nazywamy tę wartość cechy statystycznej, która w zbiorze danych występuje najczęściej. Modę oznaczamy symbolem M_o.

Jeżeli w zbiorze danych statystycznych wszystkie wartości występują z taką samą liczebnością, to mówimy, że w tym zbiorze danych nie ma mody.

Jeżeli kilka wartości cechy występuje z taką samą liczebnością, większą od liczebności pozostałych wartości, to każda z tych kilku wartości jest modą.

Przykład 2.

Na początku obozu sportowego trener koszykówki badał celność obozowiczów w rzutach piłką do kosza. Każdy ze sportowców oddał 5 takich rzutów. Trener przedstawił otrzymane wyniki na słupkowym diagramie liczebności.



Z diagramu można odczytać 5 wartości badanej cechy: 1 rzut celny, 2 rzuty celne, 3 rzuty celne, 4 rzuty celne i 5 rzutów celnych. Dwie wartości badanej cechy pojawiały się najczęściej: 3 oraz 5 – z taką samą liczebnością, równą 7. Zatem w zestawie danych wartości są dwie mody: 3 i 5.

Ćwiczenie 1. Średnia arytmetyczna zestawu danych 2, 6, 4, 8, x, 2, x, 8, 8, x jest równa 5,3. Wyznacz modę tego zestawu.

Mediana z próby

Kolejną wielkością, która charakteryzuje zestaw danych statystycznych, jest mediana.

Definicja 2.

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie niemalejącym ciągiem wartości badanej cechy mierzalnej. **Medianą** nazywamy:

- środkową liczbę $x_{\frac{n+1}{2}}$ w tym ciągu, jeśli n jest liczbą nieparzystą lub
- średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb $x_{\frac{n}{2}}$ i $x_{\frac{n}{2}+1}$ w tym ciągu, czyli liczbę $\frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$, jeśli n jest liczbą parzystą.

Medianę oznaczamy symbolem M_e.

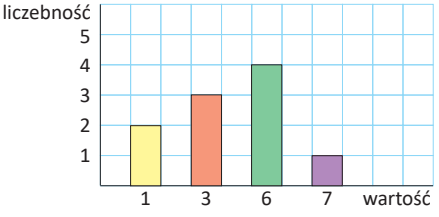
Przykład 3.

Obliczymy medianę M_e zestawu danych statystycznych przedstawionych w postaci:

a) tabeli liczebności

Wartość	2	4	7	8
Liczebność	3	2	5	1

b) diagramu kolumnowego.



Ad a) Liczba danych statystycznych jest równa $3 + 2 + 5 + 1$, czyli 11.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
2	2	2	4	4	7	7	7	7	7	8

Ponieważ liczba 11 jest nieparzysta, więc na podstawie definicji 2. otrzymujemy:

$$M_e = x_{\frac{11+1}{2}} = x_6 = 7$$

W tym przypadku mediana jest wartością cechy, którą ma środkowy element w uporządkowanym ciągu danych.

Ad b) Liczba danych statystycznych jest równa $2 + 3 + 4 + 1$, czyli 10.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	1	3	3	3	6	6	6	6	7

Liczba 10 jest parzysta. Na podstawie definicji 2. mamy:

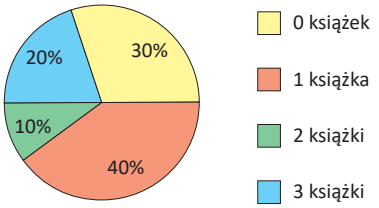
$$M_e = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{3+6}{2} = 4{,}5$$

W tym przypadku mediana jest równa średniej arytmetycznej dwóch środkowych wartości badanej cechy w uporządkowanym ciągu danych.

1) Mediana M_e jest taką liczbą, że co najmniej połowa danych ma wartość nie większą niż M_e i co najmniej połowa danych ma wartość nie mniejszą niż M_e.
2) Mediana M_e może należeć do ciągu danych i może nie należeć do tego ciągu.

Przykład 4.

Podczas sondy ulicznej zapytano 20 dorosłych osób o liczbę książek przeczytanych w ciągu ostatniego miesiąca. Wyniki badanej cechy są przedstawione na procentowym diagramie kołowym. Uporządkujemy dane statystyczne oraz wyznaczymy modę i medianę.



Z diagramu wynika, że 30% z 20 badanych osób, czyli 6 osób, nie przeczytało żadnej książki, 1 książkę przeczytało 8 osób, 2 książki – 2 osoby i 3 książki – 4 osoby.
Po uporządkowaniu otrzymujemy ciąg danych:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3

Najczęściej występującą wartością badanej cechy jest 1, zatem moda jest równa 1.

Liczba danych jest równa 20 i jest liczbą parzystą. Obliczamy medianę:

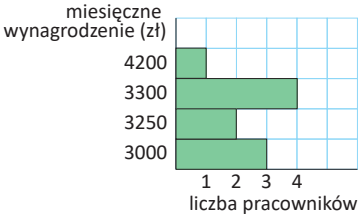
$$M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

W tym przypadku moda i mediana mają jednakową wartość, równą 1.

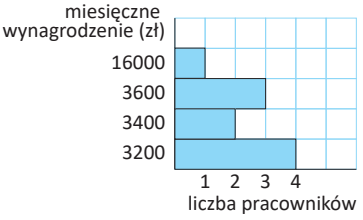
Przykład 5.

Diagramy poniżej ilustrują miesięczne zarobki pracowników firmy *Alfa* i firmy *Beta*. Obliczymy medianę oraz średnią płacę w obu firmach. Która z obliczonych wielkości lepiej opisuje poziom płac w tych firmach?

Firma *Alfa*



Firma *Beta*



- **Firma *Alfa***

Liczba pracowników jest równa 10. W niemalejącym ciągu danych zarobków piątym wyrazem jest wynagrodzenie w wysokości 3250 zł, a szóstym – wynagrodzenie równe 3300 zł. Zatem medianę wyznaczymy następująco:

$$M_e = \frac{3250 + 3300}{2} = 3275$$

Obliczamy średnią płacę w firmie *Alfa*:

$$\overline{x} = \frac{4200 + 2 \cdot 3250 + 3 \cdot 3000 + 4 \cdot 3300}{10} = 3290$$

Mediana zarobków jest równa 3275 zł, a średnia płaca wynosi 3290 zł.
Mediana i średnia zarobków miesięcznych mają zbliżone wartości. To znaczy, że połowa pracowników zarabia mniej niż wynosi średnia, a połowa więcej. Pensje pracownicze nie są zbyt mocno zróżnicowane.

- **Firma *Beta***

Podobnie jak w firmie *Alfa*, liczba pracowników jest równa 10. Wyznaczamy medianę zarobków:

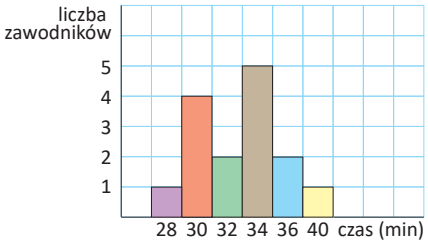
$$M_e = \frac{3400 + 3400}{2} = 3400$$

Obliczamy średnią zarobków:

$$\overline{x} = \frac{16000 + 2 \cdot 3400 + 3 \cdot 3600 + 4 \cdot 3200}{10} = 4640$$

Mediana jest równa 3400 zł, a średnia płaca wynosi 4640 zł.
W tym przypadku mediana jest znacznie mniejsza od średniej. Większość pracowników zarabia poniżej średniej. Tu poziom płac wierniej opisuje mediana.

Ćwiczenie 2. Poniższy diagram kolumnowy ilustruje czasy uzyskane w biegu przełajowym przez piętnastu zawodników.



a) Wyznacz średni czas uzyskany przez zawodników; wynik zaokrąglij do 1 min.
b) Porównaj średni czas biegu przełajowego z medianą.

Skala centylowa

Centyl to wielkość statystyczna, która – podobnie jak procent – stanowi setną część całości. Skala centylowa pozwala określić położenie interesującego nas wyniku liczbowego względem pozostałych danych liczbowych. Jeżeli interesujący nas wynik odpowiada centylowi c, to znaczy, że c% danych ma wartość równą lub mniejszą od tej danej, a $(100 - c)$% danych ma wartość większą od tej danej.

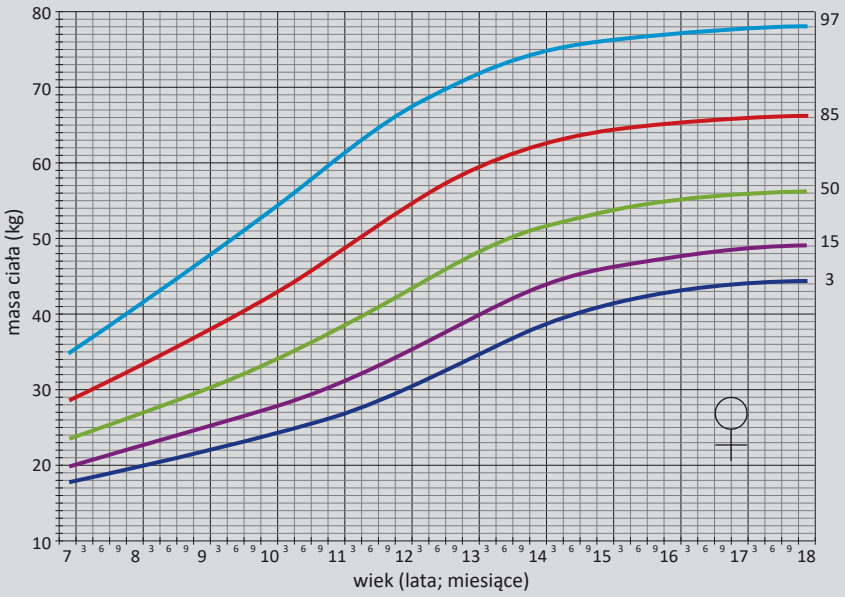
Na podstawie danych liczbowych, uzyskanych z odpowiednio dużej próby badanej populacji, tworzy się **siatki centylowe**, będące wzorcem porównawczym dla danych z tej populacji. Na przykład praktyczne zastosowanie mają siatki centylowe, dotyczące masy ciała lub wzrostu dziecka w określonej grupie wiekowej oraz przy prezentacji wyników matury.

Przykład 6.

Czteroletni Adaś ma 110 cm wzrostu. Na podstawie dostępnych siatek centylowych lekarka prowadząca Adasia stwierdziła, że jego wzrost odpowiada 90. centylowi. To znaczy, że:
– 90% wszystkich czteroletnich chłopców to chłopcy niżsi od Adasia lub mający taki sam wzrost jak Adaś
– 10% wszystkich czteroletnich chłopców to chłopcy wyżsi od Adasia.

Przykład 7.

Instytut „Pomnik – Centrum Zdrowia Dziecka” opracował w 2010 roku siatki centylowe dotyczące wagi dziewcząt oraz chłopców. Siatkę centylową dziewcząt przedstawia rysunek na następnej stronie.



Na osi poziomej wypisane są liczby określające wiek dziewcząt. Na osi pionowej zaznaczono wyniki badanej cechy, którą jest masa ciała. Linie na siatce wytyczają poziom ustalonego centyla dla danej wagi w określonej grupie wiekowej. Na końcach linii podane są wielkości centyla: 3, 15, 50, 85, 97.

a) Kasia ma 13 lat i 3 miesiące oraz waży 60 kg. Z siatki centylowej odczytujemy, że punkt $\left(13\frac{3}{12}, 60\right)$ jest położony na poziomie 85. centyla. To znaczy, że 85% dziewcząt w jej wieku waży tyle, co Kasia lub mniej, a 15% dziewcząt w jej grupie wiekowej waży więcej.

b) Z powyższej siatki centylowej można na przykład odczytać, że dziewczynka w wieku 14,5 lat średnio w 94 przypadkach na 100 waży więcej niż 40 kg i jednocześnie nie więcej niż 75 kg.

Skala centylowa jest bardzo przydatna w analizie porównawczej wyników sprawdzianu lub egzaminu obejmującego dużą populację.

Przykład 8.

W pewnym technikum przeprowadzono we wszystkich klasach czwartych sprawdzian kontrolny z matematyki. Sprawdzian pisało 200 osób. Maksymalnie można było uzyskać 25 punktów, nie przyznawano części ułamkowych punktów. Na tablicy ogłoszeń wywieszono następującą tabelę, przedstawiającą wyniki procentowe uczniów wraz z odpowiadającymi im wartościami centylowymi.

Wyniki sprawdzianu z matematyki w klasach czwartych					
Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
8	1	40	37	72	82
12	2	44	41	76	85
16	4	48	46	80	87
20	5	52	49	84	90
24	12	56	53	88	91
28	21	60	57	92	95
32	28	64	63	96	97
36	29	68	75	100	100

a) Ewa uzyskała ze sprawdzianu wynik równy 76%. Obliczymy, ile to punktów:
$0{,}76 \cdot 25 = 19$
Wynik 19-punktowy odpowiada 85 centylowi. Ustalimy położenie wyniku Ewy względem wszystkich wyników z tego sprawdzianu.
$$\frac{85}{100} \cdot 200 = 170$$
Otrzymaliśmy, że 170 osób uzyskało co najwyżej 19 punktów i tylko 30 osób osiągnęło lepszy wynik ze sprawdzianu niż Ewa.

b) Najmniejszy wynik, równy 8%, odpowiada 1 centylowi. Uzyskały go dwie osoby, bowiem
$$\frac{1}{100} \cdot 200 = 2$$

c) Kolejne wyniki procentowe różnią się od siebie o 4 punkty procentowe, co stanowi 1 punkt zdobyty na sprawdzianie. Zatem w tabeli uwzględniono wszystkie wyniki punktowe od 2 punktów do 30 punktów włącznie.

d) Ewa zauważyła również, że wynikowi 72%, czyli 18 uzyskanym punktom, jest przypisany 82 centyl. Wykonała obliczenia:
$0{,}82 \cdot 200 = 164$,
z których wynika, że 164 osoby otrzymały wynik słabszy od jej wyniku. Pomiędzy wynikami 18 punktów i 19 punktów nie ma pośrednich wyników. Zatem 6 osób, włącznie z Ewą, otrzymało wynik 76%.

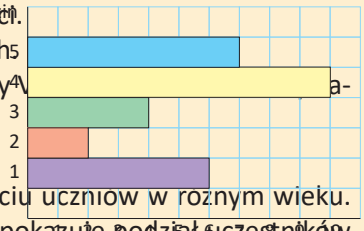
e) Największy skok w skali centylowej między kolejnymi wynikami jest równy 12 i dotyczy wyników 64% i 68%. Zatem wynik 68% jest modą wyników sprawdzianu.

Ćwiczenie 3. Na podstawie tabeli z przykładu 8. wyznacz:
a) medianę uzyskanych wyników ze sprawdzianu,
b) liczbę uczniów, którzy osiągnęli co najmniej 60-procentowy wynik,
c) średni wynik tego sprawdzianu.

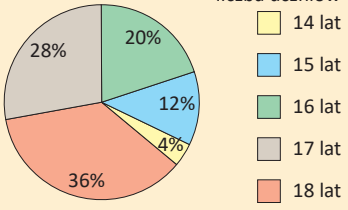
Jeśli wyników liczbowych jest bardzo dużo, to wartości centyla odpowiadające kolejnym wynikom mogą się różnić zaledwie setnymi częściami. Wówczas może się zdarzyć, że kilku wynikom są przypisane takie same, przybliżone wielkości centylowe. W takim wypadku przedstawienie danych z użyciem skali centylowej uniemożliwia dokładne wyznaczenie mody, mediany lub średniej arytmetycznej danych. Jednakże skala centylowa lepiej niż wymienione wielkości charakteryzuje położenie danego wyniku względem wszystkich danych.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. W klasie VIIIa przeprowadzono ankietę. Uczniowie odpowiadali na pytanie: „Ile godzin dziennie korzystasz z komputera?”. Otrzymane wyniki są przedstawione na diagramie słupkowym.
   a) Zapisz dane statystyczne w tabeli liczebności.
   b) Wyznacz modę i medianę zebranych danych.
   c) Oblicz średnią liczbę godzin, jaką uczeń klasy VIIIa spędza przed komputerem.



2. W obozie naukowym wzięło udział pięćdziesięciu uczniów w różnym wieku. Na rysunku obok diagram kołowy procentowy pokazuje podział uczestników obozu ze względu na wiek.
   Oblicz:
   a) średni wiek uczestników obozu,
   b) modę i medianę wieku uczniów.



3. Podaj przykładowy zestaw piętnastu liczb, dla których:
   a) mediana jest równa 16, a moda stanowi 25% mediany,
   b) średnia arytmetyczna jest mniejsza od mediany,
   c) moda jest większa od mediany,
   d) moda jest równa średniej arytmetycznej.

4. Wyznacz liczby naturalne x i y tak, aby średnia arytmetyczna zestawu liczb 4, 2, 6, 1, 4, 2, 1, 3, x, y była równa 3, a moda wynosiła 4.

5. Wyznacz liczby naturalne a i b, wiedząc, że mediana zestawu liczb 3, 5, 6, 1, 2, 3, 10, 6, a, b jest równa $4\frac{1}{2}$, natomiast średnia arytmetyczna tych liczb wynosi $4\frac{4}{5}$.

6. Dla jakich różnych liczb naturalnych x i y mediana zestawu liczb x, 12, 3, 5, 13, 15, 12, 5, 15, y jest równa 11, a moda wynosi 5?

7. Centralna Komisja Egzaminacyjna opublikowała 5 lipca 2021 r. wyniki egzaminu maturalnego z matematyki w zakresie podstawowym. Tabela poniżej przedstawia wyniki procentowe uzyskane na tym egzaminie i skalę centylową wyników.

Matematyka – poziom podstawowy					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	36	26	71	68
2	1	38	29	73	70
4	1	40	31	76	72
7	1	42	34	78	74
9	1	44	36	80	76
11	2	47	39	82	78
13	4	49	42	84	80
16	5	51	44	87	83
18	8	53	47	89	85
20	10	56	50	91	87
22	12	58	52	93	90
24	15	60	55	96	93
27	17	62	58	98	97
29	19	64	60	100	100
31	22	67	63		
33	24	69	65		

a) Magda uzyskała na egzaminie 58% punktów. Któremu centylowi odpowiada wynik Magdy? Ile procent maturzystów uzyskało wynik niższy od wyniku Magdy?

b) Ile procent wszystkich maturzystów zdało egzamin maturalny z matematyki w 2021 roku, jeśli do zdania tego egzaminu wymaga się uzyskania co najmniej 30% możliwych punktów do zdobycia?

Wariancja i odchylenie standardowe

Przykład 1.

Trener skoczków narciarskich przygotowuje do konkursu dwóch zawodników. W czasie ostatniego treningu przed konkursem obaj zawodnicy wykonali po 5 skoków. Długości w metrach tych skoków ilustruje tabela poniżej.

I skoczek	102,5	106	98,5	112	101
II skoczek	104,5	105	103	106,5	101

Trener miał wybrać do konkursu jednego z tych zawodników. Postanowił porównać średnie długości skoków pierwszego i drugiego skoczka.

- Średnia z próby dla pierwszego skoczka:

$$\overline{x}_{\text{I}} = \frac{102,5+106+98,5+112+101}{5} = 104$$

- Średnia z próby dla drugiego skoczka:

$$\overline{x}_{\text{II}} = \frac{104,5+105+103+106,5+101}{5} = 104$$

Okazało się, że obie średnie są jednakowe i wynoszą 104 m. Mimo to trener wybrał do zawodów drugiego skoczka. Jaki mógł być powód tej decyzji?

Przeanalizujmy powyższą tabelę. Zauważ, że wyniki drugiego skoczka mniej odbiegają od średniej niż wyniki pierwszego skoczka. Przedstawmy te różnice:

	$x_1-\overline{x}$	$x_2-\overline{x}$	$x_3-\overline{x}$	$x_4-\overline{x}$	$x_5-\overline{x}$
I. Odchylenie wartości x_i od średniej $\overline{x}$	–1,5	2	–5,5	8	–3
II. Odchylenie wartości x_i od średniej $\overline{x}$	0,5	1	–1	2,5	–3

Wartości bezwzględne odchyleń od średniej u I skoczka są równe:

1,5 m 2 m 5,5 m 8 m 3 m

Ich suma wynosi 20 m. Zatem przeciętne odchylenie wyników od średniej tego skoczka w pięciu skokach jest równe 4 m.

Wartości bezwzględne odchyleń od średniej u II skoczka wynoszą

0,5 m 1 m 1 m 2,5 m 3 m

Ich suma jest równa 8 m. Przeciętne odchylenie wyników od średniej tego skoczka w pięciu skokach wynosi 1,6 m.

Z powyższych obliczeń wynika, że drugi skoczek ma formę bardziej stabilną, a jego skoki są bardziej przewidywalne niż skoki pierwszego skoczka. To mogło być powodem decyzji trenera o wystawieniu do zawodów drugiego skoczka.

W statystyce wielkością charakteryzującą stopień rozproszenia wyników, otrzymanych w danej próbie, wokół wartości średniej jest odchylenie standardowe, które zdefiniujemy za pomocą wariancji.

Definicja 1.

1) **Wariancją** z próby nazywamy średnią arytmetyczną kwadratów różnic pomiędzy wynikami badanej cechy, a ich średnią.
Wariancję oznaczamy symbolem σ^2. Wówczas

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wartościami badanej cechy, a $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) **Odchyleniem standardowym** z próby nazywamy liczbę równą pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji z próby.
Odchylenie standardowe oznaczamy symbolem σ. Wówczas

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wartościami badanej cechy, a $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Przykład 2.

Obliczymy wariancję i odchylenie standardowe dla każdego ze skoczków z przykładu 1.

$$\sigma_{\text{I}}^2 = \frac{(-1,5)^2 + 2^2 + (-5,5)^2 + 8^2 + (-3)^2}{5} = \frac{109,5}{5} = 21,9$$

$$\sigma_{\text{I}} = \sqrt{21,9} \approx 4,7$$

Wariancja z próby pięciu skoków pierwszego skoczka jest równa 21,9 m^2.
Odchylenie standardowe z tej próby wynosi w przybliżeniu 4,7 m.

$$\sigma_{\text{II}}^2 = \frac{0,5^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2,5^2 + (-3)^2}{5} = \frac{17,5}{5} = 3,5$$

$$\sigma_{\text{II}} = \sqrt{3,5} \approx 1,9$$

Wariancja z próby pięciu skoków drugiego skoczka jest równa 17,5 m^2.
Odchylenie standardowe z tej próby wynosi w przybliżeniu 1,9 m.

Ćwiczenie 1. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych:
a) 6, 6, 12, 16 b) $-6, -5, -4, 0, 1, 2$.

Wariancję z próby można też obliczyć z innego wzoru, o czym mówi twierdzenie poniżej.

Twierdzenie 1.
Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ będą wartościami badanej cechy, których średnia arytmetyczna jest równa $\bar{x}$. Wówczas $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$.

Dowód: Przekształcamy równoważnie wzór z definicji 1. Otrzymujemy:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{x_1^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x_1 + \bar{x}^2 + x_2^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x_2 + \bar{x}^2 + x_3^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x_3 + \bar{x}^2 + \ldots + x_n^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x_n + \bar{x}^2}{n} =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + n \cdot \bar{x}^2}{n} =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n} - 2 \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} + \frac{n \cdot \bar{x}^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n} - 2 \cdot \bar{x}^2 + \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2,$$ co kończy dowód.

Ćwiczenie 2. Oblicz wariancję zestawu danych z ćwiczenia 1., korzystając z twierdzenia 1.

Przykład 3.

Obliczymy sumę kwadratów zestawu czterech danych a, b, c, d, wiedząc, że średnia arytmetyczna tych liczb jest równa 5, wariancja z próby wynosi 3,5.

W obliczeniach skorzystamy z twierdzenia 1.

$\sigma^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - \bar{x}^2$, gdzie:

$\bar{x} = 5$ oraz $\sigma^2 = 3{,}5$.

Otrzymujemy:

$4 \cdot 3{,}5 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4 \cdot 25$ stąd

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 14 + 100 = 114$

Suma kwadratów zestawu danych jest równa 114.

Ćwiczenie 3. Średnia arytmetyczna liczb a, b, c jest równa 5, a suma kwadratów tych liczb wynosi 77. Wariancja zestawu trzech danych $k \cdot a$, $k \cdot b$, $k \cdot c$ wynosi 6. Oblicz k.

Przykład 4.

Firma produkująca sok marchewkowy dostarcza do sklepu 80 butelek tego soku dziennie. Producent zapewnił, że średnio w butelce znajduje się 0,5 l soku, a mniej niż 10% butelek dziennej dostawy zawiera ilość soku spoza przedziału $\langle \overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma \rangle$, gdzie $\overline{x}$ oznacza średnią arytmetyczną objętości soku w butelce, zaś σ – odchylenie standardowe z próby. Właściciel sklepu poddał kontroli jedną dzienną dostawę. Wyniki przedstawia tabela poniżej. Czy zapewnienia producenta okazały się prawdziwe?

Zawartość soku w butelce (l)	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	0,54
Liczba butelek	2	1	19	19	23	8	6	2

Obliczymy najpierw średnią objętość soku w butelce:

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 0{,}46 + 0{,}47 + 19 \cdot 0{,}48 + 19 \cdot 0{,}49 + 23 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 0{,}51 + 6 \cdot 0{,}52 + 2 \cdot 0{,}54}{80}$$

$$\overline{x} = \frac{39{,}6}{80} = 0{,}495$$

Teraz skorzystamy z twierdzenia 1. i obliczymy wariancję σ^2 objętości soku w butelkach:

$$\frac{2 \cdot 0{,}46^2 + 0{,}47^2 + 19 \cdot 0{,}48^2 + 19 \cdot 0{,}49^2 + 23 \cdot 0{,}5^2 + 8 \cdot 0{,}51^2 + 6 \cdot 0{,}52^2 + 2 \cdot 0{,}54^2}{80} - 0{,}495^2 =$$

$$= \frac{19{,}62}{80} - 0{,}245025 = 0{,}000225, \text{ czyli } \sigma^2 = 0{,}000225$$

Następnie wyznaczamy odchylenie standardowe σ.

$$\sigma = \sqrt{0{,}000225} = 0{,}015$$

Sprawdzamy, czy mniej niż 10% butelek dziennej dostawy zawiera sok o objętości spoza przedziału od 0,48 l do 0,51 l. Okazuje się, że w badanej dostawie były 3 butelki, w których objętość soku była mniejsza niż 0,48 l oraz 8 butelek, w których objętość soku była większa niż 0,51 l. Zatem 11 butelek nie spełnia normy, co stanowi

$\frac{11}{80} \cdot 100\%$, czyli 13,75% butelek soku z dziennej dostawy.

Okazuje się, że więcej niż 10% butelek soku nie spełniało normy objętościowej, którą przedstawił producent. Ale sprzedawca nie rozwiązał umowy z dostawcą, bo zbyt małą objętość soku miało tylko 3,75% butelek. Właściciel sklepu uznał, że producent soku marchewkowego jest rzetelnym kontrahentem.

UWAGA: W obliczeniach statystycznych stosujemy często przybliżenia, przez co dopuszczamy pewien margines błędu. Czasami jednak taki błąd może być bardzo duży. Gdybyśmy w przykładzie 4. przyjęli, że $\overline{x}=0{,}49$ – to odchylenie standardowe byłoby równe około 0,072. Obliczmy błąd procentowy tego wyniku:

$$\frac{|0{,}015-0{,}072|}{0{,}015}\cdot 100\% \approx 380\%$$

Dlatego podczas obliczeń statystycznych staraj się korzystać z kalkulatora naukowego tak, aby obliczenia były wykonywane na liczbach o możliwie największej dokładności zapisu.

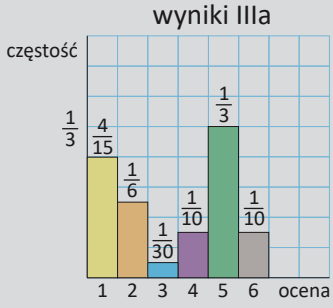
Ćwiczenie 4. Właściciel gospodarstwa rybackiego stwierdził, że karpie odławiane z jego stawu mają wagę około 2 kg oraz że mniej niż 25% tych karpi ma wagę spoza przedziału $\langle \overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma \rangle$. Aby zweryfikować tę informację, zważono 10 odłowionych karpi i otrzymano wyniki:

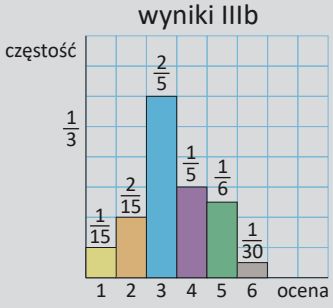
1,5 kg, 1,8 kg, 1,95 kg, 2 kg, 2 kg, 2,05 kg, 2,1 kg, 2,1 kg, 2,18 kg, 2,32 kg.

Oceń, jaki był wynik tej weryfikacji.

Przykład 5.

W dwóch klasach: IIIa i IIIb, z których każda liczy 30 uczniów, przeprowadzono sprawdzian semestralny z matematyki. Uzyskane wyniki są przedstawione na diagramach częstości względnych.





Wyznaczymy poznane wielkości statystyczne charakteryzujące otrzymane wyniki i na tej podstawie spróbujemy porównać obie klasy.

Przedstawmy wyniki obu klas w tabeli liczebności.

Wyniki sprawdzianu w klasie IIIa

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczebność	8	5	1	3	10	3

Wyniki sprawdzianu w klasie IIIb

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczebność	2	4	12	6	5	1

W tabeli obok podane są wielkości charakteryzujące wyniki obu klas. Wyznacz te wielkości samodzielnie z dokładnością do części dziesiętnych.

	M_o	M_e	$\bar{x}$	σ
IIIa	5	4	3,4	1,9
IIIb	3	3	3,4	1,2

1) W obu klasach średnia ocen ze sprawdzianu jest taka sama i wynosi 3,4.
2) Mediana w klasie IIIa jest równa 4. Około połowy wyników klasy IIIa to czwórki, piątki i szóstki. Moda pokazuje, że najwięcej było piątek. Średnia ocen znacząco niższa od mediany jest sygnałem, że w tej klasie są również osoby, które otrzymały bardzo słabe stopnie, czyli jedynki lub dwójki.
   Mediana w klasie IIIb jest równa 3. Około połowy wyników w tej klasie to jedynki, dwójki lub trójki. Moda pokazuje, że najwięcej było trójek. Średnia ocen wyższa od mediany jest sygnałem, że są w klasie osoby, które otrzymały lepsze wyniki niż średnia ocen.
3) Odchylenie standardowe wyników w klasie IIIa jest równe 1,9. To pokazuje, że wyniki w tej klasie różnią się od średniej oceny średnio prawie o dwa stopnie. Można przypuszczać, że w klasie IIIa stosunkowo mało jest wyników zbliżonych do średniej ocen, czyli trójek i czwórek; natomiast dużo jest piątek i dwójek.
   Odchylenie standardowe wyników w klasie IIIb jest równe 1,2. To pokazuje, że wyniki w tej klasie są bardziej zbliżone do średniej ocen, niż w klasie IIIa. W tej klasie było więcej trójek i czwórek niż jedynek, dwójek czy szóstek.

Podsumujmy nasze obserwacje. W klasie IIIa poziom wiedzy z matematyki jest zróżnicowany. Istnieje duża grupa osób, które otrzymują bardzo dobre stopnie ze sprawdzianów i duża grupa osób, które mają bardzo słabe wyniki.
W klasie IIIb uczniowie reprezentują zbliżony poziom umiejętności matematycznych.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz na dwa sposoby wariancję zestawu danych:
   a) 5, 9, 10, 16, 20 b) –2, –2, –2, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 8.
2. Oblicz odchylenie standardowe zestawu danych:
   a) –4, –1, 2, 7, 16, 18, 32 b) 1; 1,2; 1,2; 1,2; 3,1; 3,1; 3,2.
3. Średnia arytmetyczna liczb a, b, c jest równa 20, a wariancja tych liczb wynosi 104. Wyznacz sumę kwadratów tych liczb.

4. Odchylenie standardowe zestawu liczb dodatnich $x, x, y, y, y, z, z, z, z, t$ jest równe $\sqrt{0{,}84}$. Wiedząc, że $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 66 - t^2$, oblicz średnią arytmetyczną tego zestawu liczb.

5. Podczas 14 dni ferii zimowych Ada dokonywała pomiaru temperatury powietrza codziennie o godz. $8^{\underline{00}}$. Oto kolejne wyniki tych pomiarów w skali Celsjusza:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
–8	–9	–10	–9	–5	–5	–3	0	1	0	3	2	–1	–5

Oblicz średnią temperaturę, odchylenie standardowe, modę oraz medianę uzyskanych temperatur.

6. Zmierzono średnice 50 śrub z jednej serii produkcyjnej. Oto wyniki:

Średnica śruby (mm)	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
Liczba śrub	8	10	7	4	8	7	6

a) Podaj modę oraz medianę uzyskanych średnic śrub.
b) Oblicz średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe średnic śrub.

7. W klasie IVc z ostatniego sprawdzianu z matematyki było 13 ocen dopuszczających. Pozostałe oceny to dostateczne i dobre – razem 15 stopni. Wiedząc, że średnia ocen ze sprawdzianu wyniosła 2,75, oblicz:
a) liczbę ocen dobrych i liczbę ocen dostatecznych,
b) odchylenie standardowe od średniej ocen; wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

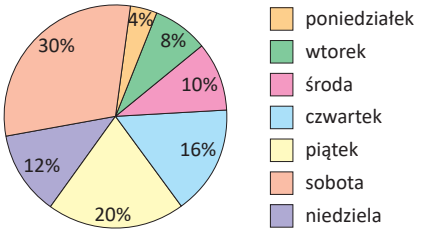
8. Hurtownik kupuje od sadownika tylko wyselekcjonowane gruszki, o wadze ok. 25 dag każda. Hurtownik przyjmuje partię takich gruszek tylko wtedy, gdy mniej niż 10% gruszek z tej partii ma wagę spoza przedziału $\langle \overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma \rangle$. Kontrolą objęto 50 gruszek z badanej partii. Ich wagi ilustruje poniższa tabela. Czy ta partia spełnia wymagania hurtownika? Odpowiedź uzasadnij, wykonując obliczenia.

Waga gruszki (dag)	23	23,4	24	24,5	24,8	25	25,5
Liczba sztuk	2	5	2	14	15	8	4

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3.

Test

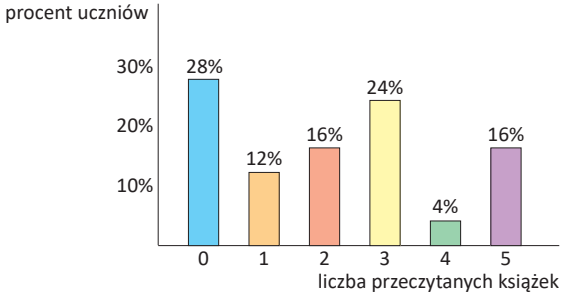
1. W ciągu tygodnia sprzedano 250 biletów na basen. Poniższy diagram procentowy przedstawia w procentach liczbę osób korzystających z basenu w poszczególnych dniach tygodnia. Zakładamy, że każdy bilet został wykorzystany.



Wskaż zdanie fałszywe.

A. W niedzielę korzystało z basenu 30 osób.
B. Liczba osób korzystających z basenu w piątek była o 30 większa niż we wtorek.
C. W sobotę korzystało z basenu o 275% osób więcej niż we wtorek.
D. W czwartek korzystało z basenu o 4% mniej osób niż w piątek.

2. Poniższy diagram ilustruje, ile procent uczniów pewnej klasy przeczytało dane liczby książek w ciągu roku szkolnego.



Średnia liczba przeczytanych książek przez ucznia tej klasy jest równa:

A. 1,96 B. 2,08 C. 2,12 D. 2,25

3. Przeprowadzono sondę uliczną, zadając przechodniom pytanie: „Ile godzin w ciągu dnia ogląda Pan (Pani) programy telewizyjne?" Wyniki tego sondażu podaje poniższa tabela.

Liczba godzin	0	1	2	4	6	8	9
Liczba osób	21	4	15	20	13	6	1

W badanej próbie mediana dziennej liczby godzin przeznaczonych na oglądanie programów telewizyjnych jest równa:

A. 0 B. 1 C. 3 D. 4

4. Średnia arytmetyczna zestawu danych: 12, 5, x, 3, 10, 12, 5, 10, 9, 4 wynosi $\frac{6+x}{2}$. Moda tego zestawu danych jest równa

   A. 5 B. 10 C. 12 D. 9

5. Nauczyciel matematyki pod koniec semestru oblicza średnią ważoną ocen każdego ucznia, z wagami podanymi w tabeli obok. Marysia w tym semestrze miała następujące oceny: z prac klasowych – 4, 5, 5, z kartkówek – 2, 2, oraz jedną ocenę z odpowiedzi ustnej.

Kategoria	Waga
praca klasowa	5
kartkówka	3
odpowiedź ustna	2

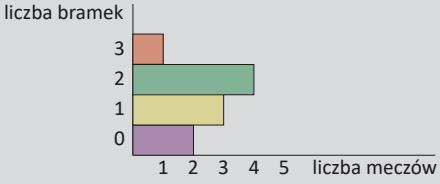
   Średnia ważona ocen Marysi jest równa 4,0. Z tego wynika, że Marysia otrzymała z odpowiedzi ustnej ocenę:

   A. 3 B. 4 C.5 D. 6

6. Wariancja wszystkich rozwiązań równania $(2x-3)(x-15)(x^3+8)(x^2-9)=0$ jest liczbą należącą do przedziału

   A. $(41, 42)$ B. $(7, 8)$ C. $(8, 9)$ D. $(10, 11)$

7. Drużyna piłkarska w jesiennym turnieju rozegrała 10 meczów. Poniższy diagram słupkowy przedstawia, w ilu z tych meczów napastnik drużyny nie strzelił gola, a w ilu zdobył jedną bramkę, dwie bramki lub trzy bramki.



   Odchylenie standardowe liczby bramek zdobytych przez napastnika podczas turnieju, z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku wynosi:

   A. 1,09 B. 0,98 C. 1,02 D. 0,92

Zadania otwarte

8. Na półce stoją 64 kartony soku o pojemności 0,25 l oraz kartony soku o pojemności 0,5 l i 1 l – razem 56 sztuk. Średnia pojemność wszystkich kartonów soku jest równa 0,475 l. Oblicz stosunek liczby kartonów soku o pojemności 1 l do liczby kartonów soku o pojemności 0,5 l.

9. Zakład produkcyjny zatrudnia 10 osób razem z dyrektorem produkcji, którego pensja jest równa 10 400 zł. Średnia płaca wszystkich zatrudnionych jest równa 5360 zł. Po podwyżce wszystkich wynagrodzeń o p% średnia płaca w tym zakładzie wzrośnie do poziomu 6003,20 zł. Oblicz p oraz wysokość pensji dyrektora po podwyżce.

10. Uczniowie klasy IVd planują wyjazd na obóz naukowy. Wychowawca przedstawił klasie trzy propozycje miejsca obozowania. Uczniowie przyznali tym miejscom punkty w skali $1-10$ w trzech kategoriach wagowych, jak w tabeli poniżej. Obóz naukowy odbędzie się w miejscu, które uzyska największą średnią ważoną przyznanych punktów. Dokąd klasa IVd wyjedzie na obóz?

Miejsce	**Koszt** z wagą 0,5	**Termin** z wagą 0,2	**Warunki zakwaterowania** z wagą 0,3
w górach	5	6	8
na Mazurach	7	5	6
nad morzem	4	9	7

11. Średnia zestawu danych 2, 6, 3, 4, 2, x, 6, 5, 7, 3 jest równa 4,1.
   a) Wskaż modę i medianę tego zestawu danych.
   b) Oblicz wariancję oraz odchylenie standardowe tego zestawu.

D 12. Wykaż, że jeśli dla dowolnych liczb dodatnich a, b średnia arytmetyczna zestawu danych $a,\ a+2b,\ a,\ a+b,\ a+2b,\ a+2b,\ a+b,\ a+2b$ jest równa $4\frac{3}{4}$, zaś mediana tego zestawu wynosi $5\frac{1}{2}$, to $a^2+b^2=10$.

D 13. Średnia arytmetyczna liczb x, y, z jest równa 5, a suma kwadratów tych liczb wynosi 101. Wykaż, że jeśli wariancja liczb px, py, pz wynosi $8\frac{2}{3}$, to $p\in\{-1, 1\}$.

14. Zakład przetwórstwa warzyw skupuje tylko wyselekcjonowane ogórki do kiszenia, o długości ok. 7 cm. Właściciel zakładu poddał kontroli partię takich ogórków u dwóch dostawców, mierząc za każdym razem długości 25 ogórków wybranych z tej partii. Otrzymane wyniki są przedstawione w dwóch tabelach.

I.	Długość ogórka (cm)	6,2	6,4	6,9	7	7,2	7,3	7,4	7,5
	Liczba ogórków	1	2	4	7	6	2	2	1

II.	Długość ogórka (cm)	6,7	6,8	7	7,1	7,2	7,8
	Liczba ogórków	3	6	8	4	3	1

Właściciel zakładu wybierze tego dostawcę, u którego więcej zmierzonych ogórków ma długość należącą do przedziału $\langle \overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma \rangle$, gdzie $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną długości tych ogórków, a σ – odchyleniem standardowym z tej próby. Wskaż tego dostawcę.

4. Rachunek prawdopodobieństwa

Kombinatoryka – powtórzenie wiadomości

Kombinatoryka zajmuje się ustalaniem liczebności zbiorów skończonych. Liczbę elementów zbioru skończonego A nazywamy **mocą zbioru** A i oznaczamy

$\overline{\overline{A}}$ lub $|A|$.

Na przykład, jeśli A jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, to

$\overline{\overline{A}} = 999 - 99 = 900$

Zbiory A i B **są równe**, jeśli mają takie same elementy. Zapiszemy wówczas

$A = B$

Kolejność zapisywania elementów w zbiorze nie jest istotna. Mamy na przykład:

$\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$

Zbiory A i B **są równoliczne**, jeśli mają tyle samo elementów. Zapiszemy wtedy

$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ lub $|A| = |B|$

Jeśli na przykład $A = \{x, y\}$, $B = \{y, z\}$, to zbiory A i B nie są równe, ale są równoliczne, bo mają po dwa elementy. Można zapisać:

$A \neq B$ oraz $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = 2$.

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B, jeśli wszystkie elementy zbioru A są również elementami zbioru B, co zapisujemy

$A \subset B$

Każdy zbiór jest swoim podzbiorem. Podzbiorem każdego zbioru jest również zbiór pusty. Możemy więc zapisać

$A \subset A$ i $\varnothing \subset A$, gdzie A oznacza dowolny zbiór.

Ćwiczenie 1. Dany jest zbiór czteroelementowy $\{a, b, c, d\}$. Wypisz wszystkie podzbiory jednoelementowe, dwuelementowe i trzyelementowe tego zbioru. Następnie wykaż, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru czteroelementowego jest równa 2^4.

W klasie trzeciej omówiliśmy kilka metod wyznaczania liczby elementów zbiorów skończonych. Przypomnimy teraz ich zastosowanie w różnych przykładach.

Reguła mnożenia

Niech $\overline{\overline{X}}$ oznacza liczbę elementów, czyli moc skończonego zbioru X, a $\overline{\overline{Y}}$ – moc skończonego zbioru Y. Wówczas liczba różnych, uporządkowanych par mających postać (x, y), gdzie $x \in X$, $y \in Y$, jest równa $\overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{Y}}$.

Reguła dodawania

Jeśli dany zbiór skończony podzielimy na dwa rozłączne podzbiory i w pierwszym podzbiorze jest k elementów, a w drugim podzbiorze jest n elementów, to liczba elementów danego zbioru jest równa $k+n$.

Przykład 1.

Dane są zbiory $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Y=\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Tworzymy liczbę dwucyfrową w taki sposób, że cyfra dziesiątek tej liczby należy do zbioru X, a cyfra jedności należy do zbioru Y. Obliczymy:

a) ile jest wszystkich takich liczb,

b) ile jest wśród nich liczb, których suma cyfr jest równa 5 lub 7.

Ad a) Każdą interesującą nas liczbę dwucyfrową można przedstawić w postaci pary (x, y), gdzie $x \in X$, $y \in Y$ oraz x oznacza cyfrę dziesiątek, a y – cyfrę jedności. Zgodnie z regułą mnożenia, wszystkich takich liczb mamy

$7 \cdot 5$, czyli 35

Ad b) Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb dwucyfrowych z punktu a), których suma cyfr jest równa 5, B – zbiór wszystkich takich liczb dwucyfrowych, których suma cyfr jest równa 7. Interesuje nas moc zbioru $A \cup B$. Zauważ, że zbiory A i B są rozłączne, czyli

$$A \cap B = \varnothing$$

Zgodnie z regułą dodawania otrzymujemy:

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$$

Wyznaczamy liczbę elementów zbioru A i zbioru B.

$A=\{14, 32, 50\}$, więc

$\overline{\overline{A}} = 3$

$B=\{16, 34, 52, 70\}$, zatem

$\overline{\overline{B}} = 4$

Wówczas

$$\overline{\overline{A \cup B}} = 3+4=7$$

Wśród utworzonych liczb dwucyfrowych jest 7 takich, których suma cyfr jest równa 5 lub 7.

Regułę mnożenia można uogólnić na większą niż dwa liczbę zbiorów. Na przykład dla trzech zbiorów skończonych A, B, C liczba trójek uporządkowanych mających postać (a, b, c), gdzie $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, jest równa $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}}$.

Regułę dodawania również można uogólnić na większą niż dwa liczbę podzbiorów. Należy wówczas założyć, że dowolne dwa podzbiory są rozłączne.

Przykład 2.

W szufladzie mamy 10 różnych czapek, 9 różnych szalików i 8 różnych par rękawiczek, których liczby w danych kolorach są przedstawione w poniższej tabeli. Obliczymy, na ile sposobów możemy wybrać czapkę, szalik i parę rękawiczek w jednym kolorze.

	kolor biały	kolor czarny	kolor niebieski	kolor zielony
czapka	2	4	3	1
szalik	4	2	1	2
para rękawiczek	1	3	3	1

Niech A oznacza zbiór wszystkich trójek (czapka, szalik, para rękawiczek) w kolorze białym, B – zbiór takich trójek w kolorze czarnym, C – zbiór takich trójek w kolorze niebieskim i D – zbiór takich trójek w kolorze zielonym.
Zgodnie z regułą mnożenia otrzymujemy:

$$\overline{\overline{A}} = 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8, \quad \overline{\overline{B}} = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24, \quad \overline{\overline{C}} = 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9, \quad \overline{\overline{D}} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

Zbiory A, B, C, D są parami rozłączne. Na podstawie reguły dodawania mamy

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} + \overline{\overline{D}} = 8 + 24 + 9 + 2 = 43$$

Można wybrać czapkę, szalik, i parę rękawiczek w jednym kolorze na 43 sposoby.

Ćwiczenie 2. Dane są zbiory: $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $Z = \{8, 9, 10, 11\}$. Wybieramy trzy liczby x, y, z, gdzie $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. Na ile sposobów możemy otrzymać sumę $x + y + z$, która jest liczbą parzystą?

Ćwiczenie 3. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ wybieramy kolejno trzy cyfry i tworzymy liczbę trzycyfrową. Ile jest takich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 2 lub przez 5, jeśli:

a) cyfry mogą się powtarzać b) cyfry nie mogą się powtarzać?

W wyznaczaniu liczby elementów danego zbioru pomaga znajomość następujących pojęć.

Definicja 1.

Wariacją *k*-wyrazową z powtórzeniami *n*-elementowego zbioru A, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, $n \in \mathbf{N}_+$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg elementów zbioru A, które mogą się powtarzać.

Twierdzenie 1.
Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa n^k.

Definicja 2.
Wariacją *k*-wyrazową bez powtórzeń *n*-elementowego zbioru A, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, $n \in \mathbf{N}_+$ i $k \leqslant n$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów zbioru A.

Twierdzenie 2.
Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, $n \in \mathbf{N}_+$ i $k \leqslant n$, jest równa $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Przykład 3.

Obliczymy, na ile różnych sposobów można rozmieścić pięć ponumerowanych kartek w siedmiu ponumerowanych szufladach:
a) dowolnie,
b) tak, aby wszystkie kartki trafiły do różnych szuflad.

Ad a) Rozmieszczenie pięciu ponumerowanych kartek w siedmiu szufladach możemy zinterpretować jako ciąg pięciowyrazowy, którego wyrazami są liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, przy czym te liczby mogą się powtarzać. Na przykład ciąg
$(2, 4, 7, 1, 4)$
oznacza, że pierwsza kartka trafiła do drugiej szuflady, druga i piąta do czwartej szuflady, trzecia do siódmej szuflady, a czwarta do pierwszej szuflady. Kartce przypisujemy numer szuflady, do której wpada ta kartka.
Liczba wszystkich możliwych 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 7-elementowego jest równa
7^5, czyli 16 807

Ad b) Rozmieszczenie pięciu ponumerowanych kartek w siedmiu różnych szufladach tak, aby każda kartka trafiła do innej szuflady, możemy przedstawić w postaci pięciowyrazowego ciągu o wartościach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, którego wyrazy nie mogą się powtarzać.
Liczba wszystkich możliwych 5-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru 7-elementowego jest równa
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, czyli 2520

Ćwiczenie 4. W bloku, mającym parter i 10 pięter, sześć osób wsiadło do windy na parterze. Na ile sposobów mogą one wysiąść z windy:
a) na dowolnych piętrach b) tak, aby każda osoba wysiadła na innym piętrze?

Ćwiczenie 5. Ile jest różnych liczb naturalnych pięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach?

Szczególnym przypadkiem wariacji bez powtórzeń są permutacje bez powtórzeń.

Definicja 3.
Permutacją bez powtórzeń *n*-elementowego zbioru A, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg, utworzony ze wszystkich elementów zbioru A.

Twierdzenie 3.
Liczba permutacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, jest równa $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.

Iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n, $n \geqslant 2$, oznaczamy symbolem
$n!$
(czytamy: n silnia).

Definicja 4.
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, jeśli $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$
Przyjmujemy dodatkowo, że
$0! = 1$
$1! = 1$

Przykład 4.
Wykonamy działania:

a) $4! + 6! = 4! + 4! \cdot 5 \cdot 6 = 4!\,(1 + 5 \cdot 6) = 24 \cdot 31 = 744$

b) $\dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = \dfrac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 3!} = \dfrac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$

c) $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} =$

$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$,

gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, $n \in \mathbf{N}_+$ i $k \leqslant n$.

Wniosek: Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, $n \in \mathbf{N}_+$ i $k \leqslant n$, jest równa $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Ćwiczenie 6. Dany jest zbiór $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Korzystając z symbolu $n!$, zapisz, na ile sposobów można utworzyć czteroliterowy napis z różnych liter należących do tego zbioru.

Ćwiczenie 7. Wykaż, że liczba $18! + 16!$ jest podzielna przez 307.

Przykład 5.

W zespole tanecznym jest 7 dziewczyn i 7 chłopców. Do tańca tworzymy pary (dziewczyna, chłopiec). Na ile sposobów można utworzyć:

a) jedną parę taneczną b) 7 par tanecznych?

Ad a) Z siedmiu dziewczyn można wybrać jedną dziewczynę na 7 sposobów. Podobnie, jednego chłopca można wybrać z siedmiu chłopców na 7 sposobów. Jedną parę można zatem utworzyć na

$7 \cdot 7$, czyli 49 sposobów.

Ad b) Ustawiamy dowolnie dziewczęta na parkiecie. Pierwszej dziewczynie wybieramy jednego chłopca z siedmiu chłopców na 7 sposobów, drugiej – z sześciu pozostałych chłopców jednego chłopca na 6 sposobów, trzeciej – na 5 sposobów, itd. , siódmej – wybieramy ostatniego chłopca na 1 sposób. Można utworzyć 7 par tanecznych na

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1$ sposobów, czyli na $7!$ sposobów.

Przykład 6.

Sześcioro przyjaciół, wśród nich największe gaduły – Adam i Basia, udało się do kina. Mają 6 miejsc obok siebie w jednym rzędzie. Na ile sposobów mogą zająć te miejsca tak, aby Adam i Basia nie siedzieli obok siebie?

I etap – Obliczamy, na ile sposobów 6 osób może usiąść dowolnie w jednym rzędzie obok siebie. Każde ustawienie tych osób jest permutacją bez powtórzeń 6-elementowego zbioru przyjaciół. Liczba wszystkich możliwych ustawień jest równa

$6!$, czyli 720.

II etap – Obliczamy, ile jest wszystkich ustawień w szeregu sześciu osób, w których Adam i Basia usiądą obok siebie.

- wybieramy dwa miejsca spośród sześciu miejsc dla Adama i Basi na 5 sposobów
- Adam i Basia mogą usiąść obok siebie na dwóch danych miejscach na 2 sposoby: A, B lub B, A
- Pozostałe 4 osoby zajmują pozostałe 4 miejsca na $4!$ sposobów

Z reguły mnożenia wynika, że liczba rozmieszczeń 6 przyjaciół w taki sposób, żeby Adam i Basia siedzieli obok siebie, jest równa

$5 \cdot 2 \cdot 4!$, czyli 240

III etap – Wyznaczamy liczbę możliwości ustawienia 6 osób w jednym szeregu tak, aby Adam i Basia nie siedzieli obok siebie. Od liczby wszystkich możliwych ustawień odejmujemy liczbę tych, w których Adam i Basia siedzieliby obok siebie.

$720 - 240 = 480$

Sześcioro przyjaciół może zająć w jednym rzędzie obok siebie miejsca tak, aby Adam i Basia nie siedzieli obok siebie, na 480 sposobów.

Ćwiczenie 8. Na ile sposobów może wejść pięć kobiet i czterech mężczyzn do autokaru jednym wejściem, jeśli:
a) najpierw wsiadają kobiety, a potem mężczyźni,
b) wchodzą na zmianę: kobieta, mężczyzna, kobieta, mężczyzna, …, kobieta?

Definicja 5.
Kombinacją *k*-elementową bez powtórzeń *n*-elementowego zbioru A, gdzie $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ i $k \leqslant n$, nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru A, przy czym elementy zbioru A nie mogą się powtarzać.

Definicja 6.
Liczbę k-elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ oraz $k \leqslant n$, oznaczamy $\binom{n}{k}$ i czytamy: n po k.

Twierdzenie 4.
Jeśli $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ oraz $k \leqslant n$, to $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ćwiczenie 9. Oblicz:
a) $\binom{5}{2}$ b) $\binom{7}{5}$ c) $\binom{8}{1}$ d) $\binom{10}{0}$

Ćwiczenie 10. Wykaż, że jeśli $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ oraz $k \leqslant n$, to:
a) $\binom{n}{0} = 1$ b) $\binom{n}{1} = n$ c) $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ d) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Przykład 7.

Obliczymy, na ile sposobów można wybrać dwuosobową delegację z grupy składającej się z 4 dziewcząt i 6 chłopców:

a) dowolnie b) tak, aby w delegacji była co najmniej jedna dziewczyna.

Ad a) Wybór dwóch osób z 10-osobowej grupy można zinterpretować jako wybór dwuelementowej kombinacji bez powtórzeń zbioru mającego 10 elementów. Wyznaczamy liczbę tych kombinacji:

$$\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$$

Dwuosobową delegację z grupy 10 osób można wybrać na 45 sposobów.

Ad b) Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby.

I sposób – Skorzystamy z punktu a).
Od liczby wszystkich możliwych wyborów dwuosobowej delegacji odejmiemy liczbę wyborów delegacji składającej się tylko z chłopców.
Obliczamy, na ile sposobów można utworzyć dwuosobową delegację, składającą się tylko z chłopców:

$$\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$$

Liczba wyborów dwuosobowej delegacji, w której będzie co najmniej jedna dziewczyna, jest zatem równa

45 – 15, czyli 30.

II sposób – Obliczamy moce zbiorów A i B, gdzie A – zbiór delegacji, z których każda składa się z jednej dziewczyny i jednego chłopca, B – zbiór delegacji, z których każda składa się z dwóch dziewczyn.

$$\overline{\overline{A}}=\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}=4\cdot 6=24 \qquad \overline{\overline{B}}=\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$$

Zbiory A i B są rozłączne.

$$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}=24+6=30$$

Dwuosobową delegację, w której będzie co najmniej jedna dziewczyna, można wybrać na 30 sposobów.

Ćwiczenie 11. Na płaszczyźnie mamy n punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Przez te punkty można poprowadzić 105 różnych prostych. Oblicz n.

Przykład 8.

Obliczymy, ile jest liczb 10-cyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 16.

Liczba 16 jest iloczynem dziesięciu liczb naturalnych mniejszych od 10 w czterech przypadkach.

1) $16 = 8 \cdot 2 \cdot 1^8$

W tej sytuacji 10-cyfrowa liczba ma w swoim zapisie jedną cyfrę 8, jedną cyfrę 2 i osiem 1. Miejsce na cyfrę 8 wybieramy na dziesięć sposobów, miejsce na cyfrę 2 wybieramy na dziewięć sposobów, a pozostałe miejsca zajmują 1 na jeden sposób. Mamy

$10 \cdot 9 \cdot 1$, czyli 90 takich liczb.

2) $16 = 4^2 \cdot 1^8$

W zapisie liczby występują dwie 4 i osiem 1. Wybieramy dla dwóch 4 miejsca spośród 10 miejsc na $\binom{10}{2}$ sposobów. Pozostałe miejsca zajmują 1 na jeden sposób.

Mamy:

$\binom{10}{2} \cdot 1$, czyli 45 takich liczb.

3) $16 = 4 \cdot 2^2 \cdot 1^7$

W zapisie liczby występuje jedna 4, dwie 2 i siedem 1. Miejsce dla 4 można wybrać na dziesięć sposobów, dwa miejsca dla 2 wybierzemy wówczas na $\binom{9}{2}$ sposobów, a siedem 1 ustawimy na pozostałych miejscach na jeden sposób. Mamy:

$10 \cdot \binom{9}{2} \cdot 1$, czyli 360 takich liczb.

4) $16 = 2^4 \cdot 1^6$

W zapisie liczby występują cztery 2 i sześć 1. Miejsce dla 2 wybierzemy na $\binom{10}{4}$ sposobów, a pozostałe miejsca zajmą 1 na jeden sposób. Mamy

$\binom{10}{4} \cdot 1$, czyli 210 takich liczb.

Sumujemy liczby otrzymane w powyższych przypadkach:

$90 + 45 + 360 + 210 = 705$

Jest 705 liczb dziesięciocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 16.

Ćwiczenie 12. Rozwiąż zadanie z przykładu 8, wyznaczając najpierw miejsca dla jedynek.

Ćwiczenie 13. Stosując metodę rozłącznych przypadków z przykładu 8. oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 5. Pamiętaj, że cyfra 0 nie może zajmować pierwszego miejsca.

Przykład 9.

Obliczymy, ile jest liczb ośmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 5, inną metodą niż w ćwiczeniu 13.

Jedną z takich liczb, na przykład liczbę 21 002 000, możemy przedstawić w następujący sposób:

|••|•| | |••| | | |
2 1 0 0 2 0 0 0

Kreski wyznaczają 8 komórek, które oznaczają miejsca dla cyfr w liczbie ośmiocyfrowej. Liczba kropek w komórce oznacza cyfrę, która stoi w danym miejscu w zapisie tej liczby.
Zapis każdej liczby powinien się zaczynać i kończyć kreską. Liczba nie może zaczynać się od 0. Zatem w pierwszej komórce jest co najmniej jedna kropka.
Dołączamy tę kropkę do pierwszej kreski.

|• | | | |•• | | • | • |

Pierwsza kreska z kropką i ostatnia kreska to elementy nieruchome. Dowolne ustawienie pozostałych 7 kresek i 4 kropek wyznacza liczbę ośmiocyfrową, której suma cyfr jest równa 5. Narysuj kilka takich ustawień i zapisz odpowiadające im liczby. Każdy wybór: 4 miejsc z 11 dla ruchomych kropek lub 7 miejsc z 11 dla ruchomych kresek – wyznacza zapis liczby ośmiocyfrowej, której suma cyfr jest równa 5. Wszystkich takich liczb jest

$\binom{11}{4}$, czyli $\binom{11}{7}$, czyli 330.

Ćwiczenie 14. Ile jest uporządkowanych trójek liczb (x, y, z), gdzie $x \in \boldsymbol{N}$, $y \in \boldsymbol{N}$, $z \in \boldsymbol{N}$, takich, że $x + y + z = 10$?

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy kolejno dwie cyfry ze zwracaniem i tworzymy liczbę dwucyfrową. Na ile sposobów można utworzyć liczbę:
   a) podzielną przez 3 b) podzielną przez 4?

2. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wybieramy kolejno dwie liczby ze zwracaniem i tworzymy parę (x, y). Ile jest takich par liczb, których iloczyn jest:
   a) wielokrotnością liczby 3 b) wielokrotnością liczby 4?

3. Ze zbioru cyfr wybieramy kolejno trzy cyfry bez zwracania i tworzymy liczbę trzycyfrową. Na ile sposobów możemy otrzymać liczbę trzycyfrową:
   a) nieparzystą b) podzielną przez 25?

4. Ile jest numerów telefonów komórkowych dziewięciocyfrowych, w których:
   a) pierwszą cyfrą jest 5 lub 6, lub 7, a ostatnie cztery cyfry tworzą ciąg malejący o różnicy 1,
   b) po trzy kolejne cyfry są jednakowe, różne od pozostałych cyfr i różne od 0?

5. Ile jest różnych liczb naturalnych czterocyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:
   a) nieparzystych b) parzystych
   c) większych od 2000 d) mniejszych od 4502?

6. Ile jest liczb sześciocyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jednocześnie:
   a) większych od 457 000 b) mniejszych od 795 000?

7. Na ile sposobów można ustawić 10 osób w kinie w kolejce do kasy tak, aby osoby A i B nie stały obok siebie?

8. Kamil chce ustawić 13 książek na dwóch półkach. Na wyższej półce ma stać w szeregu 7 książek, a na niższej mają stać w szeregu pozostałe książki. Na ile sposobów można ustawić wszystkie książki tak, aby książki A, B, C stały obok siebie?

9. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w zapisie których:
   a) cyfra 8 występuje tylko raz b) cyfra 5 występuje dwa razy?

10. W koszu obok sali gimnastycznej są piłki do różnych gier zespołowych.

Gra zespołowa	Siatkówka	Piłka ręczna	Piłka nożna	Koszykówka
Liczba piłek	3	4	5	6

   Na ile sposobów można wybrać trzy piłki:
   a) do jednej dyscypliny sportowej,
   b) do różnych dyscyplin sportowych,
   c) tak, aby tylko dwie z nich były do piłki nożnej,
   d) tak, aby co najmniej jedna była do koszykówki?

11. Na loterii jest 20 losów, w tym n losów wygrywających. Oblicz n, wiedząc, że można wybrać na 75 sposobów dwa losy tak, że jeden będzie wygrywający i jeden przegrywający.

12. W pudełku znajdują się ponumerowane kule: 2 czerwone, 3 białe i 4 zielone. Na ile sposobów można wybrać z pudełka dwie kule:
    a) w tym samym kolorze b) w różnych kolorach?

13. Do zbioru A należy 5 liczb, a do zbioru B – 8 liczb. Ile jest funkcji, odwzorowujących zbiór A w zbiór B:
    a) dowolnych b) różnowartościowych c) malejących?

14. Ile różnych napisów można utworzyć, przestawiając litery w wyrazie:
    a) ŻABKA b) WIEWIÓRKA c) KUKUŁKA?

15. Z talii 52 kart wybieramy 5 kart. Oblicz, na ile sposobów można wybrać:
    a) co najwyżej jedną kartę pik,
    b) co najmniej dwa asy,
    c) cztery karty w takim samym karcianym kolorze, a piątą w innym karcianym kolorze,
    d) dwie różne pary i piątą kartę nie tworzącą z pozostałymi pary, np. dwa asy, dwie dziesiątki, jedna piątka.

16. Oblicz, na ile sposobów można włożyć 20 książek do czterech pudełek po 5 sztuk w każdym pudełku, jeśli:
    a) pudełka nie są rozróżnialne,
    b) pudełka są rozróżnialne,
    c) pudełka nie są rozróżnialne i książki A, B, C, D mają być każda w innym pudełku,
    d) pudełka są rozróżnialne i książki A, B, C, D mają być każda w innym pudełku.

17. Dwanaście dziewcząt, w tym Kasia i Basia, mają lekcję wf-u. Na ile sposobów można utworzyć dwie drużyny do siatkówki po 6 osób:
    a) dowolnie, przy czym kolejność wyboru drużyn nie jest istotna,
    b) tak, aby Kasia i Basia były w dwóch różnych drużynach,
    c) tak, aby Kasia i Basia były w jednej drużynie?

18. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie cyfra 0 występuje cztery razy, cyfra 1 występuje trzy razy, a pozostałe cyfry są liczbami pierwszymi?

19. Ile jest liczb sześciocyfrowych parzystych, w których zapisie 0 występuje co najwyżej dwa razy?

20. Na ile sposobów można ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ wybrać jednocześnie trzy różne liczby tak, aby:
    a) suma tych liczb była parzysta,
    b) iloczyn tych liczb był parzysty?

21. Ile jest liczb dwudziestocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 8?

22. Ile jest liczb dwunastocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12?

23. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, których suma cyfr jest równa 3?

Doświadczenie losowe

W informacjach sportowych czy politycznych często można spotkać wypowiedzi, odnoszące się do możliwości zajścia jakiegoś zdarzenia, na przykład:

Ten zawodnik ma duże szanse na zwycięstwo w maratonie.

Szanse zwycięstwa w wyborach prezydenckich obu kandydatów są równe.

Z prawdopodobieństwem graniczącym z pewnością można stwierdzić, że jutro będzie ładna pogoda.

Zdania tego typu zawierają opisową ocenę możliwości zajścia omawianego zdarzenia. Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się matematycznym opisem różnych zjawisk i wyrażaniem prawdopodobieństwa za pomocą liczby.

Doświadczeniem losowym nazywamy taki powtarzalny eksperyment, w którym nie jesteśmy w stanie przewidzieć konkretnego wyniku, natomiast znamy pełną możliwą listę tych wyników. Dodatkowo zakładamy, że każdy z tych wyników jest rozłączny z pozostałymi wynikami na liście.

Wszystkie możliwe wyniki danego doświadczenia losowego będziemy nazywać **zdarzeniami elementarnymi** i oznaczać $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ Zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i oznaczamy dużą grecką literą Ω.

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie monetą. Określimy przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.

Moneta ma dwie strony. Są to awers i rewers, czyli orzeł i reszka. Możemy rozpatrzeć dwa zdarzenia elementarne ω_1 i ω_2:

ω_1 – wypadł orzeł

ω_2 – wypadła reszka.

Wówczas

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, czyli

$\Omega = \{\text{wypadł orzeł, wypadła reszka}\}$.

Zwykle staramy się zapisywać zdarzenia krócej, ale jednocześnie tak, by zapis był dla wszystkich zrozumiały. Zwykle zdarzenie elementarne:

wypadnie orzeł oznaczamy literą O

wypadła reszka oznaczamy literą R,

stąd

$\Omega = \{O, R\}$

UWAGA: W modelach matematycznych, przy określaniu zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, dokonujemy zwykle pewnych uproszczeń. W przypadku rzutu monetą pomijamy na przykład przypadki:

moneta stanie na krawędzi, moneta wpadnie pod regał.

Takie uproszczenie ułatwia opis przestrzeni zdarzeń elementarnych i umożliwia stosowanie tej przestrzeni w rozwiązywaniu zadań.

Przykład 2.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych może wyglądać następująco:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, gdzie

ω_1 oznacza zdarzenie elementarne: wypadła ścianka z jednym oczkiem,

ω_2 – wypadła ścianka z dwoma oczkami,

ω_3 – wypadła ścianka z trzema oczkami,

ω_4 – wypadła ścianka z czterema oczkami,

ω_5 – wypadła ścianka z pięcioma oczkami,

ω_6 – wypadła ścianka z sześcioma oczkami.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych możemy też zapisać krócej:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Przykład 3.

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Interesują nas liczby oczek, jakie wypadły w obu rzutach. Opiszemy przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.

Wykonujemy dwa rzuty tą samą kostką: pierwszy i drugi. W tym wypadku każde zdarzenie elementarne możemy określić jako ciąg dwuwyrazowy: pierwsza liczba jest wynikiem pierwszego rzutu, a druga liczba – wynikiem drugiego rzutu. Zauważ, że istotna jest kolejność otrzymanej liczby oczek w obu rzutach. Przestrzeń zdarzeń elementarnych możemy zapisać następująco:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Oczywiście kolejność zapisania zdarzeń elementarnych zbioru Ω nie ma znaczenia. Powyższy sposób wypisania tych zdarzeń daje nam pewność, że żadnego zdarzenia elementarnego nie pominęliśmy.

Przestrzeń Ω w tym przykładzie można również opisać następująco:

Ω – zbiór wszystkich dwuwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

albo symbolicznie

$\Omega = \{(a, b): a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ i } b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

Opis symboliczny lub słowny przestrzeni zdarzeń elementarnych warto stosować szczególnie wtedy, gdy liczba zdarzeń elementarnych jest duża.

Przykład 4.

W pudełku są trzy kartki: na pierwszej jest zapisana liczba 7, na drugiej – liczba 8, a na trzeciej – liczba 9. Zapiszemy przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia, polegającego na dwukrotnym wylosowaniu z pudełka jednej kartki i przeczytaniu zapisanej na niej liczby, jeśli losowanie kartek odbywa się:

a) ze zwracaniem b) bez zwracania.

Ad a) Dwukrotnie wyciągnąć z pudełka jedną kartkę ze zwracaniem, to znaczy wylosować najpierw jedną kartkę i – po przeczytaniu napisanej na niej liczby – wrzucić wylosowaną kartkę z powrotem do pudełka, a następnie powtórnie wylosować jedną kartkę z pudełka i przeczytać kolejną liczbę.

Każde zdarzenie elementarne można określić jako ciąg dwuwyrazowy. Pierwszy wyraz tego ciągu jest liczbą otrzymaną w wyniku pierwszego losowania kartki, a drugi wyraz jest liczbą otrzymaną w wyniku drugiego losowania kartki.
Kartkę otrzymaną w pierwszym losowaniu wrzuciliśmy z powrotem do pudełka, więc mogliśmy ją wylosować także za drugim razem. Zatem wyrazy ciągu też mogą się powtarzać. Otrzymujemy:

$$\Omega = \{(7, 7), (7, 8), (7, 9), (8, 7), (8, 8), (8, 9), (9, 7), (9, 8), (9, 9)\}$$

Przestrzeń Ω można też opisać tak:

$$\Omega = \{(a, b): a \in \{7, 8, 9\} \text{ i } b \in \{7, 8, 9\}\}$$

lub tak:

Ω – zbiór wszystkich dwuwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{7, 8, 9\}$

Ad b) W tym wypadku kartka wylosowana za pierwszym razem nie wraca do pudełka. Za drugim razem z pudełka losujemy kartkę spośród dwóch pozostałych. Mamy:

$$\Omega = \{(7, 8), (7, 9), (8, 7), (8, 9), (9, 7), (9, 8)\}$$

Tę przestrzeń można też opisać tak:

$$\Omega = \{(a, b): a \in \{7, 8, 9\} \text{ i } b \in \{7, 8, 9\} \text{ i } a \neq b\}$$

lub tak:

Ω – zbiór wszystkich dwuwyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru $\{7, 8, 9\}$

Ćwiczenie 1. W pudełku są cztery klocki: na pierwszym jest litera L, na drugim – litera A, na trzecim – litera T, a na czwartym – litera O. Wybieramy z pudełka kolejno bez zwracania po jednym klocku i tworzymy czteroliterowy napis. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia na trzy sposoby.

Przykład 5.

Doświadczenie losowe polega na jednym rzucie dwiema monetami. Określimy przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Model 1. Zakładamy, że monety są rozróżnialne.
Monety możemy traktować jako rozróżnialne na przykład wtedy, gdy różnią się datami wybicia lub wielkością albo gdy jedną z dwóch identycznych monet rzucimy w lewą stronę, a drugą monetę – w prawą stronę. Wówczas zdarzenia elementarne to ciągi dwuwyrazowe, których pierwszym wyrazem jest np. wynik rzutu w lewą stronę, a drugim wyrazem – wynik rzutu w prawą stronę. Zatem

$$\Omega = \{(\mathrm{R}, \mathrm{R}), (\mathrm{R}, \mathrm{O}), (\mathrm{O}, \mathrm{R}), (\mathrm{O}, \mathrm{O})\}$$

Model 2. Zakładamy, że monety są nierozróżnialne.
W takim wypadku za zdarzenie elementarne możemy uznać, na przykład, liczbę otrzymanych orłów. Wówczas

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\},$$

gdzie

ω_0 oznacza zdarzenie elementarne: nie wypadł ani jeden orzeł
ω_1 oznacza zdarzenie elementarne: wypadł jeden orzeł
ω_2 oznacza zdarzenie elementarne: wypadły dwa orły

Ostatni przykład pokazuje, że czasem do jednego doświadczenia losowego można przyjąć różne modele matematyczne. Wówczas przestrzenie zdarzeń elementarnych mogą się różnić. Wybór przestrzeni zdarzeń elementarnych może zależeć od tego, jaki problem związany z danym doświadczeniem losowym mamy rozwiązać.

Ćwiczenie 2. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia, polegającego na jednokrotnym rzucie trzema monetami:
a) rozróżnialnymi b) nierozróżnialnymi.
Czy w obu przypadkach zdarzenia elementarne mają jednakowe szanse wystąpienia? Wykonaj kilkanaście razy rzut trzema monetami i zapisz otrzymane wyniki.

Przykład 6.

Doświadczenie losowe polega na wyciągnięciu 13 kart z talii 52 kart do gry. Opiszemy przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.

Model 1. Zakładamy, że nie jest istotna kolejność wybranych kart. Wówczas zdarzeniami elementarnymi są różne 13-elementowe podzbiory talii kart. Zatem

Ω – to zbiór wszystkich 13-elementowych kombinacji zbioru złożonego z 52 kart

Model 2. Zakładamy, że kolejność wybranych kart jest istotna. W takim przypadku zdarzenia elementarne można traktować jako 13-wyrazowe ciągi o różnych wyrazach. Wówczas

Ω – to zbiór wszystkich 13-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru złożonego z 52 kart

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wykonujemy jeden rzut kostką sześcienną do gry i monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia losowego.
2. Wykonujemy jeden rzut czterema rozróżnialnymi monetami. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia losowego.
3. Na półce w sposób losowy ustawiamy w jednym szeregu książki A, B, C. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia.
4. Doświadczenie losowe polega na:
   a) trzech rzutach jedną sześcienną kostką do gry,
   b) jednym rzucie trzema rozróżnialnymi sześciennymi kostkami do gry.
   Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla każdego z tych doświadczeń.
5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ losujemy kolejno dwie liczby:
   a) ze zwracaniem b) bez zwracania
   i zapisujemy je w kolejności losowania. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia.
6. Ze zbioru cyfr losujemy kolejno pięć cyfr:
   a) ze zwracaniem b) bez zwracania
   i zapisujemy je w kolejności losowania. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia. Ile jest tych zdarzeń elementarnych?
7. W pudełku znajduje się 7 ponumerowanych kartek numerami od 1 do 7. Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym wylosowaniu jednej kartki:
   a) bez zwracania b) ze zwracaniem.
   Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia. Ile jest tych zdarzeń elementarnych?
8. Z klasy liczącej 30 uczniów wybieramy losowo dwuosobową delegację. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Ile jest tych zdarzeń elementarnych?
9. Z talii 52 kart wybieramy losowo 5 kart. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia. Ile jest tych zdarzeń elementarnych?

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie, czym jest suma dwóch danych zbiorów, część wspólna tych zbiorów, różnica zbiorów oraz dopełnienie zbioru w danej przestrzeni. Następnie wyznacz

$A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ oraz A', B' w przestrzeni X,

jeśli $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Rozpatrzmy doświadczenie losowe, dla którego określona jest przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω, gdzie

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\}$ i $n \in \mathbf{N}_+$

Wówczas dowolny podzbiór przestrzeni Ω nazywamy **zdarzeniem** losowym.

Zdarzeniami losowymi są na przykład podzbiory:

$\{\omega_1, \omega_2\}$, $\{\omega_3\}$, $\{\omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\}$, $\varnothing$, Ω

Dwa zdarzenia otrzymały specjalne określenia.

Zbiór pusty $\varnothing$ nazywamy **zdarzeniem niemożliwym**.
Przestrzeń Ω nazywamy **zdarzeniem pewnym**.

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie kostką,

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Niech A oznacza zdarzenie: wypadła liczba oczek podzielna przez 3

B – zdarzenie: wypadła liczba oczek mniejsza od 8

C – zdarzenie: wypadła liczba oczek większa od 7

Wszystkie opisane zdarzenia są zawarte w przestrzeni Ω.

Zatem

$A = \{3, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \Omega$ – zdarzenie B jest zdarzeniem pewnym

$C = \varnothing$ – zdarzenie C jest zdarzeniem niemożliwym.

Między dwoma zbiorami A i B zawartymi w jednej przestrzeni mogą występować różne relacje. Na przykład zbiory A i B mogą być równe, jeden ze zbiorów może zawierać się w drugim zbiorze, zbiory A i B mogą być rozłączne lub mogą mieć niepustą część wspólną.

W przypadku zdarzeń często będziemy używać innych określeń. Ich zestawienie znajduje się w tabeli na następnej stronie. Zwróć uwagę na to, jakim określeniom dotyczącym tych zbiorów one odpowiadają.

Oznaczenie	Określenie dotyczące zbiorów	**Określenie dotyczące zdarzeń**
Ω	zbiór, który jest przestrzenią	**przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie pewne**
$\varnothing$	zbiór pusty	**zdarzenie niemożliwe**
$A \subset \Omega$	zbiór A jest podzbiorem zbioru Ω	**A jest zdarzeniem w przestrzeni Ω**
$\omega \in A$	element ω należy do zbioru A	**zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu A**
$A = B$	A, B – zbiory równe	**A, B – zdarzenia identyczne**
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B	**zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B**
$A \cup B$	suma zbiorów A i B	**suma zdarzeń A i B**
$A \cap B$	iloczyn (część wspólna) zbiorów A i B	**iloczyn (część wspólna) zdarzeń A i B**
$A \cap B = \varnothing$	zbiory A i B są rozłączne	**zdarzenia A i B się wykluczają**
$A - B$	różnica zbiorów A i B	**różnica zdarzeń A i B**
$\Omega - A$, czyli A'	dopełnienie zbioru A w przestrzeni Ω	**zdarzenie przeciwne do zdarzenia A**

Przykład 2.

Ze zbioru $\{3, 4, 5\}$ losujemy kolejno dwie cyfry bez zwracania i tworzymy liczbę dwucyfrową. Niech A oznacza zdarzenie: utworzona liczba jest większa od 34,
B – zdarzenie: utworzona liczba jest nieparzysta,
C – zdarzenie: druga cyfra utworzonej liczby jest równa 3 lub 5.
a) Wypiszemy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom A, B, C.
b) Określimy relacje pomiędzy zdarzeniami A, B, C.

Ad a) Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A to liczby większe od 34, utworzone z różnych cyfr należących do zbioru $\{3, 4, 5\}$. Są to:
35, 43, 45, 53, 54.
Zdarzeniu B sprzyjają cztery zdarzenia elementarne:
35, 43, 45, 53.
Zdarzeniu C też sprzyjają cztery zdarzenia elementarne:
43, 53, 35, 45.

Ad b) Mamy:

$A = \{35, 43, 45, 53, 54\}$ $B = \{35, 43, 45, 53\}$ $C = \{35, 43, 45, 53\}$

Zauważamy, że

$B = C$ oraz

$B \subset A$ i $C \subset A$

Zatem zdarzenia B i C są identyczne i pociągają za sobą zdarzenie A.

Przykład 3.

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Niech A oznacza zdarzenie: wylosowana liczba oczek jest podzielna przez 2, B – wylosowana liczba oczek jest podzielna przez 3.
Wyznaczymy zdarzenia $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ i opiszemy je słownie.

Wiemy, że

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{3, 6\}$

Zatem

- $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$
  Zdarzenie $A \cup B$ można opisać tak:
  wylosowana liczba oczek jest podzielna przez 2 lub przez 3

- $A \cap B = \{6\}$
  Zdarzenie $A \cap B$ można opisać tak:
  wylosowana liczba oczek jest podzielna przez 2 i przez 3 lub krócej
  wylosowana liczba oczek jest podzielna przez 6

- $A - B = \{2, 4\}$
  Zdarzenie $A - B$ oznacza zdarzenie:
  wylosowana liczba oczek jest podzielna przez 2 i nie jest podzielna przez 3

- $B - A = \{3\}$
  Zdarzenie $B - A$ oznacza zdarzenie:
  wylosowana liczba oczek jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 2

Ćwiczenie 2. Dane jest doświadczenie losowe z przykładu 3. Niech A oznacza zdarzenie: wypadła parzysta liczba oczek, B – zdarzenie: wypadła liczba oczek, która jest liczbą pierwszą. Wyznacz zdarzenia: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A'.

Przykład 4.

Grupa składa się z pięciu osób: Czarka, Doroty, Eli, Franka, Gosi. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu z tej grupy dwóch osób.

a) Wyznaczymy liczbę zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia.
b) Wyznaczymy zdarzenie A – wylosowano dwie dziewczyny oraz zdarzenie przeciwne do zdarzenia A.

Ad a) Kolejność wyboru dwóch osób nie jest istotna. Każde zdarzenie elementarne jest dwuelementowym podzbiorem zbioru pięcioelementowego. Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych:

Ω – zbiór kombinacji dwuelementowych zbioru
$\{$Czarek, Dorota, Ela, Franek, Gosia$\}$

Liczbę elementów przestrzeni Ω oznaczamy symbolem $\overline{\overline{\Omega}}$.

Zatem

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Przestrzeń Ω składa się z 10 zdarzeń elementarnych.

Ad b) Dwie dziewczyny można wybrać spośród trzech dziewczyn na $\binom{3}{2}$, czyli 3 sposoby. Wyznaczamy zdarzenie A:

$A = \{\{$Dorota, Ela$\}, \{$Dorota, Gosia$\}, \{$Ela, Gosia$\}\}$

Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A oznaczamy A'. Wiemy, że

$A' = \Omega - A$

Zdarzenie A' można opisać na przykład tak:

A' – wśród wylosowanych osób była co najwyżej jedna dziewczyna

lub tak:

A' – wśród wylosowanych osób był co najmniej jeden chłopiec.

Zdarzeniu A' sprzyja 7 zdarzeń elementarnych:

$\{$Dorota, Czarek$\}$, $\{$Dorota, Franek$\}$, $\{$Ela, Czarek$\}$, $\{$Ela, Franek$\}$,
$\{$Gosia, Czarek$\}$, $\{$Gosia, Franek$\}$, $\{$Czarek, Franek$\}$

Ćwiczenie 3. Dla doświadczenia losowego z przykładu 4. wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu B – wylosowano co najwyżej jednego chłopca. Następnie opisz słownie zdarzenie B'.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dana jest kostka ośmiościenna z liczbami od 1 do 8 na poszczególnych ściankach. Wykonujemy jeden rzut tą kostką. Niech A oznacza zdarzenie: wypadła liczba oczek podzielna przez 2, B – zdarzenie: wypadła liczba oczek podzielna przez 4, C – zdarzenie: wypadła nieparzysta liczba oczek, D – zdarzenie: wypadła liczba oczek będąca liczbą pierwszą.
   a) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom A, B, C, D.
   b) Określ relację między zdarzeniami A i B.
   c) Które z opisanych zdarzeń jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A?
   d) Czy wśród zdarzeń A, B, C, D są zdarzenia identyczne?

2. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu kolejno bez zwracania dwóch cyfr ze zbioru X i utworzeniu liczby dwucyfrowej.
   a) Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia.
   b) Niech A, $A \subset \Omega$, oznacza zdarzenie: utworzona liczba jest mniejsza od 23. Podaj opis słowny zdarzenia A'. Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A, a ile zdarzeniu A'?
   c) Co można powiedzieć o zdarzeniu B – utworzona liczba jest równa 11 lub 22?
   d) Podaj przykład zdarzenia C, któremu sprzyja tylko jedno zdarzenie elementarne. Następnie opisz słownie zdarzenie C i zdarzenie C'.

3. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie jedną sześcienną kostką do gry.
   a) Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia.
   b) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:
   A – suma wyrzuconych oczek jest liczbą dwucyfrową
   B – w pierwszym rzucie wypadła mniejsza liczba oczek, niż w drugim rzucie
   C – liczba oczek w pierwszym rzucie jest całkowitą wielokrotnością liczby oczek w drugim rzucie.
   Wyznacz zdarzenia: $A \cap B$, $A - B$, $A \cup C$, $B \cap C$.

4. Ze zbioru liczb naturalnych jednocyfrowych losujemy jedną liczbę. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Niech A oznacza zdarzenie: wylosowana liczba jest podzielna przez 4, B – zdarzenie: wylosowana liczba jest wielokrotnością liczby 3, C – zdarzenie: wylosowana liczba jest podzielna przez 6.
   Wyznacz zdarzenia:
   a) $A \cup C$ b) $B \cap C$ c) $C' \cap A$
   d) $A - B$ e) $B' - C'$ f) $A' \cup B'$.

5. Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Podaj zdarzenia elementarne, sprzyjające zdarzeniu:
   A – wypadły tylko dwie reszki, B – co najwyżej raz wypadł orzeł,
   C – reszka nie wypadła ani razu.
   Opisz słowami zdarzenia A', B', C'.

6. Niech A, B będą dowolnymi zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω. Zapisz za pomocą działań na zdarzeniach A, B, A' lub B' następujące zdarzenia:
   a) zaszło co najmniej jedno ze zdarzeń A, B,
   b) nie zaszło ani zdarzenie A, ani zdarzenie B,
   c) zaszło zdarzenie B i nie zaszło zdarzenie A,
   d) zaszło tylko jedno ze zdarzeń A, B.

Określenie prawdopodobieństwa

Przyjmijmy, że mamy sześcienną kostkę do gry, która jest symetryczna. To znaczy, że jest wyprodukowana z jednorodnego materiału i zawsze w wyniku rzutu upada jedną z sześciu ścianek do góry. Niech doświadczenie losowe polega na rzucie taką symetryczną kostką. Wiemy, że zbiór możliwych wyników dla tego doświadczenia można zapisać tak:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Powyższe doświadczenie powtórzmy 30 razy. Policzymy, jak często pojawi się ścianka z jednym oczkiem i jak często wypadnie ścianka z sześcioma oczkami.

Częstością nazywamy stosunek liczby wystąpień interesującego nas zdarzenia do liczby wszystkich doświadczeń losowych, w których to zdarzenie mogło się pojawić.

Załóżmy, że ścianka z jednym oczkiem wypadła siedem razy, a ścianka z sześcioma oczkami wypadła cztery razy. Zatem częstość otrzymania ścianki z jednym oczkiem była równa $\frac{7}{30}$, a częstość otrzymania ścianki z sześcioma oczkami wynosiła $\frac{4}{30}$.

Ćwiczenie 1. Wykonaj 30 kolejnych rzutów sześcienną kostką do gry. Zapisz wynik każdego rzutu. Ile razy pojawiła się ścianka z jednym oczkiem, a ile razy – ścianka z sześcioma oczkami? Czy częstość wystąpienia ścianki z jednym oczkiem oraz częstość wystąpienia ścianki z sześcioma oczkami się powtórzyły?

Otrzymane w kolejnych 30 rzutach częstości nie muszą być takie same, jak w poprzedniej serii 30 rzutów. Okazuje się jednak, że im dłuższe serie rzutów będziemy wykonywać, tym częstość pojawiania się interesujących nas wyników będzie się stabilizować w pobliżu $\frac{1}{6}$. Zatem można się spodziewać, że około $\frac{1}{6}$ wszystkich wyników będą stanowić ścianki z jednym oczkiem i około $\frac{1}{6}$ wszystkich wyników będą stanowić ścianki z sześcioma oczkami.

Liczba $\frac{1}{6}$ określa szansę pojawienia się w pojedynczym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry ścianki z jednym oczkiem. Jest ona teoretycznym odpowiednikiem częstości i będziemy ją nazywać prawdopodobieństwem wystąpienia tej ścianki. Podobnie prawdopodobieństwo wystąpienia ścianki z sześcioma oczkami też jest równe $\frac{1}{6}$.

Zanim podamy definicję prawdopodobieństwa, przyjrzyjmy się własnościom częstości.

Zauważmy, że:

1. Częstość zdarzenia wyraża się liczbą nieujemną.
2. Częstość zdarzenia pewnego jest równa 1.
   Na przykład, w trzydziestokrotnym rzucie symetryczną kostką do gry częstość zdarzenia: wypadła liczba oczek mniejsza od 7 jest równa $\frac{30}{30}$, czyli 1.
3. Jeśli dwa zdarzenia się wykluczają, to częstość sumy tych zdarzeń jest równa sumie częstości tych zdarzeń.
   Na przykład, w naszych 30 rzutach kostką, częstość zdarzenia: wypadła ścianka z jednym oczkiem lub ścianka z sześcioma oczkami jest równa $\frac{11}{30}$, czyli $\frac{7}{30}+\frac{4}{30}$.

Definicja 1. *Definicja aksjomatyczna prawdopodobieństwa*

Prawdopodobieństwem określonym na skończonej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω nazywamy funkcję P, która każdemu zdarzeniu A, $A \subset \Omega$, przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $P(A)$ w taki sposób, że:

A.1 $P(A) \geqslant 0$

A.2 $P(\Omega) = 1$

A.3 jeśli $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ i $A \cap B = \varnothing$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Warunki A.1, A.2, A.3 nazywamy **aksjomatami prawdopodobieństwa**.
Parę (Ω, P) nazywamy przestrzenią probabilistyczną. Można ją uważać za matematyczny model danego doświadczenia losowego.

Definicja 1. nie podaje sposobu obliczania prawdopodobieństwa, lecz tylko warunki, które musi spełniać funkcja, by można było ją nazwać prawdopodobieństwem. W obliczaniu prawdopodobieństwa pomocne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Własności prawdopodobieństwa*

Niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω oraz A, B będą zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω. Wówczas:

1) $P(\varnothing) = 0$
2) jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$
3) $P(A) \leqslant 1$
4) $P(A') = 1 - P(A)$
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6) jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zawarte w przestrzeni Ω wykluczają się parami, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Udowodnimy własność 2) i własność 5).

Ad 2) Niech $A \subset B \subset \Omega$. Wówczas

$$B = A \cup (B - A)$$

i zdarzenia A oraz $B - A$ się wykluczają.
Z aksjomatu A.3 wynika, że

$$P(B) = P(A) + P(B - A).$$

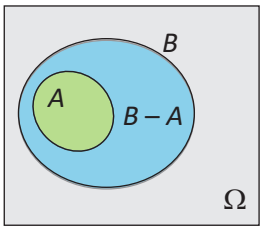
Z aksjomatu A.1 mamy

$$P(B) \geqslant 0,\ P(A) \geqslant 0,\ P(B - A) \geqslant 0$$

Zatem z ostatniej równości wynika, że

$$P(B) \geqslant P(A),$$

co kończy dowód własności 2).



Ad 5) Zauważamy, że

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

i zdarzenia A oraz $B - A$ się wykluczają.
Z aksjomatu A.3 wynika, że

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A).$$

Obliczamy $P(B - A)$, wiedząc, że

$$B = (B - A) \cup (A \cap B)$$

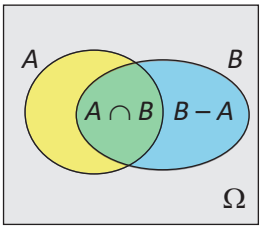
i zdarzenia $B - A$ oraz $A \cap B$ się wykluczają.
Otrzymujemy:

$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B), \quad \text{stąd} \quad P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Zatem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

co kończy dowód własności 5).



Ćwiczenie 2. Udowodnij własności 1), 3), 4) twierdzenia 1.

UWAGA: Zauważ, że aksjomat A.3 określa, jak obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń, które się wykluczają. Natomiast własność 5) wskazuje, jak obliczyć prawdopodobieństwo sumy dwóch dowolnych zdarzeń, bez względu na to, jaka jest ich część wspólna.

Zastosowanie twierdzenia 1. pokażemy w następujących przykładach.

Przykład 1.

Wiadomo, że $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ oraz $P(A) = 0{,}5$ i $P(B) = 0{,}7$. Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać?

Załóżmy, że zdarzenia A i B się wykluczają. Z aksjomatu A.3 wynika wówczas, że

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Obliczamy:

$$P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}7 = 1{,}2 \quad \text{zatem} \quad P(A \cup B) > 1$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z własnością 3) twierdzenia 1.
Zatem zdarzenia A i B nie mogą się wykluczać.

Przykład 2.

Wiadomo, że $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ oraz $P(A') = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Obliczymy $P(A)$, $P(B)$ i $P(A - B)$.

Obliczamy $P(A)$, korzystając z własności 4).

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Do obliczenia $P(B)$ zastosujemy własność 5).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B), \quad \text{stąd}$$

$$P(B) = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Obliczamy $P(A - B)$. Wiemy, że

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad \text{oraz} \quad (A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$$

Zatem

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \qquad \text{z aksjomatu A.3}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B), \quad \text{więc}$$

$$P(A - B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Otrzymaliśmy: $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A - B) = \frac{5}{8}$.

Przykład 3.

Kostka czworościenna jest wykonana z materiału, który nie jest jednorodny. Na ściankach tej kostki są odpowiednio liczby: 1, 2, 3, 4. Wykonujemy jeden rzut kostką i odczytujemy liczbę zapisaną na dolnej ściance. Wiedząc, że prawdopodobieństwo otrzymania liczby nie mniejszej niż 3 jest równe $\frac{3}{5}$, zaś prawdopodobieństwo otrzymania liczby nie większej niż 3 jest równe $\frac{4}{5}$, obliczymy prawdopodobieństwo otrzymania liczby 3.

Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

A – zdarzenie: otrzymano liczbę nie mniejszą niż 3,

B – zdarzenie: otrzymano liczbę nie większą niż 3.

Zdarzeniu A sprzyjają dwa zdarzenia elementarne:

$$A = \{3, 4\}$$

Zdarzeniu B sprzyjają trzy zdarzenia elementarne:

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Wówczas

$$A \cap B = \{3\} \quad \text{oraz} \quad A \cup B = \Omega$$

Z własności 5) twierdzenia 1. otrzymujemy:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B),$$

gdzie $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{4}{5}$ oraz $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$. Zatem

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 1 = \frac{2}{5}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania liczby 3 jest równe $\frac{2}{5}$.

Przykład 4.

Sześcienna kostka do gry została wykonana z materiału, który nie jest jednorodny. Wiadomo, że ścianka z sześcioma oczkami wypada 3 razy częściej, niż każda z pozostałych ścianek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pojedynczym rzucie tą kostką otrzymamy parzystą liczbę oczek?

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie niejednorodną kostką. Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Oznaczmy przez $3p$ prawdopodobieństwo otrzymania sześciu oczek w tym doświadczeniu,

$$P(\{6\}) = 3p$$

Z treści zadania wynika, że

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = p$$

Z własności 6) twierdzenia 1. wiemy, że

$$P(\Omega) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$

Zatem

$$1 = p + p + p + p + p + 3p, \quad \text{stąd} \quad p = \frac{1}{8}$$

Niech A oznacza zdarzenie: wypadła parzysta liczba oczek.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Obliczamy $P(A)$, korzystając z własności 6) twierdzenia 1.

$$P(A) = P(\{2,4,6\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$$

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek jest równe $\frac{5}{8}$.

Twierdzenie 2.
Jeśli P jest prawdopodobieństwem określonym w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω oraz A, B, C są zdarzeniami zawartymi w tej przestrzeni, to
$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$.

Dowód: $P\big[(A\cup B)\cup C\big]=P(A\cup B)+P(C)-P\big[(A\cup B)\cap C\big]=$
$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P\big[(A\cap C)\cup(B\cap C)\big]=$
$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-\big[P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)\big]=$
$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$
W dowodzie wykorzystaliśmy trzy razy wzór na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń (twierdzenie 1. punkt 5) do obliczenia prawdopodobieństw
$P\big[(A\cup B)\cup C\big]$ $P(A\cup B)$ $P\big[(A\cap C)\cup(B\cap C)\big]$
oraz wykorzystaliśmy prawo działań na zbiorach: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

Przykład 5.

Niech A, B, C będą zawarte w przestrzeni Ω i $P(A)=\frac{7}{10}$, $P(B)=\frac{3}{5}$, $P(C')=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$, $P(B\cap C)=\frac{3}{10}$ i $P(A\cap C)=\frac{4}{15}$. Obliczymy $P(A\cap B\cap C)$, wiedząc dodatkowo, że zdarzenia A, B, C dają w sumie przestrzeń Ω.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że
$P(A\cap B\cap C)=P(A\cup B\cup C)-P(A)-P(B)-P(C)+P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)$
Mamy
$A\cup B\cup C=\Omega$, więc $P(A\cup B\cup C)=P(\Omega)=1$
$P(C)=1-P(C')=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, zatem
$$P(A\cap B\cap C)=1-\frac{7}{10}-\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=$$
$$=1-\frac{21}{30}-\frac{18}{30}-\frac{10}{30}+\frac{2}{30}+\frac{9}{30}+\frac{8}{30}=1-\frac{49}{30}+\frac{19}{30}=0$$
Otrzymaliśmy więc, że $P(A\cap B\cap C)=0$.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Czy zdarzenia A i B zawarte w przestrzeni Ω mogą się wykluczać, jeśli:
   a) $P(A)=0{,}61$ oraz $P(B)=0{,}37$ b) $P(A)=0{,}47$ oraz $P(B)=0{,}54$?
2. Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Podaj przykład różnych zdarzeń A i B, dla których $P(A\cup B)<P(A)+P(B)$.

D 3. Wykaż, że jeśli $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ oraz $P(A) = 0{,}75$ i $P(B) = 0{,}5$, to $P(A \cap B) \geqslant 0{,}25$.

D 4. Wiadomo, że $A \subset \Omega$ oraz $P(A') \geqslant 0{,}85$. Wykaż, że dla dowolnego zdarzenia B, $B \subset \Omega$, zachodzi nierówność $P(A \cap B) < 0{,}2$.

5. Wiadomo, że $A \cup B = \Omega$ oraz $P(A) = 0{,}6$ i $P(B') = 0{,}25$. Oblicz $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B - A)$.

6. Dane są zdarzenia A, B zawarte w przestrzeni Ω i takie, że $P(A \cup B) = 0{,}4$ oraz $P(A) = 0{,}12$ i $P(B') = 0{,}7$. Oblicz $P(A \cap B)$, $P(A - B)$, $P(A' \cap B)$.

7. Na sześciennej symetrycznej kostce do gry są dwie ścianki z liczbą 5, a na pozostałych ściankach znajdują się odpowiednio liczby 1, 2, 3, 4. Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – na ściance wypadła liczba nieparzysta.

8. W pudełku znajdują się kartki z różnymi numerami. Prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem nie mniejszym niż 10 jest równe $\frac{3}{4}$, a prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem nie większym niż 10 jest równe $\frac{3}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem 10.

9. Biatlonista w jednej serii strzela pięć razy do celu. Prawdopodobieństwo trafienia co najmniej trzy razy jest równe $\frac{4}{5}$, a prawdopodobieństwo trafienia co najwyżej trzy razy wynosi $\frac{7}{15}$. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia w cel trzy razy przez biatlonistę w jednej serii?

10. Rzucamy symetryczną dwunastościenną kostką, która na jednej ściance ma zapisaną liczbę 1, na dwóch ściankach – liczbę 2, na trzech ściankach – liczbę 3, na czterech ściankach – liczbę 4, a na pozostałych ściankach – liczbę 5. Niech A oznacza zdarzenie: wypadła liczba nieparzysta, B – zdarzenie: wypadła liczba nie mniejsza niż 3. Oblicz:
a) $P(A)$ b) $P(B)$ c) $P(A' \cap B')$ d) $P\left((A \cap B)'\right)$

11. Sześcienna kostka do gry – z liczbami oczek od 1 do 6 na poszczególnych ściankach – została wykonana z materiału, który nie jest jednorodny. Wiadomo, że ścianki z liczbami oczek 1, 2 i 3 wypadają dwa razy częściej niż pozostałe ścianki. Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: A – wypadła liczba oczek będąca liczbą pierwszą, B – wypadła liczba oczek nie większa od 4.

Prawdopodobieństwo klasyczne

Załóżmy, że dana jest przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω pewnego doświadczenia losowego,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}.$$

Zdarzenia $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_n\}$ wykluczają się parami. Z własności prawdopodobieństwa otrzymujemy:

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup ... \cup \{\omega_n\}), \qquad \text{stąd}$$

$$1 = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + ... + P(\{\omega_n\})$$

Niech wszystkie zdarzenia elementarne będą jednakowo prawdopodobne, tzn.

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = ... = P(\{\omega_n\}).$$

Wówczas

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

Jeśli A jest dowolnym zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω i zdarzeniu A sprzyja k zdarzeń elementarnych, to

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{k \text{ razy}} = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Otrzymaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *O prawdopodobieństwie klasycznym*

Jeśli przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, natomiast A jest dowolnym zdarzeniem w tej przestrzeni, to

$$(*) \qquad P(A) = \frac{k}{n},$$

gdzie n jest liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych przestrzeni Ω, k jest liczbą zdarzeń elementarnych tej przestrzeni sprzyjających zdarzeniu A.

UWAGA: Wzór $(*)$ można też zapisać następująco:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} \quad \text{lub} \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie symbole $\overline{\overline{\Omega}}$ oraz $|\Omega|$ oznaczają moc zbioru Ω, czyli liczbę elementów zbioru Ω, analogicznie symbole $\overline{\overline{A}}$ oraz $|A|$ oznaczają liczbę elementów zbioru A.

Twierdzenie 1. bywa nazywane klasyczną definicją prawdopodobieństwa.

Pamiętaj, że twierdzenie 1. pozwala nam obliczać prawdopodobieństwa różnych zdarzeń tylko wtedy, gdy wszystkie zdarzenia elementarne przestrzeni Ω są jednakowo prawdopodobne.

Przykład 1.

Rzucamy dwa razy symetryczną czworościenną kostką. Na ściankach kostki znajdują się odpowiednio oczka od jednego do czterech. Po każdym rzucie notujemy liczbę oczek ze ścianki, na którą upadł czworościan. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzeń:

A – suma liczb oczek w dwóch rzutach jest równa 6,

B – suma liczb oczek w dwóch rzutach jest nie większa od 5.

Wynik dwukrotnego rzutu kostką można zapisać jako uporządkowaną parę liczb, czyli ciąg dwuwyrazowy. Pierwszy wyraz tego ciągu to liczba oczek uzyskana w pierwszym rzucie, a drugi wyraz – to liczba oczek uzyskanych w drugim rzucie. Kostka jest symetryczna, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Otrzymujemy:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$
$$\overline{\overline{\Omega}} = 4 \cdot 4 = 16$$

Zdarzeniu A sprzyjają trzy zdarzenia elementarne, które są oznaczone kolorem czerwonym. Zatem

$$\overline{\overline{A}} = 3, \quad \text{stąd}$$

$$P(A) = \frac{3}{16}$$

Zdarzeniu B sprzyja dziesięć zdarzeń elementarnych, oznaczonych kolorem zielonym.

$$\overline{\overline{B}} = 10, \quad \text{więc}$$

$$P(B) = \frac{10}{16}$$

Prawdopodobieństwa zdarzeń A i B są równe: $P(A) = \frac{3}{16}$, $P(B) = \frac{5}{8}$.

UWAGA: Prawdopodobieństwa zdarzeń z przykładu 1. łatwo jest też obliczyć, jeśli posłużymy się tabelą, w której, przykładowo, pierwsza kolumna przedstawia możliwe wyniki pierwszego rzutu, pierwszy wiersz – możliwe wyniki drugiego rzutu, a w pozostałych polach wpiszemy sumę liczb oczek w obu rzutach. Na przykład liczba 6 oznaczona w tabeli, na następnej stronie, kolorem czerwonym oznacza sumę $2 + 4$, gdzie 2 jest liczbą oczek otrzymaną w pierwszym rzucie, a 4 – liczbą oczek otrzymaną w drugim rzucie.

W tabeli obok trzy obwódki zaznaczają sumy oczek równe 6, więc trzy zdarzenia elementarne sprzyjają zdarzeniu A z przykładu 1. Podobnie można wyznaczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	(6)
3	4	5	(6)	7
4	5	(6)	7	8

Przykład 2.

Z talii składającej się z 52 kart losujemy jedną kartę. Obliczymy prawdopodobieństwo wylosowania karty, która jest pikiem lub asem.

Mamy

Ω – zbiór wszystkich jednoelementowych podzbiorów zbioru 52 kart.

$\overline{\overline{\Omega}} = 52$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.
Oznaczmy zdarzenia:

A – wylosowana karta jest pikiem,

$\overline{\overline{A}} = 13$

B – wylosowana karta jest asem,

$\overline{\overline{B}} = 4$

Wówczas

$A \cup B$ oznacza zdarzenie – wylosowana karta jest pikiem lub asem.

Wiemy, że

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ twierdzenie 1. punkt 5), str. 156

Natomiast $A \cap B$ oznacza zdarzenie – wylosowana karta jest asem pik. Zatem

$\overline{\overline{A \cap B}} = 1$

Obliczamy:

$$P(A) = \frac{13}{52} \qquad P(B) = \frac{4}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania karty, która jest pikiem lub asem, wynosi $\frac{4}{13}$.

Ćwiczenie 1. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 lub przez 7.

Przykład 3.

Spośród liczb: 1, 2, 3, 4, …, 1000 wybieramy losowo jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby, która jest podzielna przez 4 i jednocześnie nie jest podzielna przez 6?

Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych i ich liczbę.

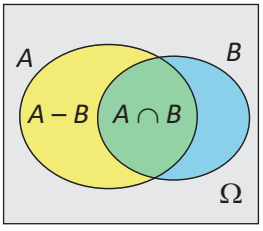
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 1000\}$ $\quad\quad$ $\overline{\overline{\Omega}} = 1000$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.
Oznaczmy zdarzenia:

A – wylosowana liczba jest podzielna przez 4,

B – wylosowana liczba jest podzielna przez 6.

Interesuje nas prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A - B$.



Zauważamy, że

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$, gdzie

zdarzenia $A - B$ oraz $A \cap B$ się wykluczają.

Zatem

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$, stąd

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$A \cap B$ – to zdarzenie: wylosowana liczba jest podzielna przez 4 i przez 6, czyli wylosowana liczba jest podzielna przez 12.

Obliczamy:

$\overline{\overline{A}} = 1000 : 4 = 250$ $\quad$ 1000 jest liczbą podzielną przez 4

$\overline{\overline{A \cap B}} = 996 : 12 = 83$ $\quad$ 996 jest największą liczbą podzielną przez 12, która jest nie większa od 1000

$$P(A - B) = \frac{250}{1000} - \frac{83}{1000} = \frac{167}{1000}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4 i jednocześnie niepodzielnej przez 6 jest równe 0,167.

Przykład 4.

Klasa IVc składa się z 18 dziewcząt i 12 chłopców. Wybieramy losowo dwuosobową delegację tej klasy. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia

A – w wybranej delegacji będzie co najmniej jedna dziewczyna.

Załóżmy, że kolejność wylosowania dwóch osób nie jest istotna. Wówczas zdarzenia elementarne – to dwuosobowe podzbiory zbioru osób z klasy IVc.

Ω – to zbiór kombinacji dwuelementowych zbioru 30-elementowego

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

I sposób – Korzystamy z własności: $P(A) = 1 - P(A')$.
Zdarzenie A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A i oznacza zdarzenie: żadna dziewczyna nie jest w delegacji, czyli w delegacji będą dwaj chłopcy.

$$\overline{\overline{A'}} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

Obliczamy:

$$P(A') = \frac{66}{435} = \frac{22}{145}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{22}{145} = \frac{123}{145}$$

II sposób – Znajdujemy prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A_1 i A_2, gdzie
A_1 oznacza zdarzenie: delegacja składa się z jednej dziewczyny i jednego chłopca,
A_2 oznacza zdarzenie: w delegacji będą dwie dziewczyny.
Wówczas

$A = A_1 \cup A_2$ i zdarzenia A_1, A_2 się wykluczają. Zatem

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}}$$

- Jedną dziewczynę można wybrać na 18 sposobów i jednocześnie jednego chłopca na 12 sposobów, zatem

$$\overline{\overline{A_1}} = 18 \cdot 12 = 216$$

- Dwie dziewczyny można wybrać na $\binom{18}{2}$ sposoby, więc

$$\overline{\overline{A_2}} = \binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$$

Otrzymujemy:

$$\overline{\overline{A}} = 216 + 153 = 369, \quad \text{stąd}$$

$$P(A) = \frac{369}{435} = \frac{123}{145}$$

Prawdopodobieństwo wybrania delegacji, w której będzie co najmniej jedna dziewczyna, jest równe $\frac{123}{145}$.

UWAGA: Jeśli w przykładzie 4. założymy, że kolejność wyboru dwóch osób z klasy IVc jest istotna, to przestrzeń Ω będzie zbiorem dwuwyrazowych ciągów o różnych wyrazach ze zbioru uczniów klasy IVc oraz

$$\overline{\overline{\Omega}} = 30 \cdot 29 = 870$$

Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A' – w dwuosobowej delegacji są sami chłopcy – jest wtedy równa

$12 \cdot 11$, czyli 132 Uwzględniamy kolejność wyboru chłopców!

Zatem

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{132}{870}=\frac{738}{870}=\frac{123}{145}$$

Założenie o tym, że kolejność wyboru dwóch osób jest istotna czy też nie jest, nie wpłynęło na wynik obliczeń $P(A)$. Można wybrać każdy z tych dwóch modeli do rozwiązania zadania z przykładu 4. Jednak trzeba pamiętać, że nie wolno mieszać tych modeli. To znaczy, że określając przestrzeń Ω jako zbiór podzbiorów, nie można traktować zdarzenia A jako zbioru ciągów, i odwrotnie.

Ćwiczenie 2. Doświadczenie polega na losowym wyborze dwóch osób z klasy IVc z przykładu 4. Zakładając, że kolejność wyboru tych osób jest istotna, wykaż, że prawdopodobieństwo wylosowania jednej dziewczyny i jednego chłopca jest równe $\frac{72}{145}$.

Przykład 5.

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno cztery cyfry ze zwracaniem i tworzymy liczbę czterocyfrową. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia:
A – w zapisie otrzymanej liczby występuje jeden raz cyfra 7 i jeden raz cyfra 8
B – otrzymana liczba jest mniejsza od 3500.

Kolejność wylosowanych cyfr jest istotna, cyfry mogą się powtarzać.
Przestrzeń Ω – to zbiór czterowyrazowych ciągów, których wyrazy należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i mogą się powtarzać.
Mamy:

$$\Omega=\{(a,b,c,d):\ a,b,c,d\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

$$\overline{\overline{\Omega}}=8^4$$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.
Wyznaczamy liczbę zdarzeń elementarnych, sprzyjających zdarzeniu A.

4 – liczba miejsc, na których można wpisać cyfrę 7

3 – liczba miejsc, na których można wpisać cyfrę 8, bo jedno miejsce zajmuje cyfra 7

6^2 – liczba możliwości wpisania na pozostałych dwóch miejscach cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Zatem

$$\overline{\overline{A}}=4\cdot 3\cdot 6^2$$

Wówczas

$$P(A)=\frac{4\cdot 3\cdot 6\cdot 6}{8\cdot 8\cdot 8\cdot 8}=\frac{27}{256}$$

Zdarzenie B oznacza: otrzymana liczba jest mniejsza od 3500. Zauważmy, że

$B = B_1 \cup B_2$,

gdzie

B_1 – to zdarzenie: otrzymana liczba jest mniejsza od 3000

B_2 – to zdarzenie: otrzymana liczba należy do przedziału $\langle 3000, 3500)$

i zdarzenia B_1, B_2 się wykluczają. Wówczas

$P(B) = P(B_1) + P(B_2)$

Wyznaczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B_1:

2 – liczba możliwości wybrania cyfry tysięcy – może to być 1 lub 2

8^3 – liczba możliwości wybrania pozostałych trzech cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ – cyfry mogą się powtarzać

$\overline{\overline{B_1}} = 2 \cdot 8^3$

Wyznaczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B_2:

1 – liczba możliwości wybrania cyfry tysięcy – jest ona równa tylko 3

4 – liczba możliwości wybrania cyfry setek z cyfr: 1, 2, 3, 4

8^2 – liczba możliwości wybrania pozostałych dwóch cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\overline{\overline{B_2}} = 1 \cdot 4 \cdot 8^2$

Obliczamy $P(B)$:

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{2 \cdot 8^3}{8^4} + \frac{4 \cdot 8^2}{8^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

Otrzymaliśmy: $P(A) = \frac{27}{256}$, $P(B) = \frac{5}{16}$.

Ćwiczenie 3. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia C – cyfrą jedności otrzymanej liczby w przykładzie 5. jest cyfra 2 i jednocześnie otrzymana liczba jest podzielna przez 4.

Przykład 6.

W pudełku mamy 9 rozróżnialnych kul: 4 białe, 3 czarne i 2 niebieskie. Wybieramy losowo trzy kule. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) A – wśród wylosowanych kul jest jedna kula biała,

b) B – wśród wylosowanych kul tylko dwie kule są w jednym kolorze.

Kolejność losowania kul nie jest istotna.

Ω – zbiór kombinacji 3-elementowych zbioru 9-elementowego

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} = 84$$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Ad a) Zdarzenie A oznacza, że jedna z wylosowanych kul jest biała, a pozostałe dwie kule nie są białe. Z 4 białych kul możemy wylosować jedną kulę na 4 sposoby i jednocześnie z pozostałych pięciu kul, które nie są białe, losujemy dwie kule na $\binom{5}{2}$ sposobów. Zatem

$$\overline{\overline{A}} = 4 \cdot \binom{5}{2} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 40, \quad \text{więc} \quad P(A) = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

Ad b) Zdarzenie B oznacza, że wylosujemy dwie kule, które będą w jednym kolorze spośród trzech danych kolorów, a trzecia kula będzie w innym kolorze niż poprzednie dwie kule. Mamy trzy przypadki:

B_1 – zdarzenie: dwie wylosowane kule są białe i trzecia nie jest biała

B_2 – zdarzenie: dwie wylosowane kule są czarne i trzecia nie jest czarna

B_3 – zdarzenie: dwie wylosowane kule są niebieskie i trzecia nie jest niebieska

Zauważ, że zdarzenia B_1, B_2, B_3 parami się wykluczają oraz

$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ zatem

$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B_1}} + \overline{\overline{B_2}} + \overline{\overline{B_3}}$

Obliczamy:

$$\overline{\overline{B_1}} = \binom{4}{2}\binom{5}{1} = 30 \quad \overline{\overline{B_2}} = \binom{3}{2}\binom{6}{1} = 18 \quad \overline{\overline{B_3}} = \binom{2}{2}\binom{7}{1} = 7$$

$$\overline{\overline{B}} = 30 + 18 + 7 = 55, \quad \text{więc}$$

$$P(B) = \frac{55}{84}$$

W losowaniu trzech kul, prawdopodobieństwo wylosowania jednej kuli białej jest równe $\frac{10}{21}$, a prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w takim samym kolorze wynosi $\frac{55}{84}$.

Przykład 7.

Z pudełka, w którym znajduje się 10 losów pustych i 2 losy wygrywające, losujemy n losów. Wyznaczymy najmniejszą liczbę n, dla której prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednego losu wygrywającego jest większe od $\frac{1}{2}$.

Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Ω – to zbiór kombinacji n-elementowych zbioru 12-elementowego,

$n \in \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{12}{n}$ Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Niech A oznacza zdarzenie: wylosowano co najmniej jeden los wygrywający. Wówczas A' to zdarzenie: wszystkie wylosowane losy są puste.
Wiemy, że

$$P(A)>\frac{1}{2}$$

$$1-P(A')>\frac{1}{2}, \quad \text{stąd} \quad P(A')<\frac{1}{2}$$

Obliczamy $P(A')$. Zauważmy, że jeśli $n \in \{11, 12\}$, to $P(A')=0$, zatem $P(A')<\frac{1}{2}$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Wówczas mamy:

$$\overline{\overline{A'}}=\binom{10}{n}$$

$$P(A')=\frac{\binom{10}{n}}{\binom{12}{n}}=\frac{10!}{n!\cdot(10-n)!}\cdot\frac{n!\cdot(12-n)!}{12!}=\frac{(11-n)\cdot(12-n)}{11\cdot 12}$$

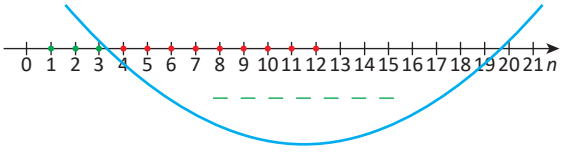
$$\frac{(11-n)\cdot(12-n)}{11\cdot 12}<\frac{1}{2}$$

$$(11-n)(12-n)<66$$

$$n^2-23n+66<0$$

$$\Delta=23^2-4\cdot 66=265$$

$$n_1=\frac{23-\sqrt{265}}{2}\approx 3{,}36 \qquad n_2=\frac{23+\sqrt{265}}{2}\approx 19{,}64$$



Wyznaczamy wszystkie liczby n spełniające nierówność $P(A')<\frac{1}{2}$.

$$\{1,2,3,\ldots,10\}\cap\left(\frac{23-\sqrt{265}}{2},\frac{23+\sqrt{265}}{2}\right)\cup\{11,12\}=\{4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Najmniejsza możliwa liczba n jest równa 4. To znaczy, że należy wylosować co najmniej cztery losy, aby prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednego losu wygrywającego było większe od $\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 4. Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A z przykładu 7. w przypadku, gdy $n=4$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 8,
   b) B – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą,
   c) C – w pierwszym rzucie wypadła większa liczba oczek niż w drugim rzucie,
   d) D – co najmniej raz wypadła parzysta liczba oczek.

2. Doświadczenie losowe polega na rzucie dwiema czworościennymi symetrycznymi kostkami z liczbami 1, 2, 3, 4 na poszczególnych ściankach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – na obu kostkach wypadła taka sama liczba,
   b) B – suma otrzymanych liczb jest większa od 3,
   c) C – iloczyn otrzymanych liczb jest nie większy od 6,
   d) D – jedna z otrzymanych liczb jest dzielnikiem drugiej.

3. Ze zbioru 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – wylosowana karta jest damą w czerwonym kolorze lub kartą w kolorze karo,
   b) B – wylosowana karta jest figurą (walet, dama, król, as) lub kierem,
   c) C – wylosowana karta jest młodsza od dziesiątki i nie jest treflem,
   d) D – wylosowana karta jest w czarnym kolorze i nie jest figurą.

4. Ze zbioru wszystkich liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – wylosowana liczba jest podzielna przez 11,
   b) B – wylosowana liczba jest nie większa niż 37 i nie mniejsza niż 26,
   c) C – wylosowana liczba jest podzielna przez 5 i nie jest podzielna przez 3,
   d) D – wylosowana liczba jest całkowitą wielokrotnością liczby 6 lub liczby 8.

5. Ze zbioru liczb $\{7, 8, 9, \ldots, 251\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – wylosowana liczba w wyniku dzielenia przez 3 daje resztę 1,
   b) B – wylosowana liczba w wyniku dzielenia przez 4 daje resztę 2.

6. W klasie IVd jest 32 uczniów. Z tej klasy na zajęcia koła matematycznego uczęszcza 13 uczniów, a na zajęcia koła fizycznego – 8 uczniów. W zajęciach żadnego z wymienionych kół nie bierze udziału 17 uczniów tej klasy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrany uczeń klasy IVd:
   a) chodzi na zajęcia koła matematycznego lub koła fizycznego,
   b) chodzi na zajęcia tylko jednego z tych kół.

7. W grupie siedmiorga przyjaciół są dwie dziewczyny i pięciu chłopaków. Wybieramy losowo dwie osoby z tej grupy. Które zdarzenie jest bardziej prawdopodobne: wylosujemy co najmniej jedną dziewczynę, czy wylosujemy dwóch chłopaków?

8. Na loterii znajduje się 20 losów pustych i 5 losów wygrywających. Wyciągamy losowo dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) tylko jeden wybrany los jest wygrywający,
   b) co najwyżej jeden los jest wygrywający.

9. Basia ma 10 książek przygodowych, wśród nich książkę A i książkę B. Wszystkie książki postawiła losowo w jednym szeregu na półce. Ile jest równe prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) między książkami A i B będą stały trzy książki,
   b) książki A i B nie będą stały obok siebie?

10. Dziesięć osób stoi losowo w kolejce do kasy biletowej, wśród nich Kamila i Paweł. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia *A* - między Kamilą i Pawłem stoją trzy osoby?

11. W pudełku mamy 12 rozróżnialnych kul: 3 białe, 4 czarne i 5 niebieskich. Wybieramy losowo trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) wylosowane kule będą każda w innym kolorze,
   b) wszystkie wylosowane kule będą w takim samym kolorze,
   c) dwie wylosowane kule będą w takim samym kolorze, a trzecia w innym kolorze.

12. W szufladzie mamy 10 rozróżnialnych kul: 5 niebieskich, 4 czerwone i 1 białą. Losujemy kolejno dwa razy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wylosowane kule są różnego koloru, jeśli losowanie odbyło się:
   a) bez zwracania pierwszej kuli do szuflady,
   b) ze zwróceniem pierwszej kuli do szuflady przed wylosowaniem drugiej kuli.

13. Partię 60 sztuk towaru poddaje się kontroli przez wylosowanie trzech sztuk i sprawdzenie ich jakości. Jeśli co najmniej jedna z nich jest wadliwa, to odrzucamy całą partię. W przeciwnym przypadku partia towaru zostaje przyjęta. Co jest bardziej prawdopodobne: odrzucenie partii zawierającej 5% sztuk wadliwych, czy przyjęcie partii zawierającej 65% sztuk wadliwych?

14. W klasie liczącej więcej niż 20 osób, jest 10 dziewcząt i pewna liczba chłopców. Wybieramy losowo dwie osoby z tej klasy. Ilu jest chłopców w tej klasie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania jednej dziewczyny i jednego chłopca jest równe 0,5?

15. W kartonie znajduje się 20 żarówek, w tym pewna liczba żarówek wadliwych. Wybieramy losowo dwie żarówki. Ile co najwyżej dobrych żarówek znajduje się w tym kartonie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania jednej żarówki dobrej i jednej wadliwej jest większe od 0,1?

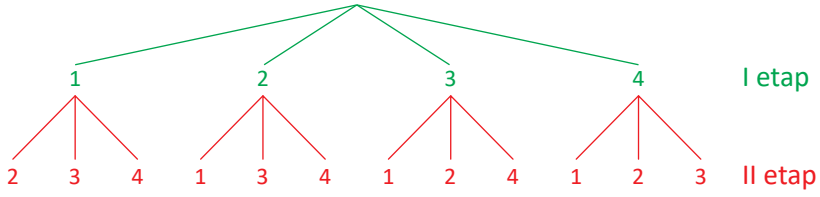
Doświadczenia losowe wieloetapowe

W tym temacie omówimy doświadczenia losowe, które można przedstawić jako ciąg pewnych doświadczeń cząstkowych. Takimi doświadczeniami są np.: powtarzające się rzuty kostką, monetą lub kilkukrotne losowanie liczb z danego zbioru.

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na utworzeniu liczby dwucyfrowej w następujący sposób: ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ losujemy cyfrę dziesiątek, a następnie – z pozostałych cyfr – cyfrę jedności. Sposób tworzenia zdarzeń elementarnych zilustrujemy za pomocą drzewa stochastycznego.

Drzewo składa się z odcinków – zwanych krawędziami, i punktów – zwanych węzłami. Etap I doświadczenia losowego polega na wylosowaniu jednej cyfry ze zbioru czterech cyfr, która będzie cyfrą dziesiątek. Z pierwszego węzła prowadzimy cztery krawędzie, reprezentujące wyniki tego etapu. Pod krawędziami wpisujemy wyniki: 1, 2, 3, 4. Etap II polega na wylosowaniu drugiej cyfry z danego zbioru, ale różnej od cyfry wylosowanej w I etapie, która będzie cyfrą jedności. Punkty 1, 2, 3, 4 są teraz węzłami, z których prowadzimy po trzy krawędzie, przedstawiające wyniki drugiego etapu.



Na drzewie zdarzenie elementarne (liczbę dwucyfrową) reprezentuje tzw. gałąź, składająca się z jednej krawędzi zielonej i jednej krawędzi czerwonej. Mamy:

$\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych można zapisać:

$\Omega = \{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43\}$.

Drzewo stochastyczne umożliwia obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń. Prawdopodobieństwo określamy wówczas w następujący sposób:

1) Obok każdej krawędzi wpisujemy prawdopodobieństwo otrzymania danego wyniku cząstkowego w pojedynczym etapie. Suma prawdopodobieństw przypisanych krawędziom wychodzącym z każdego węzła ma być równa 1.

2) Każdemu zdarzeniu elementarnemu przyporządkowujemy iloczyn prawdopodobieństw, przypisanych kolejnym krawędziom gałęzi, reprezentującej to zdarzenie elementarne. Jest to tzw. reguła iloczynów.

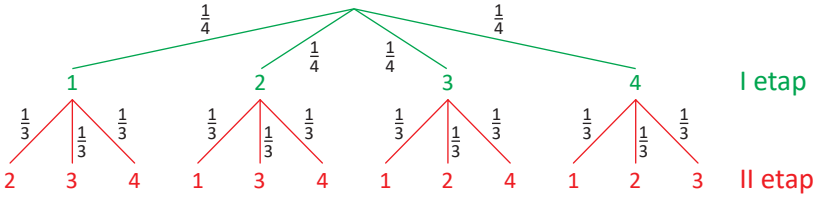
3) Prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi drzewa jest równe sumie prawdopodobieństw przypisanych do tych gałęzi. Jest to tzw. reguła sum.

Określone na poprzedniej stronie prawdopodobieństwo spełnia definicję 1. str. 156. Dowód pokażemy dla pewnego dwuetapowego doświadczenia losowego w przykładzie 6.

Przykład 2.

Na drzewie określimy prawdopodobieństwa dla poszczególnych wyników cząstkowych doświadczenia losowego z przykładu 1. Następnie wyznaczymy prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych. Potem obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A – otrzymana liczba jest większa od 31.

W pierwszym etapie prawdopodobieństwo wylosowania każdej z czterech cyfr jest równe $\frac{1}{4}$. W drugim etapie prawdopodobieństwo wylosowania jednej cyfry spośród trzech cyfr jest równe $\frac{1}{3}$. Sumy prawdopodobieństw przy krawędziach wychodzących z tych samych węzłów są równe 1.



Wiemy już, że $\Omega = \{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43\}$.
Zgodnie z regułą iloczynów otrzymujemy:

$$P(\{12\}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12} \qquad P(\{13\}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12} \qquad P(\{14\}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Podobnie obliczamy prawdopodobieństwa pozostałych zdarzeń elementarnych. Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, a prawdopodobieństwo zajścia każdego z nich jest równe $\frac{1}{12}$.

Zdarzenie A – to zdarzenie: otrzymaliśmy liczbę większą od 31. Wówczas
$A = \{32, 34, 41, 42, 43\}$
Stosujemy regułę sum:

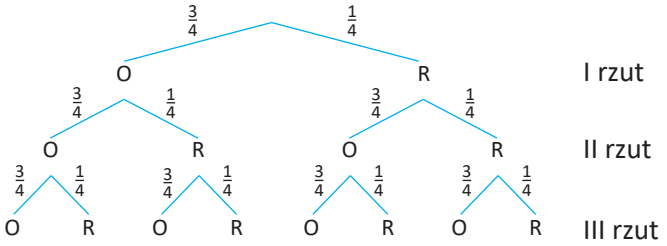
$$P(A) = P(\{32\}) + P(\{34\}) + P(\{41\}) + P(\{42\}) + P(\{43\}) =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania liczby większej od 31 jest równe $\frac{5}{12}$.

Ćwiczenie 1. Doświadczenie losowe jest opisane przez drzewo z przykładu 2. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia B – otrzymana liczba jest podzielna przez 3.

Przykład 3.

Rzucamy trzykrotnie niesymetryczną monetą. Prawdopodobieństwo otrzymania orła w pojedynczym rzucie jest równe $\frac{3}{4}$, a reszki – wynosi $\frac{1}{4}$. Narysujemy drzewo dla tego doświadczenia losowego i obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A – otrzymaliśmy co najmniej dwa orły.



$\Omega = \{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (O, R, R), (R, O, O), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R)\}$

Zauważ, że zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne. Mamy:

$$A = \{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O)\}$$

$$P(A) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} =$$

$$= \frac{27}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} = \frac{27}{32}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania w trzech rzutach co najmniej dwóch orłów jest równe $\frac{27}{32}$.

Ćwiczenie 2. Rzucamy czterokrotnie symetryczną monetą. Narysuj drzewo dla tego doświadczenia. Zaznacz na drzewie gałęzie, reprezentujące zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A – w drugim rzucie wypadł orzeł, a w trzecim – reszka. Oblicz prawdopodobieństwo tego zdarzenia.

Przykład 4.

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia: co najmniej raz wypadnie sześć oczek.

Niech A oznacza zdarzenie: w trzykrotnym rzucie kostką, co najmniej raz otrzymamy sześć oczek.

Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby. W pierwszym sposobie zastosujemy prawdopodobieństwo klasyczne, a w drugim skorzystamy z drzewa stochastycznego. W obu sytuacjach prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A obliczymy ze wzoru

$$P(A) = 1 - P(A'),$$

gdzie A' to zdarzenie: w żadnym rzucie nie otrzymamy sześciu oczek.

I sposób – korzystamy z prawdopodobieństwa klasycznego.

Ω – to zbiór trzywyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli

$$\Omega = \{(a, b, c): a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Zatem

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6^3 = 216$$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.
Określamy zbiór zdarzeń elementarnych, sprzyjających zdarzeniu A'.

$$A' = \{(a, b, c): a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

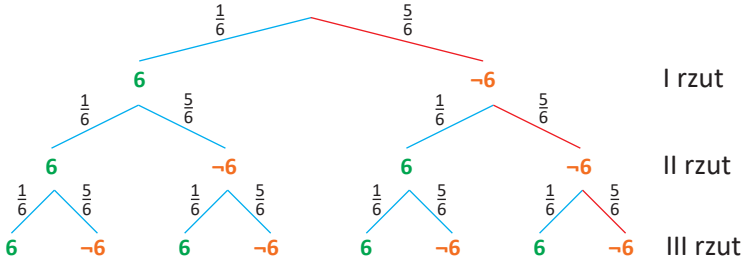
Wówczas

$$\overline{\overline{A'}} = 5^3 = 125, \quad P(A') = \frac{125}{216}, \quad \text{więc} \quad P(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

II sposób – korzystamy z drzewa stochastycznego.
Trudno jest narysować drzewo, na którym byłoby przedstawionych 216 zdarzeń elementarnych, opisanych w I sposobie. Dlatego wprowadzimy inny model. Aby obliczyć $P(A)$ przyjmiemy, że w pojedynczym rzucie kostką otrzymamy tylko dwa wyniki cząstkowe:

wypadło sześć oczek oraz nie wypadło sześć oczek.

Wiemy, że prawdopodobieństwo otrzymania pierwszego wyniku jest równe $\frac{1}{6}$, a drugiego wyniku – wynosi $\frac{5}{6}$. Rysujemy drzewo i wpisujemy prawdopodobieństwa przy wszystkich krawędziach. Dla uproszczenia wynik wypadło sześć oczek oznaczymy symbolicznie jako **6**, a wynik nie wypadło sześć oczek, jako **¬6**.



Mamy:

$\Omega = \{(6, 6, 6), (6, 6, \neg 6), (6, \neg 6, 6), (6, \neg 6, \neg 6), (\neg 6, 6, 6), (\neg 6, 6, \neg 6), (\neg 6, \neg 6, 6), (\neg 6, \neg 6, \neg 6)\}$

Zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne.

Tylko jedno zdarzenie elementarne sprzyja zdarzeniu A':

$A' = \{(\neg 6, \neg 6, \neg 6)\}$

Na drzewie gałąź przedstawiająca to zdarzenie jest zaznaczona czerwonym kolorem. Obliczamy:

$$P(A') = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3, \quad \text{stąd}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

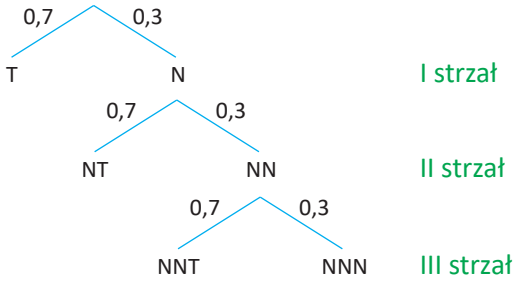
Prawdopodobieństwo, że w trzech rzutach kostką co najmniej raz otrzymamy sześć oczek, jest równe $\frac{91}{216}$.

Ćwiczenie 3. Jak można obliczyć $P(A)$ z przykładu 4. za pomocą narysowanego drzewa, bez wyznaczania $P(A')$?

Na drzewach można również przedstawiać doświadczenia o nieokreślonej liczbie etapów.

Przykład 5.

Strzelec ma trzy naboje. Strzela do tarczy do pierwszego trafienia lub do wyczerpania nabojów. Oddając jeden strzał, strzelec trafia w cel z prawdopodobieństwem 0,7. Narysujemy drzewo dla tego doświadczenia i obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A – cel został trafiony za drugim lub trzecim razem.
Niech T znaczy: strzelec trafił, a N – strzelec nie trafił. Rysujemy drzewo.



$\Omega = \{T, NT, NNT, NNN\}$

Zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne.

Obliczamy $P(A)$:

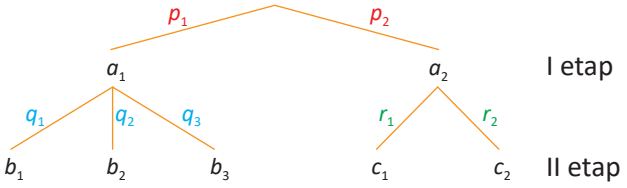
$A = \{\text{NT, NNT}\}$

$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}273$

Prawdopodobieństwo trafienia w cel za drugim lub trzecim razem jest równe 0,273.

Przykład 6.

Poniższe drzewo stochastyczne przedstawia pewien schemat dwuetapowego doświadczenia losowego. Suma prawdopodobieństw przy krawędziach wychodzących z każdego węzła jest równa 1. Do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń stosujemy regułę iloczynów i regułę sum. Pokażemy, że tak określone prawdopodobieństwo spełnia definicję 1. str. 156.



Na rysunku powyżej p_1, p_2, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 – to prawdopodobieństwa przypisane poszczególnym krawędziom drzewa oraz spełnione są warunki:

$p_1 + p_2 = 1$ $\quad q_1 + q_2 + q_3 = 1$ $\quad r_1 + r_2 = 1$

Określamy przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$\Omega = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, c_1), (a_2, c_2)\}$

Poszczególnym zdarzeniom elementarnym przyporządkowane są – zgodnie z regułą iloczynów – prawdopodobieństwa w następujący sposób:

$P(\{(a_1, b_1)\}) = p_1 \cdot q_1$ $\quad P(\{(a_1, b_2)\}) = p_1 \cdot q_2$ $\quad P(\{(a_1, b_3)\}) = p_1 \cdot q_3$

$P(\{(a_2, c_1)\}) = p_2 \cdot r_1$ $\quad P(\{(a_2, c_2)\}) = p_2 \cdot r_2$

1) Zgodnie z regułą sum, prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi jest równe sumie prawdopodobieństw przypisanych do tych gałęzi. Zatem jeśli $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ oraz $A \cap B = \varnothing$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Jest spełniony trzeci aksjomat definicji prawdopodobieństwa.

2) Z założenia liczby p_1, p_2, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 jako prawdopodobieństwa wyników cząstkowych są nieujemne. Wówczas

$p_1 \cdot q_1 \geqslant 0$, $\quad p_1 \cdot q_2 \geqslant 0$, $\quad p_1 \cdot q_3 \geqslant 0$, $\quad p_2 \cdot r_1 \geqslant 0$, $\quad p_2 \cdot r_2 \geqslant 0$

i dla dowolnego zdarzenia A, $A \subset \Omega$, jest spełniony pierwszy aksjomat $P(A) \geqslant 0$.

3) Pozostaje pokazać, że jest spełniony drugi aksjomat, czyli że $P(\Omega)=1$.
Z założenia mamy

$$p_1+p_2=1 \qquad q_1+q_2+q_3=1 \qquad r_1+r_2=1$$

Obliczamy:

$$P(\Omega)=p_1\cdot q_1+p_1\cdot q_2+p_1\cdot q_3+p_2\cdot r_1+p_2\cdot r_2=$$
$$=p_1\cdot(q_1+q_2+q_3)+p_2\cdot(r_1+r_2)=p_1\cdot 1+p_2\cdot 1=p_1+p_2=1,$$ co kończy dowód.

UWAGA: Podobne obliczenia jak w przykładzie 6. można wykonać w przypadku doświadczeń losowych o większej liczbie etapów i większej liczbie wyników cząstkowych w poszczególnych etapach.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ losujemy trzy razy jedną cyfrę ze zwracaniem i tworzymy liczbę trzycyfrową. Wykonaj drzewo dla tego doświadczenia. Zapisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Następnie:
   a) wyróżnij kolorem gałęzie odpowiadające zdarzeniom elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A – otrzymana liczba jest liczbą podzielną przez 6,
   b) zapisz przy krawędziach drzewa odpowiednie prawdopodobieństwa i na tej podstawie oblicz $P(A)$.

2. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy jedną cyfrę bez zwracania i tworzymy liczbę dwucyfrową. Wykonaj drzewo dla tego doświadczenia. Zapisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Następnie:
   a) wyróżnij kolorem gałęzie, reprezentujące zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A – otrzymana liczba jest podzielna przez 3,
   b) wyróżnij innym kolorem gałęzie, odpowiadające zdarzeniom elementarnym sprzyjającym zdarzeniu B – otrzymana liczba jest podzielna przez 4,
   c) zapisz przy krawędziach drzewa odpowiednie prawdopodobieństwa i na tej podstawie oblicz $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$.

3. Janek trenuje koszykówkę. Trafia do kosza z linii rzutów wolnych średnio 7 razy na 10 rzutów. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – Janek, wykonując trzy rzuty wolne, trafi do kosza co najmniej 2 razy.

4. Strzelec A trafia do tarczy z prawdopodobieństwem równym $\frac{2}{3}$, a strzelec B – z prawdopodobieństwem równym $\frac{3}{4}$. Obaj strzelcy oddają po jednym strzale do tej samej tarczy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia C – tarcza została trafiona co najmniej jeden raz.

5. W szufladzie leżą 4 skarpetki niebieskie, 6 skarpetek czarnych i 2 białe. Wyciągamy losowo kolejno bez zwracania dwie skarpetki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – obie wylosowane skarpetki są w jednym kolorze.

6. W pojedynczym rzucie niesymetryczną monetą prawdopodobieństwo otrzymania orła jest równe $\frac{1}{3}$, a reszki jest równe $\frac{2}{3}$. Rzucamy trzy razy tą monetą. Korzystając z drzewa, oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   A – reszka wypadła dwa razy, B – orzeł wypadł co najwyżej jeden raz.

7. Symetryczna czworościenna kostka ma dwie ścianki w kolorze białym, jedną – w kolorze niebieskim i jedną – w kolorze zielonym. Rzucamy trzy razy tą kostką. Korzystając z drzewa, oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   A – co najmniej raz wypadła ścianka w kolorze niebieskim,
   B – we wszystkich rzutach wypadły ścianki w takim samym kolorze,
   C – w każdym rzucie wypadł inny kolor ścianki od pozostałych.

8. Symetryczna kostka w kształcie sześcianu ma trzy ścianki w kolorze białym, dwie ścianki w kolorze czerwonym i jedną ściankę w kolorze zielonym. Rzucamy trzy razy tą kostką. Korzystając z drzewa, oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   A – co najmniej raz wypadła ścianka w kolorze czerwonym,
   B – ścianka w kolorze białym wypadła tylko raz,
   C – w każdym rzucie wypadła ścianka w kolorze czerwonym lub zielonym.

9. W worku znajdują się piłeczki pingpongowe w różnych kolorach: 2 zielone, 3 pomarańczowe i 5 białych. Losujemy kolejno bez zwracania 4 piłeczki. Korzystając z drzewa, oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   A – tylko pierwsza wylosowana piłeczka była zielona,
   B – wszystkie wylosowane piłeczki były w kolorze białym lub zielonym,
   C – trzy wylosowane piłeczki były pomarańczowe.

10. Rzucamy pięć razy symetryczną czworościenną kostką z liczbami 1, 2, 3, 4 na poszczególnych ściankach. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
    A – liczba 2 wypadnie co najwyżej jeden raz,
    B – suma otrzymanych liczb jest równa 6.

11. W worku znajdują się trzy rodzaje maskotek: 5 kotków, 6 piesków i 9 misiów. Losujemy jedną maskotkę. Jeśli otrzymamy kotka, to kończymy losowanie; jeśli nie – maskotkę odkładamy na bok i losujemy z worka kolejny raz jedną maskotkę. Jeśli otrzymamy kotka, to kończymy losowanie, a jeśli nie – to maskotkę odkładamy i wykonujemy trzecią próbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – co najwyżej w trzeciej próbie wylosujemy kotka.

12. Monika ma trzy strzałki. Rzuca kolejno strzałkami do tarczy do pierwszego trafienia w tarczę lub do wyczerpania strzałek. Prawdopodobieństwo trafienia w tarczę w każdym rzucie jest takie samo. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia przez Monikę do tarczy w pierwszym rzucie, jeśli prawdopodobieństwo trafienia za trzecim razem jest równe $\frac{4}{27}$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przykład 1.

Wykonano dwukrotny rzut symetryczną sześcienną kostką do gry. Wówczas okazało się, że w drugim rzucie wypadło 5 lub 6 oczek. Znając tę informację, obliczymy prawdopodobieństwo otrzymania w pierwszym rzucie mniejszej liczby oczek niż w drugim rzucie.

Zapisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{(a, b): a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ i } b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Oznaczmy zdarzenia:

A – w pierwszym rzucie wypadła mniejsza liczba oczek niż w drugim rzucie,

B – w drugim rzucie wypadło 5 lub 6 oczek.

Poniżej przedstawiona jest przestrzeń Ω z zaznaczonymi zdarzeniami A i B. Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

$$\begin{array}{l} \Omega = \{(1,1), \underline{(1,2)}, \underline{(1,3)}, \underline{(1,4)}, \underline{(1,5)}, \underline{(1,6)} \\ \quad (2,1), (2,2), \underline{(2,3)}, \underline{(2,4)}, \underline{(2,5)}, \underline{(2,6)} \\ \quad (3,1), (3,2), (3,3), \underline{(3,4)}, \underline{(3,5)}, \underline{(3,6)} \\ \quad (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), \underline{(4,5)}, \underline{(4,6)} \\ \quad (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), \underline{(5,6)} \\ \quad (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \end{array}$$

(A – underlined once; B – underlined once)

Jeśli wiemy, że w drugim rzucie wypadło 5 lub 6 oczek, to nie musimy rozpatrywać całej przestrzeni Ω, złożonej z 36 par. Wystarczy ograniczyć się do zdarzenia B, które staje się nową przestrzenią. Oznaczmy ją symbolem Ω_B. Łatwo stwierdzić, że $\overline{\overline{\Omega_B}} = 12$. Rozpatrzmy teraz zdarzenie A w nowej przestrzeni Ω_B. Oznaczmy je symbolem A_B. Sprzyja mu 9 takich zdarzeń, czyli $\overline{\overline{A_B}} = 9$, a zatem $P(A_B) = \frac{9}{12}$.

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{9}{12}$.

Prawdopodobieństwo obliczone w przykładzie 1. można też wyznaczyć innym sposobem, bowiem

$$P(A_B) = \frac{9}{12} = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{\frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}{\frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definicja 1.

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A, pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, gdzie $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$, nazywamy liczbę $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, którą oznaczamy $P(A|B)$. Wówczas

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Twierdzenie 1.

Jeśli $B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$, to funkcja, która dowolnemu zdarzeniu A, $A \subset \Omega$, przyporządkowuje liczbę $P(A|B)$, gdzie $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.

Dowód:

1) $P(A|B) \geqslant 0$ dla dowolnego zdarzenia A, ponieważ liczba $P(A|B)$ jest ilorazem liczby nieujemnej $P(A \cap B)$ i liczby dodatniej $P(B)$.

2) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

3) Niech $A_1, A_2 \subset \Omega$ i $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Wtedy oczywiście
$(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = A_1 \cap A_2 \cap B = \varnothing$,
a więc zdarzenia $A_1 \cap B$ i $A_2 \cap B$ się wykluczają. Mamy wówczas:

$$P((A_1 \cup A_2)|B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

Zatem spełnione są aksjomaty z definicji prawdopodobieństwa.

Ćwiczenie 1. Porównaj $P(A)$ oraz $P(A|B)$ z przykładu 1.

Przykład 2.

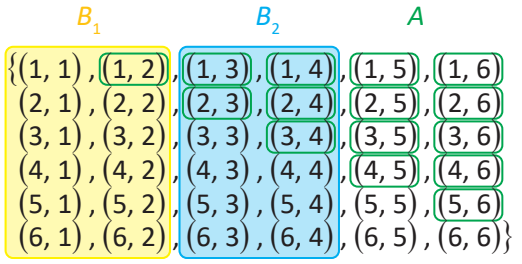
Niech Ω oznacza przestrzeń zdarzeń elementarnych z przykładu 1., A – zdarzenie rozpatrywane w przykładzie 1. Porównamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A z prawdopodobieństwami $P(A|B_1)$ oraz $P(A|B_2)$, gdzie

B_1 to zdarzenie: w drugim rzucie wypadły co najwyżej 2 oczka

B_2 to zdarzenie: w drugim rzucie wypadły 3 lub 4 oczka.

Na rysunku poniżej kolorem żółtym są zaznaczone zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu B_1, a kolorem niebieskim – zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu B_2. Otrzymujemy:

$$P(A|B_1)=\frac{1}{12}=\frac{3}{36} \quad P(A)=\frac{15}{36}$$
$$P(A|B_1)<P(A)$$
$$P(A|B_2)=\frac{5}{12}=\frac{15}{36} \quad P(A)=\frac{15}{36}$$
$$P(A|B_2)=P(A)$$



Podsumujmy:

1. Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A, pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, możemy obliczać na dwa sposoby:
   I sposób – Zmieniamy przestrzeń zdarzeń elementarnych, ograniczając ją tylko do tych zdarzeń, które sprzyjają zdarzeniu B. Wówczas oznaczamy ją Ω_B. Następnie obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w przestrzeni Ω_B.
   II sposób – Nie zmieniamy przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Wtedy korzystamy ze wzoru $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
2. Dodatkowy warunek może zwiększać, zmniejszać lub nie zmieniać prawdopodobieństwa zajścia interesującego nas zdarzenia.

Przykład 3.

Z talii 52 kart wylosowano jedną kartę, która okazała się pikiem. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana karta jest asem.

Oznaczmy zdarzenia:
A – wylosowana karta jest asem
B – wylosowana karta jest pikiem
Mamy obliczyć $P(A|B)$.

I sposób – Ograniczamy rozważania do kart będących pikami. Zatem

Ω_B – zbiór wszystkich jednoelementowych kombinacji zbioru 13 pików, $\overline{\overline{\Omega_B}}=13$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

A_B – zbiór asów pik, $\overline{\overline{A_B}}=1$

stąd

$$P(A|B)=P(A_B)=\frac{1}{13}$$

II sposób – Nie ograniczamy przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Ω – zbiór wszystkich jednoelementowych kombinacji talii 52 kart, $\overline{\overline{\Omega}} = 52$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

$\overline{\overline{A}} = 4 \quad \overline{\overline{B}} = 13 \quad \overline{\overline{A \cap B}} = 1$

Wówczas

$$P(B) = \frac{13}{52} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{52} \qquad \text{i ostatecznie}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{13}$.

Przykład 4.

Do restauracji dostarczono karton zawierający 25 paczek herbaty w trzech rodzajach, pochodzących z dwóch krajów. Liczbę paczek herbaty każdego typu przedstawia tabela poniżej.

Pochodzenie / Rodzaj herbaty	Cejlon	Chiny
Czarna	10	5
Owocowa	4	3
Zielona	1	2

Z kartonu wylosowano jedną paczkę herbaty. Okazało się, że nie jest to herbata owocowa. Obliczymy prawdopodobieństwo wylosowania paczki herbaty cejlońskiej.

Oznaczmy zdarzenia:

A – wylosowano paczkę herbaty cejlońskiej

B – wylosowano paczkę herbaty nieowocowej, czyli czarnej lub zielonej

Mamy obliczyć $P(A|B)$

I sposób

Ω_B – zbiór wszystkich wyników losowania paczki herbaty spośród paczek herbat czarnych i zielonych

$\overline{\overline{\Omega_B}} = 18$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

A_B – zbiór wszystkich wyników losowania paczki herbaty cejlońskiej spośród paczek herbat czarnych i zielonych

$\overline{\overline{A_B}} = 11$, zatem $P(A|B) = P(A_B) = \frac{11}{18}$

II sposób

Ω – zbiór wszystkich wyników losowania paczki herbaty z pudła

$\overline{\overline{\Omega}} = 25$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

$\overline{\overline{A}} = 15 \quad \overline{\overline{B}} = 18 \quad \overline{\overline{A \cap B}} = 11$

stąd

$$P(B) = \frac{18}{25} \text{ i } P(A \cap B) = \frac{11}{25}, \text{ więc } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{11}{25}}{\frac{18}{25}} = \frac{11}{18}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania paczki herbaty cejlońskiej pod warunkiem, że to nie jest herbata owocowa, jest równe $\frac{11}{18}$.

Ćwiczenie 2. Korzystając z danych z przykładu 4., oblicz prawdopodobieństwo wylosowania paczki herbaty owocowej, jeśli wiadomo, że ta herbata pochodzi z Chin.

Przykład 5.

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ losujemy trzy liczby. Obliczymy prawdopodobieństwo wylosowania trzech liczb, których suma jest podzielna przez 3, jeśli wiadomo, że co najmniej jedna z tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Oznaczmy zdarzenia:

A – suma wylosowanych trzech liczb jest podzielna przez 3

B – co najmniej jedna z wylosowanych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Zauważ, że suma trzech liczb naturalnych jest podzielna przez 3, jeśli zachodzi jeden z dwóch przypadków:

1) te trzy liczby dają taką samą resztę z dzielenia przez 3, czyli:
   dają resztę 0 albo dają resztę 1, albo dają resztę 2
2) każda z trzech liczb daje inną resztę z dzielenia przez 3.

W zbiorze liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ jest:

– 6 liczb podzielnych przez 3

– 7 liczb dających resztę 1 przy dzieleniu przez 3

– 7 liczb dających resztę 2 przy dzieleniu przez 3.

Zadanie rozwiążemy I sposobem.

Ω_B – zbiór 3-elementowych kombinacji zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ składających się z liczb, wśród których co najmniej jedna przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

$$\overline{\overline{\Omega}}_B = \binom{20}{3} - \binom{13}{3} = 1140 - 286 = 854$$ Uzasadnij te obliczenia!

A_B – zdarzenie: suma wylosowanych trzech liczb jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna z wylosowanych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

$$\overline{\overline{A}}_B = \binom{7}{3} + \binom{7}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{1} = 35 + 294 = 329$$ Uzasadnij te obliczenia!

$$P(A|B) = P(A_B) = \frac{329}{854} = \frac{47}{122}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{47}{122}$.

Bezpośrednio z definicji 1. wynika, że jeśli $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ oraz $P(B) > 0$, to
$(*)$ $P(B) \cdot P(A|B) = P(A \cap B)$.
Wzór $(*)$ nazywamy wzorem łańcuchowym. Można go uogólnić na dowolną, skończoną liczbę zdarzeń. Wzór łańcuchowy dla trzech zdarzeń podaje twierdzenie 2.

Twierdzenie 2.
Jeśli $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$ oraz $P(A_1 \cap A_2) > 0$, to
$P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Dowód: Ponieważ $(A_1 \cap A_2) \subset A_1$, więc z twierdzenia 1. własność 2) ze str. 156 wynika, że $P(A_1 \cap A_2) \leqslant P(A_1)$. Z założenia $P(A_1 \cap A_2) > 0$, zatem $P(A_1) > 0$. Mamy:

$$P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_1)\cdot\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\cdot\frac{P(A_3 \cap (A_1 \cap A_2))}{P(A_1 \cap A_2)} =$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3),$$ co kończy dowód.

UWAGA: Wzór łańcuchowy uzasadnia tzw. regułę iloczynów, służącą do obliczania prawdopodobieństw metodą drzewa (zobacz str. 173). Kolejne liczby (zaczynając od drugiej od góry) przypisane krawędziom gałęzi – to odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe. Poruszając się po gałęzi od góry do dołu, mnożymy prawdopodobieństwa, odpowiadające kolejnym etapom doświadczenia losowego.

Przykład 6.

Na trasie samochodu znajdują się trzy skrzyżowania z działającą sygnalizacją świetlną. Na pierwszym skrzyżowaniu samochód trafia na światło czerwone lub żółte z prawdopodobieństwem 0,5. Jeśli samochód trafi na skrzyżowaniu na światło zielone, to prawdopodobieństwo, że na następnym skrzyżowaniu będzie miał też światło zielone jest większe o 0,1 od analogicznego prawdopodobieństwa na poprzednim skrzyżowaniu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że samochód przejedzie przez te trzy skrzyżowania bez zatrzymania?

Oznaczmy zdarzenia:

A – samochód przejedzie przez trzy skrzyżowania bez zatrzymania

A_i – samochód przejedzie przez i-te skrzyżowanie bez zatrzymania; $i = 1, 2, 3$

Wówczas

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Wiemy, że

$$P(A_1) = 0{,}5 \quad P(A_2|A_1) = 0{,}6 \quad P(A_3|A_1 \cap A_2) = 0{,}7$$

Z twierdzenia 2. wynika, że

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

zatem

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$$

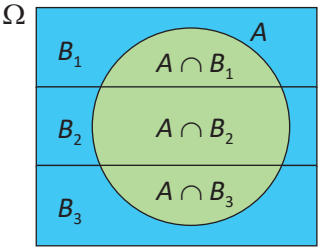
Prawdopodobieństwo, że samochód przejedzie przez te trzy skrzyżowania bez zatrzymania, jest równe 0,21.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Spośród liczb 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3, jeżeli wiadomo, że wylosowana liczba jest parzysta.
2. W czterdziestoosobowej grupie turystów 12 osób zna tylko język angielski, 10 osób – tylko język niemiecki, a 18 osób – zarówno język angielski, jak i niemiecki. Oblicz prawdopodobieństwo wybrania losowo osoby z tej grupy, która zna język niemiecki, jeżeli wiadomo, że zna ona język angielski.
3. W pudełku znajdują się 3 kule białe, 4 kule czerwone i 5 kul niebieskich. Z pudełka wybieramy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej, jeżeli wiadomo, że wylosowana kula nie jest niebieska.
4. Z talii 52 kart losujemy 2 karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kart, które są figurami (figury to: as, król, dama, walet), jeżeli wiadomo, że:
   a) obie karty są kierami
   b) obie karty są czerwone.
5. W danej populacji osób są nosiciele wirusa C-22. Wirus ten jest jedynym czynnikiem powodującym chorobę WX. Na podstawie przeprowadzonych badań ustalono, że 1,28% tej populacji jest nosicielem wirusa C-22. Prawdopodobieństwo zachorowania nosiciela na tę chorobę jest równe 0,375. Oblicz prawdopodobieństwo zachorowania na chorobę WX przez losowo wybraną osobę z danej populacji.
6. Oblicz $P(A|B)$, jeśli wiadomo, że $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A) = \frac{1}{4}$.

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa

Niech rysunek poniżej przedstawia przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω, w której zawiera się zdarzenie A.



Zdarzenia B_1, B_2, B_3 wykluczają się parami oraz $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$. Wówczas zdarzenia:

$A \cap B_1 \quad A \cap B_2 \quad A \cap B_3$

też wykluczają się parami i jednocześnie

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A możemy obliczyć, jako sumę prawdopodobieństw zdarzeń wykluczających się parami

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

Z poprzedniego tematu wiemy, że

$$P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$$

$$P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

$$P(A \cap B_3) = P(A|B_3) \cdot P(B_3)$$

zatem

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)$$

Powyższe rozumowanie prowadzi do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym*

Niech A będzie zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω, zdarzenia B_1, B_2, ..., B_n będą zdarzeniami zawartymi w tej samej przestrzeni Ω, spełniającymi warunki:

1) zdarzenia B_1, B_2, ..., B_n wykluczają się parami
2) $P(B_i) > 0$ dla $i = 1, 2, ..., n$
3) $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$

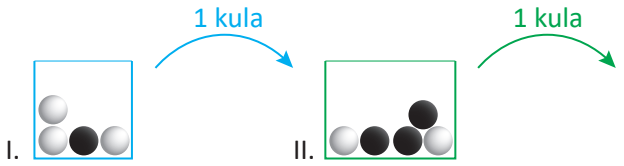
to

$$(*) \qquad P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + ... + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Wzór $(*)$ nazywa się wzorem na prawdopodobieństwo całkowite.

Przykład 1.

W pierwszym pudełku są 3 kule białe i 1 kula czarna, a w drugim pudełku są 3 kule czarne i 2 kule białe. Wyjmujemy losowo jedną kulę z pierwszego pudełka i przekładamy do drugiego pudełka. Następnie mieszamy kule w drugim pudełku i wyjmujemy losowo jedną kulę z tego pudełka.



Obliczymy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiego pudełka.

Doświadczenie losowe jest dwuetapowe,

$\Omega = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$, gdzie

b oznacza wylosowanie kuli białej, c – wylosowanie kuli czarnej.

Zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne.

Oznaczmy zdarzenia:

A – wylosowano z drugiego pudełka kulę białą, $A = \{(b, b), (c, b)\}$

B_1 – wylosowano z pierwszego pudełka kulę białą, $B_1 = \{(b, b), (b, c)\}$

B_2 – wylosowano z pierwszego pudełka kulę czarną, $B_2 = \{(c, b), (c, c)\}$

Wówczas mamy:

$B_1 \cup B_2 = \Omega, \qquad B_1 \cap B_2 = \varnothing$

Z twierdzenia 1. wynika, że

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2).$$

Wiemy, że

$$P(B_1) = \frac{3}{4} \text{ i } P(B_2) = \frac{1}{4}, \quad \text{więc} \quad P(B_1) > 0 \text{ i } P(B_2) > 0$$

Obliczamy $P(A|B_1)$ oraz $P(A|B_2)$.

- Jeśli z pierwszego pudełka wylosowaliśmy kulę białą, to w drugim pudełku przed kolejnym losowaniem będą 3 kule białe i 3 kule czarne. Zatem

$$P(A \mid B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

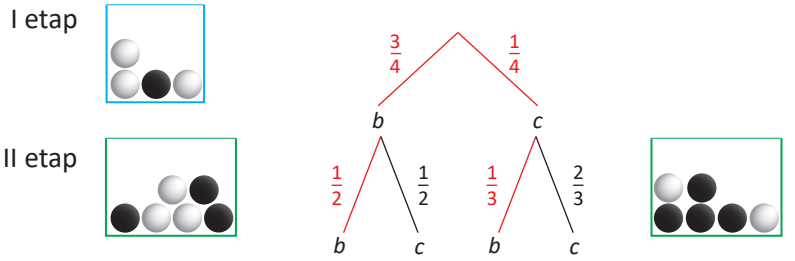
- Jeśli z pierwszego pudełka wylosowaliśmy kulę czarną, to w drugim pudełku przed kolejnym losowaniem będą 2 kule białe i 4 kule czarne. Wówczas

$$P(A \mid B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

Rozwiązanie tego zadania możemy przedstawić na drzewie stochastycznym.



$$P(A)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania z drugiego pudełka kuli białej wynosi $\frac{11}{24}$.

Przykład 2.

Daltonizm to wada wzroku polegająca na zaburzeniu rozpoznawania barwy zielonej i czerwonej. Dotyka ona przeciętnie pięć kobiet na tysiąc i ośmiu mężczyzn na stu. Z licznej grupy osób, w której kobiety stanowią 20%, wylosowano jedną osobę. Obliczymy prawdopodobieństwo wylosowania osoby dotkniętej daltonizmem.

Przyjmujemy oznaczenia zdarzeń.

A – wylosowana osoba dotknięta jest daltonizmem

Oczywiście prawdopodobieństwo zdarzenia A zależy od tego, czy wybrana osoba jest kobietą czy mężczyzną. Zatem

B_1 – wylosowana osoba jest kobietą

B_2 – wylosowana osoba jest mężczyzną

$B_1 \cap B_2 = \varnothing, \quad B_1 \cup B_2 = \Omega$ oraz

$P(B_1)=0{,}2 \quad P(B_1)>0 \qquad P(B_2)=0{,}8 \quad P(B_2)>0$

Spełnione są założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym. Z treści zadania wiemy, że

$P(A|B_1)=0{,}005 \quad P(A|B_2)=0{,}08$ więc

$P(A)=0{,}005\cdot 0{,}2+0{,}08\cdot 0{,}8=0{,}001+0{,}064=0{,}065$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe 0,065.

Zilustrujmy sytuację z przykładu 2. na drzewie. Niech

K – oznacza, że wylosowano kobietę

M – oznacza, że wylosowano mężczyznę

D – oznacza, że wylosowana osoba cierpi na daltonizm

nD – oznacza, że wylosowana osoba nie cierpi na daltonizm

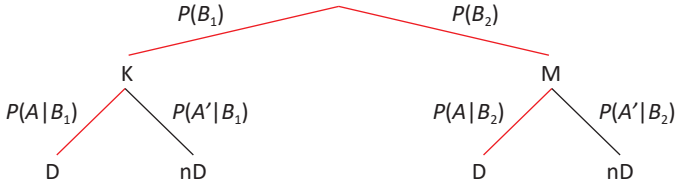
Wówczas

$$\Omega = \{(K, D), (K, nD), (M, D), (M, nD)\}$$

$$B_1 = \{(K, D), (K, nD)\} \qquad B_2 = \{(M, D), (M, nD)\}$$

$$A = \{(K, D), (M, D)\}$$

Rysunek poniżej przedstawia drzewo dla tego doświadczenia.



Załóżmy teraz, że wylosowana osoba okazała się dotknięta daltonizmem. Ile jest wówczas równe prawdopodobieństwo zdarzenia, że ta osoba jest mężczyzną?
To prawdopodobieństwo jest równe $P(B_2|A)$.

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)}$$

Zatem

$$P(B_2 \mid A) = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}8}{0{,}065} = \frac{64}{65}$$

Zauważmy, że postawione wyżej pytanie dotyczy przebiegu doświadczenia losowego w sytuacji, gdy znany jest jego wynik – wylosowano osobę cierpiącą na daltonizm.

Twierdzenie 2.

Niech A będzie zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω, zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ będą zdarzeniami zawartymi w tej samej przestrzeni Ω, spełniającymi warunki:
1) zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wykluczają się parami
2) $P(B_i) > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$
3) $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$

to

$$(**) \qquad P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}, \qquad \text{gdzie}$$

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Wzór $(**)$ nazywa się wzorem Bayesa.

Ćwiczenie 1. Udowodnij twierdzenie 2. korzystając z definicji prawdopodobieństwa warunkowego i twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Przykład 3.

W szufladzie było 5 nowych i 8 używanych piłek do gry w tenisa. Do pierwszej gry wzięto losowo 2 piłki z tej szuflady i po grze włożono je tam z powrotem. Następnie do drugiej gry wzięto losowo 3 piłki z tej szuflady.

a) Obliczymy prawdopodobieństwo wzięcia do drugiej gry trzech nowych piłek.

b) Obliczymy prawdopodobieństwo wzięcia do pierwszej gry dwóch nowych piłek, jeśli do drugiej gry wzięto trzy nowe piłki.

Ad a) Prawdopodobieństwo zdarzenia, które mamy policzyć, zależy od tego, ile nowych piłek wyjęto z szuflady do pierwszej gry.

Oznaczamy zdarzenia:

A – do drugiej gry wzięto 3 piłki nowe

B_1 – do pierwszej gry wzięto 2 piłki nowe

B_2 – do pierwszej gry wzięto 1 piłkę używaną i 1 piłkę nową

B_3 – do pierwszej gry wzięto 2 piłki używane

$$P(B_1)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{13}{2}}=\frac{5}{39} \qquad P(B_2)=\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{13}{2}}=\frac{20}{39} \qquad P(B_3)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{13}{2}}=\frac{14}{39}$$

Zdarzenia B_1, B_2, B_3 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Obliczamy $P(A|B_1)$. Zakładamy, że do pierwszej gry wzięto 2 piłki nowe, zatem po tej grze w szufladzie było 10 piłek używanych i 3 piłki nowe.

$$P(A|B_1)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{13}{3}}=\frac{1}{286}$$

Podobnie obliczamy $P(A|B_2)$ i $P(A|B_3)$. Otrzymujemy

$$P(A|B_2)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{13}{3}}=\frac{4}{286} \qquad P(A|B_3)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}}=\frac{10}{286}$$

Obliczamy $P(A)$.

$$P(A)=\frac{1}{286}\cdot\frac{5}{39}+\frac{4}{286}\cdot\frac{20}{39}+\frac{10}{286}\cdot\frac{14}{39}=\frac{225}{11\,154}=\frac{75}{3718}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{75}{3718}$.

Ad b) Mamy obliczyć prawdopodobieństwo $P(B_1|A)$. Korzystamy ze wzoru Bayesa.

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)}, \quad \text{więc}$$

$$P(B_1|A)=\frac{\frac{1}{286}\cdot\frac{5}{39}}{\frac{75}{3718}}=\frac{1}{286}\cdot\frac{5}{39}\cdot\frac{3718}{75}=\frac{1}{45}$$

Prawdopodobieństwo wzięcia do pierwszej gry 2 nowych piłek, jeśli do drugiej gry wzięto 3 nowe piłki, jest równe $\frac{1}{45}$.

Ćwiczenie 2. Przeanalizuj przykład 1. Załóżmy teraz, że wylosowano z drugiego pudełka kulę białą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: kula wylosowana z pierwszego pudełka była czarna.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. W pierwszym pudełku znajduje się 5 kul niebieskich i 3 kule czerwone, w II pudełku – 4 kule niebieskie i 1 kula czerwona. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadną mniej niż trzy oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka. W przeciwnym przypadku losujemy jedną kulę z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wylosujemy kulę czerwoną.
2. W zakładzie są cztery takie same przyrządy pomiarowe, z których jeden jest rozregulowany. Przy wykonaniu pomiaru sprawnym miernikiem prawdopodobieństwo uzyskania błędu, który przekracza dopuszczalną normę wynosi 0,01. W przypadku rozregulowanego miernika to prawdopodobieństwo jest równe 0,4. Pracownik zakładu wykonał pomiar losowo wziętym miernikiem.
   a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: błąd pomiaru przekroczył dopuszczalną normę.
   b) Wiadomo, że błąd pomiaru przekroczył dopuszczalną normę. Oblicz prawdopodobieństwo, zdarzenia: pracownik wykonał pomiar sprawnym miernikiem.

3. Wśród wyrobów pierwszej i drugiej firmy braki stanowią odpowiednio 5% i 3%. Pierwsza z tych firm dostarcza do hurtowni dwa razy więcej wyrobów niż druga.
   a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: jedna sztuka towaru zakupiona w tej hurtowni okaże się dobra.
   b) Losowo wybrana sztuka towaru w tej hurtowni okazała się dobra. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wybrana sztuka towaru pochodziła z pierwszej firmy.

4. Test wykrywający pewną chorobę jest efektywny w 99% dla osób chorych (tzn., jeśli badany jest chory, test w 99% potwierdza chorobę) i w 98% dla osób zdrowych (tzn., jeśli badany jest zdrowy, test w 98% wyklucza chorobę). W pewnym regionie średnio 150 na 10 000 osób cierpi na tę chorobę.
   a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: test wykonany na losowo wybranej osobie z tego regionu wykluczy u niej chorobę.
   b) U losowo wybranej osoby z tego regionu test wykluczył chorobę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: losowo wybrana osoba cierpi na tę chorobę.

5. Trzy fabryki produkują ten sam rodzaj podzespołu. Stosunek ilościowy produkcji tych fabryk jest równy 5 : 3 : 2. Wiadomo również, że pierwsza fabryka produkuje 75% podzespołów w I gatunku, druga – 80% podzespołów w I gatunku, trzecia – 95% podzespołów w I gatunku. Cała produkcja z tych trzech fabryk trafia do jednej hurtowni. Pracownik hurtowni wybrał losowo jeden podzespół.
   a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wybrany podzespół jest w I gatunku i został wyprodukowany w trzeciej fabryce.
   b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wybrany podzespół jest w I gatunku.
   c) Okazało się, że wybrany podzespół jest w I gatunku. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wybrany podzespół został wyprodukowany w trzeciej fabryce.

6. Fabryka samochodów osobowych wyprodukowała ten sam model samochodu w trzech kolorach: białym, czerwonym i zielonym. Stosunek liczby wyprodukowanych samochodów odpowiednio w tych kolorach był równy 6 : 9 : 5. Prawdopodobieństwo poprawnego położenia powłoki lakierniczej jest równe: dla samochodu białego 0,98, dla samochodu czerwonego 0,96 i dla samochodu zielonego 0,97. Spośród wyprodukowanych samochodów wybrano losowo jeden.
   a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wybrany samochód jest wadliwie polakierowany i jest w kolorze białym.
   b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wybrany samochód jest wadliwie polakierowany.
   c) Okazało się, że wybrany samochód jest wadliwie polakierowany. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wybrany samochód jest w kolorze zielonym.

Niezależność zdarzeń

We wcześniejszym temacie zauważyliśmy, że czasem prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B może być równe prawdopodobieństwu zajścia zdarzenia A. Równość

(1) $\quad P(A|B) = P(A), \quad$ gdzie $P(B) > 0$

można interpretować jako „brak wpływu" zdarzenia B na zdarzenie A lub jako „niezależność" zdarzenia A od zdarzenia B. Warunek (1) można zapisać jako

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A), \quad \text{czyli}$$

(2) $\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Zauważmy też, że jeśli zdarzenie A jest „niezależne" od zdarzenia B, to i zdarzenie B jest „niezależne" od zdarzenia A, o ile $P(A) > 0$. Mamy bowiem

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad /: P(A), \quad P(A) > 0$$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$$

(3) $\quad P(B|A) = P(B)$

Warunek (2) jest symetryczny ze względu na A i B, co pozwala nazwać zdarzenia A i B po prostu – zdarzeniami niezależnymi. Nie wymaga też stosowania dodatkowych założeń. Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 1.

Dwa zdarzenia A, B zawarte w przestrzeni Ω nazywamy **zdarzeniami niezależnymi** tylko wtedy, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

UWAGA: Zdarzeń niezależnych nie należy mylić ze zdarzeniami się wykluczającymi. Zdarzenia wykluczające się A, B zawarte w przestrzeni Ω, o ile $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$ nigdy nie są niezależne. Mamy bowiem

$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0 \quad$ i $\quad P(A) \cdot P(B) > 0, \quad$ czyli

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Przykład 1.

Losujemy z talii 52 kart jedną kartę. Rozpatrzmy zdarzenia:

A – wylosowana karta jest pikiem,

B – wylosowana karta jest asem.

Czy te zdarzenia są niezależne?

Mamy $\overline{\overline{\Omega}} = 52$, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

$A \cap B$ oznacza zdarzenie: wylosowana karta jest asem pik

Mamy: $\overline{\overline{A}}=13$ $\overline{\overline{B}}=4$ $\overline{\overline{A\cap B}}=1$

$$P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4} \qquad P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13} \qquad P(A\cap B)=\frac{1}{52}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{52}, \quad \text{zatem} \quad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Zdarzenia A i B są niezależne.

Przykład 2.

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Rozważmy zdarzenia:
A – w pierwszym rzucie wypadła liczba oczek podzielna przez 3,
B – w drugim rzucie wypadło 5 oczek.
Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Mamy $\overline{\overline{\Omega}}=36$, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

$A=\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$
$B=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}$
$A\cap B=\{(3,5),(6,5)\}$

$\overline{\overline{A}}=12$ $\overline{\overline{B}}=6$ $\overline{\overline{A\cap B}}=2$

$$P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3} \qquad P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \qquad P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}, \quad \text{zatem} \quad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Zdarzenia A i B są niezależne.

Przykład 3.

Doświadczenie losowe polega na:
a) trzykrotnym rzucie symetryczną monetą,
b) dwukrotnym rzucie symetryczną monetą.
Oznaczmy zdarzenia:
A – otrzymaliśmy co najmniej jednego orła i co najmniej jedną reszkę
B – otrzymaliśmy co najwyżej jednego orła.
Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Ad a) Mamy:

$\Omega=\{(O,O,O),(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O),(R,R,O),(R,O,R),(O,R,R),(R,R,R)\}$
$\overline{\overline{\Omega}}=8$, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne

$A=\{(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O),(R,R,O),(R,O,R),(O,R,R)\}$ $\overline{\overline{A}}=6$

$B = \{(R, R, O), (R, O, R), (O, R, R), (R, R, R)\}$ $\quad \overline{\overline{B}} = 4$

$A \cap B = \{(R, R, O), (R, O, R), (O, R, R)\}$ $\quad \overline{\overline{A \cap B}} = 3$

$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$ $\quad P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = P(A \cap B)$

Zdarzenia A i B są niezależne.

Ad b) W tym przypadku mamy:

$\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = 4$, wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne

$A = \{(O, R), (R, O)\}$ $\quad \overline{\overline{A}} = 2$

$B = \{(O, R), (R, O), (R, R)\}$ $\quad \overline{\overline{B}} = 3$

$A \cap B = \{(O, R), (R, O)\}$ $\quad \overline{\overline{A \cap B}} = 2$

$P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{3}{4}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{4}{8}$, zatem $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$

W przypadku dwukrotnego rzutu monetą zdarzenia A i B nie są niezależne.

Twierdzenie 1.

Jeśli P jest prawdopodobieństwem określonym w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, zdarzenia A i B zawarte w tej przestrzeni są zdarzeniami niezależnymi, to również zdarzenia A i B' są zdarzeniami niezależnymi.

Założenie: $A \subset \Omega, B \subset \Omega \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Teza: $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$

Dowód: Zauważmy, że

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ i $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \varnothing$

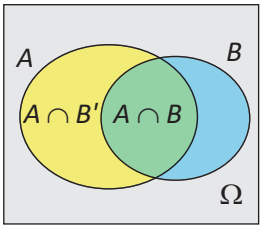
zatem

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$, stąd

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

z założenia

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, więc



$P(A \cap B') = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B')$, co kończy dowód.

Wniosek: Jeśli zdarzenia A, B, gdzie $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, są niezależne, to również zdarzenia A', B' są niezależne.

Omówimy teraz zagadnienie niezależności trzech i więcej niż trzech zdarzeń.

Definicja 2.
Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zawarte w przestrzeni Ω nazywamy **zdarzeniami niezależnymi** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych k spośród nich, gdzie $2 \leqslant k \leqslant n$, prawdopodobieństwo ich iloczynu jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw.

Tak więc trzy zdarzenia A, B, C zawarte w przestrzeni Ω są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie cztery warunki:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \qquad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Pokażemy, że z trzech pierwszych równości nie wynika czwarta równość i odwrotnie – z czwartej równości nie wynikają trzy pierwsze.

Przykład 4.

Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

a) Oznaczmy zdarzenia:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad B = \{3, 4, 5, 6\}$ $\qquad C = \{1, 2, 5, 6\}$

Wówczas

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C) \quad \text{i} \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$$

natomiast

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Zdarzenia A, B, C nie są niezależne, pomimo że są parami niezależne.

b) Oznaczmy zdarzenia

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad B = \{1, 3, 4, 5\}$ $\qquad C = \{1, 6, 7, 8\}$

Zatem

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Natomiast

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$$

Zdarzenia A, B, C nie są niezależne.

Przykład 5.

Sześciu zawodników Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6 oddaje niezależnie po jednym strzale do celu. Prawdopodobieństwo trafienia w cel dla każdego zawodnika jest odpowiednio równe:

0,8 0,7 0,5 0,5 0,4 0,2

a) Które zdarzenie jest bardziej prawdopodobne:
- <u>każdy</u> z zawodników Z_1, Z_3, Z_6 trafi w cel, czy też
- <u>każdy</u> z pozostałych zawodników trafi w cel?

b) Które zdarzenie jest bardziej prawdopodobne:
- <u>co najmniej jeden</u> z zawodników Z_1, Z_3, Z_6 trafi w cel, czy też
- <u>co najmniej jeden</u> z pozostałych zawodników trafi w cel?

Mamy

$\Omega = \{(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) : w_i \in \{T, N\}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

w_i – wynik strzału i-tego zawodnika (trafił w cel (T), nie trafił (N))

Oznaczmy

A_i – zdarzenie: i-ty zawodnik trafił w cel, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$P(A_1) = 0{,}8 \quad P(A_2) = 0{,}7 \quad P(A_3) = 0{,}5 \quad P(A_4) = 0{,}5 \quad P(A_5) = 0{,}4 \quad P(A_6) = 0{,}2$

Ad a) Interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzeń

$A_1 \cap A_3 \cap A_6$ oraz $A_2 \cap A_4 \cap A_5$

Zdarzenia A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 są niezależne, więc otrzymujemy

$P(A_1 \cap A_3 \cap A_6) = P(A_1) \cdot P(A_3) \cdot P(A_6) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$

$P(A_2 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_2) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}14$

Bardziej prawdopodobne jest trafienie w cel przez każdego z zawodników Z_2, Z_4, Z_5.

Ad b) W tym przypadku interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzeń

$A_1 \cup A_3 \cup A_6$ oraz $A_2 \cup A_4 \cup A_5$

<u>I sposób</u> – stosujemy wzór na prawdopodobieństwo sumy trzech zdarzeń

$$P(A_1 \cup A_3 \cup A_6) =$$
$$= P(A_1) + P(A_3) + P(A_6) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_6) - P(A_3 \cap A_6) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_6) =$$
$$= P(A_1) + P(A_3) + P(A_6) - P(A_1) \cdot P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_6) - P(A_3) \cdot P(A_6) + P(A_1) \cdot P(A_3) \cdot P(A_6) =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 - 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}92$$

Postępując podobnie otrzymujemy

$P(A_2 \cup A_4 \cup A_5) = 0{,}91$

<u>II sposób</u> – wyznaczamy zdarzenie przeciwne

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia: co najmniej jeden z zawodników Z_1, Z_3, Z_6 trafi w cel jest zdarzenie: żaden z zawodników Z_1, Z_3, Z_6 nie trafi w cel, co symbolicznie możemy zapisać tak

$A_1' \cap A_3' \cap A_6'$

Mamy

$$P(A_1 \cup A_3 \cup A_6) = 1 - P(A_1' \cap A_3' \cap A_6') = 1 - P(A_1') \cdot P(A_3') \cdot P(A_6') =$$
$$= 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}92$$

Podobnie obliczamy

$$P(A_2 \cup A_4 \cup A_5) = 1 - P(A_2' \cap A_4' \cap A_5') = 1 - P(A_2') \cdot P(A_4') \cdot P(A_5') =$$
$$= 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}91$$

Bardziej prawdopodobne jest trafienie w cel co najmniej raz przez zawodników Z_1, Z_3, Z_6.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Określamy zdarzenia:
   A – na pierwszej kostce wypadła szóstka, B – na drugiej kostce wypadła jedynka. Zbadaj, czy zdarzenia A i B są niezależne.
2. Dwóch strzelców trafia w cel: pierwszy 7 razy na 10 oddanych strzałów, drugi – 6 razy na 10 oddanych strzałów. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) cel został trafiony dwa razy b) cel został trafiony tylko raz.
3. Dwóch egzaminatorów sprawdza niezależnie pracę studenta. Pierwszy egzaminator wykrywa błąd w pracy z prawdopodobieństwem 0,98, a drugi egzaminator – z prawdopodobieństwem 0,85. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: A – błąd w pracy studenta nie zostanie wykryty, B – błąd w pracy studenta zostanie wykryty przez co najmniej jednego egzaminatora.
4. Harcerz ma rozpalić ognisko. Dysponuje dwoma zapałkami. Prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska pojedynczą zapałką jest równe 0,8, a dwoma zapałkami jednocześnie wynosi 0,95. Jak powinien postąpić harcerz: rozpalać ognisko pojedynczymi zapałkami czy od razu dwoma zapałkami jednocześnie, aby prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska było jak największe?
5. Przedsiębiorca chce zakupić urządzenie służące kontroli jakości produkowanych w swoim zakładzie układów elektronicznych. Ma do wyboru dwie opcje. Pierwsza opcja polega na zakupie maszyny typu A, która wykrywa wadliwy układ z prawdopodobieństwem 99%, druga opcja polega na zakupie systemu kilku maszyn typu B, z których każda niezależnie wykrywa wadliwy układ z prawdopodobieństwem 80%. Maszyna typu B jest cztery razy tańsza od maszyny typu A. Która z opcji jest korzystniejsza finansowo dla przedsiębiorcy, jeśli chce, by system kontroli wykrywał wadliwy układ z prawdopodobieństwem co najmniej 99%?

D 6. Wykaż, że jeśli zdarzenia A, B, C zawarte w przestrzeni Ω są niezależne, to również zdarzenia $A \cup B$ i C są niezależne.

Schemat Bernoulliego

Rozważmy doświadczenie losowe, które może skończyć się dwoma wynikami. Jeden z tych wyników będziemy umownie nazywać „sukcesem" i oznaczać literą **S**, a drugi będziemy nazywać umownie „porażką" i oznaczać literą **P**. Takie doświadczenie nazywamy **próbą Bernoulliego**. Prawdopodobieństwo sukcesu będziemy oznaczać literą p, a prawdopodobieństwo porażki – literą q, gdzie $q = 1 - p$.

Przykład 1.

Próbą Bernoulliego jest:

a) rzut symetryczną monetą – sukcesem może być wypadnięcie orła, porażką – wypadnięcie reszki; wówczas $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

b) rzut sześcienną kostką do gry – sukcesem może być wypadnięcie ścianki z pięcioma oczkami, porażką wypadnięcie ścianki z inną liczbą oczek niż pięć; wówczas $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$

c) rzut dwiema sześciennymi kostkami do gry – sukcesem może być wypadnięcie takiej liczby oczek na kostkach, których suma jest równa 4, porażką – wypadnięcie takiej liczby oczek na kostkach, których suma jest różna od 4; wówczas $p = \frac{1}{12}$, $q = \frac{11}{12}$

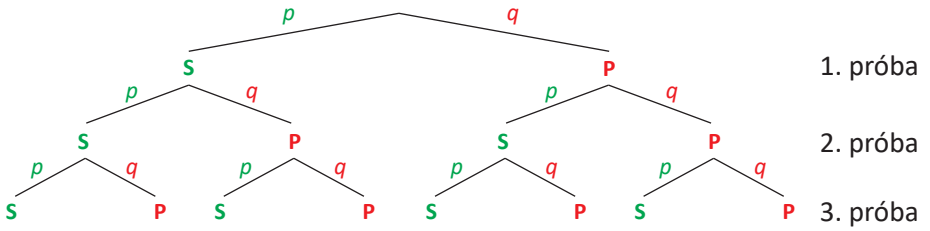
d) losowanie 3 kul z urny zawierającej 5 kul białych i 10 kul czarnych – sukcesem może być wylosowanie co najmniej dwóch kul białych, porażką – wylosowanie co najwyżej jednej kuli białej; wówczas $p = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{10}{1}+\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}$, $q = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{10}{2}+\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$

Jeśli wykonamy serię powtórzeń tej samej próby Bernoulliego, to takie doświadczenie losowe będziemy nazywać schematem Bernoulliego.

Definicja 1.

Schematem Bernoulliego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia losowego, które może zakończyć się jednym z dwóch możliwych wyników zwanych sukcesem lub porażką. Prawdopodobieństwo sukcesu i prawdopodobieństwo porażki w każdym powtórzeniu jest stałe.

Narysujmy drzewo przedstawiające schemat Bernoulliego, składający się z trzech prób, gdzie p jest prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie, a q – prawdopodobieństwem porażki, $q = 1 - p$.



Przestrzeń Ω w tym doświadczeniu składa się z ośmiu zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{(\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}), (\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{P}), (\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{S}), (\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{P}), (\mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{S}), (\mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{P}), (\mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{S}), (\mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{P})\}$$

Interesuje nas liczba sukcesów w tym schemacie. Przyjmijmy oznaczenia:

A_i – zdarzenie: w trzech próbach otrzymaliśmy i sukcesów, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

Wyznaczymy prawdopodobieństwa tych zdarzeń korzystając z drzewa.

Mamy

$$P(A_0) = P\big(\{(\mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{P})\}\big) = q \cdot q \cdot q = q^3 = (1-p)^3$$

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P\big(\{(\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{P}), (\mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{P}), (\mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{S})\}\big) = \\ &= P\big(\{(\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{P})\}\big) + P\big(\{(\mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{P})\}\big) + P\big(\{(\mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{S})\}\big) = \\ &= p \cdot q \cdot q + q \cdot p \cdot q + q \cdot q \cdot p = pq^2 + pq^2 + pq^2 = 3pq^2 = 3p(1-p)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P\big(\{(\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{P}), (\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{S}), (\mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{S})\}\big) = \\ &= P\big(\{(\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{P})\}\big) + P\big(\{(\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{S})\}\big) + P\big(\{(\mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{S})\}\big) = \\ &= p \cdot p \cdot q + p \cdot q \cdot p + q \cdot p \cdot p = p^2q + p^2q + p^2q = 3p^2q = 3p^2(1-p) \end{aligned}$$

$$P(A_3) = P\big(\{(\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S})\}\big) = p \cdot p \cdot p = p^3$$

Zauważ, że:

$$P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = (q+p)^3 = 1^3 = 1$$

Ćwiczenie 1. Prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w pojedynczym rzucie niesymetryczną monetą jest równe $\frac{2}{3}$, a reszki $\frac{1}{3}$. Rzucamy trzykrotnie tą monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwa razy orła.

Korzystanie z drzewa do obliczania prawdopodobieństwa jest wygodne jedynie w przypadku schematów Bernoulliego złożonych z niewielkiej liczby prób. A jak poradzić sobie np. z obliczeniem prawdopodobieństwa otrzymania 4 sukcesów w 10 próbach Bernoulliego? Wyznaczymy wzór, który ułatwi odpowiedź na to pytanie.

Rozważmy schemat Bernoulliego złożony z 10 prób, z prawdopodobieństwem sukcesu równym p w pojedynczej próbie. Niech A oznacza zdarzenie: w 10 próbach Bernoulliego otrzymamy 4 sukcesy. Obliczymy $P(A)$.

Zapiszmy kilka zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A oraz prawdopodobieństwa tych zdarzeń, wyznaczając je podobnie, jak w przypadku schematu Bernoulliego złożonego z trzech prób.
Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A to takie ciągi 10-wyrazowe, w których cztery wyrazy są równe **S**, a pozostałych sześć wyrazów jest równych **P**.

Zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A	Prawdopodobieństwo
$(\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{P})$	$p^4(1-p)^6$
$(\mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{P}, \mathbf{S})$	$p^4(1-p)^6$
$(\mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{P})$	$p^4(1-p)^6$
.....	$p^4(1-p)^6$

Każdemu zdarzeniu elementarnemu sprzyjającemu zdarzeniu A przyporządkowane jest prawdopodobieństwo $p^4(1-p)^6$.
A ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A?
Łatwo stwierdzić, że jest ich:

tyle, ile jest rozmieszczeń 4 sukcesów **S** wśród 10 prób, czyli $\binom{10}{4}$

lub równoważnie

tyle, ile jest rozmieszczeń 6 porażek **P** wśród 10 prób, czyli $\binom{10}{6}$

Pamiętamy, że $\binom{10}{4}=\binom{10}{6}$ $\qquad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$P(A)=\binom{10}{4}p^4(1-p)^6 \quad \text{lub} \quad P(A)=\binom{10}{6}p^4(1-p)^6.$$

Uogólnijmy nasze rozważania.
Rozpatrzmy schemat Bernoulliego złożony z n prób i z prawdopodobieństwem p sukcesu w pojedynczej próbie. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na uzyskaniu k sukcesów w tym doświadczeniu, gdzie $k \leqslant n$.
Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A to n-wyrazowe ciągi, w których k wyrazów jest równych **S**, a pozostałe $n-k$ wyrazy są równe **P**, na przykład:

$$(\underbrace{\mathbf{S},\mathbf{S},\ldots,\mathbf{S}}_{k\text{ razy}},\underbrace{\mathbf{P},\mathbf{P},\ldots,\mathbf{P}}_{n-k\text{ razy}}) \quad \text{lub} \quad (\mathbf{P},\underbrace{\mathbf{S},\mathbf{S},\ldots,\mathbf{S}}_{k\text{ razy}},\underbrace{\mathbf{P},\mathbf{P},\ldots,\mathbf{P}}_{n-k-1\text{ razy}})$$

Każdemu takiemu zdarzeniu elementarnemu przyporządkowane jest prawdopodobieństwo równe

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Tych zdarzeń elementarnych jest tyle, ile możliwości wyboru k miejsc spośród n miejsc, czyli $\binom{n}{k}$. Ostatecznie

$$P(A)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego, $k \leqslant n$, będziemy oznaczać $P(S_n=k)$. Mamy

$$P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Zauważmy jeszcze, że prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych w schemacie n prób Bernoulliego są poprawnie określone, bowiem

$$P(S_n=0)+P(S_n=1)+P(S_n=2)+\ldots+P(S_n=n)=$$
$$=\binom{n}{0}(1-p)^n+\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}+\binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}p^n=\left[(1-p)+p\right]^n=1$$

W ostatnim obliczeniu wykorzystaliśmy wzór dwumianowy Newtona.

Twierdzenie 1.

W schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo $P(S_n=k)$ otrzymania k sukcesów, gdzie $k \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$ i $k \leqslant n$, wyraża się wzorem

$$P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

o ile p jest prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie.

Przykład 2.

Rzucamy 50 razy symetryczną monetą. Obliczymy prawdopodobieństwo otrzymania orła tylko trzy razy.

Doświadczenie losowe jest schematem Bernoulliego o 50 próbach. Sukcesem jest wypadnięcie orła, porażką – wypadnięcie reszki. Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $\frac{1}{2}$, porażki również $\frac{1}{2}$.

Korzystamy z twierdzenia 1. i obliczamy

$$P(S_{50}=3)=\binom{50}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{50-3}=\frac{50!}{47!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{2^{50}}=\frac{19600}{2^{50}}\approx 1{,}74\cdot 10^{-11}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe ok. $1{,}74 \cdot 10^{-11}$.

Przykład 3.

Rzucamy 15 razy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia – sumę oczek na obu kostkach równą 4 otrzymamy:

a) tylko 5 razy,
b) co najmniej raz,
c) co najwyżej dwa razy.

Doświadczenie losowe jest schematem Bernoulliego o 15 próbach. Za sukces uważamy wypadnięcie na obu kostkach takiej liczby oczek, których suma jest równa 4, a wypadnięcie każdej innej liczby oczek – za porażkę.

Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $\frac{1}{12}$. Uzasadnij to dokładnie!

Ad a) Oznaczmy zdarzenie

A – w 15 próbach Bernoulliego otrzymamy tylko 5 sukcesów.

Obliczamy

$$P(A)=P(S_{15}=5)=\binom{15}{5}\left(\frac{1}{12}\right)^5\left(\frac{11}{12}\right)^{10}=\frac{3003\cdot 11^{10}}{12^{15}}\approx 0{,}005$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe ok. 0,005.

Ad b) Oznaczmy zdarzenie

B – w 15 próbach Bernoulliego otrzymamy co najmniej jeden sukces.

W tym przypadku wygodnie jest posłużyć się zdarzeniem przeciwnym.

$$P(B)=P(S_{15}\geqslant 1)=1-P(B')=1-P(S_{15}=0)=$$
$$=1-\binom{15}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^{15}=1-\left(\frac{11}{12}\right)^{15}\approx 0{,}729$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe ok. 0,729.

Ad c) Oznaczmy zdarzenie

C – w 15 próbach Bernoulliego otrzymamy sukces co najwyżej dwa razy.

Zdarzenie C można przedstawić w postaci sumy trzech parami wykluczających się zdarzeń

$$C=C_0\cup C_1\cup C_2,$$

gdzie C_i to zdarzenie: w 15 próbach otrzymamy i sukcesów, $i=0, 1, 2$

Obliczamy

$$P(C)=P(C_0\cup C_1\cup C_2)=P(C_0)+P(C_1)+P(C_2)=P(S_{15}=0)+P(S_{15}=1)+P(S_{15}=2)=$$
$$=\binom{15}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^{15}+\binom{15}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^1\left(\frac{11}{12}\right)^{14}+\binom{15}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^{13}=\frac{391\cdot 11^{13}}{12^{15}}\approx 0{,}876$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe ok. 0,876.

Przykład 4.

W pierwszej urnie jest 6 kul zielonych i 4 czerwone, w drugiej – są 3 kule zielone i 7 czerwonych. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko lub dwa oczka, to losujemy dwie kule z pierwszej urny. Jeśli wypadnie więcej oczek niż dwa, to losujemy dwie kule z drugiej urny. Następnie wkładamy z powrotem wylosowane kule do urny, z której zostały wyjęte. Takie doświadczenie wykonujemy 8 razy. Obliczymy prawdopodobieństwo wylosowania 3 razy dwóch zielonych kul.

Seria 8 doświadczeń jest schematem Bernoulliego. Za sukces przyjmujemy wylosowanie dwóch zielonych kul. Obliczymy prawdopodobieństwo p sukcesu w pojedynczej próbie.

Oznaczmy

A – zdarzenie: wylosowano dwie kule zielone

Prawdopodobieństwo zdarzenia A zależy od tego, z której urny losujemy. Określmy więc zdarzenia:

B_1 – wylosowano pierwszą urnę

B_2 – wylosowano drugą urnę

Mamy

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \quad \text{oraz} \quad B_1 \cup B_2 = \Omega,$$

czyli zdarzenia B_1, B_2 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym i

$$P(B_1)=\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad P(B_2)=\frac{2}{3} \quad \text{ponadto} \quad P(A|B_1)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \quad \text{i} \quad P(A|B_2)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}$$

Tak więc – na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym – mamy

$$p = P(A) = P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

$$p=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{15}{45}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{45}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{45}$$

Mamy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia

C – 3 razy wylosowano dwie kule zielone

Zatem

$$P(C)=P(S_8=3)=\binom{8}{3}\left(\frac{7}{45}\right)^3\left(\frac{38}{45}\right)^5\approx 0{,}091$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe ok. 0,091.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rzucamy 20 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia:
   a) 10 razy b) co najmniej jeden raz
   takiej liczby oczek, która jest liczbą pierwszą.

2. Prawdopodobieństwo trafienia przez strzelca w cel w pojedynczym strzale jest stałe i równe 0,6.
   a) Strzelec oddał 4 strzały do celu. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia w cel co najmniej 3 razy.
   b) Ile co najmniej strzałów do celu musi oddać strzelec, aby prawdopodobieństwo trafienia w cel co najmniej raz było większe od 0,999?

3. Z działa oddano 5 strzałów do celu. Prawdopodobieństwo trafienia w cel w każdym strzale jest równe 0,4. Aby cel został uznany za zniszczony, powinien zostać trafiony co najmniej trzy razy. Oblicz prawdopodobieństwo zniszczenia celu.

4. W urnie jest 6 kul białych i 10 czarnych. Z urny losujemy 3 kule, oglądamy je i z powrotem wrzucamy do urny. Doświadczenie to powtarzamy 8 razy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) 5 razy wylosowano co najmniej jedną kulę białą,
   b) co najmniej raz wylosowano co najmniej jedną kulę białą,
   c) co najwyżej raz wylosowano co najmniej jedną kulę białą.

5. W pierwszej urnie jest 7 białych kul i 3 czarne, w drugiej – 6 białych kul i 4 czarne, w trzeciej – 5 białych kul i 5 czarnych. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko – losujemy dwie kule z pierwszej urny, jeśli dwa lub trzy oczka – losujemy dwie kule z drugiej urny, w pozostałych przypadkach – losujemy dwie kule z trzeciej urny. Oglądamy kule i wkładamy je z powrotem do urny, z której zostały wyjęte. Następnie znów rzucamy kostką i z odpowiedniej urny losujemy dwie kule, które oglądamy, a następnie odkładamy do urny, z której zostały wyjęte. Takie doświadczenie wykonujemy 10 razy. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania 8 razy kul o różnych kolorach.

6. W pierwszej urnie jest 7 białych kul i 3 czarne, w drugiej – 6 białych kul i 4 czarne, w trzeciej – 5 białych kul i 5 czarnych. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko – wybieramy pierwszą urnę, jeśli dwa lub trzy oczka – wybieramy drugą urnę, w pozostałych przypadkach – wybieramy trzecią urnę. Z wybranej urny losujemy 10 razy dwie kule, zwracając je po każdym losowaniu do urny.
   a) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania 8 razy kul o różnych kolorach.
   b) Okazało się, że po 10 losowaniach dwóch kul, 8 razy otrzymaliśmy kule o różnych kolorach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: losowanie odbyło się z trzeciej urny.

Zmienna losowa. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Organizator gry hazardowej ma 10 żetonów ponumerowanych od 1 do 10. Gra polega na wylosowaniu przez gracza jednego żetonu. Żeton z numerem 1 daje wygraną 30 zł, żetony o numerach 2 i 3 dają wygraną po 10 zł, żetony o numerach od 4 do 7 dają wygraną po 2 zł. Ale jeśli gracz wylosuje jeden z trzech ostatnich żetonów, to płaci organizatorowi 20 zł. W zależności od numeru wylosowanego żetonu gracz wygrywa 30 zł, 10 zł lub 2 zł albo przegrywa 20 zł. Powstaje pytanie: czy gra jest korzystna dla gracza, czy dla organizatora tej gry?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, wprowadzimy najpierw pojęcie zmiennej losowej.

Definicja 1.

Niech Ω będzie skończoną przestrzenią zdarzeń elementarnych.
Zmienną losową nazywamy każdą funkcję, która wszystkim zdarzeniom elementarnym z przestrzeni Ω przyporządkowuje pewne liczby rzeczywiste. Każdą przyporządkowaną w ten sposób liczbę rzeczywistą nazywamy wartością zmiennej losowej.

Zmienne losowe oznaczamy zwykle wielkimi literami X, Y, Z.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna losowa X – określona na skończonej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω – przyjmie wartość a, będziemy określać następująco $P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = a\})$ i oznaczać $P(X = a)$, czyli

$$P(X = a) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = a\})$$

Definicja 2.

Rozkładem zmiennej losowej X nazywamy zbiór par mających postać (x_i, p_i), gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz x_i jest wartością zmiennej losowej X, natomiast p_i jest prawdopodobieństwem, z jakim wartość x_i jest przyjmowana, czyli $p_i = P(X = x_i)$.

W rozkładzie zmiennej losowej prawdopodobieństwa $p_1, p_2, \ldots, p_n$ spełniają warunek

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Przykład 1.

Ze zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy jedną liczbę. Podamy wartości zmiennej losowej X, która przyporządkowuje wylosowanej liczbie resztę z dzielenia tej liczby przez 4. Następnie wyznaczymy rozkład zmiennej losowej X.

Wiemy, że $\Omega = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Liczby 4, 5, 6, 7, 8, 9 przy dzieleniu przez 4 dają odpowiednio reszty 0, 1, 2, 3, 0, 1. Zmienna losowa przyjmuje cztery wartości: 0, 1, 2, 3.
Możemy ją przedstawić za pomocą tabeli:

Zdarzenie elementarne	4	5	6	7	8	9
Wartość zmiennej losowej X	0	1	2	3	0	1

lub opisać następująco:
$X(4)=0,\ X(5)=1,\ X(6)=2,\ X(7)=3,\ X(8)=0,\ X(9)=1.$

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Określamy prawdopodobieństwa, z jakimi zmienna losowa X przyjmuje wartości: 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0)=P(\{4,8\})=P(\{4\})+P(\{8\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$$

$$P(X=1)=\frac{2}{6}\qquad P(X=2)=\frac{1}{6}\qquad P(X=3)=\frac{1}{6}$$

Zauważ, że suma tych prawdopodobieństw jest równa 1.
Rozkład zmiennej losowej X jest następujący:

$$\left\{\left(0,\frac{1}{3}\right),\left(1,\frac{1}{3}\right),\left(2,\frac{1}{6}\right),\left(3,\frac{1}{6}\right)\right\}$$

Przykład 2.

W pudełku jest 8 kul: 3 białe i 5 czarnych. Losujemy z pudełka dwie kule. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę wyciągniętych kul białych. Wyznaczymy rozkład tej zmiennej losowej.

Losując dwie kule, możemy:
- nie wylosować ani jednej kuli białej, czyli wylosować dwie kule czarne,
- wylosować jedną kulę białą i jedną czarną,
- wylosować dwie kule białe.

Zatem zmienna losowa X przyjmuje trzy wartości: 0, 1, 2. Mamy:

$$P(X=0)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}\qquad P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28}\qquad P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$$

Rozkład zmiennej losowej X jest następujący:

$$\left\{\left(0,\frac{10}{28}\right),\left(1,\frac{15}{28}\right),\left(2,\frac{3}{28}\right)\right\}$$

Ćwiczenie 1. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem dwie liczby. Niech zmienna losowa *X* oznacza sumę wylosowanych liczb. Podaj rozkład tej zmiennej losowej.

Wróćmy teraz do gry hazardowej, opisanej na początku tego tematu. Możemy ją potraktować jako doświadczenie losowe, w którym przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z 10 elementów,

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{10}\}$, gdzie

ω_i oznacza – wylosowano żeton z numerem *i*, $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Niech zmienna losowa *X* oznacza wysokość wygranej, przy czym przegraną traktujemy jako ujemną wygraną. Wyznaczymy rozkład tej zmiennej.

Każdemu zdarzeniu elementarnemu przyporządkowujemy wygraną w tej grze, zgodnie z tabelą poniżej.

Zdarzenie elementarne	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
Wygrana (zł)	30	10	10	2	2	2	2	–20	–20	–20

Mamy:

$X(\omega_1) = 30$, $X(\omega_2) = X(\omega_3) = 10$, $X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = X(\omega_7) = 2$,

$X(\omega_8) = X(\omega_9) = X(\omega_{10}) = -20$

Zmienna losowa *X* przyjmuje cztery wartości: 30, 10, 2 i –20.

Wyznaczamy prawdopodobieństwa otrzymania tych wartości.

- Prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa *X* przyjmie wartość 30, jest równe prawdopodobieństwu wylosowania żetonu z numerem 1.

$$P(X = 30) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{10}$$

- Prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa *X* przyjmie wartość 10, jest równe prawdopodobieństwu wylosowania żetonu z numerem 2 lub 3.

$$P(X = 10) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) = P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

- Prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa *X* przyjmie wartość 2, jest równe prawdopodobieństwu wylosowania żetonu z numerem 4, 5, 6 lub 7.

$$P(X = 2) = P(\{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}) = P(\{\omega_4\}) + P(\{\omega_5\}) + P(\{\omega_6\}) + P(\{\omega_7\}) = \frac{2}{5}$$

- Prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X przyjmie wartość -20, jest równe prawdopodobieństwu wylosowania żetonu z numerem 8, 9 lub 10.

$$P(X=-20)=P(\{\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\})=\frac{3}{10}$$

Rozkład zmiennej losowej opisującej wygraną w grze hazardowej jest następujący:

$$\left\{\left(30,\frac{1}{10}\right),\left(10,\frac{1}{5}\right),\left(2,\frac{2}{5}\right),\left(-20,\frac{3}{10}\right)\right\}.$$

Ćwiczenie 2. Sprawdź, że suma prawdopodobieństw występujących w powyższym rozkładzie jest równa 1.

Rozkład zmiennej losowej X opisującej wygraną w naszej grze hazardowej pozwala określić i porównać szanse wygrania lub przegrania w tej grze. Nie daje nam jednak odpowiedzi na pytanie, czy ta gra jest korzystna dla gracza, czy dla organizatora tej gry.

Aby ocenić, czy gra jest korzystna dla gracza, obliczymy średnią wartość wygranej, przypadającą na pojedynczy żeton. W tym celu sumujemy wygrane odpowiadające wszystkim żetonom, a następnie uzyskaną sumę dzielimy przez liczbę wszystkich żetonów. Otrzymany wynik oznaczmy przez $\bar{w}$. Mamy

$$\bar{w}=\frac{1\cdot 30+2\cdot 10+4\cdot 2+3\cdot(-20)}{1+2+4+3}=\frac{-2}{10}$$

Wynik obliczeń pokazuje, że średnio na każdy żeton przypada przegrana w wysokości 0,20 zł. Można ten wynik zinterpretować następująco: jeśli gracz zagrałby wielokrotnie w tę samą grę, to średnio w każdym przypadku straciłby około 0,20 zł. Gra jest zatem niekorzystna dla gracza, czyli jest korzystna dla organizatora.

Przyjrzyjmy się jeszcze wykonanym wcześniej obliczeniom.

$$\bar{w}=\frac{1\cdot 30+2\cdot 10+4\cdot 2+3\cdot(-20)}{1+2+4+3}=30\cdot\frac{1}{10}+20\cdot\frac{2}{10}+2\cdot\frac{4}{10}+(-20)\cdot\frac{3}{10}$$

Zauważ, że liczby $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}$ są prawdopodobieństwami, z jakimi można odpowiednio wygrać 30 zł, 20 zł, 2 zł lub przegrać 20 zł w omawianej grze.

To spostrzeżenie prowadzi nas do następującej definicji.

Definicja 3.

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X o rozkładzie

$$\{(x_1,p_1),(x_2,p_2),\ldots,(x_n,p_n)\}$$

nazywamy liczbę EX, gdzie

$$EX=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+\ldots+x_n\cdot p_n$$

Ćwiczenie 3. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wyciągniętych kul białych z przykładu 2. ze str. 209.

Jeśli wartość oczekiwana wygranej w pewnej grze jest równa 0, to taką grę nazywamy **grą sprawiedliwą**.

Przykład 3.

Rozważmy dwie gry, w których wygrane są opisane zmiennymi losowymi X i Y. Sprawdzimy, czy obie gry są sprawiedliwe. Następnie porównamy wysokości wygranych i przegranych w obu grach.

Rozkład zmiennej losowej X	Rozkład zmiennej losowej Y
$\left\{\left(1,\frac{3}{4}\right),\left(-3,\frac{1}{4}\right)\right\}$	$\left\{\left(100,\frac{1}{2}\right),\left(-100,\frac{1}{2}\right)\right\}$

Mamy:

$$EX=1\cdot\frac{3}{4}+(-3)\cdot\frac{1}{4}=0 \quad \text{oraz} \quad EY=100\cdot\frac{1}{2}+(-100)\cdot\frac{1}{2}=0.$$

Obie gry są sprawiedliwe. Ale w przypadku pierwszej gry wygrana lub przegrana jest zbliżona do wartości oczekiwanej. To znaczy, że niewiele możemy przegrać, ale też niewiele możemy wygrać. W przypadku drugiej gry zarówno wygrana, jak i przegrana są bardzo oddalone od wartości oczekiwanej. Zatem dużo można wygrać, ale i dużo można przegrać.

Wielkością charakteryzującą stopień rozproszenia wartości zmiennej losowej, wokół wartości oczekiwanej tej zmiennej, jest odchylenie standardowe, które zdefiniujemy za pomocą wariancji.

Definicja 4.

Niech zmienna losowa X ma następujący rozkład $\{(x_1,p_1),(x_2,p_2),\ldots,(x_n,p_n)\}$,

EX jest wartością oczekiwaną tej zmiennej.

1) **Wariancją zmiennej losowej** X nazywamy liczbę, którą oznaczamy D^2X, gdzie

$$D^2X=(x_1-EX)^2\cdot p_1+(x_2-EX)^2\cdot p_2+\ldots+(x_n-EX)^2\cdot p_n$$

2) **Odchyleniem standardowym zmiennej losowej** X nazywamy liczbę, którą oznaczamy σ_X, równą pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji zmiennej losowej X,

$$\sigma_X=\sqrt{(x_1-EX)^2\cdot p_1+(x_2-EX)^2\cdot p_2+\ldots+(x_n-EX)^2\cdot p_n}$$

UWAGA: Odchylenie standardowe zmiennej losowej X opisującej wygraną w grze można traktować jako miarę ryzyka. Im większe jest odchylenie standardowe, tym gra jest bardziej ryzykowna.

Przykład 4.

Obliczymy wariancję i odchylenie standardowe wygranych opisanych w przykładzie 3.

Korzystamy z definicji 4.

$$D^2X=(1-0)^2\cdot\frac{3}{4}+(-3-0)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{12}{4}=3 \qquad \sigma_X=\sqrt{3}$$

$$D^2Y=(100-0)^2\cdot\frac{1}{2}+(-100-0)^2\cdot\frac{1}{2}=10000 \qquad \sigma_Y=100$$

Przykład 5.

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie niesymetryczną monetą. Prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w jednym rzucie jest równe $\frac{2}{3}$. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie orłów otrzymanych w tych czterech rzutach. Wyznaczymy rozkład tej zmiennej losowej. Obliczymy wartość oczekiwaną liczby orłów otrzymanych w czterech rzutach.

W czterech rzutach liczba orłów może być równa: 0 lub 1, lub 2, lub 3, lub 4. Zatem zmienna losowa X przyjmuje pięć wartości: 0, 1, 2, 3, 4. Wyznaczymy prawdopodobieństwa przypisane tym wartościom.

Zauważ, że opisane doświadczenie jest schematem Bernoulliego, złożonym z czterech prób. Sukcesem w pojedynczej próbie jest wypadnięcie orła, a porażką – wypadnięcie reszki. Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $\frac{2}{3}$, a porażki wynosi $\frac{1}{3}$.

Korzystamy ze wzoru na liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego i otrzymujemy:

$$P(X=0)=P(S_4=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

$$P(X=1)=P(S_4=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$$

$$P(X=2)=P(S_4=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

$$P(X=3)=P(S_4=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

$$P(X=4)=P(S_4=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{16}{81}$$

Rozkład zmiennej losowej X jest następujący

$$\left\{\left(0,\frac{1}{81}\right),\left(1,\frac{8}{81}\right),\left(2,\frac{24}{81}\right),\left(3,\frac{32}{81}\right),\left(4,\frac{16}{81}\right)\right\}$$

Obliczamy wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

$$EX=0\cdot\frac{1}{81}+1\cdot\frac{8}{81}+2\cdot\frac{24}{81}+3\cdot\frac{32}{81}+4\cdot\frac{16}{81}=\frac{8+48+96+64}{81}=2\frac{2}{3}$$

Wyznaczony rozkład w przykładzie 5. jest przykładem rozkładu dwumianowego, nazywanego też rozkładem Bernoulliego.

Rozkładem dwumianowym (rozkładem Bernoulliego) nazywamy następujący rozkład zmiennej losowej:

$$\left\{\left(0,\binom{n}{0}p^0(1-p)^n\right),\left(1,\binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1}\right),\ldots,\left(n,\binom{n}{n}p^n(1-p)^0\right)\right\},$$

gdzie p jest dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0, 1)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Wyznacz rozkład zmiennej losowej:
   a) X – oznaczającej sumę liczb uzyskanych oczek,
   b) Y – oznaczającej nieujemną różnicę liczb otrzymanych oczek.
2. W szufladzie znajdują się 4 skarpetki białe, 2 zielone i 6 skarpetek czarnych. Wyciągamy losowo trzy skarpetki. Wyznacz rozkład zmiennej losowej:
   a) X – oznaczającej liczbę skarpetek czarnych,
   b) Y – oznaczającej liczbę skarpetek zielonych.
3. W pudełku jest 100 losów: trzy losy dają wygraną po 50 zł, cztery losy dają wygraną po 10 zł, a jeden los powoduje, że musimy zapłacić 200 zł. Pozostałe losy są puste. Wyciągamy losowo jeden los. Zmienna losowa X oznacza uzyskaną wygraną. Znajdź rozkład tej zmiennej losowej i wartość oczekiwaną wygranej.

4. Mamy dwie gry. W pierwszej grze rzucamy jeden raz czworościenną kostką, której ścianki są oznaczone liczbami: 1, 2, 3, –4, po jednej liczbie na każdej ściance. W drugiej grze wykonujemy rzut czworościenną kostką, na ściankach której są liczby: 2, 2, 2, –4, również po jednej liczbie na każdej ściance. W każdej grze wygrywamy tyle złotych, ile wypadło na wylosowanej ściance.
   a) Porównaj wartości oczekiwane wygranej w obu grach. Czy gry są sprawiedliwe?
   b) Którą kostką gra jest bardziej ryzykowna? Odpowiedź uzasadnij.

5. Rzucamy trzema monetami. Jeśli wypadnie co najmniej jeden orzeł, to wygrywamy taką liczbę złotych, która jest iloczynem liczby 2 i liczby otrzymanych orłów. Jeśli wypadną same reszki, to przegrywamy 24 zł.
   a) Jaka jest wartość oczekiwana wygranej w tej grze? Czy gra jest sprawiedliwa?
   b) O ile, średnio, będzie odchylał się wynik wygranej w tej grze od wartości oczekiwanej?

6. Strzelec ma trzy naboje. Strzela do tarczy do pierwszego trafienia lub do wyczerpania nabojów. Oddając jeden strzał, strzelec trafia w cel z prawdopodobieństwem 0,7. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie wystrzelonych naboi. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i wartość oczekiwaną tej zmiennej.

7. W woreczku są cztery losy: trzy przegrywające i jeden wygrywający. Wyciągamy losowo losy z woreczka, aż do momentu otrzymania losu wygrywającego. Za każdy wyciągnięty los płacimy 5 zł. Niech zmienna losowa X oznacza kwotę, którą zapłacimy za wyciągnięte losy. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i wartość oczekiwaną tej zmiennej.

8. Z talii 24 kart – złożonej z 4 asów, 4 króli, 4 dam, 4 waletów, 4 dziesiątek i 4 dziewiątek – losujemy 4 karty. Zmienna losowa X jest liczbą wyciągniętych asów. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i wartość oczekiwaną tej zmiennej.

9. Rzucamy 7 razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Zmienna losowa X oznacza liczbę wyrzuconych ścianek z sześcioma oczkami. Wyznacz rozkład tej zmiennej losowej.

10. W pojemniku są 4 kule białe i 4 kule czarne. Z pojemnika losujemy dwie kule, oglądamy je i wkładamy z powrotem do tego pojemnika. Takie doświadczenie wykonujemy 5 razy. Zmienna losowa X jest liczbą par kul białych. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4.

Test

1. W pewnej klasie jest o 25% więcej dziewcząt niż chłopców. Wybieramy losowo jedną osobę z tej klasy. Prawdopodobieństwo wyboru chłopca jest równe:

   A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{4}{9}$

2. Ze zbioru liczb $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 20\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Prawdopodobieństwo zdarzenia: wybrano liczbę podzielną przez 3 lub przez 4, jest równe:

   A. 0,5 B. $\frac{11}{21}$ C. 0,6 D. 0,65

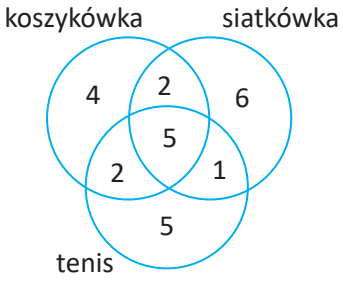
3. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* są kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Wybieramy losowo dwa wierzchołki. Prawdopodobieństwo zdarzenia: wylosowane punkty są końcami przekątnej kwadratu *ABCD*, jest równe:

   A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

4. Rzucamy dwa razy czworościenną kostką do gry z cyframi 1, 2, 3, 4 na poszczególnych ściankach i tworzymy z wylosowanych cyfr liczbę dwucyfrową. Prawdopodobieństwo zdarzenia: otrzymana liczba nie jest podzielna przez 3, wynosi:

   A. $\frac{11}{16}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{13}{16}$

5. Wszyscy uczniowie klasy sportowej uprawiają co najmniej jedną z trzech dyscyplin sportowych: koszykówkę, siatkówkę lub tenis, zgodnie z przedstawionym diagramem. Wybieramy losowo jednego ucznia z tej klasy. Prawdopodobieństwo wybrania ucznia, który uprawia co najwyżej dwie dyscypliny, jest równe:



   A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$

   C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

6. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zdarzenia: co najmniej raz wypadnie ścianka z sześcioma oczkami, jest równe:

   A. $\frac{1}{72}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{17}{18}$ D. $\frac{91}{216}$

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

7. Na sześciennej kostce mamy jedną ściankę z jednym oczkiem, dwie ścianki z dwoma oczkami i trzy ścianki z trzema oczkami. Rzucamy jeden raz tą kostką. Wartość oczekiwana liczby otrzymanych oczek jest równa:

A. $1\frac{2}{3}$ B. 2 C. $2\frac{1}{3}$ D. $2\frac{2}{3}$

Zadania otwarte

8. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – w pierwszym rzucie wypadła większa liczba oczek, niż w drugim rzucie,
   b) B – co najwyżej raz wypadło sześć oczek,
   c) C – tylko w jednym rzucie wypadła nieparzysta liczba oczek,
   d) D – co najmniej w jednym rzucie wypadło co najmniej 5 oczek.

9. Rzucamy 7 razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – co najmniej raz wypadł orzeł b) B – co najwyżej raz wypadła reszka.

10. Pięć książek, wśród których są książki A i B, ustawiamy na półce w jednym rzędzie. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
    a) A – książki A i B będą stały na jednym z końców rzędu w dowolnej kolejności,
    b) B – pomiędzy książkami A i B będzie stała jedna książka.

11. Budynek ma parter i 10 pięter. Do windy na parterze wsiadły cztery osoby i w sposób losowy wysiadają na piętrach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
    a) A – każda osoba wysiądzie na innym piętrze,
    b) B – każda z tych osób wysiądzie na piątym lub szóstym piętrze.

12. Ze zbioru liczb $\{100, 101, 102, \ldots, 2023\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3 lub przez 5.

13. W pewnej klasie 40% uczniów stanowią dziewczęta. Wybieramy w sposób losowy kolejno dwie osoby z tej klasy. Ilu jest wszystkich uczniów w klasie, jeśli prawdopodobieństwo wyboru najpierw dziewczyny, a potem chłopca jest równe $\frac{36}{145}$?

14. Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Losujemy jedną liczbę ze zbioru A i jedną liczbę ze zbioru B. Oblicz wartość oczekiwaną sumy wylosowanych liczb.

15. Loteria składa się z 40 losów: 5 losów umożliwiających wygranie po 20 zł, 10 losów dających wygraną po 10 zł i 25 losów pustych. Wybieramy losowo dwa losy.
    a) Oblicz prawdopodobieństwo wygrania co najmniej 20 zł.
    b) Oblicz wartość oczekiwaną wygranej.

16. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek nie jest podzielna przez 4.

17. Z talii 52 kart losujemy 4 karty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – wśród wylosowanych kart są co najmniej dwa asy i tylko jeden król,
   b) B – tylko dwie wylosowane karty są w jednakowym kolorze, a pozostałe dwie są w różnych kolorach.

18. Do koła fotograficznego należą uczniowie klas czwartych, zgodnie z danymi zamieszczonymi w tabeli obok. Wybrano losowo jedną osobę z tej grupy.

Klasa	IVa	IVb	IVc
Dziewczęta	4	3	2
Chłopcy	1	2	3

   Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – wylosowano dziewczynę, jeśli wiadomo, że wybrana osoba nie jest z klasy IVc,
   b) B – wylosowano osobę z klasy IVc, jeśli wiadomo, że jest to chłopak.

19. Rzucamy 5 razy dwiema kostkami sześciennymi do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
   a) A – iloczyn oczek równy 12 uzyskano 3 razy,
   b) B – co najwyżej dwa razy uzyskano iloczyn oczek większy od 10 i jednocześnie mniejszy od 20.

20. Wiadomo, że $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, oraz $P(A') = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}7$ i $P(A \cup B) = 0{,}82$. Oblicz $P(A|B)$. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

21. Zestaw egzaminacyjny składa się z 35 tematów z analizy matematycznej, 25 tematów z geometrii i n tematów z rachunku prawdopodobieństwa. Z zestawu usunięto losowo jeden temat. Następnie z pozostałych tematów losujemy jeden temat. Oblicz n, wiedząc, że prawdopodobieństwo wylosowania tematu z rachunku prawdopodobieństwa jest równe $\frac{7}{27}$.

22. Wśród wyrobów pierwszej i drugiej fabryki sztuki wadliwe stanowią odpowiednio 10% i 4%. Pierwsza fabryka dostarcza do hurtowni dwa razy więcej towaru niż druga. Losowo zakupiona w hurtowni sztuka towaru okazała się dobra. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: zakupiona sztuka towaru pochodziła z pierwszej fabryki.

23. W pojedynczym rzucie niesymetryczną monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest cztery razy większe od prawdopodobieństwa wyrzucenia reszki. Rzucamy cztery razy tą monetą. Niech X oznacza zmienną losową opisującą liczbę otrzymanych orłów. Podaj rozkład, wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

5. Geometria przestrzenna. Wielościany

Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne

W rozdziale tym zajmiemy się figurami umieszczonymi w przestrzeni trójwymiarowej. Podobnie jak w przypadku geometrii na płaszczyźnie – punktem wyjścia do rozważań w geometrii przestrzennej są aksjomaty. Określają one własności tzw. pojęć pierwotnych: punktów, prostych, płaszczyzn. Oto przykłady aksjomatów:

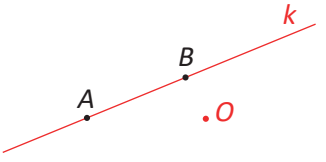
A1. W przestrzeni istnieje co najmniej jedna płaszczyzna. Dla każdej płaszczyzny istnieje co najmniej jeden punkt, który do niej nie należy.
A2. Przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej przechodzi tylko jedna płaszczyzna.
A3. Każda płaszczyzna ma wszystkie własności przyjęte w geometrii płaskiej.
A4. Jeśli dwie różne płaszczyzny mają punkt wspólny, to mają wspólną prostą.
A5. Jeśli dwa różne punkty prostej leżą na płaszczyźnie, to cała prosta leży na płaszczyźnie.

Płaszczyzny będziemy oznaczać tak: π, π_1, π_2, … Jeśli punkty A, B, C nie będą leżeć na jednej prostej, to zapis: płaszczyzna (ABC) lub pł. (ABC) będzie oznaczać płaszczyznę przechodzącą przez punkty A, B, C; czasami też zamiast pisać na przykład: płaszczyzna, w której zawiera się kwadrat $ABCD$, będziemy stosować krótszy zapis: płaszczyzna $(ABCD)$.

Bezpośrednio z aksjomatów wynika, na przykład, następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Prosta i punkt nieleżący na tej prostej wyznaczają tylko jedną płaszczyznę.

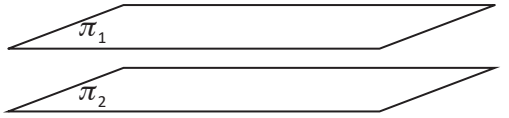
Założenie:
dana jest prosta k i punkt O
$O \notin k$ oraz
punkty A, B, gdzie $A \in k$, $B \in k$
Teza:
prosta k i punkt O wyznaczają
tylko jedną płaszczyznę



Dowód: Z założenia wynika, że punkty A, B, O nie leżą na jednej prostej, zatem – zgodnie z aksjomatem A2 – przechodzi przez nie płaszczyzna. Oznaczmy ją przez π. Punkty A, B leżą na płaszczyźnie π, więc – zgodnie z aksjomatem A5 – prosta k leży na płaszczyźnie π. Płaszczyzna π jest jedyną płaszczyzną, na której leży prosta k i punkt O. Gdyby bowiem inna płaszczyzna π_1 też zawierała prostą k i punkt O, to – w szczególności – zawierałaby też punkty A i B. Ale punkty A, B, O wyznaczają tylko jedną płaszczyznę, więc płaszczyzna π_1 pokryłaby się z płaszczyzną π.

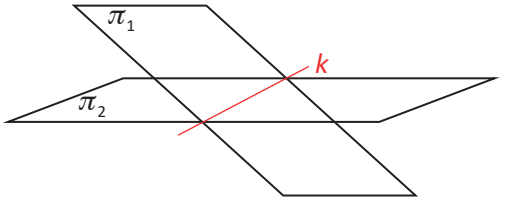
Omówimy teraz wzajemne położenie dwóch różnych płaszczyzn w przestrzeni:

1) płaszczyzny nie mają punktów wspólnych;



$\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$

2) płaszczyzny mają punkt wspólny, a zatem – zgodnie z aksjomatem A4 – mają wspólną prostą.



$\pi_1 \cap \pi_2 = k$

Dwie płaszczyzny, których częścią wspólną jest prosta, nazywamy **płaszczyznami przecinającymi się**, a wspólną prostą – **krawędzią przecięcia**.

Inne położenie dwóch różnych płaszczyzn nie jest możliwe. Gdyby dwie płaszczyzny miały, oprócz wspólnej prostej, jeszcze jeden punkt wspólny (nie leżący na tej prostej), to znaczy, że miałyby w szczególności trzy niewspółliniowe punkty wspólne, więc – zgodnie z aksjomatem A2 – pokrywałyby się.

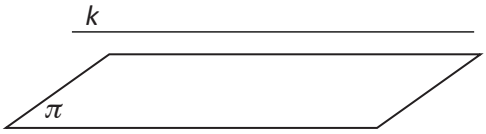
Definicja 1.

Płaszczyznami równoległymi nazywamy płaszczyzny, których częścią wspólną jest zbiór pusty lub cała płaszczyzna.

Ćwiczenie 1. Narysuj w zeszycie płaszczyzny π i π_1 równoległe do siebie oraz prostą k leżącą na płaszczyźnie π. Określ położenie prostej k względem płaszczyzny π_1.

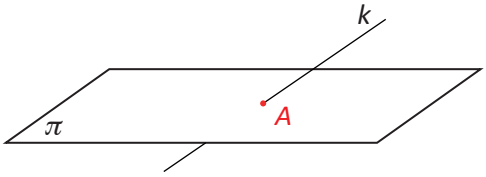
Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni

1) Prosta nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną.



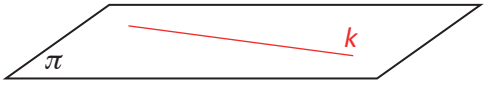
$\pi \cap k = \emptyset$

2) Prosta ma tylko jeden punkt wspólny z płaszczyzną; o takiej prostej powiemy, że przebija płaszczyznę.



$\pi \cap k = \{A\}$

3) Prosta ma dwa punkty wspólne, a zatem – zgodnie z aksjomatem A5 – wszystkie punkty wspólne z płaszczyzną. O takiej prostej mówimy, że leży na płaszczyźnie lub zawiera się w płaszczyźnie.



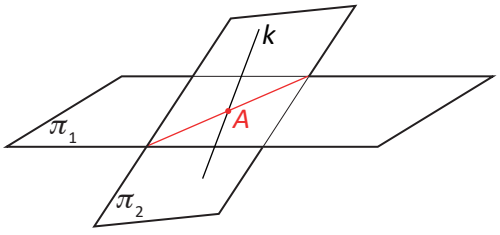
$k \subset \pi$

Definicja 2.
Prosta jest **równoległa do płaszczyzny** π, jeśli nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π lub leży na płaszczyźnie π.

Ćwiczenie 2. Narysuj w zeszycie dwie przecinające się płaszczyzny. Zaznacz krawędź przecięcia tych płaszczyzn. Do jednej z tych płaszczyzn należy prosta k. Określ położenie prostej k względem drugiej płaszczyzny, jeśli:
a) prosta k nie jest równoległa do krawędzi przecięcia obu płaszczyzn,
b) prosta k jest równoległa do krawędzi przecięcia obu płaszczyzn.

Przykład 1.

Wykażemy, że jeśli prosta k przebija płaszczyznę π_1, to punkt przebicia leży na krawędzi przecięcia płaszczyzny π_1 i dowolnej płaszczyzny π_2 zawierającej prostą k.

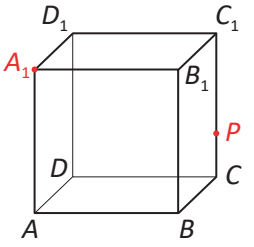


Niech prosta k przebija płaszczyznę π_1 w punkcie, który oznaczymy A. Punkt A należy więc do płaszczyzny π_1, należy też do płaszczyzny π_2, ponieważ prosta k zawiera się w płaszczyźnie π_2. Zatem punkt A należy do części wspólnej płaszczyzn π_1 i π_2.

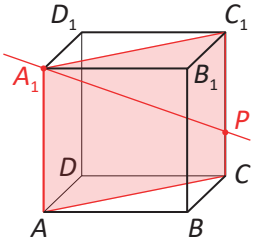
Częścią wspólną tych płaszczyzn jest krawędź ich przecięcia. Tak więc punkt A należy do krawędzi przecięcia płaszczyzn π_1 i π_2.

Przykład 2.

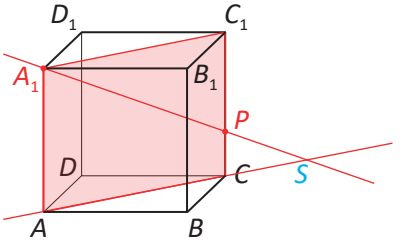
Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$, jak na rysunku obok. Punkt P należy do krawędzi CC_1, $P \neq C_1$. Wyznaczymy punkt S, w którym prosta A_1P przebija płaszczyznę $(ABCD)$.



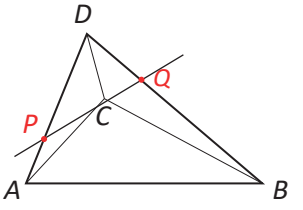
Korzystamy z przykładu 1. Zauważmy, że prosta A_1P zawiera się, na przykład, w płaszczyźnie (A_1ACC_1). Krawędzią przecięcia płaszczyzn (A_1ACC_1) i $(ABCD)$ jest prosta AC. Zatem prosta A_1P przebije płaszczyznę $(ABCD)$ w punkcie leżącym na prostej AC.



Punkt S jest punktem, w którym prosta A_1P przebija płaszczyznę $(ABCD)$.



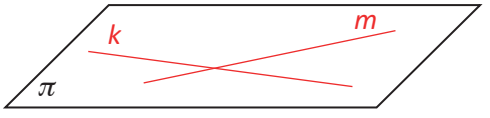
Ćwiczenie 3. Punkty A, B, C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie. Punkt P należy do odcinka AD, punkt Q należy do odcinka BD (zobacz rysunek obok). Wyznacz punkt, w którym prosta PQ przebija płaszczyznę (ABC).



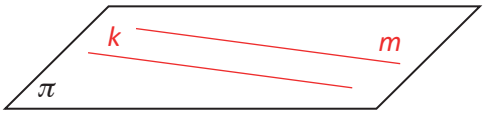
Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

1) Istnieje płaszczyzna zawierająca dwie dane proste, wówczas:

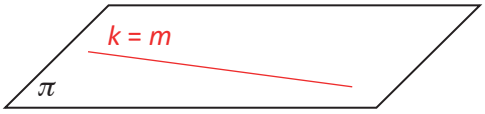
- proste przecinają się, czyli mają tylko jeden punkt wspólny



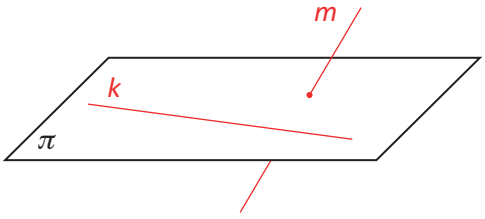
- proste są równoległe i nie mają punktów wspólnych



- proste są równoległe i się pokrywają.

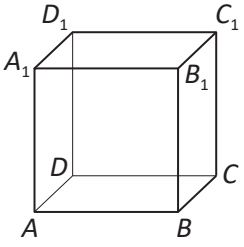


2) Nie istnieje płaszczyzna zawierająca dwie dane proste, wówczas te proste nazywamy **prostymi skośnymi**.



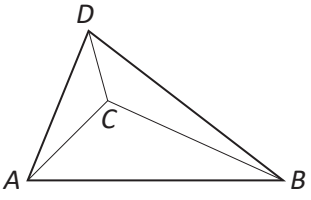
Przykład 3.

Rozważmy proste wyznaczone przez wierzchołki sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ przedstawionego na rysunku obok.



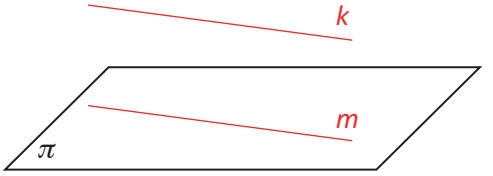
Wybrane proste skośne	Wybrane proste równoległe	Wybrane proste przecinające się
pr. AD i pr. BB_1 pr. AD_1 i pr. CC_1 pr. DB_1 i pr. AA_1	pr. AA_1 i pr. CC_1 pr. AB_1 i pr. DC_1 pr. BD i pr. B_1D_1	pr. DC i pr. BC pr. AC i pr. BD pr. AC_1 i pr. A_1C

Ćwiczenie 4. Punkty A, B, C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie, jak na rysunku obok. Wskaż pary prostych skośnych, wyznaczonych przez te punkty.



Twierdzenie 2.
Jeśli proste k i m są do siebie równoległe, to prosta k jest równoległa do każdej płaszczyzny zawierającej prostą m.

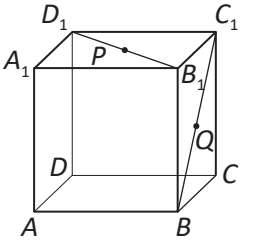
Założenie:
dane są proste k, m i płaszczyzna π
$k \parallel m$
$m \subset \pi$
Teza:
$k \parallel \pi$



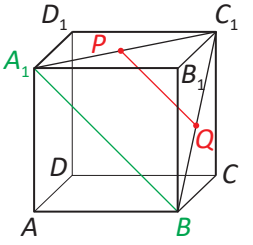
Dowód: Jeśli prosta k leży na płaszczyźnie π, to teza jest oczywista. Rozważmy przypadek, gdy prosta k nie zawiera się w płaszczyźnie π. Wówczas wystarczy pokazać, że $k \cap \pi = \emptyset$. Rozważmy płaszczyznę π_1 wyznaczoną przez proste k i m. Ta płaszczyzna przecina płaszczyznę π. Krawędzią tego przecięcia jest prosta m. Gdyby prosta k przecinała płaszczyznę π, to punkt przecięcia leżałby na krawędzi m. Ale to jest niemożliwe, bo z założenia $k \parallel m$. Zatem $k \cap \pi = \emptyset$, co znaczy, że $k \parallel \pi$.

Przykład 4.

Dany jest sześcian, jak na rysunku obok. Punkty P, Q są środkami odcinków B_1D_1 i BC_1. Wykażemy, że prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny (ABB_1A_1).



Dowód: Rozważmy trójkąt wyznaczony przez punkty A_1, B, C_1. Punkt P jest środkiem boku A_1C_1 (dlaczego?). Punkt Q jest środkiem odcinka BC_1 (z założenia). Z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta wynika, że
$PQ \parallel A_1B$.
To znaczy, że
pr. $PQ \parallel$ pr. A_1B
Prosta A_1B leży na płaszczyźnie (ABB_1A_1). Zatem na mocy twierdzenia 2. prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny (ABB_1A_1).



W dalszej części działu będziemy też stosować następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3.
Dwie przecinające się proste wyznaczają tylko jedną płaszczyznę.

Twierdzenie 4.
Przez dowolny punkt przestrzeni można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej.

Twierdzenie 5.
Jeśli w przestrzeni dane są trzy proste i dwie z tych prostych są równoległe do trzeciej prostej, to są również do siebie równoległe.

Ćwiczenie 5. Narysuj w zeszycie rysunki ilustrujące trzy ostatnie twierdzenia.

UWAGA: Może się wydawać, że ostatnie twierdzenie jest oczywiste. Przecież taką samą własność miały trzy proste leżące na jednej płaszczyźnie. Jednak nie wszystkie własności prostych, które były prawdziwe na płaszczyźnie, przenoszą się na własności prostych w przestrzeni. Oto przykład:

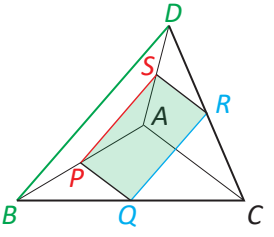
- dla trzech prostych k, l, m leżących na płaszczyźnie prawdziwe jest następujące stwierdzenie:
  Jeśli proste k, l są prostopadłe do prostej m, to proste k, l są do siebie równoległe.
- dla prostych k, l, m położonych w przestrzeni powyższe stwierdzenie jest fałszywe. Otóż, jeśli proste k, l, m są położone w przestrzeni oraz proste k, l są prostopadłe do prostej m, to proste k, l mogą:
  a) przecinać się pod dowolnym kątem,
  b) być równoległe,
  c) być skośne.

Ćwiczenie 6. Narysuj w zeszycie sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Niech odcinek DD_1 zawiera się w prostej m. Podaj przykład prostych k i l, poprowadzonych przez wierzchołki tego sześcianu, które są prostopadłe do prostej m i jednocześnie:
a) się przecinają b) są równoległe c) są skośne.

Kolejny przykład pokaże zastosowanie twierdzenia 5.

Przykład 5.

Punkty A, B, C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie. Ponadto punkty P, Q, R, S są odpowiednio środkami odcinków AB, BC, CD i AD (jak na rysunku obok). Wykażemy, że czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem.



Dowód: Aby stwierdzić, że czworokąt *PQRS* jest równoległobokiem, wystarczy pokazać, że przeciwległe boki w tym czworokącie są do siebie równoległe i mają jednakową długość.
Rozważmy trójkąt *ABD*. Z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta wynika, że

$$SP \parallel DB \quad \text{oraz} \quad |SP| = \frac{1}{2}|DB|$$

Podobnie w trójkącie *BCD* otrzymujemy:

$$RQ \parallel DB \quad \text{oraz} \quad |RQ| = \frac{1}{2}|DB|$$

Mamy

$$SP \parallel DB \quad \text{i} \quad RQ \parallel DB$$

Z twierdzenia 5. wynika, że

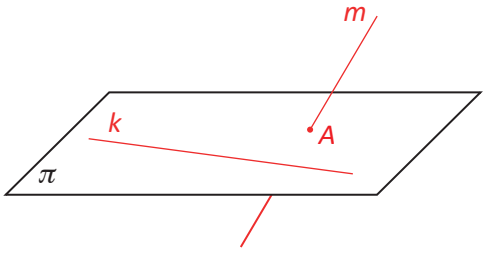
$$SP \parallel RQ$$

Dodatkowo otrzymaliśmy, że $|SP| = \frac{1}{2}|DB| = |RQ|$.

Przeciwległe boki *SP* i *RQ* rozważanego czworokąta są do siebie równoległe i mają jednakową długość. To znaczy, że czworokąt *PQRS* jest równoległobokiem.

Kolejne dwa twierdzenia charakteryzują proste skośne.

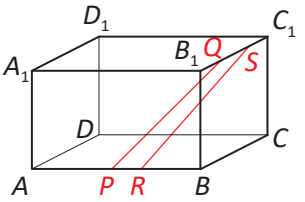
Twierdzenie 6.
Jeśli jedna prosta leży na płaszczyźnie, a druga prosta przebija tę płaszczyznę w punkcie nienależącym do pierwszej prostej, to te proste są skośne.



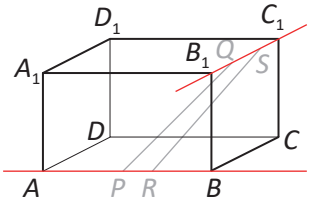
Szkic dowodu (nie wprost): Niech prosta *k* leży na płaszczyźnie π, a prosta *m* przebija płaszczyznę π w punkcie *A*, nienależącym do prostej *k*. Załóżmy, że istnieje płaszczyzna π_1, w której leżą proste *k* i *m*. W szczególności, na płaszczyźnie π_1 leży prosta *k* i punkt *A*. Ale istnieje tylko jedna płaszczyzna wyznaczona przez prostą i punkt nieleżący na niej (twierdzenie 1.) – jest to płaszczyzna π. Zatem płaszczyzny π_1 i π się pokrywają. To prowadzi do sprzeczności z założeniem, że prosta *m* przebija płaszczyznę π.

Przykład 6.

Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (zobacz rysunek obok). Na odcinku AB wybrano dowolnie dwa punkty P, R, a na odcinku B_1C_1 wybrano dwa punkty Q, S. Wykażemy, że proste PQ i RS są skośne.



Proste AB i B_1C_1 są skośne (uzasadnij to dokładnie, powołując się na twierdzenie 6. – wskaż płaszczyznę, w której zawiera się prosta AB i którą przebija prosta B_1C_1).
Zatem punkty P, R oraz Q, S należą odpowiednio do prostych skośnych.

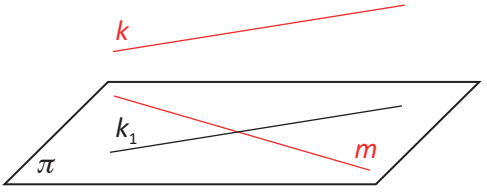


W szczególności to znaczy, że punkty P, R, Q, S nie leżą na jednej płaszczyźnie. Stąd wynika, że proste PQ i RS nie są równoległe i się nie przecinają, czyli są skośne.

Twierdzenie 7.

Dla każdej z dwóch prostych skośnych istnieje tylko jedna płaszczyzna zawierająca tę prostą i równoległa do drugiej prostej skośnej.

Szkic dowodu: Niech k, m będą prostymi skośnymi. Przez dowolny punkt prostej m prowadzimy prostą k_1 równoległą do prostej k.

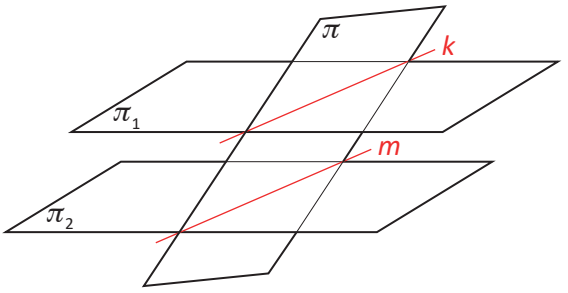


Proste m i k_1 wyznaczają płaszczyznę π (twierdzenie 3.). Jest to szukana płaszczyzna. Płaszczyzna π zawiera prostą k_1 równoległą do prostej k, więc – na mocy twierdzenia 2. – prosta k jest równoległa do płaszczyzny π. Podobnie można pokazać, że istnieje płaszczyzna zawierająca prostą k i równoległa do prostej m.

Na koniec tego tematu podamy twierdzenie charakteryzujące płaszczyzny równoległe.

Twierdzenie 8.
Jeśli dwie równoległe płaszczyzny przetniemy trzecią płaszczyzną, to otrzymane krawędzie przecięcia są do siebie równoległe.

Założenie:
$\pi_1 \parallel \pi_2$
$\pi_1 \cap \pi = k$
$\pi_2 \cap \pi = m$
Teza:
$k \parallel m$

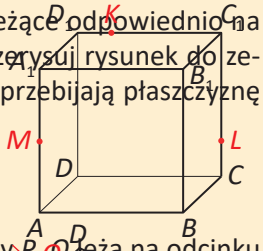


Dowód: Proste k, m nie mogą być skośne, ponieważ leżą na płaszczyźnie π. Jeśli proste k, m przecinałyby się, to z tego by wynikało, że płaszczyzny π_1 i π_2 też by się przecinały, co wobec założenia $\pi_1 \parallel \pi_2$ jest niemożliwe. Skoro proste k, m nie przecinają się i nie są skośne, więc znaczy to, że są równoległe.

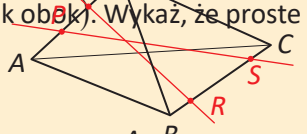
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Punkty K, L, M, N nie leżą na jednej płaszczyźnie. Czy punkt N może należeć do prostej KL? Odpowiedź uzasadnij.

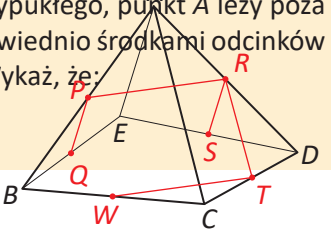
2. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ oraz punkty K, L, M leżące odpowiednio na krawędziach C_1D_1, CC_1, AA_1 (zobacz rysunek obok). Przerysuj rysunek do zeszytu i wyznacz punkty, w których proste KL, ML i MK przebijają płaszczyznę (ABC).



D 3. Punkty A, B, C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie. Punkty P, Q leżą na odcinku AD, a punkty R, S leżą na odcinku BC (zobacz rysunek obok). Wykaż, że proste PS i QR są skośne.



D 4. Punkty B, C, D, E są wierzchołkami czworokąta wypukłego, punkt A leży poza płaszczyzną (BCD). Punkty P, Q, R, S, T, W są odpowiednio środkami odcinków AB, BE, AD, DE, CD i BC (zobacz rysunek obok). Wykaż, że:
a) pr. $PQ \parallel$ pr. RS b) pr. $PR \parallel$ pr. WT
c) pr. $PR \parallel$ pł.(BCD) d) pr. $RT \parallel$ pł. (ABC)

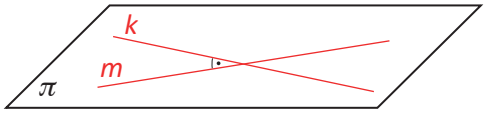


Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni

Prostopadłość prostych

1. Proste prostopadłe, zawarte w jednej płaszczyźnie

Przypomnijmy: na płaszczyźnie dwie proste nazywamy **prostymi prostopadłymi** wtedy, gdy przecinają się pod kątem prostym.



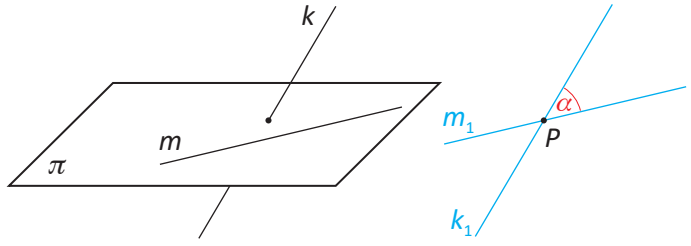
$k \perp m$

2. Proste prostopadłe, które nie zawierają się w jednej płaszczyźnie

Najpierw określimy kąt między prostymi skośnymi.
Załóżmy, że mamy dane dwie proste skośne k i m. Wybieramy w przestrzeni dowolny punkt P. Przez punkt P prowadzimy:

- prostą k_1 – równoległą do prostej k oraz
- prostą m_1 – równoległą do prostej m.

Kąt między przecinającymi się prostymi k_1 i m_1, nie większy od kąta prostego, nazywamy **kątem między prostymi skośnymi** k i m.

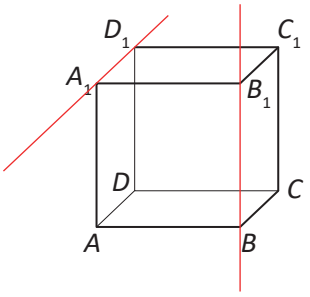


Jeśli kąt między prostymi skośnymi k, m jest kątem prostym, to powiemy, że **proste** k, m **są prostopadłe** i zapisujemy $k \perp m$.

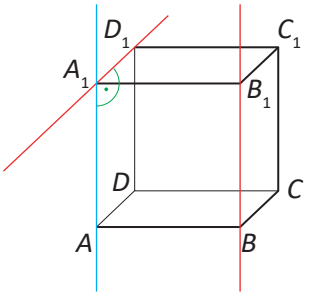
UWAGA: Można wykazać, że kąt między prostymi skośnymi k, m nie zależy od wyboru punktu P w przestrzeni. Często wybieramy ten punkt na prostej k lub na prostej m.

Przykład 1.

Rozważmy proste skośne A_1D_1 i BB_1, wyznaczone przez wierzchołki sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Na rysunku poniżej są one zaznaczone kolorem czerwonym.



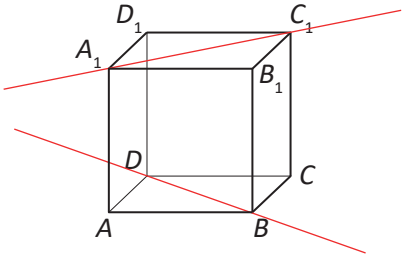
Przez punkt A_1 prowadzimy prostą AA_1, równoległą do prostej BB_1. Prosta AA_1 przecina prostą A_1D_1 pod kątem prostym, bo czworokąt A_1ADD_1 jest kwadratem.



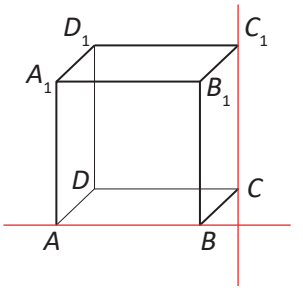
To oznacza, że proste skośne A_1D_1 i BB_1 są prostopadłe.

Ćwiczenie 1. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Wykaż, że proste skośne, zaznaczone na rysunkach kolorem czerwonym i przechodzące przez odpowiednie wierzchołki tego sześcianu są prostopadłe.

a)



b)

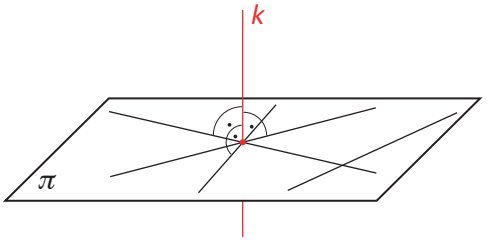


Prostopadłość prostej i płaszczyzny

Definicja 1.
Prosta i płaszczyzna są prostopadłe wtedy, gdy prosta jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie.

Jeśli prosta k i płaszczyzna π są prostopadłe, to symbolicznie zapisujemy to tak:

$k \perp \pi$



Twierdzenie 1
Jeśli proste k, m są równoległe i prosta k jest prostopadła do prostej l, to prosta m też jest prostopadła do prostej l.

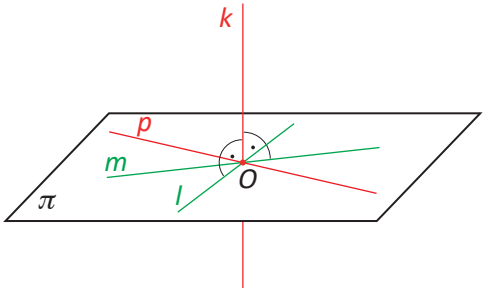
Twierdzenie 2.
Jeśli proste k, m są równoległe i prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π, to prosta m też jest prostopadła do płaszczyzny π.

Twierdzenie 3.
Jeśli dwie proste są prostopadłe do tej samej płaszczyzny, to są równoległe.

Kolejne twierdzenie ułatwia sprawdzenie, czy prosta jest prostopadła do płaszczyzny.

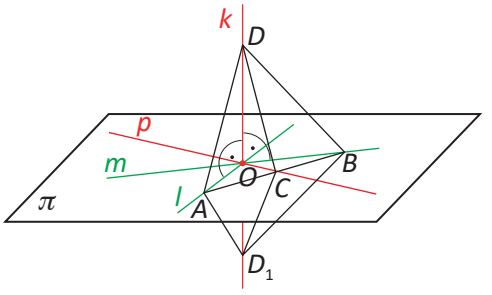
Twierdzenie 4. *Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny*
Jeśli prosta jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych leżących na płaszczyźnie, to jest prostopadła do tej płaszczyzny.

Założenie:
Dana jest płaszczyzna π na której leżą proste: l, m, p oraz prosta k,
$m \cap l = \{O\}$
$k \perp l$ i $k \perp m$
Teza:
$k \perp p$



Dowód: Wykażemy, że prosta k jest prostopadła do każdej prostej p leżącej na płaszczyźnie π, co będzie znaczyć, na mocy definicji 1., że $k \perp \pi$.

Przypadek 1. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie O przecięcia prostych m, l. Prosta p przechodzi przez punkt O.



Na prostych l, m wybieramy odpowiednio punkty A, B w taki sposób, aby odcinek AB przeciął prostą p. Punkt przecięcia oznaczmy literą C. Na prostej k wybieramy punkty D, D_1, po przeciwnych stronach punktu O tak, aby

$$|DO| = |OD_1|$$

- Pokażemy, że trójkąt DD_1C jest równoramienny.
  Zauważmy, że
  $\triangle AOD \equiv \triangle AOD_1$ – cecha przystawania trójkątów (bkb)
  Mamy bowiem
  AO – wspólny bok
  $|DO| = |OD_1|$ – z wyboru punktów D, D_1
  $|\sphericalangle AOD| = |\sphericalangle AOD_1| = 90°$ – z założenia, że $k \perp l$

  Stąd otrzymujemy, że
  $|AD| = |AD_1|$
  Podobnie można wykazać, że $\triangle DOB \equiv \triangle D_1OB$, zatem
  $|BD| = |BD_1|$
  Mamy również
  $\triangle ABD \equiv \triangle ABD_1$ – cecha przystawania trójkątów (bbb)
  Z tego wynika, że
  $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAD_1|$

  a stąd otrzymujemy, że
  $\triangle DAC \equiv \triangle D_1AC$ – cecha przystawania trójkątów (bkb)
  Z przystawania ostatnich dwóch trójkątów wynika, że
  $|DC| = |D_1C|$,

a więc trójkąt DD_1C jest równoramienny.

- Pokażemy, że $p \perp k$.
  Odcinek OC jest środkową poprowadzoną na podstawę DD_1. W trójkącie równoramiennym taka środkowa jest równocześnie wysokością, więc odcinek OC jest prostopadły do prostej k, a zatem $p \perp k$.

Przypadek 2. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie O przecięcia prostych m, l. Prosta p nie przechodzi przez punkt O.

Wówczas przez punkt O prowadzimy prostą p_1, równoległą do prostej p. Na mocy przypadku 1. prosta p_1 jest prostopadła do prostej k, a to znaczy, że również
$p \perp k$

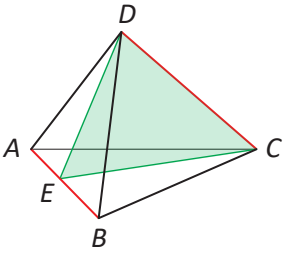
Przypadek 3. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie różnym od punktu O.

Wówczas przez punkt O prowadzimy prostą k_1 równoległą do prostej k. Na mocy twierdzenia 1. prosta k_1 jest prostopadła do prostych l, m,
$k_1 \perp l, \quad k_1 \perp m$
Wówczas – na podstawie przypadku 1. – otrzymujemy, że
$k_1 \perp \pi$
Ponieważ $k_1 \parallel k$ i $k_1 \perp \pi$, zatem z twierdzenia 2. wynika, że
$k \perp \pi$

Dowód twierdzenia został zakończony.

Przykład 2.

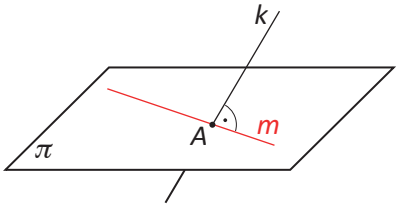
Punkty A, B, C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wiadomo, że $|AC| = |BC|$ i $|AD| = |BD|$. Punkt E jest środkiem boku AB (zobacz rysunek obok). Pokażemy, że:
a) prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny (CDE),
b) pr. $AB \perp$ pr. DC.



Ad a) Odcinek CE jest wysokością w trójkącie ABC (dlaczego?), zatem
$AB \perp CE$
Podobnie odcinek DE jest wysokością w trójkącie ABD, więc
$AB \perp ED$
Prosta AB jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych leżących na płaszczyźnie (CDE), więc – na mocy twierdzenia 4. – jest prostopadła do płaszczyzny (CDE).

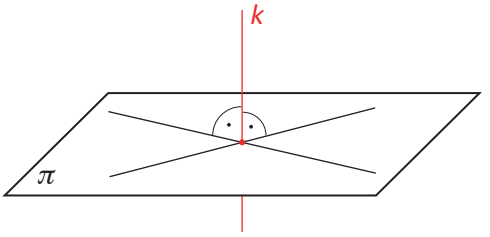
Ad b) W punkcie a) pokazaliśmy, że prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny (CDE). To znaczy, na podstawie definicji 1., że prosta AB jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie (CDE). Ponieważ prosta CD leży na płaszczyźnie (CDE), więc
pr. $AB \perp$ pr. CD.

UWAGA: Jeżeli prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A i nie jest prostopadła do płaszczyzny π, to na płaszczyźnie π leży tylko jedna prosta m przechodząca przez punkt A, która jest prostopadła do prostej k.

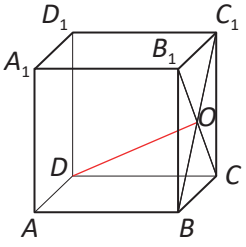


Prostą m można opisać jako krawędź przecięcia płaszczyzny π i płaszczyzny π_1, która jest prostopadła do prostej k i do której należy punkt A.

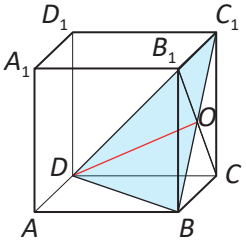
Prostopadłość prostej k do dwóch przecinających się prostych zawartych w płaszczyźnie π oznacza, że prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π. Prostopadłość prostej k do płaszczyzny π zaznaczamy na rysunku w następujący sposób:



Przykład 3.



Dany jest sześcian, jak na rysunku obok. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu BCC_1B_1. Pokażemy, że odcinek DO jest prostopadły do odcinka BC_1 i nie jest prostopadły do odcinka B_1C.

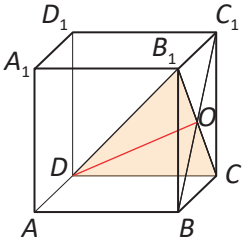


Rozważmy trójkąt BC_1D. Mamy

$$|DB| = |DC_1|.$$

Trójkąt BC_1D jest równoramienny, a odcinek DO jest środkową poprowadzoną na podstawę BC_1. To znaczy, że DO jest również wysokością trójkąta BC_1D, czyli

$$DO \perp BC_1$$



Rozpatrzmy teraz trójkąt B_1CD. Zauważamy, że

$$|DB_1| > |B_1C| > |DC|.$$

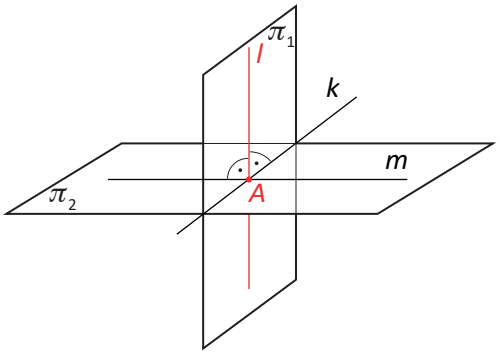
Odcinek DO jest środkową poprowadzoną do boku B_1C. Gdyby odcinek DO był prostopadły do odcinka B_1C, to by znaczyło, że $|DB_1| = |DC|$, ale tak nie jest.
Zatem odcinek DO nie jest prostopadły do odcinka B_1C.
Z powyższych rozważań wynika też, że prosta DO nie jest prostopadła do płaszczyzny (BCC_1B_1).

Ćwiczenie 2. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Wykaż, że czworokąt ABC_1D_1 jest prostokątem.

Prostopadłość płaszczyzn

Definicja 2.

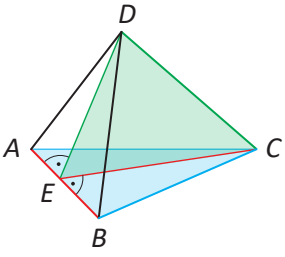
Płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2 wtedy, gdy w płaszczyźnie π_1 jest zawarta prosta prostopadła do płaszczyzny π_2.



Prosta l – na rysunku obok – leżąca na płaszczyźnie π_1 jest prostopadła do przecinających się prostych k, m leżących na płaszczyźnie π_2. To znaczy, że prosta l jest prostopadła do płaszczyzny π_2, więc również płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2. Zauważ, że jeśli płaszczyzna π_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_2, to również płaszczyzna π_2 jest prostopadła do płaszczyzny π_1.

Jeśli płaszczyzny π_1 i π_2 są prostopadłe, to stosujemy symboliczny zapis:

$\pi_1 \perp \pi_2$.



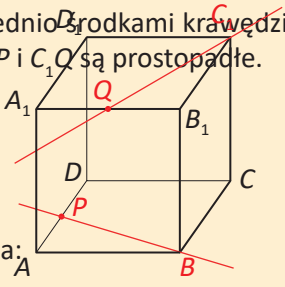
W przykładzie 2. pokazaliśmy, że prosta AB zawarta w płaszczyźnie (ABC) jest prostopadła do płaszczyzny (CDE).

Z definicji 2. wynika, że płaszczyzna (ABC) jest prostopadła do płaszczyzny (CDE).

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

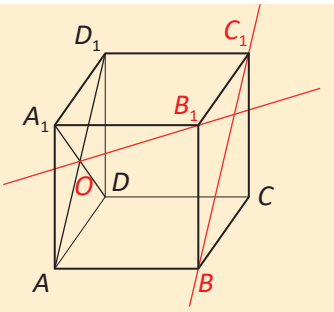
D

1. W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ punkty P i Q są odpowiednio środkami krawędzi AD i A_1B_1 (zobacz rysunek obok). Wykaż, że proste BP i C_1Q są prostopadłe.

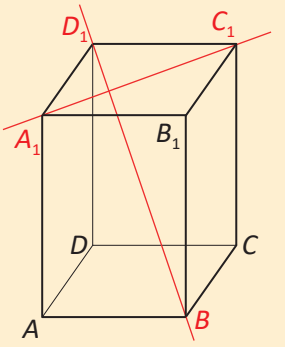


2. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Sprawdź, czy prosta:
   a) BD jest prostopadła do płaszczyzny (ACD_1),
   b) A_1D jest prostopadła do płaszczyzny (ABC_1D_1).

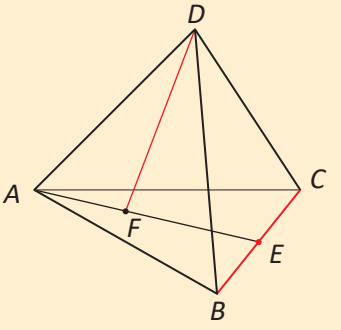
D 3. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu ADD_1A_1 (zobacz rysunek obok). Wykaż, że proste B_1O i BC_1 są prostopadłe.



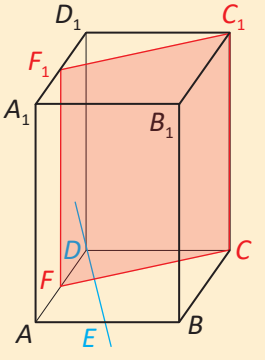
D 4. Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o podstawie kwadratowej. Wykaż, że prosta A_1C_1 jest prostopadło do prostej D_1B.



5. Punkty A, B, C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie. Ponadto wiadomo, że $|AC| = |AB|$ i $|CD| = |BD|$. Punkt E jest środkiem boku BC, $F \in AE$ (patrz rysunek obok). Czy proste DF i BC są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.

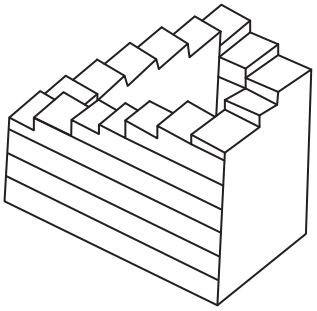


6. Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o podstawie kwadratowej $ABCD$. Punkty E, F, F_1 są odpowiednio środkami odcinków AB, AD i A_1D_1. Czy prosta DE jest prostopadła do płaszczyzny (FCC_1F_1)? Odpowiedź uzasadnij.



Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę

Bardzo ważną umiejętnością jest rysowanie na kartce brył i figur w taki sposób, w jaki je widzimy, gdy patrzymy na nie pod pewnym kątem. Takie rysunki bardzo ułatwiają rozwiązywanie zadań. Ale rysunki mogą też wprowadzać w błąd! Oto przykład:

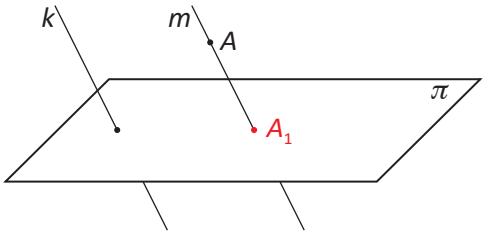


Znajomość rzutu równoległego na płaszczyznę umożliwi ci poprawne rysowanie figur przestrzennych na płaszczyźnie.

Własności rzutu równoległego na płaszczyznę

Definicja 1.

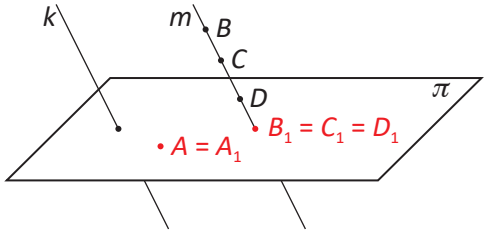
Niech dana będzie w przestrzeni płaszczyzna π, zwana rzutnią i prosta k, która przebija rzutnię. Kierunek prostej k nazywamy kierunkiem rzutu. Jeśli przez dowolny punkt A przestrzeni poprowadzimy prostą m równoległą do prostej k, to przebija ona rzutnię w punkcie A_1. Punkt A_1 nazywamy **rzutem równoległym** punktu A na płaszczyznę π w kierunku prostej k.



1) Rzut równoległy na płaszczyznę jest przykładem przekształcenia odwzorowującego zbiór punktów przestrzeni w zbiór punktów płaszczyzny.

2) Jeśli punkt A leży na rzutni, to jego rzut równoległy pokrywa się z punktem A. Wszystkie punkty rzutni są więc punktami stałymi rzutu równoległego.

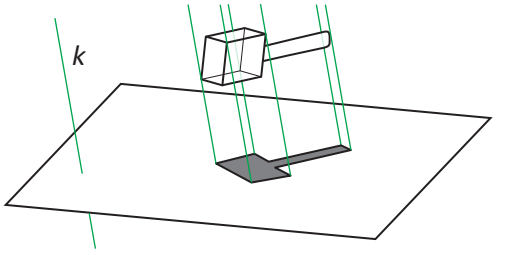
Zauważ, że każdy punkt rzutni jest obrazem nieskończenie wielu punktów. Jak są położone względem siebie te punkty, których obrazem jest ten sam punkt na rzutni?



Z tej obserwacji wynika, że rzut równoległy na płaszczyznę nie zachowuje odległości punktów.

Twierdzenie 1.
Rzut równoległy na płaszczyznę nie jest izometrią.

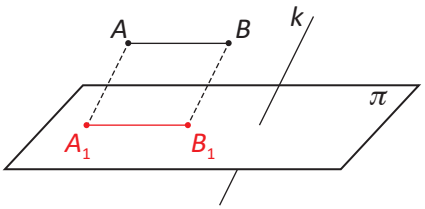
Znaleźć rzut równoległy figury F na płaszczyznę, to znaczy znaleźć rzuty równoległe wszystkich punktów figury F.



O obrazie figury w rzucie równoległym na płaszczyznę można myśleć jak o cieniu, który tworzy przedmiot w słoneczny dzień. Można bowiem założyć, że promienie słoneczne docierające do Ziemi są równoległe. Wyznaczają one kierunek rzutowania. Płaska powierzchnia, np. boisko, chodnik, podłoga w mieszkaniu, jest rzutnią, a cień – rzutem równoległym danego przedmiotu.

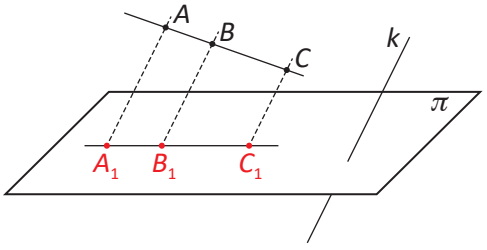
Własności rzutu równoległego zapiszemy w postaci twierdzeń.

Twierdzenie 2.
Rzut równoległy na płaszczyznę odcinka równoległego do rzutni jest odcinkiem równoległym do danego i takiej samej długości jak odcinek dany.



Twierdzenie 3.
Rzut równoległy na płaszczyznę zachowuje uporządkowanie punktów leżących na prostej nierównoległej do kierunku rzutu.

Twierdzenie 3. mówi o tym, że jeśli punkty A, B, C leżą na prostej nierównoległej do kierunku rzutu i punkt B leży między punktami A i C, to rzuty równoległe A_1, B_1, C_1 są współliniowe i punkt B_1 leży między punktami A_1 i C_1.



Jeśli zastosujemy teraz wniosek z twierdzenia Talesa do prostych AC i A_1C_1 przeciętych prostymi równoległymi A_1A, B_1B, C_1C, to otrzymamy zależność:

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}$$

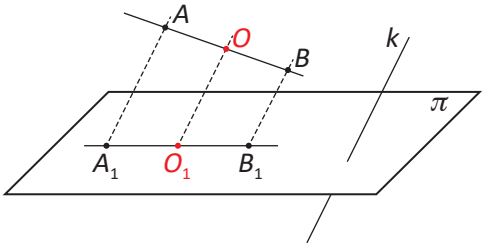
Twierdzenie 4.
W rzucie równoległym na płaszczyznę stosunek długości odcinków leżących na prostej nierównoległej do kierunku rzutu jest równy stosunkowi długości ich rzutów.

Z twierdzenia 4. wynika następujący wniosek.

Wniosek 1. Rzutem równoległym środka odcinka, nierównoległego do kierunku rzutu, jest środek odcinka będącego rzutem.

Dowód: Niech punkt O będzie środkiem odcinka AB nierównoległego do kierunku rzutu. Z twierdzenia 4. wynika, że

$$\frac{|A_1O_1|}{|O_1B_1|}=\frac{|AO|}{|OB|}$$



Ale $|AO|=|OB|$, więc $\frac{|A_1O_1|}{|O_1B_1|}=1$, stąd

$$|O_1B_1|=|A_1O_1|.$$

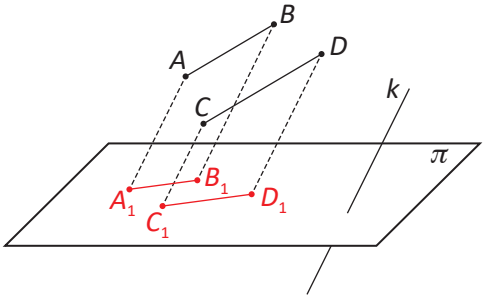
Twierdzenie 4. można uogólnić.

Twierdzenie 5.

Rzuty równoległe na płaszczyznę odcinków równoległych – ale nierównoległych do kierunku rzutowania – są odcinkami równoległymi i stosunek długości tych odcinków jest równy stosunkowi długości ich rzutów.

Założenie:

punkty A_1, B_1, C_1, D_1 są odpowiednio rzutami równoległymi punktów A, B, C, D na płaszczyznę π w kierunku prostej k, $AB \parallel CD$, $AB \nparallel k$



Teza:

$$A_1B_1 \parallel C_1D_1, \quad \frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}$$

W praktyce często stosuje się szczególny przypadek ostatniego twierdzenia.

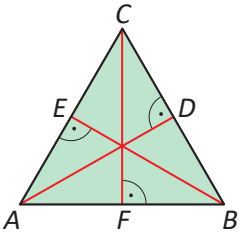
Wniosek 2. Rzuty równoległe na płaszczyznę odcinków równoległych i równej długości – ale nierównoległych do kierunku rzutowania – są odcinkami równoległymi i równej długości.

Rysowanie rzutów równoległych wybranych figur płaskich

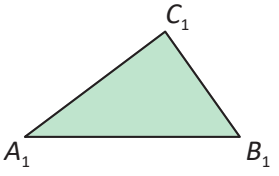
Omówimy teraz sposób rysowania rzutów równoległych wybranych figur płaskich przy założeniu, że płaszczyzna zawierająca daną figurę nie jest równoległa do kierunku rzutowania.

Przykład 1.

Narysujemy rzut równoległy na płaszczyznę trójkąta równobocznego ABC wraz z zaznaczonymi w nim wysokościami, przy założeniu, że bok AB jest równoległy do rzutni, a płaszczyzna (ABC) nie jest równoległa do kierunku rzutowania.

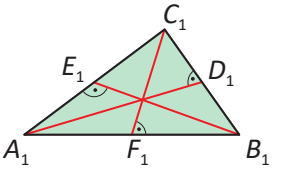


1) Rzutem odcinka AB jest taki odcinek A_1B_1, że $|A_1B_1| = |AB|$ – twierdzenie 2.



2) Rzut punktu C, czyli punkt C_1, możemy wybrać dowolnie poza prostą A_1B_1.

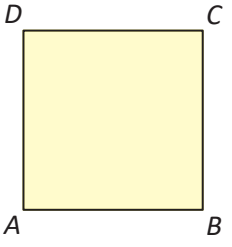
3) Zauważ, że punkty D, E, F są środkami odcinków odpowiednio BC, CA, AB. Zatem punkty D_1, E_1, F_1 są środkami odcinków odpowiednio B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1.



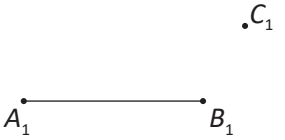
Rzutem równoległym trójkąta równobocznego jest trójkąt.

Przykład 2.

Narysujemy rzut równoległy na płaszczyznę kwadratu $ABCD$, przyjmując założenie, że bok AB jest równoległy do rzutni, a płaszczyzna $(ABCD)$ nie jest równoległa do kierunku rzutowania.

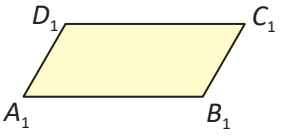


1) Rysujemy najpierw rzut odcinka AB, czyli odcinek A_1B_1, pamiętając, że $|A_1B_1| = |AB|$.



2) Punkt C_1 wybieramy dowolnie poza prostą A_1B_1.

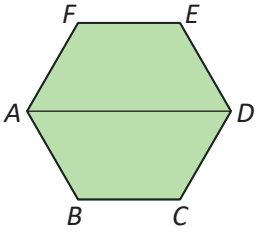
3) Odcinki AB i CD są równoległe do siebie i do rzutni, a także mają taką samą długość. Rzuty równoległe tych odcinków też są do siebie równoległe i mają taką samą długość, zatem $C_1D_1 \parallel A_1B_1$ i $|A_1B_1| = |C_1D_1|$.



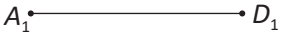
Rzutem równoległym kwadratu jest równoległobok.

Przykład 3.

Narysujemy rzut równoległy sześciokąta foremnego $ABCDEF$ przy założeniu, że przekątna AD jest równoległa do rzutni i płaszczyzna (ABC) nie jest równoległa do kierunku rzutowania.



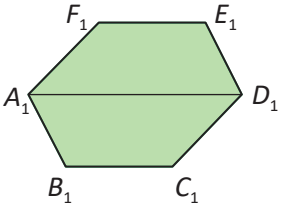
1) Zaczynamy od narysowania odcinka A_1D_1, pamiętając, że $|A_1D_1| = |AD|$.



2) Punkt B_1 wybieramy dowolnie poza prostą A_1D_1. Odcinek BC jest równoległy do odcinka AD, a więc i do rzutni. Zatem $|B_1C_1| = |BC|$ oraz $B_1C_1 \parallel A_1D_1$.



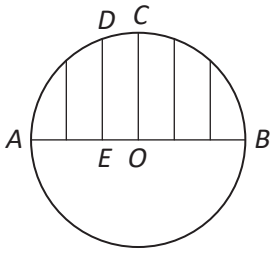
3) Ponieważ $AB \parallel ED$ i $|AB| = |ED|$, więc $A_1B_1 \parallel E_1D_1$ oraz $|A_1B_1| = |E_1D_1|$. Wyznaczamy rzut punktu E i analogicznie rzut punktu F.



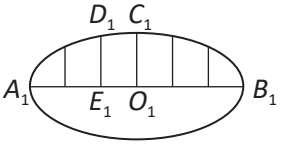
UWAGA: Rzut równoległy sześciokąta *ABCDEF* najwygodniej jest rysować tak, aby odcinek B_1F_1 nie był prostopadły do odcinka A_1D_1.

Przykład 4.

Narysujemy rzut równoległy okręgu $o(O, r)$

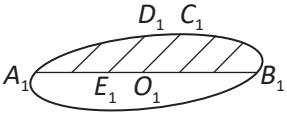


Załóżmy, że średnica *AB* jest równoległa do rzutni. Rysujemy więc odcinek A_1B_1, pamiętając, że $|A_1B_1| = |AB|$. Niech *C* będzie takim punktem, dla którego $|OC| = r$. Rzutem punktu *C* niech będzie punkt C_1 i, na przykład,



$$|O_1C_1| = \frac{1}{2}|OC|.$$

Aby znaleźć rzut dowolnego punktu *D* okręgu, kreślimy odcinek *DE* równoległy do odcinka *CO* (punkt *E* należy do średnicy *AB*). Mamy



$$|A_1E_1| = |AE| \text{ oraz } D_1E_1 \parallel C_1O_1 \text{ i } |D_1E_1| = \frac{1}{2}|DE|$$

(twierdzenie 5.). W podobny sposób znajdujemy możliwie dużo rzutów punktów okręgu.

Otrzymane punkty łączymy linią, którą nazywamy elipsą.

Rzut prostokątny na płaszczyznę

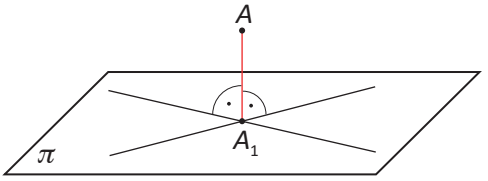
Definicja 2.

Rzutem prostokątnym na płaszczyznę nazywamy rzut równoległy na płaszczyznę, którego kierunek jest wyznaczony przez prostą prostopadłą do rzutni.

Posługując się tym terminem, możemy w prosty sposób zdefiniować odległość punktu od płaszczyzny.

Definicja 3.

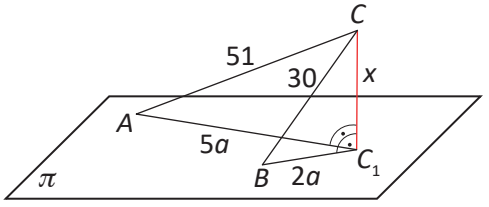
Odległością punktu A **od płaszczyzny** π nazywamy długość odcinka AA_1, gdzie A_1 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π. Odległość tę oznaczamy $d(A, \pi)$.



Przykład 5.

Odległość punktu C, leżącego poza płaszczyzną π, od dwóch punktów A i B, leżących na płaszczyźnie π, jest równa odpowiednio 51 i 30. Wyznaczymy odległość punktu C od płaszczyzny π, jeśli stosunek długości rzutów prostokątnych odcinków AC i BC na płaszczyznę π jest równy 5 : 2.

Niech rysunek poniżej reprezentuje sytuację opisaną w zadaniu.



Mamy dane: $|AC| = 51$, $|BC| = 30$. Niech C_1 będzie rzutem prostokątnym punktu C na płaszczyznę π. Szukamy długości odcinka CC_1; oznaczmy ją x, $x > 0$.

Jeśli $|AC_1| : |BC_1| = 5 : 2$, to znaczy, że istnieje taka liczba a, $a > 0$, dla której

$$|AC_1| = 5a \text{ i } |BC_1| = 2a.$$

Prosta CC_1 jest prostopadła do płaszczyzny π, więc jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie π. W szczególności mamy:

$$AC_1 \perp CC_1 \text{ i } BC_1 \perp CC_1.$$

Zatem trójkąty AC_1C i BC_1C są prostokątne.

Stosujemy do nich twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + 25a^2 = 51^2 \\ x^2 + 4a^2 = 30^2 \end{cases} \quad /-$$

$$21a^2 = 51^2 - 30^2$$

Zatem

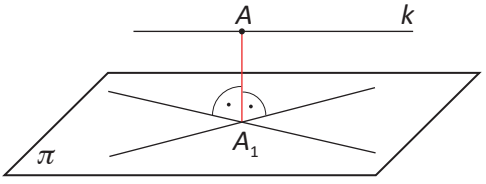
$$\begin{cases} 21a^2 = 21 \cdot 81 \quad /:21 \\ x^2 = 900 - 4a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 81 \\ x^2 = 576 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 9, \quad \text{bo } a > 0 \\ x = 24, \quad \text{bo } x > 0 \end{cases}$$

Odległość punktu C od płaszczyzny π jest równa 24.

Definicja 4.

Odległością prostej k równoległej do płaszczyzny π od płaszczyzny π nazywamy długość odcinka AA_1, przy czym A jest dowolnym punktem prostej k, A_1 – rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π.



Analogicznie można zdefiniować odległość między dwiema równoległymi płaszczyznami.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

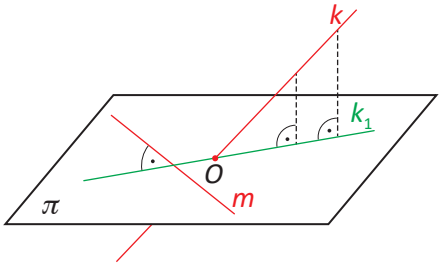
1. Naszkicuj rzut równoległy w kierunku pewnej prostej k następujących figur: kwadratu, prostokąta i równoległoboku – w przypadku, gdy dwa boki każdego z tych czworokątów są równoległe do rzutni, a pozostałe dwa nie są równoległe do rzutni. Co można zauważyć?
2. Naszkicuj figurę F, będącą rzutem równoległym rombu $ABCD$, jeśli rzutnia jest równoległa do boku AB i nie jest równoległa do boku BC. Następnie zaznacz w rombie $ABCD$ wysokość, przechodzącą przez środek symetrii rombu, prostopadłą do boku AB oraz naszkicuj rzut tej wysokości, zawarty w figurze F. Czy rzut wysokości dzieli boki figury F na połowy? Odpowiedź uzasadnij.
3. Trójkąt prostokątny ABC, którego przeciwprostokątna AB ma długość 20 cm, zawiera się w płaszczyźnie π. Odcinek CS jest prostopadły do płaszczyzny π. Wiedząc, że punkt S jest odległy od punktu A o $\sqrt{337}$ cm, a od punktu B – o 15 cm, oblicz odległość punktu S od płaszczyzny π.

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Twierdzenia omówione w tym temacie ułatwiają sprawdzenie, czy kąt między przecinającymi się prostymi umieszczonymi w przestrzeni jest prosty.

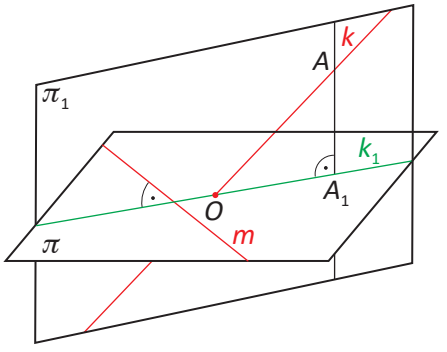
Twierdzenie 1.
Jeśli prosta k przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła oraz prosta m, leżąca na płaszczyźnie π, jest prostopadła do rzutu prostokątnego k_1 prostej k na płaszczyznę π, to prosta m jest prostopadła do prostej k.

Założenie:
Dana jest płaszczyzna π oraz proste k, m,
$k \not\perp \pi,\ k \cap \pi = \{O\}$
k_1 jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π
$m \subset \pi,\quad m \perp k_1$



Teza:
$m \perp k$

Dowód:
Na prostej k wybieramy dowolny punkt A różny od punktu O. Przez A_1 oznaczmy rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π. Oczywiście $A_1 \in k_1$ i pr. $AA_1 \perp \pi$.



Proste k i AA_1 wyznaczają płaszczyznę. Oznaczmy ją przez π_1. Mamy
$A_1 \in \pi_1$ i $O \in \pi_1$, więc
pr. $A_1O \subset \pi_1$ na mocy aksjomatu 5.
czyli
$k_1 \subset \pi_1$
Z założenia wiemy, że
$m \perp k_1$

Ponadto

$m \perp \text{pr. } AA_1$

ponieważ prosta AA_1 jest prostopadła do płaszczyzny π, czyli jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie π, w szczególności do prostej m.

Prosta m jest więc prostopadła do dwóch przecinających się prostych leżących na płaszczyźnie π_1, zatem (twierdzenie 4. ze str. 231) jest prostopadła do płaszczyzny π_1. To znaczy, że jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie π_1, w szczególności

$m \perp k$, co kończy dowód.

Prawdziwe jest również kolejne twierdzenie.

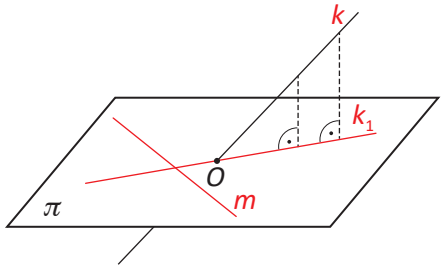
Twierdzenie 2.
Jeśli prosta k przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła oraz prosta m leżąca na płaszczyźnie π jest prostopadła do prostej k, to jest prostopadła do rzutu prostokątnego k_1 prostej k na płaszczyznę π.

Założenie:
Dana jest płaszczyzna π oraz proste k, m

$k \not\perp \pi, \quad k \cap \pi = \{O\}$

k_1 jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π

$m \subset \pi, \quad m \perp k$



Teza:

$m \perp k_1$

Ćwiczenie 1. Udowodnij twierdzenie 2. wzorując się na dowodzie twierdzenia 1.

Powyższe dwa twierdzenia zapiszemy w postaci jednego twierdzenia, które będziemy nazywać twierdzeniem o trzech prostych prostopadłych.

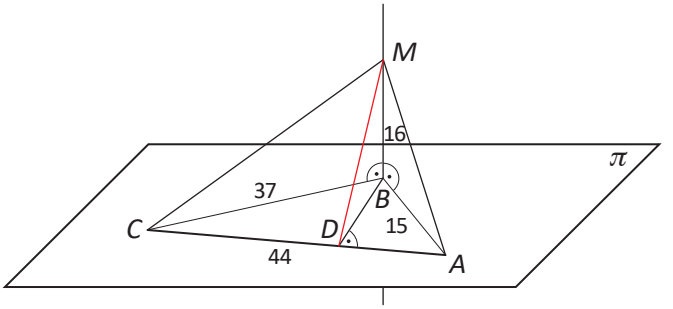
Twierdzenie 3. *Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych*
Jeśli prosta k przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła, prosta k_1 jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π, prosta m leży na płaszczyźnie π, to prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej k_1.

Pokażemy teraz zastosowanie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych.

Przykład 1.

W trójkącie *ABC* leżącym na płaszczyźnie π mamy dane: $|AB| = 15$, $|BC| = 37$, $|CA| = 44$. Z punktu *B* poprowadzono prostą prostopadłą do płaszczyzny π. Na tej prostej wybrano punkt *M*, dla którego $|BM| = 16$. Wyznaczymy wysokość trójkąta *AMC* poprowadzoną z wierzchołka *M*.

Niech rysunek poniżej przedstawia sytuację opisaną w zadaniu.



Z wierzchołka *B* trójkąta *ABC* poprowadźmy wysokość *BD*. Zauważ, że $D \in CA$ (dlaczego?). Odcinek *BD* jest rzutem prostokątnym odcinka *MD* (bo $MB \perp \pi$), oczywiście $CA \perp BD$, zatem – z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych –

$CA \perp MD$

Odcinek *MD* jest więc wysokością trójkąta *AMC* poprowadzoną z wierzchołka *M*.
Aby obliczyć długość odcinka *MD*, obliczymy najpierw długość odcinka *BD*. W tym celu obliczymy pole trójkąta *ABC*, stosując – znany Ci z klasy drugiej – wzór Herona.
Przypomnijmy: pole *P* trójkąta o bokach o długości *a*, *b*, *c* wyraża się wzorem:

$$P = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\,, \quad \text{gdzie } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

W przypadku trójkąta *ABC* mamy

$$p = \frac{37+44+15}{2} = 48\,, \text{ zatem}$$

$$P = \sqrt{48\cdot(48-37)\cdot(48-44)\cdot(48-15)} = \sqrt{2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 2^2\cdot 3\cdot 11} =$$

$$= \sqrt{2^6\cdot 3^2\cdot 11^2} = 2^3\cdot 3\cdot 11 = 264$$

Pole *P* trójkąta *ABC* można również obliczyć, stosując wzór:

$$P = \frac{1}{2}\cdot|CA|\cdot|BD|\,, \quad \text{więc} \quad 264 = \frac{1}{2}\cdot 44\cdot|BD| \quad /:22$$

$$|BD| = 12$$

Prosta *BM* jest prostopadła do płaszczyzny π, w szczególności jest więc prostopadła do prostej *BD*, zatem trójkąt *DBM* jest prostokątny. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do tego trójkąta.

Obliczamy długość odcinka MD.

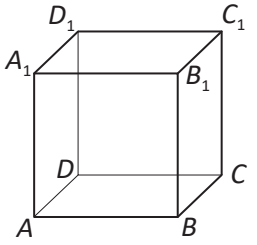
$|MD|^2 = |DB|^2 + |BM|^2$, czyli $|MD|^2 = 12^2 + 16^2$, więc $|MD|^2 = 400$

$|MD| = 20$, bo $|MD| > 0$

Wysokość trójkąta AMC poprowadzona z wierzchołka M ma długość 20.

Przykład 2.

Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (zobacz rysunek obok).



Wykażemy, że:

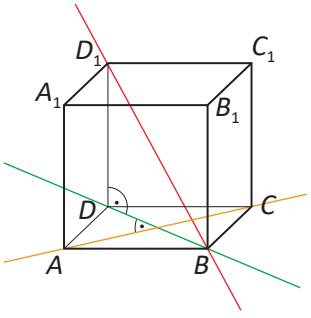
a) $AC \perp BD_1$

b) $BD_1 \perp$ pł. (ACB_1)

c) pł. $(ACB_1) \perp$ pł. (DBB_1)

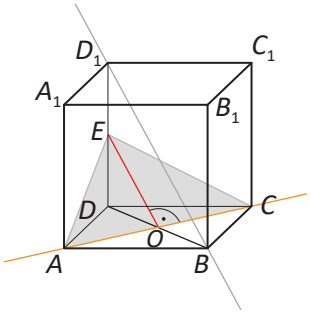
Ad a)

I sposób – korzystamy z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych



- Rzutem prostokątnym prostej BD_1 na płaszczyznę (ABC) jest prosta BD.
- Prosta AC jest prostopadła do prostej BD, ponieważ te proste zawierają przekątne kwadratu $ABCD$, $AC \perp BD$.
- Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika więc, że prosta AC jest prostopadła do prostej BD_1, czyli $AC \perp BD_1$, co kończy dowód.

II sposób – korzystamy z określenia prostopadłości prostych skośnych



Przez punkt O – środek odcinka AC – prowadzimy prostą równoległą do prostej BD_1. Ta prosta przetnie prostą DD_1 w punkcie E, który jest środkiem odcinka DD_1 (dlaczego?). Wystarczy teraz pokazać, że $OE \perp AC$.

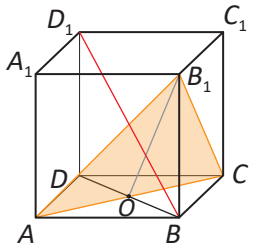
Rozważmy trójkąt ACE. Jest to trójkąt równoramienny, $|AE| = |CE|$ (dlaczego?).

Odcinek EO jest środkową w tym trójkącie poprowadzoną na podstawę (punkt O jest środkiem symetrii kwadratu $ABCD$). Środkowa w trójkącie równoramiennym poprowadzona na podstawę jest wysokością, więc

$AC \perp OE$, a to znaczy, że

$AC \perp BD_1$, co kończy dowód.

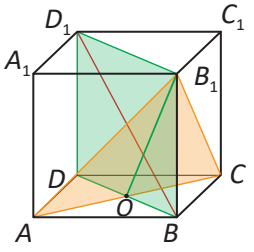
Ad b)



Postępując podobnie jak w punkcie a) można wykazać, że $AB_1 \perp BD_1$.
To znaczy, że prosta BD_1 jest prostopadła do dwóch prostych przecinających się, leżących na płaszczyźnie (ACB_1). Na mocy twierdzenia 4. ze str. 231 prosta BD_1 jest prostopadła do płaszczyzny (ACB_1), czyli

$BD_1 \perp$ pł. (ACB_1), co kończy dowód.

Ad c)

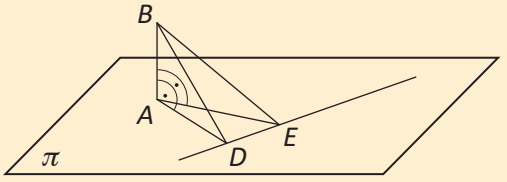


Zauważmy najpierw, że płaszczyzny (ACB_1) i (DBB_1) mają wspólne punkty B_1 i O, zatem krawędzią ich przecięcia jest prosta OB_1. Prosta BD_1 leży na płaszczyźnie (DBB_1). W punkcie b) pokazaliśmy, że prosta BD_1 jest prostopadła do płaszczyzny (ACB_1). To znaczy – na mocy definicji 2. ze str. 235 – że

pł. $(ACB_1) \perp$ pł. (DBB_1), co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Na płaszczyźnie π dana jest prosta DE oraz punkt A nienależący do tej prostej. Odległość punktu A od prostej DE jest taka sama, jak odległość punktu A od punktu D i wynosi 12 cm. Punkt E leży w odległości 13 cm od punktu A. Odcinek AB jest prostopadły do płaszczyzny π, a jego długość jest równa 16 cm. Oblicz pole trójkąta BDE.

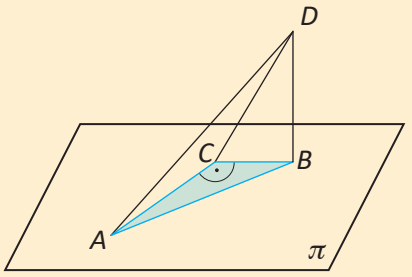


2. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Odcinek AD jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Z punktu D poprowadzono prostą prostopadłą do prostej BC, która przecięła tę prostą w punkcie E. Czy punkt E jest środkiem odcinka BC? Odpowiedź uzasadnij.

D 3. Na rysunku obok przedstawiony jest prostopadłościan. Niech α oznacza kąt między przekątną ściany bocznej prostopadłościanu a krawędzią podstawy (zobacz rysunek obok). Wykaż – korzystając z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych – że $\alpha = 90°$.



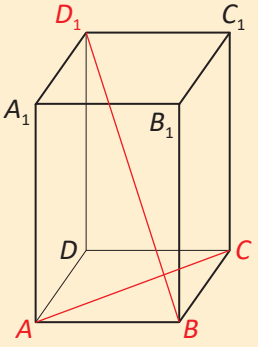
4. Trójkąt prostokątny ABC, $|\sphericalangle C| = 90°$, leży na płaszczyźnie π. Pole tego trójkąta jest równe 18. Punkt D leży poza płaszczyzną π tak, że odcinek DB jest prostopadły do płaszczyzny π. Ponadto wiadomo, że $|BD| = 4$ i $|BC| = 3$.



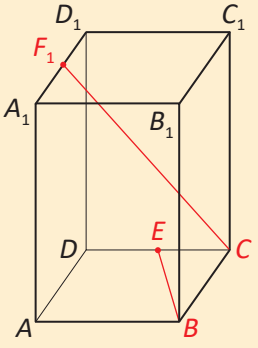
D a) Wykaż, że trójkąty ABD i ADC są prostokątne.

b) Oblicz długości boków trójkąta ADC.

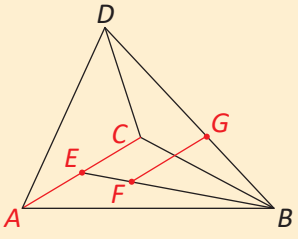
D 5. Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o podstawie kwadratowej $ABCD$. Wykaż – korzystając z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych – że proste AC i BD_1 są prostopadłe.



D 6. Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o podstawie kwadratowej $ABCD$, punkt E jest środkiem odcinka CD, a punkt F_1 jest środkiem odcinka A_1D_1. Wykaż – korzystając z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych – że prosta BE jest prostopadła do prostej CF_1.



D 7. Punkty A, B, C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie. Ponadto wiadomo, że $|AB| = |BC|$ i $|AD| = |CD|$. Punkt E jest środkiem odcinka AC, punkt F należy do odcinka BE, a punkt G należy do odcinka BD (patrz rysunek obok). Wykaż – korzystając z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych – że proste AC i FG są prostopadłe.

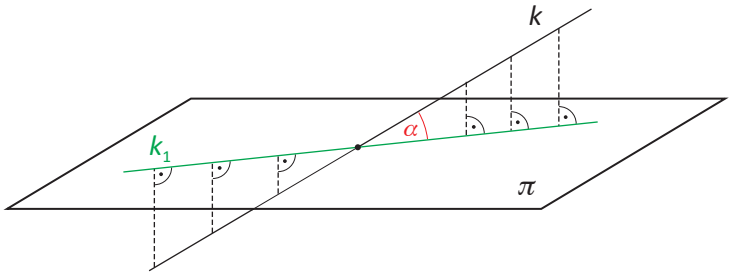


Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny

Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to mówimy, że tworzy z płaszczyzną kąt zerowy. Jeśli natomiast prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to mówimy, że tworzy z płaszczyzną kąt prosty. Omówimy teraz, jak określa się kąt między prostą a płaszczyzną w przypadku pośrednim, to znaczy wtedy, gdy prosta przebija płaszczyznę i nie jest do niej prostopadła.

Definicja 1.

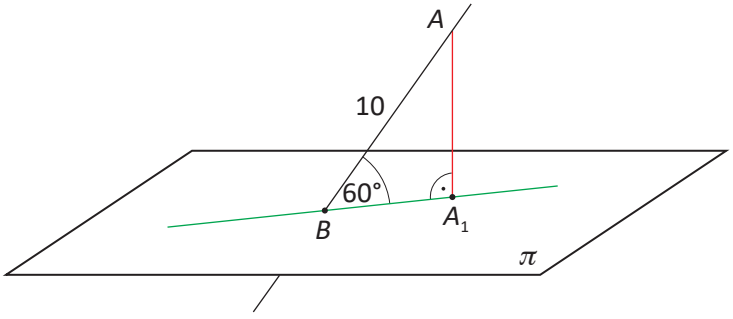
Kątem między prostą k (przebijającą płaszczyznę π i nieprostopadłą do niej) **a płaszczyzną** π nazywamy kąt ostry α między prostą k a jej rzutem prostokątnym k_1 na płaszczyznę π.



Przykład 1.

Przez punkt A poprowadzono prostą przebijającą płaszczyznę π w punkcie B i tworzącą z tą płaszczyzną kąt 60°. Wiedząc, że $|AB| = 10$, wyznaczymy odległość punktu A od płaszczyzny π.

Niech rysunek poniżej przedstawia sytuację opisaną w zadaniu.



Punkt A_1 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π. Prosta BA_1 jest rzutem prostokątnym prostej BA na płaszczyznę π. Szukamy długości odcinka AA_1.

Rozważmy trójkąt BA_1A. Jest to trójkąt prostokątny o kącie ostrym równym 60°. Zatem:

$$|AB| = 2|BA_1| \quad \text{i} \quad |AA_1| = \sqrt{3} \cdot |BA_1|$$

Stąd łatwo obliczyć, że

$$|AA_1| = 5\sqrt{3}$$

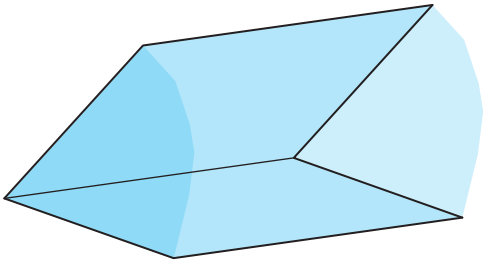
Odległość punktu A od płaszczyzny π jest równa $5\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż zadanie z przykładu 1., przyjmując założenie, że prosta AB przebija płaszczyznę π w punkcie B, pod kątem 45°.

Przypomnijmy, że każda prosta leżąca na płaszczyźnie dzieli ją na dwie części. Każdą z tych części wraz z daną prostą nazywamy półpłaszczyzną. Sama prosta nazywa się krawędzią półpłaszczyzny.

Definicja 2.

Kątem dwuściennym nazywamy sumę dwóch półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi i jednej z dwóch części przestrzeni, wyznaczonych przez te półpłaszczyzny.



Wspólną krawędź półpłaszczyzn nazywamy **krawędzią kąta dwuściennego**, a same półpłaszczyzny – **ścianami kąta dwuściennego**.

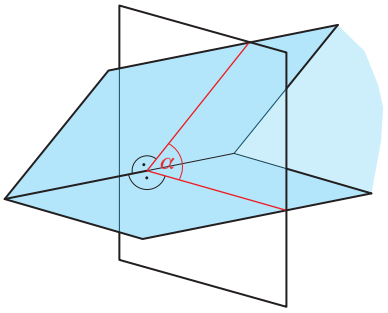
Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi wyznaczają dwa kąty dwuścienne. Na rysunku powyżej zaznaczono wypukły kąt dwuścienny.

Figury wypukłe i figury wklęsłe w przestrzeni określamy tak samo, jak na płaszczyźnie. Przypomnijmy: figurę nazywamy figurą wypukłą wtedy, gdy dla dowolnych punktów A, B należących do tej figury, odcinek AB zawiera się w tej figurze.

Powstaje pytanie, jak mierzyć kąty dwuścienne. Aby zmierzyć kąt dwuścienny, wprowadzimy pojęcie kąta liniowego kąta dwuściennego.

Definicja 3.

Kątem liniowym kąta dwuściennego nazywamy część wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.



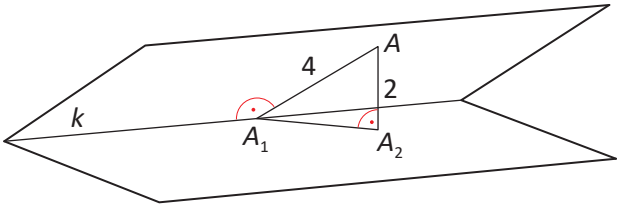
Miarę kąta liniowego przyjmuje się za miarę kąta dwuściennego.

Zauważ, że krawędź kąta dwuściennego jest prostopadła do ramion odpowiadającego mu kąta liniowego.

Przykład 2.

Odległość punktu A leżącego na ścianie kąta dwuściennego od krawędzi k tego kąta jest równa 4, a od drugiej ściany kąta jest równa 2. Wyznaczymy miarę tego kąta dwuściennego.

Rysunek poniżej przedstawia sytuację opisaną w zadaniu.



Pokażemy najpierw, że płaszczyzna (AA_1A_2) jest prostopadła do krawędzi kąta.

Zauważ, że odcinek A_1A_2 jest rzutem prostokątnym odcinka A_1A na płaszczyznę wyznaczoną przez drugą ścianę kąta dwuściennego. Wiemy z założenia, że

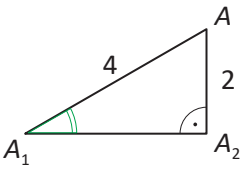
$AA_1 \perp k$,

zatem z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że

$A_1A_2 \perp k$

Prosta k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych: prostej A_1A i prostej A_1A_2, więc jest prostopadła do płaszczyzny (AA_1A_2). Miarą kąta dwuściennego jest więc miara kąta A_2A_1A.

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny AA_1A_2.



Łatwo stwierdzić, że

$$\left|\sphericalangle A_2A_1A\right| = 30°$$

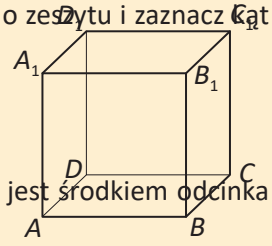
Miara kąta dwuściennego jest równa 30°.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A. Punkt B należy do prostej k i długość odcinka AB jest równa 10 cm. Oblicz odległość punktu B od płaszczyzny π, jeśli kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π ma miarę:
   a) 30° b) 45° c) 60°.

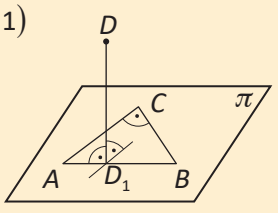
2. Odcinek AB zawiera się w płaszczyźnie π. Punkt C leży w odległości równej długości odcinka AB od płaszczyzny π. Oblicz miarę kąta między prostą AC a płaszczyzną π, jeśli rzutem prostokątnym punktu C na płaszczyznę π jest:
   a) punkt B b) punkt A c) środek odcinka AB.

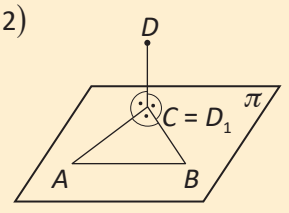
3. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Przerysuj sześcian do zeszytu i zaznacz kąt nachylenia:
   a) prostej BC_1 do płaszczyzny $(ABCD)$,
   b) prostej AC_1 do płaszczyzny $(A_1B_1C_1D_1)$,
   c) prostej AD do płaszczyzny (DBB_1D_1),
   d) prostej BE do płaszczyzny (BCC_1B_1), gdzie punkt E jest środkiem odcinka C_1D_1.

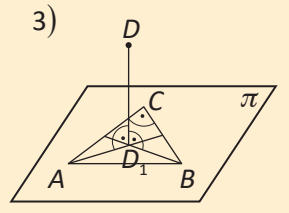


4 W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ punkt E jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu DCC_1D_1. Oblicz sinus kąta nachylenia prostej AE do płaszczyzny $(ABCD)$.

5. Na płaszczyźnie π dany jest trójkąt prostokątny ABC, $\left|\sphericalangle ACB\right| = 90°$. Punkt D nie należy do płaszczyzny π. Zaznacz kąty między każdą z prostych AD, BD, CD a płaszczyzną π, jeśli rzut prostokątny punktu D na płaszczyznę π:
   a) leży między punktami A i B, zobacz rys. 1)
   b) jest punktem wspólnym wysokości trójkąta ABC, zobacz rys. 2)
   c) jest punktem przecięcia środkowych trójkąta ABC, zobacz rys. 3).

1)


2)


3)


Zadanie rozwiąż w zeszycie

Graniastosłupy

W szkole podstawowej były omawiane przykłady wielościanów, np. prostopadłościany. Wielościany to pewne bryły, których brzeg utworzony jest z wielokątów. Dokładniej omówimy dwa typy wielościanów: graniastosłupy i ostrosłupy.

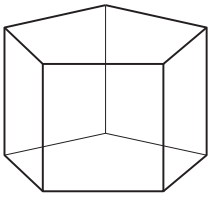
Definicja 1.

Graniastosłupem nazywamy wielościan, który ma dwa przystające wielokąty położone na płaszczyznach równoległych – **podstawy graniastosłupa** – a pozostałe ściany, zwane **ścianami bocznymi**, są równoległobokami.

Opisując graniastosłupy posługujemy się określeniami: trójkątny, czworokątny, pięciokątny itp., w zależności od tego, jaki wielokąt jest w podstawie graniastosłupa.

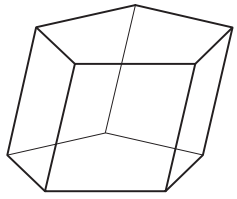
Graniastosłupy, których ściany boczne są prostokątami, nazywamy **graniastosłupami prostymi** (rys. a), pozostałe – **graniastosłupami pochyłymi** (rys. b).

a)



graniastosłup pięciokątny prosty

b)



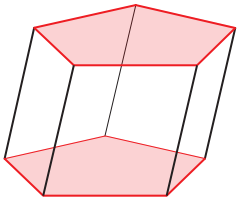
graniastosłup pięciokątny pochyły

Wysokością graniastosłupa nazywamy odcinek, a także jego długość, który jest prostopadły do płaszczyzn zawierających podstawy i który charakteryzuje się tym, że jeden jego koniec należy do jednej płaszczyzny, a drugi koniec do drugiej płaszczyzny.

Zauważ, że w graniastosłupie prostym każda krawędź boczna jest wysokością.

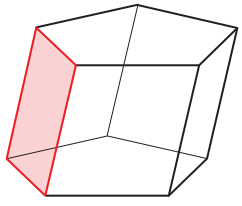
Na rysunkach poniżej zaznaczono kolorem czerwonym w graniastosłupie pięciokątnym wybrane elementy.

a)



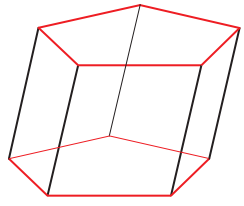
podstawy graniastosłupa

b)



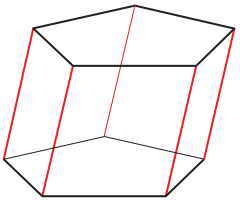
ściana boczna

c)



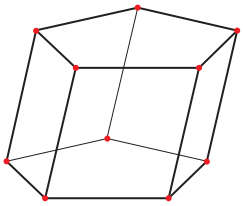
krawędzie podstaw

d)



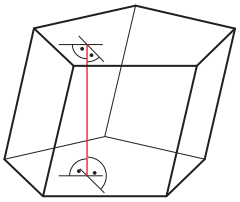
krawędzie boczne

e)



wierzchołki graniastosłupa

f)



wysokość graniastosłupa

Graniastosłup prawidłowy jest to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, czyli wielokąt, który ma wszystkie boki równej długości i wszystkie kąty wewnętrzne równej miary.

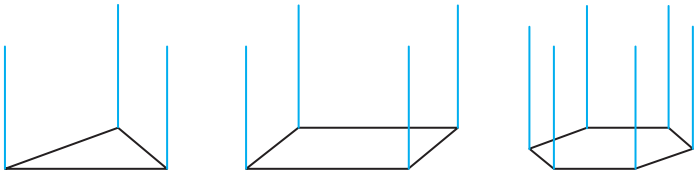
Tak więc np. graniastosłup prawidłowy trójkątny to graniastosłup, którego podstawami są trójkąty równoboczne, a ścianami bocznymi – prostokąty.
Przypomnijmy jeszcze określenie prostopadłościanu i sześcianu.

Prostopadłościan jest to graniastosłup prosty, którego podstawami są prostokąty.
Sześcian jest to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami.

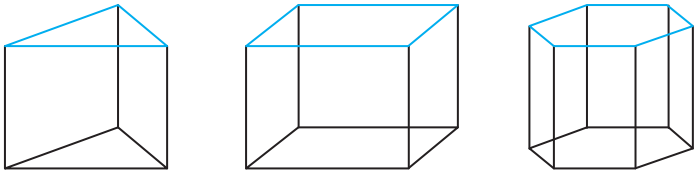
Aby narysować graniastosłup, wykorzystujemy własności rzutu równoległego na płaszczyznę. Krawędzie boczne są odcinkami równoległymi o równych długościach, więc na rysunku też są równoległe i mają równą długość, podobnie jak i odpowiednie pary krawędzi podstaw.
Rysowanie wygodnie jest zacząć od dolnej podstawy graniastosłupa.



Następnie dorysowujemy krawędzie boczne.



Na koniec rysujemy krawędzie górnej podstawy.



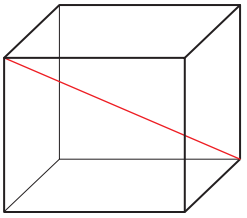
UWAGA: Graniastosłupy staraj się rysować tak, aby ich krawędzie boczne się nie pokrywały.

Zauważ, że krawędzie graniastosłupa, które nie są równoległe do rzutni, na rysunku są krótsze niż w rzeczywistości.

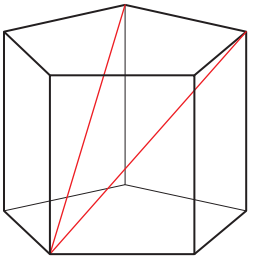
Przekątną wielościanu nazywamy odcinek, którego końcami są wierzchołki wielościanu i który nie zawiera się w ścianie wielościanu.

Zauważmy, że:

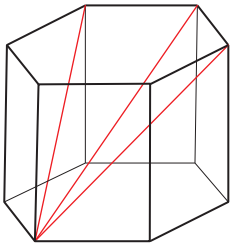
- z każdego wierzchołka graniastosłupa czworokątnego wychodzi jedna przekątna



- z każdego wierzchołka graniastosłupa pięciokątnego wychodzą dwie przekątne.



- z każdego wierzchołka graniastosłupa sześciokątnego wychodzą trzy przekątne.



Wyznaczymy liczbę przekątnych graniastosłupa, którego podstawą jest n-kąt, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ i $n > 2$.
Z określenia przekątnej wielościanu wynika, że łączy ona wierzchołki należące do różnych podstaw. Liczba wszystkich przekątnych jest więc równa sumie przekątnych wychodzących z wierzchołków jednej podstawy.

Rozważmy wierzchołki dolnej podstawy. Z każdego takiego wierzchołka można poprowadzić n odcinków do wierzchołków górnej podstawy, ale tylko $n-3$ z nich jest przekątnymi graniastosłupa. Z pozostałych trzech odcinków: jeden jest krawędzią boczną i dwa są przekątnymi ścian bocznych. Wierzchołków w podstawie jest n, zatem wszystkich przekątnych graniastosłupa jest $n(n-3)$.

Twierdzenie 1

Liczba przekątnych graniastosłupa, którego podstawą jest n-kąt, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 2$, wynosi $n(n-3)$.

Przykład 1.

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa 60. Wyznaczymy liczbę przekątnych tego graniastosłupa.

Oznaczmy przez n, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 2$, liczbę krawędzi podstawy rozpatrywanego graniastosłupa. Uwzględniając, że graniastosłup ma dwie podstawy oraz że krawędzi bocznych ma również n, otrzymujemy równanie:

$3n = 60 \quad /:3$

$n = 20$

Podstawą graniastosłupa jest 20-kąt.

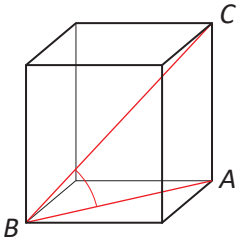
Wyznaczamy liczbę przekątnych graniastosłupa. Zgodnie z twierdzeniem 1. mamy:

$20 \cdot (20-3) = 20 \cdot 17 = 340$

Graniastosłup ma 340 przekątnych.

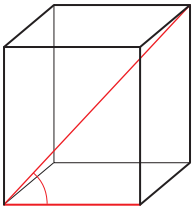
Ćwiczenie 1. Pewien graniastosłup ma 208 przekątnych. Ile ma wierzchołków?

Na poniższych rysunkach zostały zaznaczone pewne kąty w graniastosłupach prawidłowych czworokątnych.

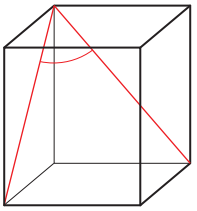


Kąt między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy.

Zauważ, że odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka BC na płaszczyznę podstawy.



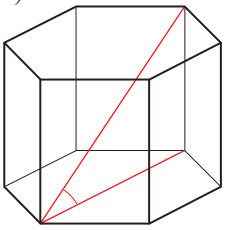
Kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią podstawy.



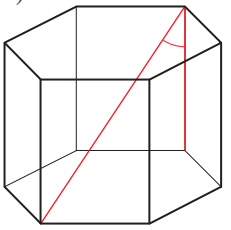
Kąt między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

Ćwiczenie 2. Opisz zaznaczone kąty w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym.

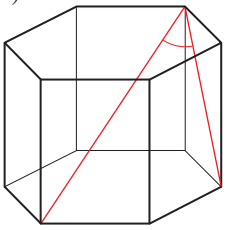
a)



b)



c)



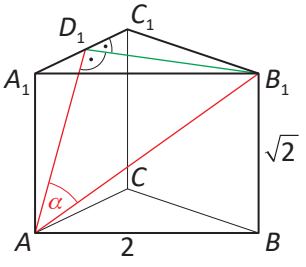
Przykład 2.

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 2, a wysokość graniastosłupa ma długość $\sqrt{2}$. Wyznaczymy miarę kąta między:

a) przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną,
b) przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

Niech dany będzie graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCA_1B_1C_1$.

Ad a) Wyznaczymy miarę α kąta między przekątną AB_1 a płaszczyzną (ACC_1A_1).



W tym celu znajdujemy rzut prostokątny przekątnej AB_1 na płaszczyznę (ACC_1A_1). Otrzymujemy odcinek AD_1, przy czym punkt D_1 jest środkiem odcinka A_1C_1 (dlaczego?).

Obliczamy długość przyprostokątnych AD_1 i B_1D_1 trójkąta prostokątnego AB_1D_1.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego AD_1A_1 i obliczamy $|AD_1|$:

$$|AD_1|^2 = |AA_1|^2 + |A_1D_1|^2$$
$$|AD_1|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$$
$$|AD_1|^2 = 3$$
$$|AD_1| = \sqrt{3}, \text{ bo } |AD_1| > 0$$

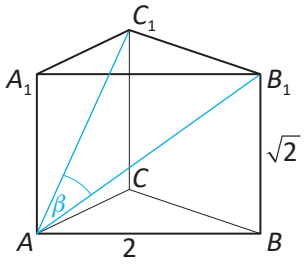
Odcinek D_1B_1 jest wysokością w trójkącie równobocznym $A_1B_1C_1$ (o boku mającym długość 2), więc

$$|D_1B_1| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Ponieważ $|AD_1| = |D_1B_1| = \sqrt{3}$, więc trójkąt prostokątny AB_1D_1 jest trójkątem równoramiennym, stąd wynika, że

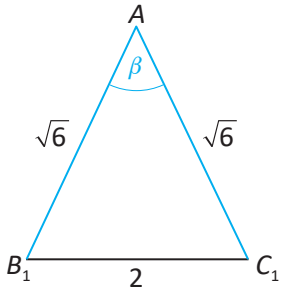
$$\alpha = 45^\circ$$

Ad b) Oznaczymy szukaną miarę kąta przez β.



Zauważ, że
$|AB_1| = |AC_1| = \sqrt{6}$

Wyznaczymy cos β. Zastosujemy twierdzenie cosinusów.

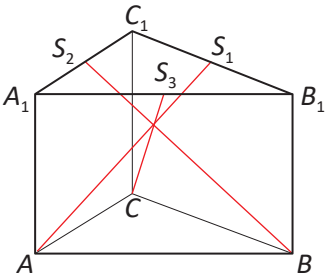


$$|B_1C_1|^2 = |AB_1|^2 + |AC_1|^2 - 2 \cdot |AB_1| \cdot |AC_1| \cdot \cos\beta$$
$$2^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos\beta$$
$$4 = 6 + 6 - 2 \cdot 6 \cdot \cos\beta$$
$$4 = 12 - 12 \cdot \cos\beta$$
$$8 = 12 \cdot \cos\beta$$
$$\cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \text{stąd} \quad \beta \approx 48^\circ$$

Kąt między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną ma miarę 45°, natomiast kąt między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę ok. 48°.

Przykład 3.

W graniastosłupie trójkątnym łączymy wierzchołki A, B, C jednej podstawy ze środkami S_1, S_2, S_3 przeciwległych krawędzi drugiej podstawy (zobacz rysunek). Wykażemy, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.



Oznaczmy wierzchołki graniastosłupa, jak na rysunku powyżej; punkty S_1, S_2, S_3 oznaczają środki odpowiednich krawędzi górnej podstawy. Wykażemy najpierw, że odcinki AS_1 i BS_2 przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.

Z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie $A_1B_1C_1$ otrzymujemy:

$(1)\ S_2S_1 \parallel A_1B_1$ i $|S_2S_1| = \frac{1}{2}|A_1B_1|$

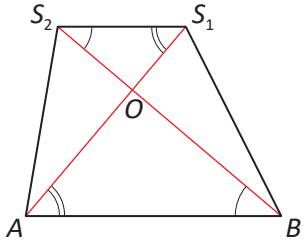
Ściana boczna ABB_1A_1 jest równoległobokiem, więc

$(2)\ AB \parallel A_1B_1$ i $|AB| = |A_1B_1|$

Z punktów (1) i (2) wynika (zobacz twierdzenie 5., str. 225), że

$$S_2S_1 \parallel AB \text{ i } |S_2S_1| = \frac{1}{2}|AB|.$$

Tak więc punkty A, B, S_1, S_2 leżą na jednej płaszczyźnie. Wyznaczają na niej trapez. Odcinki AS_1 i BS_2 przecinają się w punkcie, który oznaczymy O.



Z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wynika, że

$$|\sphericalangle S_2S_1A| = |\sphericalangle S_1AB| \text{ i } |\sphericalangle S_1S_2B| = |\sphericalangle S_2BA|$$

Zatem na mocy cechy (kkk) podobieństwa trójkątów otrzymujemy, że

$$\triangle OS_1S_2 \sim \triangle OAB$$

Tak więc boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta.

Mamy:

$$\frac{|S_1S_2|}{|AB|}=\frac{1}{2}=\frac{|S_1O|}{|OA|}=\frac{|S_2O|}{|OB|},$$

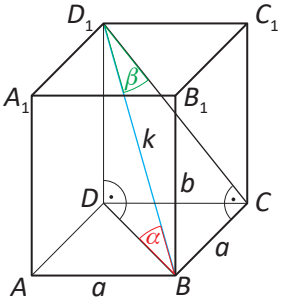
czyli punkt O dzieli przekątne AS_1 i BS_2 w stosunku 1 : 2 $\left(\text{licząc od punktów } S_1, S_2\right)$. Rozumując podobnie można wykazać, że przekątne BS_2 i CS_3 przecinają się w punkcie O_1, który dzieli je w stosunku 1 : 2, licząc od punktów S_2, S_3. Ale odcinek BS_2 można podzielić w stosunku 1 : 2, licząc od punktu S_2, tylko na jeden sposób, więc

$$O_1 = O.$$

Zatem trzy przekątne graniastosłupa przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.

Przykład 4.

Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α i tworzy z każdą ścianą boczną kąt β. Wykażemy, że $\cos^2\alpha + \cos 2\beta = 1$.



Założenie: Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, jak na rysunku obok.

a – długość krawędzi podstawy, $a > 0$

b – wysokość graniastosłupa, $b > 0$

k – długość przekątnej graniastosłupa, $k > 0$

α – kąt między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy

β – kąt między przekątną graniastosłupa a ścianą boczną

Teza: $\cos^2\alpha + \cos 2\beta = 1$

Dowód: Wyznaczamy $\cos\alpha$. Trójkąt DBD_1 jest trójkątem prostokątnym, zatem

$$\frac{|DB|}{|D_1B|}=\cos\alpha, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{k}=\cos\alpha, \quad \text{stąd}$$

$$(1)\quad \cos^2\alpha=\frac{2a^2}{k^2}$$

Obliczamy $|D_1C|$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego CC_1D_1.

$$|D_1C|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Wyznaczamy $\cos\beta$.

Trójkąt BCD_1 jest trójkątem prostokątnym, zatem

$$\frac{|D_1C|}{|D_1B|}=\cos\beta, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{k}=\cos\beta$$

Wyznaczamy $\cos 2\beta$. Korzystamy ze wzoru $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$. Zatem

$$\cos^2\beta=\frac{a^2+b^2}{k^2}, \quad \text{stąd}$$

$$2\cos^2\beta-1=\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{k^2}-1, \quad \text{czyli}$$

$$(2)\quad \cos 2\beta=\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{k^2}-1$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego DBD_1. Otrzymujemy

$(3)\ 2a^2 + b^2 = k^2$

Obliczamy $\cos^2\alpha + \cos 2\beta$. Korzystamy z zależności (1), (2) i (3)

$$\cos^2\alpha+\cos 2\beta=\frac{2a^2}{k^2}+\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{k^2}-1=\frac{2\left(2a^2+b^2\right)}{k^2}-1=\frac{2k^2}{k^2}-1=2-1=1$$

co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz długość przekątnej:
   a) prostopadłościanu, którego krawędzie mają długość 3 cm, 4 cm, 12 cm,
   b) graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 3 cm, a przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°.
2. Przekątne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają długość 15 cm i $3\sqrt{21}$ cm. Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa.
3. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCA_1B_1C_1$ poprowadzono przekątną ściany bocznej AC_1. Czy kąt AC_1B_1 jest prosty? Odpowiedź uzasadnij.
4. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 10 cm, a wysokość – $10\sqrt{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta:
   a) nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy graniastosłupa,
   b) między przekątną graniastosłupa a krawędzią podstawy.

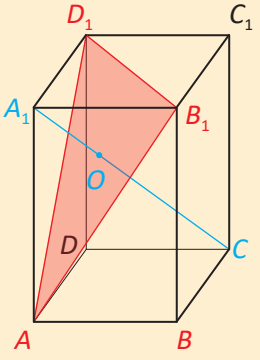
5. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez, w którym trzy krótsze boki mają taką samą długość, a czwarty bok tego trapezu ma taką długość jak wysokość graniastosłupa. Wiedząc, że kąt dwuścienny między dwiema przystającymi ścianami bocznymi ma miarę 120°, oblicz tangens kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do przekątnej podstawy.

6. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o polu równym 180 cm^2. Jedna z przekątnych podstawy ma długość 30 cm. Wysokość graniastosłupa jest o 4 cm dłuższa od krótszej przekątnej podstawy.
   a) Oblicz długości przekątnych graniastosłupa.
   b) Wyznacz kąt, pod jakim każda z przekątnych graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy.

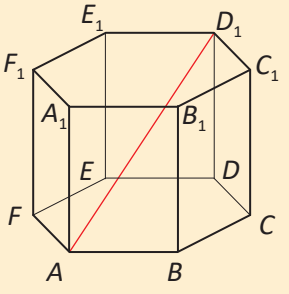
7. Krawędzie prostopadłościanu mają długość 8 cm, 9 cm, 12 cm. Niech α, β, γ oznaczają miary kątów nachylenia przekątnej tego prostopadłościanu do trzech różnych ścian o wspólnym wierzchołku. Oblicz:
   a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

D 8. Udowodnij, że w dowolnym graniastosłupie, którego podstawą jest równoległobok, przekątne przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je na połowy.

D 9. Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Przekątna A_1C przebija płaszczyznę (AB_1D_1) w punkcie O (zobacz rysunek obok).
Wykaż, że $|A_1O| : |OC| = 1 : 2$.



10. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Przekątna AD_1 graniastosłupa tworzy z płaszczyzną (DCC_1D_1) kąt 45°. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej AD_1 do płaszczyzny podstawy graniastosłupa.



Ostrosłupy

Definicja 1.

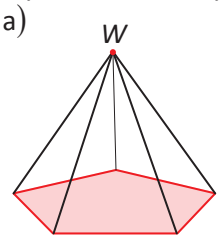
Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ze ścian, zwana podstawą jest wielokątem, a pozostałe ściany są trójkątami o wspólnym wierzchołku, nie leżącym na płaszczyźnie podstawy, zwanym wierzchołkiem ostrosłupa.

Opisując ostrosłupy, posługujemy się określeniami: trójkątny, czworokątny, pięciokątny itp., – w zależności od tego, jaki wielokąt jest w podstawie ostrosłupa.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek, a także jego długość, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim końcem – jego rzut prostokątny na płaszczyznę podstawy. Punkt będący rzutem prostokątnym wierzchołka na płaszczyznę podstawy nazywamy **spodkiem wysokości ostrosłupa**.

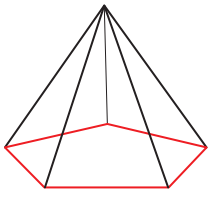
Na rysunkach poniżej kolorem czerwonym zaznaczono w ostrosłupie pięciokątnym wybrane elementy.

a)



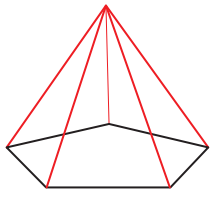
podstawa i wierzchołek *W* ostrosłupa

b)



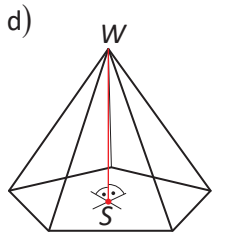
krawędzie podstawy ostrosłupa

c)



krawędzie boczne ostrosłupa

d)



wysokość *WS* i spodek wysokości *S* ostrosłupa

Ostrosłupy proste

Powiemy, że okrąg jest opisany na wielokącie wtedy, gdy wszystkie wierzchołki tego wielokąta należą do danego okręgu. Na danym wielokącie można opisać okrąg tylko wtedy, gdy istnieje punkt równoodległy od wszystkich wierzchołków danego wielokąta.

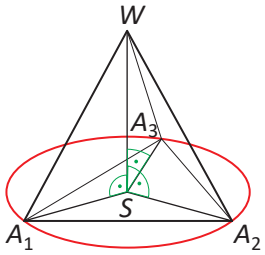
Definicja 2.

Ostrosłupem prostym nazywamy ostrosłup spełniający dwa warunki:

1) na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg,
2) spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Przykład 1.

Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt $A_1A_2A_3$. Wierzchołkiem tego ostrosłupa jest punkt W, a spodkiem wysokości – punkt S. Wykażemy, że trójkąty A_1SW, A_2SW, A_3SW są przystające.



Ostrosłup trójkątny $A_1A_2A_3W$ jest prosty, więc zgodnie z definicją 2. spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Punkt S jest równoodległy od wierzchołków A_1, A_2, A_3, czyli
$|SA_1| = |SA_2| = |SA_3|$.

Rozpatrujemy trójkąty: A_1SW, A_2SW, A_3SW. O tych trójkątach wiadomo, że:

- są prostokątne
  $|\sphericalangle A_1SW| = |\sphericalangle A_2SW| = |\sphericalangle A_3SW| = 90°$ – bo odcinek WS jest wysokością
- mają wspólną przyprostokątną WS
- pozostałe przyprostokątne w tych trójkątach mają równe długości:
  $|SA_1| = |SA_2| = |SA_3|$

Na podstawie cechy (bkb) trójkąty A_1SW, A_2SW, A_3SW są przystające
$\triangle A_1SW \equiv \triangle A_2SW \equiv \triangle A_3SW$

Z przystawania trójkątów $\triangle A_1SW$, $\triangle A_2SW$ i $\triangle A_3SW$ w przykładzie 1. wynika, że krawędzie boczne A_1W, A_2W, A_3W ostrosłupa prostego $A_1A_2A_3W$:
– mają jednakową długość
– są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

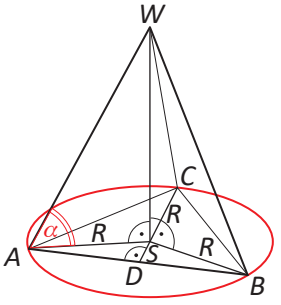
Następujące warunki są równoważne:
1) ostrosłup jest ostrosłupem prostym
2) wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość
3) wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa tworzą jednakowe kąty z płaszczyzną podstawy.

Przykład 2.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 12$, $|AC| = |BC| = 10$. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość. Wysokość ostrosłupa jest równa 15. Wyznaczymy kąty, jakie tworzą krawędzie boczne z płaszczyzną podstawy.

Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość. Zgodnie z twierdzeniem 1. ten ostrosłup jest prosty. Zatem spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a wszystkie jego krawędzie boczne tworzą jednakowe kąty z płaszczyzną podstawy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



$|AC| = |BC| = 10$, $|AB| = 12$
CD – wysokość trójkąta ABC,
$|AD| = |BD|$
S – spodek wysokości ostrosłupa,
$|WS| = 15$
R – promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa; $|AS| = |BS| = |CS| = R$
α – szukany kąt

- Obliczamy R W tym celu wyznaczymy pole trójkąta ABC na dwa sposoby.

  Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ADC otrzymujemy
  $|CD| = 8$

  Pole P trójkąta ABC obliczamy, korzystając ze wzoru: $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$,

  $P = 48$

  Wiesz również, że $P = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |AC|}{4 \cdot R}$, zatem $R = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |AC|}{4 \cdot P}$, stąd

  $R = 6{,}25$
- Obliczamy $\operatorname{tg}\alpha$ Korzystamy z definicji tangensa w trójkącie prostokątnym ASW.

  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|WS|}{R}$, więc $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$

  Z tablic trygonometrycznych odczytujemy miarę kąta α:
  $\alpha \approx 67{,}4^\circ$

Krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem ok. 67°.

Ćwiczenie 1. Oblicz promień R z przykładu 2., korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DBS. Następnie oblicz długość krawędzi bocznych tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 2. Krawędź boczna ostrosłupa prostego ma długość 10 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α takim, że $\sin\alpha = 0{,}96$. Oblicz promień okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa.

Definicja 3.

Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Z określenia ostrosłupa prawidłowego i z twierdzenia 1. wynika następujący wniosek.

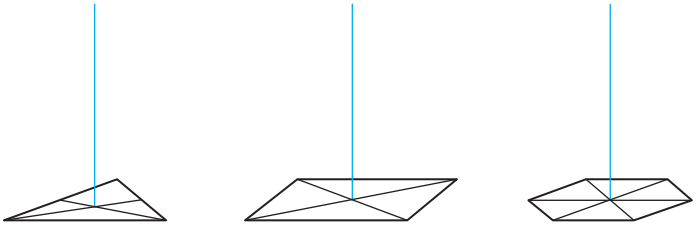
Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Aby narysować ostrosłup prawidłowy, skorzystamy – podobnie jak w przypadku rysowania graniastosłupów – z własności rzutu równoległego na płaszczyznę.

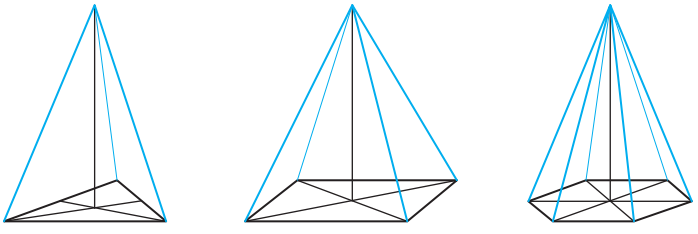
Rysowanie zaczniemy od podstawy ostrosłupa.



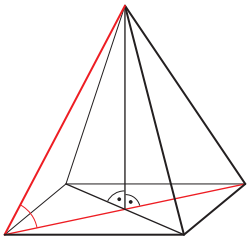
Spodek wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest punktem przecięcia środkowych podstawy (wyjaśnij, dlaczego). Dla ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i sześciokątnego jest to punkt przecięcia przekątnych podstawy. Z tego punktu prowadzimy wysokość ostrosłupa.



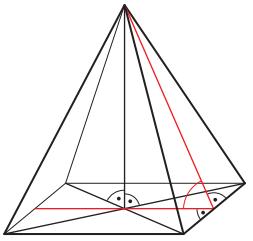
Długość wysokości dobieramy tak, aby krawędzie boczne, poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa do wierzchołków podstawy, nie pokrywały się ani ze sobą, ani z krawędziami podstawy.



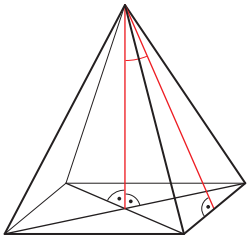
Omówimy teraz wybrane kąty w ostrosłupach na przykładzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.



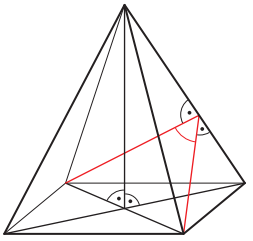
Kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy.



Kąt między płaszczyzną ściany bocznej a płaszczyzną podstawy.



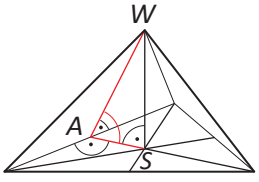
Kąt między wysokością ostrosłupa a płaszczyzną ściany bocznej.



Kąt między płaszczyznami sąsiednich ścian bocznych.

Przykład 3.

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt między płaszczyzną ściany bocznej a płaszczyzną podstawy ma miarę 45°. Krawędź podstawy ma długość 12. Wyznaczymy wysokość ostrosłupa i wysokość ściany bocznej.



Oznaczmy:

WS – wysokość ostrosłupa,

WA – wysokość ściany bocznej.

Wysokość ostrosłupa WS jest jednocześnie przyprostokątną w trójkącie prostokątnym ASW, natomiast wysokość ściany bocznej WA jest przeciwprostokątną w tym trójkącie.

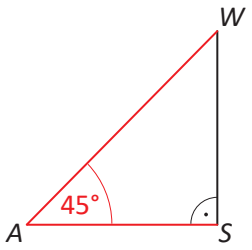
Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny. Wyznaczamy wysokość h tej podstawy.

$$h=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

Znajdujemy długość odcinka AS. Z twierdzenia o środkowych w trójkącie:

$$|AS|=\frac{1}{3}h, \quad \text{stąd} \quad |AS|=2\sqrt{3}$$

W celu wyznaczenia wysokości ostrosłupa i wysokości ściany bocznej rozpatrzmy trójkąt *ASW*. Jest to trójkąt prostokątny równoramienny.



$|AS| = |WS|$ i $|AW| = \sqrt{2}|AS|$

Mamy zatem

$|WS| = 2\sqrt{3}$ i $|AW| = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

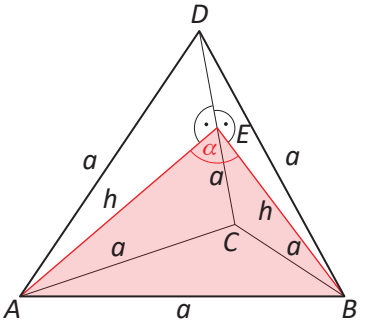
Wysokość ostrosłupa jest równa $2\sqrt{3}$, a wysokość ściany bocznej $2\sqrt{6}$.

Ćwiczenie 3. Podaj przybliżoną miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa z przykładu 3. do płaszczyzny podstawy.

Wśród ostrosłupów prawidłowych trójkątnych istnieje taki, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami równobocznymi. Ten ostrosłup nazywamy czworościanem foremnym.

Przykład 4.

Obliczymy cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi czworościanu foremnego.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.
ABCD – czworościan foremny
a – długość krawędzi czworościanu
h – wysokość ściany bocznej
α – miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

Kąt α jest kątem liniowym kąta dwuściennego między ścianami bocznymi ostrosłupa. Aby go wyznaczyć, prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do krawędzi bocznej. Wygodnie jest wybrać płaszczyznę, która zawiera wysokości ścian bocznych ostrosłupa.

Wysokości ścian bocznych są jednocześnie środkowymi, więc punkt *E* jest środkiem krawędzi *CD* oraz $|\sphericalangle AEB| = \alpha$.

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta *ABE* wyznaczamy $\cos\alpha$.

$|AB|^2 = |BE|^2 + |AE|^2 - 2 \cdot |BE| \cdot |AE| \cdot \cos\alpha$, czyli

$a^2 = 2h^2 - 2h^2\cos\alpha$

$\frac{a^2}{2h^2} = 1 - \cos\alpha$, stąd $\cos\alpha = 1 - \frac{a^2}{2h^2}$

Wyznaczamy h w zależności od a.

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$ – bo ściana boczna jest trójkątem równobocznym

zatem

$$\cos\alpha=1-\frac{a^2}{2\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1-\frac{a^2}{\frac{3a^2}{2}}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi czworościanu foremnego jest równy $\frac{1}{3}$.

Ostrosłupy, które nie są proste

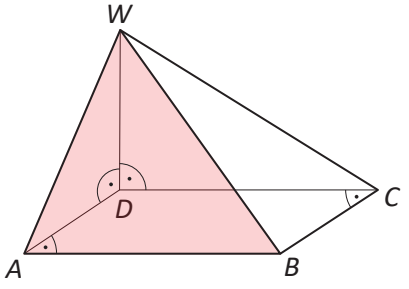
Przykład 5.

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt. Dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy.

a) Wykażemy, że dwie pozostałe ściany boczne są trójkątami prostokątnymi.

b) Wiedząc dodatkowo, że stosunek długości boków prostokąta w podstawie jest równy 3 : 1, a najdłuższa krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{30}}{10}$, obliczymy miary kątów, jakie tworzą dwie pozostałe ściany ostrosłupa z płaszczyzną podstawy.

Ad a) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



ABCD – prostokąt
WD – wysokość ostrosłupa
ADW i *DCW* – ściany boczne prostopadłe do płaszczyzny $(ABCD)$

Trójkąty *ADW* i *DCW* są prostokątne.

Rozpatrzmy trójkąt *ABW*. Zauważamy, że:

$AB\perp AD$ – bo z założenia podstawa *ABCD* jest prostokątem

$WD\perp$ pł. $(ABCD)$, więc odcinek *AD* jest rzutem prostokątnym odcinka *AW*,

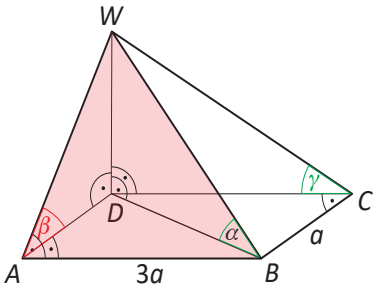
zatem – na mocy twierdzenia o trzech prostych prostopadłych – mamy:

$AB\perp AW$,

a to znaczy, że $|\sphericalangle BAW|=90°$, czyli trójkąt *ABW* jest trójkątem prostokątnym.

W przypadku trójkąta *BCW* dowód jest analogiczny. Wskaż kąt prosty w tym trójkącie.

Ad b) Przyjmijmy dodatkowe oznaczenia.



$|AB| = |CD| = 3a$, $|AD| = |BC| = a$, $a > 0$
BW – najdłuższa krawędź boczna
$|\sphericalangle DBW| = \alpha$ – kąt, jaki tworzy krawędź BW z płaszczyzną $(ABCD)$
Ponadto oznaczmy:
$|\sphericalangle DAW| = \beta$ i $|\sphericalangle DCW| = \gamma$

- Pokażemy, że ściana boczna ABW tworzy z płaszczyzną $(ABCD)$ kąt β.
  Aby wyznaczyć kąt między płaszczyznami (ABW) i $(ABCD)$, szukamy płaszczyzny prostopadłej do ich wspólnej krawędzi, którą jest prosta AB. Okazuje się, że taką płaszczyzną jest płaszczyzna (ADW), ponieważ
  $AW \perp AB$ – z punktu a)
  $AD \perp AB$ – z założenia
  czyli – na mocy twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny
  pł. $(ADW) \perp$ pr. AB
  W takim razie kąt DAW, gdzie $|\sphericalangle DAW| = \beta$, jest kątem liniowym kąta nachylenia płaszczyzny ściany bocznej ABW do płaszczyzny podstawy.
  Podobnie można pokazać, że ściana boczna BCW jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem γ.
- Wyznaczymy miary kątów β i γ.
  Obliczymy $|DB|$ i $|DW|$, a następnie $\operatorname{tg}\beta$ i $\operatorname{tg}\gamma$.

$$|DB| = \sqrt{9a^2 + a^2} = a\sqrt{10}$$

$$\frac{|WD|}{|DB|} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{i z założenia} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}, \quad \text{więc}$$

$$|WD| = a\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{30}}{10} = a\sqrt{3}$$

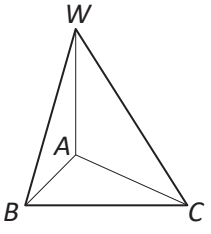
W trójkątach prostokątnych ADW i DCW mamy:

$\operatorname{tg}\beta = \frac{\lvert WD\rvert}{\lvert AD\rvert}$, stąd $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$	$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\lvert WD\rvert}{\lvert DC\rvert}$, stąd $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\beta = 60°$, bo $\beta \in (0°, 90°)$	$\gamma = 30°$, bo $\gamma \in (0°, 90°)$

Ćwiczenie 4. Dany jest ostrosłup $ABCW$, w którym krawędź boczna AW jest wysokością oraz $|AW| = |AB| = |BC| = |CA|$.

a) Narysuj w zeszycie ostrosłup $ABCW$ i zaznacz kąt α nachylenia ściany BCW do płaszczyzny podstawy.

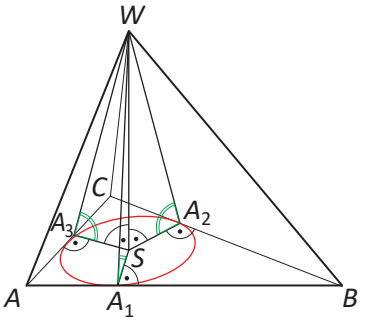
b) Oblicz sinus kąta α.



Przykład 6.

W ostrosłupie trójkątnym ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Wykażemy, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę tego ostrosłupa.

Wprowadźmy oznaczenia:



$ABCW$ – ostrosłup trójkątny
punkt S – spodek wysokości ostrosłupa
Punkty A_1, A_2, A_3 należą odpowiednio do krawędzi AB, BC, AC oraz

$$SA_1 \perp AB, \quad SA_2 \perp BC, \quad SA_3 \perp AC$$

Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że

$$WA_1 \perp AB, \quad WA_2 \perp BC, \quad WA_3 \perp AC$$

Płaszczyzny (WA_1S), (WA_2S) i (WA_3S) są odpowiednio prostopadłe do krawędzi AB, BC i AC.

Kąty SA_1W, SA_2W, SA_3W – to kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy.

Z założenia wiemy, że

$$|\sphericalangle WA_1S| = |\sphericalangle WA_2S| = |\sphericalangle WA_3S| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle A_1SW| = |\sphericalangle A_2SW| = |\sphericalangle A_3SW| = 90°$$

Trójkąty WSA_1, WSA_2 i WSA_3 mają takie same kąty i wspólny bok WS. Na podstawie cechy (kbk) te trójkąty są przystające

$$\triangle WSA_1 \equiv \triangle WSA_2 \equiv \triangle WSA_3$$

Z przystawania tych trójkątów wynika, że $|SA_1| = |SA_2| = |SA_3|$. Zatem punkt S jest równoodległy od krawędzi podstawy i jest środkiem okręgu wpisanego w tę podstawę.

Ćwiczenie 5. Przypomnij sobie, kiedy okrąg jest wpisany w trójkąt i kiedy okrąg jest wpisany w czworokąt. Jak wyznaczamy środek tego okręgu?

Ogólnie powiemy, że okrąg jest wpisany w wielokąt wypukły wtedy, gdy okrąg ten jest styczny do wszystkich boków tego wielokąta. Okrąg można wpisać w dany wielokąt wypukły wtedy, gdy istnieje punkt równoodległy od boków wielokąta.

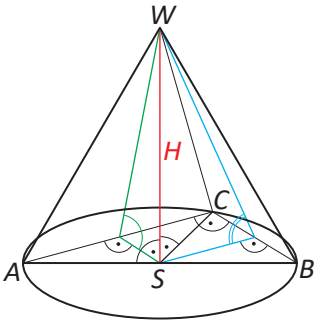
Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

W podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg i spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem tego okręgu tylko wtedy, gdy wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.

Zauważ, że w ostrosłupach prawidłowych wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.
Istnieją natomiast ostrosłupy proste, których ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod różnymi kątami. Przykładem jest ostrosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych AC i BC, gdzie $|AC| \neq |BC|$. Spodek S wysokości H ostrosłupa jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta ABC, zobacz rysunek poniżej.

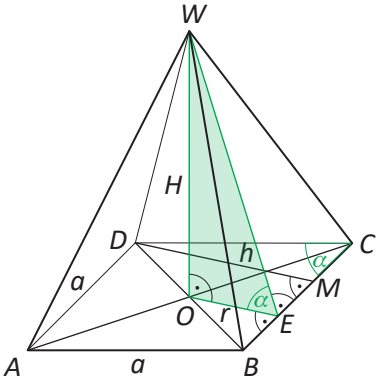
Ściana boczna ABW jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Tangens kąta nachylenia ściany BCW do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{H}{0{,}5|AC|}$, a tangens kąta nachylenia ściany ACW do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{H}{0{,}5|BC|}$.



Przykład 7.

Podstawą ostrosłupa jest romb o kącie ostrym α. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wiedząc, że stosunek wysokości ostrosłupa do długości krawędzi podstawy jest równy $\sqrt{3}$, obliczymy $\cos\alpha$.

Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Zatem spodkiem wysokości ostrosłupa jest środek okręgu wpisanego w podstawę. W tym wypadku jest to punkt przecięcia się przekątnych rombu.
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



a – długość boku rombu $ABCD$
h – wysokość rombu $ABCD$, $h = |DM|$
r – promień okręgu wpisanego w romb $ABCD$

$$r = |OE| = \frac{h}{2}$$

α – kąt ostry rombu i kąt nachylenia każdej ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy
H – wysokość ostrosłupa $ABCDW$, $H = |OW|$

Z treści zadania wiemy, że

$$(1)\quad \frac{H}{a} = \sqrt{3}$$

Wyznaczamy wysokość rombu. Trójkąt DMC jest trójkątem prostokątnym o kącie ostrym α.

Mamy:

$$\frac{|DM|}{|DC|}=\sin\alpha, \quad \text{czyli} \quad \frac{h}{a}=\sin\alpha, \quad \text{stąd}$$

$(2)\ h=a\cdot\sin\alpha$

Wyznaczamy wysokość ostrosłupa. Trójkąt *WOE* jest trójkątem prostokątnym o kącie ostrym α, więc

$$\frac{|OW|}{|OE|}=\operatorname{tg}\alpha, \quad \text{czyli} \quad \frac{H}{r}=\operatorname{tg}\alpha, \quad \text{stąd}$$

$$H=\frac{h}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

Po uwzględnieniu warunku (2) otrzymujemy zależność

$$(3)\ H=\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

a stąd, po uwzględnieniu warunku (1), dostajemy równanie:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{2}=\sqrt{3}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}=\sqrt{3}, \quad \text{stąd} \quad 1-\cos^2\alpha=2\sqrt{3}\cos\alpha$$

Obliczamy $\cos\alpha$

$$\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\cos\alpha-1=0$$

Podstawiamy zmienną pomocniczą t, $t=\cos\alpha$. Mamy:

$$t^2+2\sqrt{3}\cdot t-1=0$$

$\Delta=16 \qquad t_1=-\sqrt{3}-2 \qquad t_2=2-\sqrt{3}$ zatem

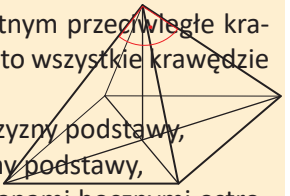
$\cos\alpha=-\sqrt{3}-2$ równanie sprzeczne, bo $-\sqrt{3}-2<-1$

lub $\cos\alpha=2-\sqrt{3}$, $\quad 2-\sqrt{3}\in(0,\ 1)$

Ostatecznie otrzymaliśmy, że $\cos\alpha=2-\sqrt{3}$.

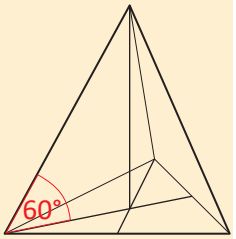
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, że jeśli w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przeciwległe krawędzie boczne są prostopadłe (zobacz rysunek obok), to wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Następnie podaj:



a) miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,
b) sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,
c) cosinus kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa.

2. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym miara kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równa 60° (zobacz rysunek obok).



D
   a) Wykaż, że wysokość ostrosłupa ma długość równą długości krawędzi podstawy.
   b) Wyznacz miarę kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.
   c) Oblicz cosinus kąta między sąsiednimi krawędziami bocznymi.

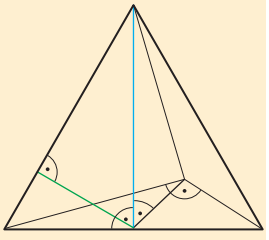
3. Wysokość czworościanu foremnego ma długość $\sqrt{6}$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego czworościanu.

4. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego boki mają długość 24 cm i 10 cm. Wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz:
   a) długość krawędzi bocznych i wysokość ostrosłupa,
   b) odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznych.

5. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 2. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz:
   a) długość krawędzi bocznej i wysokość ostrosłupa,
   b) miarę kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy,
   c) miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

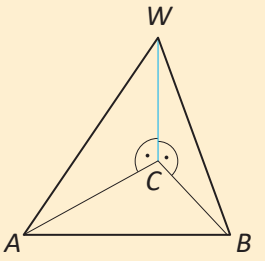
6. Podstawą ostrosłupa prostego jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC| = 4\sqrt{5}$ cm oraz $|AB| = 8$ cm. Wysokość ostrosłupa ma długość 12 cm. Oblicz odległość spodka wysokości ostrosłupa:
   a) od wierzchołków w podstawie b) od krawędzi bocznych.

7. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 12 cm. Odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznych jest równa 4,8 cm (zobacz rysunek obok). Wyznacz wysokość tego ostrosłupa.

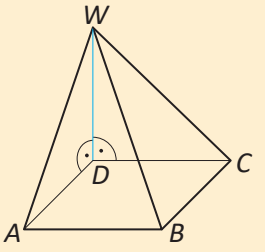


8. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 9 i 12. Wszystkie ściany boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąt ostry, którego cosinus jest równy 0,6. Oblicz:
   a) wysokości ścian bocznych, poprowadzonych do krawędzi podstawy,
   b) długości krawędzi bocznych tego ostrosłupa.

9. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny *ABC*, którego boki mają długość $4\sqrt{3}$ cm. Wysokość *CW* tego ostrosłupa ma długość 6 cm (zobacz rysunek obok). Wyznacz:
   a) długość krawędzi *AW*,
   b) cosinus kąta między dłuższymi krawędziami bocznymi,
   c) miarę kąta nachylenia ściany bocznej *BAW* do płaszczyzny podstawy *ABC*.



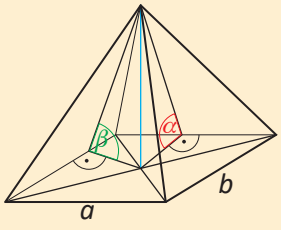
10. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat *ABCD*, krawędź boczna *DW* jest wysokością tego ostrosłupa (zobacz rysunek obok). Wiedząc, że $|BW| = \sqrt{34}$ oraz $|CW| = 5$, oblicz:
    a) długość krawędzi *DW*,
    b) cosinus kąta dwuściennego między płaszczyznami (BCW) i (ABW).



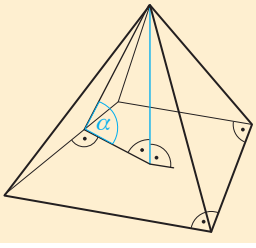
11. Podstawą ostrosłupa jest trapez *ABCD*. Wysokość tego trapezu ma długość 7 cm, a suma długości podstaw trapezu jest równa 48 cm. Oblicz długości przekątnych trapezu, wiedząc, że wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość.

12. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego przekątne mają długość 12 cm i $12\sqrt{3}$ cm. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Wyznacz:
    a) wysokość tego ostrosłupa,
    b) wysokości ścian bocznych, poprowadzone do krawędzi podstawy.

D 13. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok, którego boki mają długość *a* i *b*. Spodek wysokości ostrosłupa to punkt przecięcia się przekątnych tego równoległoboku. Niech α oznacza kąt między płaszczyzną podstawy, a ścianą boczną, zawierającą bok równoległoboku o długości *a*, zaś β – kąt między płaszczyzną podstawy, a ścianą boczną zawierającą bok równoległoboku o długości *b* (zobacz rysunek obok). Wykaż, że $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta = a : b$.



14. Podstawą ostrosłupa jest trapez prostokątny, którego obwód jest równy 50. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}5$ (zobacz rysunek obok). Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 15, oblicz długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

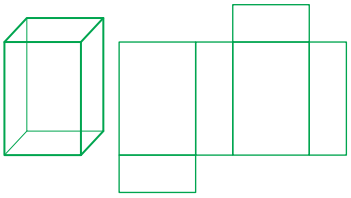


Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu

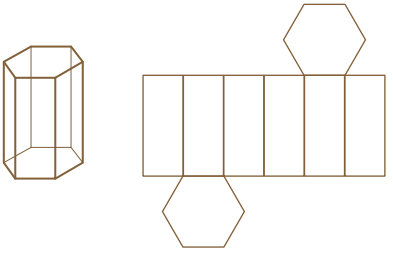
Siatka wielościanu to figura płaska w jednym kawałku, którą otrzymuje się przez rozcięcie powierzchni wielościanu wzdłuż niektórych krawędzi tak, aby ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie i były połączone ze sobą niektórymi bokami. Wielościan może mieć wiele różnych siatek.

Poniżej przedstawione są przykłady graniastosłupów i ich siatki.

a)



b)



Ćwiczenie 1. Sześcian ma 11 siatek. Narysuj na kartce co najmniej trzy z nich. Następnie wytnij je i spróbuj złożyć je tak, aby otrzymać model sześcianu.

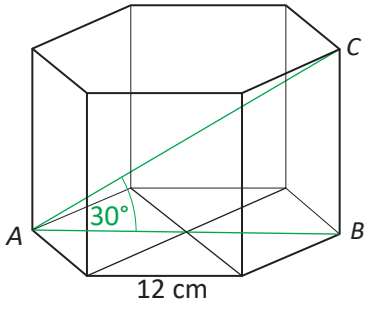
Pole powierzchni siatki wielościanu jest polem powierzchni całkowitej tego wielościanu. Przypomnijmy wzór na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa P_c jest równe sumie podwojonego pola podstawy P_p i pola powierzchni bocznej P_b graniastosłupa.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Przykład 1.

Obliczymy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym najdłuższa przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°, a krawędź podstawy ma długość 12 cm.



Rysunek obok przedstawia graniastosłup prawidłowy sześciokątny.

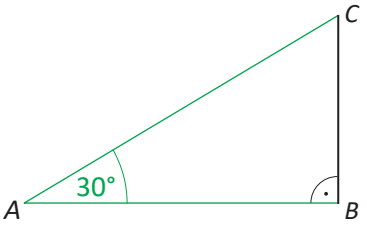
Odcinek *AC* jest najdłuższą przekątną w tym graniastosłupie.

- Obliczamy pole podstawy P_p.

Sześciokąt foremny o boku mającym długość 12 cm można podzielić na sześć trójkątów równobocznych, każdy o boku o długości 12 cm. Zatem

$$P_p = 6 \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 216\sqrt{3}$$

- Obliczamy długość krawędzi bocznej BC.
  Rozważmy trójkąt prostokątny ABC. Odcinek AB ma długość 24 cm. Dlaczego?



$$\frac{|BC|}{|AB|} = \operatorname{tg} 30^\circ, \text{ więc}$$

$$|BC| = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

- Obliczamy pole powierzchni bocznej P_b.
  Powierzchnia boczna składa się z sześciu przystających prostokątów o wymiarach 12 cm na $8\sqrt{3}$ cm.

$$P_b = 6 \cdot 12 \cdot 8\sqrt{3} = 576\sqrt{3}$$

- Obliczamy pole powierzchni całkowitej P_c.

$$P_c = P_b + 2P_p$$
$$P_c = 576\sqrt{3} + 2 \cdot 216\sqrt{3} = 1008\sqrt{3}$$

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe $1008\sqrt{3}$ cm^2.

Przykład 2.

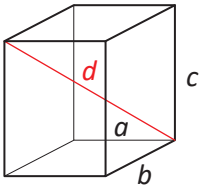
Przekątna prostopadłościanu ma długość d. Jakie największe pole powierzchni całkowitej może mieć taki prostopadłościan?

Oznaczmy literami a, b, c długości krawędzi wychodzące z jednego wierzchołka. Wówczas prawdziwa jest równość

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

(uzasadnij to dokładnie, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa).
Pole powierzchni całkowitej P_c prostopadłościanu możemy zapisać następująco:

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$$



Ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń wynika, że

$$2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2$$
$$2bc = b^2 + c^2 - (b-c)^2$$
$$2ac = a^2 + c^2 - (a-c)^2$$

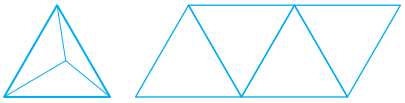
Stąd

$$P_c = 2(a^2 + b^2 + c^2) - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (a-c)^2$$

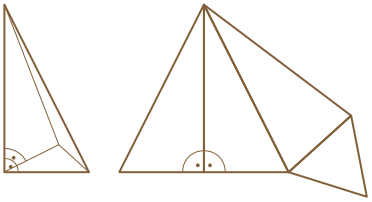
Łatwo zauważyć, że P_c przyjmuje największą wartość wtedy, gdy
$(a-b)^2=(b-c)^2=(a-c)^2=0$, czyli wtedy, gdy $a=b=c$.
Wówczas
$P_c=2d^2$
Największe pole powierzchni całkowitej P_c ma sześcian i wtedy $P_c=2d^2$.

Poniżej przedstawione są przykłady ostrosłupów i ich siatki.

a)



b)



Ćwiczenie 2. Narysuj siatkę:
a) ostrosłupa prawidłowego czworokątnego,
b) ostrosłupa prostego, którego podstawą jest prostokąt.

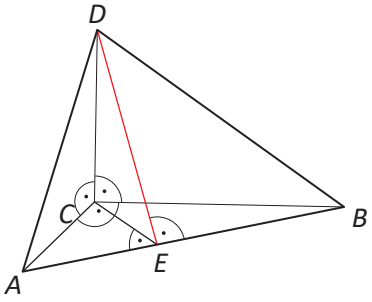
Przypomnijmy wzór na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa P_c jest równe sumie pola podstawy P_p i pola powierzchni bocznej P_b ostrosłupa.
$P_c=P_p+P_b$

Przykład 3.

W ostrosłupie trójkątnym trzy krawędzie o wspólnym końcu są do siebie parami prostopadłe i mają długość 6 cm, 8 cm i 6,4 cm. Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Szkicujemy ostrosłup tak, aby jego podstawą był trójkąt prostokątny o przyprostokątnych mających długości 6 cm i 8 cm.



Oznaczmy wierzchołki ostrosłupa tak, że
$|AC|=6$ cm
$|BC|=8$ cm
$|DC|=6{,}4$ cm

Pole powierzchni całkowitej jest równe sumie pól czterech trójkątów: *ABC*, *ABD*, *ACD* i *CBD*.

$$P_c = P_{ABC} + P_{ABD} + P_{ACD} + P_{CBD}$$

Obliczamy pola trójkątów *ABC*, *ACD*, *CBD*.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24 \qquad P_{ACD} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6{,}4 = 19{,}2 \qquad P_{CBD} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6{,}4 = 25{,}6$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego *ABC* wyznaczamy długość odcinka *AB*.

$$|AB| = 10 \text{ cm}$$

Prowadzimy wysokość *CE* w trójkącie *ABC* oraz odcinek *DE*.

Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że

$$DE \perp AB,$$

zatem odcinek *DE* jest wysokością trójkąta *ABD*.

Obliczamy długość odcinka *CE*.

$$\frac{1}{2}|AB|\cdot|CE| = \frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{2}\cdot 10\cdot|CE| = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8$$

$$|CE| = 4{,}8 \text{ cm}$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego *ECD* wyznaczamy $|DE|$.

$$|DE| = 8 \text{ cm}$$

Obliczamy pole trójkąta *ABD* i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

$$P_{ABD} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|DE| \qquad P_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8 = 40$$

$$P_c = 24 + 40 + 19{,}2 + 25{,}6 = 108{,}8$$

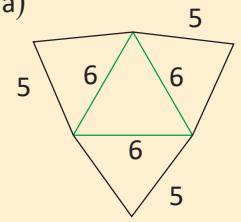
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe $108{,}8\ \text{cm}^2$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

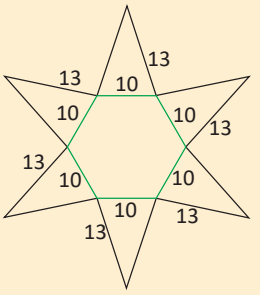
1. Narysuj w zeszycie siatkę graniastosłupa prostego, którego wysokość jest równa 10 cm, a podstawy są:
   a) trójkątami równoramiennymi o bokach o długości 3 cm, 3 cm, 5 cm,
   b) trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych o długości 3 cm i 4 cm,
   c) rombami o boku o długości 4 cm i kącie ostrym 60°.
2. Przekątna sześcianu ma długość 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.
3. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Przekątna ściany bocznej ma długość 30 cm. Kąt między tą przekątną i przekątną prostopadłościanu, wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

4. Dana jest siatka ostrosłupa. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

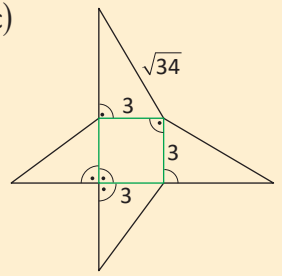
a)



b)



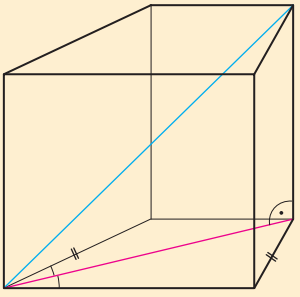
c)



5. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb. Wysokość graniastosłupa jest równa 12 cm. Wiedząc, że przekątne graniastosłupa mają długość $12\sqrt{2}$ cm i 20 cm, oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

6. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe sumie pól obu jego podstaw. Wyznacz stosunek długości krawędzi bocznej do długości krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

7. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny, którego kąt ostry jest równy 60°. Rzut prostokątny przekątnej graniastosłupa na płaszczyznę podstawy zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego trapezu i ma długość $2\sqrt{3}$. Wiedząc, że dwusieczna kąta ostrego trapezu tworzy z przekątną graniastosłupa kąt o mierze 30° (zobacz rysunek obok), oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



8. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 2. Kąt dwuścienny między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy jest równy 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

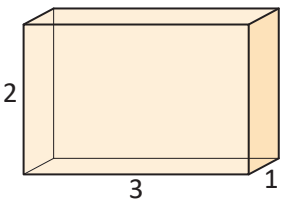
9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{8}{17}$. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 136 cm^2, wyznacz wysokość tego ostrosłupa.

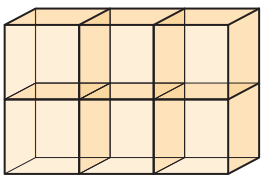
10. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach o długości 12 cm i 3 cm. Wysokość ostrosłupa ma długość 4 cm, a spodek tej wysokości jest jednym z wierzchołków podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

11. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $45\sqrt{3}$ cm^2, a pole podstawy $27\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów

Objętość jest liczbą, którą można przyporządkować pewnym figurom przestrzennym. Na początku ustala się jednostkę – sześcian o krawędzi 1, zwany sześcianem jednostkowym. Jeśli, na przykład, chcemy zmierzyć objętość prostopadłościanu o wymiarach 3 na 2 na 1, to dzielimy ten prostopadłościan na sześciany jednostkowe. Bez trudu zauważamy, że tych sześcianów jest sześć, więc objętość tego prostopadłościanu jest równa 6.





W ogólnym przypadku, aby określić objętość figury przestrzennej F, buduje się tzw. sieci sześcienne – na wzór sieci kwadratowych, konstruowanych przy określaniu pola. Przestrzeń dzieli się na sześciany jednostkowe w taki sposób, że dowolne dwa sześciany albo są rozłączne, albo mają wspólny wierzchołek, albo wspólną krawędź, albo wspólną ścianę. Następnie patrzymy, ile sześcianów zawiera się w bryle F. Ich liczbę oznaczmy przez w_1. Następnie ustalamy, ile sześcianów sieci ma co najmniej jeden punkt wspólny z bryłą F. Tę liczbę oznaczamy przez z_1. W kolejnym kroku dzielimy każdy z sześcianów sieci na 10^3 przystających sześcianików. Każdy z tych mniejszych sześcianków ma objętość równą 0,001 sześcianu jednostkowego. I znów sprawdzamy, ile sześcianików jest zawartych w bryle F, i ile sześcianików ma punkty wspólne z bryłą F. Postępując dalej podobnie, tworzymy dwa ciągi:

$w_1, w_2, w_3, w_4, \ldots$

$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots$

Liczby w pierwszym ciągu przybliżają objętość bryły F z niedomiarem, natomiast liczby w drugim ciągu przybliżają objętość tej bryły z nadmiarem, z coraz większą dokładnością. Liczby z pierwszego ciągu dążą do pewnej liczby, którą nazywamy miarą wewnętrzną bryły F. Liczby z drugiego ciągu również dążą do pewnej liczby, którą nazywamy miarą zewnętrzną bryły F. Jeśli obie te miary – wewnętrzna i zewnętrzna – są równe i nie zależą od wyboru sieci oraz sposobu zagęszczania, to tę wspólną miarę nazywamy **objętością** bryły F.

Ćwiczenie 1. W klasie drugiej skonstruowaliśmy figurę płaską, która nie miała pola. To był kwadrat, umieszczony w układzie współrzędnych, z którego usunięto wszystkie punkty o obu współrzędnych będących liczbami wymiernymi. Spróbuj w podobny sposób skonstruować figurę przestrzenną, która nie ma objętości.

UWAGA: Nie należy mylić objętości zerowej z brakiem objętości, czyli niemożliwością określenia objętości.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Własności objętości*

1) Objętość bryły jest liczbą nieujemną.
2) Objętości brył przystających, wyznaczone przy tej samej jednostce, są równe.
3) Jeśli bryła F składa się z dwóch brył F_1 i F_2, mających objętości i wnętrzami rozłącznych, to objętość bryły F jest równa sumie objętości brył F_1 i F_2 przy tej samej jednostce.
4) Sześcian o krawędzi jednostkowej ma objętość równą 1.

Zajmiemy się teraz obliczaniem objętości graniastosłupów i ostrosłupów. Przypomnijmy znany Ci ze szkoły podstawowej wzór na objętość graniastosłupa.

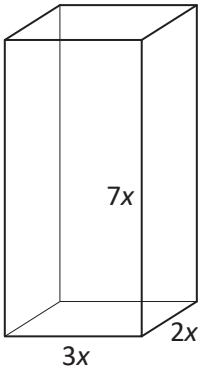
Twierdzenie 2.

Objętość V graniastosłupa jest równa iloczynowi pola podstawy P_p i wysokości h graniastosłupa.

$$V = P_p \cdot h$$

Przykład 1.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 328 cm^2. Stosunek długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka wynosi 7 : 3 : 2. Obliczymy objętość tego prostopadłościanu.



Stosunek długości krawędzi wynosi 7 : 3 : 2. To znaczy, że przy pewnej jednostce o długości x, $x > 0$, długości krawędzi można zapisać jako

$7x$, $3x$, $2x$.

Wyrazimy pole powierzchni całkowitej P_c w zależności od x.

$$P_c = 2\left(3x \cdot 7x + 7x \cdot 2x + 3x \cdot 2x\right) = 2\left(21x^2 + 14x^2 + 6x^2\right) = 2 \cdot 41x^2 = 82x^2$$

Z warunków zadania wiemy, że

$P_c = 328$, zatem

$82x^2 = 328 \quad /: 82$

$x^2 = 4$

$x = 2$, bo $x > 0$

Obliczamy długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

$7 \cdot 2 = 14 \qquad 3 \cdot 2 = 6 \qquad 2 \cdot 2 = 4$

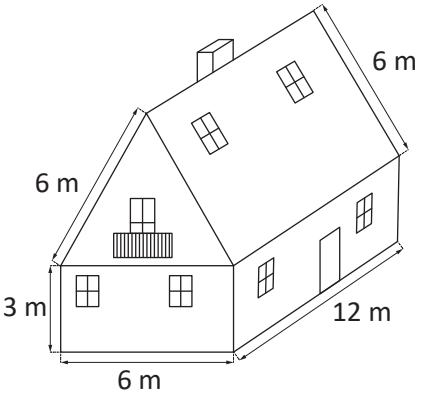
Obliczamy objętość V prostopadłościanu.

$V = 14 \cdot 6 \cdot 4 = 336$

Objętość prostopadłościanu jest równa 336 cm^3.

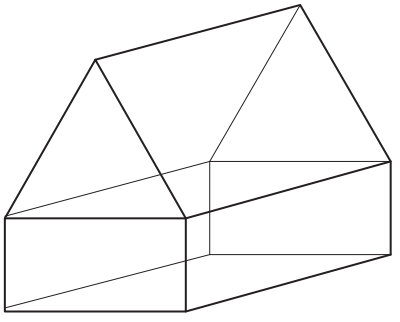
Przykład 2.

Państwo Świerczyńscy kupili dom, którego wymiary podane są na schematycznym rysunku poniżej.



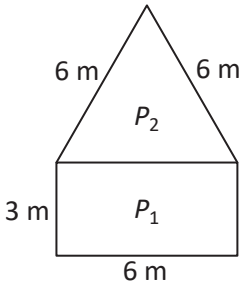
Chcą kupić piec, który ogrzewałby cały dom włącznie z poddaszem. W sklepie są dwa piece. Pierwszy ogrzewa skutecznie pomieszczenia o łącznej kubaturze do 350 m^3, a drugi – pomieszczenia o łącznej kubaturze do 450 m^3. Czy piec o mniejszej mocy wystarczy do ogrzania domu państwa Świerczyńskich? Pomijamy grubość ścian, sufitów, dachu.

Kubatura to pojemność, czyli objętość pomieszczenia lub zbiornika, wyrażona zwykle w metrach sześciennych.



Niech graniastosłup pięciokątny prosty na rysunku obok reprezentuje dom, którego dotyczy to zadanie.

Obliczamy pole podstawy P_p graniastosłupa. Pole podstawy jest równe sumie pola P_1 prostokąta i pola P_2 trójkąta równobocznego.



$$P_1 = 3 \cdot 6 = 18 \qquad P_2 = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$P_p = P_1 + P_2 \qquad P_p = 18 + 9\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość V graniastosłupa. Jego wysokość jest równa 12 m.

$$V = \left(18 + 9\sqrt{3}\right) \cdot 12 = 216 + 108\sqrt{3}$$

Obliczamy za pomocą kalkulatora przybliżenie liczby $216 + 108\sqrt{3}$.

$$216 + 108\sqrt{3} \approx 403$$

Ponieważ $350 < 403$, więc piec o mniejszej mocy nie wystarczy do ogrzania domu.

Ćwiczenie 2. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego przekątne mają długość 12 cm i 9 cm. Krótsza przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt równy 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Podamy teraz wzór na objętość ostrosłupa.

Twierdzenie 3.

Objętość V ostrosłupa jest równa jednej trzeciej iloczynu pola podstawy P_p i wysokości h ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

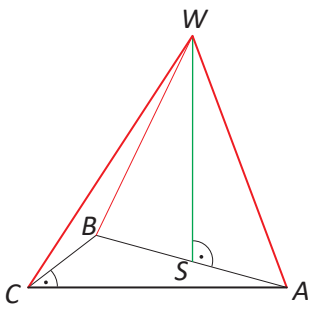
Przykład 3.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych mających długość 14 cm i 48 cm. Krawędzie boczne mają jednakową długość równą 65 cm. Obliczymy objętość tego ostrosłupa.

Krawędzie boczne mają jednakową długość, zatem ostrosłup jest prosty (twierdzenie 1. str. 267), a spodek S wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa.

Środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środek przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Mamy:

$|BC| = 14$ cm
$|AC| = 48$ cm
$|AW| = |BW| = |CW| = 65$ cm
$|BS| = |SA|$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego ABC wynika, że
$|AB| = 50$ cm
Punkt S jest spodkiem wysokości ostrosłupa, więc

$$|BS| = \frac{1}{2}|AB|, \quad \text{czyli}$$

$$|BS| = 25 \text{ cm}$$

Obliczamy wysokość WS ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego BSW. Otrzymujemy:
$|WS| = 60$ cm

Obliczamy pole podstawy P_p ostrosłupa.

$$P_p = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AC|$$

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 48 = 336$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot |WS|$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 336 \cdot 60 = 6720$$

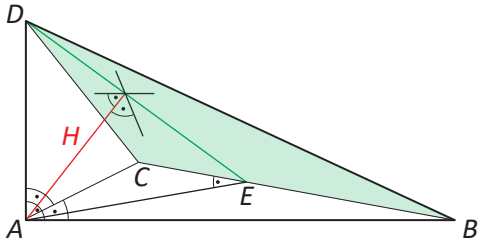
Objętość ostrosłupa jest równa 6720 cm^3.

Ćwiczenie 3. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają długość 4 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przykład 4.

W ostrosłupie trójkątnym $ABCD$ krawędzie AB, AC i AD są parami prostopadłe oraz $|AB| = 20$ cm, $|AC| = 15$ cm i $|AD| = 9$ cm. Wyznaczymy odległość punktu A od płaszczyzny (BCD).

I sposób – wyznaczamy objętość ostrosłupa $ABCD$ na dwa sposoby.
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



H – odległość punktu A od płaszczyzny (BCD)
AE – wysokość w trójkącie ABC

Zauważ, że odległość punktu A od płaszczyzny (BCD) jest wysokością ostrosłupa $ABCD$.

Objętość V ostrosłupa można więc zapisać jako

$(1)\ V = \frac{1}{3} \cdot P_{BCD} \cdot H$, gdzie P_{BCD} jest polem trójkąta BCD

Oczywiście objętość ostrosłupa można też obliczyć tak

$(2)\ V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot |AD|$, gdzie P_{ABC} jest polem trójkąta ABC

Wykorzystując wzory (1) i (2), otrzymujemy zależność:
$(3)\ P_{BCD} \cdot H = P_{ABC} \cdot |AD|$,
z której możemy obliczyć H. Wystarczy wyznaczyć pola trójkątów ABC i BCD. Mamy

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |AB|, \quad \text{stąd} \quad P_{ABC} = 150$$

Obliczamy $|BC|$, $|AE|$ oraz $|DE|$.

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2}, \ \text{zatem} \ |BC| = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

$$|AE| = \frac{2 \cdot P_{ABC}}{|BC|}, \quad \text{stąd} \quad |AE| = \frac{2 \cdot 150}{25} = 12$$

$$|DE| = \sqrt{|AD|^2 + |AE|^2}, \ \text{czyli} \ |DE| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$$

Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika, że
$DE \perp BC$ Przeanalizuj to dokładnie!
Odcinek DE jest wysokością trójkąta BCD. Wówczas:

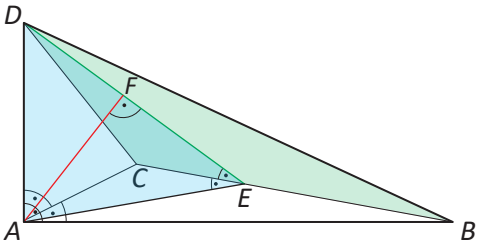
$$P_{BCD} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |DE|, \quad \text{więc} \quad P_{BCD} = 187{,}5$$

Na koniec obliczamy H, stosując wzór (3).

$187{,}5 \cdot H = 150 \cdot 9$, zatem $H = 7{,}2$

Odległość punktu A od płaszczyzny (BCD) jest równa 7,2 cm.

II sposób – korzystamy z tego, że wysokość *AF* ostrosłupa jest wysokością w trójkącie prostokątnym *AED*.



Prowadzimy wysokość *AF* ostrosłupa.

Wykażemy, że spodek tej wysokości leży na odcinku *DE*.

W tym celu wystarczy pokazać, że płaszczyzny (BCD) i (AED) są prostopadłe.

Zauważmy, że

$AE \perp BC$ oraz $DE \perp BC$ zobacz I sposób

więc prosta *BC* jest prostopadła do płaszczyzny (AED).

Zatem płaszczyzna (BCD) jest prostopadła do płaszczyzny (AED).

Rozważmy trójkąt prostokątny *AED*. W tym trójkącie odcinek *AF* jest wysokością. Pole P_{AED} trójkąta *AED* zapisujemy na dwa sposoby.

$$P_{AED} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |AD|$$

oraz

$$P_{AED} = \frac{1}{2}|DE| \cdot |AF|$$

Mamy:

$|AE| = 12$ cm, $|AD| = 9$ cm, $|DE| = 15$ cm.

Zatem

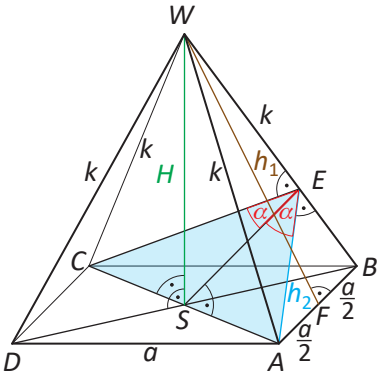
$12 \cdot 9 = 15 \cdot |AF|$

$|AF| = 7{,}2$

Odległość punktu *A* od płaszczyzny (BCD) jest równa 7,2 cm.

Przykład 5.

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna ma długość *k*, a kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 2α, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Wyznaczymy objętość tego ostrosłupa w zależności od *k* i α.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.

$|AW| = |BW| = |CW| = |DW| = k$

a – długość krawędzi podstawy

H – wysokość ostrosłupa

h_1 – wysokość ściany bocznej poprowadzonej na krawędź AB

h_2 – wysokość ściany bocznej poprowadzonej na krawędź WB

Prosta WB jest prostopadła do płaszczyzny (CAE). Uzasadnij to!

Wyznaczamy $|SA|$ w zależności od a.

$$|SA| = \frac{1}{2}|CA| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Wyznaczamy h_2 w zależności od a i α. Trójkąt CAE jest równoramienny, więc

$SE \perp AC$ i $|\sphericalangle CES| = |\sphericalangle SEA| = \alpha$

$$\frac{|SA|}{|AE|} = \sin\alpha, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{h_2} = \sin\alpha, \quad \text{więc} \quad h_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha}$$

Wyznaczamy h_1 w zależności od a i k.

$$h_1 = \sqrt{k^2 - \frac{a^2}{4}}$$

Obliczamy kwadrat długości krawędzi podstawy ostrosłupa. Pole P_{ABW} trójkąta ABW zapisujemy na dwa sposoby.

$$P_{ABW} = \frac{1}{2}\cdot a \cdot h_1 = \frac{1}{2}\cdot k \cdot h_2$$

$$\frac{1}{2}\cdot a \cdot \sqrt{k^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot k \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha} \quad /:\frac{1}{2}a$$

$$\sqrt{k^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{k\sqrt{2}}{2\sin\alpha}$$

Obie strony ostatniego równania są dodatnie, więc po podniesieniu ich do kwadratu otrzymamy równanie równoważne.

$$k^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{2k^2}{4\sin^2\alpha}, \quad \text{stąd} \quad a^2 = 4k^2\left(1 - \frac{1}{2\sin^2\alpha}\right)$$

Możemy to zapisać krócej

$$a^2 = 2k^2 \cdot \frac{-\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$ Sprawdź!

Obliczamy *H*. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta *SBW*.

$$H = \sqrt{k^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$H = \sqrt{k^2 - \frac{a^2}{2}} \quad \text{oraz} \quad a^2 = 2k^2 \cdot \frac{-\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$H = \frac{k \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}$$ Wykonaj obliczenia.

Obliczamy objętość *V* ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H, \quad \text{gdzie} \quad P_p = a^2$$

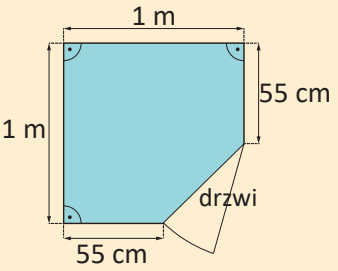
$$V = \frac{1}{3} \cdot 2k^2 \frac{-\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{k \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-2}{3} \cdot k^3 \cdot \frac{\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}$$

Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{-2}{3} \cdot k^3 \cdot \frac{\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}$.

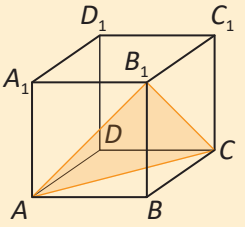
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Jedna z krawędzi prostopadłościanu ma długość 5 cm, a stosunek długości dwóch pozostałych krawędzi jest równy 3 : 2. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wynosi 392 cm^2, oblicz objętość prostopadłościanu.
2. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Objętość graniastosłupa wynosi 1 dm^3. Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa.
3. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego przekątne mają długość 12 cm, 15 cm i przecinają się pod kątem 30°. Dłuższa przekątna graniastosłupa ma długość 17 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

4. Szafa narożna ma kształt graniastosłupa prostego, a jej wysokość jest równa 2 m. Podstawę tej szafy wraz wymiarami przedstawia rysunek obok. Oblicz kubaturę szafy. Wynik podaj w m^3. Ile to litrów?



5. W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ poprowadzono płaszczyznę (ACB_1), która odcięła ostrosłup $ABCB_1$ (zobacz rysunek obok).
   a) Jaką część objętości sześcianu stanowi objętość ostrosłupa $ABCB_1$?
   b) Wiedząc, że objętość sześcianu jest równa 1 litr, oblicz odległość wierzchołka B od płaszczyzny (ACB_1).



6. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego pole jest równe 36 dm^2. Przekątne tego prostokąta tworzą kąt 30°. Oblicz objętość ostrosłupa, wiedząc, że wszystkie jego krawędzie boczne mają długość 10 dm.

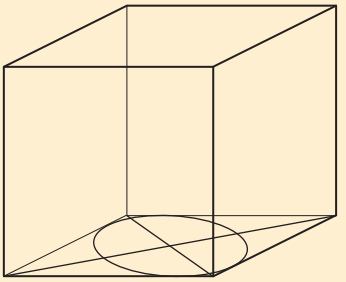
7. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego jedna przyprostokątna jest dłuższa od drugiej o 4 cm. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa ma 10 cm, oblicz:
   a) długości krawędzi podstawy b) objętość tego ostrosłupa.

8. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $54\sqrt{3}\ cm^2$. Spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w odległości 4,8 cm od krawędzi bocznej. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

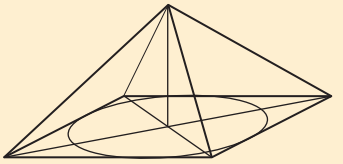
9. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma 24 cm. Spodek wysokości znajduje się w odległości 6,72 cm od ściany bocznej. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

10. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $128\sqrt{3}\ cm^3$. Wiedząc, że tangens kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy 2, oblicz:
    a) długość krawędzi podstawy,
    b) pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

11. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, w który wpisano okrąg o promieniu 1 dm (zobacz rysunek obok). Kąt ostry rombu jest równy 30°, a kąt między przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy wynosi 45°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

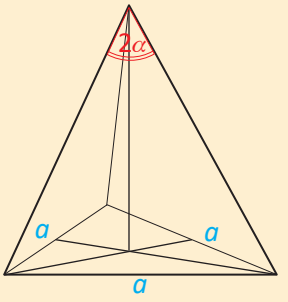


12. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego kąt ostry jest równy 45°. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem, a stosunek pola powierzchni podstawy do pola powierzchni ściany bocznej wynosi 2,4 (zobacz rysunek obok).

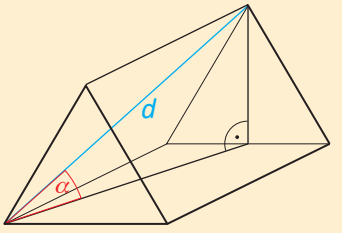


Wiedząc, że objętość ostrosłupa jest równa $48\sqrt{2}$, oblicz:
a) długość krawędzi podstawy i wysokość ostrosłupa,
b) pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

13. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt między krawędziami bocznymi jest równy 2α (zobacz rysunek obok). Wiedząc, że krawędź podstawy ma długość *a*, oblicz objętość tego ostrosłupa. Jaką miarę może mieć kąt α?



14. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość *d* i jest nachylona do sąsiedniej ściany bocznej pod kątem α (zobacz rysunek obok). Oblicz objętość tego graniastosłupa. Jaką miarę może mieć kąt α?



Przekroje wielościanów – konstrukcje

Przekrojem wielościanu płaszczyzną π nazywamy figurę, która jest częścią wspólną płaszczyzny π i tego wielościanu. Przekrojem wielościanu może być punkt, odcinek, wielokąt lub zbiór pusty. Wykonaj rysunki ilustrujące te przypadki.

W dalszej części tematu będziemy zajmować się takimi przekrojami wielościanów, które są wielokątami. Omówimy wyznaczanie tych przekrojów w przypadku, gdy płaszczyzna przekroju określona jest przez podanie trzech niewspółliniowych punktów.

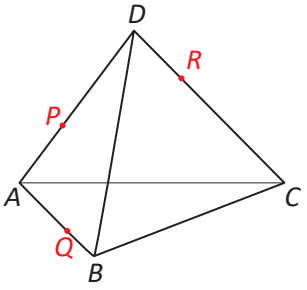
Aby przedstawić na rysunku przekrój płaszczyzną π danego wielościanu, wystarczy skonstruować punkty przecięcia płaszczyzny π z krawędziami wielościanu i połączyć punkty leżące na tej samej ścianie. Oczywiście kolejność wyznaczania wierzchołków przekroju nie jest istotna, natomiast konstrukcja powinna być zgodna z aksjomatami i twierdzeniami stereometrii.

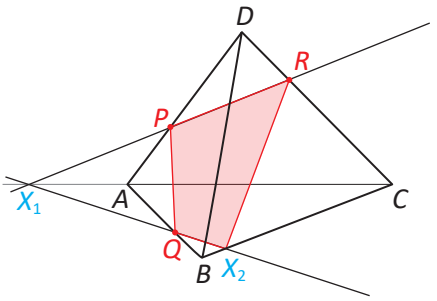
Przypomnijmy najważniejsze własności:

1) Aby wyznaczyć krawędź przecięcia dwóch nierównoległych płaszczyzn, wystarczy wyznaczyć dwa punkty, z których każdy należy do obu płaszczyzn. Wówczas prosta wyznaczona przez te punkty jest krawędzią przecięcia danych płaszczyzn.
2) Aby wyznaczyć punkt, w którym prosta k przebija płaszczyznę π, wystarczy wyznaczyć punkt przecięcia prostej k i prostej m, która jest krawędzią przecięcia płaszczyzny π i dowolnej płaszczyzny π_1 zawierającej prostą k.
3) Jeżeli dwie równoległe płaszczyzny przetniemy trzecią płaszczyzną, to otrzymane krawędzie przecięcia są prostymi równoległymi.

Przykład 1.

Na rysunku przedstawiony jest ostrosłup trójkątny $ABCD$. Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na krawędziach tego ostrosłupa. Skonstruujemy przekrój ostrosłupa $ABCD$ płaszczyzną (PQR).





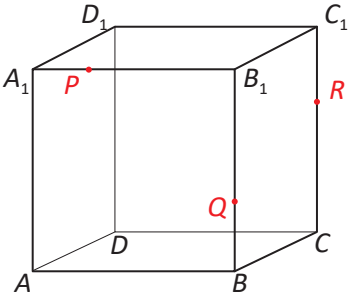
Opis konstrukcji:

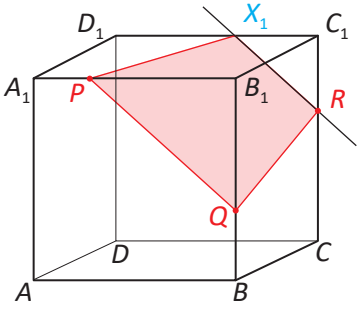
- Punkty A, C, R, P leżą na płaszczyźnie (ACD). Wyznaczamy punkt przecięcia prostych PR, AC i oznaczamy jako X_1.
- Punkty X_1 i Q leżą na płaszczyźnie (ABC). Wyznaczamy punkt przecięcia prostej X_1Q i krawędzi BC i oznaczamy jako X_2.
- Punkty X_2 i R leżą na płaszczyźnie (BCD).
- Czworokąt PQX_2R jest szukanym przekrojem.

Uzasadnienie poprawności konstrukcji:
Z założenia punkty P, R należą do płaszczyzny przekroju, więc prosta PR leży na płaszczyźnie przekroju. (Prosta PR – zgodnie z własnością **1)** – jest krawędzią przecięcia płaszczyzn (ACD) i (PQR)). Punkt X_1 należy do prostej PR, więc w szczególności leży na płaszczyźnie przekroju. Punkt Q z założenia leży na płaszczyźnie przekroju. Zatem prosta X_1Q też zawiera się w tej płaszczyźnie (prosta X_1Q jest krawędzią przecięcia płaszczyzn (ABC) i (PQR)). Punkt X_2 należy do prostej X_1Q, a więc należy też do płaszczyzny przekroju (PQR).

Przykład 2.

Na rysunku przedstawiony jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na krawędziach tego sześcianu. Skonstruujemy przekrój sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ płaszczyzną (PQR).





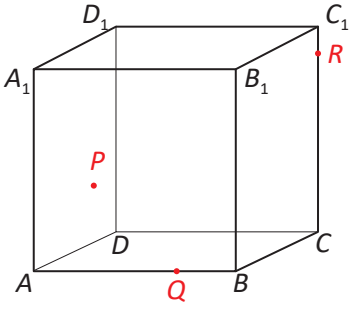
Opis konstrukcji:

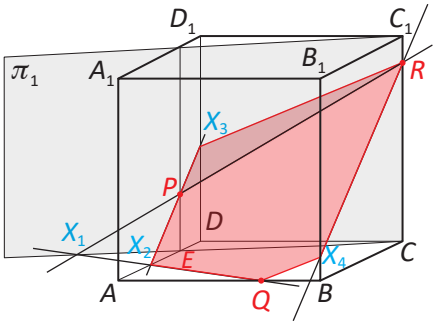
- Przez punkt R prowadzimy prostą równoległą do prostej PQ. Ta prosta leży na płaszczyźnie (DCC_1D_1) i przecina krawędź D_1C_1 w punkcie X_1.
- Czworokąt $PQRX_1$ jest szukanym przekrojem sześcianu.

Uzasadnienie poprawności konstrukcji:
Ściany ABB_1A_1 i DCC_1D_1 sześcianu leżą na płaszczyznach równoległych. Płaszczyzna przekroju (PQR) przecina te płaszczyzny. Zgodnie z własnością **3)** krawędzie tych przecięć są prostymi równoległymi. Z konstrukcji wiemy, że prosta RX_1 leży na płaszczyźnie (DCC_1D_1) i jest równoległa do prostej PQ, leżącej na płaszczyźnie (ABB_1A_1). Jest więc krawędzią przecięcia płaszczyzny (DCC_1D_1) i płaszczyzny przekroju (PQR).

Przykład 3.

Na rysunku przedstawiony jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punkt P należy do ściany ADD_1A_1, a punkty Q, R leżą odpowiednio na krawędziach tego sześcianu. Skonstruujemy przekrój sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ płaszczyzną (PQR).





Opis konstrukcji:

- Wyznaczamy punkt, w którym prosta PR przebija płaszczyznę $(ABCD)$. W tym celu prowadzimy płaszczyznę π_1 zawierającą prostą PR, wyznaczoną przez prostą CC_1 i prostą przechodzącą przez punkt P prostopadłą do płaszczyzny $(ABCD)$ (w punkcie E).

Prosta PR przecina prostą EC w punkcie, który oznaczamy X_1.

- Przez punkty X_1 i Q prowadzimy prostą, która przecina krawędź AD. Otrzymujemy punkt X_2.
- Punkty X_2 i P leżą na płaszczyźnie ADD_1A_1. Prowadzimy prostą X_2P, która przecina krawędź DD_1. Otrzymujemy punkt X_3.
- Przez punkt R prowadzimy prostą równoległą do prostej X_2X_3. Ta prosta przecina krawędź BB_1 w punkcie X_4.
- Pięciokąt $X_2QX_4RX_3$ jest szukanym przekrojem sześcianu.

Uzasadnienie poprawności konstrukcji:
Punkty P, R należą do płaszczyzny przekroju, zatem prosta PR leży na płaszczyźnie przekroju. Prosta PR zawiera się w płaszczyźnie π_1.

Krawędzią przecięcia płaszczyzny π_1 z płaszczyzną $(ABCD)$ jest prosta EC. Zatem – zgodnie z własnością **2)** – prosta PR przebija płaszczyznę $(ABCD)$ w punkcie należącym do prostej EC, czyli w punkcie X_1.

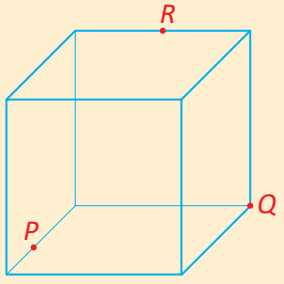
To znaczy, że punkt X_1 należy do płaszczyzny przekroju. Prosta X_1Q leży na płaszczyźnie przekroju, więc również punkt X_2, leżący na tej prostej należy do płaszczyzny przekroju. Podobnie można uzasadnić, że punkt X_3 należy do płaszczyzny przekroju.

Ściany sześcianu ADD_1A_1 i BCC_1B_1 leżą na płaszczyznach równoległych. Płaszczyzna przekroju przecina te płaszczyzny. Zgodnie z własnością **3)** krawędzie tych przecięć są prostymi równoległymi. Z konstrukcji wiemy, że prosta RX_4 leży na płaszczyźnie (BCC_1B_1) i jest równoległa do prostej X_2X_3, leżącej na płaszczyźnie (ADD_1A_1) zawartej w płaszczyźnie (PQR). Jest więc krawędzią przecięcia płaszczyzny (BCC_1B_1) i płaszczyzny przekroju (PQR).

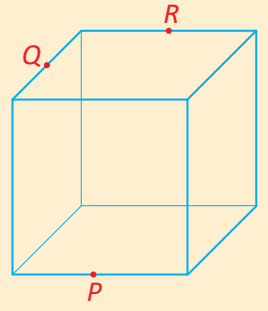
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dany jest sześcian i punkty P, Q, R leżące na krawędziach tego sześcianu, jak na rysunku poniżej. Skonstruuj przekrój sześcianu płaszczyzną (PQR).

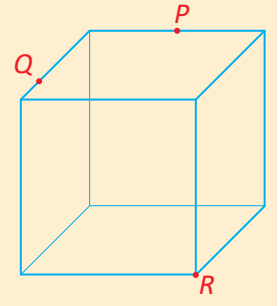
a)



b)

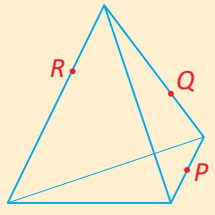


c)

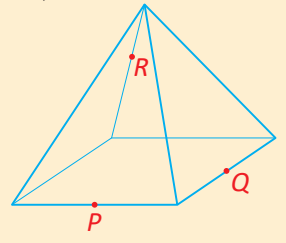


2. Dany jest ostrosłup i punkty P, Q, R leżące na wybranych krawędziach lub na płaszczyźnie podstawy tego ostrosłupa, jak na rysunku poniżej. Skonstruuj przekrój ostrosłupa płaszczyzną (PQR).

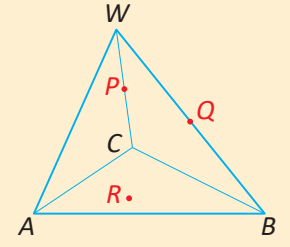
a)



b)



c) $PQ \parallel CB$



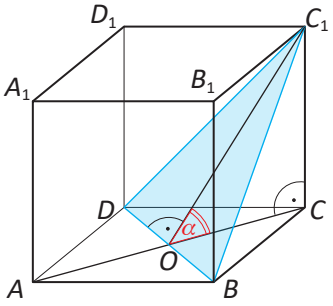
Przekroje wielościanów – zadania

Przykład 1.

Sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty D, B, C_1.

a) Obliczymy tangens kąta nachylenia płaszczyzny (DBC_1) do płaszczyzny $(ABCD)$. Podamy przybliżoną miarę tego kąta nachylenia.

b) Wiedząc, że pole przekroju sześcianu tą płaszczyzną jest równe $50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, obliczymy długość krawędzi sześcianu.



Przekrojem danego sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez punkty D, B, C_1 jest trójkąt DBC_1.

Zauważ, że odcinki DB, DC_1 i BC_1 są przekątnymi ścian sześcianu, więc trójkąt DBC_1 jest równoboczny.

Ad a) Środkowa C_1O jest jednocześnie wysokością trójkąta DBC_1, poprowadzoną na bok DB. Rzutem prostokątnym odcinka OC_1 na płaszczyznę $(ABCD)$ jest odcinek OC. Zatem płaszczyzna (DBC_1) jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem COC_1, który oznaczyliśmy jako α.

Niech $|AB| = |BC| = |CC_1| = a$. Wówczas

$$|OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{|CC_1|}{|OC|}, \quad \text{więc}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = a \cdot \frac{2}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

Odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta α: $\alpha \approx 55°$.

Ad b) Trójkąt DBC_1 jest trójkątem równobocznym, którego bok ma długość $a\sqrt{2}$. Wyznaczamy pole P tego trójkąta:

$$P = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, \quad \text{gdzie} \quad P = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Obliczamy a:

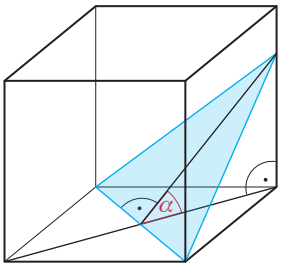
$$\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 50\sqrt{3}, \quad \text{czyli} \quad 2a^2 = 200, \quad \text{stąd} \quad a = 10$$

Tangens kąta nachylenia przekroju DBC_1 do płaszczyzny $(ABCD)$ wynosi $\sqrt{2}$, miara tego kąta jest równa w przybliżeniu 55°. Krawędź sześcianu ma długość 10 cm.

Z przykładu 1. wynika, że: jeśli poprowadzimy płaszczyznę, która zawiera przekątną podstawy sześcianu i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod takim kątem ostrym α, że

$$\operatorname{tg}\alpha \in \left(0, \sqrt{2}\right\rangle,$$

to otrzymamy przekrój, będący trójkątem równoramiennym, a jego wierzchołek będzie należał do krawędzi bocznej sześcianu.



Ćwiczenie 1. Krawędź sześcianu ma długość 4 cm. Wyznacz pole przekroju sześcianu płaszczyzną, która zawiera przekątną podstawy i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt równy 45°.

W następnym przykładzie omówimy przekrój sześcianu płaszczyzną, zawierającą przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest większy od $\sqrt{2}$.

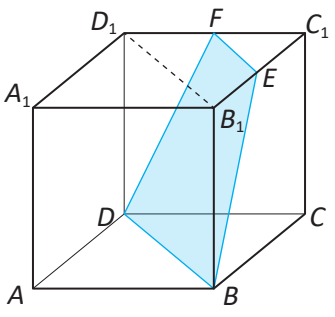
Przykład 2.

Sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty D, B, E, gdzie punkt E jest środkiem krawędzi B_1C_1.

a) Wykażemy, że przekrój sześcianu płaszczyzną (DBE) jest trapezem równoramiennym, a przekątne tego trapezu są prostopadłe.

b) Obliczymy tangens kąta nachylenia płaszczyzny (DBE) do płaszczyzny $(ABCD)$.

Ad a) Ściany $ABCD$ oraz $A_1B_1C_1D_1$ zawierają się w płaszczyznach równoległych.



Zatem krawędzie wspólne płaszczyzny (DBE) i tych ścian też są równoległe. Niech F będzie punktem wspólnym płaszczyzny (DBE) i krawędzi D_1C_1.

Mamy:

$EF \parallel DB$ i $DB \parallel D_1B_1$, więc

$EF \parallel D_1B_1$.

Przekrój $DBEF$ jest trapezem, a punkt F jest środkiem krawędzi D_1C_1. Trójkąty BEB_1 oraz DFD_1 są przystające – na podstawie cechy (bkb),

$\triangle BEB_1 \equiv \triangle DFD_1$

Zatem $|BE| = |DF|$, co dowodzi, że trapez $DBEF$ jest trapezem równoramiennym.

Oznaczmy długość krawędzi sześcianu przez a, $a > 0$.

Wówczas:

$$|DB| = a\sqrt{2}\,, \quad |EF| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

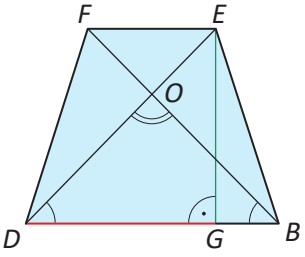
Obliczamy $|BE|$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BEB_1.

$$|BE|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}\,,$$

stąd

$$|BE| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Naszkicujmy trapez równoramienny $DBEF$. Niech przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie O, a EG niech oznacza wysokość tego trapezu.
Obliczamy $|DG|$ oraz $|EG|$.



Z własności trapezu równoramiennego:

$$|GB| = \frac{|DB| - |FE|}{2}\,, \quad \text{stąd}$$

$$|GB| = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \text{oraz}$$

$$|DG| = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego GBE otrzymujemy:

$$|EG|^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{18a^2}{16}$$

$$|EG| = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Ponieważ $|EG| = |DG|$, więc trójkąt GDE jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, stąd

$$|\sphericalangle GDE| = 45^\circ$$

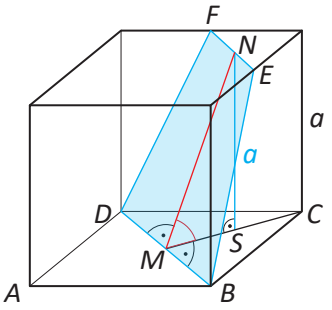
Podobnie można pokazać, że

$$|\sphericalangle FBD| = 45^\circ$$

Dwa kąty trójkąta DBO mają miarę 45°. Zatem trzeci kąt tego trójkąta, czyli kąt DOB, jest kątem prostym. To znaczy, że przekątne trapezu $DBEF$ są prostopadłe.

Ad b) Poprowadźmy wysokość MN trapezu, łączącą środki podstaw DB i FE. Środek S odcinka MC jest rzutem prostokątnym punktu N na podstawę $ABCD$. Wówczas kąt SMN jest kątem nachylenia płaszczyzny (DBE) do płaszczyzny $(ABCD)$.

Mamy:



$$|NS| = a, \quad |MS| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Zatem

$$\operatorname{tg}|\sphericalangle SMN| = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Tangens kąta nachylenia płaszczyzny $(DBEF)$ do płaszczyzny $(ABCD)$ jest równy $2\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 2. Jaki jest tangens kąta nachylenia prostej NC do płaszczyzny $(ABCD)$ w przykładzie 2?

Ćwiczenie 3. Narysuj kilka przekrojów prostopadłościanu płaszczyznami prostopadłymi do płaszczyzny podstawy. Jakimi figurami są te przekroje?

Przykład 3.

Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCW$ o podstawie ABC jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną, zawierającą krawędź AB i przechodzącą przez środek krawędzi bocznej CW jest nachylony do płaszczyzny podstawy pod kątem α.

a) Wykażemy, że $\alpha = 60°$.

b) Wyznaczymy obwód tego przekroju w zależności od długości krawędzi podstawy.

Wprowadźmy oznaczenia.

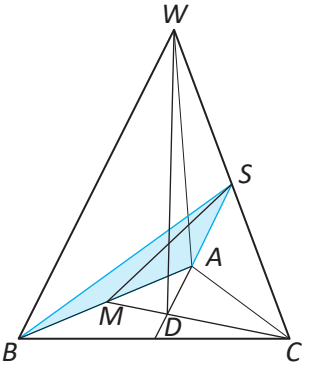
$\triangle ABC$ – trójkąt równoboczny,
$|AB| = |BC| = |AC| = a, \ a > 0$

DW – wysokość ostrosłupa,
$|DW| = 2a$

S – środek krawędzi CW

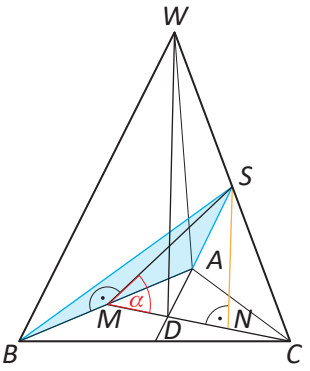
$\triangle ABS$ – dany przekrój ostrosłupa,
$|AS| = |BS|$

M – środek odcinka AB



Ad a) Trójkąt *ABS* jest równoramienny, środkowa *SM* jest jednocześnie wysokością tego trójkąta. Rzutem prostokątnym odcinka *SM* na płaszczyznę *ABC* jest odcinek *MN*, zawarty w wysokości *MC* trójkąta *ABC*. Zatem kątem nachylenia płaszczyzny (ABS) do płaszczyzny (ABC) jest kąt *CMS*,

$$|\sphericalangle CMS| = \alpha$$



Odcinek *SN* jest równoległy do wysokości *DW* ostrosłupa, więc z twierdzenia Talesa wynika, że

$$\frac{|DN|}{|NC|} = \frac{|WS|}{|SC|} = 1, \qquad \text{stąd}$$

$$|DN| = |NC| \quad \text{oraz} \quad |SN| = \frac{1}{2}|DW| = a.$$

Obliczamy $|MN|$:

$$|MN| = |MD| + \frac{1}{2}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Wyznaczamy $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|SN|}{|MN|} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Kąt α jest ostry, więc $\alpha = 60^\circ$.

Ad b) Z własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 60° i 30° wynika, że

$$|SM| = 2|MN| = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Obliczamy długości odcinków *AS* i *BS*. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *AMS* mamy:

$$|AS|^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{3} = \frac{19a^2}{12} = \frac{57a^2}{36}$$

$$|AS| = \frac{a\sqrt{57}}{6}, \quad |AS| = |BS|$$

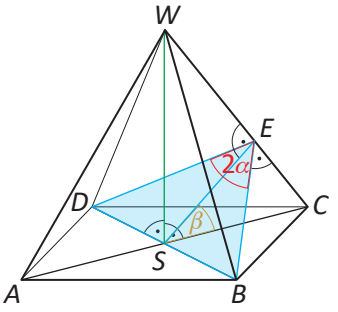
Obliczamy obwód trójkąta *ABS*:

$$|AB| + |AS| + |BS| = a + 2\cdot\frac{a\sqrt{57}}{6} = \frac{a\left(3+\sqrt{57}\right)}{3}$$

Obwód przekroju jest równy $\dfrac{a\left(3+\sqrt{57}\right)}{3}$.

Przykład 4.

Kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równy 2α. Płaszczyzna przekroju tego ostrosłupa zawiera przekątną podstawy i jest prostopadła do jednej z krawędzi bocznych. Wykażemy, że jeśli β jest kątem nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy ostrosłupa, to $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta = 1$.



Na rysunku obok płaszczyzna (DBE) jest prostopadła do krawędzi bocznej CW. To znaczy, że kąt DEB wyznacza miarę kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa,

$$|\sphericalangle DEB| = 2\alpha$$

Kąt nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy jest równy CSE, gdzie S jest punktem przecięcia się przekątnych podstawy (wyjaśnij, dlaczego).

$$|\sphericalangle CSE| = \beta$$

Rozpatrzmy trójkąt równoramienny DBE, w którym $|DE| = |EB|$.
Środkowa ES jest jednocześnie dwusieczną kąta DEB oraz wysokością, poprowadzoną na bok DB. Zatem

$$|\sphericalangle DES| = \alpha, \quad |\sphericalangle DSE| = 90^\circ \quad \text{oraz}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|DS|}{|SE|}$$

Ponieważ krawędź CW jest prostopadła do płaszczyzny (DBE), więc jest również jest prostopadła do odcinka SE. Mamy:

$$|\sphericalangle CSE| = \beta, \ |\sphericalangle SEC| = 90^\circ \quad \text{oraz}$$

$$\cos\beta = \frac{|SE|}{|SC|}$$

Otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta = \frac{|DS|}{|SE|} \cdot \frac{|SE|}{|SC|} = \frac{|DS|}{|SC|}$$

Trójkąt DSC jest prostokątny i równoramienny, $|DS| = |SC|$,
stąd

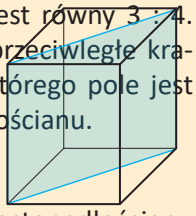
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta = 1,$$ co kończy dowód.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że jeśli w ostrosłupie z przykładu 4. kąt CBE jest równy γ, to $\sqrt{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\gamma=1$.

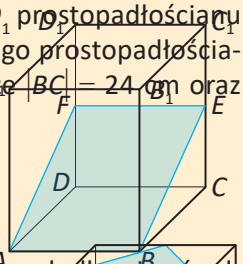
Ćwiczenie 5. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt równy 45°. Płaszczyzna przekroju tego ostrosłupa zawiera przekątną podstawy AC i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Czy ta płaszczyzna jest prostopadła do krawędzi bocznej, z którą ma punkt wspólny? Czy przekrój tą płaszczyzną wyznacza miarę kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami ostrosłupa?

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

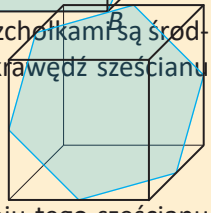
1. Stosunek długości krawędzi podstawy prostopadłościanu jest równy 3 : 4. Przekrój prostopadłościanu płaszczyzną zawierającą dwie przeciwległe krawędzie boczne jest prostokątem (zobacz rysunek obok), którego pole jest równe 120 cm^2. Oblicz pole powierzchni bocznej prostopadłościanu.



2. Punkty E i F są środkami krawędzi odpowiednio CC_1 i DD_1 prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (zobacz rysunek obok). Pole przekroju tego prostopadłościanu płaszczyzną $(ABEF)$ jest równe 250 cm^2. Wiedząc, że $|BC|=24$ cm oraz $|AA_1|=14$ cm, oblicz objętość tego prostopadłościanu.

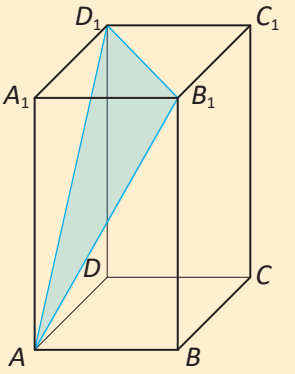


3. Przekrojem sześcianu jest sześciokąt foremny, którego wierzchołkami są środki krawędzi sześcianu, jak na rysunku obok. Wiedząc, że krawędź sześcianu ma długość $6\sqrt{2}$ cm, oblicz pole tego sześciokąta.

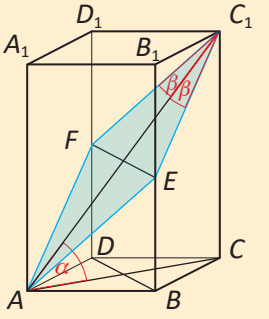


4. Objętość sześcianu jest równa 27 cm^3. Oblicz pole przekroju tego sześcianu płaszczyzną, zawierającą jedną z przekątnych podstawy sześcianu i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem:
   a) 30° b) 60°.

5. Krawędzie prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ wychodzące z wierzchołka D_1 (zobacz rysunek obok) mają długości: $|A_1D_1| = 3$, $|D_1C_1| = 4$, $|DD_1| = 12$. Oblicz pole przekroju prostopadłościanu płaszczyzną (B_1AD_1).

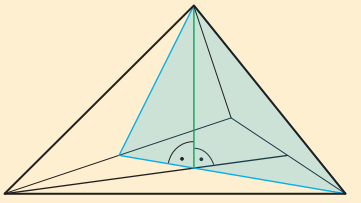


D 6. Podstawą prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest kwadrat $ABCD$. Punkty E, F są odpowiednio środkami krawędzi BB_1 i DD_1. Przez punkty A, E, C_1, F poprowadzono płaszczyznę przekroju (zobacz rysunek obok). Wykaż, że:
   a) otrzymany przekrój jest rombem,
   b) jeśli α jest kątem nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy, a 2β jest kątem ostrym rombu, to $\cos\alpha = \operatorname{tg}\beta$.



7. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego boki mają długość 18 cm, 15 cm, 15 cm. Przez najdłuższy bok podstawy poprowadzono płaszczyznę, która przecina przeciwległą krawędź boczną i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Czy otrzymany przekrój jest trójkątem rozwartokątnym?

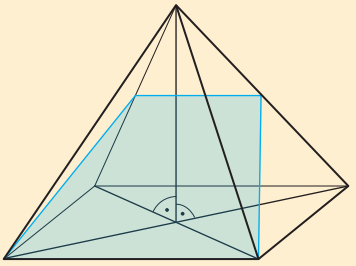
8. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną, zawierającą krawędź boczną i przechodzącą przez środek przeciwległej krawędzi podstawy, jest równe 24 (zobacz rysunek obok). Oblicz długości krawędzi ostrosłupa.



9. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym poprowadzono przekrój płaszczyzną, zawierającą krawędź podstawy i prostopadłą do przeciwległej krawędzi bocznej. Wiedząc, że kąt między dwiema sąsiednimi krawędziami bocznymi jest równy 2α, gdzie $\alpha \in (0°, 45°)$, oblicz:
   a) cosinus dwuściennego kąta β między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa,
   b) cosinus kąta γ nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy.

D 10. Pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną, zawierającą dwie przeciwległe krawędzie boczne, jest równe P_1. Pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną, zawierającą przekątną podstawy i prostopadłą do jednej krawędzi bocznej, jest równe P_2. Wykaż, że jeśli $P_1 = P_2\sqrt{2}$, to odległość spodka wysokości od krawędzi bocznej tego ostrosłupa jest równa połowie długości krawędzi podstawy.

11. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $\sqrt{161}$, a krawędź boczna ma długość 17. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i środki dwóch krawędzi bocznych ostrosłupa, jak na rysunku obok.

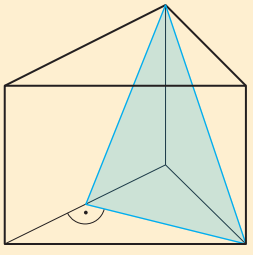


D a) Wykaż, że otrzymany przekrój jest trapezem równoramiennym.

b) Oblicz pole P tego trapezu.

D 12. Podstawą ostrosłupa jest romb, a wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Ostrosłup przecięto płaszczyzną prostopadłą do dwóch przeciwległych ścian bocznych i zawierającą wysokość tego ostrosłupa. Wykaż, że jeśli pole przekroju jest równe P, a objętość ostrosłupa jest równa V, to długość krawędzi podstawy jest równa $\frac{3V}{2P}$.

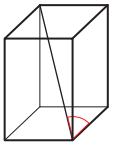
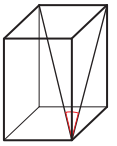
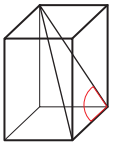
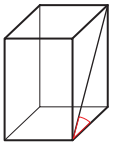
13. Kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego do sąsiedniej ściany bocznej jest równy 30°. Pole przekroju płaszczyzną zawierającą przekątną ściany bocznej i wysokość podstawy jest równe $6\sqrt{3}$ (zobacz rysunek obok). Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5.

Test

1. Przekątna prostopadłościanu o krawędziach o długości 3, 4, 5 ma długość:
   A. 5 B. 6 C. $5\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$

2. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Kąt między przekątną prostopadłościanu a ścianą boczną jest zaznaczony na rysunku:
   A.  B.  C.  D. 

3. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej jest równe podwojonej sumie pól obu podstaw. Kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę:
   A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

4. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem równym 45°. Jeśli a jest długością krawędzi podstawy, zaś H – wysokością tego ostrosłupa, to:
   A. $2H=\sqrt{3}\cdot a$ B. $2H=\sqrt{2}\cdot a$ C. $H=2a$ D. $2H=a$

5. Objętość sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest równa 1. Wówczas objętość ostrosłupa $ABCB_1$ jest równa:
   A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{12}$

6. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Wysokość ostrosłupa tworzy ze ścianą boczną kąt α. Wówczas:
   A. $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ B. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ C. $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{3}$ D. $\operatorname{ctg}\alpha=2\sqrt{3}$

7. Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego jest równe $36\sqrt{3}$. Wysokość tego ostrosłupa wynosi:
   A. $6\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

8. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego najdłuższy bok ma długość 24. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 15. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:
   A. $\sqrt{189}$ B. $\sqrt{161}$ C. 12 D. 9

Zadania otwarte

D 9. Wykaż, że jeśli przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, to kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy jest równy 45°, a do ściany bocznej wynosi 30°.

D 10. Wykaż, że jeśli ściany boczne graniastosłupa prawidłowego trójkątnego są kwadratami, to:

a) przekątne dwóch ścian bocznych wychodzące z tego samego wierzchołka tworzą kąt, którego cosinus jest równy $\frac{3}{4}$,

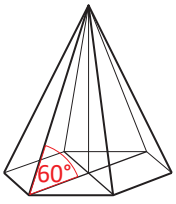
b) przekątna ściany bocznej tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt, którego cosinus jest równy $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

11. Przekątna sześcianu ma długość $\sqrt{192}$ cm. Oblicz:

a) objętość i pole powierzchni całkowitej tego sześcianu,
b) odległość wierzchołka od tej przekątnej, do której ten wierzchołek nie należy.

12. Oblicz wysokość oraz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego różne przekątne mają długość 17 cm i 15 cm.

13. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wysokość ma długość 6 cm, a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.



14. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym *ABCD* ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Punkt *E* jest środkiem krawędzi *AC*. Wiedząc, że pole trójkąta *EBD* jest równe $18\sqrt{3}$ cm^2, oblicz:

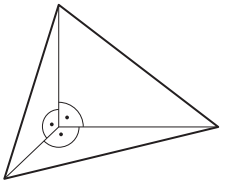
a) długości krawędzi tego ostrosłupa,
b) objętość ostrosłupa.

15. Podstawą ostrosłupa *ABCDW* jest kwadrat *ABCD* o boku mającym długość 6 cm. Krawędź *AW* jest wysokością tego ostrosłupa i ma długość 8 cm.

a) Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
b) Oblicz długość najdłuższej krawędzi ostrosłupa.
D c) Wykaż, że ściany boczne *BAW* i *CBW* są do siebie prostopadłe.

16. Wysokość ostrosłupa jest równa 12 cm, a wszystkie krawędzie boczne mają długość 13 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli jego podstawą jest:
   a) trójkąt prostokątny równoramienny,
   b) trójkąt równoramienny, którego kąt między ramionami jest równy 30°.

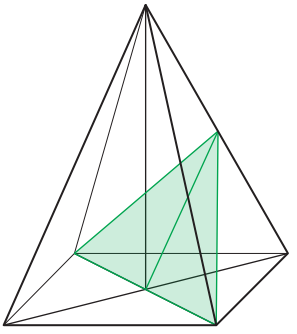
17. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 6 i 8. Wysokość ostrosłupa ma długość 6, a spodek tej wysokości jest wierzchołkiem kąta prostego w podstawie. Oblicz:



   a) pole powierzchni największej ściany bocznej,
   b) tangens kąta dwuściennego między największą ścianą boczną a płaszczyzną podstawy,
   c) odległość spodka wysokości ostrosłupa od największej ściany bocznej.

18. Podstawą ostrosłupa *ABCD* jest trójkąt prostokątny *ABC*, którego kąty ostre *BAC* i *CBA* mają odpowiednio miarę 30° i 60°. Krawędź *BD* jest wysokością tego ostrosłupa. Wiedząc, że $|BD| = |AC| = \sqrt{12}$, oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

19. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym poprowadzono płaszczyznę zawierającą przekątną podstawy i nachyloną do tej płaszczyzny pod kątem, którego cosinus jest równy 0,28 (zobacz rysunek obok). Pole otrzymanego przekroju jest równe 87,5. Wiedząc, że środek jednej z krawędzi bocznych należy do tego przekroju, oblicz:



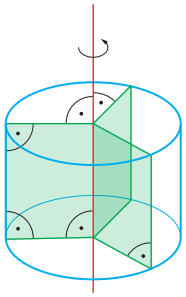
   a) objętość ostrosłupa,
   b) odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej.

D 20. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt *ABCD*, którego przekątne przecinają się w punkcie *O*. Ściany boczne *BCW* i *CDW* ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątami ostrymi odpowiednio β i γ. Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$, gdzie $\alpha \in (0°, 45°)$, to $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} = \operatorname{tg}\alpha$.

6. Geometria przestrzenna. Bryły obrotowe

Walec

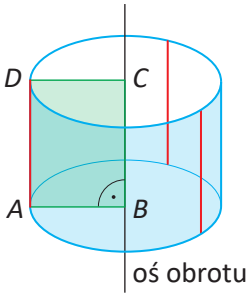
Walcem nazywamy figurę geometryczną, powstałą przez obrót prostokąta wokół prostej, zawierającej jego bok.



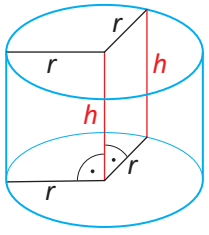
Prostą, wokół której obracamy prostokąt, nazywamy **osią obrotu walca**. Na rysunku powyżej oś obrotu jest zaznaczona czerwonym kolorem. Boki prostokąta prostopadłe do osi obrotu zakreślają dwa koła, które nazywamy **podstawami walca**. Promień podstawy walca oznaczamy literą *r*.

Bok prostokąta równoległy do osi obrotu i do niej nienależący (bok *AD* na rys. a) zakreśla **powierzchnię boczną walca**. Każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej, którego końce należą do podstaw, nazywamy **tworzącą walca.**
Na rys. a) trzy przykładowe tworzące są zaznaczone kolorem czerwonym.

a)



b)

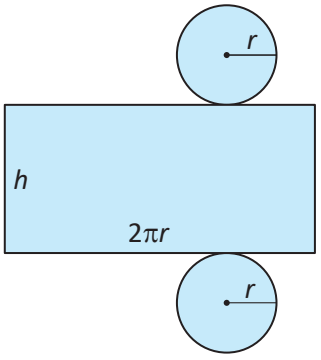


Wysokością walca nazywamy każdy odcinek, który jest prostopadły do podstaw walca i którego końce leżą na płaszczyznach zawierających te podstawy.

W szczególności każda tworząca walca jest jego wysokością, zobacz rys. b). Czasem wysokością walca będziemy nazywać długość tego odcinka i oznaczać literą h.

Jeśli rozetniemy powierzchnię boczną walca wzdłuż tworzącej i rozwiniemy na płaszczyźnie, to otrzymamy prostokąt, którego długość dwóch boków jest równa h, a pozostałych dwóch – obwodowi koła w podstawie walca, czyli $2\pi r$.

Poniższy rysunek ilustruje siatkę walca o promieniu podstawy r i wysokości h. Pole powierzchni siatki jest polem powierzchni całkowitej walca.



Twierdzenie 1.

Pole powierzchni bocznej P_b walca określa wzór

$$P_b = 2\pi r \cdot h$$

pole podstawy P_p walca

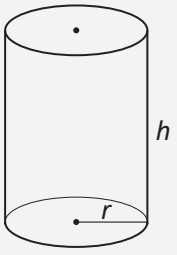
$$P_p = \pi r^2$$

pole powierzchni całkowitej P_c walca

$$P_c = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

$$P_c = 2\pi r(h + r)$$

gdzie r jest promieniem podstawy, h – wysokością walca.



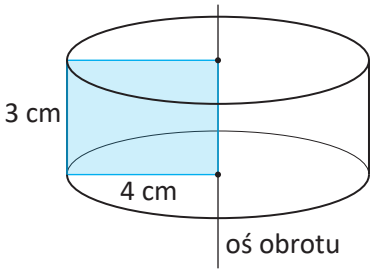
Ćwiczenie 1. Oblicz pole powierzchni bocznej oraz pole powierzchni całkowitej walca, którego wysokość jest równa 8 cm, a promień podstawy wynosi 5 cm. Wynik zaokrąglij do 1 cm^2.

Przykład 1.

Prostokąt ma wymiary 3 cm na 4 cm. Prostokąt obracamy dwa razy: raz wokół krótszego boku i drugi raz wokół dłuższego boku. Porównamy powierzchnie całkowite powstałych walców.

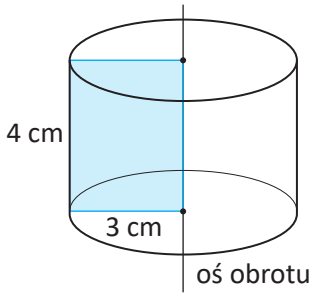
Wykonujemy pomocnicze rysunki ilustrujące te walce.

I. Krótszy bok prostokąta jest wysokością walca



$P_b = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 3 = 24\pi$
$2P_p = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 32\pi$
$P_c = 56\pi \text{ cm}^2$

II. Krótszy bok prostokąta jest promieniem podstawy walca



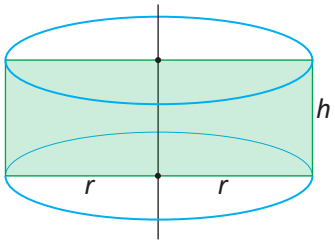
$P_b = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$
$2P_p = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 18\pi$
$P_c = 42\pi \text{ cm}^2$

Obydwa walce mają takie samo pole powierzchni bocznej. Walec mający większy promień podstawy i mniejszą wysokość ma większe pole powierzchni całkowitej niż walec o mniejszym promieniu i większej wysokości.

Ćwiczenie 2. Narysuj siatki walców z przykładu 1.

Przekrój walca płaszczyzną - to część wspólna danej płaszczyzny i walca.

Przekrój walca płaszczyzną zawierającą oś obrotu walca nazywamy **przekrojem osiowym walca**. Płaszczyzna przekroju osiowego jest prostopadła do podstaw walca. Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego dwa boki są równe wysokości walca, a pozostałe dwa mają długość równą średnicy podstawy walca.



Przykład 2.

Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α, gdzie $\sin\alpha = 0{,}6$. Pole powierzchni bocznej walca jest równe 84π. Obliczymy wysokość h walca i promień r jego podstawy.

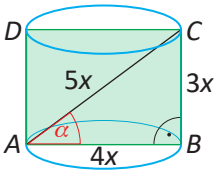
Na rysunku a) poniżej prostokąt *ABCD* przedstawia przekrój osiowy walca. Przekątna *AC* tworzy z płaszczyzną podstawy walca kąt ostry α, gdzie

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

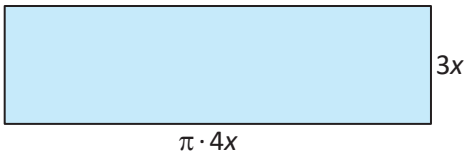
Możemy przyjąć, że $|BC| = 3x$, $|AC| = 5x$, gdzie $x > 0$. Wówczas $h = 3x$ oraz $|AB| = 4x$, $r = 2x$, $2\pi r = \pi \cdot 4x$

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem o wymiarach $3x$ na $\pi \cdot 4x$. Zobacz rysunek b) poniżej.

a)



b)



Z warunków zadania wiemy, że pole powierzchni bocznej jest równe 84π, zatem

$3x \cdot \pi \cdot 4x = 84\pi$

$x^2 = 7$, stąd

$x = \sqrt{7}$, bo $x > 0$

Wysokość walca jest równa $3\sqrt{7}$, a promień podstawy wynosi $2\sqrt{7}$.

Ćwiczenie 3. Oblicz stosunek pola przekroju osiowego dowolnego walca do pola powierzchni bocznej tego walca.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Objętość *V* walca o promieniu podstawy *r* i wysokości *h* wyraża się wzorem

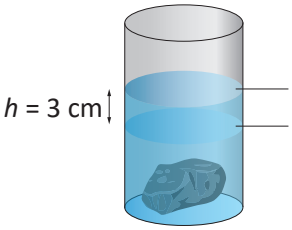
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Objętość walca jest równa iloczynowi pola podstawy walca i jego wysokości.

Ćwiczenie 4. Oblicz objętość walca, którego promień podstawy jest równy 6 cm, a wysokość wynosi 10 cm. Czy pojemność walca jest większa, czy mniejsza od jednego litra?

Przykład 3.

Do naczynia w kształcie walca napełnionego częściowo wodą wrzucono kamień, który zanurzył się całkowicie. Poziom wody podniósł się o 3 cm. Wiedząc, że promień podstawy naczynia jest równy 5 cm, wyznaczymy objętość kamienia.



Kamień wypiera wodę o objętości równej objętości tego kamienia. Zatem objętość V kamienia to objętość walca, którego wysokość jest równa 3 cm, a promień podstawy ma 5 cm długości.

$V = \pi r^2 \cdot h$, gdzie

$r = 5$ cm, $h = 3$ cm

$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 3 = 75\pi$

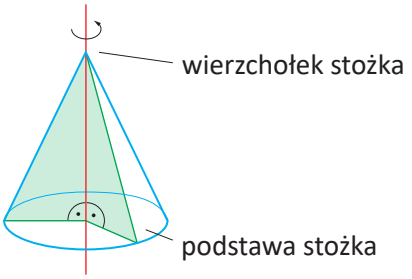
Objętość kamienia jest równa 75π cm^3, czyli ok. 235,6 cm^3.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Prostokąt, którego boki mają długość 8 cm i 5 cm, obracamy wokół jednego z boków. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanego walca.
2. Kwadrat o boku o długości 4 cm obrócono wokół osi symetrii, przechodzącej przez środki dwóch boków. Narysuj siatkę otrzymanego walca. Przyjmij $\pi = 3{,}15$.
3. Wysokość walca jest o 1 cm dłuższa od średnicy podstawy. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej walca wynosi 308π cm^2, oblicz:
   a) promień podstawy walca b) pole powierzchni bocznej walca.
4. Wysokość walca jest trzy razy dłuższa od promienia podstawy. Pole przekroju osiowego walca jest równe 150 cm^2. Oblicz objętość tego walca.
5. Objętość walca wynosi 45π cm^3, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 30π cm^2. Oblicz długość tworzącej walca oraz tangens kąta α nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy.
6. Prostokąt obrócono raz wokół jednego boku i drugi raz wokół drugiego boku. Stosunek objętości powstałych walców jest równy 2 : 3. Wyznacz wymiary tego prostokąta, wiedząc, że jego pole jest równe 294 cm^2.
7. Stosunek długości boków prostokąta tworzącego powierzchnię boczną walca wynosi 5 : 3. Oblicz wymiary tego prostokąta, jeśli objętość walca jest równa $\frac{150}{\pi}$.
8. Wysokość walca jest o 3 cm dłuższa od promienia podstawy. Wiedząc, że objętość walca jest równa 20π cm^3, oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Stożek

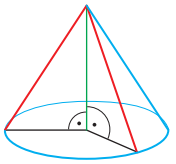
Stożkiem nazywamy figurę geometryczną, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej, zawierającej przyprostokątną tego trójkąta.



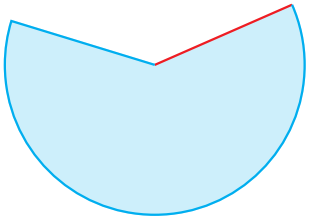
Prostą, wokół której obracamy trójkąt, nazywamy **osią obrotu stożka**. Na rysunku powyżej jest ona zaznaczona kolorem czerwonym. Wspólny koniec przeciwprostokątnej trójkąta i przyprostokątnej zawartej w osi obrotu nazywamy **wierzchołkiem stożka**. Przyprostokątna trójkąta prostopadła do osi obrotu zakreśla koło, które nazywamy **podstawą stożka**. Przeciwprostokątna trójkąta zakreśla **powierzchnię boczną stożka**.

Wysokością stożka nazywamy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugim – rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy. Wysokością stożka będziemy nazywać też długość tego odcinka. Każdy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugim – dowolny punkt okręgu podstawy, nazywamy **tworzącą stożka**. Tworząca zawiera się w powierzchni bocznej stożka. Na rysunku a) poniżej wysokość jest zaznaczona kolorem zielonym, a dwie tworzące – kolorem czerwonym.

a)



b)



Powierzchnia boczna stożka, po przecięciu wzdłuż tworzącej i rozwinięciu na płaszczyznę, jest wycinkiem koła, którego promieniem jest tworząca stożka, jak na rysunku b).

Ćwiczenie 1. Wytnij z papieru koło, którego promień ma długość 8 cm. Koło przetnij na dwa wycinki, których kąty środkowe są odpowiednio równe 135° i 225°. Każdą z uzyskanych części zwiń tak, aby powstały powierzchnie boczne dwóch stożków. W każdym przypadku wskaż wierzchołek i tworzącą stożka. Oblicz obwody podstaw tych stożków.

Twierdzenie 1.
Niech promień podstawy stożka będzie równy r, a tworząca stożka niech ma długość l. Jeśli γ jest kątem środkowym wycinka koła, będącego powierzchnią boczną tego stożka po rozwinięciu na płaszczyznę, to

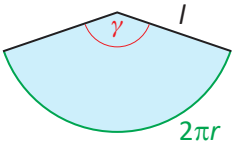
$$\frac{\gamma}{360^\circ} = \frac{r}{l}$$

Dowód: Obwód koła o promieniu l jest równy

$$2\pi l$$

Wówczas część okręgu tego koła, odpowiadająca wycinkowi o kącie środkowym γ, ma długość

$$\frac{\gamma}{360^\circ} \cdot 2\pi l$$



Jednocześnie ta długość jest obwodem podstawy stożka, czyli koła o promieniu r. Mamy

$$\frac{\gamma}{360^\circ} \cdot 2\pi l = 2\pi r \quad / : 2\pi l$$

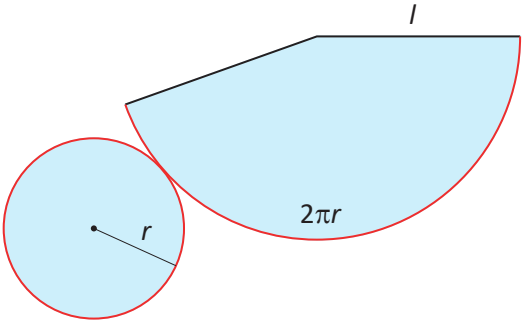
stąd

$$\frac{\gamma}{360^\circ} = \frac{r}{l},$$

co kończy dowód.

Ćwiczenie 2. Tworząca stożka jest cztery razy dłuższa od promienia podstawy tego stożka. Jaką miarę ma kąt środkowy wycinka koła, z którego jest utworzona powierzchnia boczna tego stożka?

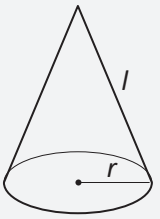
Podstawa stożka i powierzchnia boczna stożka tworzą **powierzchnię całkowitą stożka**. Rysunek poniżej przedstawia siatkę stożka.



Pole powierzchni siatki jest polem powierzchni całkowitej stożka.

Ćwiczenie 3. Tworząca stożka ma długość 6 cm, a promień podstawy tego stożka jest równy 3,5 cm. Podaj miarę kąta środkowego wycinka koła, tworzącego powierzchnię boczną stożka. Narysuj siatkę tego stożka.

Twierdzenie 2.



Pole powierzchni bocznej P_b stożka wyraża się wzorem

$$P_b = \pi \cdot r \cdot l$$

pole podstawy P_p stożka

$$P_p = \pi \cdot r^2$$

pole powierzchni całkowitej P_c stożka

$$P_c = \pi r l + \pi r^2$$

$$P_c = \pi r(l + r)$$

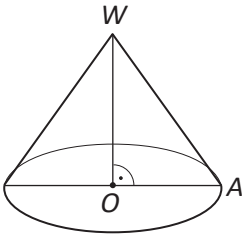
gdzie r jest promieniem podstawy stożka, l – długością tworzącej.

Ćwiczenie 4. Wyprowadź wzór na pole powierzchni bocznej stożka.

Przykład 1.

Należy pokryć miedzianą blachą dach mający kształt stożka, którego wysokość jest równa 10 m, a promień podstawy ma długość 7,5 m. Obliczymy, ile blachy miedzianej należy przygotować, jeśli 10% całej ilości przeznaczyć trzeba na łączenia. Wynik podamy z dokładnością do 0,01 m^2.

Niech stożek na rysunku poniżej reprezentuje dach, którego dotyczy zadanie. Odcinek OW jest wysokością stożka, odcinek OA jest promieniem podstawy.



Mamy dane:

$$|OW| = 10 \text{ m}$$

$$|OA| = 7{,}5 \text{ m}$$

Obliczamy długość tworzącej stożka, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego WOA.

$$|WA|^2 = 10^2 + 7{,}5^2, \quad \text{stąd}$$

$$|WA| = 12{,}5 \text{ m}$$

Wyznaczamy powierzchnię boczną P_b stożka

$$P_b = \pi \cdot |OA| \cdot |WA|$$

$$P_b = \pi \cdot 7{,}5 \cdot 12{,}5 = 93{,}75\pi$$

Powierzchnia boczna stożka stanowi 90% potrzebnej blachy miedzianej. Niech x oznacza powierzchnię blachy miedzianej. Wówczas

$$0{,}9 \cdot x = 93{,}75\pi$$

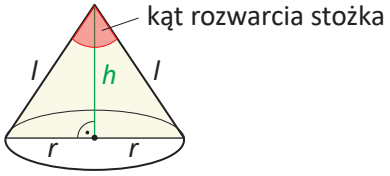
$$x = \frac{937{,}5\pi}{9} \approx 327{,}2492$$

Na pokrycie dachu potrzeba 327,25 m^2 blachy miedzianej.

Ćwiczenie 5. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 396π cm^2. Tworząca stożka jest dłuższa od promienia podstawy o 75%. Oblicz jej długość.

Przekrój stożka płaszczyzną – to część wspólna danej płaszczyzny i stożka.

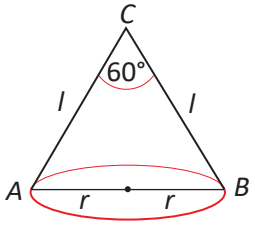
Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś obrotu. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym, którego ramiona są tworzącymi stożka, a trzeci bok jest średnicą podstawy stożka. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka**.



Przykład 2.

Kąt rozwarcia stożka jest równy 60°. Pokażemy, że powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest półkolem.

Rysunek obok przedstawia stożek, którego kąt rozwarcia jest równy 60°. Wówczas przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Jeśli l oznacza długość tworzącej stożka, zaś r – promień jego podstawy, to



$$2r = l, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$$

Niech γ oznacza kąt środkowy wycinka, odpowiadającego powierzchni bocznej stożka. Z twierdzenia 1. wynika, że

$$\frac{\gamma}{360^\circ} = \frac{1}{2}, \quad \text{więc}$$

$$\gamma = 180^\circ$$

A to znaczy, że dany wycinek koła jest półkolem.

Ćwiczenie 6. Oblicz stosunek pola powierzchni bocznej do pola przekroju osiowego stożka z przykładu 2. Czy istnieje stożek, którego pole przekroju osiowego jest równe polu powierzchni bocznej? Odpowiedź uzasadnij.

Twierdzenie 3.

Objętość V stożka o wysokości h i promieniu podstawy r wyraża się wzorem

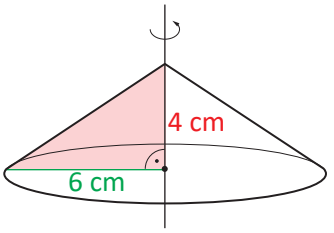
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

Objętość stożka jest równa jednej trzeciej objętości walca o takiej samej wysokości i takim samym promieniu podstawy, jak dany stożek.

Przykład 3.

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych mających długości 4 cm i 6 cm obracamy dwukrotnie: raz wokół krótszej i raz wokół dłuższej przyprostokątnej. Obliczymy i porównamy objętości V_1 i V_2 otrzymanych stożków.

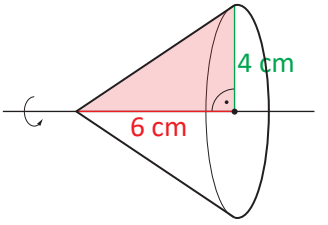
a) W pierwszym przypadku mamy
$h = 4$ cm, $r = 6$ cm



Zatem

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 48\pi$$

b) W drugim przypadku mamy
$h = 6$ cm, $r = 4$ cm



Zatem

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 32\pi$$

Otrzymujemy, że

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{48\pi}{32\pi} = \frac{3}{2}$$

Większą objętość ma stożek o dłuższym promieniu podstawy i krótszej wysokości.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Promień podstawy stożka jest równy 50 cm, a długość tworzącej wynosi 75 cm. Oblicz miarę kąta środkowego wycinka kołowego, który tworzy powierzchnię boczną tego stożka.
2. Tworząca stożka ma długość l, promień podstawy stożka jest równy r. Narysuj siatkę tego stożka, jeśli:
   a) $r = 2{,}5$ cm, $l = 5$ cm,
   b) $r = 2$ cm, $l = 6$ cm.
3. Wysokość stożka jest równa 16 cm. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy stożka pod kątem α takim, że $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Oblicz:
   a) promień podstawy stożka,
   b) pole powierzchni bocznej tego stożka.

4. Tworząca stożka ma długość 15 cm, a wysokość stożka jest równa 12 cm. Oblicz:
   a) pole powierzchni całkowitej stożka,
   b) objętość tego stożka.

5. Wysokość stożka jest równa $\sqrt{108}$, a kąt rozwarcia stożka ma miarę 60°. Oblicz:
   a) objętość stożka,
   b) pole powierzchni bocznej tego stożka.

6. Kąt środkowy wycinka koła jest równy 120°, a pole tego wycinka wynosi 48π. Wycinek zwinięto, tworząc powierzchnię boczną stożka. Oblicz objętość otrzymanego stożka.

7. Wysokość stożka jest równa $\sqrt{40}$. Oblicz objętość tego stożka, wiedząc, że jego pole powierzchni bocznej wynosi 21π.

8. Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do pola przekroju osiowego wynosi 2π. Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka.

9. Kąt środkowy wycinka koła jest równy 270°. Wycinek zwinięto, tworząc powierzchnię boczną stożka. Oblicz cosinus kąta rozwarcia tego stożka.

10. Pole przekroju osiowego stożka jest równe 25 cm^2. Wiedząc, że tworząca stożka ma długość 10 cm, oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka. Czy to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

11. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 6, a jeden z kątów ostrych jest równy 30°. Trójkąt obrócono wokół krótszej przyprostokątnej. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły.

12. Wysokość trójkąta równoramiennego poprowadzona na podstawę jest równa 24. Trójkąt obrócono wokół tej wysokości i otrzymano stożek, której objętość jest równa 800π. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

D 13. W trójkącie prostokątnym kąt między krótszą przyprostokątną i przeciwprostokątną ma miarę α. Trójkąt obrócono najpierw wokół krótszej przyprostokątnej i otrzymano stożek o objętości V_1. Następnie ten trójkąt obrócono wokół dłuższej przyprostokątnej i otrzymano stożek o objętości V_2. Wykaż, że $V_1 : V_2 = \operatorname{tg}\alpha$.

14. Wśród stożków, których tworząca ma długość 12 cm, znajduje się taki, którego przekrój osiowy ma największe pole.
   a) Oblicz wysokość tego stożka.
   b) Czy ten stożek ma również największe pole powierzchni bocznej? Odpowiedź uzasadnij.

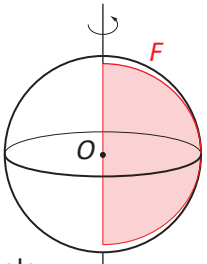
Kula i sfera

Sferą o środku w punkcie O i promieniu r, $r > 0$, nazywamy zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r. Taką sferę oznaczamy $s(O, r)$.

Kulą o środku w punkcie O i promieniu r, $r > 0$, nazywamy zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest nie większa niż r. Taką kulę oznaczamy $k(O, r)$.

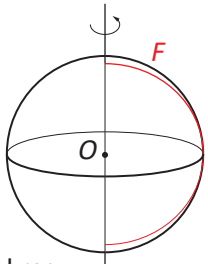
Kulę można otrzymać w wyniku obrotu półkola wokół prostej, zawierającej średnicę półkola. Podobnie sferę można otrzymać w wyniku obrotu półokręgu wokół pewnej prostej. Rysunki poniżej ilustrują te przypadki.

I. Kula



F - półkole

II. Sfera



F - półokrąg

Sfera jest powierzchnią kuli. Powierzchni kuli nie można rozciąć na takie części, które można by było rozłożyć na płaszczyźnie, czyli sfera nie ma siatki.

Twierdzenie 1.
Pole powierzchni P kuli o promieniu r, $r > 0$, wyraża się wzorem
$P = 4\pi r^2$

Przykład 1.

Płuca dorosłego człowieka zbudowane są z ok. 300 milionów pęcherzyków płucnych, każdy o średnicy ok. 0,32 mm. Obliczymy, jakie pole powierzchni mają płuca, przyjmując założenie, że pęcherzyk płucny jest kuleczką o średnicy 0,32 mm. Odpowiedź wyrazimy w metrach kwadratowych.

Obliczamy pole powierzchni P pęcherzyka płucnego
$P = 4\pi r^2$, gdzie $r = 0{,}16 \text{ mm} = 0{,}00016 \text{ m} = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
$P = 4 \cdot \pi \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-4})^2 = 10{,}24 \cdot \pi \cdot 10^{-8}$

Obliczamy pole powierzchni płuc $P_{pł}$
$P_{pł} = 300\,000\,000 \cdot 10{,}24 \cdot \pi \cdot 10^{-8} = 3 \cdot 10^8 \cdot 10{,}24 \cdot \pi \cdot 10^{-8} =$
$= 30{,}72 \cdot \pi \approx 96{,}51.$
Pole powierzchni płuc dorosłego człowieka jest równe ok. 97 m^2.

Twierdzenie 2.
Objętość V kuli o promieniu r, $r > 0$, wyraża się wzorem

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

Przykład 2.

Pole powierzchni kuli K_1 jest 9 razy większe od pola powierzchni kuli K_2. Ile razy objętość kuli K_1 jest większa od objętości kuli K_2?

Przyjmijmy oznaczenia: R – promień kuli K_1, r – promień kuli K_2.
Wyznaczamy pole powierzchni P_1 kuli K_1 oraz pole powierzchni P_2 kuli K_2.

$P_1 = 4\pi R^2 \quad P_2 = 4\pi r^2$

Z warunków zadania wynika, że

$P_1 = 9P_2$, więc

$4\pi R^2 = 9 \cdot 4\pi r^2$, stąd otrzymujemy

$R = 3r$

Wyznaczamy objętość V_1 kuli K_1 oraz objętość V_2 kuli K_2 w zależności od r.

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi (3r)^3 = 27 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \qquad V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

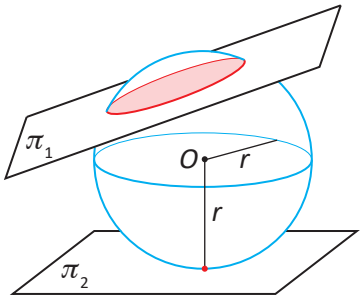
Zatem

$V_1 = 27 \cdot V_2$

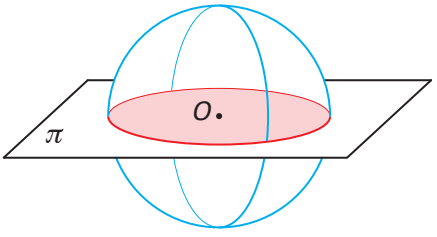
Objętość kuli K_1 jest 27 razy większa od objętości kuli K_2.

Każdy niepusty przekrój kuli płaszczyzną jest kołem lub punktem, jak na rysunku a) poniżej. Jeśli płaszczyzna przekroju przechodzi przez środek kuli, to otrzymany przekrój nazywamy **kołem wielkim kuli**, zobacz rysunek b).

a)



b)



Ćwiczenie 1. Jaką figurą jest niepusty przekrój sfery pewną płaszczyzną?

Przekrój płaszczyzną przez środek sfery wyznacza okrąg, który nazywamy **okręgiem wielkim sfery**.

Przykład 3.

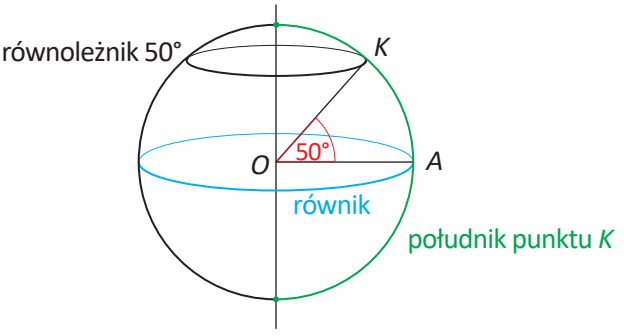
Kraków leży w przybliżeniu na równoleżniku 50° szerokości geograficznej północnej. Przyjmując, że Ziemia jest kulą o promieniu R, gdzie $R = 6300$ km oraz $\pi \approx 3{,}14$, obliczymy:

a) jaką drogę wzdłuż południka należy pokonać, aby z Krakowa dotrzeć do równika,

b) jaką drogę zakreśla Kraków na skutek obrotu Ziemi dookoła osi w ciągu jednej godziny, przy założeniu, że Ziemia wykonuje pełny obrót w ciągu 24 godzin.

Jeśli przyjmiemy, że Ziemia jest kulą, to równik jest okręgiem wielkim sfery. Każdy okrąg wyznaczony na sferze Ziemi płaszczyzną równoległą do płaszczyzny równika jest równoleżnikiem.

Ad a) Niech kula o środku w punkcie O na rysunku poniżej ilustruje Ziemię, a punkt K na sferze niech oznacza miasto Kraków, położone na równoleżniku 50° szerokości geograficznej północnej. Południk z punktem K jest oznaczony na rysunku kolorem zielonym. Punkt przecięcia równika z tym południkiem oznaczmy przez A.



Z danych zadania wynika, że

$$\left|\sphericalangle AOK\right| = 50^\circ$$

Droga d z punktu K do równika wzdłuż południka jest równa długości łuku KA, odpowiadającego kątowi AOK. Obliczamy:

$$d = \frac{50^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R, \quad \text{gdzie } R = 6300 \text{ km}, \ \pi \approx 3{,}14$$

$$d = \frac{5}{36} \cdot 2\pi \cdot 6300 \approx 10 \cdot 3{,}14 \cdot 175 = 5495$$

Droga z Krakowa do równika wzdłuż południka jest równa ok. 5495 km.

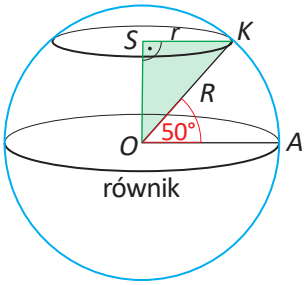
Ad b) Niech punkt S oznacza środek koła wyznaczonego przez równoleżnik 50° szerokości geograficznej północnej, zaś r – promień tego koła. Zobacz rysunek na następnej stronie.

Zauważ, że punkt S należy do płaszczyzny (OAK), a odcinek OS jest prostopadły do płaszczyzny równika i do płaszczyzny równoleżnika.

Rozpatrzmy trójkąt *SOK*. Mamy:

$|OK| = R$, $|\sphericalangle OSK| = 90°$ oraz

$|\sphericalangle KOS| = 90° - 50° = 40°$



Obliczamy promień koła wyznaczonego przez równoleżnik 50°.

$$\frac{|SK|}{|OK|} = \sin|\sphericalangle KOS|, \quad \text{stąd} \quad \frac{r}{R} = \sin 40°$$

$r = R \cdot \sin 40°$, gdzie $R = 6300$ km, $\sin 40° \approx 0{,}643$

$r \approx 6300 \cdot 0{,}643 = 4050{,}9$

Na skutek ruchu wirowego Ziemi, w ciągu jednej godziny Kraków zakreśla drogę s, równą $\frac{1}{24}$ długości równoleżnika 50°. Otrzymujemy:

$$s = \frac{2\pi r}{24} \approx \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4050{,}9}{24} \approx 1060$$

Na skutek ruchu wirowego Ziemi, w ciągu godziny Kraków zakreśla drogę równą ok. 1060 km.

Ćwiczenie 2. Stolicą Kenii jest Nairobi, które można uznać za miasto położone na równiku. Ile w przybliżeniu kilometrów pokonuje to miasto w ciągu jednej godziny, na skutek ruchu wirowego Ziemi?

Ćwiczenie 3. Które równoleżniki mają długość równą połowie długości równika?

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Punkty *A* i *B* należą do sfery o środku w punkcie *O*. Wiedząc, że $|AB| = 10\sqrt{3}$ cm oraz $|\sphericalangle ABO| = 30°$, oblicz pole powierzchni sfery.
2. Woda kapie z kranu co dwie sekundy. Zakładając, że kropla wody ma kształt kuli o promieniu 3 mm oblicz, ile litrów wody wycieknie z kranu w ciągu jednej doby.
3. Objętość kuli K_1 jest 125 razy większa od objętości kuli K_2. Oblicz
   a) stosunek promieni obu kul b) stosunek pól powierzchni tych kul.
4. Kulę przecięto płaszczyzną, której odległość od środka kuli jest równa połowie długości promienia. Przekrój jest kołem, którego pole wynosi 27π cm^2. Oblicz objętość kuli.

Bryły obrotowe – zadania różne

Przykład 1.

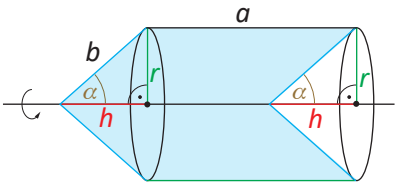
Boki równoległoboku mają długość 5 i 9, a sinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{2}{3}$. Równoległobok obrócono wokół dłuższego boku. Obliczymy pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanej bryły.

Dane są długości boków równoległoboku:

$a = 9,\ b = 5$

oraz sinus kąta ostrego równoległoboku

$\sin\alpha = \frac{2}{3}$



Otrzymana bryła składa się ze stożka i z walca, z którego wycięto stożek. Obydwa stożki – doklejony do walca i wycięty z walca – mają takie same wymiary.

Powierzchnia całkowita otrzymanej bryły składa się z powierzchni bocznej walca oraz z powierzchni bocznych dwóch stożków. Bok równoległoboku mający długość b jest tworzącą tych stożków, bok mający długość a jest wysokością walca, a kąt α jest równy połowie kąta rozwarcia każdego z tych stożków.

Obliczamy promień r podstawy walca i stożków.

$\frac{r}{b} = \sin\alpha\ ,\ b = 5,\ \sin\alpha = \frac{2}{3}$

$\frac{r}{5} = \frac{2}{3}$, stąd

$r = 3\frac{1}{3}$

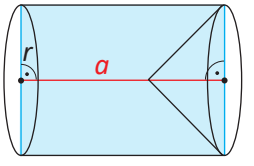
Wysokość walca jest równa długości dłuższego boku równoległoboku. Wyznaczamy pole P_c powierzchni całkowitej bryły:

$P_c = 2\pi r \cdot a + 2\pi r \cdot b$

$P_c = 2\pi r \cdot (a + b)$, więc

$P_c = 2 \cdot \pi \cdot \frac{10}{3} \cdot (9 + 5) = \frac{280\pi}{3}$

Wyznaczamy objętość V powstałej bryły. Zauważ, że jeśli doklejony stożek oderwiemy od walca i włożymy w miejsce, gdzie drugi stożek był z walca wycięty, to otrzymamy walec. Zatem objętość otrzymanej bryły jest równa objętości walca o promieniu r i wysokości a.



Mamy:

$V = \pi r^2 \cdot a$

$V = \pi \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 9 = \pi \cdot \frac{100}{9} \cdot 9 = 100\pi$

Pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły jest równe $\frac{280\pi}{3}$, a objętość tej bryły jest równa 100π.

Ćwiczenie 1. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość bryły, powstałej w wyniku obrotu równoległoboku z przykładu 1. wokół krótszego boku.

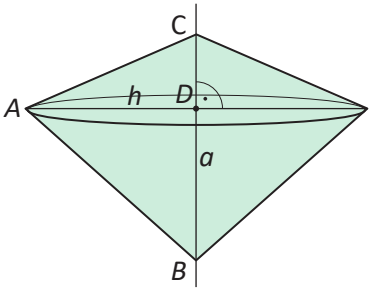
Przykład 2.

Bok BC trójkąta ostrokątnego ABC ma długość a, zaś pole tego trójkąta jest równe P. Trójkąt obracamy wokół prostej BC. Wykażemy, że objętość otrzymanej bryły jest równa $\frac{4\pi P^2}{3a}$.

Niech h oznacza wysokość trójkąta ABC opuszczoną na bok BC,

$h = |AD|$.

W wyniku obrotu trójkąta ABC wokół prostej BC otrzymujemy bryłę, która jest sumą dwóch stożków złączonych podstawami o promieniu h.



Obliczamy objętość V otrzymanej bryły.

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot |CD| + \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot |BD| = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot \left(|CD| + |BD|\right) = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot a$$

Pole P trójkąta ABC jest równe

$$P = \frac{1}{2}ah, \quad \text{więc} \quad h = \frac{2P}{a}$$

Otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 a = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2P}{a}\right)^2 \cdot a = \frac{1}{3}\pi \frac{4P^2}{a} = \frac{4\pi P^2}{3a},$$

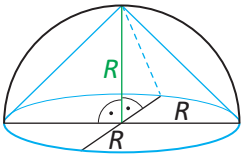
co kończy dowód.

Ćwiczenie 2. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych mających długości 15 cm i 20 cm obracamy wokół przeciwprostokątnej. Oblicz objętość powstałej bryły.

Przykład 3.

W półkulę wpisano stożek tak, że koło wielkie półkuli jest jednocześnie podstawą stożka, a wierzchołek tego stożka należy do półsfery. Wyznaczymy stosunek objętości półkuli do objętości stożka.

Rysunek poniżej ilustruje stożek wpisany w półkulę o promieniu R.



Zauważamy, że odległość wierzchołka stożka od jego podstawy jest równa promieniowi półkuli, więc wysokość stożka jest równa R.

Objętość V_P półkuli jest równa połowie objętości kuli o promieniu R.

$$V_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Obliczamy objętość V_S stożka:

$$V_S = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3$$

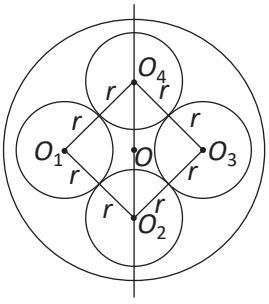
Stosunek objętości półkuli do objętości stożka wpisanego w półkulę jest równy 2.

Ćwiczenie 3. Wyznacz stosunek powierzchni bocznych obu brył z przykładu 3. Jaką miarę ma kąt rozwarcia stożka?

Przykład 4.

Do misy w kształcie półsfery o średnicy 24 cm włożono cztery pomarańcze jednakowej wielkości i przykryto płaską pokrywką. Wówczas wszystkie pomarańcze stykały się z tą pokrywką. Obliczymy objętość jednej pomarańczy. Wynik zaokrąglimy do 1 cm^3.

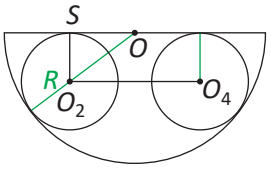
Załóżmy, że pomarańcze są reprezentowane przez cztery przystające kule, każda o promieniu r, a misa – przez połowę sfery o promieniu R, $R = 12$ cm. Niech punkt O będzie środkiem sfery, a punkty O_1, O_2, O_3, O_4 – środkami przystających kul.



Punkty O_1, O_2, O_3, O_4 leżą na jednej płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny przykrywki i są wierzchołkami kwadratu, którego przekątna ma długość $2r\sqrt{2}$, czyli

$$|O_2O_4| = 2r\sqrt{2}$$

Narysujmy przekrój półsfery płaszczyzną, przechodzącą przez punkty O_2, O_4 i prostopadłą do płaszczyzny $(O_1O_2O_3O_4)$.



Niech punkt S będzie punktem styczności kuli o środku O_2 z płaszczyzną, zawierającą okrąg wielki sfery. Wówczas:

$$|SO| = \frac{1}{2}|O_2O_4| = r\sqrt{2}$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego O_2OS wyznaczamy długość odcinka OO_2.

$$|OO_2| = r\sqrt{3}$$

Przez punkt O_2 prowadzimy promień R i otrzymujemy:

$R = r + |OO_2|$, stąd

$$R = r + r\sqrt{3} = r\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Wyznaczamy promień kuli r.

$$r = \frac{R}{\sqrt{3}+1}, \quad \text{gdzie } R = 12 \text{ cm}$$

$$r = \frac{12\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{12\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}$$

$$r = 6\left(\sqrt{3}-1\right) \text{ cm}$$

Obliczamy objętość V kuli.

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)^3 = 288\pi \cdot \left(3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1\right) = 576\pi \cdot \left(3\sqrt{3}-5\right)$$

$V \approx 355 \text{ cm}^3$

Każda pomarańcza ma objętość równą w przybliżeniu 355 cm^3, czyli 0,355 litra.

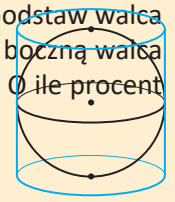
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Naczynie w kształcie walca jest częściowo wypełnione wodą. W to naczynie wrzucono kulkę, która zanurzyła się w wodzie całkowicie. Oblicz, o ile centymetrów wzrósł poziom wody w naczyniu, jeśli średnica podstawy walca ma długość 12 cm, a promień kulki jest równy 3 cm.
2. Trójkąt prostokątny równoramienny obraca się raz wokół przyprostokątnej, a drugi raz wokół przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pól powierzchni i stosunek objętości otrzymanych brył.

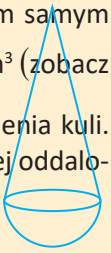
3. Przekątne rombu mają długość $12\sqrt{5}$ cm i $6\sqrt{5}$ cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły, która powstanie w wyniku obrotu tego rombu:
a) wokół krótszej przekątnej b) wokół jego boku.

4. Wysokość walca jest równa H. W walec wpisano stożek w taki sposób, że podstawa stożka jest podstawą walca, a wierzchołek stożka jest środkiem drugiej podstawy walca. Pola powierzchni bocznych walca i stożka są równe. Oblicz:
a) objętość stożka b) miarę kąta rozwarcia stożka.

5. Na kuli opisano walec w taki sposób, że punkty wspólne kuli i podstaw walca są środkami tych podstaw, a część wspólna kuli z powierzchnią boczną walca jest okręgiem wielkim powierzchni kuli (zobacz rysunek obok). O ile procent objętość walca jest większa od objętości kuli?

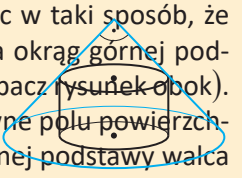


6. Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego półkulą o takim samym promieniu co promień podstawy stożka, a jej objętość wynosi $\frac{2\pi}{27}$ m^3 (zobacz rysunek obok). Wysokość stożka jest cztery razy większa od promienia kuli. Oblicz długość tej kapsuły, licząc od wierzchołka stożka do najbardziej oddalonego od niego punktu na półsferze.



D 7. Boki równoległoboku mają długość a, b, gdzie $a > b > 0$. Wykaż, że stosunek objętości brył powstałych w wyniku obrotu równoległoboku raz wokół dłuższego boku i drugi raz wokół krótszego boku, jest równy $\frac{b}{a}$.

D 8. Kąt rozwarcia stożka jest prosty. W stożek wpisano walec w taki sposób, że dolna podstawa walca zawiera się w podstawie stożka, a okrąg górnej podstawy walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka (zobacz rysunek obok). Wykaż, że jeśli pole powierzchni całkowitej walca jest równe polu powierzchni bocznej stożka, to odległość wierzchołka stożka od górnej podstawy walca jest równa połowie długości tworzącej stożka.



9. Tworząca stożka ma długość d i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz promień kuli wpisanej w stożek i promień kuli opisanej na tym stożku.

10. Oblicz stosunek objętości trzech kul: kuli wpisanej w sześcian, kuli stycznej do krawędzi tego sześcianu i kuli opisanej na tym sześcianie.

Podobieństwo figur w przestrzeni

W poprzednich latach nauki omówiliśmy podobieństwo figur na płaszczyźnie. Powiedzieliśmy, że o podobieństwie można myśleć jak o przekształceniu, które – w przypadku skali różnej od 1 – zmniejsza lub zwiększa figury, zachowując ich kształt. Pokazaliśmy też, że stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.
Pojęcie podobieństwa możemy rozszerzyć na figury w przestrzeni.

Definicja 1.

Podobieństwem nazywamy takie przekształcenie przestrzeni, które dowolnym dwóm różnym punktom A, B przestrzeni przyporządkowuje takie punkty A_1, B_1, dla których $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = k$,

gdzie k jest ustaloną dla danego podobieństwa liczbą dodatnią.
Liczbę k nazywamy **skalą podobieństwa**.

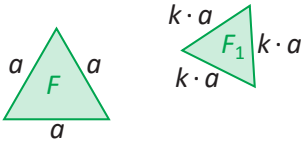
Definicja 2.

Figurami podobnymi nazywamy dwie figury geometryczne F i F_1, dla których istnieje podobieństwo przekształcające figurę F na F_1.
Podobieństwo figur F i F_1 oznaczamy symbolicznie $F \sim F_1$.

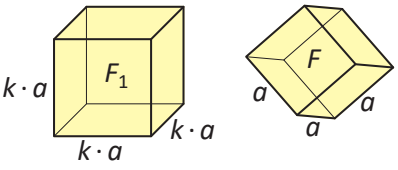
Przykład 1.

Figurami podobnymi są na przykład:

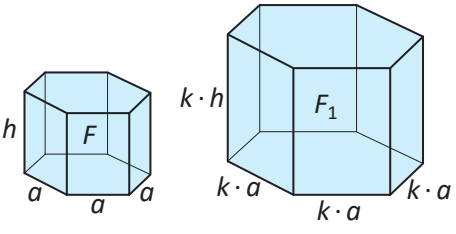
a) dwa trójkąty równoboczne



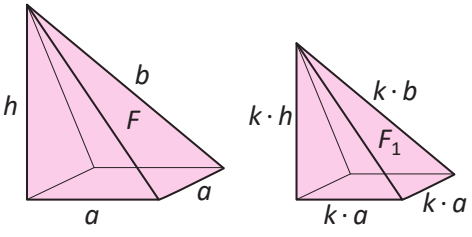
b) dwa dowolne sześciany



c) dwa graniastosłupy prawidłowe sześciokątne, jak na rysunku poniżej



d) dwa takie ostrosłupy o podstawie kwadratowej i wysokości będącej krawędzią boczną, jak na rysunku poniżej



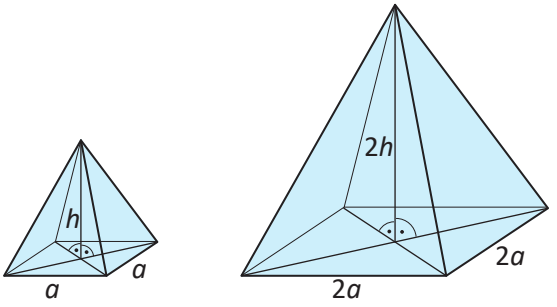
Jeśli figura F_1 jest podobna do figury F w skali k, $k > 0$, to figura F jest podobna do figury F_1 w skali $\frac{1}{k}$.

Ćwiczenie 1. Wielokąt F_1 jest podobny do wielokąta F w skali $\frac{2}{3}$. O ile procent:

a) obwód wielokąta F jest większy od obwodu wielokąta F_1
b) pole wielokąta F jest większe od pola wielokąta F_1?

Przykład 2.

Dane są dwa ostrosłupy prawidłowe czworokątne, podobne w skali 2. Ile razy objętość większego ostrosłupa jest większa od objętości mniejszego ostrosłupa?



Niech a oznacza długość krawędzi podstawy w mniejszym ostrosłupie, h – wysokość w tym ostrosłupie. Obliczamy objętość V_1 tego ostrosłupa.

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2h$$

Ponieważ ostrosłupy są podobne w skali 2, więc długość krawędzi podstawy w większym ostrosłupie jest równa $2a$, a jego wysokość jest równa $2h$. Obliczamy objętość V_2 tego ostrosłupa.

$$V_2 = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot 2h = \frac{8}{3}a^2h$$

Obliczamy stosunek objętości ostrosłupów.

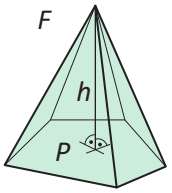
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{8}{3}a^2h}{\frac{1}{3}a^2h} = 8$$

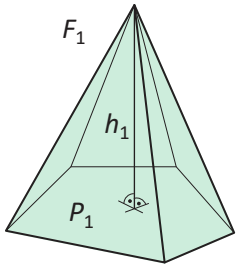
Drugi ostrosłup ma objętość 8 razy większą od objętości pierwszego ostrosłupa.

Zauważmy, że $8 = 2^3$, czyli stosunek objętości ostrosłupów z przykładu 2. jest równy sześcianowi skali podobieństwa.

Pokażemy, że analogiczna własność jest prawdziwa dla dowolnych ostrosłupów, które są podobne.

Rozważmy dwa ostrosłupy F i F_1, gdzie ostrosłup F_1 jest podobny do ostrosłupa F w skali k, $k > 0$.





Oznaczmy:

P – pole podstawy ostrosłupa F
h – wysokość ostrosłupa F
V – objętość ostrosłupa F

P_1 – pole podstawy ostrosłupa F_1
h_1 – wysokość ostrosłupa F_1
V_1 – objętość ostrosłupa F_1

Ostrosłupy są podobne w skali k, więc stosunek długości ich wysokości jest równy k. Podstawy ostrosłupów podobnych są wielokątami podobnymi, więc stosunek ich pól jest równy k^2. Mamy:

$h_1 = k \cdot h$ oraz $P_1 = k^2 \cdot P$

Obliczamy stosunek objętości ostrosłupów.

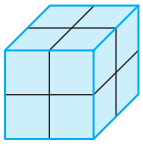
$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3}P_1 \cdot h_1}{\frac{1}{3}P \cdot h} = \frac{\frac{1}{3}\left(k^2 P\right) \cdot kh}{\frac{1}{3}P \cdot h} = k^3$$

Powyższa zależność jest prawdziwa również dla innych, podobnych figur przestrzennych.

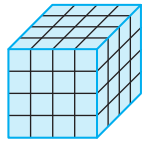
Twierdzenie 1.
Stosunek objętości podobnych figur przestrzennych jest równy sześcianowi skali podobieństwa.

Ćwiczenie 2. Na ile małych sześcianików można podzielić sześcian tak, aby krawędź małego sześcianika stanowiła:

a) $\frac{1}{2}$ krawędzi sześcianu



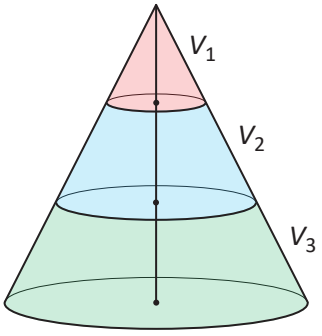
b) $\frac{1}{4}$ krawędzi sześcianu?



Przykład 3.

Stożek przecięto na trzy części dwiema płaszczyznami równoległymi do podstawy. Płaszczyzny podzieliły wysokość stożka na trzy równe odcinki. Wyznaczymy stosunek objętości otrzymanych części stożka.

Oznaczmy przez V objętość danego stożka, a przez V_1, V_2, V_3 – objętości kolejnych części tego stożka.



$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Stożek o objętości V_1 jest podobny do stożka o objętości V w skali $\frac{1}{3}$. Zatem

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3, \quad \text{czyli}$$

$$V_1 = \frac{1}{27}V$$

Stożek o objętości $V_1 + V_2$ jest podobny do stożka o objętości V w skali $\frac{2}{3}$. Zatem

$$\frac{V_1 + V_2}{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$V_1 + V_2 = \frac{8}{27}V \quad \text{oraz} \quad V_1 = \frac{1}{27}V$$

$$V_2 = \frac{7}{27}V$$

Obliczamy V_3:

$$V_3 = V - (V_1 + V_2) = \frac{19}{27}V$$

Otrzymujemy:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 7 : 19$$

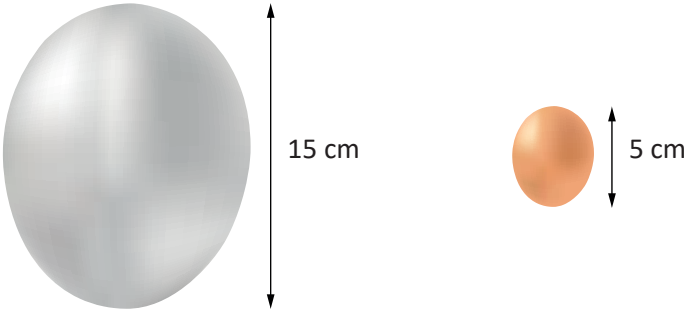
Stosunek objętości otrzymanych części stożka jest równy 1 : 7 : 19.

Przykład 4.

Jajo strusia afrykańskiego ma ok. 15 cm długości i jest trzy razy dłuższe od jajka kurzego. Ile czasu należy gotować na miękko jajo strusie, zakładając, że jajko kurze gotuje się na miękko przez ok. 2,5 minuty?

Aby ugotować jajko na miękko, należy dostarczyć odpowiednią ilość ciepła na każdą jednostkę objętości jajka. Zatem czas gotowania jest – w przybliżeniu – wprost proporcjonalny do objętości jajka.

Jajo kurze możemy uważać za podobne do jaja strusiego w skali $\frac{1}{3}$.



Objętość jaja strusiego jest 27 razy większa od objętości jajka kurzego, które gotuje się na miękko przez ok. 2,5 minuty. Obliczamy czas gotowania jaja strusiego:

$27 \cdot 2{,}5 = 67{,}5$

Jajo strusie trzeba gotować na miękko przez ok. 68 minut.

Jeżeli figury przestrzenne są podobne w skali k, $k > 0$, to stosunek pól ich powierzchni całkowitych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Ćwiczenie 3. Wykaż powyższą własność w przypadku, gdy bryły są podobnymi prostopadłościanami.

Przykład 5.

Walec o objętości 1 dm^3 i walec o objętości 3,375 litra są podobne. Obliczymy, o ile procent pole powierzchni całkowitej mniejszego walca jest mniejsze od pola powierzchni całkowitej większego walca.

Niech V_m oznacza objętość mniejszego walca, V_d – objętość większego walca.

$V_m = 1\ dm^3 = 1\ l$

$V_d = 3\frac{3}{8}\ l = \frac{27}{8}\ l$

Obliczamy skalę k podobieństwa mniejszego walca do większego walca:

$$\frac{V_m}{V_d}=\frac{8}{27}, \quad \text{stąd} \quad k=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$$

Obliczamy stosunek pól powierzchni całkowitych tych walców:

$$k^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

Pole powierzchni całkowitej mniejszego walca jest mniejsze od pola powierzchni całkowitej większego walca o $\frac{5}{9}\cdot 100\%$, czyli o $55,(5)\%$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

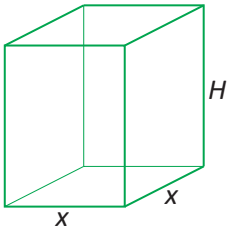
1. Objętość pierwszego prostopadłościanu jest równa 240 cm^3, a stosunek długości jego różnych krawędzi jest równy 2 : 3 : 5. Drugi prostopadłościan jest podobny do pierwszego w skali 1,5. Oblicz długości krawędzi drugiego prostopadłościanu.
2. Krawędź sześcianu S_1 ma długość 14 cm. Przekątna sześcianu S_2 ma długość $\sqrt{147}$ cm.
   a) W jakiej skali drugi sześcian jest podobny do pierwszego sześcianu?
   b) Ile razy objętość sześcianu S_1 jest większa od objętości sześcianu S_2?
3. Kąt rozwarcia pierwszego stożka jest równy 60°, a jego pole powierzchni bocznej wynosi 72π cm^2. Drugi stożek jest podobny do pierwszego w skali $\frac{1}{2}$. Oblicz objętość drugiego stożka.
4. Dwa stożki są podobne. Pole przekroju osiowego pierwszego stożka jest 16 razy większe od pola przekroju osiowego drugiego stożka. Ile razy objętość pierwszego stożka jest większa od objętości drugiego stożka?
5. Pole powierzchni pierwszej kuli stanowi 36% pola powierzchni drugiej kuli. O ile procent objętość pierwszej kuli jest mniejsza od objętości drugiej kuli?
6. Płaszczyzna równoległa do podstawy ostrosłupa odcina od danego ostrosłupa ostrosłup, którego pole podstawy stanowi 64% powierzchni podstawy danego ostrosłupa. Oblicz stosunek objętości brył powstałych po przecięciu danego ostrosłupa tą płaszczyzną.
7. Trzy równoległe płaszczyzny przecięły ostrosłup prawidłowy czworokątny w taki sposób, że podzieliły wysokość ostrosłupa na cztery równe części. Oblicz stosunek objętości otrzymanych brył.

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

Przykład 1.

Wśród graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o objętości 8 cm^3 istnieje taki, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. Wyznaczymy długości jego krawędzi oraz jego najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

Podstawą graniastosłupa jest kwadrat.



Wprowadźmy oznaczenia:
x – długość krawędzi podstawy
H – wysokość graniastosłupa
V – objętość graniastosłupa, $V = 8\ cm^3$
P – pole powierzchni całkowitej

Ze wzoru na objętość prostopadłościanu otrzymujemy:

$$x^2 \cdot H = 8$$

$$H = \frac{8}{x^2}$$

Wyznaczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od x:

$$P = 2x^2 + 4 \cdot x \cdot H, \quad \text{czyli} \quad P = 2x^2 + \frac{32}{x}$$

Pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa jest funkcją zmiennej x. Ustalamy dziedzinę tej funkcji. Długości wszystkich krawędzi graniastosłupa są dodatnie.

$$\left(x > 0 \ \wedge \ \frac{8}{x^2} > 0 \right) \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Ostatecznie mamy:

$$P(x) = \frac{2x^3 + 32}{x}, \quad D_P = (0, +\infty)$$

Funkcja P jest ciągła i różniczkowalna. Wyznaczymy jej najmniejszą wartość. W tym celu obliczamy pochodną; stosujemy wzór $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

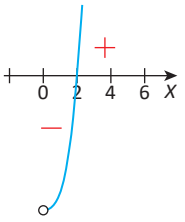
$$\left(\frac{2x^3 + 32}{x} \right)' = \frac{6x^2 \cdot x - \left(2x^3 + 32\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{4\left(x^3 - 8\right)}{x^2}, \quad \text{czyli}$$

$$P'(x) = \frac{4\left(x^3 - 8\right)}{x^2}, \quad D_{P'} = (0, +\infty)$$

Ustalamy miejsca zerowe pochodnej.

$$P'(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{4x^3-32}{x^2}=0 \wedge x\in(0,+\infty)\right) \Leftrightarrow x=2$$

Pochodna funkcji ciągłej P ma tylko jedno miejsce zerowe. Zatem wystarczy zbadać znaki pochodnej w przedziałach $(0, 2)$ oraz $(2, +\infty)$. Mianownik we wzorze pochodnej jest dodatni. Rozważmy funkcję $y=x^3-8$, gdzie $x\in(0, +\infty)$, która w przedziałach $(0, 2)$ oraz $(2, +\infty)$ ma taki sam znak, jak pochodna P'.



Otrzymujemy:

$P'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0, 2)$

$P'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(2, +\infty)$

Z własności pochodnej wynika, że funkcja P jest:

- malejąca w przedziale $(0, 2\rangle$ i
- rosnąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$.

Dla argumentu 2 funkcja P przyjmuje minimum lokalne, równe $P(2)$, które jest jednocześnie wartością najmniejszą funkcji P. Obliczamy to najmniejsze pole powierzchni.

$$P(2)=\frac{2\cdot 2^3+32}{2}=24$$

Wyznaczamy wysokość H, jeśli $x=2$.

$$H=\frac{8}{2^2}, \quad \text{czyli}$$

$$H=2$$

Najmniejsze pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe 24 cm^2. Wszystkie krawędzie graniastosłupa, mającego najmniejsze pole powierzchni całkowitej, mają długość 2 cm.

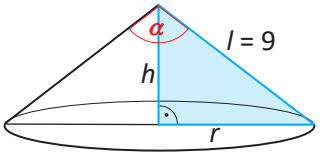
UWAGA: Uzasadnienie tego, że minimum funkcji jest jednocześnie wartością najmniejszą tej funkcji, na podstawie przedziałów monotoniczności funkcji różniczkowalnej, jest możliwe dzięki temu, że pochodna ma tylko jedno miejsce zerowe. W ogólnym przypadku wyznaczamy wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w taki sposób, w jaki nauczyliśmy się w klasie trzeciej i który przypomnimy w kolejnym przykładzie.

Przykład 2.

Rozważamy stożki, których tworzące mają długość 9. Wyznaczymy cosinus kąta rozwarcia tego stożka, którego objętość jest największa. Obliczymy tę największą objętość.

Wprowadźmy oznaczenia:

r – promień podstawy stożka
h – wysokość stożka
l – długość tworzącej stożka, $l = 9$
α – miara kąta rozwarcia stożka



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność:

$r^2 + h^2 = 81$

I sposób: Wyznaczamy objętość V stożka w zależności od jego wysokości.

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h \quad \wedge \quad r^2 = 81 - h^2 \quad \text{zatem}$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(81h - h^3\right)$$

Określamy dziedzinę tej funkcji.

$h > 0 \quad \wedge \quad r > 0, \quad$ czyli
$h > 0 \quad \wedge \quad 81 - h^2 > 0$
$h \in (0, +\infty) \ \wedge \quad h \in (-9, 9)$
$h \in (0, 9)$

Funkcję objętości stożka określa wzór

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(81h - h^3\right), \text{ a jej dziedziną jest przedział } (0, 9),\ D_V = (0, 9).$$

Funkcja V jest ciągła i różniczkowalna. Znajdujemy największą wartość funkcji V w przedziale $(0, 9)$ i argument, dla którego ta wartość jest przyjmowana.

- Obliczamy granice jednostronne na końcach przedziału $(0, 9)$.

$$\lim_{h \to 0^+}\left[\frac{\pi}{3}\left(81h - h^3\right)\right] = 0 \qquad \lim_{h \to 9^-}\left[\frac{\pi}{3}\left(81h - h^3\right)\right] = 0$$

- Wyznaczamy pochodną funkcji V i punkty krytyczne, które są miejscami zerowymi pochodnej.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(81 - 3h^2\right), \quad D_{V'} = (0, 9)$$

Zastosowaliśmy wzór $\left[a \cdot f(x)\right]' = a \cdot f'(x)$.

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}$$

- Obliczamy wartości funkcji V dla argumentów, będących miejscami zerowymi pochodnej funkcji V – w tym przypadku tylko wartość dla argumentu $3\sqrt{3}$.

$$V\left(3\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left[81 \cdot 3\sqrt{3} - \left(3\sqrt{3}\right)^3\right] = \frac{\pi}{3} \cdot \left(243\sqrt{3} - 81\sqrt{3}\right) = 54\pi\sqrt{3}$$

Dla argumentu $3\sqrt{3}$ funkcja różniczkowalna V przyjmuje wartość dodatnią, większą od granic jednostronnych tej funkcji na końcach przedziału. Zatem dla wysokości równej $3\sqrt{3}$ stożek ma największą objętość, wynoszącą $54\pi\sqrt{3}$.

Aby obliczyć cosinus kąta α rozwarcia stożka mającego największą objętość, znajdujemy najpierw cosinus kąta $\frac{\alpha}{2}$.

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{9}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{h}{l}$$

Teraz korzystamy ze wzoru $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ i otrzymujemy:

$$\cos\alpha=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

Cosinus kąta rozwarcia stożka mającego największą objętość jest równy $-\frac{1}{3}$.

II sposób: Wyznaczamy objętość stożka w zależności od promienia podstawy.

$$V=\frac{\pi}{3}r^2\cdot h \quad \wedge \quad h^2=81-r^2$$

$$V(r)=\frac{\pi}{3}r^2\cdot\sqrt{81-r^2}\,, \quad \text{czyli} \quad V(r)=\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{81r^4-r^6}$$

Określamy dziedzinę funkcji V.

$h>0 \quad \wedge \quad r>0$

$81-r^2>0$

$r\in(-9,9) \quad \wedge \quad r>0$

$r\in(0,9)$

Funkcję objętości opisuje wzór

$V(r)=\frac{\pi}{3}\sqrt{81r^4-r^6}$, a jej dziedziną jest przedział $(0,9)$, $D_V=(0,9)$.

Funkcja V jest ciągła i różniczkowalna.

- Obliczamy granice jednostronne na końcach przedziału $(0,9)$.

$$\lim_{r\to 0^+}\left[\frac{\pi}{3}\sqrt{81r^4-r^6}\right]=0 \qquad \lim_{r\to 9^-}\left[\frac{\pi}{3}\sqrt{81r^4-r^6}\right]=0$$

- Wyznaczamy pochodną funkcji V i miejsca zerowe pochodnej. Stosujemy wzór na pochodną funkcji złożonej $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

$$\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{81r^4-r^6}\right)'=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{81r^4-r^6}}\cdot\left(81r^4-r^6\right)'=\frac{\pi}{6\sqrt{81r^4-r^6}}\cdot\left(81\cdot 4r^3-6r^5\right)=$$

$$=\frac{\pi r^3\left(54-r^2\right)}{\sqrt{81r^4-r^6}}$$

Zatem

$$V'(r)=\frac{\pi r^3\left(54-r^2\right)}{\sqrt{81r^4-r^6}},\quad D_{V'}=(0,9)$$

$$V'(r)=0 \Leftrightarrow \left[\pi r^3\left(54-r^2\right)=0 \wedge r\in(0,9)\right] \Leftrightarrow r=3\sqrt{6}$$

- Obliczamy wartość funkcji V dla argumentu $3\sqrt{6}$.

$$V\left(3\sqrt{6}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{81\cdot\left(3\sqrt{6}\right)^4-\left(3\sqrt{6}\right)^6}=\frac{\pi}{3}\cdot\left(3\sqrt{6}\right)^2\cdot\sqrt{81-\left(3\sqrt{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot 54\cdot\sqrt{27}=18\pi\cdot 3\sqrt{3}=54\pi\sqrt{3}$$

Największa objętość stożka, którego promień podstawy jest równy $3\sqrt{6}$ wynosi $54\pi\sqrt{3}$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów i obliczamy $\cos\alpha$.

$$(2r)^2=l^2+l^2-2\cdot l\cdot l\cdot\cos\alpha$$

$$\left(6\sqrt{6}\right)^2=9^2+9^2-2\cdot 9\cdot 9\cdot\cos\alpha$$

$$162\cos\alpha=162-216$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$$

Cosinus kąta rozwarcia stożka jest równy $-\frac{1}{3}$.

III sposób: Wyznaczamy objętość stożka w zależności od kąta α.

$$\frac{r}{9}=\sin\frac{\alpha}{2}\quad\text{oraz}\quad\frac{h}{9}=\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$r^2=9^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\qquad h=9\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

Wiemy, że $V=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot h$, zatem

$$V(\alpha)=\frac{\pi}{3}\cdot 9^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 9\cos\frac{\alpha}{2}=243\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$V(\alpha)=\frac{243\pi}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2},\quad D_V=(0,\pi)$$

Funkcja V jest ciągła i różniczkowalna. Obliczamy granice jednostronne na końcach przedziału $(0,\pi)$.

$$\lim_{\alpha\to 0^+}V(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{243\pi}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0$$

$$\lim_{\alpha\to\pi^-}V(\alpha)=\lim_{\alpha\to\pi^-}\left(\frac{243\pi}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0$$

Wiemy, że $(\sin x)' = \cos x$. Do obliczenia pochodnej funkcji *V* zastosujemy wzór na pochodną iloczynu funkcji:

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Otrzymujemy:

$$\left(\frac{243\pi}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)' = \frac{243\pi}{2}\cdot\left(\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)' =$$

$$= \frac{243\pi}{2}\cdot\left(\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{243\pi}{2}\cdot\left(\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{243\pi}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\alpha + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ostatecznie

$$V'(\alpha) = \frac{243\pi}{4}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(3\cos\alpha + 1), \quad D_{V'} = (0, \pi)$$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2}$

Szukamy miejsc zerowych pochodnej. Zauważamy, że jeśli $\alpha \in (0, \pi)$, to $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$.

Zatem

$$V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3\cos\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

Wówczas

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{oraz} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Uzasadnij to!

więc

$$V = \frac{243\pi}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{81\pi\cdot 2}{\sqrt{3}} = 54\pi\sqrt{3}$$

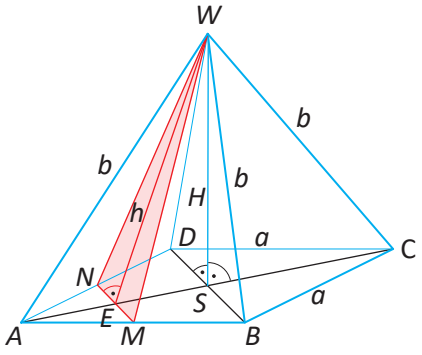
Największa objętość stożka jest równa $54\pi\sqrt{3}$. Cosinus kąta rozwarcia stożka mającego największą objętość wynosi $-\frac{1}{3}$.

W ostatnim przykładzie ustaliliśmy trzy różne funkcje, opisujące objętość stożka w zależności od różnych wielkości. Każda z tych funkcji umożliwiła rozwiązanie zadania innym sposobem. Zauważ, że wybór zmiennej może spowodować, że rozwiązanie zadania stanie się łatwiejsze albo trudniejsze.

Przykład 3.

Rozważmy zbiór ostrosłupów prawidłowych czworokątnych, których każda krawędź boczna ma długość 3. Dowolny ostrosłup z tego zbioru przecinamy płaszczyzną, przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa. Wyznaczymy długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, dla którego przekrój daną płaszczyzną ma największe pole.

Rysunek poniżej ilustruje przekrój ostrosłupa czworokątnego prawidłowego *ABCDW* płaszczyzną (NMW).



ABCD – kwadrat o boku mającym długość a, $a > 0$
$b = 3$ – długość krawędzi bocznych
EW – wysokość przekroju *NMW*, $|EW| = h$
WS – wysokość ostrosłupa, $|WS| = H$
NM – odcinek łączący środki krawędzi *AB* i *AD*

Pole *P* przekroju wyznaczymy z zależności

$$P = \frac{1}{2} \cdot |NM| \cdot h$$

Obliczamy długość odcinków *NM* i *ES* w zależności od *a*:

$$|NM| = \frac{1}{2}|DB|, \quad \text{czyli} \quad |NM| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Podobnie

$$|ES| = \frac{1}{2}|AS|, \quad \text{czyli} \quad |ES| = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych *ESW* i *SCW* otrzymujemy równości:

$$\frac{a^2}{8} + H^2 = h^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{a^2}{2} + H^2 = 9$$

$$H^2 = h^2 - \frac{a^2}{8}, \quad \text{więc} \quad \frac{a^2}{2} + h^2 - \frac{a^2}{8} = 9$$

Zatem

$$h = \sqrt{\frac{72 - 3a^2}{8}}, \quad \text{gdzie} \quad a \in \left(0,\, 2\sqrt{6}\right)$$

Wyznaczamy pole P przekroju jako funkcję zmiennej a.

$$P(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{72-3a^2}{8}}\,,\quad D_P=\left(0,\,2\sqrt{6}\right)$$

czyli

$$P(a)=\frac{1}{8}\sqrt{72a^2-3a^4}\,,\qquad D_P=\left(0,\,2\sqrt{6}\right)$$

Szukamy argumentu, dla którego funkcja P przyjmuje wartość największą. W tym celu możemy obliczyć pochodną funkcji P. Możemy też postąpić w inny sposób. Zauważamy, że funkcja

$$y=\frac{1}{8}\sqrt{t}\text{ , gdzie } t\in(0,+\infty),$$

jest rosnąca. Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla takiego samego argumentu, jak funkcja

$$f(a)=72a^2-3a^4,\ \text{gdzie}\ \ a\in\left(0,\,2\sqrt{6}\right).$$

Wyznaczymy argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość największą.

Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna. Badamy pochodną funkcji f.

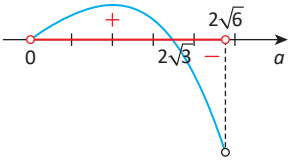
$$\left(72a^2-3a^4\right)'=144a-12a^3=12a\left(12-a^2\right)$$
$$f'(a)=12a\left(12-a^2\right),\ \text{gdzie}\ \ a\in\left(0,\,2\sqrt{6}\right)$$

$$f'(a)=0\ \Leftrightarrow\ \left[a\in\left\{-2\sqrt{3},0,2\sqrt{3}\right\}\wedge a\in\left(0,\,2\sqrt{6}\right)\right]\ \Leftrightarrow\ a=2\sqrt{3}$$

Pochodna funkcji f, określonej w przedziale $\left(0,\,2\sqrt{6}\right)$, ma tylko jedno miejsce zerowe. Zbadamy monotoniczność funkcji f w tym przedziale.

Mamy:

$$f'(a)>0\ \Leftrightarrow\ a\in\left(0,\,2\sqrt{3}\right)$$
$$f'(a)<0\ \Leftrightarrow\ a\in\left(2\sqrt{3},\,2\sqrt{6}\right)$$



Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(0,\,2\sqrt{3}\right\rangle$ i malejąca w przedziale $\left\langle 2\sqrt{3},\,2\sqrt{6}\right)$.

To znaczy, że dla argumentu $2\sqrt{3}$ funkcja f przyjmuje wartość największą.

W takim razie funkcja P też w punkcie $2\sqrt{3}$ przyjmuje największą wartość.

Przekrój ostrosłupa daną płaszczyzną ma największe pole wówczas, gdy krawędź podstawy ostrosłupa ma długość $2\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 1. Oblicz największe możliwe pole przekroju ostrosłupa z przykładu 3.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozpatrujemy prostopadłościany o podstawie kwadratowej, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 60 cm.
   a) Wyznacz funkcję, określającą objętość prostopadłościanów w zależności od długości krawędzi podstawy. Podaj dziedzinę tej funkcji.
   b) Podaj wymiary tego prostopadłościanu, który ma największą objętość.

2. Rozpatrujemy ostrosłupy prawidłowe trójkątne, których suma wysokości i obwodu podstawy jest równa 21.
   a) Wyznacz wzór funkcji, opisującej objętość tych ostrosłupów w zależności od długości krawędzi podstawy. Podaj dziedzinę tej funkcji.
   b) Wyznacz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, którego objętość jest największa. Jaka jest wysokość tego ostrosłupa?

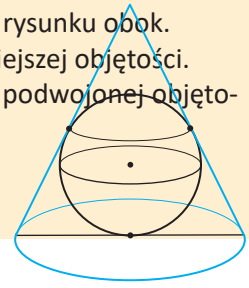
3. Rozpatrujemy stożki, których obwód przekroju osiowego jest równy 40. Wyznacz promień podstawy i wysokość tego stożka, który ma największą objętość. Podaj tę objętość.

4. Rozpatrujemy wszystkie otwarte pudełka w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, bez górnej podstawy i o objętości 0,5 litra. Wyznacz wymiary tego pudełka, które ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

5. Szynka konserwowa ma być pakowana do puszek w kształcie walca o pojemności 128π cm^3. Oblicz, jakie wymiary powinna mieć ta puszka, aby na jej wyprodukowanie zużyć jak najmniej blachy.

D 6. Rozważmy zbiór ostrosłupów prawidłowych czworokątnych, których każda krawędź boczna ma długość d. Dowolny ostrosłup z tego zbioru przecinamy płaszczyzną, zawierającą krawędź boczną i wysokość bryły. Wykaż, że przekrój o największym polu ma ostrosłup, którego krawędź podstawy też ma długość d.

7. Na kuli o promieniu 6 opisujemy stożki obrotowe, jak na rysunku obok.
   a) Oblicz wysokość i promień podstawy stożka o najmniejszej objętości.
D b) Wykaż, że ta najmniejsza objętość stożka jest równa podwojonej objętości kuli.



Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6.

Test

1. Pole powierzchni bocznej walca wynosi 150π. Jeśli wysokość walca jest trzy razy dłuższa od promienia r jego podstawy, to:
   A. $r = 2$ B. $r = 3$ C. $r = 4$ D. $r = 5$

2. Prostokąt o wymiarach 2 cm na 3 cm obracamy wokół dłuższego boku. Objętość otrzymanego walca jest równa:
   A. 9π cm^3 B. 12π cm^3 C. 16π cm^3 D. 18π cm^3

3. Tworząca stożka ma długość 15, a wysokość stożka jest równa 12. Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi:
   A. 135π B. 180π C. 216π D. 324π

4. Pole przekroju osiowego stożka wynosi 60 cm^2, a objętość stożka jest równa 100π cm^3. Tworząca stożka jest dłuższa od wysokości:
   A. o 1 cm B. o 2 cm C. o 3 cm D. o 4 cm

5. Promień podstawy stożka jest równy r, wysokość stożka – h, zaś tworząca ma długość l. Jeśli cosinus kąta rozwarcia stożka jest równy $-\frac{1}{2}$, to:
   A. $l = 2r$ B. $l = r\sqrt{3}$ C. $l = 2h$ D. $l = h\sqrt{3}$

6. Pole koła wielkiego kuli jest równe p. Wówczas pole powierzchni kuli wynosi:
   A. $\frac{4}{3}p$ B. $2p$ C. $3p$ D. $4p$

7. Promień kuli o objętości 288π cm^3 wynosi:
   A. 3 cm B. 6 cm C. $6\sqrt{2}$ cm D. 9 cm

8. Promień pierwszej kuli jest o 75% krótszy od promienia drugiej kuli. Ile razy objętość drugiej kuli jest większa od objętości pierwszej kuli?
   A. 4 razy B. 16 razy C. 32 razy D. 64 razy

Zadania otwarte

9. Prostokąt o wymiarach 8 cm na 10 cm zwinięto tak, że utworzył on powierzchnię boczną walca. Oblicz objętość tego walca.

10. Promień podstawy walca jest o 2 cm krótszy od wysokości. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe 48π cm^2, oblicz objętość tego walca.

11. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 12 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α. Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, oblicz pole powierzchni bocznej i objętość walca.

D 12. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem, którego krótszy bok jest wysokością walca. Przekątna tego prostokąta tworzy z dłuższym bokiem kąt α. Wykaż, że jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \pi^{-1}$, to przekrój osiowy walca jest kwadratem.

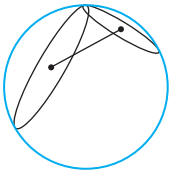
13. Płaszczyzna równoległa do podstawy stożka i przechodząca przez środek jego wysokości przedzieliła stożek na dwie bryły. Wiedząc, że objętość większej z otrzymanych brył jest równa 14 cm^3, oblicz objętość mniejszej z tych brył.

14. Kąt środkowy wycinka koła o promieniu 20 cm jest równy 216°. Wycinek ten jest powierzchnią boczną stożka. Oblicz objętość tego stożka.

15. Tworząca stożka tworzy z płaszczyzną podstawy kąt równy 15°. Pole przekroju osiowego stożka wynosi 25. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

16. Szklane naczynie ma kształt walca, którego średnica wynosi 16 cm. Do naczynia częściowo napełnionego wodą wrzucono trzy jednakowe kule, które zanurzyły się w wodzie całkowicie. Wiedząc, że poziom wody w naczyniu wzrósł o 0,5 cm, oblicz promień kuli.

D 17. Dwa okręgi zawarte w sferze leżą na płaszczyznach prostopadłych i mają tylko jeden punkt wspólny. Wykaż, że odległość między środkami tych okręgów jest równa promieniowi sfery.



18. Romb ma pole równe s.

D a) Wykaż, że pole powierzchni całkowitej bryły, powstałej w wyniku obrotu tego rombu wokół jego boku jest równe $4\pi s$.

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły z punktu a) w przypadku, gdy przekątne rombu mają długość 10 cm i 15 cm.

19. Rozpatrujemy prostopadłościany, których objętość jest równa 9 litrów, a długości krawędzi podstawy pozostają w stosunku 1 : 2. Wyznacz wymiary tego prostopadłościanu, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. Oblicz to najmniejsze pole.

20. Rozpatrujemy stożki, których pole powierzchni bocznej jest równe $9\pi\sqrt{3}$.

a) Wyznacz wzór funkcji objętości tych stożków w zależności od długości promienia podstawy. Podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Oblicz promień podstawy i wysokość tego stożka, który ma największą objętość.

Skorowidz ważniejszych terminów

aksjomaty prawdopodobieństwa 156

cecha mierzalna 104
cecha niemierzalna 104
centyl 118

diagram kolumnowy 105
diagram słupkowy 105
dominanta 114
doświadczenie losowe 145

figury podobne 331
funkcja logarytmiczna 63
funkcja wykładnicza 16

graniastosłup 256
graniastosłup pochyły 256
graniastosłup prawidłowy 257
graniastosłup prosty 256

kąt dwuścienny 253
kąt między prostymi skośnymi 229
kombinacja 139
kula 322

logarytm 57

mediana 115
moc zbioru 133
moda 114

nierówność logarytmiczna 86
nierówność wykładnicza 41

obserwacja statystyczna 104
odchylenie standardowe zmiennej losowej 212
odchylenie standardowe z próby 124
ostrosłup 266
ostrosłup prawidłowy 269
ostrosłup prosty 266

permutacja 137
podobieństwo 331
podzbiór 133
populacja generalna 104
potęga o wykładniku całkowitym ujemnym 7
potęga o wykładniku naturalnym 7
potęga o wykładniku wymiernym 7
prawdopodobieństwo 156
prawdopodobieństwo warunkowe 182
proste skośne 223
prostopadłościan 257
próba 104
próba Bernoulliego 201
przestrzeń zdarzeń elementarnych 145

reguła dodawania 134
reguła mnożenia 133
rozkład Bernoulliego 214
rozkład zmiennej losowej 208
równanie logarytmiczne 79
równanie wykładnicze 33

schemat Bernoulliego 201
sfera 322
siatka centylowa 118
siatka wielościanu 279
stożek 316
sześcian 257

średnia arytmetyczna z próby 109
średnia ważona 110

walec 311
wariacja bez powtórzeń 136
wariacja z powtórzeniami 135
wariancja z próby 124
wariancja zmiennej losowej 212
wartość oczekiwana zmiennej losowej 211
wzór Bayesa 191

zbiory równe 133
zbiory równoliczne 133
zdarzenia niezależne 195, 198
zdarzenie 150
zdarzenie elementarne 145
zdarzenie niemożliwe 150
zdarzenie pewne 150
zmienna losowa 208

Odpowiedzi do zadań

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie, s. 13-15

1. a) $\frac{-8}{125}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $9+4\sqrt{5}$ d) $17-12\sqrt{2}$ e) 0,3 f) $\frac{27}{125}$
   g) $\frac{27}{64}$ h) 0,75 i) $\frac{4}{9}$ j) 5 k) 4,8 l) 128

2. a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{9}$ c) 2 d) 20 e) 4 f) 9

3. a) 2 b) $\frac{1}{9}$ c) 8 d) 9 e) 2 f) 5

4. a) $3^{\frac{13}{24}}$ b) $6^{-\frac{10}{3}}$ c) $2^{-\frac{13}{6}}$

5. $2 \cdot 7 \cdot 19$

7. a) 0,02154 b) $100^{-\frac{1}{3}} = 100^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} \approx 0{,}21544$ c) 4,64159 d) 1,46780

8. a) o 70% b) o 46%

9. a) 3580 b) 3 c) 6 d) 2

10. a) $x < y$ b) $x > y$ c) $y > x$ d) $x > y$

11. *wskazówka*: Wykaż, że $\left[\left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(3+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = 10$, $\frac{1}{\left(3^{\sqrt{3}-2}\right)^{\sqrt{3}+2}} = 3$.

12. -2

14. a) $\frac{4-3\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{-1}{6}$

15. *wskazówka*: Doprowadź wyrażenie do postaci $\frac{-2x^3}{8x+1}$.

Funkcja wykładnicza i jej własności, s. 23-24

2. a) $n < p < l < m < k$ b) $n < k < m < p < l$ c) $p < n < l < m < k$ d) $l < k < n < p < m$

3. a) dodatnia b) ujemna c) ujemna d) dodatnia

4. a) $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x$, $x \in \boldsymbol{R}$ b) $f(x)=5^x$, $x \in \boldsymbol{R}$

   c) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in \boldsymbol{R}$ d) $f(x)=\left(\sqrt{3}\right)^x$, $x \in \boldsymbol{R}$

5. a) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in \boldsymbol{R}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{16}$ c) -1 d) $x \in (-1, +\infty)$

6. a) $x=1$ b) $x \in \{-2, 0\}$ c) $x \in \{2, 4\}$

7. a) $x \in (-\infty, 0\rangle$ b) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ c) nierówność sprzeczna

8. a) $ZW=(-4, +\infty)$ b) $ZW=\left\langle \frac{1}{49}, 1 \right\rangle$ c) $ZW=\left\langle \frac{27}{125}, \frac{5}{3} \right\rangle$ d) $ZW=\left\langle -6\frac{1}{4}, +\infty \right)$

10. *wskazówka*: Oblicz wartość wyrażenia $\left(5^{x_0}+5^{-x_0}\right)^2$.

Przekształcenia wykresów funkcji wykładniczych, s. 31-32

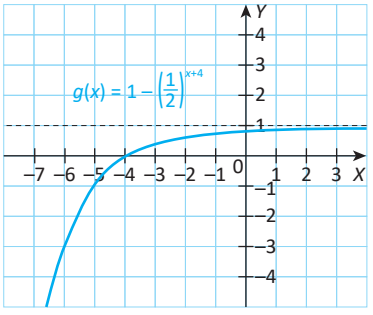
1. a) $g(x)=2^{x+1}$ b) $g(x)=8-2^x$ c) $g(x)=2^{x-4}-1$ d) $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}+4$

2. a) $g(x)=-3^{x-4}-6$ b) $g(x)=4^{-x+2}+7$

3. a) $a=0{,}5$ b)

   c) tak, należy

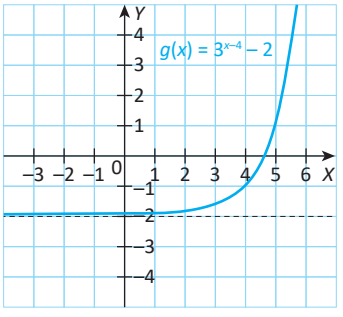
   d) $x \in (-\infty, -5)$



4. $g(x)=3^{x-4}-2$, $x \in \boldsymbol{R}$

   a) $\left(0, -1\frac{80}{81}\right)$

   b) $x \in \boldsymbol{R}-\{4\}$



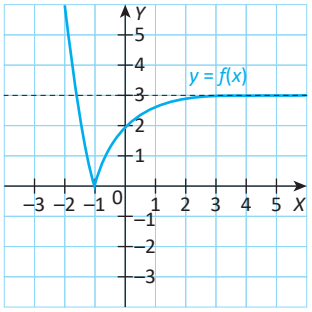
5. a) $x = -2$ b) $x = 1$ c) $x = -3$

6. a) $x \in \langle 5, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -1)$ c) $x \in \langle -1, +\infty)$

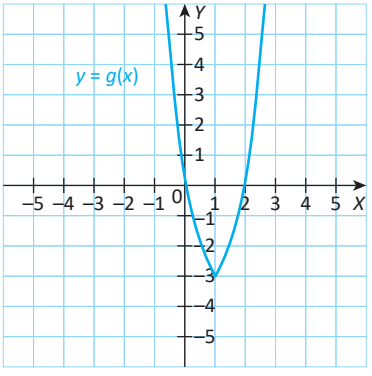
7. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$, $x \in \boldsymbol{R}$; $f(-3) = 32$

8. a) $a = 4$, $c = \frac{1}{8}$ b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$, $x \in \boldsymbol{R}$

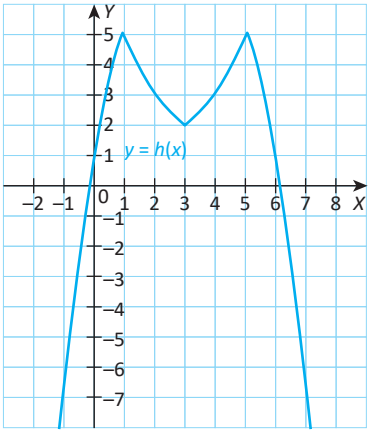
10. a) $f(x) = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 3\right|$



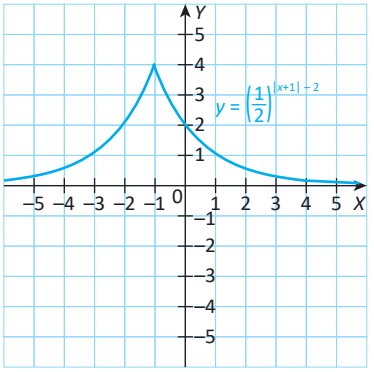
b) $g(x) = 4^{|x-1|} - 4$



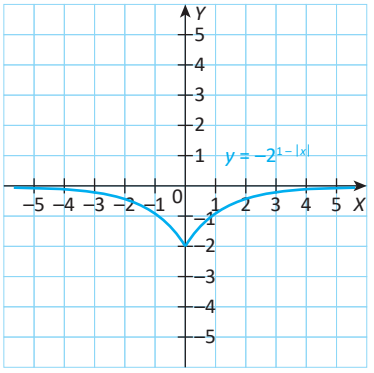
c) $h(x) = -\left|2^{|x-3|} - 4\right| + 5$



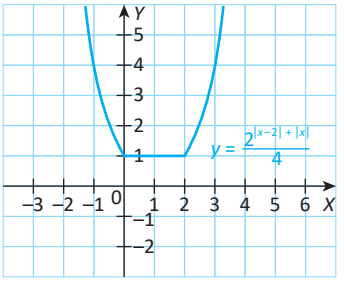
11. a) $y=\begin{cases}2^{x+3}, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-1\rangle\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, & \text{jeśli } x\in(-1,+\infty)\end{cases}$



b) $y=\begin{cases}-2^{x+1}, & \text{jeśli } x<0\\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, & \text{jeśli } x\geqslant 0\end{cases}$



c) $y=\begin{cases}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0\rangle\\ 1, & \text{jeśli } x\in(0,2\rangle\\ 4^{x-2}, & \text{jeśli } x\in(2,+\infty)\end{cases}$



12. *wskazówka*: $f(x)=2^{x+3}$, $x\in\boldsymbol{R}$

Równania wykładnicze, s. 39-40

1. a) $x=3$ b) $x=-4$ c) $x=-3$ d) $x=0$ e) równanie sprzeczne f) $x=4$

2. a) $x=2$ b) $x=\frac{1}{2}$ c) $x=7$ d) $x\in\{2,3\}$ e) $x\in\{-5,5\}$ f) $x\in\{-1,0\}$

3. a) $x\in\{-5,-1\}$ b) równanie sprzeczne c) $x=2$ d) $x\in\left\{\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right\}$

4. a) $x=-1$ b) $x \in \boldsymbol{R}$ c) $x \in \{-1, 1\}$ d) $x=6$ e) $x \in \{-1, 2\}$ f) $x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$

5. a) $x=1\frac{1}{7}$ b) $x=-2\frac{6}{7}$ c) $x \in \left\{-4, \frac{1}{2}\right\}$

   d) $x \in \{-1, 0, 3\}$ e) $x \in \left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}$ f) równanie sprzeczne

6. a) $n=7$ b) $n=7$

7. a) $x=3$ b) $x=-2$ c) $x=-\frac{1}{2}$ d) $x=-2$ e) $x=4$ f) $x=2$

8. a) $x=1$ b) $x=0$ c) $x=2$

9. a) $x \in \{2, 3\}$ b) $x \in \{1, 2\}$ c) $x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

   d) $x=\frac{2}{3}$ e) $x \in \{0, 1\}$ f) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

10. a) $x \in \{-2, 2\}$; *wskazówka*: podstaw $t=2^{x^2}$

    b) $x=-4$; *wskazówka*: podstaw $t=3^{\sqrt{x+4}}$, gdzie $x \in \langle -4, +\infty)$

    c) $x \in \left\{-4, -3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, -2\right\}$; *wskazówka*: podstaw $t=4^{|x+3|}$

    d) $x \in \{-2, 2\}$; *wskazówka*: podstaw $t=\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x$

Nierówności wykładnicze, s. 47-48

1. a) $x \in (-\infty, -6)$ b) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right\rangle$ c) $x \in \left\langle 4\frac{2}{3}, +\infty\right)$

2. $x \in \langle -2, 4\rangle$

3. a) $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$ b) $x \in \langle -3, 9\rangle$ c) $x=\frac{1}{4}$

   d) $x \in \boldsymbol{R}$ e) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ f) $x \in \langle -5, -1\rangle$

4. a) $x \in (-\infty, -3)$ b) $x \in \boldsymbol{R}$ c) $x \in \langle -2, 1\rangle$

5. a) $x \in (-\infty, 2)$ b) $x \in (-\infty, -1)$ c) $x \in \boldsymbol{R}$

6. a) $x \in (2, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 0\rangle$ c) $x \in (-\infty, 4)$ d) $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

7. a) $n \in \{1, 2, 3\}$ b) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

8. a) $x \in \langle -2,0\rangle \cup \left\langle \frac{1}{3}, +\infty \right)$ b) $x \in \langle -2, 0\rangle$

9. a) $x \in \langle 1, 5\rangle$ b) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty \right)$

c) $x \in (-\infty, 0) \cup \langle 1, 3\rangle$ d) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3} \right) \cup \left\langle 1\frac{1}{3}, +\infty \right)$

10. a) $x \in (2, 3)$ b) $x \in (-\infty, 0)$ c) $x \in (-\infty, -1\rangle$ d) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

11. a) $x \in (-\infty, -1\rangle$ b) $x \in (-\infty, -1)$

Zastosowanie własności funkcji wykładniczej w zadaniach, s. 53

1. $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$

2. a) $p \in (1, +\infty)$ b) $p \in (-1, 1\rangle$

3. $m \in \{-4\} \cup \left(1\frac{1}{3}, +\infty \right)$

4. $k \in (-\infty, -1\rangle$

5. $m \in (-7, -3)$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1., s. 54-56

Test

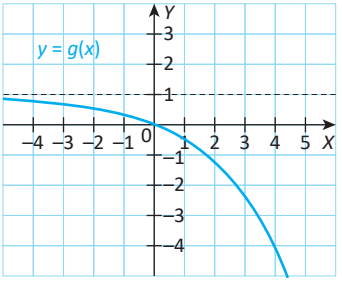
Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	C	A	B	B	C	C	D	C

Zadania otwarte

9. a) 12 b) 81

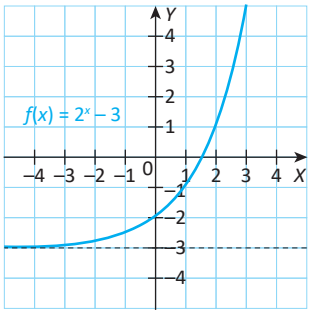
10. $-\frac{3}{7}$

11. a) $2\frac{3}{8}$ b) 4 c) $x \in (-\infty, 2)$ d)



12. $a = 2,\ b = -3$

a) $(0, -2)$ c)



d) $x \in (5, +\infty)$

13. a) $-\frac{80}{81}$ b) $x \in (-1, 0)$ c) $g(x) = 3^{-(x-2)} - 1$, czyli $g(x) = 3^{2-x} - 1$ d) $x = 1$

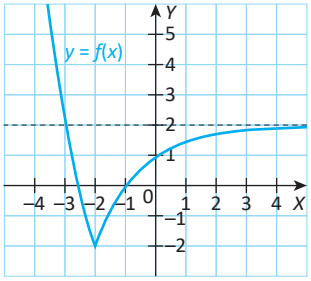
14. a) $x = -0{,}25$ b) $x \in \boldsymbol{R}$ c) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$

15. a) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ b) $x \in \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right)$

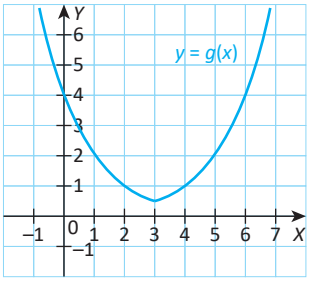
16. $x^2,\ x \in \boldsymbol{R}_+ - \{27\}$

17. 4

18. a)



b)



19. a) $ZW = (-\infty, -5\rangle$ b) $ZW = \left\langle -2\frac{1}{2}, -1 \right\rangle$ c) $ZW = \langle -1, +\infty)$

21. a) $x \in \{1, 4\}$ b) $x \in \left\{\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\right\}$ c) $x = 0$ d) $x = -2$

22. a) $x \in \left\langle -2, \frac{4}{9} \right\rangle$ b) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ c) $x \in (-6, +\infty)$ d) $x \in \langle 1, +\infty)$

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm – powtórzenie wiadomości, s. 61-62

1. a) 2 b) -4 c) $-\frac{1}{3}$ d) 0 e) $\frac{1}{4}$ f) 1 g) -2 h) $-\frac{2}{3}$

2. a) $-4\frac{1}{4}$ b) $2\frac{17}{20}$ c) $9\frac{1}{5}$ d) $-\frac{85}{108}$

3. a) $t=\log_5\frac{B}{p}$ b) $c=\log_M(p+t)+1$ c) $p=\log_c\frac{3}{M+B}$

4. a) 3 b) 2 c) -2 d) -1 e) $4\frac{1}{3}$ f) -1

5. a) $\log_3 21$ b) $\log 800$ c) $\log_{\frac{2}{3}} 6$ d) $\log_2\frac{\sqrt[3]{2}}{5}$ e) $\log_8 2{,}25$ f) $\log_{27} 40{,}5$

6. a) -2 b) 14 c) -2 d) 1

7. a) $8\log_5 6$ b) $4+\log 400+\log^2 20$ c) $\log_7^2 2+\log_7 2\cdot\log_7 5+\log_7^2 5$

8. $a=8,\ b=1,\ b<a$

9. a) 8 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$

10. $m=-3,\ n=-3,\ m\cdot n=9$

14. 1

15. $a=219,\ b=1,\ b+a=220=11\cdot 20$

Funkcja logarytmiczna – powtórzenie i uzupełnienie wiadomości, s. 68-70

1. a) $-0{,}4$ b) 81

2. a) $\sqrt[3]{4}$ b) 3

3. $a=\sqrt{2}$, $x\in\left(0,2\sqrt{2}\right)$

4. $a=\frac{2}{5}$, $x\in\left\langle 2\frac{1}{2},+\infty\right)$

5. a) $l>n>k>m$ b) $m>n>l>k$

6. a) $k=0$ b) $k=2$ c) $k=-3$ d) $k=1$

7. a) ujemna b) ujemna c) dodatnia

8. a) $a<b$ b) $a>b$

9. a) $g(x) = \log_2 x,\ x > 0$

10. $r = 2,\ p = 7,\ f(0{,}001) = 1$

11. $x \in (-\infty, -2)$, np. -3 oraz -10 b) $x \in (\log_{12} 8, +\infty)$, np. 2 oraz 4

12. a) $D = (0, 5)$ b) $D = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$ c) $D = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $D = (0, 1) \cup (1, 2)$

13. a) $D = \boldsymbol{R}$ b) $D = \boldsymbol{R} - \{0, 1, 2, 3\}$ c) $D = \left(2\frac{3}{4}, 6\right) \cup (6, 7)$ d) $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 6\right)$

14. $m \in \langle 0, 4)$

15. $m \in (-\infty, -1\rangle \cup \left(1\frac{2}{3}, +\infty\right)$

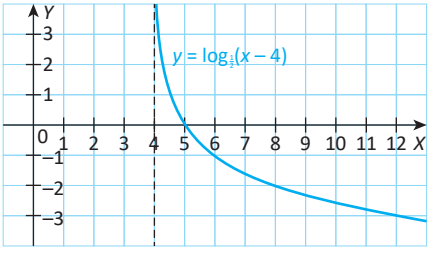
16. $k \in (-2, 1) \cup (1, +\infty)$

17. $k \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(3, 3\frac{1}{2}\right)$

24. a) tak b) nie c) tak

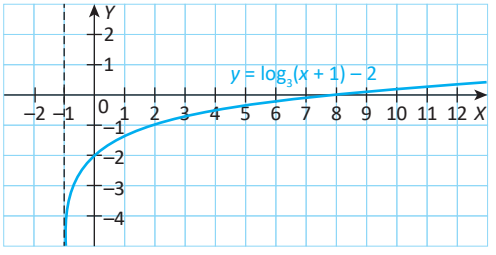
Przekształcenia wykresów funkcji logarytmicznych, s. 77-78

1.



a) -3 b) 6

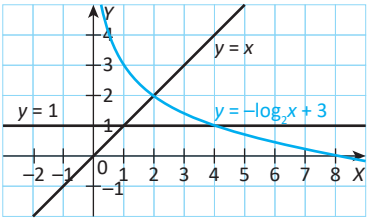
2.



a) $(0, -2)$

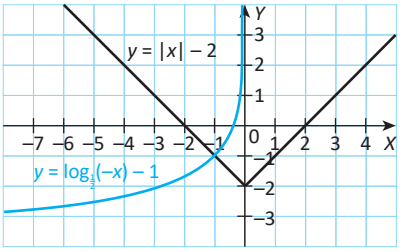
b) $g(8) = 0$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 8)$

3. 

a) $x = 4$

b) $x \in \langle 2, +\infty)$

4. 

a) punkty A, B należą do wykresu funkcji f

b) $x \in \left\langle -\frac{1}{3}, 0 \right)$

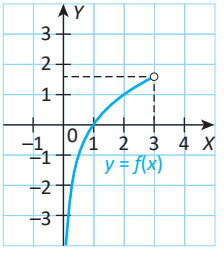
c) $x = -1$

5. a) $x = 5$ b) $x \in \{-1, 6\}$ c) $x = -5$

6. a) $x \in \langle 2, +\infty)$ b) $x \in \langle 2, 4\rangle$ c) $x \in (0, +\infty)$

7. *wskazówka*: a) $f(x) = \log_3(x+4) + 1$, $x \in (-4, +\infty)$ b) $f(x) = -\log_2 x - 2$, $x \in (0, +\infty)$
c) $f(x) = -\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $x \in (-\infty, 0)$; Wykres funkcji f jest obrazem wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ w symetrii środkowej względem punktu $(0, 0)$.
d) $f(x) = \log_{0,5}(x+2)$, $x \in (-2, +\infty)$

8. $D_g = (-3, 3)$; *wskazówka*: Doprowadź wzór funkcji g do postaci $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$.
Zauważ, że jeśli $x \in (-3, 3)$, to $g(x) = f(-x)$.

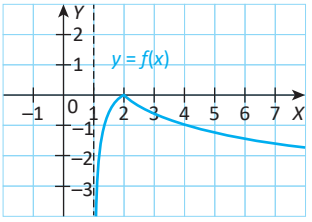
9. a) $f(x) = \log_2 x$, $D_f = (0, 3)$, $ZW = (-\infty, \log_2 3)$ 

b) $x \in (0, 2\rangle$

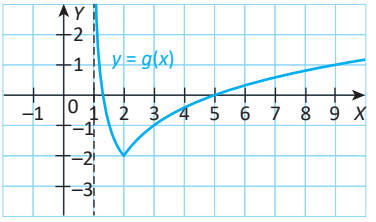
10. a) $D_f = \boldsymbol{R} - \{-5\}$, $D_g = (-5, +\infty)$; *wskazówka*: $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}|x+5|$. Wykres funkcji f otrzymamy, przesuwając wykres funkcji $y = 2\log_{\frac{1}{2}}|x|$ o wektor $[-5, 0]$.
b) $x = -1$ c) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle -3, +\infty)$

11. $h(x) = 2 - \log_3(x-1)$, $D = (1, +\infty)$
a) *wskazówka*: Wykres funkcji $y = -\log_3 x$ przesuń równolegle o wektor $[1, 2]$.
b) $x \in (1, 4\rangle$

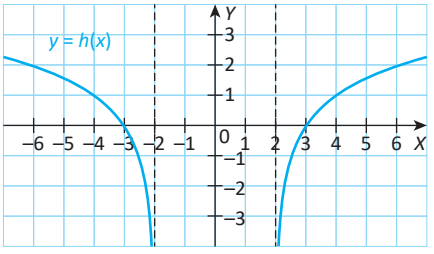
12. a)



b)

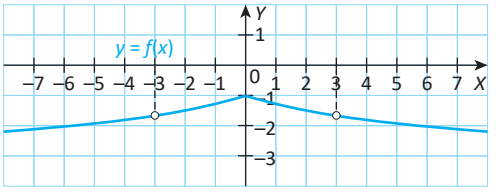


c) *wskazówka*: Korzystając ze wzoru $x^2 = |x|^2$, doprowadź wzór funkcji h do postaci $h(x) = \log_2(|x| - 2)$.



13. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(|x| + 3)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, 3\}$

a) $ZW = \left(-\infty, \log_{\frac{1}{3}} 6\right) \cup \left(\log_{\frac{1}{3}} 6, -1\right\rangle$



b) $x \in (-6, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, 6)$

14. a) $x \in \{-2, -1\}$ b) $x \in \{-7, 1\}$

15. a) $x \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$ b) $x \in \langle -3, 0) \cup (0, 3\rangle$

16. a) $(2, 5)$ b) $(-1, 1)$ oraz $(1, 1)$

Równania logarytmiczne, s. 83-85

1. a) $x = 1$, $D = (-2, +\infty)$ b) $x = \frac{1}{4}$, $D = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ c) $x \in \{0, 6\}$, $D = \boldsymbol{R} - \{3\}$
   d) $x \in \{-5, 4\}$, $D = \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ e) $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $D = (0, +\infty)$ f) $x = 2\frac{12}{25}$, $D = (2, +\infty)$

2. a) $x \in \{-1, 1\}$, $D = \boldsymbol{R}$ b) $x \in \{-3, 3\}$, $D = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   c) $x \in \{-2, 8\}$, $D = \boldsymbol{R} - \{3\}$ d) $x \in \left\{-6\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right\}$, $D = \boldsymbol{R} - \{-5\}$
   e) $x \in \{-3, 1\}$, $D = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ f) równanie sprzeczne, $D = (0, 1)$

3. a) $x \in \left\{-\frac{1}{4}, 0\right\}$, $D = \boldsymbol{R}$ b) $x \in \{-3, 5\}$, $D = (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$
   c) $x \in \{-9, 11\}$, $D = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ d) $x \in \{-76, 76\}$, $D = \boldsymbol{R}$
   e) równanie sprzeczne, $D = (-8, 2)$ f) $x = -1$, $D = \boldsymbol{R}$

4. a) $x = 6$, $D = (2, 3) \cup (3, +\infty)$ b) $x = \frac{1}{3}$, $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
   c) $x = 6$, $D = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ d) $x = 0$, $D = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$
   e) równanie sprzeczne, $D = (-\infty, 3) \cup (3, 4)$ f) $x = 1$, $D = (0, +\infty)$

5. a) $x = -\frac{1}{2}$ b) równanie sprzeczne c) $x = 0$ d) równanie sprzeczne

6. a) $x = 2$ b) $x = 256$ c) $x = 5$ d) $x = 80$

7. a) $x = \sqrt{3}$ b) $x = 14$ c) $x \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, 8\right\}$ d) $x = 5$

8. a) $x \in \left\{-2\frac{2}{3}, 0, 6\right\}$ b) $x = 102$ c) $x \in \left\{-3\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ d) $x \in \{e - 1, e^2 - 1, e^3 - 1\}$

9. a) $x \in \left\{1\frac{1}{2}, 10\right\}$ b) $x = 1$ c) $x \in \{3, 3 + \sqrt{2}\}$ d) $x = 5$

10. $x = 8$, $S_{20} = 420$

11. $x = 4$, $b_n = 2^{2-n}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$

12. a) $x = \sqrt{3}$ b) $x \in \{0, 1\}$ c) $x = 1$ d) $x \in \left\{\frac{1}{8}, 4\right\}$
    e) $x \in \left\{\frac{1}{\sqrt[4]{27}}, 9\right\}$ f) $x \in \left\{\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 4\right\}$

13. a) $x = -4$ b) $x \in \left\{-6, -3\frac{1}{27}\right\}$ c) $x \in \left\{\frac{1}{3}, 9\right\}$; *wskazówka*: Dziedziną równania jest zbiór $(0, +\infty)$, obie strony równania są dodatnie. Oblicz logarytmy o podstawie 3 obu stron równania: $\log_3 x^{1+\log_3 x} = \log_3 (9x^2)$. Następnie skorzystaj z praw działań na logarytmach. Otrzymasz równanie $(1 + \log_3 x) \cdot \log_3 x = 2 + 2\log_3 x$, które rozwiązujemy przez podstawienie zmiennej pomocniczej $t = \log_3 x$. d) $x \in \left\{\frac{1}{100}, 100\right\}$; *wskazówka*: Dziedziną równania jest zbiór $(0, +\infty)$. Podnieś obie strony równania do kwadratu (obie są dodatnie). Następnie oblicz logarytmy o podstawie 10 obu stron równania. Otrzymasz równanie $\log^2 x = 4$.

Nierówności logarytmiczne, s. 91-92

1. a) $x \in (1, 3)$ b) $x \in \langle 0, 3)$ c) $x \in \left\langle -4, -1\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle -1\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ d) $x \in (0, 8)$

2. a) $x \in (-2, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ b) $x \in (-5, -2) \cup (-2, 1)$ c) $x \in (2, 3\rangle$ d) $x \in \langle 1, 5)$

3. a) $x \in \left\langle \frac{1}{4}, 2\right\rangle$ b) $x \in \left(0, \frac{1}{16}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{4}, 4\right\rangle$ c) $x \in \left(2, 2\frac{1}{3}\right) \cup (5, +\infty)$

   d) $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 1\right)$

4. a) $D_f = \left(3, 5\frac{1}{4}\right\rangle$ b) $D_f = (-8, 1)$

5. a) $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \langle 4, +\infty)$ b) $x \in \left(\frac{1}{8}, 8\right)$ c) $x \in \left(-3, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, 3\right)$ d) $x \in \left(2, 3\frac{1}{3}\right)$

6. a) $x \in (25, +\infty)$ b) $x \in \left(0, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, +\infty\right)$

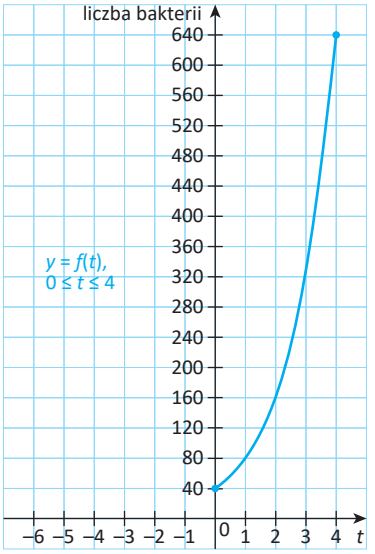
   c) $x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right) \cup (1, 9)$ d) $x \in \left(0, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

7. $x \in \left(3, 3\frac{1}{2}\right)$

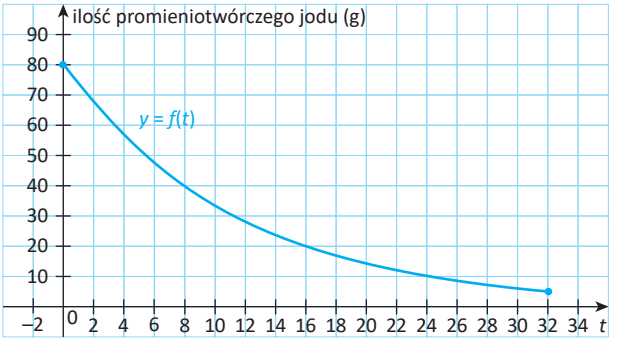
10. a) $x \in \left(\frac{1}{2}, 8\right\rangle$; *wskazówka*: Podstaw $t = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x + 3}$, gdzie $x \in \langle 0, 8\rangle$. b) $x \in \langle 0, 10\rangle$

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym, s. 98-99

1. a) 16,875 mg b) 25% c) co najmniej 8 godzin
2. a) $a = 2$, $c = 40$ b) 12 dni c)



3. ok. 2950 lat
4. 3 km 162 m
5. a) 100 000 razy b) o 6 decybeli
6. a) liczba a ma 35 cyfr, liczba b ma 33 cyfry, $a > b$;
   wskazówka: $\log a = 25\log 23 \approx 34{,}04320$; $\log b = 46\log 5 \approx 32{,}15262$
   b) liczba a ma 24 cyfry, liczba b ma 25 cyfr, $a < b$;
   wskazówka: $\log a = 33\log 5 \approx 23{,}06601$; $\log b = 29\log 7 \approx 24{,}50784$
   c) liczba a ma 695 975 cyfr, liczba b ma 2998 cyfr, $a > b$;
   wskazówka: $\log a = 7^7\log 7 \approx 695\,974{,}57517$; $\log b = 2997$
7. 12 978 189; $3{,}1647 \cdot 10^{12978188}$; *wskazówka*: Zauważ, że dana liczba pierwsza ma w zapisie dziesiętnym tyle cyfr, ile ma liczba $2^{43112609}$.
8. b)



   c) ok. 0,55%

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2., s. 100-103

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	A	D	A	A	D	B	C	D	B

Zadania otwarte

11. a) -3 b) 25

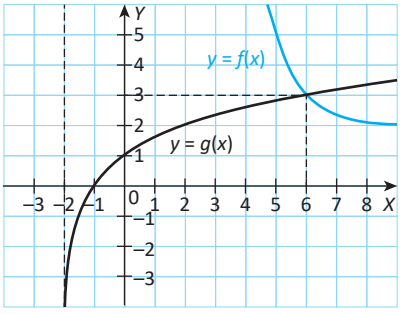
12. 0

16. $x = 3$

17. $x \in \langle 0, +\infty)$

18. $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ a) 2 b) $x \in (0, 2\rangle$ c) 32

19. a) $a = 6$, $b = 2$ b)



c) $x \in (6, +\infty)$

20. a) $b < c < a$ b) *wskazówka*: Wykres funkcji f przekształć przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$. Następnie otrzymany wykres przesuń równolegle o wektor $[0, 3]$.

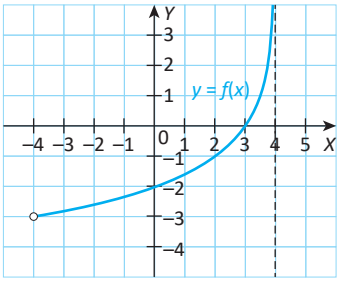
21. a) $x = -5\frac{1}{2}$ b) $x = 4$ c) $x = 9$ d) $x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

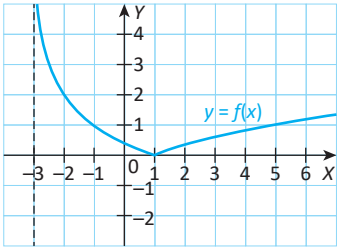
22. a) $x = 16$ b) $a_n = 5n - 6$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$ c) 541200,5; *wskazówka*: Wykaż, że ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 32$.

26. a) $y = 600\,000 \cdot 1{,}004^n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ b) 607 230 c) ok. 2%

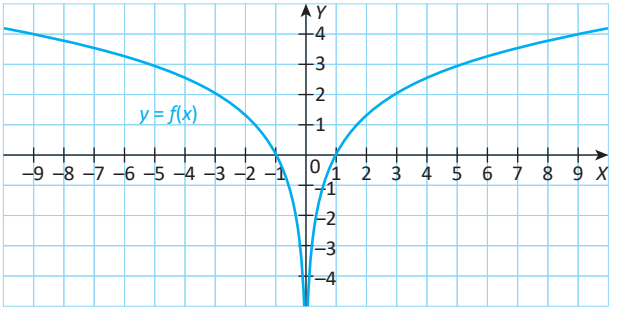
27. a) $y = 500 \cdot 1{,}3^n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ b) 4080 c) po 9 godzinach

28. a) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(4-x)$, $x\in(-4,4)$ b) $f(x)=\left|2-\log_2(x+3)\right|$, $x\in(-3,+\infty)$





c) $f(x)=2\log_3|x|$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{0\}$



29 a) $D=\boldsymbol{R}-\left\{1,2,2\frac{1}{2},3\right\}$ b) $D=\left(1,2+\sqrt{3}\right)\cup\left(2+\sqrt{3},4\right)$

33. a) $x=6$ b) $x=5$ c) $x\in\left\{1\frac{1}{2},3\right\}$ d) $x\in\left\{\frac{1}{9},9\right\}$

34. a) $x\in(2,5)$ b) $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right\rangle\cup\langle 4,+\infty)$ c) $x\in(0,1)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right)$ d) $x\in\left(\frac{1}{8},2\right\rangle$

35. *wskazówka*: Zauważ, że $4x^2+y^2=8xy\Leftrightarrow(2x-y)^2=4xy$, zatem $\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)^2=\log_{\frac{1}{2}}(4xy)$.

36. a) $\lambda\approx 0{,}173$ b) $f(t)=160\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}25t}$, $t\geqslant 0$ c) w osiemnastym dniu

3. Elementy statystyki

Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej, s. 107-108

1. a) 0 razy – 20 osób, 1 raz – 15 osób, 2 razy – 10 osób, 3 razy – 5 osób b) 30 osób
2. a) o $113\frac{1}{3}\%$ b) pływanie – 8 osób, piłka ręczna – 32 osoby, karate – 40 osób, koszykówka – 15 osób, siatkówka – 30 osób
3. a) 120 b) 96 osób, 80% przystępujących
4. a) • przejazd na czerwonym świetle $16\frac{2}{3}\%$ wszystkich przewinień, kąt środkowy 60°
   • jazda pod wpływem alkoholu 5%, kąt 18° • przekroczenie prędkości 40%, kąt 144°
   • jazda „na zderzaku” 30%, kąt 108° • prowadzenie pojazdu bez uprawnień $8\frac{1}{3}\%$, kąt 30°
   b) o $33\frac{1}{3}\%$

Średnia z próby, s. 112-113

1. 190,7 cm
2. 6500 zł
3. 3318 zł
4. a) 15,25 s b) 13,25 s c) 14 s
5. ocena *Czajki* – ok. 4,09; ocena *Mewy* – ok. 4,54

Mediana z próby i moda z próby. Skala centylowa, s. 121-122

1. b) $M_o = 4\text{h}$, $M_e = 4\text{h}$ c) $\overline{x} = 3\frac{10}{29}\text{ h}$
2. a) 16,8 lat b) $M_o = 18$ lat, $M_e = 17$ lat
3. a) np. 2, 3, 4, 4, 4, 4, 6, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23
   b) np. 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 10, 10
   c) np. 1, 1, 1, 1, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9
   d) np. 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 30
4. $(x = 3 \text{ i } y = 4)$ lub $(x = 4 \text{ i } y = 3)$
5. $(a = 4 \text{ i } b = 8)$ lub $(a = 8 \text{ i } b = 4)$
6. $(x = 5 \text{ i } y = 10)$ lub $(x = 10 \text{ i } y = 5)$
7. a) 52 centylowi, 50% maturzystów b) 81% maturzystów

Wariancja i odchylenie standardowe, s. 128-129

1. a) 28,4 b) 12,6
2. a) $\sigma \approx 11{,}8$ b) $\sigma \approx 0{,}97$
3. 1512
4. 2,4
5. $\overline{x} = -3{,}5^\circ \quad \sigma \approx 4{,}26^\circ \quad M_o = -5^\circ \quad M_e = -4^\circ$
6. a) $M_o = 9{,}5$ mm $M_e = 9{,}65$ mm b) $\overline{x} = 9{,}678$ mm $\sigma \approx 0{,}2$ mm
7. a) 6 ocen dobrych, 9 ocen dostatecznych b) $\sigma \approx 0{,}8$
8. tak; *wskazówka*: $\overline{x} = 24{,}56 \quad \sigma \approx 0{,}604$
   Tylko 2 gruszki (4% badanych gruszek) nie spełniają wymagań.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3., s. 130-132

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7
Odpowiedź	D	C	C	B	C	A	D

Zadania otwarte

8. 13 : 15
9. $p = 12$; pensja dyrektora po podwyżce jest równa 11 648 zł
10. na Mazurach
11. a) $M_o = 3$, $M_e = 3{,}5$ b) $\sigma^2 = 2{,}89 \quad \sigma = 1{,}7$
12. *wskazówka*: Oblicz *a* i *b*. ($a = 1$, $b = 3$)
13. *wskazówka*: Zauważ, że $\sigma_k^2 = p^2 \cdot \sigma^2$, gdzie σ_k^2 – wariancja zestawu liczb: *px*, *py*, *pz*.
14. II dostawca

4. Rachunek prawdopodobieństwa

Kombinatoryka – powtórzenie wiadomości, s. 142-144

1. a) na 16 sposobów b) na 11 sposobów
2. a) 24 b) 17
3. a) 320 b) 22
4. a) 210 000 b) 504

5. a) 2240 b) 2296 c) 4032 d) 1681

6. a) 714 b) 462

7. na $8 \cdot 9!$ sposobów

8. na $54 \cdot 10!$ sposobów

9. a) 2673 b) 459

10. a) 35 b) 342 c) 130 d) 596

11. $n = 5$ lub $n = 15$

12. a) na 10 sposobów b) na 26 sposobów

13. a) 32 768 b) 6720 c) 56

14. a) 60 b) $\frac{9!}{2! \cdot 2!} = 90\,720$ c) $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

15. a) $\binom{39}{5} + \binom{39}{4} \cdot \binom{13}{1} = 1\,645\,020$ b) 108 336

c) $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{13}{1} = 111\,540$ d) $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1} = 123\,552$

16. a) $\frac{\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5}}{4!} = \frac{20!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 4!}$

b) $\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = \frac{20!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!}$

c) $\binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = \frac{16!}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$

d) $4! \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = \frac{16!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$

17. a) $\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6} : 2 = 462$ b) $\binom{10}{5} = 252$ c) $\binom{10}{4} = 210$

18. $\binom{9}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot 4^3 = 161\,280$

19. $5 \cdot 9^5 + 4 \cdot 9^4 \cdot 4 + 4 \cdot 9^4 + \binom{4}{2} \cdot 9^3 \cdot 4 = 443\,961$

20. a) 44 b) 74

21. 1540

22. 924

23. 55

Doświadczenie losowe, s. 149

1. $\Omega = \{(1, O), (1, R), (2, O), (2, R), (3, O), (3, R), (4, O), (4, R), (5, O), (5, R), (6, O), (6, R)\}$
2. $\Omega = \{(O, O, O, O), (R, O, O, O), (O, R, O, O), (O, O, R, O), (O, O, O, R), (O, O, R, R), (O, R, O, R), (R, O, O, R), (R, O, R, O), (R, R, O, O), (O, R, R, O,), (O, R, R, R), (R, O, R, R), (R, R, O, R), (R, R, R, O), (R, R, R, R)\}$
3. $\Omega = \{(A, B, C), (A, C, B), (C, A, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, B, A)\}$
4. W punktach a) i b) jest taka sama przestrzeń zdarzeń elementarnych:
   $\Omega = \{(a, b, c): a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
5. a) $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$
   b) $\Omega = \{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43\}$
6. a) 10^5 b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$
7. a) 840 b) 2401
8. 435
9. $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach, s. 153-154

1. a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{4, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$, $D = \{2, 3, 5, 7\}$ b) Zdarzenie B pociąga za sobą zdarzenie A. c) $A' = C$ d) nie
2. a) $\Omega = \{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43\}$ b) A' – zdarzenie: utworzona liczba jest równa 23 lub jest większa od 23; $\overline{\overline{A}} = 4$, $\overline{\overline{A'}} = 8$
   c) Zdarzenie B jest zdarzeniem niemożliwym. d) np. C – utworzona liczba jest potęgą liczby 2
3. b) $A = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
   $B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$
   $C = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (2, 2), (4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
4. a) $A \cup C = \{0, 4, 6, 8\}$ b) $B \cap C = C = \{0, 6\}$ c) $C' \cap A = \{4, 8\}$ d) $A - B = \{4, 8\}$
   e) $B' - C' = \varnothing$ f) $A' \cup B' = \Omega - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
5. $A = \{(O, R, R), (R, O, R), (R, R, O)\}$ $B = \{(O, R, R), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R)\}$
   $C = \{(O, O, O)\}$
   A' – zdarzenie: nie wypadły dwie reszki, B' – zdarzenie: orzeł wypadł dwa lub trzy razy,
   C' – zdarzenie: co najmniej raz wypadła reszka

6. a) $A \cup B$ b) $A' \cap B'$ c) $B - A$ albo $B \cap A'$
d) $(A - B) \cup (B - A)$ albo $(A \cap B') \cup (B \cap A')$

Określenie prawdopodobieństwa, s. 160-161

1. a) tak b) nie
2. np. zdarzenia: A – na ściance wypadła liczba parzysta i B – na ściance wypadła liczba podzielna przez 4; wtedy $P(A) = 0{,}5 = P(A \cup B)$, $P(B) = \frac{1}{6}$ oraz $P(A) + P(B) = \frac{2}{3}$
5. $P(B) = 0{,}75$ $P(A \cap B) = 0{,}35$ $P(B - A) = 0{,}4$
6. $P(A \cap B) = 0{,}02$ $P(A - B) = 0{,}1$ $P(A' \cap B) = 0{,}28$
7. $P(A) = \frac{2}{3}$
8. $\frac{7}{20}$
9. $\frac{4}{15}$
10. a) $P(A) = 0{,}5$ b) $P(B) = 0{,}75$ c) $P(A' \cap B') = \frac{1}{6}$ d) $P\left((A \cap B)'\right) = \frac{7}{12}$
11. $P(A) = \frac{5}{9}$ $P(B) = \frac{7}{9}$

Prawdopodobieństwo klasyczne, s. 171-172

1. a) $P(A) = \frac{5}{36}$ b) $P(B) = \frac{1}{6}$ c) $P(C) = \frac{5}{12}$ d) $P(D) = \frac{3}{4}$
2. a) $P(A) = \frac{1}{4}$ b) $P(B) = \frac{13}{16}$ c) $P(C) = \frac{5}{8}$ d) $P(D) = \frac{3}{4}$
3. a) $P(A) = \frac{7}{26}$ b) $P(B) = \frac{25}{52}$ c) $P(C) = \frac{6}{13}$ d) $P(D) = \frac{9}{26}$
4. a) $P(A) = \frac{1}{10}$ b) $P(B) = \frac{2}{15}$ c) $P(C) = \frac{2}{15}$ d) $P(D) = \frac{11}{45}$
5. a) $P(A) = \frac{82}{245}$ b) $P(B) = \frac{61}{245}$
6. a) $\frac{15}{32}$ b) $\frac{9}{32}$

7. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch chłopaków jest równe $\frac{10}{21}$, prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednej dziewczyny wynosi $\frac{11}{21}$.

8. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{29}{30}$

9. a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{4}{5}$

10. $P(A)=\frac{2}{15}$

11. a) $\frac{3}{11}$ b) $\frac{3}{44}$ c) $\frac{29}{44}$

12. a) $\frac{29}{45}$ b) $\frac{29}{50}$

13. większe jest prawdopodobieństwo odrzucenia partii zawierającej 5% sztuk wadliwych

14. 15 chłopców

15. co najwyżej 18 dobrych żarówek

Doświadczenia losowe wieloetapowe, s. 179-180

1. b) $P(A)=\frac{1}{9}$

2. c) $P(A)=\frac{2}{5}$ $P(B)=\frac{1}{5}$ $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

3. $P(A)=0{,}784$

4. $P(C)=\frac{11}{12}$

5. $P(A)=\frac{1}{3}$

6. $P(A)=\frac{4}{9}$ $P(B)=\frac{20}{27}$

7. $P(A)=\frac{37}{64}$ $P(B)=\frac{5}{32}$ $P(C)=\frac{3}{16}$

8. $P(A)=\frac{19}{27}$ $P(B)=\frac{3}{8}$ $P(C)=\frac{1}{8}$

9. $P(A)=\frac{2}{15}$ $P(B)=\frac{1}{6}$ $P(C)=\frac{1}{30}$

10. $P(A)=\frac{81}{128}$ $P(B)=\frac{5}{1024}$

11. $P(A)=\frac{137}{228}$; *wskazówka*: Zobacz przykład 5.

12. $\frac{1}{3}$

Prawdopodobieństwo warunkowe, s. 187

1. 0,4
2. 0,6
3. $\frac{4}{7}$
4. a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{28}{325}$
5. 0,0048
6. 0,5

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa, s. 193-194

1. $\frac{31}{120}$
2. a) $\frac{43}{400}$ b) $\frac{3}{43}$
3. a) $\frac{287}{300}$ b) $\frac{190}{287}$
4. a) $\frac{19309}{20000}=0,96545$ b) $\frac{3}{19309}$
5. a) 0,19 b) 0,805 c) $\frac{38}{161}$
6. a) 0,006 b) 0,0315 c) $\frac{5}{21}$

Niezależność zdarzeń, s. 200

1. tak
2. a) 0,42 b) 0,46
3. $P(A)=0{,}003 \quad P(B)=0{,}997$
4. Powinien rozpalać ognisko pojedynczymi zapałkami.
5. Korzystniejszy jest zakup systemu trzech maszyn typu B; skuteczność tego systemu jest równa 99,2%.
6. *wskazówka*: $P\left[(A\cup B)\cap C\right]=P\left[(A\cap C)\cup(B\cap C)\right]=$
   $=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(C)+P(B)\cdot P(C)-P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=$
   $=\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]\cdot P(C)=P(A\cup B)\cdot P(C)$

Schemat Bernoulliego, s. 207

1. a) $\binom{20}{10}\cdot\frac{1}{2^{20}}\approx 0{,}176$ b) $1-\frac{1}{2^{20}}\approx 0{,}99999905$
2. a) $\binom{4}{3}\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4+0{,}6^4=0{,}4752$ b) co najmniej 8 strzałów
3. $\binom{5}{3}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^2+\binom{5}{4}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6+0{,}4^5=0{,}31744$
4. a) $\binom{8}{5}\left(\frac{11}{14}\right)^5\left(\frac{3}{14}\right)^3\approx 0{,}165$ b) $1-\left(\frac{3}{14}\right)^8\approx 0{,}99999555$
   c) $\left(\frac{3}{14}\right)^8+\binom{8}{1}\left(\frac{11}{14}\right)\left(\frac{3}{14}\right)^7\approx 0{,}000135$
5. $\binom{10}{8}\left(\frac{8}{15}\right)^8\left(\frac{7}{15}\right)^2\approx 0{,}064$; *wskazówka*: zobacz przykład 4.
6. Oznaczmy zdarzenia:
   A – wylosowano 8 razy dwie kule o różnych kolorach
   B_1 – losowanie odbyło się z pierwszej urny, $P(B_1)=\frac{1}{6}$
   B_2 – losowanie odbyło się z drugiej urny, $P(B_2)=\frac{1}{3}$
   B_3 – losowanie odbyło się z trzeciej urny, $P(B_3)=\frac{1}{2}$
   Zdarzenia B_1, B_2, B_3 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

a) Mamy:

$$P(A|B_1)=\binom{10}{8}\left[\frac{\binom{7}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}}\right]^8\left[1-\frac{\binom{7}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}}\right]^2=45\cdot\left(\frac{7}{15}\right)^8\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^2$$

$$P(A|B_2)=\binom{10}{8}\left[\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}\right]^8\left[1-\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}\right]^2=45\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^8\cdot\left(\frac{7}{15}\right)^2$$

$$P(A|B_3)=\binom{10}{8}\left[\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}\right]^8\left[1-\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}\right]^2=45\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^8\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+P(A|B_3)\cdot P(B_3)\approx 0{,}067$$

b) $P(B_3|A)=\dfrac{P(A|B_3)\cdot P(B_3)}{P(A)}\approx 0{,}606$

Zmienna losowa. Wartość oczekiwana zmiennej losowej, s. 214-215

1. a) Rozkład zmiennej losowej X: $\left\{\left(2,\frac{1}{36}\right),\left(3,\frac{1}{18}\right),\left(4,\frac{1}{12}\right),\left(5,\frac{1}{9}\right),\left(6,\frac{5}{36}\right),\left(7,\frac{1}{6}\right),\left(8,\frac{5}{36}\right),\left(9,\frac{1}{9}\right),\left(10,\frac{1}{12}\right),\left(11,\frac{1}{18}\right),\left(12,\frac{1}{36}\right)\right\}$

   b) Rozkład zmiennej losowej Y: $\left\{\left(0,\frac{1}{6}\right),\left(1,\frac{5}{18}\right),\left(2,\frac{2}{9}\right),\left(3,\frac{1}{6}\right),\left(4,\frac{1}{9}\right),\left(5,\frac{1}{18}\right)\right\}$

2. a) $\left\{\left(0,\frac{1}{11}\right),\left(1,\frac{9}{22}\right),\left(2,\frac{9}{22}\right),\left(3,\frac{1}{11}\right)\right\}$ b) $\left\{\left(0,\frac{6}{11}\right),\left(1,\frac{9}{22}\right),\left(2,\frac{1}{22}\right)\right\}$

3. $\left\{\left(0,\frac{92}{100}\right),\left(10,\frac{4}{100}\right),\left(50,\frac{3}{100}\right),\left(-200,\frac{1}{100}\right)\right\}$; $EX=-0{,}1$

4. a) Wartości oczekiwane wygranej w obu grach są równe i wynoszą 0,50 zł. Gry nie są sprawiedliwe. b) Bardziej ryzykowna jest gra pierwszą kostką.

5. a) Wartość oczekiwana jest równa zero, gra jest sprawiedliwa.
   b) o $\sqrt{84}$, czyli o ok. 9,17

6. $\left\{\left(1, \frac{7}{10}\right), \left(2, \frac{21}{100}\right), \left(3, \frac{9}{100}\right)\right\}$; $EX = 1{,}39$

7. $\left\{\left(5, \frac{1}{4}\right), \left(10, \frac{1}{4}\right), \left(15, \frac{1}{4}\right), \left(20, \frac{1}{4}\right)\right\}$; $EX = 12{,}50$ zł

8. $\left\{\left(0, \frac{4845}{10626}\right), \left(1, \frac{4560}{10626}\right), \left(2, \frac{1140}{10626}\right), \left(3, \frac{80}{10626}\right), \left(4, \frac{1}{10626}\right)\right\}$; $EX = \frac{2}{3}$

9. Zmienna losowa jest zbiorem par postaci $\left(k, \binom{7}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{7-k}\right)$,

   gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

10. Zmienna losowa jest zbiorem par postaci $\left(k, \binom{5}{k}\left(\frac{3}{14}\right)^k\left(\frac{11}{14}\right)^{5-k}\right)$,

    gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4., s. 216-218

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7
Odpowiedź	D	B	D	A	D	D	C

Zadania otwarte

8. a) $P(A) = \frac{5}{12}$ b) $P(B) = \frac{35}{36}$ c) $P(C) = \frac{1}{2}$ d) $P(D) = \frac{5}{9}$

9. a) $P(A) = \frac{127}{128}$ b) $P(B) = \frac{1}{16}$

10. a) $P(A) = 0{,}2$ b) $P(B) = 0{,}3$

11. a) $P(A) = \frac{63}{125}$ b) $P(B) = \frac{1}{625}$

12. $\frac{449}{962}$

13. 30 uczniów

14. 5,5

15. a) $\frac{23}{78}$ b) 10 zł

16. 0,75

17. a) $P(A)=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot 4\cdot 44+\binom{4}{3}\cdot 4}{\binom{52}{4}}=\dfrac{1072}{270\,725}$

b) $P(B)=\dfrac{\binom{4}{1}\binom{13}{2}\binom{3}{2}\cdot 13\cdot 13}{\binom{52}{4}}=\dfrac{12\,168}{20\,825}$

18. a) $P(A)=\dfrac{7}{10}$ b) $P(B)=\dfrac{1}{2}$

19. a) $P(A)=\dfrac{640}{59049}$ b) $P(B)=\dfrac{459}{512}$

20. $P(A\,|\,B)=0{,}4$ $P(A\,|\,B)=P(A)$, stąd zdarzenia A i B są niezależne.

21. $n=21$

22. $\dfrac{15}{23}$

23. $\left\{\left(0,\dfrac{1}{625}\right),\left(1,\dfrac{16}{625}\right),\left(2,\dfrac{96}{625}\right),\left(3,\dfrac{256}{625}\right),\left(4,\dfrac{256}{625}\right)\right\}$; $EX=3{,}2$ $\sigma_X=0{,}8$

5. Geometria przestrzenna. Wielościany

Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne, s. 228

1. nie
2. *wskazówka*: Zobacz przykład 2.
3. *wskazówka*: Zobacz przykład 6.
4. a) *wskazówka*: Rozważ trójkąty *BEA* i *EDA*, a następnie zastosuj twierdzenie 5.
   c) *wskazówka*: Rozważ trójkąt *BDA* i zastosuj twierdzenie 2.

Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni, s. 235-236

1. *wskazówka*: Przez punkt C poprowadź prostą równoległą do prostej C_1Q.
2. a) nie b) tak
3. *wskazówka*: Zauważ, że $AD_1 \parallel BC_1$ i trójkąt D_1AB_1 jest równoramienny.
4. *wskazówka*: Wykaż najpierw, że prosta A_1C_1 jest prostopadła do płaszczyzny (DBB_1D_1).

5. tak
6. tak

Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę, s. 245

2. Nie dzieli, ponieważ wysokość rombu poprowadzona przez środek symetrii rombu nie dzieli boków rombu na połowy.
3. 9 cm

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych, s. 250-251

1. $P_{BDE} = 50\ \text{cm}^2$; *wskazówka*: Wykaż, że $|\sphericalangle BDE| = 90^\circ$.
2. tak
4. b) $|AC| = 12$, $|AD| = 13$, $|CD| = 5$
5. *wskazówka*: Prosta AC jest prostopadła do rzutu prostokątnego prostej BD_1 na płaszczyznę (ABC).
7. *wskazówka*: Płaszczyzna (EBD) jest prostopadła do płaszczyzny (ABC) i prosta BE jest krawędzią przecięcia tych płaszczyzn, więc rzutem prostokątnym prostej FG na płaszczyznę (ABC) jest prosta BE.

Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny, s. 255

1. a) 5 cm b) $5\sqrt{2}$ cm c) $5\sqrt{3}$ cm
2. a) 45° b) 90° c) ok. 63°
4. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Graniastosłupy, s. 264-265

1. a) 13 cm b) $2\sqrt{6}$ cm
2. $a = 6$ cm, $h = 9$ cm
3. nie; *wskazówka*: Porównaj długości odcinków AC_1 oraz AB_1.
4. a) 45° b) 60°
5. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
6. a) 20 cm, 34 cm, 20 cm, 34 cm b) ok. 28°, ok. 53°, ok. 28°, ok. 53°
7. a) 1 b) 2

9. *wskazówka*: Oznacz przez E_1 środek odcinka B_1D_1, a następnie rozważ trapez ACE_1A_1.

10. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ostrosłupy, s. 276-278

1. a) $45°$ b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $-\frac{1}{3}$

2. b) ok. $74°$ c) $\frac{5}{8}$

3. 18

4. a) $k = 26$ cm, $H = 13\sqrt{3}$ cm b) $d = 6,5\sqrt{3}$ cm

5. a) $k = \sqrt{5}$, $H = \sqrt{3}$ b) ok. $63°$ c) ok. $51°$

6. a) 5 cm; *wskazówka*: Zobacz przykład 1. b) $4\frac{8}{13}$ cm

7. 8 cm

8. a) 5; *wskazówka*: Zobacz przykład 6., oblicz promień *r* okręgu wpisanego w podstawę., $r = 3$ b) $\sqrt{34}$, $\sqrt{61}$, $\sqrt{106}$

9. a) $2\sqrt{21}$ cm b) $\frac{5}{7}$ c) $45°$

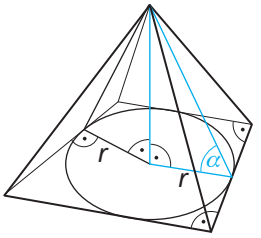
10. a) $|DW| = 4$; *wskazówka*: zobacz przykład 5. b) $-\frac{9}{25}$; *wskazówka*: Miara kąta dwuściennego między płaszczyznami (ABW) i (BCW) jest równa mierze kąta liniowego między wysokościami trójkątów *ABW* i *BCW*, poprowadzonymi odpowiednio z wierzchołków *A* i *C*. Skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta do obliczenia tych wysokości.

11. Przekątne trapezu mają po 25 cm długości.
wskazówka: Ostrosłup jest prosty. Na trapezie można opisać okrąg, więc trapez jest równoramienny. Spodek wysokości ostrosłupa należy do osi symetrii tego trapezu.

12. a) 3 cm b) 6 cm
wskazówka: Zobacz rysunek z przykładu 7.

13. *wskazówka*: Uzależnij wysokość ostrosłupa od obu wysokości równoległoboku. Następnie skorzystaj ze wzoru na pole równoległoboku do zapisania zależności między długościami boków równoległoboku, a jego wysokościami poprowadzonymi na te boki.

14. długości krawędzi podstawy: 15, 12, 10, 13
długości krawędzi bocznych: $3\sqrt{33}$, $3\sqrt{33}$, $3\sqrt{38}$, $\sqrt{277}$
wskazówka: W trapez można wpisać okrąg, a jego środek jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Oblicz promień r tego okręgu. Następnie skorzystaj z własności czworokąta opisanego na okręgu oraz z własności odcinków stycznych do okręgu i oblicz długości boków trapezu.



Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu, s. 282-283

2. 72 cm^2
3. $600\left(1+2\sqrt{2}\right)$ cm^2
4. a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{69}$ c) 4
5. 672 cm^2
6. $\sqrt{3}:6$
7. $20+6\sqrt{3}$
8. $48+32\sqrt{3}$
9. $H = 7{,}5$ cm
10. $6\left(10+\sqrt{10}\right)$ cm^2
11. 4 cm

Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów, s. 292-294

1. 480 cm^3
2. $a = 20$ cm, $H = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm
3. 360 cm^3
4. 1,7975 m^3 = 1797,5 l
5. a) $\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm, czyli ok. 5,8 cm
6. 96 dm^3
7. a) 12 cm, 16 cm, 20 cm b) 320 cm^3
8. $144\sqrt{3}$ cm^3
9. $1176\sqrt{3}$ cm^3

10. a) $8\sqrt{3}$ cm b) $48\sqrt{15}$ cm^2

11. 32 dm^3

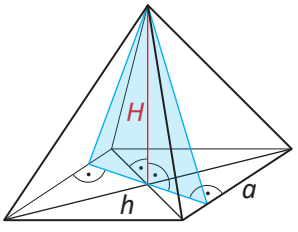
12. a) $a=6\sqrt{2}$, $H=4$ b) $P_c=96\sqrt{2}$

13. $V=\frac{1}{24}a^3\sqrt{3\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$, $\alpha\in(0°, 60°)$

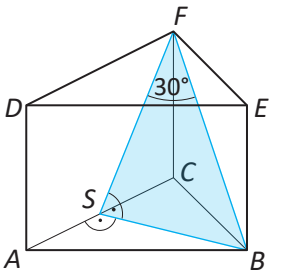
14. $V=\frac{1}{3}d^3\sin^2\alpha\sqrt{4\cos^2\alpha-1}$, $\alpha\in(0°, 60°)$

Przekroje wielościanów – zadania, s. 305-307

1. $P_b=336$ cm^2
2. 3360 cm^3
3. $54\sqrt{3}$ cm^2
4. a) $3\sqrt{3}$ cm^2 b) $6\left(\sqrt{6}-1\right)$ cm^2
5. $P=6\sqrt{26}$; *wskazówka*: Oblicz długości boków trójkąta AB_1D_1, następnie cosinus i sinus kąta B_1AD_1 i skorzystaj ze wzoru $P=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$.
6. a) *wskazówka*: Wystarczy pokazać, że wszystkie boki przekroju mają taką samą długość.
   b) *wskazówka*: Poprowadź przekrój prostopadłościanu płaszczyzną równoległą do podstawy *ABCD* i zawierającą odcinek *EF*.
7. $P=216$ cm^2, Przekrój jest trójkątem ostrokątnym.
8. krawędź boczna: $4\sqrt{5}$, krawędź podstawy: $8\sqrt{3}$; *wskazówka*: Wykaż, że wysokość podstawy jest trzy razy dłuższa od wysokości ostrosłupa.
9. a) $\cos\beta=\frac{\cos2\alpha}{2\cos^2\alpha}$ b) $\cos\gamma=\frac{\sqrt{12\cos^2\alpha-3}}{3}$
10. *wskazówka*: Wykaż, że kąt nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy jest równy 45°.
11. b) $P=6\sqrt{737}$
12. *wskazówka*: Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w romb, czyli punktem przecięcia się przekątnych rombu. Szukana płaszczyzna przekroju zawiera wysokość ostrosłupa oraz wysokość rombu, przechodzącą przez punkt przecięcia się przekątnych.



13. $V = 16\sqrt{6}$; *wskazówka*: Ściana *ACFD* jest prostopadła do podstawy *ABC*. Rzutem prostokątnym odcinka *BF* na płaszczyznę $(ACFD)$ jest odcinek *SF*. Kąt *SFB* jest kątem nachylenia przekątnej *BF* ściany *CBEF* do ściany *ACFD*.



Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5., s. 308-310

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	C	B	A	D	B	D	C	D

Zadania otwarte

11. a) $V = 512\ \text{cm}^3$, $P_c = 384\ \text{cm}^2$ b) $d = \frac{8\sqrt{6}}{3}\ \text{cm}$

12. $H = \sqrt{33}\ \text{cm}$, $V = 228\sqrt{11}\ \text{cm}^3$

13. $P_b = 18\sqrt{15}\ \text{cm}^2$, $V = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

14. a) długość krawędzi podstawy: 12 cm, długość krawędzi bocznej: $2\sqrt{21}\ \text{cm}$
    b) $V = 72\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

15. a) $P_b = 108\ \text{cm}^2$ b) $k = 2\sqrt{34}\ \text{cm}$

16. a) $V = 100\ \text{cm}^3$; *wskazówka*: Ostrosłup jest prosty, spodek wysokości jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta w podstawie.
    b) $V = 25\left(2+\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^3$; *wskazówka*: Spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie w podstawie ostrosłupa. Niech *a* oznacza długość najkrótszego boku trójkąta w podstawie, *R* – promień okręgu opisanego na tym trójkącie; $R = 5$ cm; z twierdzenia sinusów $\frac{a}{\sin 30^\circ} = 2R$, stąd $a = 5$ cm. Oblicz długość ramion tego trójkąta, np. z twierdzenia cosinusów, następnie pole tego trójkąta.

17. a) $6\sqrt{41}$ b) 1,25 c) $\frac{24\sqrt{41}}{41}$

18. $V = 4$, $P_c = 12\sqrt{3}$

19. a) $V = 784$; *wskazówka*: Rzut prostokątny środka krawędzi bocznej na płaszczyznę podstawy jest środkiem odcinka, będącego połową przekątnej podstawy.
b) 6,72

6. Geometria przestrzenna. Bryły obrotowe

Walec, s. 315

1. I. $P_c = 208\pi$ cm^2, $V = 320\pi$ cm^3 II. $P_c = 130\pi$ cm^2, $V = 200\pi$ cm^3
2. Siatkę tworzy prostokąt o wymiarach 4 cm na 12,6 cm oraz dwa koła o promieniu 2 cm, leżące przy dwóch dłuższych bokach prostokąta.
3. a) $r = 7$ cm b) $P_b = 210\pi$ cm^2
4. $V = 375\pi$ cm^3
5. $h = 5$ cm, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{6}$
6. 14 cm na 21 cm
7. I. 10 na 6 II. $10\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ na $2\sqrt[3]{45}$
8. $P_c = 28\pi$ cm^2

Stożek, s. 320-321

1. 240°
3. a) $r = 12$ cm b) $P_b = 240\pi$ cm^2
4. a) $P_c = 216\pi$ cm^2 b) $V = 324\pi$ cm^3
5. a) $V = 72\pi\sqrt{3}$ b) $P_b = 72\pi$
6. $V = \frac{128\pi\sqrt{2}}{3}$
7. $V = 6\pi\sqrt{10}$
8. 120°
9. –0,125
10. Dwa stożki spełniają warunki zadania: I. kąt rozwarcia stożka jest równy 30°, $r = 5\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm, $P_b = 50\pi\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm^2

    II. kąt rozwarcia stożka jest równy 150°, $r = 5\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm, $P_b = 50\pi\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm^2
11. $V = 27\pi$, $P_c = 9\pi\left(3+2\sqrt{3}\right)$
12. $P_c = 360\pi$

14. a) $h = 6\sqrt{2}$; *wskazówka*: Pole przekroju osiowego jest równe $\frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin\alpha$, gdzie α jest kątem rozwarcia stożka, i jest największe wtedy, gdy $\sin\alpha = 1$, czyli wtedy, gdy $\alpha = 90°$. b) nie; *wskazówka*: Wykaż np., że stożek, którego kąt rozwarcia ma miarę 120°, ma większe pole powierzchni bocznej.

Kula i sfera, s. 325

1. 400π cm^2
2. 4,9 litra
3. a) $r_1 : r_2 = 5 : 1$ b) $P_1 : P_2 = 25 : 1$
4. 288π cm^3

Bryły obrotowe – zadania różne, s. 329-330

1. o 1 cm
2. $P_1 : P_2 = \left(\sqrt{2}+1\right) : \sqrt{2}, \quad V_1 : V_2 = \sqrt{2} : 1$
3. a) $V = 360\pi\sqrt{5}$ cm^3, $P_c = 180\pi\sqrt{5}$ cm^2 b) $V = 720\pi$ cm^3, $P_c = 2160\pi$ cm^2
4. a) $V = \pi \cdot H^3$ b) $\alpha = 120°$
5. o 50%
6. $1\frac{2}{3}$ m
9. $r = \frac{d\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)}, \quad R = \frac{d}{2\sin\alpha}$
10. $1 : 2\sqrt{2} : 3\sqrt{3}$

Podobieństwo figur w przestrzeni, s. 336

1. 6 cm, 9 cm, 15 cm
2. a) $\frac{1}{2}$ b) 8 razy
3. $V_2 = 9\pi\sqrt{3}$ cm^3
4. 64 razy
5. o 78,4%
6. 64 : 61
7. 1 : 7 : 19 : 37

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej, s. 345

1. a) $V(x) = x^2 \cdot (15 - 2x)$, $D_V = \left(0, 7\frac{1}{2}\right)$ b) 5 cm, 5 cm, 5 cm

2. a) $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(-x^3 + 7x^2\right)$, $D_V = (0, 7)$ b) $x = 4\frac{2}{3}$, $h = 7$

3. $r = 8$, $h = 4\sqrt{5}$, $V = \frac{256\sqrt{5}\pi}{3}$

4. 10 cm, 10 cm, 5 cm

5. wysokość puszki 8 cm, promień podstawy 4 cm

7. a) $r = 6\sqrt{2}$, $h = 24$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6., s. 346-347

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	D	B	C	A	C	D	B	D

Zadania otwarte

9. I. $V = \frac{200}{\pi}$ cm^3 II. $V = \frac{160}{\pi}$ cm^3

10. $V = 45\pi$ cm^3

11. $P_b = 27\pi\sqrt{7}$, $V = \frac{567}{4}\pi$

13. 2 cm^3

14. 768π cm^3

15. $P_c = 25\pi\left(2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)$

16. 2 cm

18. b) $P_c = 300\pi$ cm^2

19. wymiary prostopadłościanu: 1,5 dm, 2 dm, 3 dm; $P_{\min} = 27$ dm^2

20. a) $V(r) = \frac{\pi}{3}\sqrt{243r^2 - r^6}$, $r \in \left(0, 3\sqrt[4]{3}\right)$ b) $r = 3$, $h = 3\sqrt{2}$

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych

α	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\cos\alpha$	
1°	0,017	0,017	57,290	1,000	89°
2°	0,035	0,035	28,636	0,999	88°
3°	0,052	0,052	19,081	0,999	87°
4°	0,070	0,070	14,301	0,998	86°
5°	0,087	0,087	11,430	0,996	85°
6°	0,105	0,105	9,514	0,995	84°
7°	0,122	0,123	8,144	0,993	83°
8°	0,139	0,141	7,115	0,990	82°
9°	0,156	0,158	6,314	0,988	81°
10°	0,174	0,176	5,671	0,985	80°
11°	0,191	0,194	5,145	0,982	79°
12°	0,208	0,213	4,705	0,978	78°
13°	0,225	0,231	4,331	0,974	77°
14°	0,242	0,249	4,011	0,970	76°
15°	0,259	0,268	3,732	0,966	75°
16°	0,276	0,287	3,487	0,961	74°
17°	0,292	0,306	3,271	0,956	73°
18°	0,309	0,325	3,078	0,951	72°
19°	0,326	0,344	2,904	0,946	71°
20°	0,342	0,364	2,747	0,940	70°
21°	0,358	0,384	2,605	0,934	69°
22°	0,375	0,404	2,475	0,927	68°
23°	0,391	0,424	2,356	0,921	67°
24°	0,407	0,445	2,246	0,914	66°
25°	0,423	0,466	2,145	0,906	65°
26°	0,438	0,488	2,050	0,899	64°
27°	0,454	0,510	1,963	0,891	63°
28°	0,469	0,532	1,881	0,883	62°
29°	0,485	0,554	1,804	0,875	61°
30°	0,500	0,577	1,732	0,866	60°
31°	0,515	0,601	1,664	0,857	59°
32°	0,530	0,625	1,600	0,848	58°
33°	0,545	0,649	1,540	0,839	57°
34°	0,559	0,675	1,483	0,829	56°
35°	0,574	0,700	1,428	0,819	55°
36°	0,588	0,727	1,376	0,809	54°
37°	0,602	0,754	1,327	0,799	53°
38°	0,616	0,781	1,280	0,788	52°
39°	0,629	0,810	1,235	0,777	51°
40°	0,643	0,839	1,192	0,766	50°
41°	0,656	0,869	1,150	0,755	49°
42°	0,669	0,900	1,111	0,743	48°
43°	0,682	0,933	1,072	0,731	47°
44°	0,695	0,966	1,036	0,719	46°
45°	0,707	1,000	1,000	0,707	45°
	$\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\sin\alpha$	α