

Matematyka



Zmiana MEN 2024



Oznaczono usunięte
i zmienione treści

3

Podręcznik dla
branżowej szkoły I stopnia

OPERON
Edukacja jest podróżą

Matematyka

Podręcznik dla
branżowej szkoły I stopnia

dla

absolwentów ośmioletniej szkoły podstawowej

3

Adam Konstantynowicz
Anna Konstantynowicz
Małgorzata Pająk

 **OPERON**
Edukacja jest podróżą

2024

Projekt okładki: Paweł Kwacz
Redaktor prowadzący: Michalina Stolińska
Redakcja językowa: Monika Turata
Redakcja graficzna i skład: Maciej Laska
Grafika: Jan Kortas
Korekta techniczna: Monika Turata

Zdjęcia: Shutterstock

OPERON Sp. z o.o. oświadcza, że z należytą starannością podjął wszelkie działania zmierzające do powiadomienia podmiotów majątkowych praw autorskich do utworów słownych i fotograficznych wykorzystanych w podręczniku o zamiarze ich publikacji celem uzyskania od twórców lub ich następców prawnych wymaganej zgody za przysługującym wynagrodzeniem w stosownej wysokości. Osoby, których prawa w sposób niezawiniony przez wydawnictwo zostały naruszone, prosimy o bezpośredni kontakt z wydawcą.

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do matematyki na III etapie edukacyjnym – branżowa szkoła I stopnia dla uczniów będących absolwentami ośmioletniej szkoły podstawowej, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr Marii Borowskiej, mgr Urszuli Łączyńskiej i prof. dr. hab. Tadeusza Zgótki.

Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: branżowa szkoła I stopnia
Rok dopuszczenia: 2021
Numer dopuszczenia: 1074/3/2021

© Copyright by OPERON Sp. z o.o. & Adam Konstantynowicz, Anna Konstantynowicz, Małgorzata Pająk
Gdynia 2021
Wszelkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody wydawcy zabronione.
N7335

Wydawca:
OPERON Sp. z o.o.
81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3
tel. centrali 58 679 00 00
e-mail: info@operon.pl
www.operon.pl

ISBN 978-83-8197-134-8

05/24/XXI/O80

Zgodnie z decyzją MEN od września 2024 r. obowiązuje zmieniona, uszczuplona o ok. 20% podstawa programowa. W związku z tym w podręczniku znalazły się stosowne oznaczenia.



Takim symbolem oznaczono treści usunięte z podstawy programowej.



Takim symbolem oznaczono treści, które zostały zmienione. Nauczyciel przedstawi uczniowi zmiany i wyjaśni, czego powinien się nauczyć.

Spis treści

I Stereometria

1.1. Graniastopy	8
1.2. Kąt między prostą a płaszczyzną w przestrzeni	17
1.3. Ostrośpy	26
1.4. Bryły obrotowe	36
1.5. Zadania utrwalające	47

II Kombinatoryka

2.1. Doświadczenia losowe	52
2.2. Reguła mnożenia. Liczba zdarzeń elementarnych	58
2.3. Reguła dodawania	61
2.4. Reguła mnożenia i dodawania	64
2.5. Zadania utrwalające	69

III Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

3.1. Obliczanie prawdopodobieństwa klasycznego	74
3.2. Średnia arytmetyczna, średnia ważona	79
3.3. Mediana i dominanta	85
3.4. Skala centylowa	94
3.5. Zadania utrwalające	105

Odpowiedzi	110
------------	-----

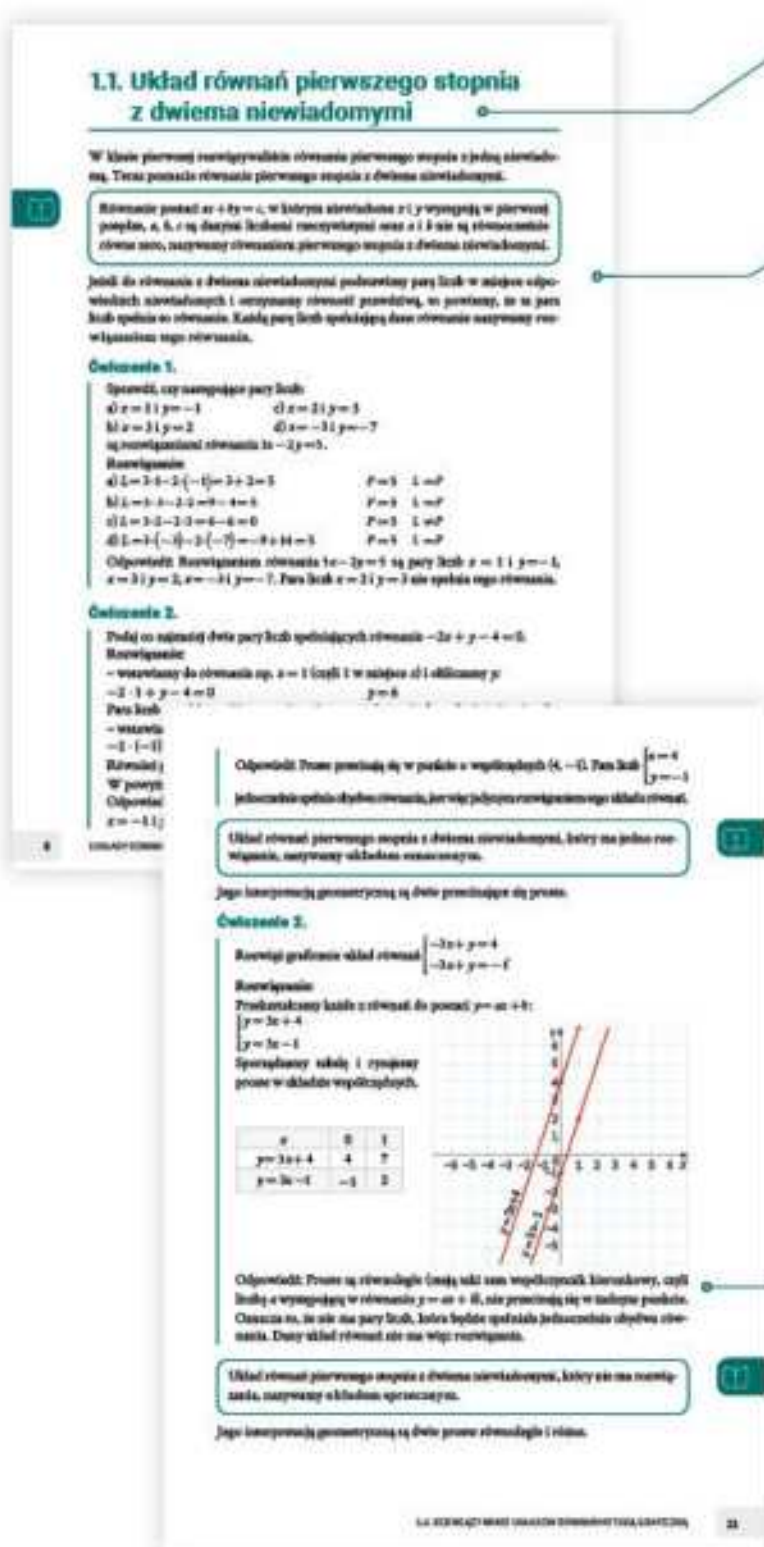


Wstęp

Jak jest zbudowany nasz podręcznik

Podręcznik do matematyki dla branżowej szkoły I stopnia został zaprojektowany z uwzględnieniem potrzeb i stylu nauki uczniów. Pomoże im szybko przyswoić niezbędne informacje, skutecznie powtórzyć wiadomości oraz przygotować się do sprawdzianów i kartkówek.

Przed rozpoczęciem korzystania z podręcznika, zapoznajcie się z jego budową i przyjrzyjcie się wszystkim jego elementom. Zostały one skonstruowane tak, by ułatwić wam naukę i pomóc w błyskawicznym znalezieniu potrzebnych zagadnień.



Podręcznik zawiera tylko niezbędne wiadomości ujęte w jasno i prosto sformułowanych tematach.

Przystępny język publikacji ułatwi wam zrozumienie treści i pozytywnie nastawi was do materiału.

Ikony na marginesach ułatwią wam odnalezienie definicji, najważniejszych treści do zapamiętania oraz zadań:

-  definicja, prawo, zasada
-  zadania sprawdzające
-  zadania do rozwiązania

W tekście pojawiają się **wytłuszczenia**. Dzięki nim łatwo odnajdziecie istotne zagadnienia, pojęcia i nazwy.

1.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Rozwiązać układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi to znaczy wyznaczyć wszystkie jego rozwiązania albo stwierdzić, że rozwiązań nie ma.

Jedną z częściej stosowanych metod rozwiązywania układów równań jest metoda podstawiania. Polega ona na wyznaczeniu z jednego równania układu jednej niewiadomej i podstawieniu jej do drugiego równania układu.

Jeżeli z jednego równania układu wyznaczymy jedną niewiadomą i podstawimy otrzymane wyrażenie do drugiego równania zamiast tej niewiadomej, to układ równań zostanie z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania jest równoważny danemu.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - y = -2 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$ metodą podstawiania.
Rozwiązanie:
- z pierwszego równania wyznaczmy niewiadomą x w zależności od niewiadomej y i podstawmy do drugiego równania:
 $x = -2 + y$
 $3(-2 + y) + 2y = -4$

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y = -4 \end{cases}$.
Rozwiązanie:
Przekształćmy każde z równań do postaci $y = ax + b$:
 $y = -2x + 1$
 $y = -2x - 4$
Oznaczmy układ dwóch jedynkowych równań. Równanie opiszemy w słowach prostych. Rysujemy je w układzie współrzędnych. Odpowiedź: Układ równań nie ma rozwiązania, więc rozwiązaniem układu jest zbiór pusty. Współrzędne każdego punktu leżącego na prostej, na rysunku obok, są rozwiązaniami tego układu równań.



Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, który nie ma rozwiązania, nazywamy układem nieliniowym.

Jego interpretację geometryczną możemy prosto pokazać tak:

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

- Rozwiąż graficznie układy równań:
a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 6x + 12 = 2y \end{cases}$
d) $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 1,5x + y = 1,5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 0,5y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0,5x - 0,2y = 0,5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$
- Narysuj w jednym układzie współrzędnych parę prostych: a) $A = \{2, -3\}$, $B = \{4, 1\}$ b) $C = \{-1, -4\}$, $D = \{1, 0\}$
c) $E = \{0, -0,5\}$, $F = \{0, -0,5\}$ d) $G = \{1, 1,5\}$, $H = \{0, 1\}$

Śledzenie rozwiązań przykładów pomoże wam łatwiej zrozumieć omawiane zagadnienia.

Definicje, prawa i zasady wyróżniono kolorową ramką. Dzięki temu od razu je zauważycie i szybko znajdziecie podczas powtórek.

Zadania do rozwiązywania możecie przećwiczyć w toku lekcji lub wykorzystać do nauki w domu lub przed kartkówką czy sprawdzianem.

Zadania sprawdzające posłużą wam do weryfikacji zdobytych umiejętności.

Zadania o podwyższonym stopniu trudności oznaczono gwiazdką: 4*.

Uwaga: odpowiedzi do zadań wymagających pisemnego rozwiązania należy zapisywać w zeszycie.

Na końcu działu znajdują się **zadania utrwalające**, które pomogą wam w usystematyzowaniu wiedzy.

- Rozwiąż graficznie układy równań, a następnie odlicz pole trójkątów, które tworzą z X i Y proste opisane równaniami układu:
a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y - 7x = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$
- Rozwiąż graficznie poniższe układy równań w jednym układzie współrzędnych, a następnie odlicz pole czworokąta ograniczonego prostymi opisanymi równaniami układu:
 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2y = -8 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ jest rysunek



A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

X.

Y.

Z.

aa.

ab.

ac.

ad.

ae.

af.

ag.

ah.

ai.

aj.

ak.

al.

am.

an.

ao.

ap.

aq.

ar.

as.

at.

au.

av.

aw.

ax.

ay.

az.

ba.

bb.

bc.

bd.

be.

bf.

bg.

bh.

bi.

bj.

bk.

bl.

bm.

bn.

bo.

bp.

bq.

br.

bs.

bt.

bu.

bv.

bw.

bx.

by.

bz.

ca.

cb.

cc.

cd.

ce.

cf.

cg.

ch.

ci.

cj.

ck.

cl.

cm.

cn.

co.

cp.

cq.

cr.

cs.

ct.

cu.

cv.

cw.

cx.

cy.

cz.

da.

db.

dc.

dd.

de.

df.

dg.

dh.

di.

dj.

dk.

dl.

dm.

dn.

do.

dp.

dq.

dr.

ds.

dt.

du.

dv.

dw.

dx.

dy.

dz.

ea.

eb.

ec.

ed.

ee.

ef.

eg.

eh.

ei.

ej.

ek.

el.

em.

en.

eo.

ep.

eq.

er.

es.

et.

eu.

ev.

ew.

ex.

ey.

ez.

fa.

fb.

fc.

fd.

fe.

ff.

fg.

fh.

fi.

fj.

fk.

fl.

fm.

fn.

fo.

fp.

fq.

fr.

fs.

ft.

fu.

fv.

fw.

fx.

fy.

fz.

ga.

gb.

gc.

gd.

ge.

gf.

gg.

gh.

gi.

gj.

gk.

gl.

gm.

gn.

go.

gp.

gq.

gr.

gs.

gt.

gu.

gv.

gw.

gx.

gy.

gz.

ha.

hb.

hc.

hd.

he.

hf.

hg.

hh.

hi.

hj.

hk.

hl.

hm.

hn.

ho.

hp.

hq.

hr.

hs.

ht.

hu.

hv.

hw.

hx.

hy.

hz.

ia.

ib.

ic.

id.

ie.

if.

ig.

ih.

ii.

ij.

ik.

il.

im.

in.

io.

ip.

iq.

ir.

is.

it.

iu.

iv.

iw.

ix.

iy.

iz.

ja.

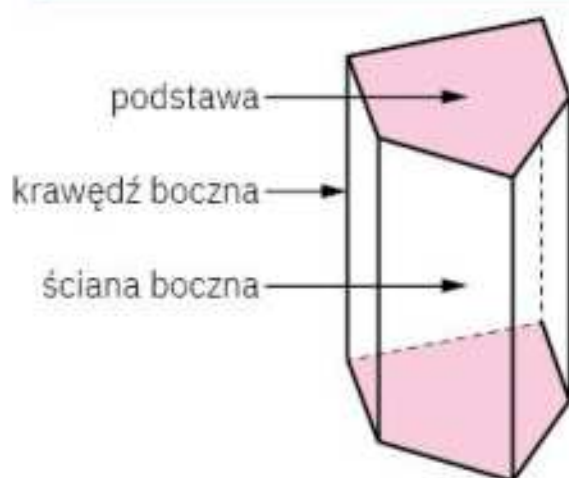


STEREOMETRIA

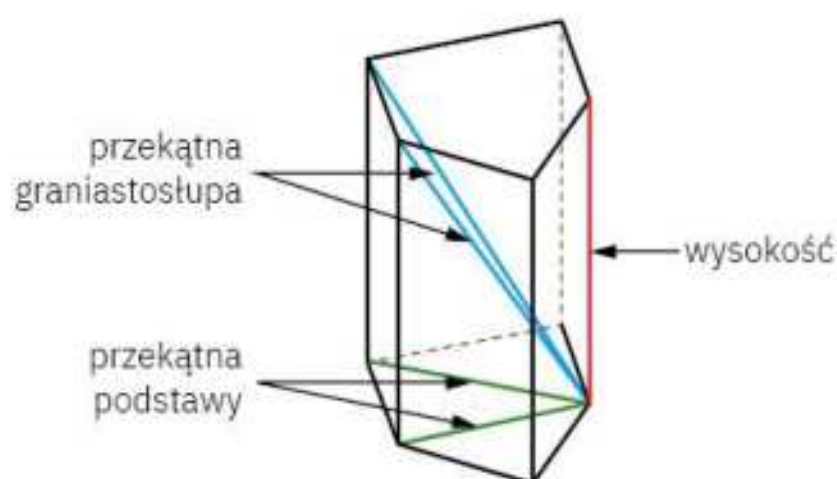
1.1. Graniastosłupy



Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany (zwane ścianami bocznymi) są równoległobokami.



W graniastosłupie wyróżniamy odcinki:

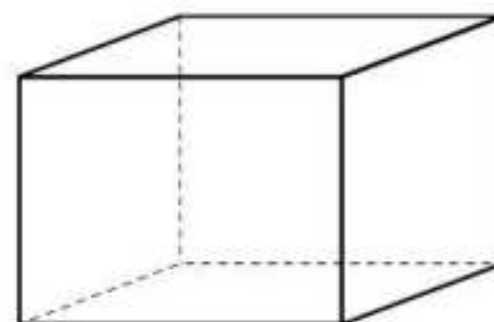


Wysokość graniastosłupa to odcinek zawarty w prostej prostopadłej do jego podstaw, którego końcami są punkty wspólne tej prostej z płaszczyznami zawierającymi podstawy graniastosłupa.

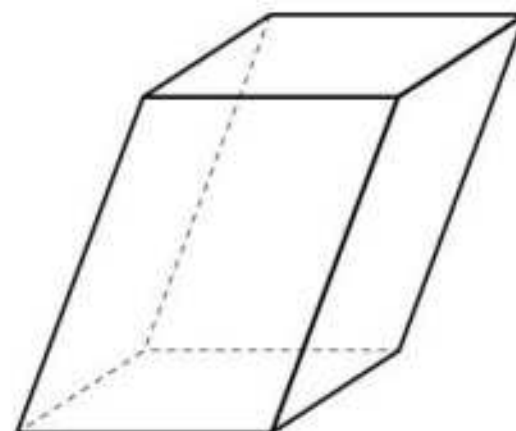
Przekątną graniastosłupa nazywamy każdy odcinek, którego końcami są wierzchołki obu podstaw graniastosłupa i który nie zawiera się w żadnej ze ścian graniastosłupa.

Wśród graniastosłupów wyróżniamy graniastosłupy proste i pochyłe.

Graniastosłup prosty to figura przestrzenna, której podstawy są przystającymi wielokątami, a wszystkie ściany boczne są prostokątami.

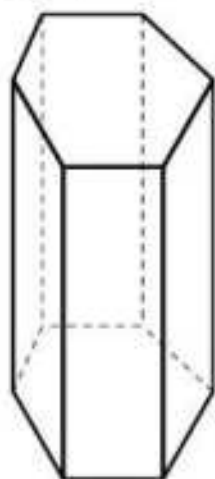


Graniastosłup pochyły to graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw.

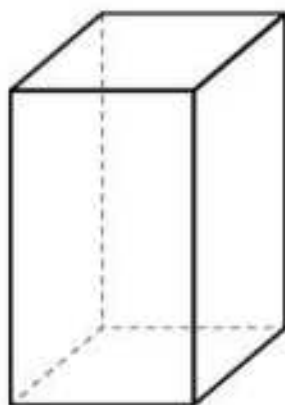


Graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi, nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**. W graniastosłupie prawidłowym ściany boczne są figurami przystającymi.

Graniastosłup przybiera nazwę w zależności od tego, jaki wielokąt jest w jego podstawie.



graniastosłup
sześciokątny

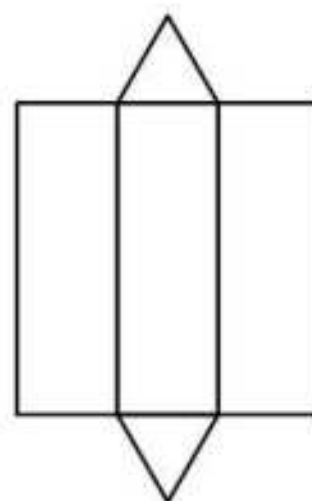
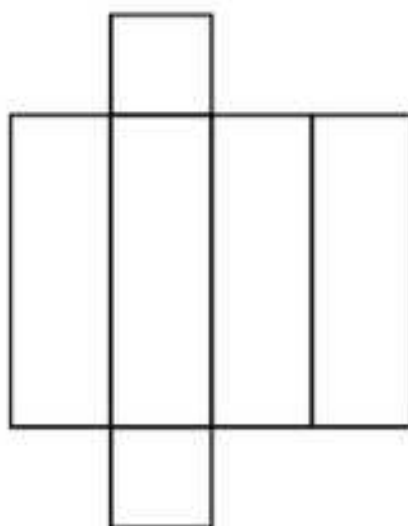
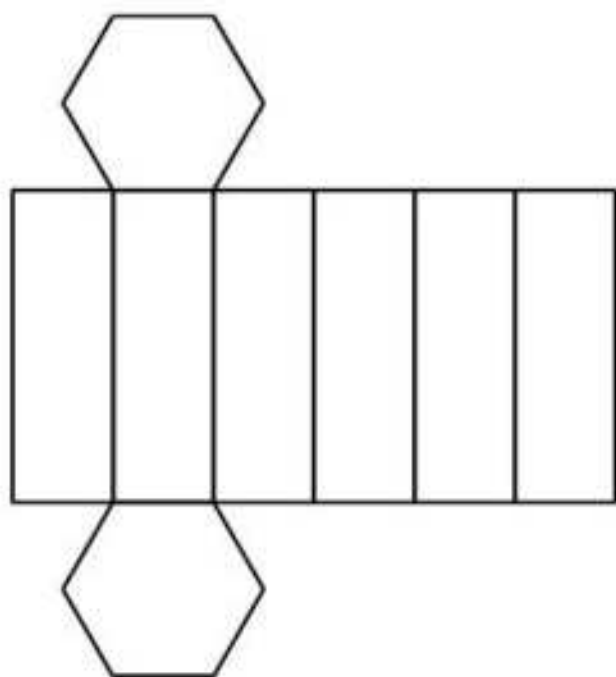


graniastosłup
czworokątny



graniastosłup
trójkątny

Po rozcięciu graniastosłupa i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



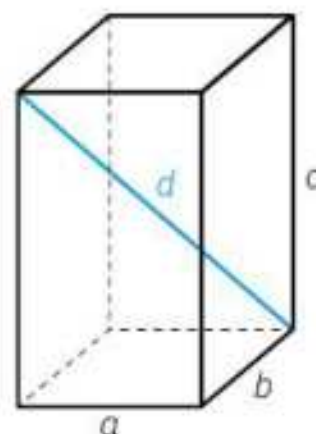
Graniastosłup prosty, którego podstawy są prostokątami, nazywamy **prostopadłościanem**.

a, b – krawędzie podstawy

c – krawędź boczna

d – przekątna prostopadłościanu

Prostopadłościan ma trzy wymiary: długość, szerokość i wysokość (a, b, c). Każdy prostopadłościan ma 6 ścian (4 ściany boczne i 2 podstawy), 8 wierzchołków i 12 krawędzi.



Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2ab + 2ac + 2bc$

Objętość prostopadłościanu: $V = abc$

Ćwiczenie 1.

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość prostopadłościanu, którego wymiary wynoszą: $\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm, 4 cm.

Rozwiązanie:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$P_c = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4$$

$$P_c = 8 + 8\sqrt{2} + 16\sqrt{2}$$

$$P_c = 8(1 + 3\sqrt{2}) \text{ cm}^2$$

$$V = abc$$

$$V = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4$$

$$V = 16 \text{ cm}^3$$

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wynosi $8(1 + 3\sqrt{2}) \text{ cm}^2$, a jego objętość wynosi 16 cm^3 .

wzór na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu

wstawiamy wartości do wzoru

obliczamy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu

upraszczamy zapis wyniku

wzór na objętość prostopadłościanu

wstawiamy wartości do wzoru

obliczamy objętość prostopadłościanu

Prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy **sześcianem**.

a – krawędź sześcianu

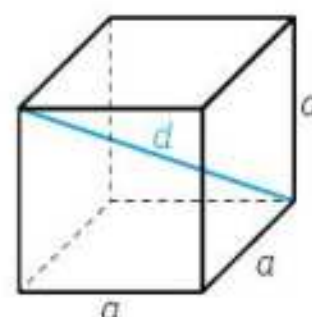
d – przekątna sześcianu

Sześcian jest szczególnym przypadkiem prostopadłościanu.

Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 6a^2$

Objętość sześcianu: $V = a^3$

Przekątna sześcianu: $d = a\sqrt{3}$



Ćwiczenie 2.

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach podstawy długości 3 cm i 4 cm oraz przekątnej długości 13 cm.

$$d_1^2 = a^2 + b^2$$

korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$d_1^2 = 4^2 + 3^2$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$d_1 = 5 \text{ cm}$$

obliczamy długość przekątnej podstawy

$$d^2 = d_1^2 + c^2$$

korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$13^2 = 5^2 + c^2$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$c = 12 \text{ cm}$$

obliczamy długość krawędzi c

$$V = abc$$

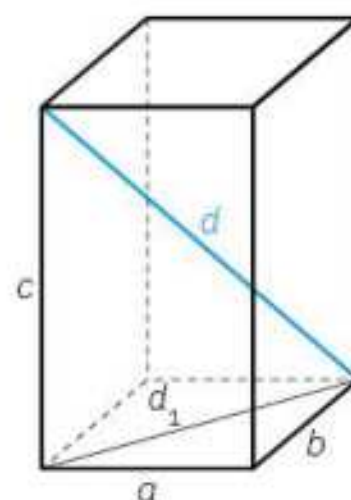
wzór na objętość prostopadłościanu

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 12$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$V = 144 \text{ cm}^3$$

obliczamy objętość prostopadłościanu



$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

wzór na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu

$$P_c = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 12 + 2 \cdot 4 \cdot 12$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$P_c = 192 \text{ cm}^2$$

obliczamy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu

Odpowiedź: Objętość tego prostopadłościanu wynosi 144 cm^3 , a jego pole powierzchni całkowitej wynosi 192 cm^2 .

Ćwiczenie 3.

Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, którego objętość wynosi 125 cm^3 .

Rozwiązanie:

$$V = a^3$$

wzór na objętość sześcianu

$$125 = a^3$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$a = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ cm}$$

obliczamy długość krawędzi sześcianu

$$P_c = 6a^2$$

wzór na pole powierzchni całkowitej sześcianu

$$P_c = 6 \cdot 5^2$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$P_c = 150 \text{ cm}^2$$

obliczamy pole powierzchni całkowitej sześcianu

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu wynosi 150 cm^2 .

Ćwiczenie 4.

Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość sześcianu o przekątnej o długości $3\sqrt{3} \text{ cm}$.

Rozwiązanie:

$$d = a\sqrt{3}$$

wzór na przekątną sześcianu o krawędzi a

$$3\sqrt{3} = a\sqrt{3}$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$a = 3 \text{ cm}$$

obliczamy długość krawędzi

$$P_b = 4a^2$$

wzór na pole powierzchni bocznej sześcianu

$$P_b = 4 \cdot 3^2$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$P_b = 36 \text{ cm}^2$$

obliczamy pole powierzchni bocznej sześcianu

$$V = a^3$$

wzór na objętość sześcianu

$$V = 3^3$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$V = 27 \text{ cm}^3$$

obliczamy objętość sześcianu

Odpowiedź: Pole powierzchni bocznej tego sześcianu wynosi 36 cm^2 , a jego objętość wynosi 27 cm^3 .

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa o polu podstawy P_p i polu powierzchni bocznej P_b jest równe:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Objętość graniastosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H jest równa:

$$V = P_p \cdot H$$

Ćwiczenie 5.

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego długość krawędzi podstawy wynosi 4 cm, a wysokość jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy.

Rozwiązanie:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

wzór na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot 3a$$

dostosowanie wzoru do warunków zadania

$$P_c = 2 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$P_c = 8(\sqrt{3} + 18) \text{ cm}^2$$

obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$V = P_p \cdot H$$

wzór na objętość graniastosłupa

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 3a$$

dostosowanie wzoru do warunków zadania

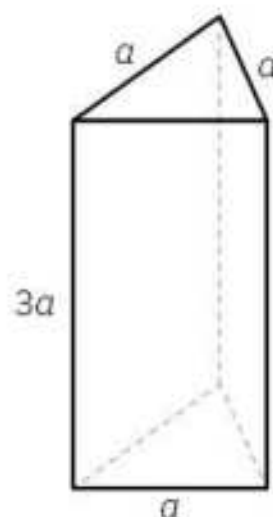
$$V = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot 4$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$V = 48\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

obliczamy objętość graniastosłupa

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej wynosi $8(\sqrt{3} + 18) \text{ cm}^2$, a objętość – $48\sqrt{3} \text{ cm}^3$.



Ćwiczenie 6.

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wysokość jest 3 razy dłuższa niż krawędź podstawy, a jego pole powierzchni całkowitej wynosi $6(\sqrt{3} + 6) \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

wzór na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$P_c = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot a \cdot 3a$$

dostosowanie wzoru do zadania, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy graniastosłupa

$$P_c = 6 \left(\frac{2a^2 \sqrt{3}}{4} + 3a^2 \right)$$

upraszczamy zapis wzoru

$$6 \left(\frac{2a^2 \sqrt{3}}{4} + 3a^2 \right) = 6(\sqrt{3} + 6)$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$\frac{2a^2 \sqrt{3}}{4} + 3a^2 = \sqrt{3} + 6$$

skracamy obustronnie równanie

$$\frac{a^2\sqrt{3}+6a^2}{2}=\sqrt{3}+6$$

upraszczamy równanie

$$\frac{\sqrt{3}+6}{2}a^2=\sqrt{3}+6$$

wylączamy a^2 poza ułamek

$$a^2=\frac{\sqrt{3}+6}{\frac{\sqrt{3}+6}{2}}$$

wyznaczamy a^2

$$a^2=2$$

obliczamy wartość a^2

$$a=\sqrt{2}\text{ cm}$$

obliczamy długość krawędzi podstawy

$$H=3\sqrt{2}\text{ cm}$$

obliczamy wysokość graniastosłupa

$$V=P_p\cdot H$$

wzór na objętość graniastosłupa

$$V=6\cdot\frac{(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 3\sqrt{2}$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$V=3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}$$

upraszczamy wartość wyrażenia

$$V=9\sqrt{6}\text{ cm}^3$$

obliczamy objętość graniastosłupa

Odpowiedź: Objętość tego graniastosłupa wynosi $9\sqrt{6}\text{ cm}^3$.

Ćwiczenie 7.

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa o podstawie trójkąta prostokątnego, którego długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi. Wysokość graniastosłupa jest dwukrotnością najdłuższego boku trójkąta. Długości wszystkich krawędzi graniastosłupa wyrażone są w decymetrach.

Rozwiązanie:

$$n, n+1, n+2$$

długości boków trójkąta będące kolejnymi liczbami naturalnymi

$$(n+2)^2=n^2+(n+1)^2$$

korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$n^2+4n+4=n^2+n^2+2n+1$$

korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$n^2-2n-3=0$$

redukujemy jednomiany podobne

$$\Delta=4+12=16$$

obliczamy wyróżnik równania kwadratowego

$$n_1=-1\notin N \text{ i } n_2=3\in N$$

obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$3\text{ dm}, 4\text{ dm}, 5\text{ dm}$$

długości boków trójkąta

$$H=2\cdot 5\text{ dm}=10\text{ dm}$$

wysokość graniastosłupa

$$P_c=2P_p+P_b$$

wzór na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$P_c=2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b+H(a+b+c)$$

dostosowanie wzoru do zadania

$$P_c=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4+10\cdot(3+4+5)$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$P_c=12+10\cdot 12=132\text{ (dm}^2\text{)}$$

obliczamy pole powierzchni całkowitej

$$V = P_p \cdot H$$

wzór na objętość graniastosłupa

$$V = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10$$

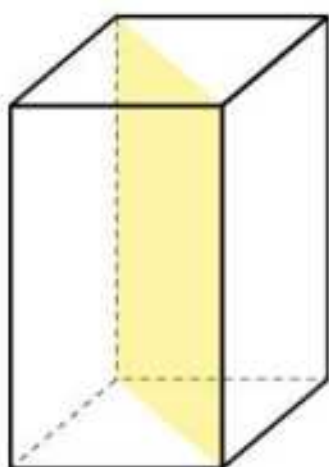
wstawiamy wartości do wzoru

$$V = 6 \cdot 10 = 60 \text{ (dm}^3\text{)}$$

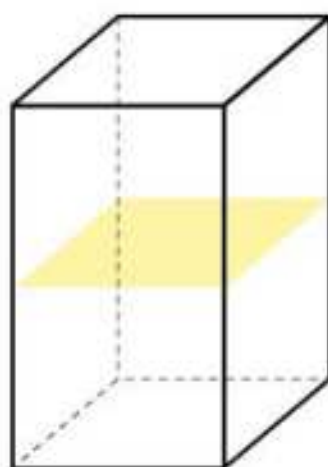
obliczamy objętość graniastosłupa

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wynosi 132 dm^2 , a jego objętość – 60 dm^3 .

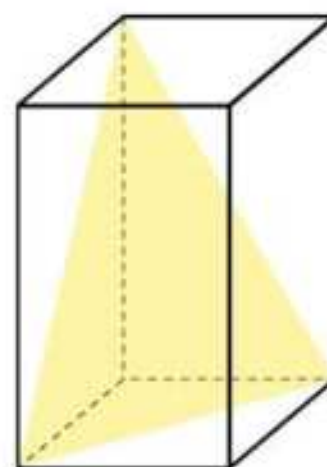
Przekrojem graniastosłupa nazywamy część wspólną graniastosłupa i płaszczyzny (przekrój poprzeczny – płaszczyzna przecina wszystkie krawędzie boczne, przekrój przekątny – płaszczyzna przechodzi przez dwie krawędzie nienależące do jednej ściany).



przekrój przekątny



przekrój poprzeczny



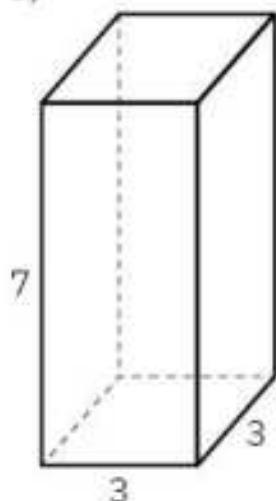
przekrój po przekątnych sąsiednich ścian i podstawy



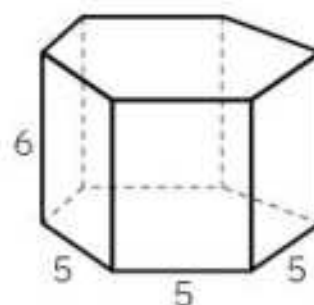
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

- Podaj, ile krawędzi, ścian i wierzchołków ma graniastosłup:
a) pięciokątny, b) jedenastokątny, c) stukątny.
- Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi o długości 5 cm.
- Oblicz pole powierzchni i objętość prostopadłościanu o krawędziach o długości:
 $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$.
- Oblicz objętości i pola powierzchni całkowitej narysowanych graniastosłupów prawidłowych.

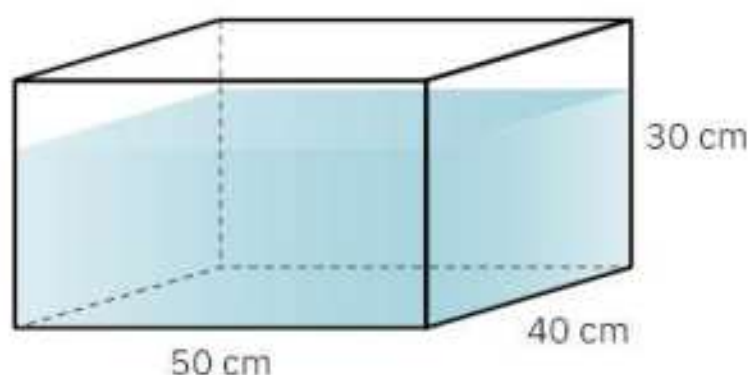
a)



b)



5. Przekrój przekątny graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadratem o polu równym 36 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.
6. Bok sześcianu zwiększono o 10% jego długości. Oblicz, o ile procent zwiększy się jego objętość.
7. Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa $180\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Wysokość wynosi 5 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.
8. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 5 cm, a wysokość ma długość 10 cm. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego graniastosłupa.
9. Oblicz, jak zmieni się objętość prostopadłościanu, gdy długość jednej z krawędzi zwiększymy o 50%, długość drugiej zwiększymy 2 razy, a wysokość zmniejszymy 3 razy.
10. Akwarium w kształcie prostopadłościanu ma wymiary podane na rysunku.

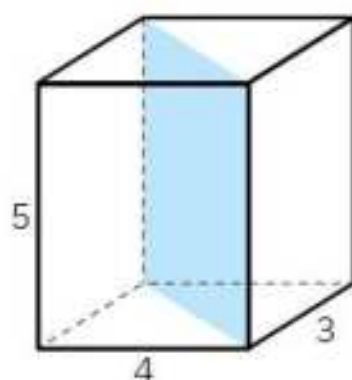


Ile dm^2 szkła potrzeba na wykonanie tego akwarium?

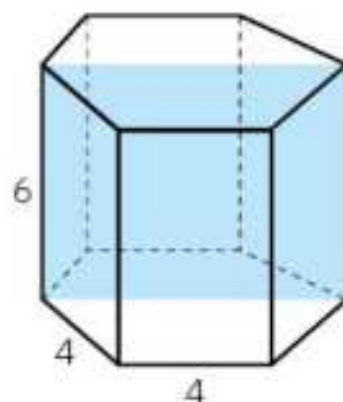
11. W prostopadłościanie przekątna podstawy ma długość $3\sqrt{6} \text{ cm}$, a przekątna jednej z dwóch kwadratowych ścian bocznych wynosi 6 cm. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.
12. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12 cm. Jaką długość ma przekątna tego graniastosłupa, jeżeli suma długości wszystkich krawędzi jest równa $48(2 + \sqrt{6}) \text{ cm}$?
- 13*. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, wiedząc, że po zwiększeniu jego krawędzi o 1 cm otrzymamy sześcian o objętości o 61 cm^3 większej.
14. Ile płytek chodnikowych o wymiarach 25 cm, 25 cm i grubości 5 cm potrzeba na ułożenie chodnika o długości 200 m i szerokości 3 m? Jaką objętość zajmą te płytki ułożone w stos?

15. Oblicz pola przekrojów graniastosłupów zaznaczonych na rysunkach.

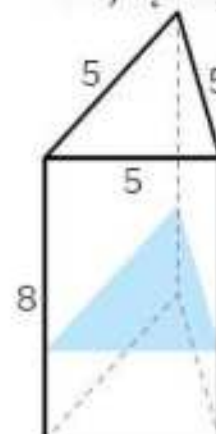
a) czworokątnego
o podstawie prostokąta



b) prawidłowego
sześciokątnego



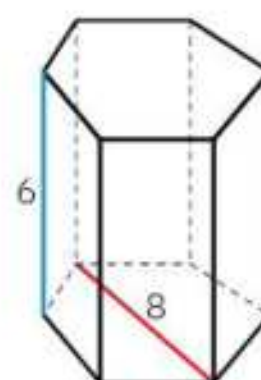
c) prawidłowego
trójkątnego



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Ile wynosi suma krawędzi narysowanego graniastosłupa?

- A. 84
- B. 60
- C. 14
- D. 54

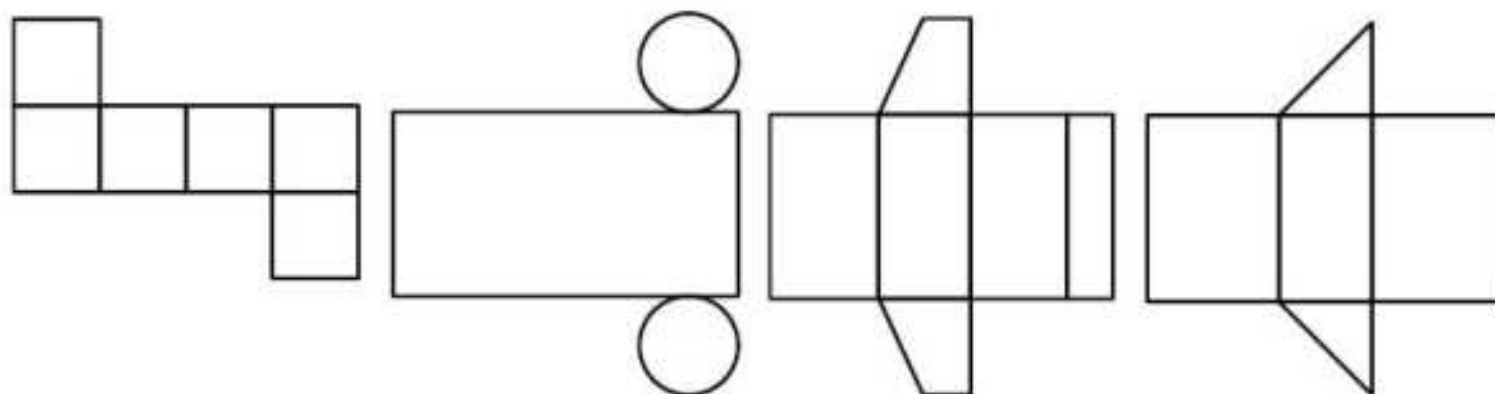


2. Graniastosłup ma 36 krawędzi. Jaki wielokąt jest w podstawie?

- A. czworokąt
- B. sześciokąt
- C. ośmiokąt
- D. dwunastokąt

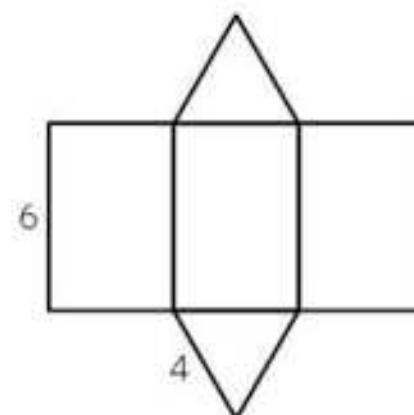
3. Który z rysunków nie przedstawia siatki graniastosłupa?

- A.
- B.
- C.
- D.



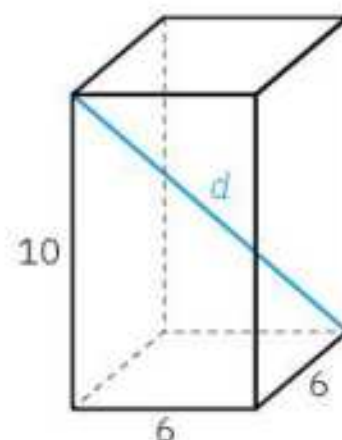
4. Ile wynosi pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego, którego siatkę narysowano poniżej?

- A. $4\sqrt{3} + 96$
- B. $8\sqrt{3} + 96$
- C. $8\sqrt{3} + 72$
- D. $4\sqrt{3} + 25$



5. Ile wynosi długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku poniżej?

- A. $6\sqrt{2}$
B. $2\sqrt{3}$
C. $2\sqrt{43}$
D. $4\sqrt{43}$



1.2. Kąt między prostą a płaszczyzną w przestrzeni

Płaszczyzna

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.



Przez trzy różne punkty nienależące do jednej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

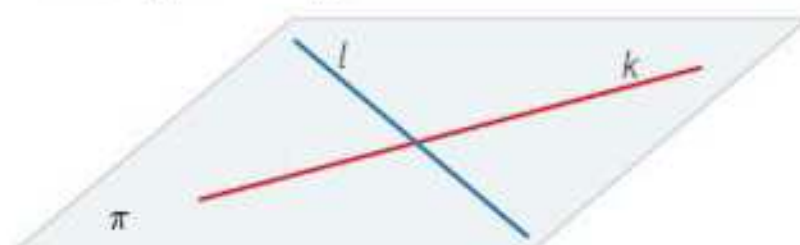


Płaszczyznę wyznaczają również:

- a) prosta k i punkt A nienależący do niej:



- b) dwie proste k i l , które się przecinają:



c) dwie proste równoległe k i l :

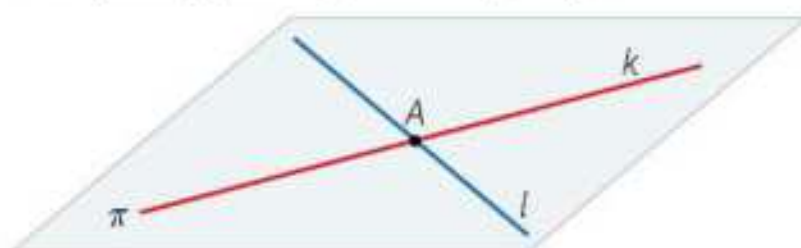


Przestrzeń

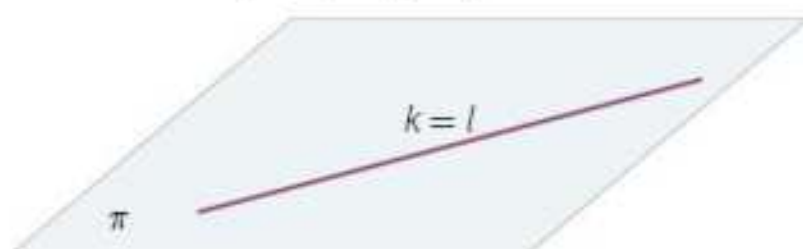
Wzajemne położenie dwóch prostych

W przestrzeni są trzy możliwości położenia prostych. Proste mogą być:

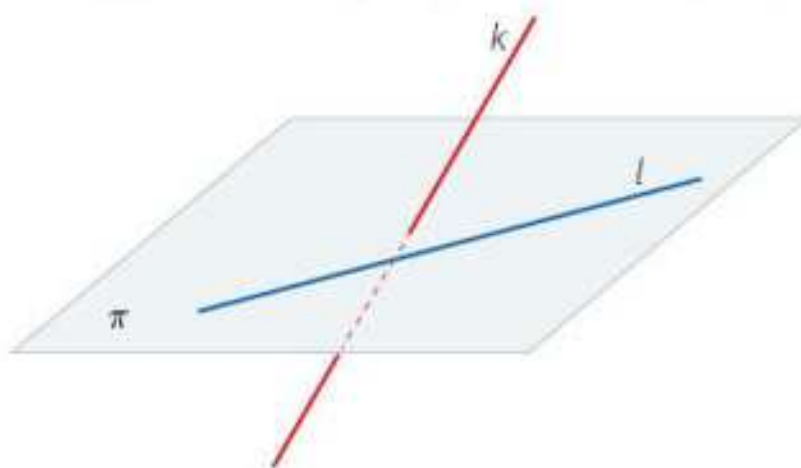
1. przecinające się – wtedy mają jeden punkt wspólny,



2. równoległe – wtedy nie mają punktów wspólnych i należą do jednej płaszczyzny lub pokrywają się,



3. skośne – wtedy nie mają punktów wspólnych i nie należą do jednej płaszczyzny.



Ćwiczenie 1.

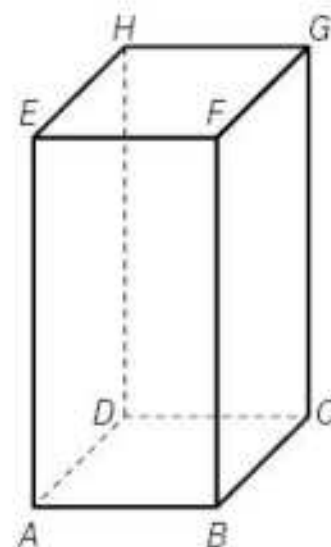
Na modelu prostopadłościanu $ABCDEFGH$ wskaż pary prostych równoległych, przecinających się i skośnych.

Na przykład:

EF i AB , HD i CG – proste równoległe

EA i AB , CG i GH – proste przecinające się

AB i HD , EH i DC – proste skośne



Wzajemne położenie płaszczyzn

Dwie płaszczyzny w przestrzeni:

1. przecinają się, a ich wspólne punkty tworzą prostą k , którą nazywamy krawędzią przecięcia,



2. są równoległe i różne, wtedy nie mają punktów wspólnych,



3. pokrywają się.



Ćwiczenie 2.

Na modelu prostopadłościanu $ABCDEFGH$ wskaż dwie płaszczyzny:

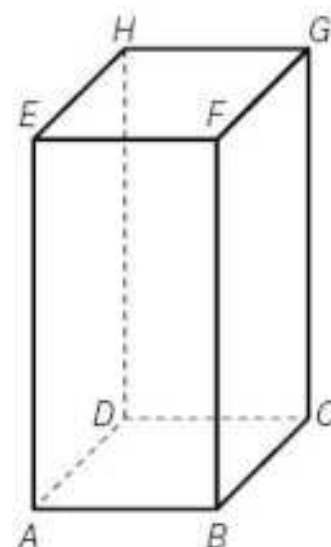
a) równoległe,

b) przecinające się.

Na przykład:

a) $ABCD$ i $EFGH$, $ABFE$ i $CDHG$ – płaszczyzny równoległe

b) $ABCD$ i $DCGH$ – płaszczyzny przecinające się wzdłuż krawędzi DC



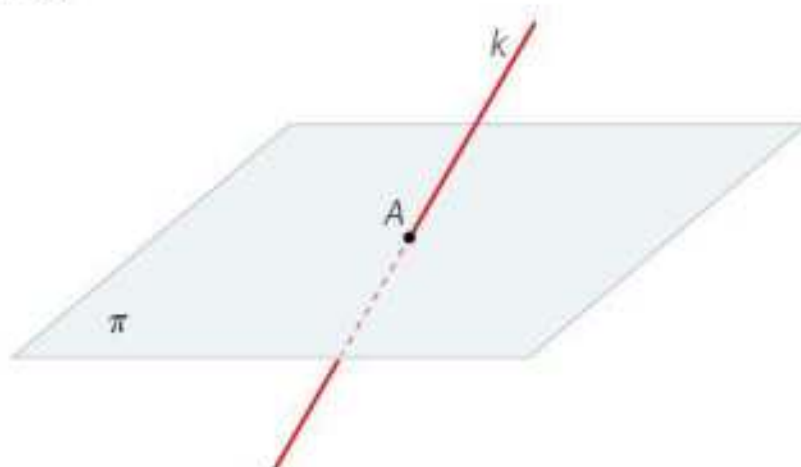
Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Prosta i płaszczyzna w przestrzeni mogą mieć następujące położenia:

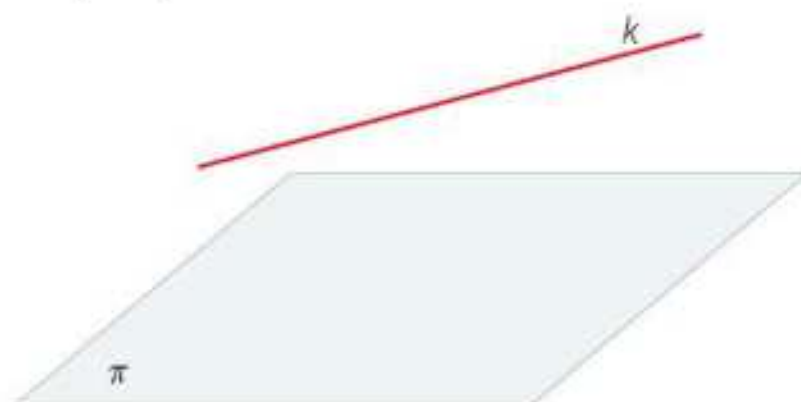
1. prosta k należy do płaszczyzny – wszystkie punkty tej prostej są jednocześnie punktami płaszczyzny,



2. prosta k przecina płaszczyznę w jednym punkcie – punkt A jest punktem wspólnym prostej i płaszczyzny,



3. prosta k jest równoległa do płaszczyzny, ale nie należy do niej – prosta i płaszczyzna nie mają punktów wspólnych.



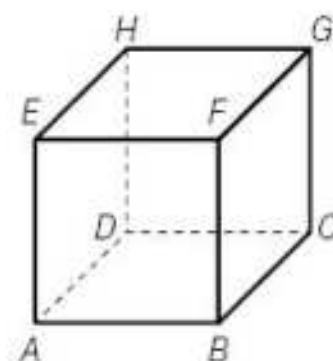
Ćwiczenie 3.

Na modelu sześcianu $ABCDEFGH$ wskaż prostą:

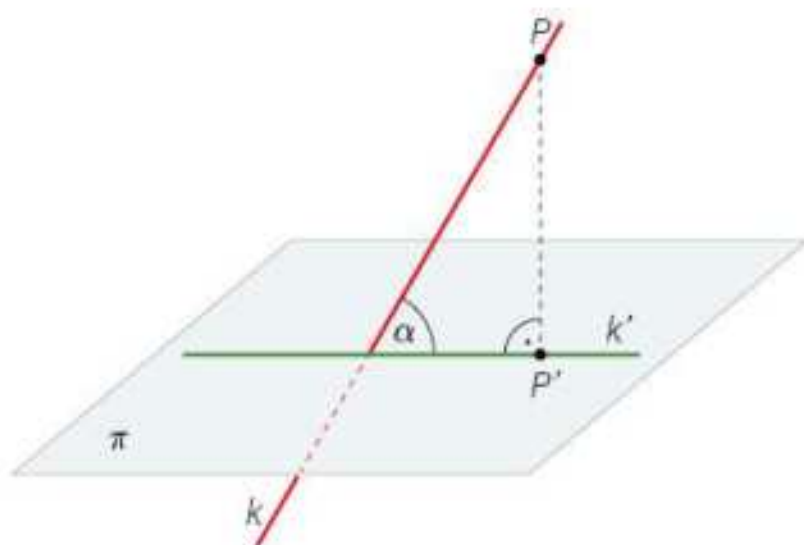
- a) należącą do płaszczyzny $EFGH$,
- b) równoległą do płaszczyzny $ABCD$,
- c) przecinającą płaszczyznę $BCGF$.

Na przykład:

- a) Prosta EF należy do płaszczyzny $EFGH$.
- b) Prosta FG jest równoległa do płaszczyzny $ABCD$.
- c) Prosta AB przecina płaszczyznę $BCGF$.

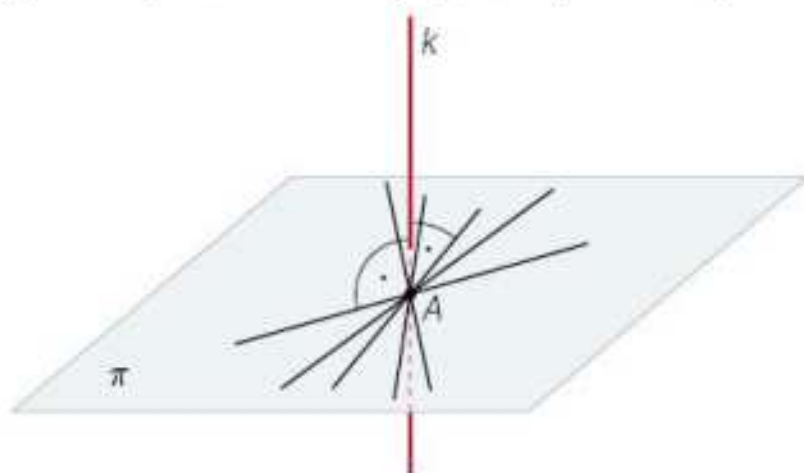


Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny



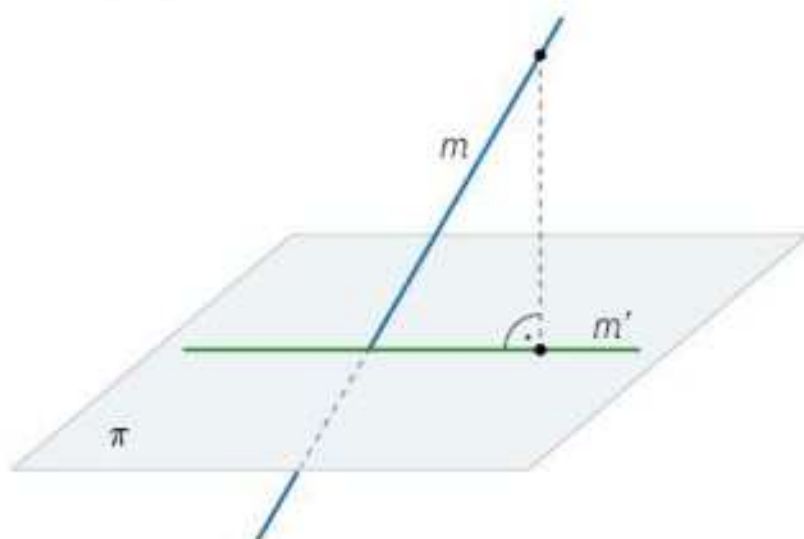
Wiemy, że prosta może mieć jeden punkt wspólny z płaszczyzną – prosta przebija płaszczyznę w tym punkcie.

W szczególnym przypadku prosta może być prostopadła do płaszczyzny.

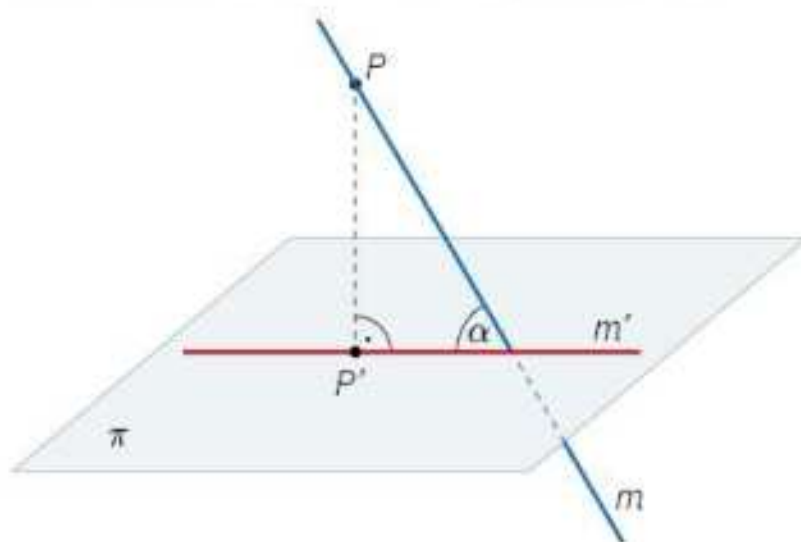


Prosta przecinająca płaszczyznę w punkcie A jest prostopadła do płaszczyzny, jeśli jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie i przechodzącej przez punkt.

Rzutem prostokątnym prostej m na płaszczyznę jest prosta m' , gdy prosta m nie jest prostopadła do tej płaszczyzny.



Kątem nachylenia prostej m do płaszczyzny nazywamy kąt ostry α zawarty między prostą m i jej rzutem prostokątnym m' na tę płaszczyznę.



Ćwiczenie 4.

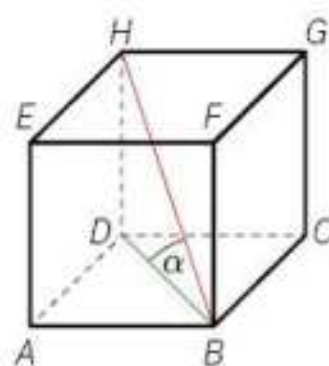
Znajdź kąt nachylenia przekątnej sześcianu $ABCDEFGH$ do płaszczyzny jego podstawy.

Rozwiązanie:

BH – przekątna sześcianu

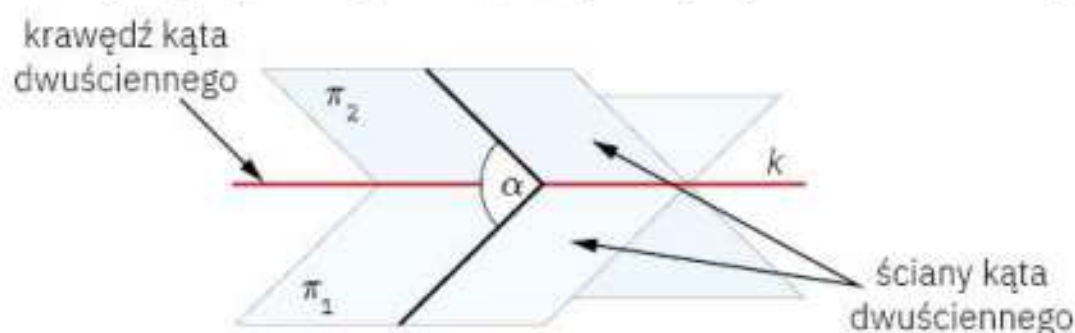
BD – przekątna podstawy sześcianu

α – kąt nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy



Dwie przecinające się płaszczyzny dzielą przestrzeń na cztery części.

Każdą z tych części przestrzeni, ograniczoną dwiema półpłaszczyznami o wspólnej krawędzi wraz z tymi półpłaszczyznami, nazywamy **kątem dwuściennym**.



α – kąt liniowy kąta dwuściennego



Kątem liniowym kąta dwuściennego nazywamy kąt płaski α otrzymany przez przecięcie kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego.

Ćwiczenie 5.

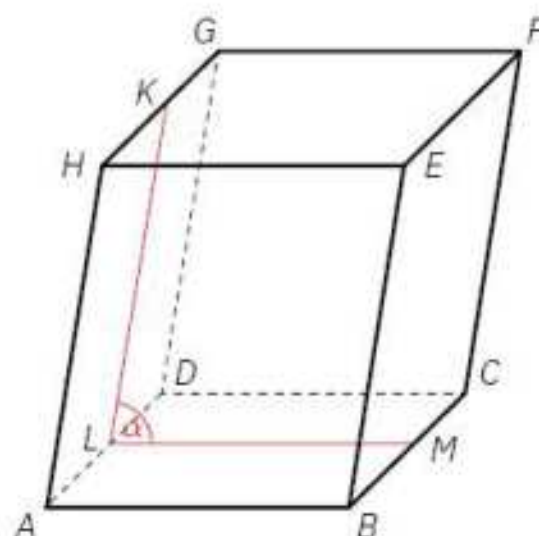
Zaznacz kąt zawarty między ścianą boczną $ADGH$ a podstawą $ABCD$ graniastosłupa pochylego $ABCDEFGH$.

Rozwiązanie:

KL – odcinek łączący środki boków GH i AD ściany bocznej $ADGH$

ML – odcinek łączący środki boków BC i AD podstawy $ABCD$

α – kąt pomiędzy ścianą boczną a płaszczyzną podstawy



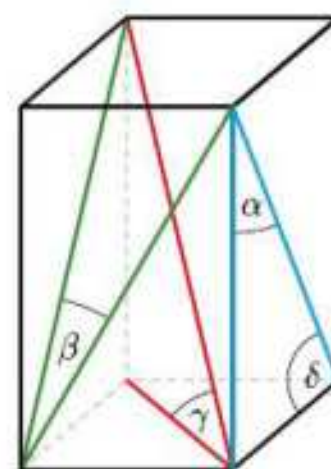
W graniastosłupie możemy wskazać również kąty zawarte pomiędzy prostą i płaszczyzną oraz dwoma prostymi.

α – kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną

β – kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych

γ – kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy

δ – kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do krawędzi podstawy



Ćwiczenie 6.

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym zaznacz kąt liniowy kąta dwuściennego między ścianami bocznymi oraz kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych.

Rozwiązanie:

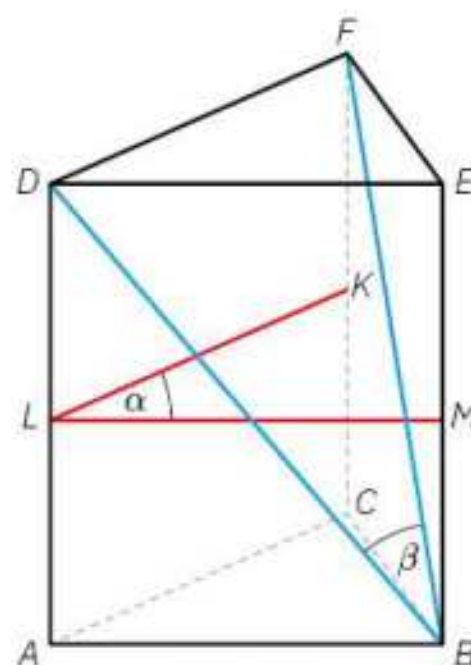
Wykonujemy rysunek graniastosłupa $ABCDEF$.

KL, ML – odcinki łączące środki krawędzi bocznych

α – kąt liniowy kąta dwuściennego

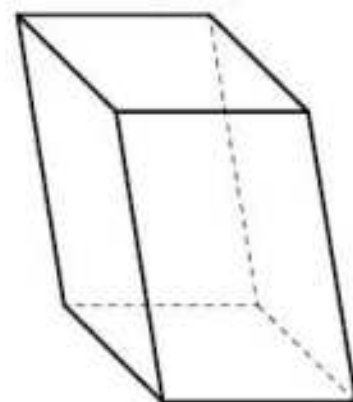
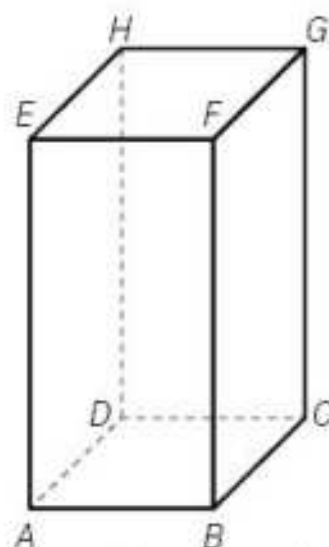
DB, FB – przekątne sąsiednich ścian bocznych

β – kąt między przekątnymi ścian bocznych

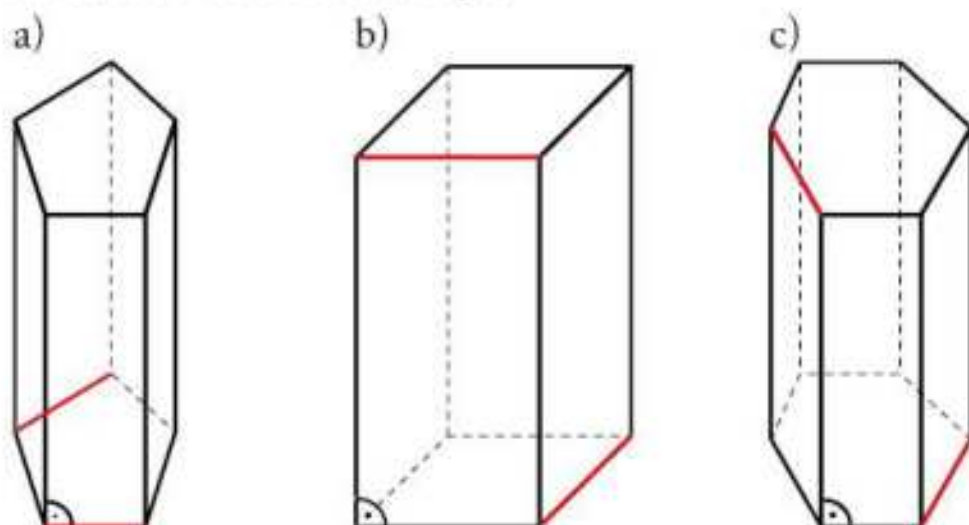


ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

- Wskaż w sali lekcyjnej:
 - dwie proste: przecinające się, równoległe, skośne,
 - plaszczynę wyznaczoną przez: trzy punkty, punkt i prostą, dwie proste przecinające się, dwie proste równoległe,
 - dwie płaszczyzny: równoległe, przecinające się,
 - plaszczynę i prostą do niej równoległą,
 - plaszczynę i prostą przecinającą tę płaszczyznę.
- Na modelu graniastosłupa $ABCDEFGH$ wskaż:
 - prostą równoległą do płaszczyzny $ABCD$,
 - prostą prostopadłą do płaszczyzny $ABCD$,
 - prostą należącą do płaszczyzny $ABCD$,
 - prostą równoległą do prostej BC ,
 - prostą prostopadłą do prostej BC ,
 - prostą skośną do prostej BC ,
 - płaszczyznę równoległą do płaszczyzny $ABCD$,
 - płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny $ABCD$.
- Na płaszczyźnie zaznacz punkty A, B, C nienależące do jednej prostej, a poza płaszczyzną punkt D . Wypisz wszystkie pary prostych skośnych.
- Wskaż w sali lekcyjnej takie trzy proste nienależące do jednej płaszczyzny, z których każde dwie się przecinają.
- Ile krawędzi ma pudełko zapalek? Wybierz jedną z nich. Do ilu z pozostałych jest ona równoległa? Ile przecina? Do ilu jest skośna?
 - Na jednej ze ścian pudełka narysuj przekątną. Do ilu krawędzi jest ona skośna?
- Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 4 cm, a suma długości wszystkich krawędzi $16\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.
- Przerysuj rysunek do zeszytu i zaznacz:
 - kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy,
 - kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy,
 - kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy,
 - kąt między ścianami bocznymi.
- W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy wynosi 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa, jeżeli przekątna tej bryły jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° .



9. Określ wzajemne położenie prostych zawierających wyróżnione krawędzie zaznaczone na modelach brył.



10. Narysuj graniastosłup prawidłowy sześciokątny i zaznacz w nim wskazane kąty.
 α – kąt dwuścienny, który tworzy ściana boczna z podstawą
 β – kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi
11. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt ostrokątny ABC . Zaznacz kąt nachylenia prostej DC do płaszczyzny $CBEF$.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

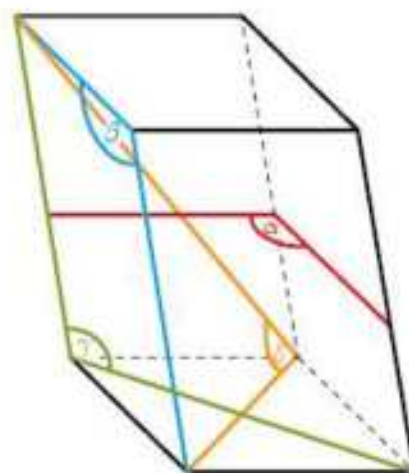
- Dokończ zdanie. Jeżeli dwie płaszczyzny, które się nie pokrywają, mają część wspólną, to jest nią:

A. punkt	C. żadna z pozostałych odpowiedzi
B. odcinek	D. prosta
- Dokończ zdanie. Przez trzy punkty niewspółliniowe przechodzi:

A. jedna płaszczyzna równoległa do płaszczyzny zawierającej prostą wyznaczoną przez te punkty
B. dokładnie jedna prosta
C. dokładnie jedna płaszczyzna
D. jedna lub dwie płaszczyzny
- Dokończ zdanie. Kąt między krawędzią boczną graniastosłupa a płaszczyzną jego podstawy to kąt:

A. α
B. β
C. γ
D. δ
- W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy wynosi 10 cm, a krawędzi bocznej 65 cm. Ile wynosi miara kąta między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną jego podstawy z dokładnością do 1° ?

A. 14°	B. 78°	C. 24°	D. 10°
---------------	---------------	---------------	---------------



1.3. Ostrosłupy

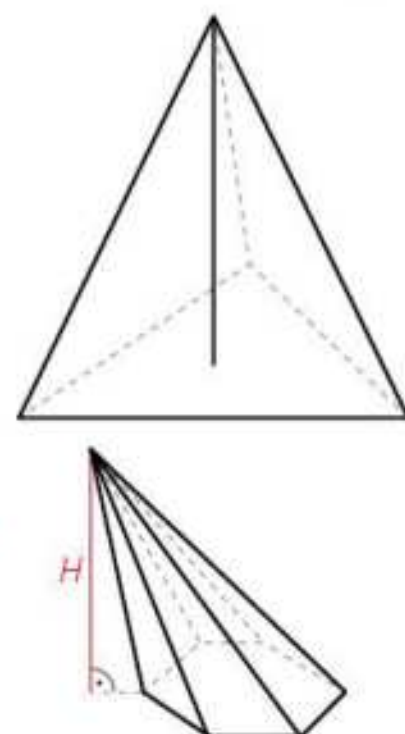
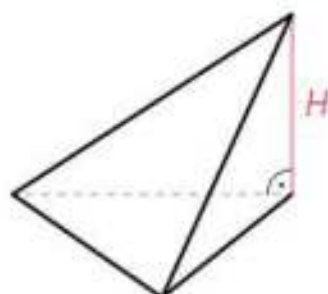
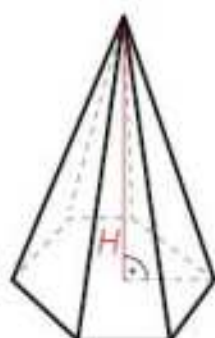
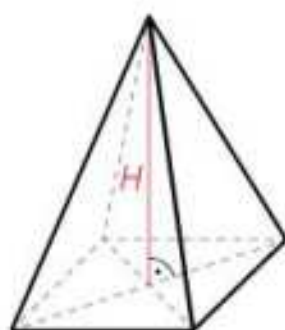


Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana (podstawa ostrosłupa) jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany (ściany boczne ostrosłupa) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Wspólny wierzchołek ścian bocznych ostrosłupa to **wierzchołek ostrosłupa**.

Rzut prostokątny wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy nazywamy **spodkiem wysokości ostrosłupa**.

Wysokością ostrosłupa jest odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa ze spodkiem wysokości ostrosłupa.



Ostrosłup, którego podstawą jest n -kąt, nazywamy **ostrosłupem n -kątnym**. W takim ostrosłupie jest: $n + 1$ wierzchołków, $n + 1$ ścian oraz $2n$ krawędzi.

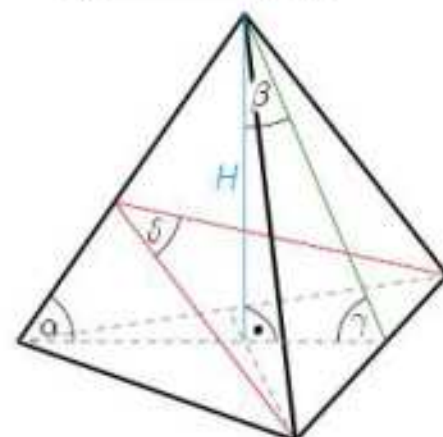
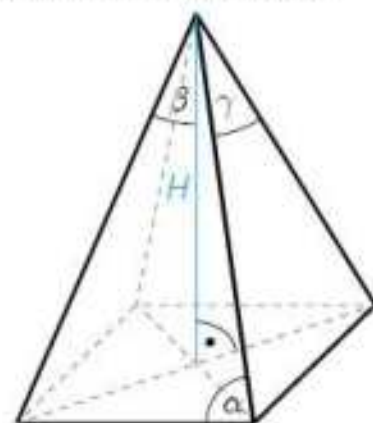
Suma wszystkich ścian bocznych ostrosłupa tworzy **powierzchnię boczną ostrosłupa**. Suma powierzchni bocznej i podstawy ostrosłupa to **powierzchnia całkowita ostrosłupa**.

W ostrosłupie możemy wskazać kąty między dwiema prostymi:

- α – kąt między krawędzią podstawy a krawędzią boczną
- β – kąt między krawędzią boczną a wysokością ostrosłupa
- γ – kąt między sąsiednimi krawędziami bocznymi ostrosłupa

W ostrosłupie możemy również wskazać kąty zawarte między prostą a płaszczyzną oraz kąty dwuścienne:

- α – kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
- β – kąt nachylenia wysokości ostrosłupa do ściany bocznej
- γ – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
- δ – kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa

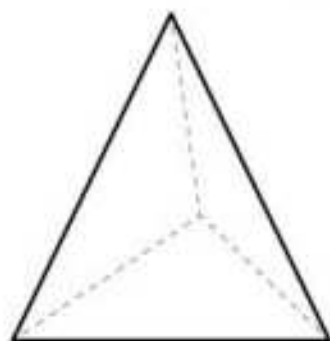


Ostrosłup nazywamy **prawidłowym**, gdy jego podstawą jest wielokąt foremny i spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

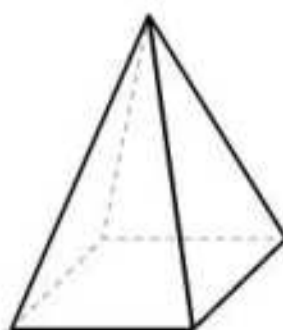


Jeżeli ostrosłup jest prawidłowy, to wszystkie jego krawędzie boczne są równe, wszystkie kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy mają równe miary i wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

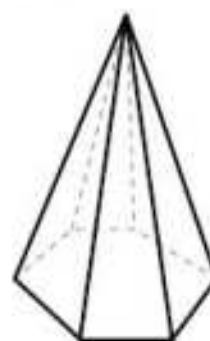
Nazwa ostrosłupa zależy od tego, jaki wielokąt znajduje się w jego podstawie.



ostrosłup trójkątny

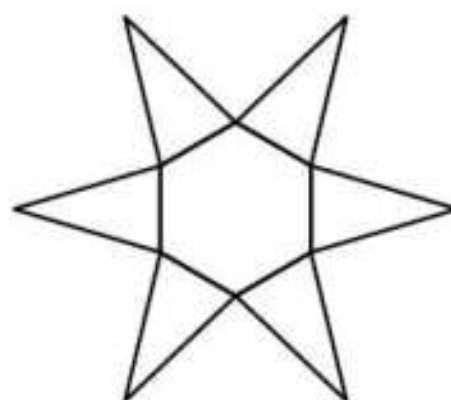
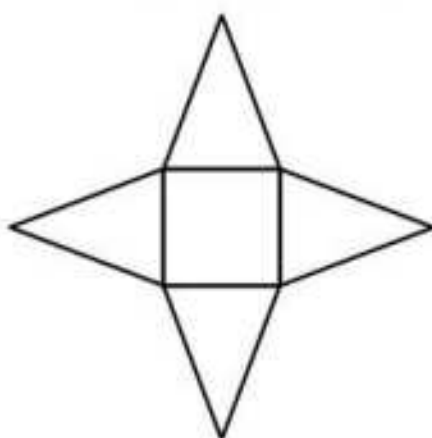
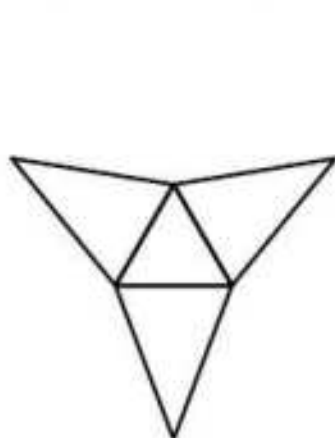


ostrosłup czworokątny



ostrosłup sześciokątny

Po rozcięciu ostrosłupa i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa o polu podstawy P_p i polu powierzchni bocznej P_b jest równe:

$$P_c = P_p + P_b$$

Objętość ostrosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H jest równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

Ćwiczenie 1.

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli wiadomo, że krawędź podstawy jest równa 4 cm, a wysokość ściany bocznej ma 6 cm.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$$P = a^2 \quad \text{zapisujemy wzór na pole kwadratu}$$

$$P_p = 4^2 \quad \text{obliczamy pole podstawy}$$

$$P_p = 16 \text{ cm}^2 \quad \text{pole podstawy}$$

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \quad \text{obliczamy pole powierzchni bocznej}$$

$$P_b = 48 \text{ cm}^2 \quad \text{pole powierzchni bocznej}$$

$$P_c = P_p + P_b \quad \text{zapisujemy wzór na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa}$$

$$P_c = 16 + 48 \quad \text{wstawiamy do wzoru obliczone wartości}$$

$$P_c = 64 \text{ cm}^2 \quad \text{pole powierzchni całkowitej ostrosłupa}$$

$$H^2 + 2^2 = 6^2 \quad \text{korzystamy z twierdzenia Pitagorasa}$$

$$H = \sqrt{36 - 4} \quad \text{obliczamy wysokość ostrosłupa}$$

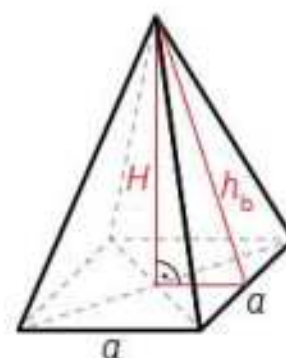
$$H = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)} \quad \text{wysokość ostrosłupa}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H \quad \text{zapisujemy wzór na objętość ostrosłupa}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4\sqrt{2} \quad \text{wstawiamy wielkości do wzoru}$$

$$V = \frac{64\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3 \quad \text{objętość ostrosłupa}$$

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa wynosi 64 cm^2 , a jego objętość $\frac{64\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$.

**Ćwiczenie 2.**

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 18 cm, a miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi 60° . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

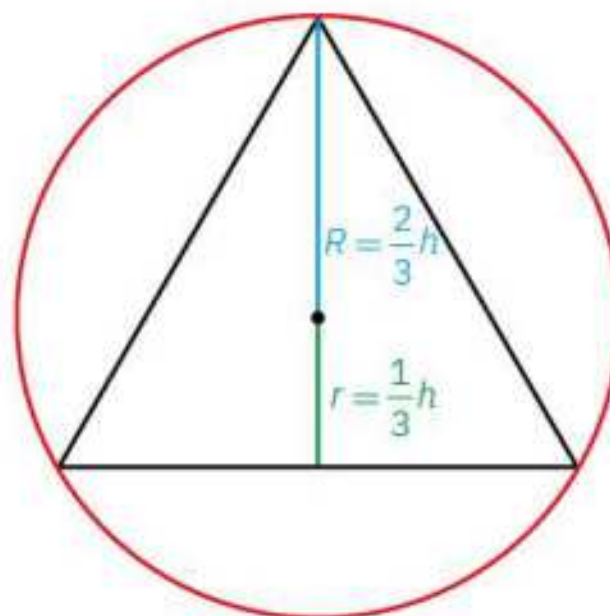
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{zapisujemy wzór na wysokość podstawy}$$

$$h = \frac{18\sqrt{3}}{2} \quad \text{obliczamy wysokość podstawy}$$

$$h = 9\sqrt{3} \text{ cm} \quad \text{wysokość podstawy}$$

$$r = \frac{1}{3}h \quad \text{zapisujemy wzór na długość odcinka } r$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \quad \text{obliczamy długość odcinka } r$$



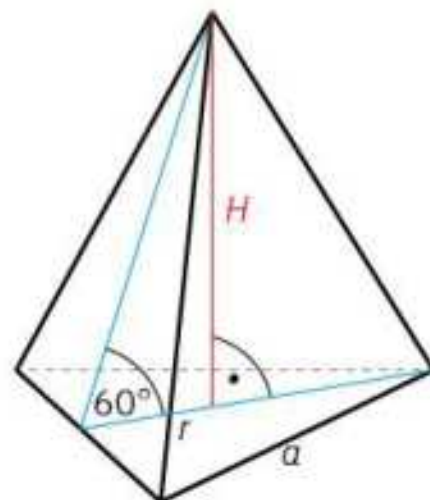
$r = 3\sqrt{3}$ cm długość odcinka r

$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{r}$ obliczamy wysokość ostrosłupa, korzystając z funkcji tangens

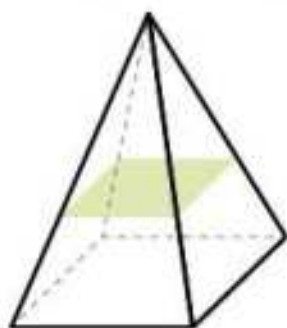
$\sqrt{3} = \frac{H}{3\sqrt{3}}$ wstawiamy wartości do wzoru

$H = 9$ cm wysokość ostrosłupa

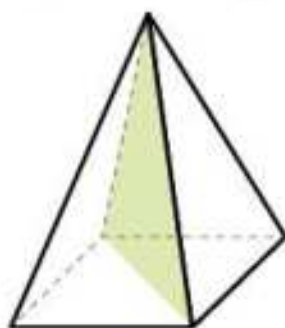
Odpowiedź: Wysokość tego ostrosłupa jest równa 9 cm.



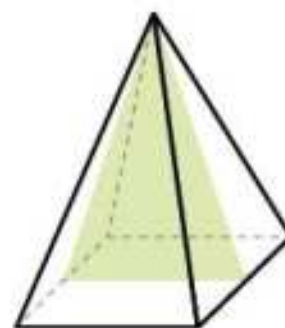
Przekrojem ostrosłupa nazywamy część wspólną ostrosłupa i płaszczyzny. Oto pewne przekroje ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.



Przekrój płaszczyzną przecinającą wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa i równoległą do podstawy.



Przekrój płaszczyzną, która przechodzi przez dwie krawędzie boczne nie należące do jednej ściany ostrosłupa.



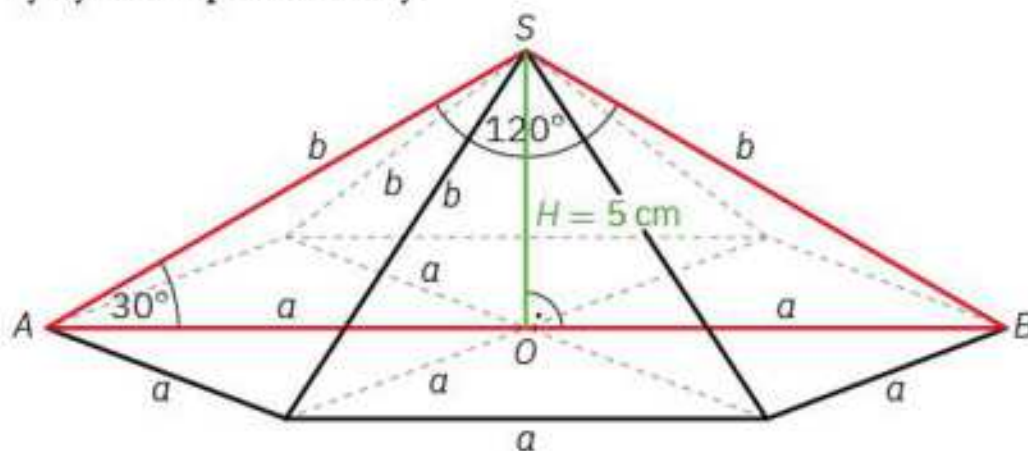
Przekrój płaszczyzną, która przechodzi przez wysokości przeciwległych ścian bocznych ostrosłupa.

Ćwiczenie 3.

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę 120° , a wysokość tego ostrosłupa jest równa 5 cm. Oblicz sumę długości krawędzi ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



$$|\angle SAB| = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2}$$

$$|\angle SAB| = 30^\circ$$

obliczamy miarę kąta SAB (trójkąt ABS jest równoramienny)
miara kąta SAB

$$\sin 30^\circ = \frac{H}{b}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{b}$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{H}{a}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{a}$$

$$a = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$L = 6a + 6b$$

$$L = 6 \cdot 5\sqrt{3} \text{ cm} + 6 \cdot 10 \text{ cm}$$

$$L = (30\sqrt{3} + 60) \text{ cm}$$

Odpowiedź: Suma długości krawędzi tego ostrosłupa jest równa $(30\sqrt{3} + 60) \text{ cm}$.

zapisujemy zależność pozwalającą obliczyć długość krawędzi bocznej ostrosłupa

obliczamy długość krawędzi bocznej ostrosłupa

długość krawędzi bocznej ostrosłupa

zapisujemy zależność pozwalającą obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa

obliczamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa

długość krawędzi podstawy ostrosłupa

zapisujemy zależność pozwalającą obliczyć sumę długości krawędzi ostrosłupa

obliczamy sumę długości krawędzi ostrosłupa

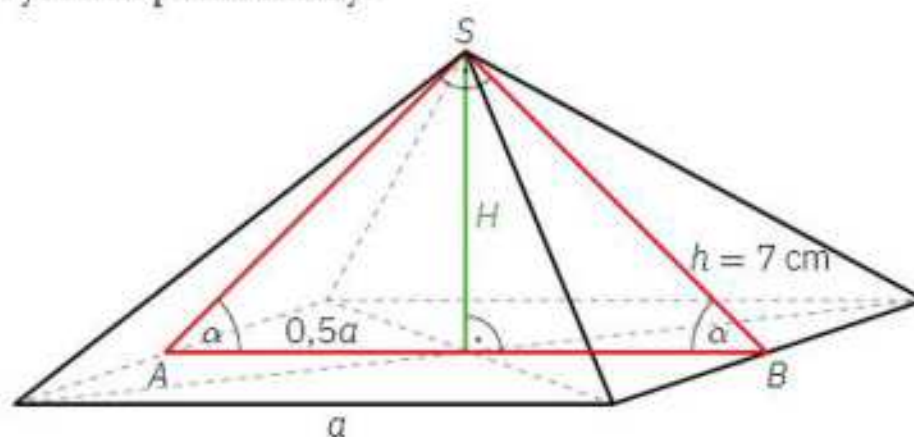
suma długości krawędzi ostrosłupa

Ćwiczenie 4.

Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wysokości przeciwległych ścian bocznych ostrosłupa. Otrzymany przekrój jest trójkątem prostokątnym równoramiennym o przyprostokątnej 7 cm. Oblicz kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz krawędź podstawy ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



α – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa

$$\alpha = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2}$$

obliczamy miarę kąta α (trójkąt ABS jest prostokątny równoramienny)

$$\alpha = 45^\circ$$

miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa

$$\cos 45^\circ = \frac{0,5a}{h}$$

zapisujemy zależność pozwalającą obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{0,5a}{7}$$

obliczamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa

$$a = 7\sqrt{2} \text{ cm}$$

długość krawędzi podstawy ostrosłupa

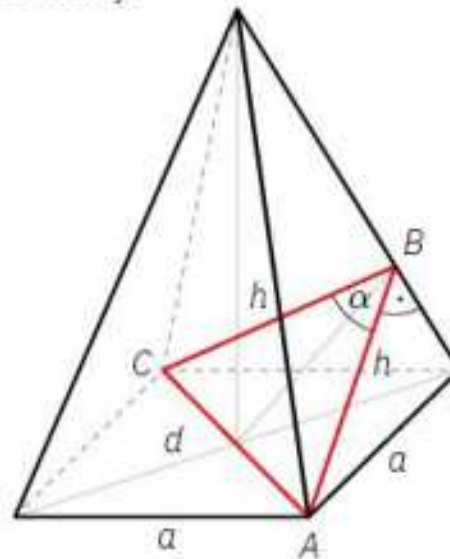
Odpowiedź: Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa ma miarę 45° , a długość krawędzi podstawy ostrosłupa wynosi $7\sqrt{2}$ cm.

Ćwiczenie 5.

Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ma miarę 60° , a wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzona na krawędź boczną jest równa 6 cm. Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



$\alpha = 60^\circ$ – kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa

$|\angle CAB| = |\angle ACB| = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2}$ obliczamy miary kątów trójkąta ABC

$$|\angle CAB| = |\angle ACB| = 60^\circ$$

Skoro wszystkie kąty trójkąta ABC mają równe miary, to trójkąt ten jest trójkątem równobocznym. Wobec tego $d = h$.

$$d = 6 \text{ cm}$$

przekątna podstawy ostrosłupa

$$P_p = \frac{d^2}{2}$$

zapisujemy wzór na pole podstawy ostrosłupa

$$P_p = \frac{6^2}{2}$$

obliczamy pole podstawy ostrosłupa

$$P_p = 18 \text{ cm}^2$$

pole podstawy ostrosłupa

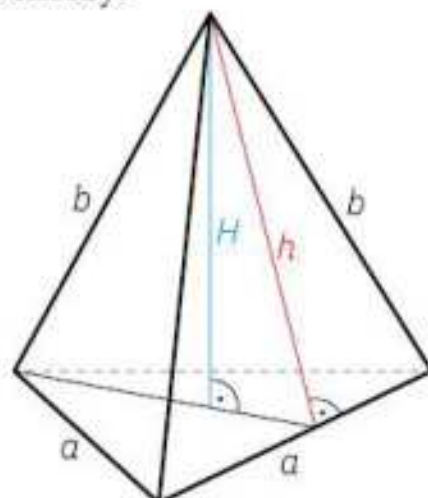
Odpowiedź: Pole podstawy ostrosłupa wynosi 18 cm^2 .

Ćwiczenie 6.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 4 cm wynosi $(4\sqrt{3} + 30) \text{ cm}^2$. Oblicz wysokość ściany bocznej ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



$$P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

zapisujemy wzór na pole podstawy ostrosłupa

$$P_p = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4}$$

obliczamy pole podstawy ostrosłupa

$$P_p = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

pole podstawy ostrosłupa

$$P_b = P_c - P_p$$

zapisujemy sposób wyznaczenia pola powierzchni bocznej ostrosłupa

$$P_b = (4\sqrt{3} + 30) \text{ cm}^2 - 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad \text{obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa}$$

$$P_b = 30 \text{ cm}^2$$

pole powierzchni bocznej ostrosłupa

$$P_{\Delta} = 30 \text{ cm}^2 : 3$$

obliczamy pole jednej ściany bocznej ostrosłupa

$$P_{\Delta} = 10 \text{ cm}^2$$

pole jednej ściany bocznej ostrosłupa (pole trójkąta)

$$P_{\Delta} = \frac{ah}{2}$$

zapisujemy wzór na pole trójkąta

$$10 = \frac{4 \cdot h}{2}$$

obliczamy wysokość ściany bocznej ostrosłupa

$$h = 5 \text{ cm}$$

wysokość ściany bocznej ostrosłupa

Odpowiedź: Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 5 cm.

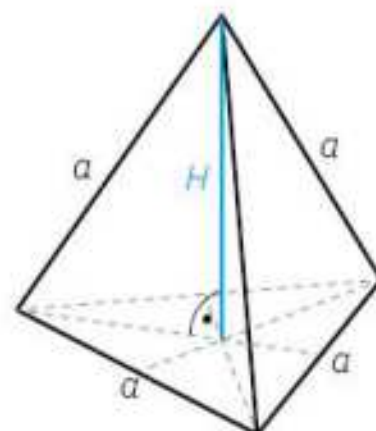
Czworościan foremny to ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.

H – wysokość czworościanu foremnego

a – krawędź czworościanu foremnego

Pole powierzchni całkowitej czworościanu: $P_c = a^2 \sqrt{3}$

Objętość czworościanu foremnego: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

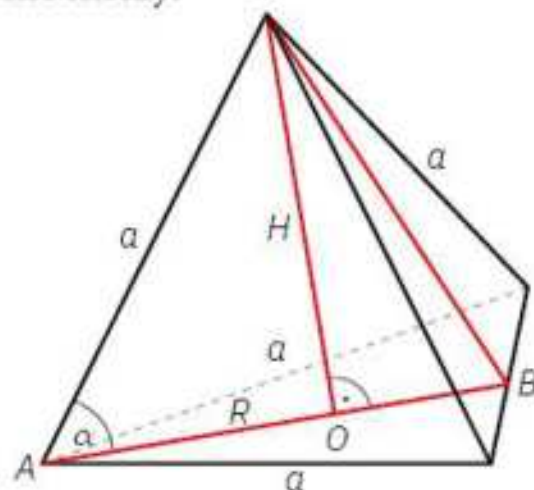


Ćwiczenie 7.

Długość krawędzi bocznej czworościanu foremnego jest równa a . Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy czworościanu foremnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



α – kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy czworościanu foremnego

$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ zapisujemy wzór na wysokość podstawy czworościanu foremnego

Punkt O jest spodem wysokości czworościanu foremnego, wobec tego $R = \frac{2}{3}h_p$.

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

wyznaczamy odcinek R w zależności od krawędzi podstawy czworościanu foremnego

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

wzór na długość odcinka R w zależności od krawędzi podstawy czworościanu foremnego

$$\cos \alpha = \frac{R}{a}$$

zapisujemy cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy czworościanu foremnego

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}$$

wyznaczamy cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy czworościanu foremnego

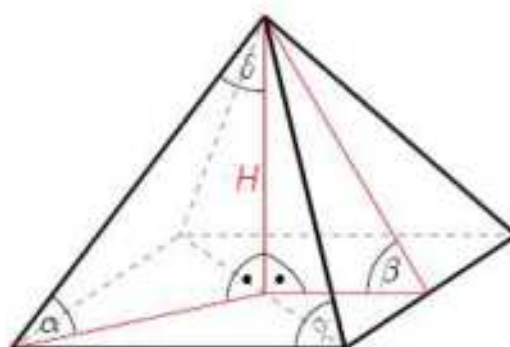
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy czworościanu foremnego

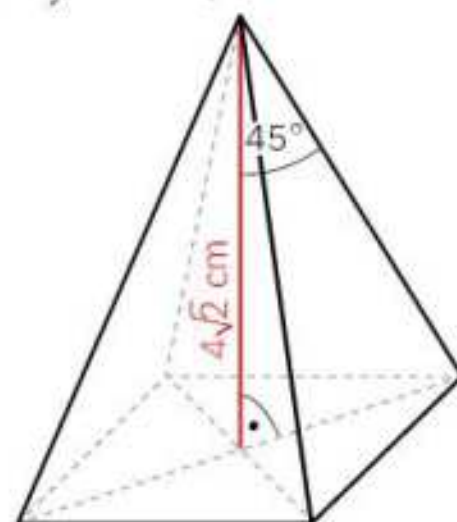
Odpowiedź: Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy czworościanu foremnego jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Podaj, ile krawędzi i ile ścian ma ostrosłup:
a) siedmiokątny, b) piętnastokątny, c) stukątny.
2. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym suma długości wszystkich krawędzi bocznych jest równa 16 cm, a krawędź podstawy ma 3 cm. Narysuj siatkę i oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
3. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach 8 cm i 6 cm. Długości krawędzi bocznych tego ostrosłupa wynoszą 12 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
4. Nazwij kąty zaznaczone na rysunku.



5. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 4 cm, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
6. Oblicz, czy 1 m drutu wystarczy na wykonanie modelu żeberkowego ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości 2,4 dm i krawędzi podstawy $7\sqrt{3}$ cm. Uwaga. Model żeberkowy (szkieletowy) ostrosłupa to taki model ostrosłupa, w którym występują tylko krawędzie.
7. Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego wynosi $64\sqrt{3}$ cm². Oblicz objętość tego czworościanu.
8. Oblicz sumę długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku.



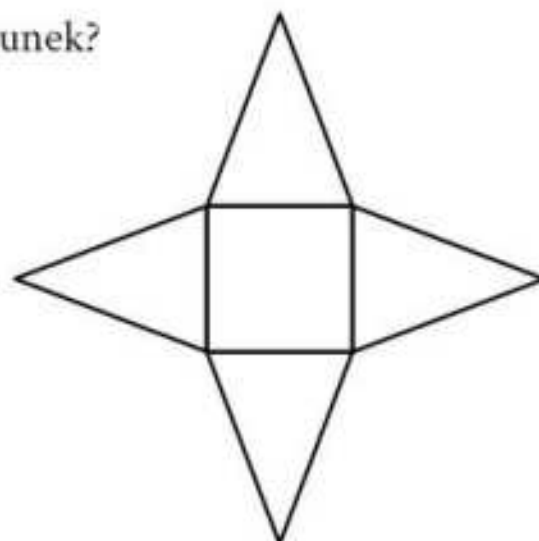
9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy jest równa 12, a wysokość tego ostrosłupa wynosi $2\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta między przeciwległymi ścianami bocznymi.
10. Oblicz objętość piramidy Cheopsa, której wysokość jest równa 146 m, a podstawa ma kształt kwadratu o boku o długości 230 m. Wynik zaokrąglij do 1 m³.

11. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 8 cm, a miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi 60° . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.
12. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 10 cm, a miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi 30° . Oblicz wysokość ściany bocznej.
13. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12 cm, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
14. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy o długości 4 cm i krawędzi bocznej równej 10 cm.
15. Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przeciwległe krawędzie boczne. Przekrojem jest trójkąt równoboczny o polu równym $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz objętość ostrosłupa.
16. Wyznacz długość krawędzi podstawy i wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni bocznej wynosi 80 cm^2 , a pole powierzchni całkowitej 144 cm^2 .
17. Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$ o boku o długości 12 cm, a ściana boczna ADS , będąca trójkątem równoramiennym, jest prostopadła do podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli długość krawędzi AS wynosi 10 cm.
18. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy o długości 4 cm, w którym kąt dwuścienny między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy ma miarę 60° .

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Ostrosłup o 40 krawędziach ma:

A. 21 ścian bocznych	C. 19 wierzchołków
B. 20 ścian	D. dwudziestokąt w podstawie
2. Jak nazywa się bryła, której siatkę przedstawia rysunek?



3. Którym wzorem wyraża się objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H ?
- A. $\frac{a^2 H \sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{a^2 H \sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a^2 H \sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2a^2 H \sqrt{3}}{3}$
4. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej jest równa 8 cm i tworzy z podstawą kąt o mierze 60° . Jaką długość ma wysokość podstawy tego ostrosłupa?
- A. $4\sqrt{3}$ cm B. 4 cm C. 12 cm D. $12\sqrt{3}$ cm
5. Ile wynosi pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi 9 cm?
- A. $36\sqrt{3}$ cm² B. $\frac{27\sqrt{3}}{8}$ cm² C. $81\sqrt{3}$ cm² D. $12\sqrt{3}$ cm²
6. Objętość ostrosłupa wynosi 735 cm³. Podstawą tego ostrosłupa jest prostokąt o bokach o długości 7 cm i 21 cm. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy. Ile wynosi długość tej krawędzi?
- A. 15 cm B. 16 cm C. 14 cm D. 15,5 cm

1.4. Bryły obrotowe

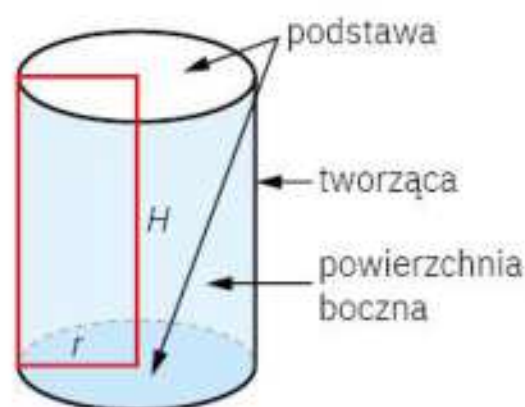
Bryły obrotowe powstają w wyniku obrotu wielokąta lub koła wokół prostej.



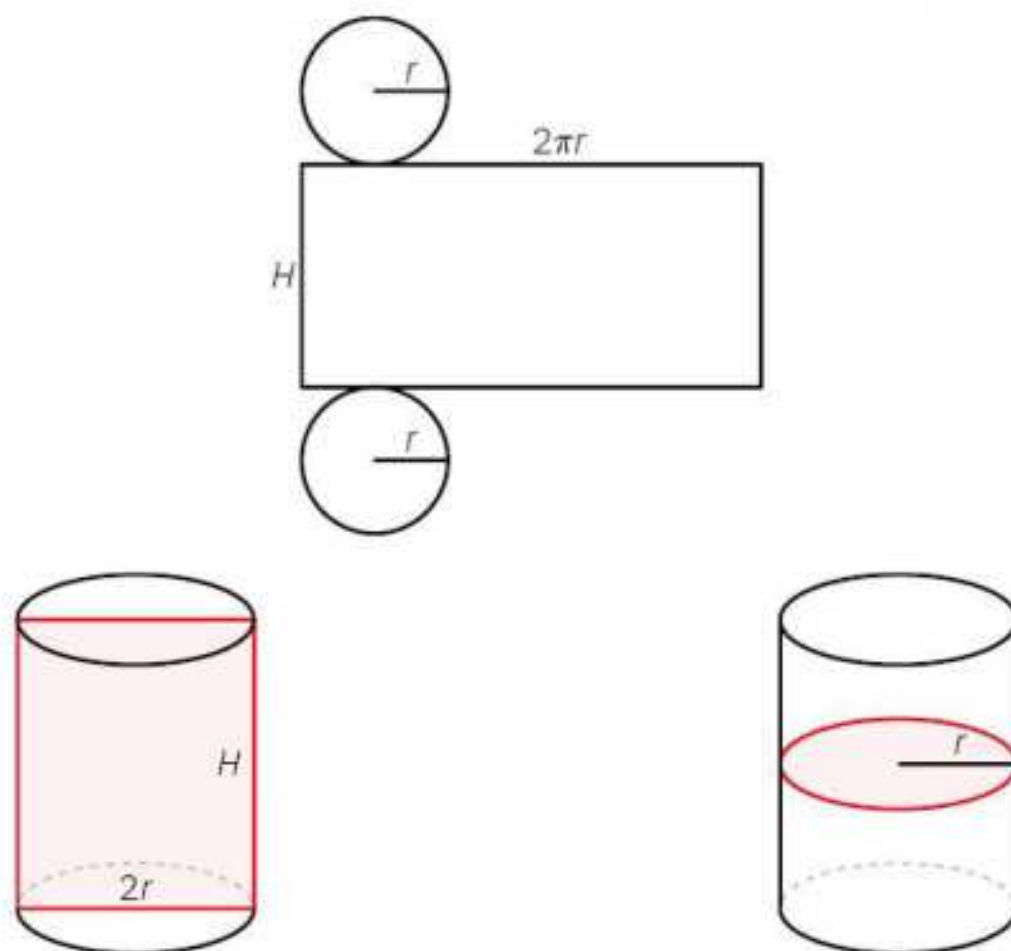
Walec to bryła powstała wskutek obrotu prostokąta wokół prostej zawierającej jego jeden bok (oś walca).

Podstawą walca nazywamy każde z kół utworzonych przez obrót boków prostokąta prostopadłych do osi obrotu. **Wysokość** walca to dowolny odcinek o końcach należących do podstaw walca i prostopadły do tych podstaw.

Powierzchnia boczna walca powstaje wskutek obrotu boku prostokąta równoległego do osi obrotu i rozłącznego z osią obrotu. **Tworzącą walca** nazywamy natomiast każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do jego podstaw.



Po rozcięciu walca i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Przekrój osiowy walca to część wspólna walca i płaszczyzny zawierającej oś walca. Przekrój ten jest prostokątem o bokach $2r$ i H .

Przekrój poprzeczny walca to przekrój walca płaszczyzną równoległą do podstawy.

Jeżeli promień podstawy walca wynosi r , wysokość H , to:

pole powierzchni bocznej walca: $P_b = 2\pi rH$

pole powierzchni całkowitej walca: $P_c = 2\pi r(r + H)$

objętość walca: $V = \pi r^2 H$

Ćwiczenie 1.

Przekrój osiowy walca jest prostokątem o przekątnej o długości 16 cm, która tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$$\sin 30^\circ = \frac{H}{16}$$

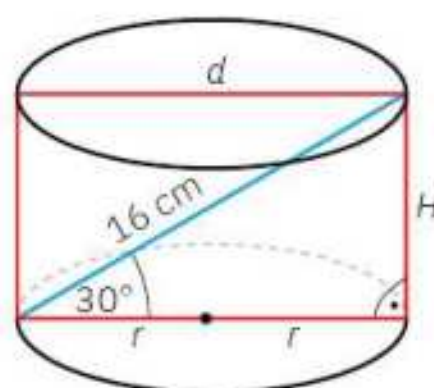
$$\frac{1}{2} = \frac{H}{16}$$

$$H = 8 \text{ cm}$$

obliczamy wysokość walca, korzystając z funkcji sinus

wstawiamy wartości do wzoru

wysokość walca



$$\cos 30^\circ = \frac{d}{16}$$

obliczamy średnicę d podstawy walca, korzystając z funkcji cosinus

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{16}$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$d = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

średnica podstawy walca

$$r = 8\sqrt{3} : 2 = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

promień podstawy walca

$$P_c = 2\pi r(r + H)$$

zapisujemy wzór na pole powierzchni całkowitej walca

$$P_c = 2\pi \cdot 4\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 8)$$

wstawiamy wartości do wzoru

$$P_c = (96\pi + 64\pi\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

pole powierzchni całkowitej walca

$$V = \pi r^2 H$$

zapisujemy wzór na objętość walca

$$V = \pi(4\sqrt{3})^2 \cdot 8$$

wstawiamy wielkości do wzoru

$$V = 384\pi \text{ cm}^3$$

objętość walca

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej walca wynosi $(96\pi + 64\pi\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, a jego objętość $384\pi \text{ cm}^3$.

Ćwiczenie 2.

Powierzchnia boczna walca jest prostokątem o polu równym $24\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość walca, jeśli wiadomo, że wysokość walca jest trzy razy większa od promienia podstawy walca.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



$$\begin{cases} 2\pi rH = 24\pi \\ H = 3r \end{cases}$$

zapisujemy układ równań pozwalający obliczyć wysokość i promień podstawy walca

$$\begin{cases} 6\pi r^2 = 24\pi : 6\pi \\ H = 3r \end{cases}$$

obliczmy promień podstawy i wysokość walca

$$\begin{cases} r = 2 \text{ cm} \\ H = 6 \text{ cm} \end{cases}$$

promień podstawy i wysokość walca

$$V = \pi r^2 H$$

zapisujemy wzór na objętość walca

$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 6$$

obliczamy objętość walca

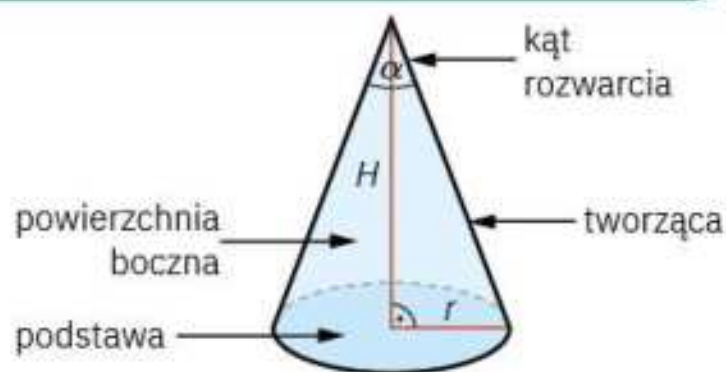
$$V = 24\pi \text{ cm}^3$$

objętość walca

Odpowiedź: Objętość walca jest równa $24\pi \text{ cm}^3$.

Stożek to bryła utworzona przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta (oś stożka).

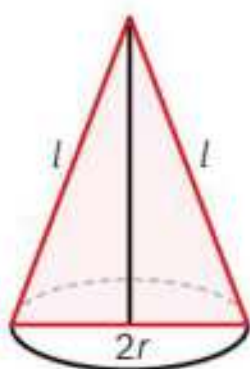
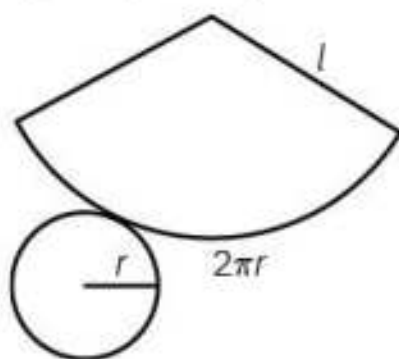
Podstawą stożka nazywamy koło powstale wskutek obrotu przyprostokątnej prostopadłej do osi stożka. **Wysokość stożka** to przyprostokątna trójkąta zawarta w osi obrotu.



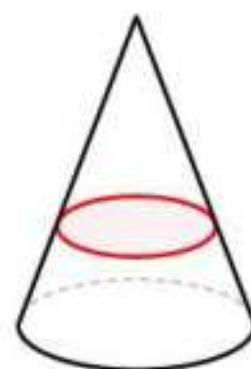
Część wspólna osi obrotu i powierzchni bocznej stożka jest punktem, który nazywamy **wierzchołkiem stożka**.

Tworząca stożka to każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka, którego jeden koniec jest wierzchołkiem stożka, a drugi koniec należy do podstawy stożka.

Po rozcięciu stożka i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Przekrój osiowy stożka to część wspólna stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka. Przekrój ten jest trójkątem równoramiennym, którego podstawą jest odcinek o długości $2r$, a ramię ma długość l .



Przekrój poprzeczny stożka to przekrój stożka płaszczyzną równoległą do podstawy.

Jeżeli promień podstawy stożka wynosi r , wysokość H , tworząca l , to:

pole powierzchni bocznej stożka:

$$P_b = \pi r l$$

pole powierzchni całkowitej stożka:

$$P_c = \pi r (r + l)$$

objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz objętość stożka i jego pole powierzchni całkowitej, jeżeli wiadomo, że tworząca ma długość 10 cm, a wysokość jest równa 8 cm.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$$8^2 + r^2 = 10^2 \quad \text{korzystamy z twierdzenia Pitagorasa}$$

$$r = \sqrt{100 - 64} \quad \text{obliczamy promień podstawy}$$

$$r = 6 \text{ cm} \quad \text{promień podstawy stożka}$$

$$P_c = \pi r(r + l) \quad \text{zapisujemy wzór na pole powierzchni całkowitej stożka}$$

$$P_c = \pi \cdot 6(6 + 10) \quad \text{wstawiamy wartości do wzoru}$$

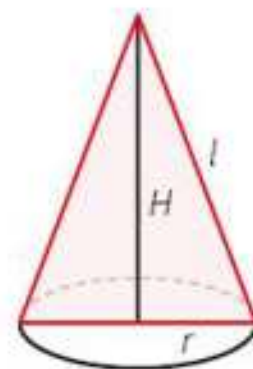
$$P_c = 96\pi \text{ cm}^2 \quad \text{pole powierzchni całkowitej stożka}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H \quad \text{zapisujemy wzór na objętość stożka}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 \quad \text{wstawiamy wartości do wzoru}$$

$$V = 96\pi \text{ cm}^3 \quad \text{obliczamy objętość stożka}$$

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi $96\pi \text{ cm}^2$, a jego objętość – $96\pi \text{ cm}^3$.

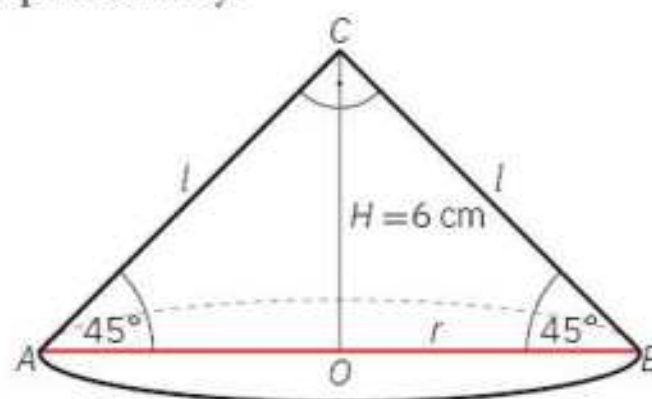


Ćwiczenie 4.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, jeśli wiadomo, że wysokość stożka jest równa 6 cm.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



$$|\angle ABC| = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} \quad \text{obliczamy miarę kąta } ABC \text{ (trójkąt } ABC \text{ jest prostokątny równoramienny)}$$

$$|\angle ABC| = 45^\circ \quad \text{miara kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy stożka}$$

$$r = H = 6 \text{ cm} \quad \text{wyznaczamy promień podstawy stożka (trójkąt } OBC \text{ jest prostokątny równoramienny)}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{H}{l}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{l}$$

$$l = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$P_b = \pi r l$$

$$P_b = \pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2}$$

$$P_b = 36\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$$

zapisujemy zależność pozwalającą wyznaczyć tworzącą stożka

obliczamy tworzącą stożka

tworząca stożka

zapisujemy wzór na pole powierzchni bocznej stożka

obliczamy pole powierzchni bocznej stożka

pole powierzchni bocznej stożka

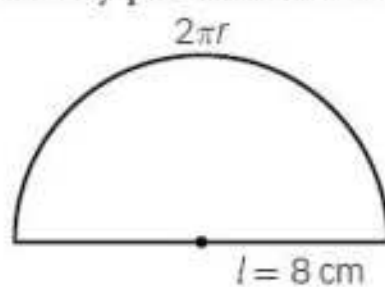
Odpowiedź: Pole powierzchni bocznej stożka jest równe $36\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 5.

Powierzchnia boczna stożka jest półkołem o promieniu 8 cm. Oblicz kąt rozwarcia stożka.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy powierzchni bocznej stożka.



$$2\pi r = \pi l$$

zapisujemy zależność pozwalającą obliczyć promień podstawy stożka (obwód podstawy stożka jest równy połowie obwodu koła o promieniu l)

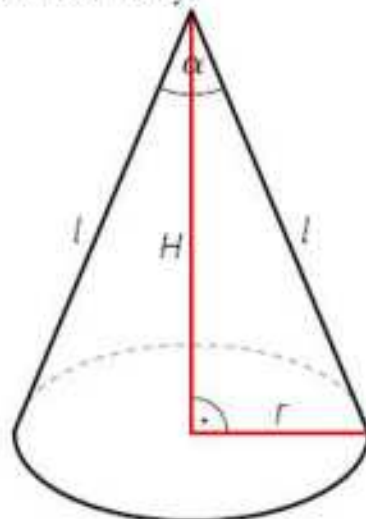
$$2\pi r = 8\pi$$

obliczamy promień podstawy stożka

$$r = 4 \text{ cm}$$

promień podstawy stożka

Wykonujemy drugi rysunek pomocniczy.



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{l}$$

zapisujemy zależność pozwalającą obliczyć miarę kąta $\frac{\alpha}{2}$ (połowa kąta rozwarcia stożka, bo przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym)

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{8} \quad \text{obliczamy miarę kąta } \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{upraszczamy wartość wyniku}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 30^\circ \quad \text{miara kąta } \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \text{miara kąta rozwarcia stożka}$$

Odpowiedź: Miara kąta rozwarcia stożka wynosi 60° .



Kula to bryła powstała przez obrót koła wokół osi zawartej w płaszczyźnie tego koła, przechodzącej przez jego środek.

Środek koła obracanego jest **środkiem kuli**, a promień koła obracanego – **promieniem kuli**.

Obrót okręgu ograniczającego koło tworzy powierzchnię obrotową, którą nazywamy **sferą** lub **powierzchnią kuli**. Sfera jest figurą obrotową, ale nie jest bryłą obrotową.

Przekrój kuli to część wspólna płaszczyzny i kuli. Przekrój kuli, do którego należy środek kuli, nazywamy **kołem wielkim**.

Jeżeli promień kuli wynosi R , to:

pole powierzchni kuli (sfery): $P = 4\pi R^2$

objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

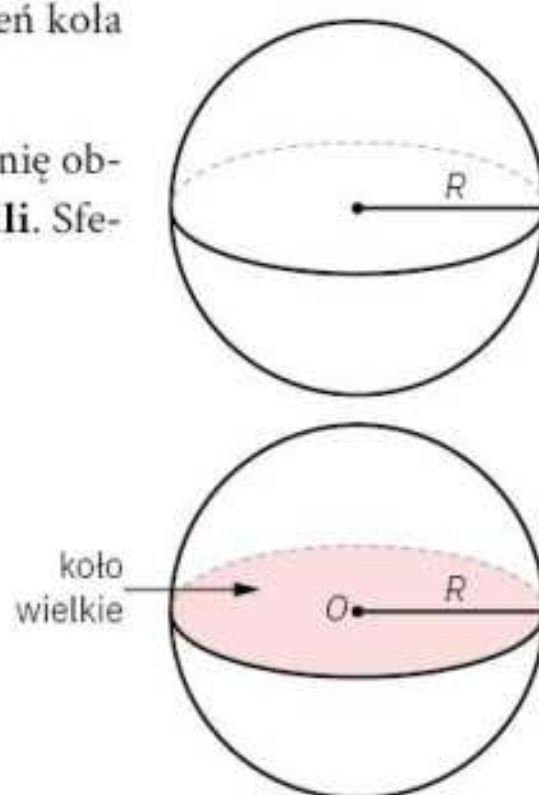
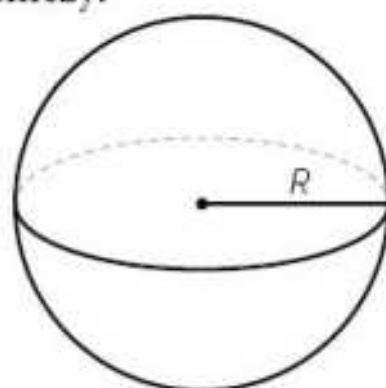
Ćwiczenie 6.

Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej wskutek obrotu koła o obwodzie 8π cm wokół średnicy.

Rozwiązanie:

Obracając koło wokół średnicy, otrzymamy kulę, której promień jest równy promieniowi danego koła.

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



$$L = 2\pi R$$

$$2\pi R = 8\pi$$

$$R = 4 \text{ cm}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3$$

$$V = \frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$$

$$P = 4\pi R^2$$

$$P = 4 \cdot \pi \cdot 4^2$$

$$P = 64\pi \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: Objętość kuli wynosi $\frac{256}{3}\pi \text{ cm}^3$, a jej pole powierzchni jest równe $64\pi \text{ cm}^2$.

zapisujemy wzór na obwód koła

podstawiamy wartości do wzoru

obliczamy promień koła (kuli)

zapisujemy wzór na objętość kuli

podstawiamy wartości do wzoru

obliczamy objętość kuli

zapisujemy wzór na pole powierzchni kuli

podstawiamy wartości do wzoru

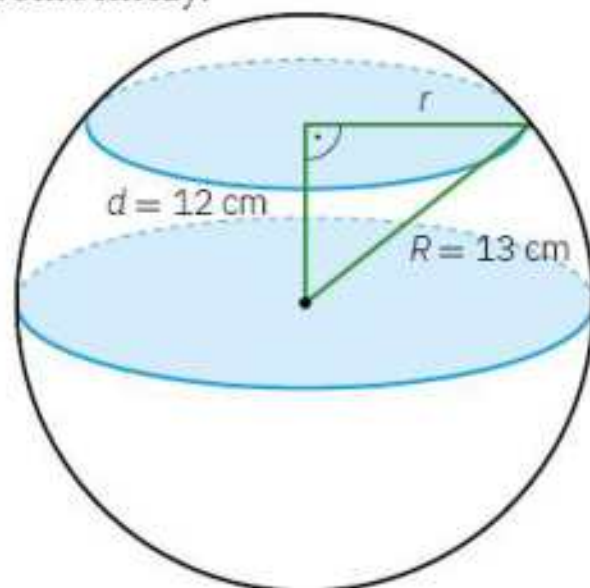
obliczamy pole powierzchni kuli

Ćwiczenie 7.

Kulę o promieniu 13 cm przecięto płaszczyzną w odległości 12 cm od płaszczyzny koła wielkiego tej kuli. Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju kuli do pola koła wielkiego kuli.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



$$r^2 + d^2 = R^2$$

$$r^2 + 12^2 = 13^2$$

$$r = \sqrt{169 - 144}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$P_p = \pi r^2$$

zapisujemy zależność pozwalającą wyliczyć promień koła będącego przekrojem kuli (korzystamy z tw. Pitagorasa)

obliczamy promień koła będącego przekrojem kuli

promień koła będącego przekrojem kuli

zapisujemy wzór na pole przekroju kuli

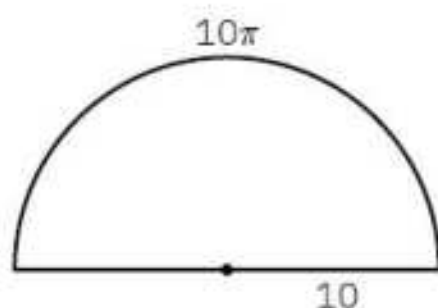
$P_p = \pi \cdot 5^2$	obliczamy pole przekroju kuli
$P_p = 25\pi \text{ cm}^2$	pole przekroju kuli
$P = \pi R^2$	zapisujemy wzór na pole koła wielkiego
$P = \pi \cdot 13^2$	obliczamy pole koła wielkiego
$P = 169\pi \text{ cm}^2$	pole koła wielkiego
$\frac{P_p}{P} = \frac{25\pi}{169\pi}$	obliczamy stosunek pola otrzymanego przekroju kuli do pola koła wielkiego kuli
$\frac{P_p}{P} = \frac{25}{169}$	stosunek pola otrzymanego przekroju kuli do pola koła wielkiego kuli
Odpowiedź: Stosunek pola otrzymanego przekroju do pola koła wielkiego kuli jest równy $\frac{25}{169}$.	



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość figury powstałej wskutek obrotu prostokąta o bokach 3 cm i 6 cm wokół dłuższego boku.
2. Oblicz objętość walca o obwodzie podstawy 628 cm i wysokości 1 m. W obliczeniach przyjmij $\pi = 3,14$.
3. Beczka, w której przewozi się benzynę, ma kształt walca o wysokości 1 m i promieniu podstawy równym 40 cm. Ile litrów benzyny mieści się w takiej beczce?
4. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca o promieniu równym 5 cm, jeśli wiadomo, że przekątna przekroju osiowego walca tworzy z podstawą kąt o mierze 60° .
5. Przekrój osiowy walca jest kwadratem, a objętość walca jest równa $16\pi \text{ cm}^3$. Oblicz promień podstawy walca.
6. Po rozwinięciu powierzchni bocznej walca na płaszczyźnie otrzymano kwadrat o boku 8π . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.
7. Objętość puszki w kształcie walca ma $250\pi \text{ cm}^3$. Wysokość puszki jest dwa razy większa od promienia podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej puszki.
8. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku o długości 6 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej walca.
9. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 13 cm, a wysokość walca jest równa 5 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.
10. Oblicz objętość stożka, którego tworząca ma długość 8 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze 60° .

11. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość stożka, którego pole przekroju osiowego wynosi 48 cm^2 , a wysokość stożka jest równa 6 cm .
12. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych o długości 12 cm i 16 cm obrócono najpierw wokół dłuższej przyprostokątnej, a potem wokół krótszej. Porównaj objętości powstałych w ten sposób brył.
13. Powierzchnia boczna stożka ma kształt pokazany na rysunku. Oblicz wysokość tego stożka.



14. Średnica podstawy stożka ma długość 12 cm , a tworząca jest nachylona do podstawy pod kątem o mierze 45° . Oblicz objętość tego stożka.
15. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka, którego obwód podstawy wynosi $6\pi \text{ cm}$, a jego wysokość ma 15 cm .
16. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a tworząca stożka jest równa 16 cm . Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.
17. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku o długości 6 cm . Oblicz objętość tego stożka.
18. Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi $300\pi \text{ cm}^2$, a jego pole powierzchni bocznej ma $156\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.
- 19*. Długości podstaw trapezu prostokątnego są równe 10 cm i 4 cm , a jego wysokość ma 3 cm . Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót tego trapezu dookoła:
 - a) dłuższej podstawy,
 - b) krótszej podstawy.
 Pole powierzchni całkowitej której z brył powstałych w podpunktach a i b jest mniejsze i o ile?
20. Przekrój stożka płaszczyzną równoległą do podstawy poprowadzoną w połowie wysokości jest kołem o promieniu 3 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka, jeśli jego wysokość jest równa 12 cm .
21. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o średnicy $d = 6 \text{ cm}$.
22. Pole koła wielkiego kuli jest równe $100\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tej kuli.
23. Oblicz objętość kuli, jeżeli jej pole powierzchni jest równe $324\pi \text{ cm}^2$.

24. Objętość kuli wynosi $288\pi \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni tej kuli.
25. Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej wskutek obrotu koła o obwodzie $10\pi \text{ cm}$ wokół średnicy.
26. W odległości 12 cm od płaszczyzny koła wielkiego poprowadzono przekrój kuli, którego pole jest równe $256\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tej kuli.
27. Objętość kuli jest równa $36\pi \text{ cm}^3$. Oblicz objętość kuli o promieniu:
 - a) trzy razy większym,
 - b) o 3 cm większym od promienia danej kuli.
28. Pole powierzchni kuli w centymetrach kwadratowych i jej objętość w centymetrach sześciennych wyrażają się tą samą liczbą. Oblicz promień tej kuli.
29. Walec o promieniu podstawy 6 cm i kula o takim samym promieniu mają równe objętości. Która z brył ma większe pole powierzchni całkowitej i o ile?
30. Świece wykonane z parafiny mają kształt walca, stożka i kuli. Promienie podstawy walca i stożka są równe promieniowi kuli, a wysokości tych brył są odpowiednio dwa razy i trzy razy większe od promienia kuli. Ile potrzeba parafiny do wykonanie każdej z tych świec, jeśli wiadomo, że promień kuli wynosi 3 cm? W obliczeniach przyjmij, że $\pi = 3$.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

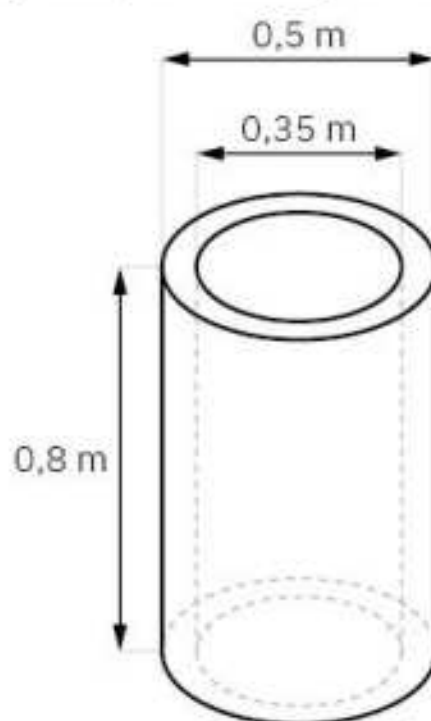
1. Ile wynosi objętość walca o promieniu podstawy 6 cm i wysokości 12 cm?
 A. $432\pi \text{ cm}^3$ B. $72\pi \text{ cm}^3$ C. $132\pi \text{ cm}^3$ D. $200\pi \text{ cm}^3$
2. Przekątna przekroju osiowego walca o długości 20 cm jest nachylona do podstawy walca pod kątem 60° . Jaką długość ma wysokość tego walca?
 A. 10 cm B. $10\sqrt{3} \text{ cm}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$ D. 15 cm
3. Który wzór poprawnie opisuje objętość walca o promieniu r i wysokości 3 razy większej od promienia?
 A. $\pi r^2(r-3)$ B. $\pi r^2(r+3)$ C. $9\pi r^3$ D. $3\pi r^3$
4. Kwadrat o boku o długości 2 cm obracamy wokół przekątnej. Ile wynosi objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu?
 A. $\frac{\sqrt{2}\pi}{6} \text{ cm}^3$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \text{ cm}^3$ C. $\frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$ D. $16\pi \text{ cm}^3$
5. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° . Ile wynosi stosunek długości promienia podstawy do wysokości stożka?
 A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

6. Wysokość stożka wynosi 10 cm, a średnica jego podstawy jest równa 12 cm. Jaka jest długość tworzącej stożka?
 A. 8 cm B. $8\sqrt{3}$ cm C. $2\sqrt{3}$ cm D. $2\sqrt{34}$ cm
7. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku o długości a . Którym wzorem można wyrazić objętość stożka?
 A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$ D. $\frac{2\pi a^3}{9}$
8. Ile wynosi objętość kuli o promieniu $R = 3$ cm?
 A. 108π cm² B. 36π cm² C. 108π cm³ D. 36π cm³
9. Ile wynosi objętość kuli, której pole powierzchni wynosi 16π cm²?
 A. 16π cm³ B. 32π cm³ C. $\frac{12\pi}{5}$ cm³ D. $\frac{32\pi}{3}$ cm³
10. Ile wynosi pole kuli o objętości 36π cm³?
 A. 2π cm² B. 9π cm² C. 12π cm² D. 36π cm²

1.5. Zadania utrwalające

1. Wypisz wszystkie pary prostych skośnych przechodzących przez zaznaczone na płaszczyźnie punkty K , L i M nienależące do jednej prostej oraz leżący poza płaszczyzną punkt S .
2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach o długości 5 cm, 6 cm i 7 cm.
3. Bok sześcienu zmniejszono o 20% jego długości. Oblicz, o ile procent zmniejszy się jego objętość.
4. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym długość głównej przekątnej jest równa 25 cm, a wysokość ma długość 24 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.
5. W prostopadłościanie przekątna ściany bocznej o długości 6 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze 45° , natomiast przekątna prostopadłościanu tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30° . Oblicz objętość tego prostopadłościanu.
6. Obwód podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 12 cm, a krawędź boczna ma długość 6 cm. Narysuj siatkę i oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
7. Krawędź podstawy ostrosłupa czworokątnego ma długość 10 cm. Kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną ma miarę 30° . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

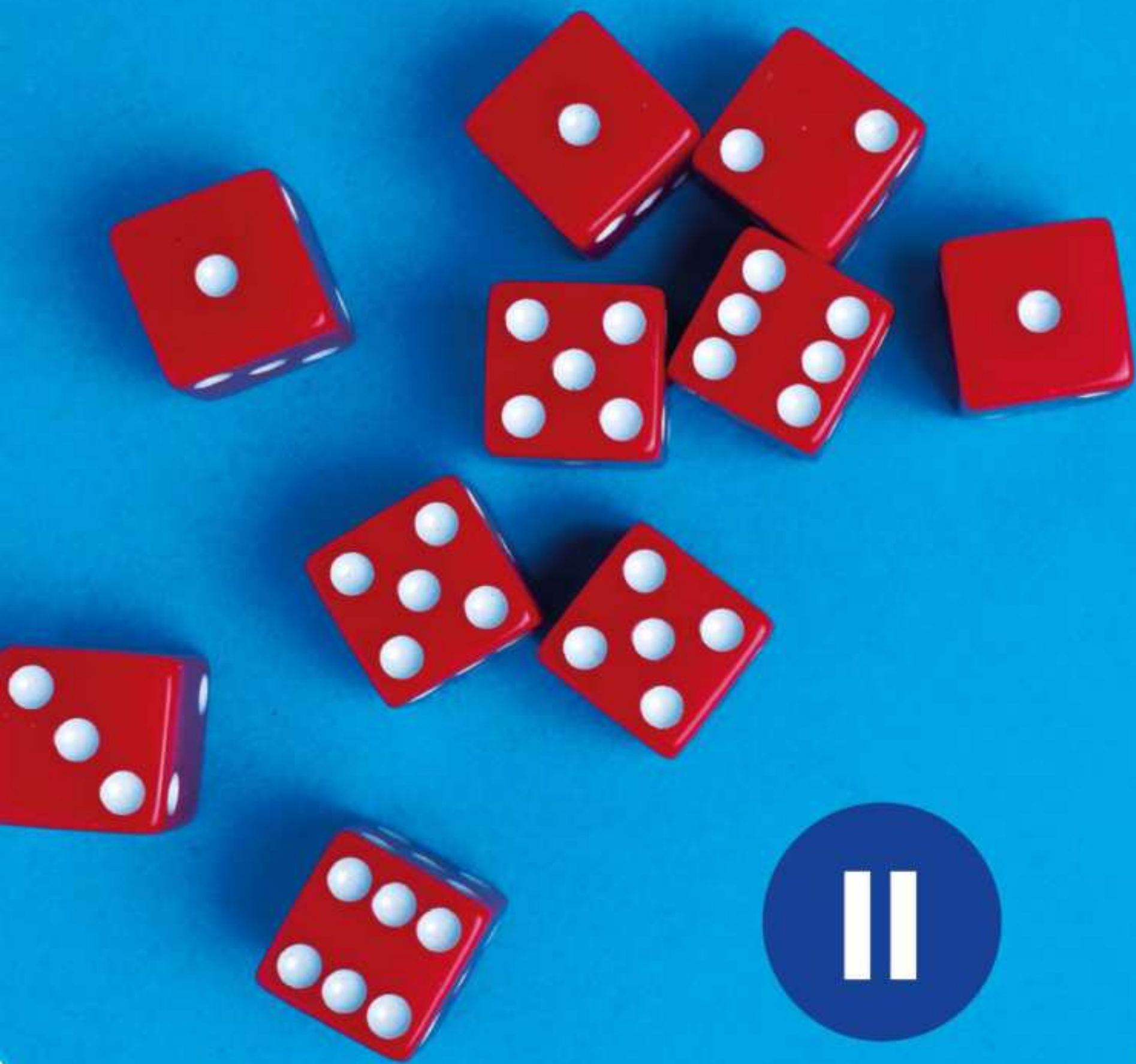
8. Objętość czworościanu foremnego wynosi $144\sqrt{2} \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego czworościanu.
9. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12 cm, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 45° . Oblicz długość krawędzi podstawy.
10. Podstawą ostrosłupa jest romb o przekątnych o długości 6 cm i 8 cm. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i ma długość 12 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
11. Jaką pojemność ma garnek w kształcie walca, którego średnica wynosi 20 cm, a wysokość jest równa 15 cm?
12. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o przekątnej o długości $6\sqrt{2} \text{ cm}$. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego walca.
13. Ile blachy potrzeba na wykonanie 1000 puszek, jeśli każda z nich jest walcem o średnicy 10 cm i wysokości 6 cm? Na odpady doliczamy 10% blachy.
14. Dno puszki farby w kształcie walca ma średnicę 10 cm, a pojemność tej puszki wynosi 1 litr. Oblicz wysokość puszki. Wynik zaokrąglaj do 1 cm.
15. Wymiary cembrowiny używanej do budowy studni podano na rysunku.



Ile metrów sześciennych betonu potrzeba na 6 takich cembrowin? Wynik zaokrąglaj do dziesiątych części metra.

16. Oblicz objętość stożka, którego promień podstawy wynosi 3 cm, a wysokość jest dwa razy dłuższa od promienia.
17. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, którego bok ma długość 4 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość stożka.

18. Oblicz wysokość stożka, w którym tworząca ma długość 15 cm, a pole powierzchni bocznej wynosi $45\pi \text{ cm}^2$.
19. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.
20. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° , a suma promienia podstawy i tworzącej wynosi 21 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.
21. Na lekcji fizyki nauczyciel wrzucił do napelnionej wodą menzurki w kształcie walca o promieniu 9 cm metalową kulkę o średnicy $9\sqrt{2} \text{ cm}$. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w menzurce?
22. Dane są trzy kule o promieniach: 3 cm, 4 cm i 5 cm. Oblicz promień kuli, której objętość równa się sumie objętości danych kul.
23. Pojemnik z kremem ma kształt walca o promieniu podstawy 3,5 cm i wysokości 4 cm. Krem wypełnia w całości wyłobioną w pojemniku półkulę o promieniu 3 cm. Jaki procent objętości pojemnika stanowi objętość zawartego w nim kremu? Wynik podaj w zaokrągleniu do 1%.
24. Stożek o promieniu podstawy 4 cm i kula o takim samym promieniu mają równe pola powierzchni całkowitej. Która z brył ma większą objętość?
25. Czapeczkę w kształcie stożka „zwinięto” z wycinka koła o promieniu 18 cm i kącie środkowym 240° . Oblicz promień podstawy tak utworzonego stożka.



KOMBINATORYKA

2.1. Doświadczenia losowe



Doświadczeniem losowym (eksperymentem, zjawiskiem losowym) nazywamy takie działanie, które można powtarzać wiele razy w takich samych warunkach, ale jego kolejnych wyników nie potrafimy przewidzieć. Doświadczeniami losowymi są na przykład: rzut monetą, rzut kostką do gry czy wyciąganie karty z talii.

W doświadczeniu losowym możemy określić zbiór wszystkich możliwych wyników. Na przykład przy jednokrotnym rzucie monetą może выпаść orzeł lub reszka.

Ćwiczenie 1.

Wyniki 50-krotnego rzutu sześcienną kostką do gry przedstawiono w tabeli liczebności.

liczba oczek	1	2	3	4	5	6
liczebność	7	10	8	6	12	7

Przedstaw te dane w postaci:

- a) diagramu słupkowego
- b) diagramu kołowego

Rozwiązanie:

Sporządzamy diagram słupkowy:

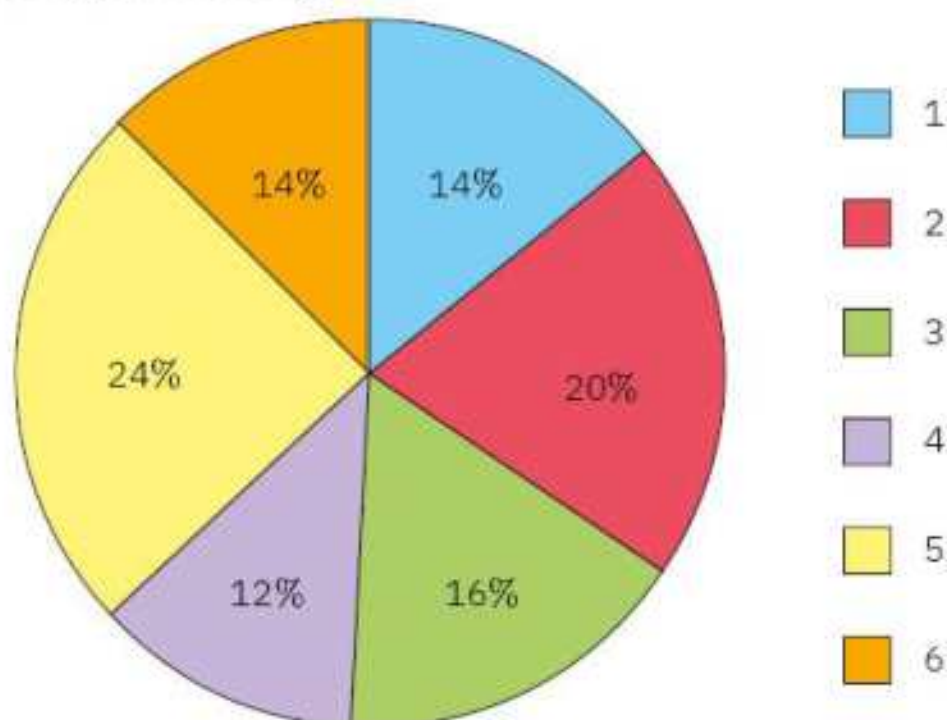


Rozwiązanie:

Obliczamy procentową częstość występowania wyników:

liczba oczek	1	2	3	4	5	6
procentowa częstość występowania	$\frac{7}{50} = 14\%$	$\frac{10}{50} = 20\%$	$\frac{8}{50} = 16\%$	$\frac{6}{50} = 12\%$	$\frac{12}{50} = 24\%$	$\frac{7}{50} = 14\%$

Sporządzamy diagram kołowy:



Ćwiczenie 2.

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu:

- a) wypadł dokładnie jeden orzeł,
- b) wypadły trzy reszki,
- c) wypadły co najmniej dwa orły,
- d) wypadły co najwyżej dwie reszki.

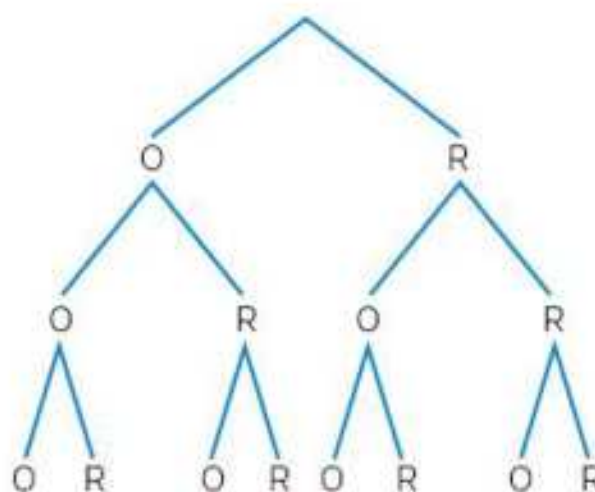
Rozwiązanie:

Oznaczamy wyrzucenie orła przez O i wyrzucenie reszki przez R. Przebieg tego doświadczenia losowego można przedstawić w postaci drzewka.

możliwe wyniki pierwszego rzutu

możliwe wyniki drugiego rzutu

możliwe wyniki trzeciego rzutu



- a) Odpowiedź: Wszystkie możliwe wyniki zdarzenia, że wypadł dokładnie jeden orzeł, tworzą zbiór $\{(O, R, R), (R, O, R), (R, R, O)\}$.
- b) Odpowiedź: Wszystkie możliwe wyniki zdarzenia, że wypadły trzy reszki, tworzą zbiór $\{(R, R, R)\}$.

- c) Odpowiedź: Wszystkie możliwe wyniki zdarzenia, że wypadły co najmniej dwa orły, tworzą zbiór $\{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (O, O, O)\}$.
- d) Odpowiedź: Wszystkie możliwe wyniki zdarzenia, że wypadły co najwyżej dwie reszki, tworzą zbiór $\{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (O, R, R), (R, O, R), (R, R, O)\}$.

Każdy możliwy wynik doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym**, a każdy zbiór zdarzeń elementarnych – **zdarzeniem losowym**.

Ćwiczenie 3.

Rzucamy sześcienną kostką do gry.

- a) Ile jest wszystkich możliwych wyników tego rzutu?
- b) Ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu, że otrzymano co najmniej pięć oczek?
- c) Ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu, że wypadła liczba oczek co najwyżej równa 6?
- d) Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że wypadła liczba oczek większa od 6.

Rozwiązanie:

- a) Wszystkie możliwe wyniki rzutu sześcienną kostką do gry tworzą zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Odpowiedź: Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych składa się z sześciu elementów.

- b) Wszystkie możliwe wyniki, że otrzymano co najmniej pięć oczek, tworzą zbiór $\{5, 6\}$.

Odpowiedź: Zbiór wszystkich zdarzeń, że otrzymano co najmniej pięć oczek, ma dwa elementy.

- c) Wszystkie możliwe wyniki, że wypadła liczba oczek co najwyżej równa 6, tworzą zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Odpowiedź: Zbiór wszystkich zdarzeń, że wypadła liczba oczek co najwyżej równa 6, ma sześć elementów. Takie zdarzenie nazywamy zdarzeniem pewnym.

- d) Żaden z wyników rzutu sześcienną kostką do gry nie sprzyja zdarzeniu elementarnemu, że wypadła liczba oczek większa od 6.

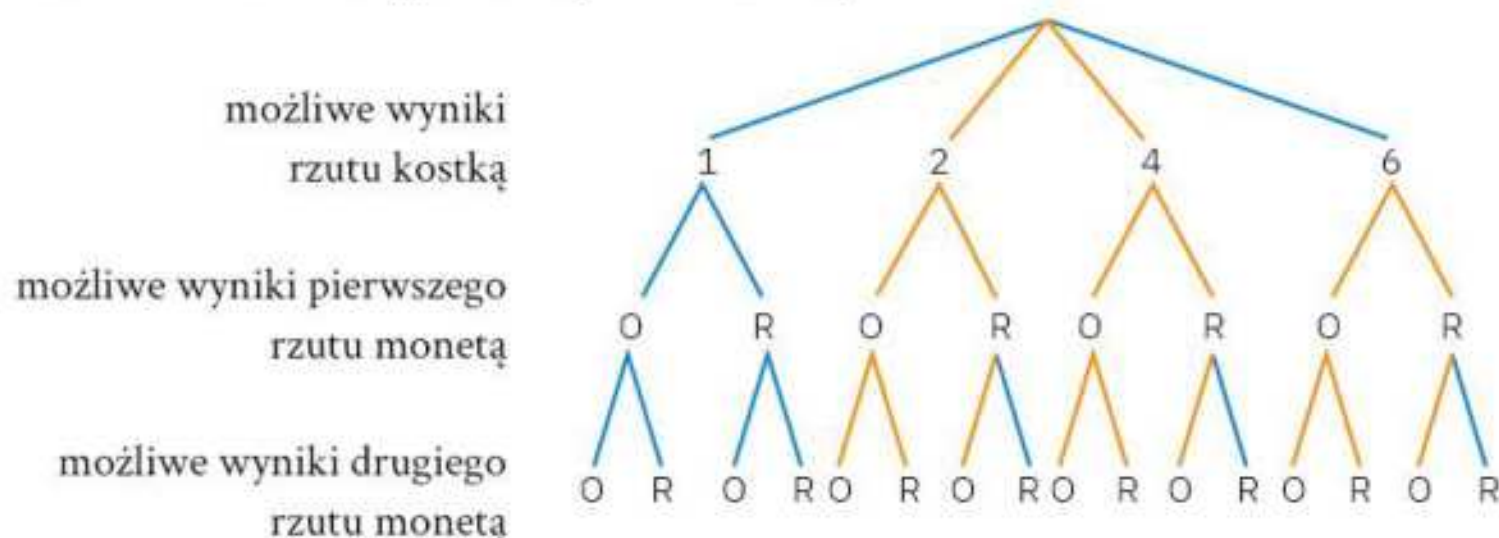
Odpowiedź: Zdarzeniu, że wypadła liczba oczek większa od 6, nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne. Takie nazywamy zdarzeniem niemożliwym.

Ćwiczenie 4.

Doświadczenie losowe polega na jednoczesnym rzucie symetryczną czworościenną kostką do gry, na której ściankach wypisane są liczby 1, 2, 4 oraz 6, i dwiema symetrycznymi monetami. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że na kostce wypadła parzysta liczba oczek, a na monetach – co najmniej jeden orzeł.

Rozwiązanie:

Oznaczamy wyrzucenie orla przez O i wyrzucenie reszki przez R. Przebieg tego doświadczenia losowego można przedstawić w postaci drzewka.



Odpowiedź: Wszystkie możliwe wyniki, że na kostce wypadła parzysta liczba oczek, a na monetach – co najmniej jeden orzeł, tworzą zbiór $\{(2, O, O), (2, O, R), (2, R, O), (4, O, O), (4, O, R), (4, R, O), (6, O, O), (6, O, R), (6, R, O)\}$.

Ćwiczenie 5.

Ile różnych czteroznakowych haseł można utworzyć z liter A, B oraz cyfr 0, 1 przy założeniu, że:

- a) pierwsze dwa znaki to różne litery, a kolejne dwa znaki to różne cyfry?
- b) pierwsze dwa znaki to litery, a kolejne dwa znaki to cyfry?

Rozwiązanie:

a) Wszystkie możliwe wyniki, że pierwsze dwa znaki to różne litery, a kolejne dwa znaki to różne cyfry, tworzą zbiór $\{(AB01), (AB10), (BA01), (BA10)\}$.

Odpowiedź: Zbiór wszystkich zdarzeń, że pierwsze dwa znaki to różne litery, a kolejne dwa znaki to różne cyfry, składa się z 4 elementów.

b) Wszystkie możliwe wyniki, że pierwsze dwa znaki to litery, a kolejne dwa znaki to cyfry, tworzą zbiór $\{(AB00), (AB01), (AB10), (AB11), (AA00), (AA01), (AA10), (AA11), (BA00), (BA01), (BA10), (BA11), (BB00), (BB01), (BB10), (BB11)\}$.

Odpowiedź: Zbiór wszystkich zdarzeń, że pierwsze dwa znaki to litery, a kolejne dwa znaki to cyfry, składa się z 16 elementów.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Rzuć 50 razy sześcienną kostką do gry i zanotuj otrzymane kolejno wyniki. Przedstaw te dane w postaci:
 - a) tabeli liczebności,
 - b) diagramu słupkowego.



2. W 25 rzutach monetą otrzymano następujące wyniki:
R, O, O, R, R, R, O, O, R, O, R, O, O, O, O, R, R, O, R, R, R, O, R, O.
a) Przedstaw wyniki tego doświadczenia w postaci tabeli liczebności.
b) Sporządź diagram słupkowy opisujący wyniki tego doświadczenia losowego.
c) Oblicz częstość (wyrażoną w procentach) występowania orłów i reszek.
3. Wypisz wszystkie możliwe wyniki następujących doświadczeń losowych:
a) jednokrotny rzut monetą,
b) dwukrotny rzut sześcienną kostką do gry.
4. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że wypadła co najwyżej jedna reszka.
5. Rzucamy kostką sześcienną, a następnie monetą. Wypisz wszystkie możliwe zdarzenia elementarne tego doświadczenia.
6. W urnie znajdują się trzy kule: biała, zielona i czarna. Losujemy kolejno bez zwracania trzy kule.
a) Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające temu doświadczeniu losowemu.
b) Określ, czy zdarzenie, że wśród wylosowanych kul jest kula czerwona, jest zdarzeniem niemożliwym czy pewnym.
7. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu:
a) na obu kostkach wypadła taka sama liczba oczek,
b) w pierwszym rzucie otrzymamy liczbę oczek nie większą niż dwa,
c) w pierwszym rzucie otrzymamy nieparzystą liczbę oczek lub w drugim wielokrotność liczby pięć,
d) w pierwszym rzucie otrzymamy liczbę podzielną przez dwa, a w drugim podzielną przez trzy.
8. W urnie znajduje się pięć kul: biała, żółta, czerwona, zielona i niebieska. Doświadczenie losowe polega na losowaniu z urny jednej kuli. Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu polegającemu na wylosowaniu kuli innego koloru niż czerwona?
9. Ile różnych układów liter (mających sens lub nie), rozpoczynających się od litery A, można utworzyć ze wszystkich liter wyrazu WODA? Wypisz wszystkie możliwości. Uwaga – litery nie mogą się powtarzać.
10. Spośród cyfr 1, 2, 3, 4 wylosowano dwie cyfry bez zwracania i utworzono z nich liczbę dwucyfrową tak, że pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga jest cyfrą jedności. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia losowego. Ile ich jest?

11. Z talii zawierającej 52 karty losujemy jedną kartę. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające wylosowaniu figury, która nie jest pikiem ani treflem.
12. Z urny zawierającej dwa ponumerowane losy wygrywające i trzy ponumerowane puste losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia losowego.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. W serii strzelania do tarczy otrzymano następujące wyniki: 8, 10, 1, 5, 8, 4, 10, 10, 0, 10. Ile wynosi procentowa częstość występowania wyniku 10?
A. 20% B. 10% C. 30% D. 40%
2. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą. Który zbiór przedstawia wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że za pierwszym razem wypadł orzeł?
A. $\{(O, R), (R, O), (O, O)\}$ C. $\{(O, R), (R, O)\}$
B. $\{(O, R), (O, O)\}$ D. $\{(O, O)\}$
3. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających temu doświadczeniu?
A. 6 B. 36 C. 12 D. 2
4. W urnie znajdują się trzy kule: biała, czerwona i czarna. Losujemy kolejno bez zwracania trzy kule. Które zdanie jest fałszywe?
A. Wśród wylosowanych kul co najwyżej jedna jest czarna.
B. Wylosowanie kuli białej jest pewne.
C. Wylosowanie kuli czerwonej jest niemożliwe.
D. Każda z wylosowanych kul jest innego koloru.



2.2. Reguła mnożenia. Liczba zdarzeń elementarnych

Do podawania liczby zdarzeń elementarnych dla doświadczeń losowych czasami wygodnie jest wykorzystywać regułę mnożenia.

Ćwiczenie 1.

Spośród cyfr 1, 4, 5, 8 losujemy kolejno ze zwracaniem dwie cyfry i tworzymy liczby naturalne dwucyfrowe tak, że pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności. Ile wśród tych liczb jest liczb parzystych?

Rozwiązanie:

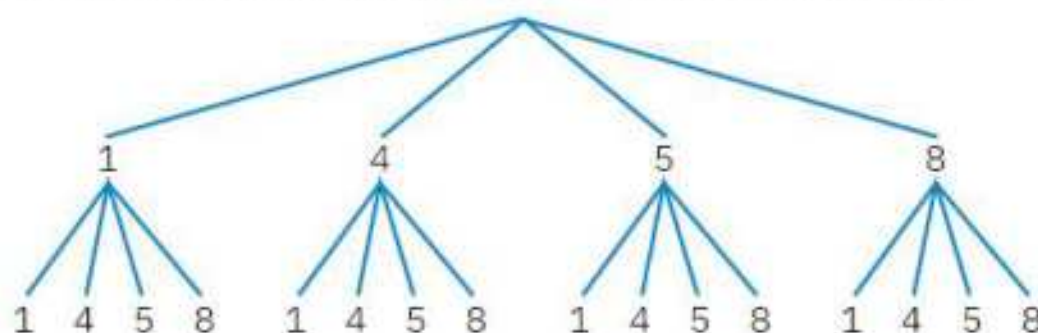
Przebieg tego doświadczenia losowego można przedstawić w postaci drzewka.

możliwe wyniki

I losowania

możliwe wyniki II

losowania



Otrzymujemy następujące liczby dwucyfrowe: 11, 14, 15, 18, 41, 44, 45, 48, 51, 54, 55, 58, 81, 84, 85, 88.

Liczby parzyste to: 14, 18, 44, 48, 54, 58, 84, 88.

Odpowiedź: Wśród tych liczb jest 8 liczb parzystych.

Ćwiczenie 2.

Na ile sposobów można wybrać samorząd klasowy (przewodniczącego, zastępcę i skarbnika) spośród 21 uczniów?

Rozwiązanie:

Pierwszą osobę możemy wybrać na 21 sposobów, drugą – na 20 sposobów, a trzecią – na 19 sposobów.

Samorząd możemy wybrać na: $21 \cdot 20 \cdot 19$, czyli 7980 sposobów.

Odpowiedź: Samorząd klasowy można wybrać na 7980 sposobów.

Jeśli doświadczenie losowe polega na podjęciu kolejno dwóch decyzji (ich kolejność jest istotna), przy czym pierwszą możemy podjąć na n sposobów, a drugą – na k sposobów, całą czynność możemy podjąć na $n \cdot k$ sposobów. Taki sposób zliczania elementów o określonych własnościach nazywamy **regułą mnożenia**.

Ćwiczenie 3.

Na ile sposobów z cyfr 0, 2, 4, 6 można zbudować liczbę dwucyfrową, w której cyfry mogą się powtarzać?

Rozwiązanie:

Rysujemy dwa okienka, w które możemy wpisywać cyfry 0, 2, 4, 6.

W liczbie dwucyfrowej cyfra zero nie może być cyfrą dziesiątek.

cyfra
dziesiątek

2, 4,
6

3 możliwości

cyfra
jedności

0, 2,
4, 6

4 możliwości

Liczbę można zbudować na $3 \cdot 4$, czyli na 12 sposobów.

Odpowiedź: Liczbę dwucyfrową można zbudować na 12 sposobów.

Ćwiczenie 4.

W dwóch księgarniach można kupić 3 gatunki książek: kryminal, sensacja i romans. W pierwszej księgarni mamy 15 różnych kryminalów, 12 różnych książek sensacyjnych i 6 różnych romansów, a w drugiej – 11 różnych kryminalów, 9 różnych książek sensacyjnych i 16 różnych romansów. W której księgarni mamy większy wybór zestawu 3 książek składający się z kryminału, sensacji i romansu?

Rozwiązanie:

W pierwszej księgarni zestaw możemy wybrać na $15 \cdot 12 \cdot 6$ sposobów, czyli na 1080 sposobów.

W drugiej księgarni zestaw możemy wybrać na $11 \cdot 9 \cdot 16$ sposobów, czyli na 1584 sposoby.

Odpowiedź: Większy wybór zestawu mamy w drugiej księgarni.

Ćwiczenie 5.

Na ile sposobów można umieścić trzy różne kulki w sześciu różnych szufladach, tak aby każda z nich była w innej szufladzie?

Rozwiązanie:

Pierwszą kulkę możemy włożyć do jednej z 6 szuflad na 6 sposobów.

Drugą kulkę możemy umieścić w jednej z 5 pozostałych szuflad na 5 sposobów.

Trzecią kulkę możemy umieścić w jednej z 4 pozostałych szuflad na 4 sposoby.

Trzy różne kulki możemy włożyć w sześciu różnych szufladach, tak aby każda z nich była w innej szufladzie, na $6 \cdot 5 \cdot 4$, czyli na 120 sposobów.

Odpowiedź: Kulki można umieścić na 120 sposobów.

Ćwiczenie 6.

Dane są dwa zbiory $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ i $B = \{k, l, m, n, o, p\}$. Z każdego z nich losujemy jedną literę, najpierw ze zbioru A , a następnie ze zbioru B , układamy z nich wyrazy (mające sens lub nie). Ile takich wyrazów dwuliterowych można otrzymać?

Rozwiązanie:

Pierwszą literę możemy wybrać ze zbioru A na 8 sposobów, a drugą ze zbioru B – na 6 sposobów. Dwuliterowe wyrazy możemy ułożyć na $8 \cdot 6$, czyli 48 sposobów.

Odpowiedź: Można otrzymać 48 różnych wyrazów.

Ćwiczenie 7.

Kasia ma 4 pary letnich butów: białe, czerwone, niebieskie i zielone, 3 torebki w kolorze białym, niebieskim i zielonym oraz 2 kapelusze: słomkowy i bawełniany. Na ile różnych sposobów może wybrać buty, torebkę i kapelusz?

Rozwiązanie:

Kasia może wylosować buty na 4 różne sposoby, torebkę na 3 sposoby, a kapelusz na 2 sposoby. Zestaw składający się z butów, torebki i kapelusza może wybrać na $4 \cdot 3 \cdot 2$, czyli 24 sposoby.

Odpowiedź: Kasia może wybrać buty, torebkę i kapelusz na 24 sposoby.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. W restauracji serwuje się cztery rodzaje zup, siedem drugich dań i pięć deserów. Ile różnych zestawów obiadowych składających się z zupy, drugiego dania i deseru można zamówić w tej restauracji?
2. Maja ma do dyspozycji pięć spódnic, osiem bluzek i dwie pary butów. Na ile różnych sposobów może wybrać ubranie, jeśli zawsze wkłada spódnicę, bluzkę i buty?
3. Rzucamy trzy razy symetryczną kostką do gry. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?
4. Ile jest sposobów wyboru czteroosobowej drużyny składającej się z kapitana, jego zastępcy, członka i zawodnika rezerwowego spośród uczniów klasy, do której uczęszcza 25 osób?
5. Spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5 wylosowano trzy niepowtarzające się cyfry i utworzono z nich liczbę trzycyfrową tak, że pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą setek, druga – cyfrą dziesiątek, a trzecia – cyfrą jedności. Ile takich liczb możemy otrzymać?
6. Na ile sposobów z cyfr 2, 4, 6, 8, 9 można zbudować liczbę trzycyfrową, w której cyfry mogą się powtarzać?

7. Oblicz, na ile sposobów możemy wybrać trzy książki ze zbioru 18 książek z uwzględnieniem kolejności wyboru.
8. Na ile sposobów można ustawić siedmioosobową kolejkę?
9. Ile różnych układów liter (mających sens lub nie), kończących się literą A, można utworzyć ze wszystkich liter wyrazu KOBIECZA?
10. W urnie jest sześć kul ponumerowanych od 1 do 6. Losujemy kolejno cztery kule bez zwracania. Ile jest możliwych wyników tego losowania?
11. Oblicz, ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych, w których obie cyfry są parzyste.
12. Rzucamy osiem razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Uczniowie pewnej szkoły postanowili oznaczyć swoje szafki czteroliterowymi kodami utworzonymi z liter: K, L, M, N, P, S tak, że każda litera wystąpiła w kodzie jeden raz. Dla ilu uczniów wystarczy tak utworzonych kodów?
A. 280 B. 250 C. 300 D. 360
2. Na ile sposobów można wybrać deser lodowy, mając do dyspozycji 10 rodzajów lodów, 3 polewy i 4 posypki? Każdego składnika można użyć raz.
A. 40 B. 120 C. 30 D. 100
3. Dokończ zdanie. Liczba sposobów, na jakie Ola i Bartek mogą usiąść na dwóch spośród siedmiu miejsc w kinie, jest równa:
A. 2 B. 14 C. 42 D. 49
4. Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których pierwsza cyfra jest nieparzysta, a druga parzysta?
A. 25 B. 20 C. 45 D. 90

2.3. Reguła dodawania

W niektórych doświadczeniach losowych obliczamy, na ile sposobów można dokonać wyboru spośród elementów należących do zbiorów nieposiadających wspólnych elementów.

Ćwiczenie 1.

W klasie 3a jest 14 dziewcząt i 11 chłopców, a w klasie 3b – 12 dziewcząt i 13 chłopców. Wybieramy jedną osobę, która jest uczniem klasy 3a lub klasy 3b. Oblicz, na ile sposobów możemy wybrać chłopca.



Rozwiązanie:

Dzielimy doświadczenie losowe na decyzje.

I decyzja: wybór chłopca z klasy 3a – możemy ją wykonać na 11 sposobów.

II decyzja: wybór chłopca z klasy 3b – możemy ją wykonać na 13 sposobów.

Obliczamy, na ile sposobów możemy wybrać chłopca, który jest uczniem klasy 3a lub 3b – możemy ją wykonać na $11 + 13 = 24$ sposoby.

Odpowiedź: Chłopca możemy wybrać na 24 sposoby.

Jeśli doświadczenie losowe polega na podjęciu **jednej z dwóch decyzji**, pochodzących z dwóch zbiorów, które nie mają wspólnych elementów, przy czym pierwszą z nich możemy podjąć na n sposobów, a drugą – na k sposobów, całą czynność możemy podjąć na $n + k$ sposobów. Taki sposób zliczania elementów o określonych własnościach nazywamy **regułą dodawania**.

Ćwiczenie 2.

W trzech urnach znajdują się kule tylko w dwóch kolorach. W pierwszej jest 10 kul białych i 20 kul czarnych, drugiej 15 kul białych i 10 kul czarnych, a w trzeciej 10 kul białych i 10 kul czarnych. Wybieramy jedną kulę z pierwszej, drugiej lub trzeciej urny. Oblicz, na ile sposobów możemy wybrać kulę białą.

Rozwiązanie:

Dzielimy doświadczenie losowe na decyzje.

I urna – kulę białą możemy wybrać na 10 sposobów.

II urna – kulę białą możemy wybrać na 15 sposobów.

III urna – kulę białą możemy wybrać na 10 sposobów.

Obliczamy, na ile sposobów możemy wybrać kulę białą z I, II lub III urny:
 $10 + 15 + 10 = 35$ sposobów.

Odpowiedź: Białą kulę możemy wybrać na 35 sposobów.

Ćwiczenie 3.

Z tali zawierającej 52 karty (tzn. w każdym z czterech kolorów: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, walet, dama, król, as) losujemy jedną kartę. Na ile sposobów możemy wybrać kartę z damą lub kartę z liczbą parzystą?

Rozwiązanie:

Rozważmy następujące sytuacje.

I sytuacja: wybór karty z damą – możemy ją wykonać na 4 sposoby (są 4 karty z damą).

II sytuacja: wybór karty z liczbą parzystą – możemy ją wykonać na 20 sposobów (jest 5 liczb parzystych, wobec tego kart z liczbą parzystą jest $4 \cdot 5 = 20$).

Obliczamy, na ile sposobów możemy wybrać kartę z damą lub kartę z liczbą parzystą – możemy ją wykonać na $4 + 20 = 24$ sposoby.

Odpowiedź: Z talii 52 kart możemy wybrać kartę z damą lub kartę z liczbą parzystą na 24 sposoby.

Ćwiczenie 4.

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych wybieramy jedną liczbę. Oblicz, ile wyników sprzyja doświadczeniu polegającemu na tym, że wybierzemy liczbę, której cyfra dziesiątek jest równa 5 lub jest liczbą podzielną przez 3.

Rozwiązanie:

Dzielimy doświadczenie losowe na decyzje.

I decyzja: wybór liczby, której cyfra dziesiątek jest równa 5 — możemy ją wykonać na 10 sposobów (jest 10 takich liczb).

II decyzja: wybór liczby, której cyfra dziesiątek jest liczbą podzielną przez 3 — możemy ją wykonać na 30 sposobów (jest 30 takich liczb).

Obliczamy, na ile sposobów możemy wybrać liczbę, której cyfra dziesiątek jest równa 5 lub jest liczbą podzielną przez 3 — możemy ją wykonać na $10 + 30 = 40$ sposobów.

Odpowiedź: Liczbę, której cyfra dziesiątek jest równa 5 lub jest liczbą podzielną przez 3, możemy wybrać na 40 sposobów.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Zamek szyfrowy jest strzeżony przez dwa kody. Pierwszy z nich to liczba dwucyfrowa podzielna przez 10, a drugi to liczba trzycyfrowa podzielna przez 100. Wystarczy złamać jeden z tych kodów, aby otworzyć zamek szyfrowy. Na ile sposobów możemy otworzyć ten zamek?
2. Zbiór A tworzą liczby, które są dzielnikami liczby 12, a zbiór B – liczby będące dzielnikami liczby 17. Na ile sposobów możemy wybrać jedną liczbę pierwszą należącą do zbioru A lub do zbioru B ?
3. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednego elementu należącego do zbioru A lub do zbioru B . Ze zbioru $A = \{a, b, c, d, e\}$ losujemy literę, a ze zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy liczbę. Na ile sposobów możemy wybrać samogłoskę lub liczbę złożoną? Uwaga: Samogłoski w języku polskim to a, a, e, e, i, o, u, y . Liczba złożona to liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki.
4. Olek tworzy dwuznakowe kody zbudowane z liter: O, L, E, K lub cyfr: 1, 2, 3, 4, 5. Ile może utworzyć kodów, w których występują dwie jednakowe litery lub dwie jednakowe cyfry?
5. W jednej urnie znajdują się 32 kule oznaczone różnymi małymi literami alfabetu, a w drugiej urnie – 32 kule oznaczone różnymi wielkimi literami alfabetu. Losujemy jedną kulę z pierwszej lub z drugiej urny. Oblicz, na ile sposobów można wylosować kulę z literą $a, \acute{c}, \acute{e}, l, \acute{n}, \acute{o}, \acute{s}, \acute{z}, \acute{z}, \acute{A}, \acute{C}, \acute{E}, \acute{L}, \acute{N}, \acute{O}, \acute{S}, \acute{Z}, \acute{Z}$.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. W dwóch urnach znajdują się ponumerowane kule: w pierwszej urnie od numeru 1 do 35, a w drugiej od numeru 36 do 80. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednej kuli z urny pierwszej lub z urny drugiej. Na ile sposobów można wylosować kulę, której numer jest wielokrotnością liczby 8?
A. 4 B. 6 C. 10 D. 24
2. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednego elementu należącego do zbioru $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ lub do zbioru $B = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$. Na ile sposobów możemy wybrać liczbę nieparzystą?
A. 19 B. 10 C. 20 D. 9
3. W trzech urnach znajdują się kule tylko w trzech kolorach: białym, czarnym i niebieskim, przy czym stosunek liczby tych kul w każdej urnie wynosi 1:2:3. Ponadto wiadomo, że w pierwszej urnie jest 5 kul białych, w drugiej urnie jest 20 kul czarnych, a w trzeciej 45 kul niebieskich. Wybieramy jedną kulę z pierwszej, drugiej lub trzeciej urny. Na ile sposobów możemy wybrać kulę czarną?
A. 30 B. 60 C. 90 D. 180

2.4. Reguła mnożenia i dodawania

Zdarzenia elementarne możemy zliczać, stosując łącznie regułę mnożenia i regułę dodawania.

Ćwiczenie 1.

W dwóch urnach znajdują się kolorowe kule. W I urnie są trzy ponumerowane kule niebieskie i dwie ponumerowane czerwone, a w II urnie – cztery ponumerowane niebieskie i pięć ponumerowanych czerwonych. Wybieramy losowo po jednej kuli z każdej urny. Oblicz, na ile sposobów można wybrać kule tak, aby obie były tego samego koloru.

Rozwiązanie:

Dzielimy doświadczenie losowe na decyzje.

I decyzja: wybór kuli w kolorze niebieskim

Wybieramy jedną z trzech niebieskich kul z I urny i jedną z czterech niebieskich kul z II urny, zatem możemy wybrać dwie niebieskie kule na $3 \cdot 4$, czyli na 12 sposobów (reguła mnożenia).

II decyzja: wybór kuli w kolorze czerwonym

Wybieramy jedną z dwóch czerwonych kul z I urny i jedną z pięciu czerwonych kul z II urny, zatem możemy wybrać dwie czerwone kule na $2 \cdot 5$, czyli 10 sposobów (reguła mnożenia).

Obliczamy, na ile sposobów możemy wybrać kule tego samego koloru (kule mogą być albo niebieskie, albo czerwone – reguła dodawania).

$$12 + 10 = 22$$

Odpowiedź: Kule tego samego koloru możemy wybrać na 22 sposoby.

Ćwiczenie 2.

Z tali zawierającej 24 karty (tzn. w każdym z czterech kolorów: 9, 10, walet, dama, król, as) losujemy dwie karty bez zwracania. Oblicz, na ile sposobów wylosujemy dwie karty z asem lub dwie karty z dowolną liczbą.

Rozwiązanie:

Dzielimy doświadczenie losowe na decyzje.

I decyzja: wylosowanie dwóch kart z asem.

Losujemy jedną kartę z czterech kart z asem i następnie jedną, ale już z trzech kart z asem (bo pierwsza wylosowana karta nie została zwrócona do talii). Zatem możemy wylosować dwie karty z asem na $4 \cdot 3$, czyli na 12 sposobów (reguła mnożenia).

II decyzja: wylosowanie dwóch kart z dowolną liczbą.

Losujemy jedną kartę z ośmiu kart zawierających dowolną liczbę (tzn. liczbę 9 lub 10) i następnie jedną z siedmiu kart z dowolną liczbą (losowanie bez zwracania). Zatem możemy wylosować dwie karty z dowolną liczbą na $8 \cdot 7$, czyli 56 sposobów (reguła mnożenia).

Obliczamy, na ile sposobów możemy wylosować dwie karty z asem lub dwie karty z dowolną liczbą (reguła dodawania).

$$12 + 56 = 68$$

Odpowiedź: W losowaniu dwóch kart bez zwracania z talii 24 kart możemy na 68 sposobów wylosować dwie karty z asem lub dwie karty z dowolną liczbą.

Ćwiczenie 3.

Z tali zawierającej 52 karty losujemy dwie karty ze zwracaniem. Oblicz, ile wyników sprzyja doświadczeniu polegającemu na tym, że wylosujemy dwie karty z królem lub dwie karty z liczbą podzielną przez 5.

Rozwiązanie:

Dzielimy doświadczenie losowe na decyzje.

I decyzja: wylosowanie dwóch kart z królem.

Losujemy jedną kartę z czterech kart z królem i następnie jedną także z czterech kart z królem (bo pierwsza wylosowana karta została zwrócona do talii). Zatem doświadczeniu polegającemu na wylosowaniu dwóch kart z królem sprzyja $4 \cdot 4$, czyli 16 wyników (reguła mnożenia).

II decyzja: wybór dwóch kart z liczbą podzielną przez 5.

Losujemy jedną kartę z ośmiu kart zawierających liczbę podzielną przez 5 (po cztery karty z liczbą 5 i z liczbą 10), i następnie jedną także z ośmiu kart z liczbą podzielną przez 5 (losowanie ze zwracaniem). Zatem doświadczeniu polegającemu na wylosowaniu dwóch kart z liczbą podzielną przez 5 sprzyjają $8 \cdot 8$, czyli 64 wyniki (reguła mnożenia).

Obliczamy, na ile wyników sprzyja doświadczeniu, w którym wylosujemy dwie karty z królem lub dwie karty z liczbą podzielną przez 5 (reguła dodawania).

$$16 + 64 = 80$$

Odpowiedź: Doświadczeniu polegającemu na wylosowaniu dwóch kart z królem lub dwóch kart z liczbą podzielną przez 5 sprzyja 80 wyników (przy losowaniu ze zwracaniem z talii 52 kart).

Ćwiczenie 4.

Oblicz, ile jest liczb dwucyfrowych, w których zapisie występuje co najmniej raz cyfra 5 albo cyfra 6.

Rozwiązanie:

Rozważmy następujące sytuacje.

I sytuacja: jedna z cyfr 5 lub 6 jest cyfrą dziesiątek.

Jeśli cyfrą dziesiątek jest 5, to cyfrą jedności może być jedna z dziewięciu następujących cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9. Cyfra 6 nie może być cyfrą jedności, bo w zapisie liczby dwucyfrowej może wystąpić albo cyfra 5 (nawet dwa razy) albo cyfra 6.

Podobnie jest, jeśli cyfrą dziesiątek jest 6. Wówczas cyfrą jedności może być jedna z dziewięciu następujących cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Cyfra 5 nie może być w tej sytuacji cyfrą jedności.

Jeśli więc na pozycji dziesiątek stoi jedna z tych dwóch cyfr (5 lub 6), to na pozycji jedności znajduje się jedna z pozostałych dziewięciu cyfr. Oznacza to, że jest $2 \cdot 9$, czyli 18 takich liczb (reguła mnożenia).

II sytuacja: cyfra 5 lub 6 jest cyfrą jedności.

Jeśli cyfrą jedności jest 5, to cyfrą dziesiątek może być jedna z siedmiu następujących cyfr: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 (wykluczamy trzy cyfry: cyfrę 6 — bo jeśli jest cyfra 5, to nie może być cyfra 6; cyfrę 5 — bo wówczas cyfry jedności i dziesiątek są takie same, a ten przypadek zawarty jest w pierwszej sytuacji; cyfrę 0 — bo liczba z cyfrą 0 na pozycji dziesiątek nie jest liczbą dwucyfrową).

Podobnie jest, jeśli cyfrą jedności jest 6, wówczas cyfrą dziesiątek może być jedna z siedmiu następujących cyfr: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 (wykluczamy cyfry 6, 5 i 0).

Wobec tego, gdy na pozycji dziesiątek stoi jedna z siedmiu cyfr, a na pozycji jedności jedna z dwóch cyfr (5 lub 6), to mamy $7 \cdot 2$, czyli 14 takich liczb (reguła mnożenia).

Obliczamy, ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych mających w zapisie cyfrę 5 albo 6 (reguła dodawania).

$$18 + 14 = 32$$

Odpowiedź: Są 32 liczby dwucyfrowe, w których zapisie występuje co najmniej raz cyfra 5 albo cyfra 6.

Ćwiczenie 5.

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Otrzymane wyniki zapisujemy jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej. Oblicz, ile z utworzonych w ten sposób liczb będzie mniejszych od 300 lub większych od 600.

Rozwiązanie:

Rozważmy następujące sytuacje.

I sytuacja: utworzenie liczby mniejszej od 300.

Największą liczbą utworzoną zgodnie z warunkami doświadczenia losowego, która spełni ten warunek, jest 266. Oznacza to, że podczas pierwszego rzutu kostką może выпаść 1 lub 2 oczka. Natomiast podczas drugiego i trzeciego rzutu może выпаść każda następująca liczba oczek: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6. Wobec tego są $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ liczby spełniające ten warunek (reguła mnożenia).

II sytuacja: utworzenie liczby większej od 600.

Najmniejszą liczbą utworzoną zgodnie z warunkami doświadczenia losowego, która spełni powyższy warunek, jest 611. Oznacza to, że podczas pierwszego rzutu kostką może выпаść 6 oczek, a podczas drugiego i trzeciego rzutu może выпаść dowolna liczba oczek (tzn. 1, 2, 3, 4, 5, 6) Wobec tego utworzymy w ten sposób $1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$ liczb (reguła mnożenia).

Obliczamy, na ile sposobów utworzymy liczby mniejsze od 300 lub większe od 600 (reguła dodawania).

$$72 + 36 = 108$$

Odpowiedź: Liczb spełniających warunki zadania jest 108.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. W dwóch urnach znajdują się ponumerowane kule.

I urna: 15, 26, 37, 48

II urna: 54, 62, 73

Wybieramy jedną kulę z urny I, a następnie jedną kulę z urny II. Na ile sposobów można wybrać te kule tak, aby ich suma była liczbą parzystą?

2. Na jednej prostej zaznaczono cztery punkty, a na drugiej – trzy punkty. Ile można narysować odcinków, których końcami są punkty leżące na różnych prostych?



3. W pudełku jest pięć kul ponumerowanych od 1 do 5. Z pudełka losujemy jedną kulę, zapisujemy jej numer i wrzucamy kulę z powrotem do pudełka. Następnie losujemy drugą kulę i również zapisujemy jej numer. Oblicz, ile jest wyników doświadczenia polegającego na tym, że utworzona w ten sposób liczba jest parzysta lub podzielna przez 5.
4. Iza może dojechać z domu do szkoły bezpośrednio autobusem numer 12, 22 lub 32. Może również dojechać z przesiadką – najpierw autobusem numer 11, 21 lub 31, a następnie tramwajem numer 1 lub 2. Na ile sposobów Iza może dojechać do szkoły?
5. Karol tworzy dwuznakowe kody zbudowane z liter: K, A, R, O, L lub cyfr: 6, 7, 8, 9. Ile może utworzyć kodów, w których występują dwie różne litery lub dwie różne cyfry?
6. Ile jest liczb dwucyfrowych, z których obie cyfry są parzyste lub obie cyfry są nieparzyste?
7. Asia ma cztery różne torebki brązowe i trzy różne torebki czarne oraz dwie różne pary butów brązowych i pięć różnych par butów czarnych. Oblicz, na ile sposobów może wybrać strój, jeżeli chce, aby torebka i buty były w tym samym kolorze.
8. Do zamku można wejść przez jedną z dwóch wież. Pierwsza z nich jest zamknięta kodem trzycyfrowym, w którym wszystkie cyfry są nieparzyste, a druga – kodem trzycyfrowym, w którym wszystkie cyfry są parzyste. Oblicz, na ile sposobów można wejść do zamku przez każdą z wież.
9. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz, ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu:
 - a) w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek,
 - b) w drugim rzucie otrzymamy liczbę oczek równą co najwyżej 5.
10. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej. Ile liczb podzielnych przez 5 można w ten sposób otrzymać?
11. Z talii zawierającej 24 karty (tzn. w każdym z czterech kolorów: 9, 10, walet, dama, król i as) losujemy 2 karty i układamy je w kolejności wylosowania. Ile jest wyników losowania zawierających co najmniej 1 króla?

- Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, które są podzielne przez 50?
A. 36 B. 10 C. 9 D. 18
- Ile jest wszystkich dodatnich liczb całkowitych czterocyfrowych mniejszych od 3000 lub większych od 8000, zapisanych za pomocą cyfr: 2, 4, 6, 8 tak, że żadna cyfra się nie powtarza?
A. 12 B. 24 C. 64 D. 256
- Z talii zawierającej 24 karty (tzn. w każdym z czterech kolorów: 9, 10, walet, dama, król i as) losujemy 2 karty i układamy w kolejności wylosowania. Ile jest wyników losowania zawierających co najmniej 1 kiera?
A. 246 B. 108 C. 30 D. 18
- Spośród cyfr: 0, 1, 3, 5, 7 tworzymy liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 5?
A. 20 B. 21 C. 16 D. 24
- Michał, który jest siatkarzem, ma do dyspozycji cztery różne koszulki niebieskie i trzy różne czerwone oraz pięć różnych par spodenek w kolorze niebieskim i trzy różne pary spodenek w kolorze czerwonym. Na ile różnych sposobów Michał może wybrać strój składający się z koszulki i spodenek, jeśli chce, aby były one w różnych kolorach?
A. 56 B. 29 C. 27 D. 28

2.5. Zadania utrwalające

- Doświadczenie losowe polega na rzucie czworościenną kostką. Po wykonaniu rzutu odczytujemy liczbę oczek ze ścianki, na którą upadła kostka. W 25 rzutach otrzymano następujące wyniki: 1, 4, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 1, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 2, 4, 1. Oblicz częstość (wyrażoną w procentach) występowania jednego oczka, dwóch oczek, trzech oczek i czterech oczek.
- Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że wypadł co najmniej jeden orzeł i nie wypadła reszka.
- Rzucamy sześcienną kostką do gry, a następnie monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że na kostce wypadła liczba oczek większa od 4, a na monecie wypadł orzeł.

4. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu:
 - a) suma wylosowanych liczb oczek wynosi 6,
 - b) iloczyn wylosowanych liczb oczek jest liczbą nieparzystą.
5. W szufladzie znajdują się trzy chusteczki: biała, niebieska i żółta. Losujemy kolejno bez zwracania trzy chusteczki.
 - a) Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające temu doświadczeniu losowemu.
 - b) Określ, czy zdarzenie, że wśród wylosowanych chusteczek jest chusteczka niebieska, jest zdarzeniem niemożliwym czy pewnym.
6. W restauracji jest pięć rodzajów zup, osiem drugich dań, cztery desery i siedem napojów. Ile jest wszystkich możliwych sposobów zamówienia dwudaniowego obiadu z deserem i napojem?
7. Pan Michał ma trzy różne marynarki, sześć różnych par spodni i dwanaście różnych koszul. Na ile różnych sposobów może włożyć ubranie, jeśli zawsze wkłada marynarkę, spodnie i koszulę?
8. W pudełku znajdują się kartki, na których zapisano jednocyfrowe liczby naturalne nieparzyste. Wyjmujemy z pudełka kolejno trzy kartki i układając je jedna obok drugiej, tworzymy liczby trzycyfrowe. Ile maksymalnie takich liczb możemy utworzyć?
9. Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5?
10. W klasie jest 14 dziewcząt i 15 chłopców. Ile par chłopiec – dziewczyna można wybrać w tej klasie?
11. W urnie znajdują się kartki z liczbami jednocyfrowymi większymi od zera oraz z samogłoskami: a, e, i, o, u, y. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednego elementu z tej urny. Na ile sposobów możemy wybrać samogłoskę lub liczbę pierwszą?
12. Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Ile wynosi liczba wyników sprzyjających doświadczeniu polegającemu na tym, że orzeł wypadł co najmniej raz?
13. W dwóch urnach znajdują się kolorowe kule. W I urnie są trzy ponumerowane kule niebieskie, sześć ponumerowanych czerwonych i cztery ponumerowane zielone, a w II urnie – cztery ponumerowane kule niebieskie, pięć ponumerowanych czerwonych i osiem ponumerowanych zielonych. Wybieramy losowo po jednej kuli z każdej urny. Oblicz, na ile sposobów można wybrać kule tak, aby obie były tego samego koloru.

14. W urnie jest pięć kul ponumerowanych od 1 do 5. Losujemy kolejno dwie kule ze zwracaniem i tworzymy liczbę dwucyfrową. Ile jest możliwych wyników losowania, w którym otrzymana liczba jest większa od 35 lub mniejsza od 15?
15. Hubert tworzy dwuznakowe kody zbudowane z liter: H, U, B, E, R, T lub cyfr: 2, 4, 6, 8. Ile może utworzyć kodów, w których występują różne spółgłoski lub dwie różne cyfry?
16. Ile jest liczb dwucyfrowych, z których jedna z cyfr jest parzysta, a druga – nieparzysta?
17. W dwóch urnach znajdują się ponumerowane kule.

I urna: 0, 1, 2, 3, 4, 5

II urna: 6, 7, 8, 9

Wybieramy jedną kulę z urny I, a następnie jedną z urny II. Na ile sposobów można wybrać te kule tak, aby ich suma była liczbą nieparzystą?

18. Spośród cyfr należących do zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ tworzymy liczby trzycyfrowe, w których cyfry mogą się powtarzać. Ile wśród nich jest liczb większych od 599 lub mniejszych od 400?
19. W urnie znajdują się kule ponumerowane liczbami naturalnymi jednocyfrowymi większymi od zera. Doświadczenie polega na losowaniu dwóch kul ze zwracaniem. Wyniki zapisujemy w kolejności wylosowania i otrzymujemy w ten sposób liczby dwucyfrowe. Ile jest liczb, w których cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności?



RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKA

3.1. Obliczanie prawdopodobieństwa klasycznego

Po przeprowadzeniu doświadczenia losowego możemy obliczyć częstość występowania poszczególnych wyników – jako iloraz liczby otrzymanych interesujących nas wyników przez liczbę wszystkich wykonanych doświadczeń.

W podobny sposób obliczamy **prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia losowego**.

Stosujemy wzór: $p = \frac{n}{N}$, gdzie n – liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu, a N – liczba wszystkich zdarzeń elementarnych.

Ćwiczenie 1.

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek co najmniej równej 3 przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Rozwiązanie:

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki rzutu sześcienną kostką do gry: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $N = 6$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że otrzymano liczbę oczek co najmniej równą 3: 3, 4, 5, 6

Określamy liczbę zdarzeń sprzyjających temu zdarzeniu: $n = 4$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia: $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek co najmniej równej 3 przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry wynosi $\frac{2}{3}$.

Ćwiczenie 2.

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Co jest bardziej prawdopodobne: suma wyrzuconych oczek jest równa 7 czy iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 12?

Rozwiązanie:

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych przy dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry: $N = 6 \cdot 6 = 36$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że suma wyrzuconych oczek jest równa 7: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)

Określamy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu, że suma wyrzuconych oczek jest równa 7: $n = 6$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia, że suma wyrzuconych oczek jest równa 7: $\frac{6}{36}$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 12: (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)

Określamy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu, że iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 12: $n = 4$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia, że iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 12: $\frac{4}{36}$

Odpowiedź: Bardziej prawdopodobne przy dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry jest wyrzucenie oczek, których suma jest równa 7, niż wyrzucenie oczek, których iloczyn wynosi 12.

Ćwiczenie 3.

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 15 lub podzielną przez 20.

Rozwiązanie:

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $N = 99 - 9 = 90$

Wypisujemy wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90

Wypisujemy wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez 20: 20, 40, 60, 80

Wypisujemy wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez 15 lub 20: 15, 20, 30, 40, 45, 60, 75, 80, 90

Określamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu, że otrzymamy liczbę podzielną przez 15 lub podzielną przez 20: $n = 9$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia: $p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru liczb dwucyfrowych liczby podzielnej przez 15 lub przez 20 jest równe $\frac{1}{10}$.

Ćwiczenie 4.

Na loterii jest 65 losów, w tym 52 przegrywających. Kupujemy 1 los. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wygramy nagrodę?

Rozwiązanie:

Określamy liczbę zdarzeń elementarnych: $N = 65$

Określamy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu, że wylosujemy los wygrywający: $n = 65 - 52 = 13$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia: $p = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wygrania nagrody wynosi $\frac{1}{5}$.

Ćwiczenie 5.

Pani Natalia ma 6 żakietów: biały, czerwony, niebieski, zielony, szary i granatowy oraz 7 spódnic: czarną, białą, żółtą, fioletową, zieloną, granatową i szarą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierając losowo jeden żakiet i jedną spódnicę, pani Natalia skompletuje strój w jednym kolorze.

Rozwiązanie:

Określamy liczbę zdarzeń elementarnych: $N = 6 \cdot 7 = 42$

Określamy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu, że pani Natalia skompletuje strój w jednym kolorze: wybrany strój może być koloru białego, zielonego lub granatowego, więc $n = 3$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia: $p = \frac{3}{42} = \frac{1}{14}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo skompletowania stroju wynosi $\frac{1}{14}$.

Ćwiczenie 6.

W dwóch torebkach są cukierki. W pierwszej torebce jest 16 cukierków czekoladowych i 14 owocowych, a w drugiej torebce są 24 cukierki czekoladowe i 26 cukierków owocowych. Losujemy cukierek najpierw z pierwszej, a potem z drugiej torebki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku losowania otrzymamy dwa cukierki czekoladowe?

Rozwiązanie:

Wyznaczamy liczbę cukierków w każdej torebce: w pierwszej torebce jest $16 + 14$, czyli 30 cukierków, a drugiej jest $24 + 26$, czyli 50 cukierków.

Określamy liczbę zdarzeń elementarnych: $N = 30 \cdot 50 = 1500$

Określamy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu, że wylosujemy dwa cukierki czekoladowe:

$$n = 16 \cdot 24 = 384$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia: $p = \frac{384}{1500} = 0,256$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch cukierków czekoladowych wynosi 0,256.

Ćwiczenie 7.

Dane są dwa zbiory $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 4.

Rozwiązanie:

Określamy liczbę zdarzeń elementarnych: $N = 5 \cdot 8 = 40$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 4: $(1, 3), (1, 7), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (4, 8), (5, 3), (5, 7)$

Określamy liczbę zdarzeń sprzyjających temu zdarzeniu: $n = 10$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia: $p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania sumy liczb podzielnej przez 4 wynosi $\frac{1}{4}$.

Ćwiczenie 8.

Prawdopodobieństwo wylosowania chłopca z klasy, w której jest 12 dziewczyn, wynosi $\frac{3}{5}$. Ilu jest chłopców w tej klasie?

Rozwiązanie:

Oznaczamy przez x liczbę chłopców w tej klasie, a przez $12 + x$ liczbę wszystkich uczniów tej klasy.

Wyznaczamy liczbę chłopców:

$$\frac{x}{12+x} = \frac{3}{5}$$

$$x = 18$$

Odpowiedź: W tej klasie jest 18 chłopców.

Zdarzenie, dla którego prawdopodobieństwo zajścia jest równe 1, nazywamy **zdarzeniem pewnym**, a takie, dla którego prawdopodobieństwo zajścia wynosi 0, nazywamy **zdarzeniem niemożliwym**. Na przykład zdarzeniem pewnym jest wyrzucenie orła lub reszki w rzucie monetą, a zdarzeniem niemożliwym jest wyrzucenie więcej niż 6 oczek w jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Rzucamy dwa razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że dwa razy wypadnie orzeł.
2. W urnie jest 30 kul, w tym 18 kul czarnych. Losujemy z urny jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula nie jest czarna?
3. W urnie jest 100 kul: 25 kul białych, 35 zielonych, a pozostałe są czarne. Losujemy z urny jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana kula jest biała, oraz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula jest czarna. Które zdarzenie jest bardziej prawdopodobne?
4. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania asa z talii 52 kart?
5. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wyrzuconej liczby oczek wyniesie 12.

6. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na:
 - a) wyrzuceniu liczby oczek, których suma jest co najwyżej równa 12,
 - b) wyrzuceniu liczby oczek, których iloczyn jest podzielny przez 7.
7. Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Wyznacz prawdopodobieństwo, że dokładnie w trzecim rzucie wypadnie reszka.
8. W loterii są 64 losy ponumerowane kolejno od 1 do 64. Nagrody otrzymują losy z numerami podzielnymi przez 4. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania w tej loterii?
9. Wśród 60 losów jest 28 przegrywających. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując dwa razy po jednym losie, wygramy dokładnie dwa razy?
10. Spośród liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 3.
11. Na półce jest 20 książek, wśród których sześć dotyczy historii Polski. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wzięta z półki losowo książka nie opisuje historii naszego kraju.
12. Pan Jan ma do dyspozycji trzy różne pary butów w kolorze granatowym i cztery różne pary butów w kolorze czarnym oraz sześć różnych koszul granatowych i dwie różne koszule czarne. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pan Jan dobierze buty i koszulę w tym samym kolorze.
13. W klubie szachowym jest 12 kobiet i 13 mężczyzn. Na zawody szachowe należy wybrać dwuosobową drużynę. Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne: to, że w tej drużynie znajdą się dwie kobiety, czy to, że w tej drużynie będzie dwóch mężczyzn? Uzasadnij swój wybór.
14. Talia składa się z 52 kart. Doświadczenie losowe polega losowaniu jednej karty z talii. Co jest bardziej prawdopodobne:
 - a) wyciągnięcie króla czy wyciągnięcie kiera,
 - b) wyciągnięcie asa czy piątki,
 - c) wyciągnięcie figury czy pika?



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. W grupie jest 12 kobiet i 28 mężczyzn. Losujemy jedną osobę z tej grupy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie to mężczyzna?

A. $\frac{3}{7}$
B. $\frac{5}{8}$
C. $\frac{1}{28}$
D. $\frac{7}{10}$

2. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Ile jest równe prawdopodobieństwo, że otrzymana suma oczek wynosi 4?
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{36}$
3. W loterii przygotowano 168 losów przegrywających i 24 losy wygrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zakupiony los będzie wygrany?
- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{9}$
4. W pudełku są trzy kule białe i m kul czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest równe 0,25. Ile wynosi m ?
- A. 1 B. 4 C. 6 D. 8

3.2. Średnia arytmetyczna, średnia ważona

Statystyka zajmuje się metodami pozyskiwania i prezentacji, a przede wszystkim analizy danych opisujących różne zjawiska. Dla każdego zbioru danych statystycznych można określić pewne liczby charakteryzujące ten zbiór. Są nimi średnia arytmetyczna i średnia ważona.

Średnią arytmetyczną dla kilku wielkości oblicza się, dzieląc sumę wartości danych przez liczbę danych.



Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, to liczba $\bar{x}$ określona wzorem:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Ze średnią arytmetyczną najczęściej spotykamy się w szkole podczas liczenia średniej oceny semestralnej dla każdego z uczniów w klasie.

Ćwiczenie 1.

Jaką średnią ocen uzyskał Wojtek, jeśli na świadectwie miał jedną ocenę celującą, dwie oceny bardzo dobre, cztery oceny dobre, sześć ocen dostatecznych i dwie oceny dopuszczające?

Rozwiązanie:

$$\frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{15} = 3,6$$

Odpowiedź: Średnia ocen Wojtka wyniosła 3,6.

Gdy obliczamy średnią arytmetyczną liczb, wszystkie te liczby traktujemy jednakowo. Czasami jednak do niektórych danych przywiązujemy większą wagę i chcemy to uwzględnić przy obliczaniu średniej wartości.



Ten rodzaj średniej kilku danych, w którym nie każda wielkość jest jednakowo ważna, nazywamy **średnią ważoną**. Czynniki opisujące znaczenie, jakie chcemy nadać poszczególnym wielkościom, nazywamy wagami średniej ważonej.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, \dots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie) to liczba x_w określona wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Gdy wszystkie wagi są równe, średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 2.

Do pierwszej klasy szkoły branżowej przyjmuje się kandydatów na podstawie średniej ważonej ocen na świadectwie ukończenia szkoły podstawowej z następujących przedmiotów: język polski, matematyka, język obcy, historia, geografia. Ocenę będą przeliczane na punkty według zasady: celujący – 4 punkty, bardzo dobry – 3 punkty, dobry – 2 punkty, dostateczny – 1 punkt, dopuszczający – 0 punktów.

Jakie rezultaty osiągnęli kandydaci, których oceny podano w tabeli?

Kandydat	Język polski	Matematyka	Język obcy	Historia	Geografia	Średnia ważona
Ania Bąk	4	5	4	3	3	
Kacper Dyk	5	3	5	4	4	
Wojtek Zielony	3	4	3	3	2	

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią ważoną Ani Bąk:

$$\frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{2 + 3 + 2 + 1 + 1} \cong 4,11$$

Obliczamy średnią ważoną Kacpra Dyka:

$$\frac{5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{3 + 1 + 3 + 2 + 2} \cong 4,45$$

Obliczamy średnią ważoną Wojtki Zielonego:

$$\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{1 + 2 + 1 + 1 + 0} \cong 3,40$$

Odpowiedź: Średnia ważona ocen Ani Bąk wynosi 4,11, Kacpra Dyka wynosi 4,45, a Wojtki Zielonego wynosi 3,40.

Ćwiczenie 3.

W 10-osobowej drużynie średnia wieku była równa 18 lat. Gdy do grupy dołączył trener, średnia wieku wzrosła do 20 lat. Ile lat ma trener?

Rozwiązanie:

Obliczamy sumę lat 10-osobowej drużyny: $10 \cdot 18 = 180$

Oznaczamy przez x wiek trenera.

Wyznaczamy wiek trenera:

$$\frac{180 + x}{10 + 1} = 20$$

$$180 + x = 220$$

$$x = 40$$

Odpowiedź: Trener ma 40 lat.

Ćwiczenie 4.

Średnia arytmetyczna trzech kolejnych naturalnych liczb parzystych wynosi 12. Znajdź te liczby.

Rozwiązanie:

Oznaczamy przez x , $x + 2$, $x + 4$ trzy kolejne naturalne liczby parzyste.

Wyznaczamy niewiadomą x :

$$\frac{x + (x + 2) + (x + 4)}{3} = 12$$

$$3x + 6 = 36$$

$$x = 10$$

Odpowiedź: Szukane liczby to 10, 12 i 14.

Ćwiczenie 5.

Wojtek zmieszał 2,5 litra farby w cenie 40 zł za litr, pół litra farby w cenie 28 zł za litr i 1 litr farby w cenie 30 zł za litr. Wyznacz cenę 1 litra tej mieszanki.

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią ważoną:

$$\frac{2,5 \cdot 40 + 0,5 \cdot 28 + 1 \cdot 30}{2,5 + 0,5 + 1} = \frac{144}{4} = 36$$

Odpowiedź: Cena 1 litra mieszanki wynosi 36 zł.

Ćwiczenie 6.

Tabela przedstawia zestawienie stażu (w pełnych latach) pracowników pewnej firmy.

Staż (pełne lata)	0	1	2	3	5
Liczba pracowników	3	9	17	9	2

Oblicz średni staż w tej firmie.

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią stażu:

$$\frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 17 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 2}{3 + 9 + 17 + 9 + 2} = \frac{80}{40} = 2$$

Odpowiedź: Średni staż w tej firmie wynosi 2 lata.

Ćwiczenie 7.

Uczeń na rozwiązanie testu składającego się z 12 zadań przeznaczył 40 minut. Na rozwiązanie każdego z 4 zadań otwartych przeznaczył trzy razy więcej czasu niż na rozwiązanie każdego z zadań zamkniętych. Wyznacz średni czas przeznaczony na rozwiązanie jednego zadania zamkniętego.

Rozwiązanie:

Oznaczamy przez x średni czas przeznaczony na rozwiązanie jednego zadania zamkniętego oraz przez $3x$ – średni czas przeznaczony na rozwiązanie jednego zadania otwartego.

Wyznaczamy średni czas przeznaczony na rozwiązanie jednego zadania zamkniętego:

$$(12 - 4)x + 4 \cdot 3x = 40$$

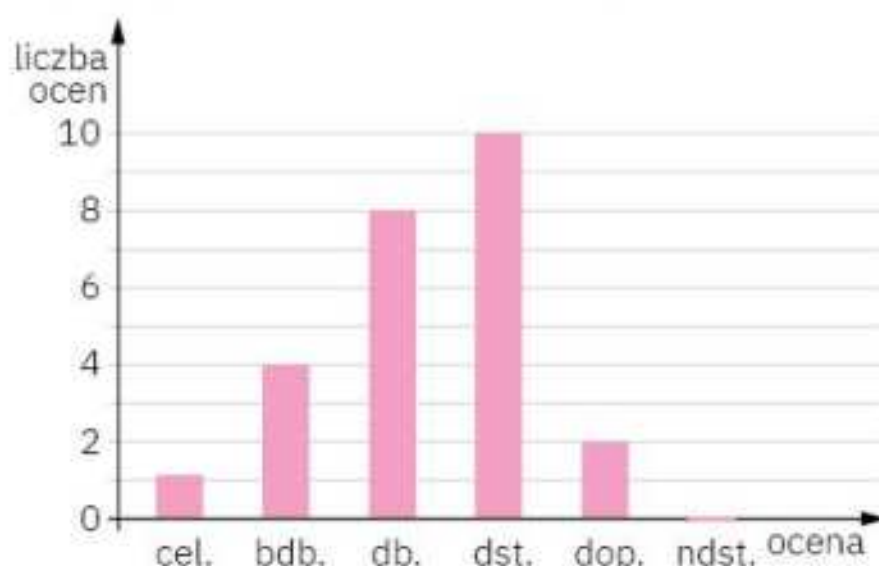
$$x = 2$$

Odpowiedź: Na rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń przeznaczył średnio 2 minuty.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 6, 4, 2, 4, 4.
2. Oblicz średnią arytmetyczną 10 kolejnych liczb pierwszych.
3. Na diagramie słupkowym przedstawiono oceny semestralne z matematyki uczniów pewnej klasy. Oblicz średnią ocen w tej klasie.



4. Bartek przez cały rok notował średnie miesięczne temperatury powietrza w swoim mieście.

miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
średnia miesięczna temperatura powietrza w °C	-5,6	-3,8	-0,5	4,2	11,8	13,6	19,1	17,5	11,4	8,7	1,4	-4,6

Wyznacz średnią roczną temperaturę w tym mieście.

5. Oblicz średnią ważoną danych z tabeli.

wartość danej	2	4	7	9
waga	3	1	4	2

6. W tabeli przedstawiono wyniki biegu na 100 m podczas zawodów lekkoatletycznych.

numer zawodnika	1	2	3	4	5	6	7	8
czas w sekundach	11,12	10,85	10,98	10,76	11,01	10,55	10,89	10,80

Ile wynosi średni wynik biegu na 100 m?

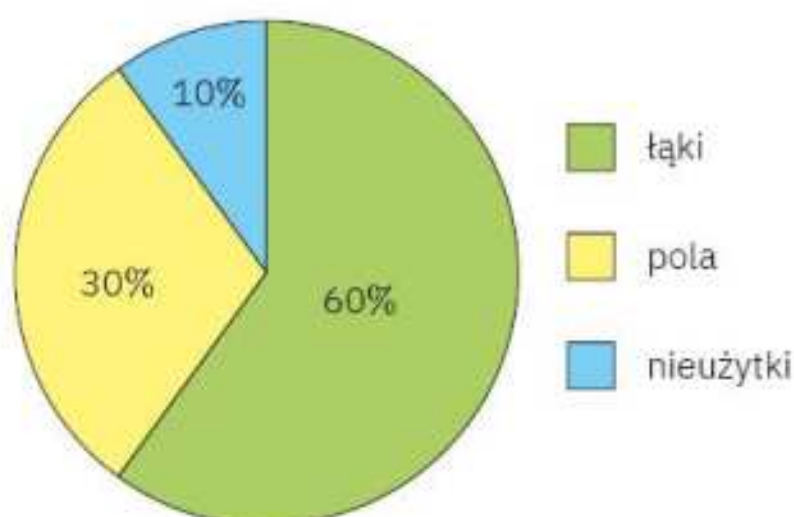
7. Na podstawie danych z tabeli oblicz średnią ocen każdego z uczniów oraz średnią z każdego przedmiotu.

Lp.	Nazwisko i imię	Język polski	Język angielski	Historia	Matematyka	Fizyka	Geografia	Podstawy ekonomii	Elementy prawa	Statystyka	Zasady rachunkowości	średnia ucznia
1.	Bil Anna	4	4	3	2	3	5	3	4	3	4	
2.	Dyk Jan	5	4	5	4	4	5	3	4	3	5	
3.	Gęski Piotr	3	3	3	3	2	4	3	3	2	4	
4.	Kawa Ewa	3	4	5	4	3	5	4	5	4	3	
5.	Nizio Jakub	4	5	3	4	3	3	5	4	5	3	
6.	Saka Paweł	3	3	2	2	3	4	3	3	3	3	
7.	Tyl Iwona	5	5	4	4	5	3	4	4	4	5	
8.	Waga Adam	5	4	4	5	5	4	5	5	5	5	
	średnia ocen											

8. Na stoisku z artykułami spożywczymi sprzedawano kosze świąteczne ze słodyczami. Ogółem sprzedano 50 koszy, w tym: 25 koszy w cenie 38 zł za sztukę, 15 koszy w cenie 66 zł za sztukę oraz 10 koszy w cenie 89 zł za sztukę. Ile wynosi przeciętna cena kosza świątecznego ze słodyczami?
9. Plantator sprzedał 25% zbioru truskawek po 6 zł za kilogram, 50% po 4,5 zł za kilogram, 15% po 3 zł za kilogram i 10% po 1,5 zł za kilogram. Jaka była średnia cena kilograma truskawek?
10. Pewien nauczyciel ustala ocenę semestralną, licząc średnią ważoną następujących liczb: średnia ocen ze sprawdzianu (z wagą 0,3), średnia ocen z klasówki (z wagą 0,5) oraz średnia ocen za pracę na lekcji (z wagą 0,2). Następnie otrzymaną liczbę zaokrągla do liczby całkowitej. Jaką ocenę na koniec semestru otrzyma uczeń, którego oceny przedstawiono w poniższej tabeli?

	Sprawdziany	Klasówki	Praca na lekcji
oceny	3, 5, 4	2, 3, 4, 4	3, 2

11. Średnia wieku 12 pracowników pewnej firmy wynosi 30 lat. Gdy przyjęto nowego pracownika, średnia wieku pracowników zwiększyła się o rok. Ile lat ma nowy pracownik?
12. Wiadomo, że 1 ha pola kosztuje 25 tys. zł, łąki – 16 tys. zł, a za 1 ha nieużytków trzeba zapłacić 7,5 tys. zł. Jaka jest średnia cena hektara działki rolnej, której podział przedstawiono na diagramie?



13. Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb: x , 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wyznacz liczbę x .
14. Średnia temperatura pierwszych 10 dni kwietnia wynosi $11,5^{\circ}\text{C}$, a średnia temperatura pierwszych 9 dni kwietnia wynosi 11°C . Jaką temperaturę zanotowano 10 kwietnia?
15. Robert miał na świadectwie cztery piątki, pięć czwórek, a pozostałe oceny to trójki. Oblicz, ile było na świadectwie trójek, jeśli średnia arytmetyczna ocen Roberta wynosiła 4.

- Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb: 5, 8, -1, 6, 6, 1, 10?
A. $5\frac{2}{7}$ B. 5 C. $4\frac{6}{7}$ D. 4,5
- Średnia arytmetyczna liczb: 4, 0, 5, 5, x, 3 jest równa 3,5. Jaka wartość ma x?
A. $x = 4$ B. $x = 3,5$ C. $x = 3$ D. $x = 5$
- Ocena semestralna z matematyki jest ustalana na podstawie średniej ważonej ocen ucznia (zaokrąglonej zgodnie z zasadami matematycznymi do pełnych ocen). Oceny cząstkowe i ich wagi podano w tabeli.

	Waga	Oceny
klasówki	2	3, 3, 4
kartkówki	1	4, 4, 3, 2

Ile wynosi ocena semestralna dla podanych ocen cząstkowych i ich wag?

- A. 3,5 B. 4,0 C. 3,0 D. 3,3
- Średnia ważona zestawu danych zebranych w tabeli to 3,3.

ocena	2	3	5	x	4
waga	1	3	1	1	4

Ile wynosi wartość oceny x?

- A. 3 B. 5 C. 4 D. 1

3.3. Mediana i dominanta

Innymi wielkościami charakteryzującymi zbiór danych są mediana i dominanta.

Mediana to środkowy wynik w danym zbiorze uporządkowanym niemalejąco.



Aby wyznaczyć medianę danego zbioru liczb, należy najpierw uporządkować te liczby niemalejąco, a następnie wśród tak uporządkowanych liczb odczytać wynik środkowy.

Jeśli liczba elementów zbioru danych jest równa n i jest to liczba nieparzysta, to medianą jest liczba o numerze $\frac{n+1}{2}$.

Jeżeli liczba elementów w zbiorze jest równa n i jest to liczba parzysta, to mediana jest równa średniej arytmetycznej dwóch środkowych liczb (liczbami środkowymi są liczby o numerach $\frac{n}{2}$ i $\frac{n}{2} + 1$).

Ćwiczenie 1.

- a) Oblicz medianę danych: 6 mm, 4 mm, 2 mm, 5 mm, 2 mm.
b) Oblicz medianę danych: 6 kg, 8 kg, 6 kg, 9 kg.

Rozwiązanie:

- a) Porządkujemy zbiór danych w kolejności niemalejącej: 2 mm, 2 mm, 4 mm, 5 mm, 6 mm.

Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą nieparzystą i wynosi $n = 5$.

Medianą jest liczba o numerze trzecim $\left(\frac{5+1}{2} = 3\right)$, czyli 4 mm.

Odpowiedź: Mediana tego zestawu danych jest równa 4 mm.

- b) Porządkujemy zbiór danych w kolejności niemalejącej: 6 kg, 6 kg, 8 kg, 9 kg.

Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą parzystą i wynosi $n = 4$. Zatem

znajdujemy dwie środkowe liczby. Są to liczby o numerze drugim $\left(\frac{n}{2} = \frac{4}{2}\right)$ i o numerze trzecim $\left(\frac{n}{2} + 1 = \frac{4}{2} + 1\right)$, czyli dane: 6 kg i 8 kg.

Mediana jest średnią arytmetyczną tych dwóch danych, czyli: $\frac{6+8}{2} = 7$ (kg).

Odpowiedź: Mediana tego zestawu danych jest równa 7 kg.



Diagram lodygowo-listkowy jest sposobem przedstawiania danych, przy czym diagram ten przedstawia wszystkie dane oraz kształt rozkładu tych danych.

Aby narysować diagram lodygowo-liściowy, ustalamy najpierw, jakie liczby będą stanowiły lodygę (zwykle opuszczając jedną cyfrę, np. cyfrę jedności), a następnie porządkujemy je rosnąco. Uzyskane liczby zapisujemy w jednej kolumnie, oddzielamy pionową kreską i dopisujemy odrzucone cyfry (liście) w kolejności niemalejącej.

Na przykład w postaci diagramu lodygowo-listkowego można zapisać rozkład odjazdu autobusów danej linii z określonego przystanku. Lodygę podają godziny, a liście minuty odjazdu.

Godz.	Min.
5	25 55
6	15 28 50
7	05 20 35 50
8	05 20 30 45
9	02

Ćwiczenie 2.

Oto dane dotyczące wagi (w gramach) pomidorów: 28, 72, 59, 44, 22, 27, 32, 40, 40, 52, 56, 60, 38, 67, 81, 40, 27, 42, 74, 82, 56, 72, 46, 55, 68, 50, 55, 38, 64. Wyznacz medianę tego zestawu danych.

Rozwiązanie:

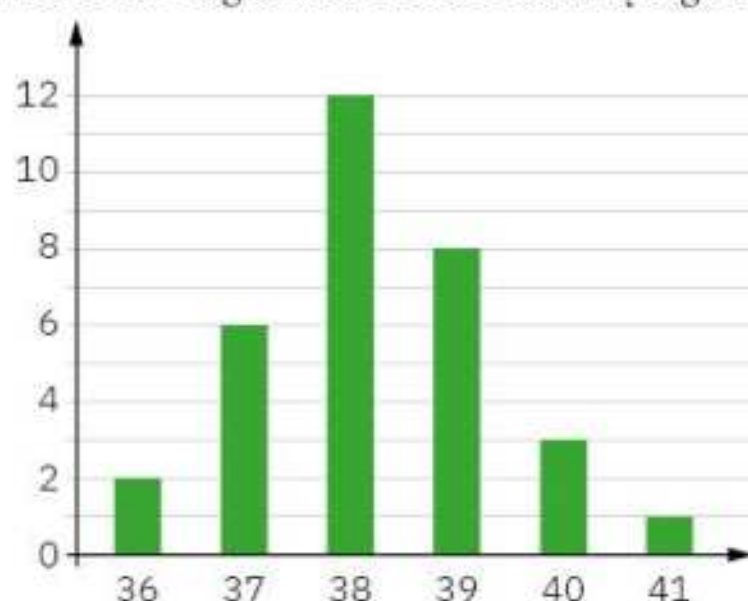
Porządkujemy dane, stosując diagram lodygowo-listkowy. Przed kreską piszemy cyfrę dziesiątek wagi pomidora, a po kresce cyfry jednostek w kolejności niemalejącej.

2	2	7	7	8		2	2	7	7	8	1 wynik = 22				
3	2	8	8			3	2	8	8	2 wynik = 27					
4	0	0	0	2	4	6	4	0	0	0	2	4	6		
5	0	2	5	5	6	6	9	5	0	2	5	5	6	6	9
6	0	4	7	8		6	0	4	7	8	15 wynik = 52				
7	2	2	4			7	2	2	4						
8	1	2				8	1	2			29 wynik = 82				

W tym zestawie jest 29 danych (n jest liczbą nieparzystą). Środkowym wynikiem jest wynik o numerze piętnastym, bo $\frac{29+1}{2} = 15$. Odszukujemy wynik 15, licząc kolejno liście diagramu od góry. Odczytujemy ten wynik, jest on równy 52. Odpowiedź: Mediana tego zestawu danych wynosi 52 gramy.

Ćwiczenie 3.

W pewnej klasie zapytano o numer obuwia, jaki noszą uczniowie. Wyniki tego sondażu przedstawiono na diagramie. Oblicz medianę tego zestawu danych.



Rozwiązanie:

Obliczamy liczbę wszystkich danych, tzn. liczbę wszystkich uczniów biorących udział w sondażu.

$$n = 2 + 6 + 12 + 8 + 3 + 1 = 32 \text{ (liczba parzysta)}$$

Wynikami środkowymi są liczby o numerach: $\frac{n}{2} = \frac{32}{2} = 16$ i $\frac{n}{2} + 1 = \frac{32}{2} + 1 = 17$.

Odczytujemy dane na pozycji:

- szesnastej – jest nią 38;
- siedemnastej – jest nią 38.

Obliczamy medianę tych danych: $\frac{38+38}{2} = 38$

Odpowiedź: Mediana tego zestawu danych wynosi 38.

Ćwiczenie 4.

Mediana zestawu danych: 11, 17, 10, 18, 11, x , 13, 16 jest równa 14. Wyznacz liczbę x .

Rozwiązanie:

Zauważamy, że w zestawie jest osiem danych, nie są one uporządkowane, a mediana nie jest równa żadnej z podanych liczb.

Porządkujemy dane niemalejąco, ale nie uwzględniamy nieznanej nam liczby x .

Otrzymujemy: 10, 11, 11, 13, 16, 17, 18.

Gdyby w zestawie były tylko te dane (jest ich siedem), wówczas medianą byłaby liczba znajdująca się na pozycji czwartej ($\frac{7+1}{2} = 4$) równa 13. Ponieważ w zestawie

jest osiem danych, więc mediana jest średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb (tzn. liczb znajdujących się na pozycji czwartej i piątej). Mediana ośmioelementowego zestawu danych wynosi 14 i jest większa od liczby 13. Wnioskujemy więc, że liczbę x należy więc umieścić następująco: 10, 11, 11, 13, x 16, 17, 18

$$\frac{13+x}{2} = 14 \quad \text{zapisujemy równanie pozwalające wyznaczyć liczbę } x$$

$$x = 15 \quad \text{liczba } x$$

Odpowiedź: Szukana liczba x jest równa 15.



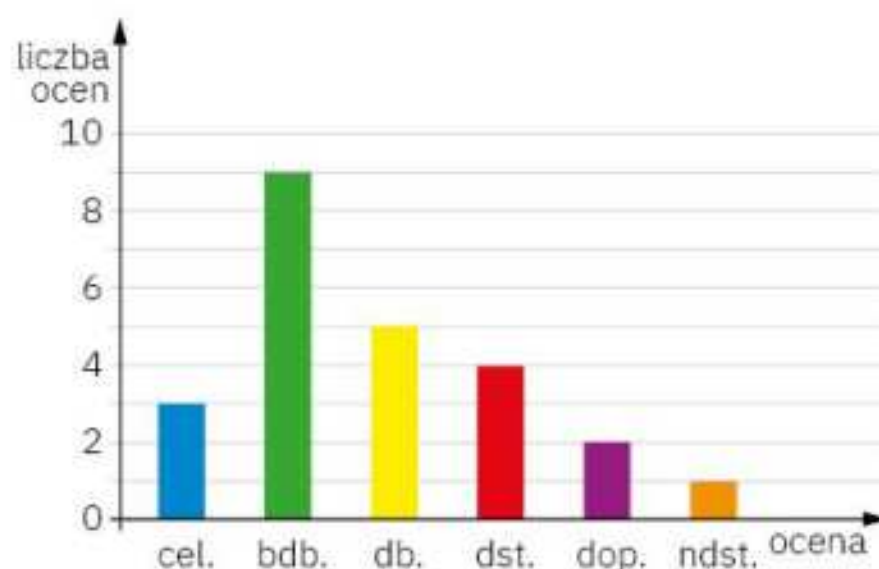
Dominanta to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Jeśli w zbiorze danych jest kilka wartości, które występują z taką samą liczebnością i większą niż pozostałe wartości, to każda z tych wartości jest dominantą. Jeśli natomiast wszystkie wartości występują z taką samą liczebnością, to mówimy, że w tym zbiorze danych nie ma dominanty.

Ćwiczenie 5.

Wyznacz dominanty zestawów ocen przedstawionych na diagramie i w tabeli.

a)



b)

ocena	cel.	bdb.	db.	dst.	dop.	ndst.
liczba ocen	3	4	8	8	4	1

Rozwiązanie:

a) Odczytujemy ocenę, która w tym zestawie danych występuje najczęściej. Jest to ocena bdb.

Odpowiedź: Dominantą tego zestawu danych jest ocena bdb.

b) Odczytujemy ocenę, która w tym zestawie danych występuje najczęściej. Są dwie takie oceny: db. i dst.

Odpowiedź: Dominantą tego zestawu danych są oceny db. i dst.

Ćwiczenie 6.

Zestaw danych: 27, x , 22, 25, 25, 22, 22, 27, 27 nie ma dominanty. Wyznacz liczbę x .

Rozwiązanie:

Zauważamy, że w zestawie jest dziewięć danych, które nie są uporządkowane. Porządkujemy dane niemalejąco, ale nie uwzględniamy nieznanego nam liczby x .

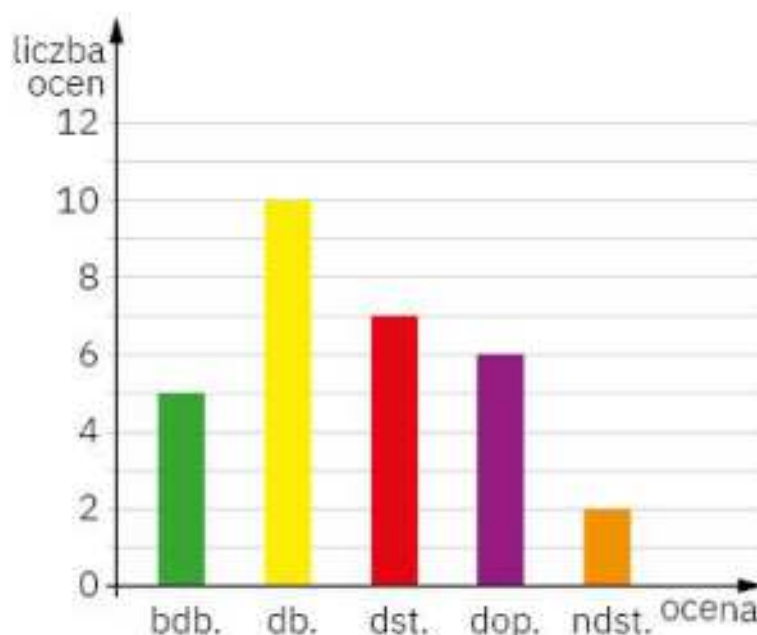
Otrzymujemy: 22, 22, 22, 25, 25, 27, 27, 27. Ten zestaw danych ma dwie dominanty. Są to liczby 22 i 27. Każda z tych liczb pojawia się w zestawie trzykrotnie.

Ponieważ zestaw danych: x , 22, 22, 22, 25, 25, 27, 27, 27 nie ma dominanty, wobec tego każda z liczb: 22, 25 i 27 musi pojawić się tyle samo razy. Wnioskujemy więc, że $x = 25$.

Odpowiedź: Liczba x jest równa 25.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. W styczniu opłaty za prąd mieszkańców pewnego bloku były następujące: 86 zł, 123 zł, 154 zł, 140 zł, 110 zł, 42 zł, 100 zł, 57 zł, 80 zł, 78 zł, 94 zł, 80 zł. Wyznacz medianę tych opłat.
2. Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki. Ile wynosi mediana ocen uzyskanych przez uczniów?



3. Średnia sześciu ocen ucznia wynosi 4. Jaka jest szósta ocena, jeżeli pięć pierwszych to oceny: 4, 3, 2, 5, 4? Oblicz medianę tych sześciu ocen.
4. W tabelce zanotowano, ile jabłek poszczególnych gatunków różniących się ceną sprzedawano każdego dnia na bazarze.

cena jabłek (zł/kg)	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	3,20	3,40
waga sprzedanych jabłek (kg)	50	45	40	32	32	25	20

Korzystając z tabeli:

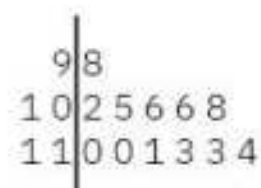
- a) znajdź medianę ceny,
- b) oblicz średnią cenę jabłek sprzedawanych na bazarze (z dokładnością do 0,01 zł).
5. Rzuć 20 razy sześcienną kostką do gry i zapisuj wyniki. Oblicz medianę i średnią otrzymanych wyników.
6. Oto oceny uzyskane ze sprawdzianu z matematyki przez uczniów pewnej klasy: 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6. Oblicz średnią arytmetyczną i medianę uzyskanych ocen.
7. Grupie uczniów zadano pytanie: „Ile godzin w ciągu tygodnia poświęcasz na uprawianie sportu?”. Wyniki sondażu podano w tabeli.

liczba godzin	0	1	2	4	5	7
liczebność	30	45	45	5	15	10

- a) Oblicz, ile wynosi mediana tego zestawu danych.
- b) Oblicz, jaki procent ankietowanych uczniów przeznaczą na uprawianie sportu więcej godzin niż wynosi mediana.
8. Mediana zestawu danych: 1, x , 0, 8, 11, 12 jest równa 9. Wyznacz liczbę x .
9. Wyznacz medianę zestawu danych przedstawionych w tabeli liczebności.

ocena	1	2	3	4	5	6
liczebność	2	3	9	6	4	1

10. Na diagramie lodygowo-listkowym przedstawiono wzrost (w cm) grupy przedszkolaków. Ile wynosi mediana tego zestawu danych?



11. W bibliotece szkolnej podano liczbę książek wypożyczonych przez uczniów klasy 3a w czasie pierwszego półrocza.

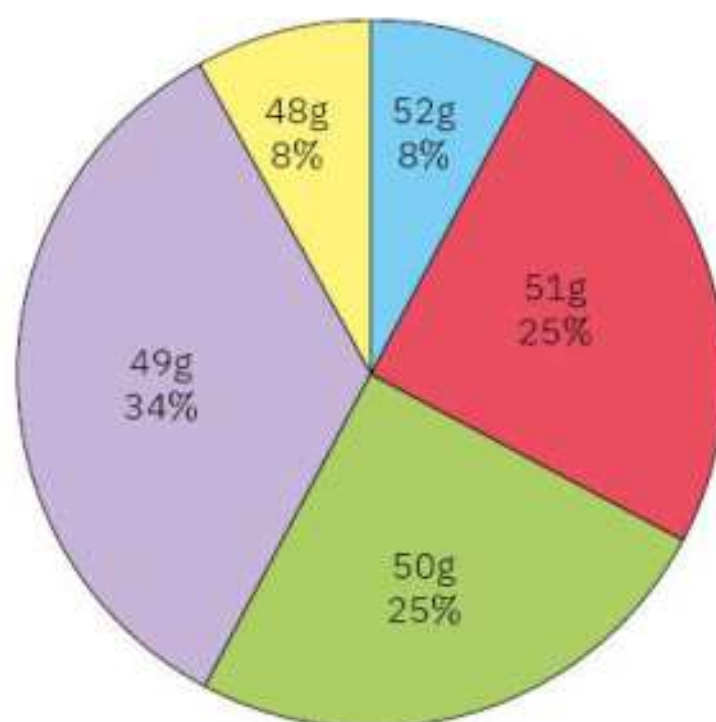
liczba wypożyczonych książek	0	1	2	4	5	6	9
liczba uczniów	2	3	9	6	4	1	1

Wyznacz dominantę tego zestawu danych.

12. Oto dane dotyczące wzrostu grupy dziewcząt mierzonego w centymetrach: 162, 159, 160, 159, 158, 157, 159, 160, 159, 159, 157, 159, 158, 157. Ile wynosi dominanta tego zestawu danych?

13. Zważono batony czekoladowe, a wyniki przedstawiono w postaci diagramu procentowego.

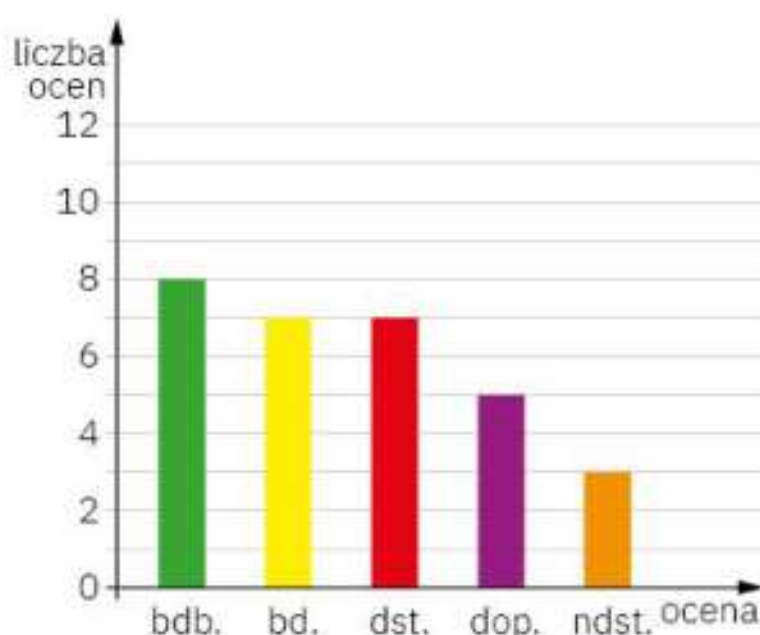
Ile wynosi dominanta tego zestawu danych statystycznych?



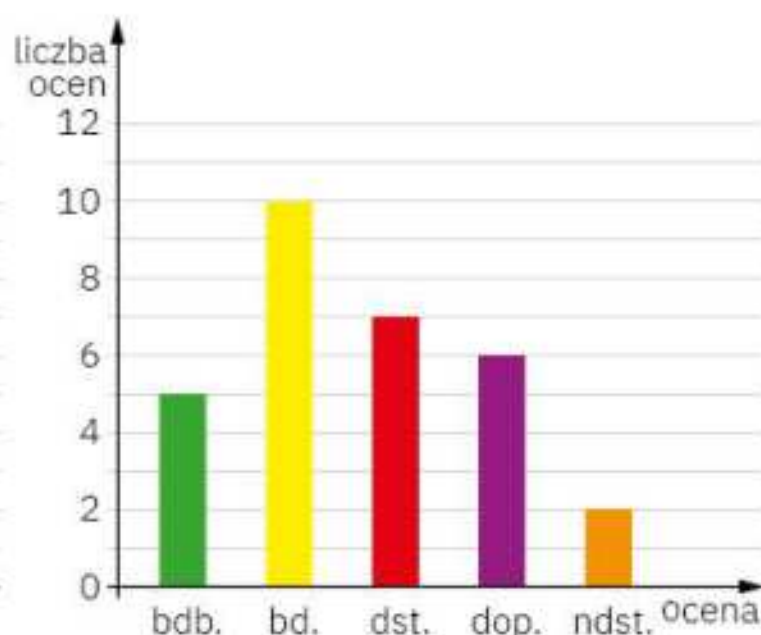
ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

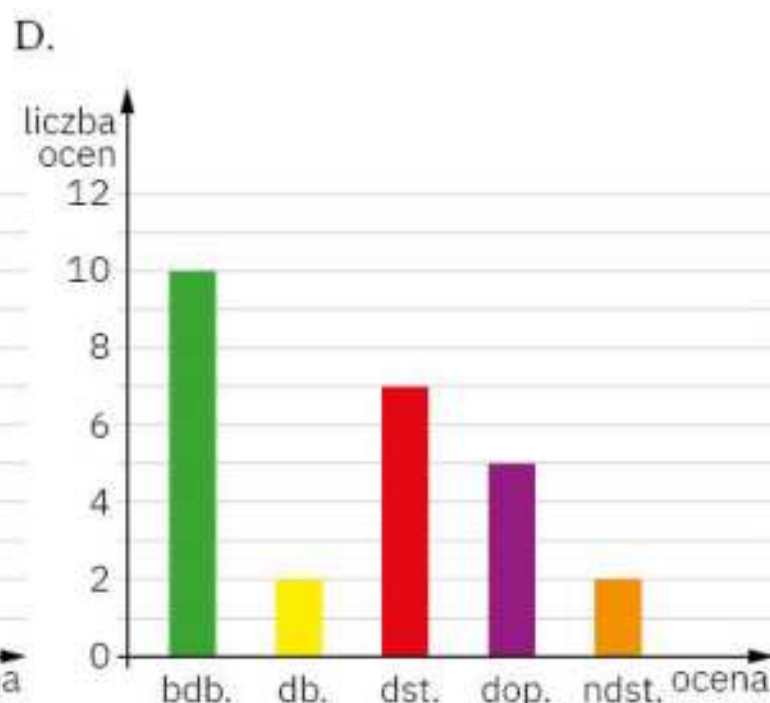
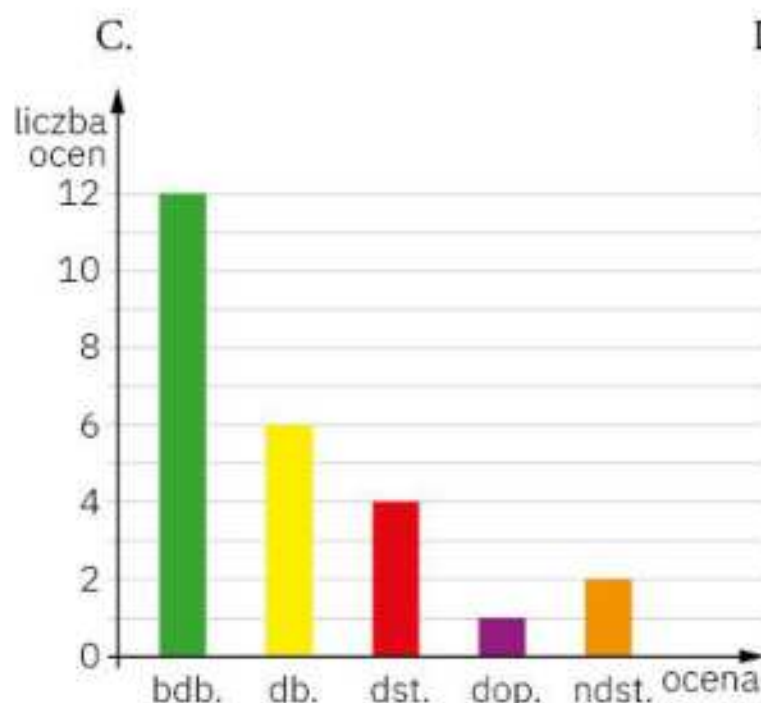
- Ile wynosi mediana liczb: 10, 11, 12, 13, 12, 11, 10?
A. 13 B. 12 C. 11 D. 10
- Ile wynosi mediana liczb: 0, 2, 4, 6, 8, 10?
A. 4 B. 6 C. 10 D. 5
- Wyniki ocen z kartkówek przedstawiono na diagramach. Na którym z nich mediana ocen jest równa 4 (db.)?

A.

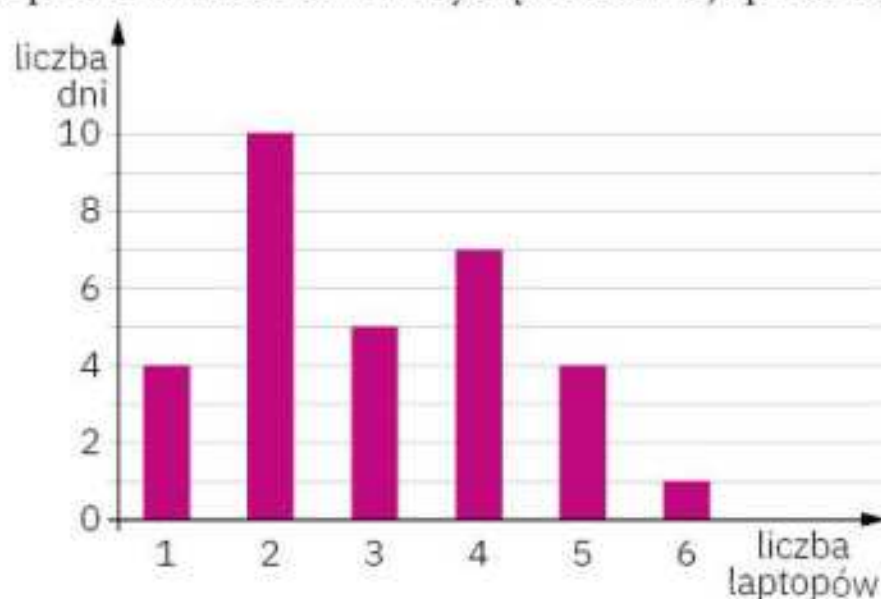


B.





4. Zmierzono wzrost zawodników dwóch drużyn.
 Drużyna I: 190 cm, 183 cm, 170 cm, 179 cm, 180 cm
 Drużyna II: 184 cm, 185 cm, 186 cm, 189 cm, 167 cm
 Które zdanie jest prawdziwe?
 A. Średnia wzrostu drużyny I jest większa niż średnia wzrostu drużyny II.
 B. Mediana wzrostu drużyny I jest większa niż mediana drużyny II.
 C. Średnie wzrostu obu drużyn są takie same.
 D. Średnia wzrostu drużyny I jest mniejsza niż średnia wzrostu drużyny II.
5. Na diagramie przedstawiono dane dotyczące dziennej sprzedaży laptopów.



- Które zdanie jest prawdziwe?
 A. Mediana sprzedawanych dziennie laptopów jest równa 2.
 B. Mediana sprzedawanych dziennie laptopów jest równa średniej arytmetycznej.
 C. Średnia arytmetyczna sprzedawanych dziennie laptopów jest większa od mediany.
 D. Średnia arytmetyczna sprzedawanych dziennie laptopów jest mniejsza od mediany.

6. Na diagramie lodygowo-listkowym zebrano wyniki pomiaru pulsu młodego człowieka w czasie 45 sekund. Oceń, które zdanie jest **falszywe**.

A. Średni puls wynosi 50.

B. Mediana pulsu wynosi 49.

C. Najniższa zanotowana wartość pulsu to 39 sekund.

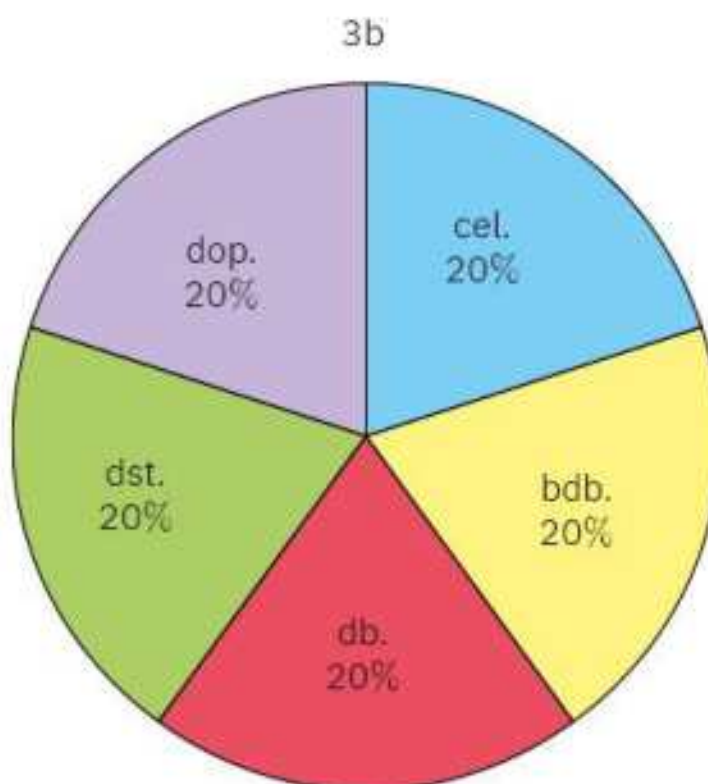
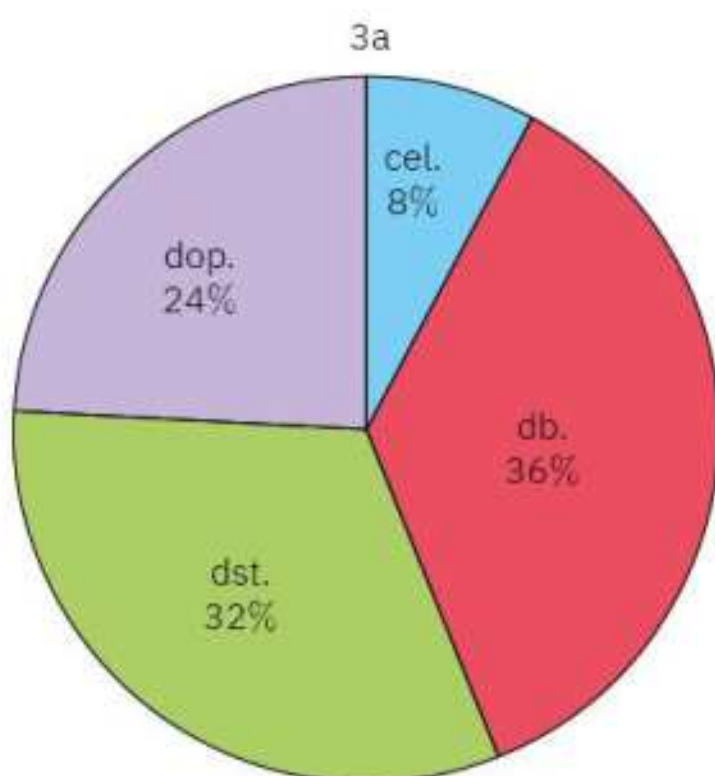
D. Mediana jest większa od średniego pulsu.

3	9
4	0 4 6 6 9
5	0 2 4 6
6	0

7. Na diagramach kołowych przedstawiono procentowy rozkład ocen z klasówek z języka angielskiego w klasach 3a, 3b, 3c i 3d. Który zestaw danych nie ma dominy?

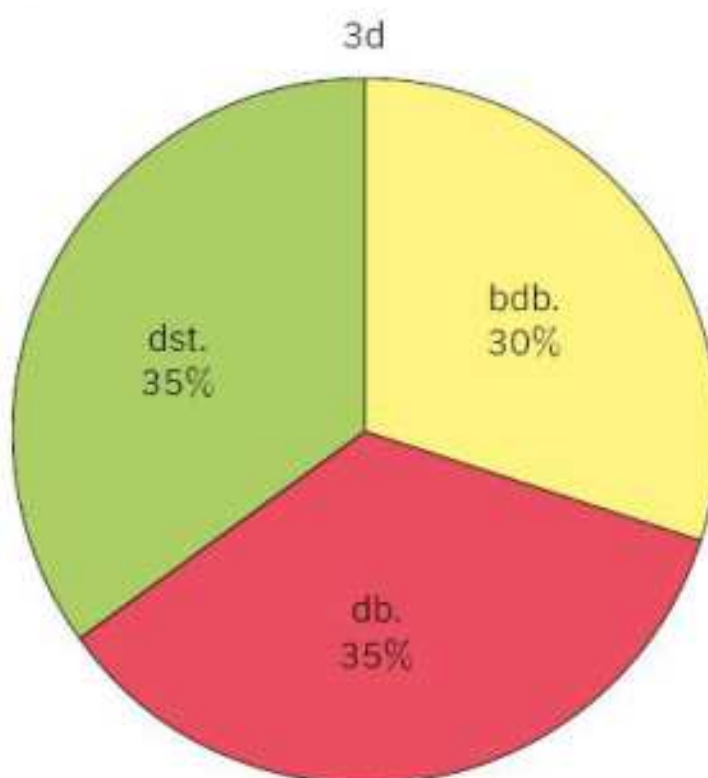
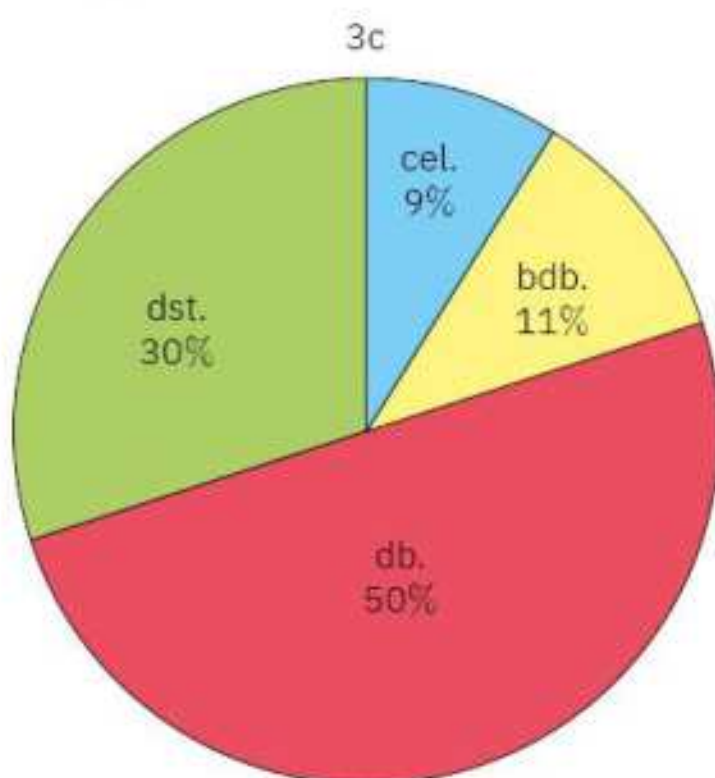
A.

B.



C.

D.



8. Na diagramie lodygowo-listkowym przedstawiono wzrost (w cm) grupy przed-
szkolaków. Ile wynosi dominanta tego zestawu danych?

9	8
1 0	2 5 6 6 8
1 1	0 0 1 3 3 4

A. 110

B. 113

C. 113 i 106

D. 110, 113, 106

3.4. Skala centylowa

Wyniki, jakie uczeń uzyskuje z każdego przedmiotu podczas egzaminu ósmoklasisty oraz egzaminu maturalnego, są wyrażone w procentach oraz za pomocą **skali centylowej**. Skala ta pokazuje miejsce każdego ucznia na tle rówieśników, którzy napisali egzamin z danego przedmiotu nie tylko w danym roku, lecz także na przestrzeni lat. Skala centylowa pozwala więc porównać poziom wiedzy i umiejętności uczniów prezentowany podczas egzaminów. I tak na przykład wynik ucznia podany w skali centylowej, który wynosi 65, oznacza, że 65% wszystkich uczniów piszących dany egzamin uzyskało wynik taki sam jak on lub niższy (a 35% uczniów uzyskało wynik lepszy niż dany uczeń).

Skalę centylową tworzy się dla wyników wszystkich uczniów w kraju, osobno dla każdego zakresu egzaminu. Skala ta jest skalą pozycyjną wyników uporządkowanych rosnąco i zawiera 99 centyli. Aby ustalić wartości poszczególnych centyli, wyniki egzaminu wszystkich uczniów piszących egzamin z danego przedmiotu należy uporządkować niemalejąco i podzielić ich zbiór na 100 równych części. Następnie trzeba określić położenie granic między tymi częściami na skali wyników.

Ćwiczenie 1.

Kasia uzyskała następujące wyniki egzaminu ósmoklasisty:

- język polski – 56% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 52% zdających;
- język angielski – 70% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 42% zdających;
- matematyka – 32% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 23% zdających.

- Podaj, jaki procent ósmoklasistów piszących egzamin z matematyki ma wynik taki sam lub niższy niż Kasia.
- Podaj, jaki procent ósmoklasistów piszących egzamin z języka angielskiego ma wynik lepszy niż Kasia.
- Z ilu egzaminów Kasia uzyskała wynik powyżej 50 centyla?
- Czy 70% punktów uzyskanych przez Kasię z egzaminu z języka angielskiego jest dobrym wynikiem na tle wszystkich uczniów w Polsce zdających ten egzamin? Dlaczego?

Rozwiązanie:

a) Odczytujemy, jaki procent uczniów ma taki sam lub niższy wynik z egzaminu z matematyki: 23%

Odpowiedź: Wynik taki sam lub niższy niż Kasia z egzaminu z matematyki uzyskało 23% ósmoklasistów.

b) Odczytujemy, jaki procent uczniów ma taki sam lub niższy wynik z egzaminu z języka angielskiego: 42%

Obliczamy, jaki procent uczniów piszących egzamin z języka angielskiego ma wynik lepszy niż Kasia: $100\% - 42\% = 58\%$

Odpowiedź: 58% ósmoklasistów uzyskało wynik lepszy niż Kasia z egzaminu z języka angielskiego.

c) Odczytujemy wyniki Kasi z kolejnych egzaminów wyrażone w skali centylowej: 52%, 42% i 23%. Tylko z jednego egzaminu (języka polskiego) Kasia uzyskała więcej niż 50%.

Odpowiedź: Kasia uzyskała wynik powyżej 50 centyla tylko z jednego egzaminu.

d) Odczytujemy wynik Kasi z języka angielskiego w skali centylowej: 42% uzyskało wynik taki sam lub niższy niż Kasia. Oznacza to, że 58% uczniów uzyskało wynik lepszy.

Odpowiedź: Wynik 70% punktów z języka angielskiego, jaki uzyskała Kasia, nie jest wynikiem dobrym na tle wszystkich uczniów zdających ten egzamin, ponieważ ponad połowa wszystkich uczniów (58%) napisała ten egzamin lepiej niż Kasia.

Centyl to jedna ze 100 równych części, na które można podzielić zakres wartości zestawu danych, aby pokazać rozkład tych wartości.

Centyl danej wartości jest określany przez procent wartości, które są nie większe (mniejsze lub równe) niż ta wartość. Na przykład wynik testu, który jest mniejszy lub równy 75% innych wyników tego testu znajduje się w 75 centylu.

Skala centylowa zestawu danych (na przykład wyników egzaminu) to rozkład wartości tego zestawu danych podzielony na 100 centyli.

Skala centylowa wyników egzaminu przypisuje każdemu wynikowi procentowemu egzaminu konkretny centyl. Na przykład w pewnym roku szkolnym wynik procentowy egzaminu równy 60% możliwych punktów do zdobycia może znajdować się w 70 centylu (70% uczniów uzyskało wynik mniejszy lub równy 60% możliwych punktów do zdobycia). W kolejnym roku szkolnym ten sam wynik 60% może znajdować się w 50 centylu (50% uczniów uzyskało wynik mniejszy lub równy 60% możliwych punktów do zdobycia). Oznacza to, że w drugim roku egzamin był trudniejszy dla uczniów, bo mniejszy procent uczniów piszących egzamin uzyskało taki sam wynik procentowy egzaminu (patrz tabela).



Rok szkolny	Procentowy wynik egzaminu	centyl
2018/2019	60%	70
2019/2020	60%	50

Ćwiczenie 2.

W tabeli przedstawiono skalę centylową z matematyki dla egzaminu ósmoklasisty przeprowadzonego w 2019 roku (cke.gov.pl).

Matematyka			
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	53	66
3	2	57	69
7	4	60	72
10	8	63	75
13	13	67	78
17	18	70	81
20	23	73	84
23	28	77	87
27	33	80	89
30	38	83	91
33	43	87	94
37	47	90	96
40	51	93	98
43	55	97	99
47	59	100	100
50	63		

Odpowiedz na pytania.

- Ile procent uczniów napisało egzamin lepiej niż Tosia, która uzyskała z egzaminu 60% punktów?
- Ile procent punktów z matematyki mógł uzyskać Romek, jeśli jego wynik to 51 centyl?
- Ewa uzyskała 82% punktów z egzaminu z matematyki. W jakim centylu znajduje się jej wynik?

Rozwiązanie:

- Odszukujemy w tabeli wynik 60% i odczytujemy odpowiadającą mu wartość centyla: 72. Oznacza to, że 72% uczniów uzyskało wynik taki sam lub niższy niż Tosia, a 28% uczniów uzyskało lepszy wynik.

Odpowiedź: Wynik lepszy niż Tosia z egzaminu z matematyki uzyskało 28% ósmoklasistów.

b) Odszukujemy w tabeli wynik 51 centyl i odczytujemy odpowiadający mu wynik procentowy: 40%.

Odpowiedź: Romek mógł uzyskać 40% punktów z egzaminu ósmoklasisty z matematyki.

c) Odszukujemy w tabeli wynik 82%. W tabeli znajdują się wyniki: 80% i 83%, którym odpowiadają 89 i 91 centyl.

Odpowiedź: Na podstawie podanej przez CKE tabeli możemy powiedzieć, że wynik Ewy znajduje się pomiędzy 89 a 91 centylem.

Ćwiczenie 3.

Kasia zdawała maturę w 2018 roku i z egzaminu z historii na poziomie rozszerzonym uzyskała 64% punktów. Wynik ten mieścił się w 90 centylu. Natomiast jej młodsza siostra Ada zdawała maturę w 2020 roku. Z egzaminu z historii na poziomie rozszerzonym uzyskała 70% punktów, a jej wynik też mieścił się w 90 centylu. Która z dziewcząt wykazała się większymi umiejętnościami na tle innych uczniów zdających ten egzamin?

Rozwiązanie:

Porównajmy wyniki dziewcząt.

Kasia – 64% punktów – 90 centyl

Ada – 70% punktów – 90 centyl

Ada uzyskała wyższy wynik procentowy niż Kasia. Natomiast obie dziewczyny mają taki sam wynik centylowy. Procentowy wynik egzaminu mieszczący się w 90 centylu świadczy o tym, że wynik egzaminu każdej z siostr jest niższy od wyniku 10% wszystkich uczniów piszących egzamin maturalny z historii na poziomie rozszerzonym w danym roku. Wobec tego poziom umiejętności siostr na tle innych uczniów piszących ten egzamin jest taki sam.

Odpowiedź: Kasia i Ada wykazały się takim samym poziomem umiejętności na tle innych uczniów zdających w danym roku egzamin maturalny z historii na poziomie rozszerzonym.

Innym miejscem wykorzystania skali centylowej są tak zwane **siatki centylowe**, którymi posługują się lekarze oraz rodzice. Siatki centylowe są jedną z metod obiektywnej oceny rozwoju fizycznego dzieci w wieku od 1. do 18. roku życia. Siatki te pozwalają sprawdzić, czy waga lub wzrost dziecka znajdują się w normie dla danej populacji. Norma ta jest dość szeroka, bo znajduje się między 3 a 97 centylem.

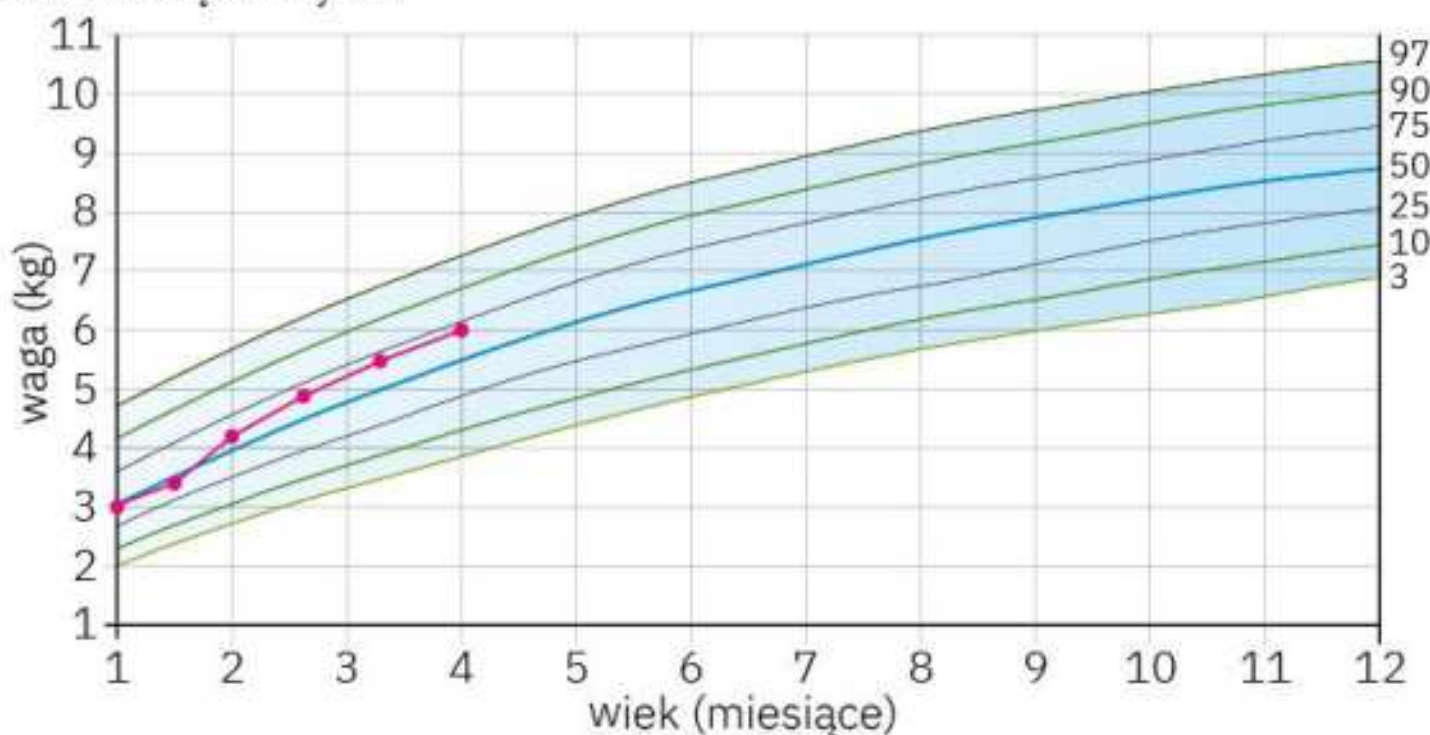
Na siatce centylowej są zaznaczone dwie osie. Na poziomej osi oznacza się wiek dziecka (w miesiącach lub w latach), a na pionowej – wzrost lub wagę. Ponadto na siatce znajduje się też kilka linii oznaczonych liczbami 3, 10, 25, 50, 75, 90, 97. Te liczby

to właśnie centyle. Z naniesionych na siatkę centylową danych dotyczących wzrostu i wagi dziecka w kolejnych miesiącach jego życia możemy się dowiedzieć, czy dziecko rozwija się proporcjonalnie do wieku.

Siatka centylowa (wagi lub wzrostu chłopców lub dziewcząt) jest rodzajem skali centylowej, która pozwala na ocenę przebiegu wzrostu i przyboru masy ciała konkretnego dziecka na tle mieszkańców danego kraju.

Ćwiczenie 4.

Na siatce centylowej zaznaczono wyniki pomiaru wagi Michała w pierwszych czterech miesiącach życia.



- Podaj wagę Michała w pierwszym miesiącu życia.
- W którym miesiącu życia waga Michała podwoiła się w stosunku do jego wagi w pierwszym miesiącu?
- W jakim centylu znajdowała się waga Michała w drugim miesiącu życia?

Rozwiązanie:

- Odczytujemy wagę Michała odpowiadającą dla pierwszego miesiąca: 3 kg

Odpowiedź: W pierwszym miesiącu życia Michał ważył 3 kilogramy.

- W pierwszym miesiącu Michał ważył 3 kg. Odczytujemy ze skali, w którym miesiącu waga Michała była dwa razy większa, tzn. wynosiła 6 kg. Było to w czwartym miesiącu.

Odpowiedź: W czwartym miesiącu życia waga Michała podwoiła się w stosunku do jego wagi w pierwszym miesiącu.

- Waga Michała w drugim miesiącu życia to około 4,5 kg. Punkt ten znajduje się pomiędzy liniami odpowiadającymi 50 i 75 centylowi.

Odpowiedź: W drugim miesiącu życia waga Michała znajdowała się pomiędzy 50 a 75 centylem.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. W tabeli przedstawiono skalę centylową wyników z języka angielskiego na poziomie podstawowym dla egzaminu maturalnego przeprowadzonego w maju 2015 roku (cke.gov.pl).

Język angielski – poziom podstawowy					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	34	7	68	31
2	1	36	8	70	34
4	1	38	9	72	36
6	1	40	10	74	38
8	1	42	11	76	41
10	1	44	12	78	43
12	1	46	13	80	46
14	1	48	15	82	49
16	1	50	16	84	52
18	1	52	17	86	56
20	2	54	19	88	60
22	2	56	20	90	64
24	3	58	22	92	70
26	4	60	24	94	76
28	4	62	26	96	84
30	5	64	27	98	94
32	6	66	29	100	100

Odpowiedz na pytania.

- W którym centylu znajduje się wynik Ani, która uzyskała z egzaminu 90% punktów?
- Ile procent punktów mógł uzyskać Tomek, jeśli jego wynik to 20 centyl?
- Ewa uzyskała 80% punktów z egzaminu z języka angielskiego na poziomie podstawowym. Czy napisała swój egzamin lepiej niż połowa maturzystów w 2015 roku?
- W jakim przedziale procentowym znajduje się wynik pierwszego centyla?

2. Poniżej przedstawiono wynik egzaminu maturalnego uzyskanego przez Krzysztofa.

Krzysztof

Zdał egzamin maturalny i uzyskał

z przedmiotów obowiązkowych:

w części ustnej egzaminu:

język polski 75% pkt

język angielski 80% pkt

w części pisemnej egzaminu na poziomie podstawowym:

język polski 46% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 27% zdających

język angielski 66% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 39% zdających

matematyka 90% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 97% zdających

z przedmiotu dodatkowego w części pisemnej egzaminu na poziomie rozszerzonym:

język angielski 14% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 3% zdających

Odpowiedz na pytania.

- a) Z którego egzaminu Krzysztof miał wynik gorszy niż 10% zdających?
- b) W którym egzaminie Krzysztof uzyskał 97 centyl?
- c) Czy 66% punktów uzyskanych z egzaminu z języka angielskiego jest dobrym wynikiem na tle wszystkich uczniów w Polsce zdających ten egzamin? Dlaczego?

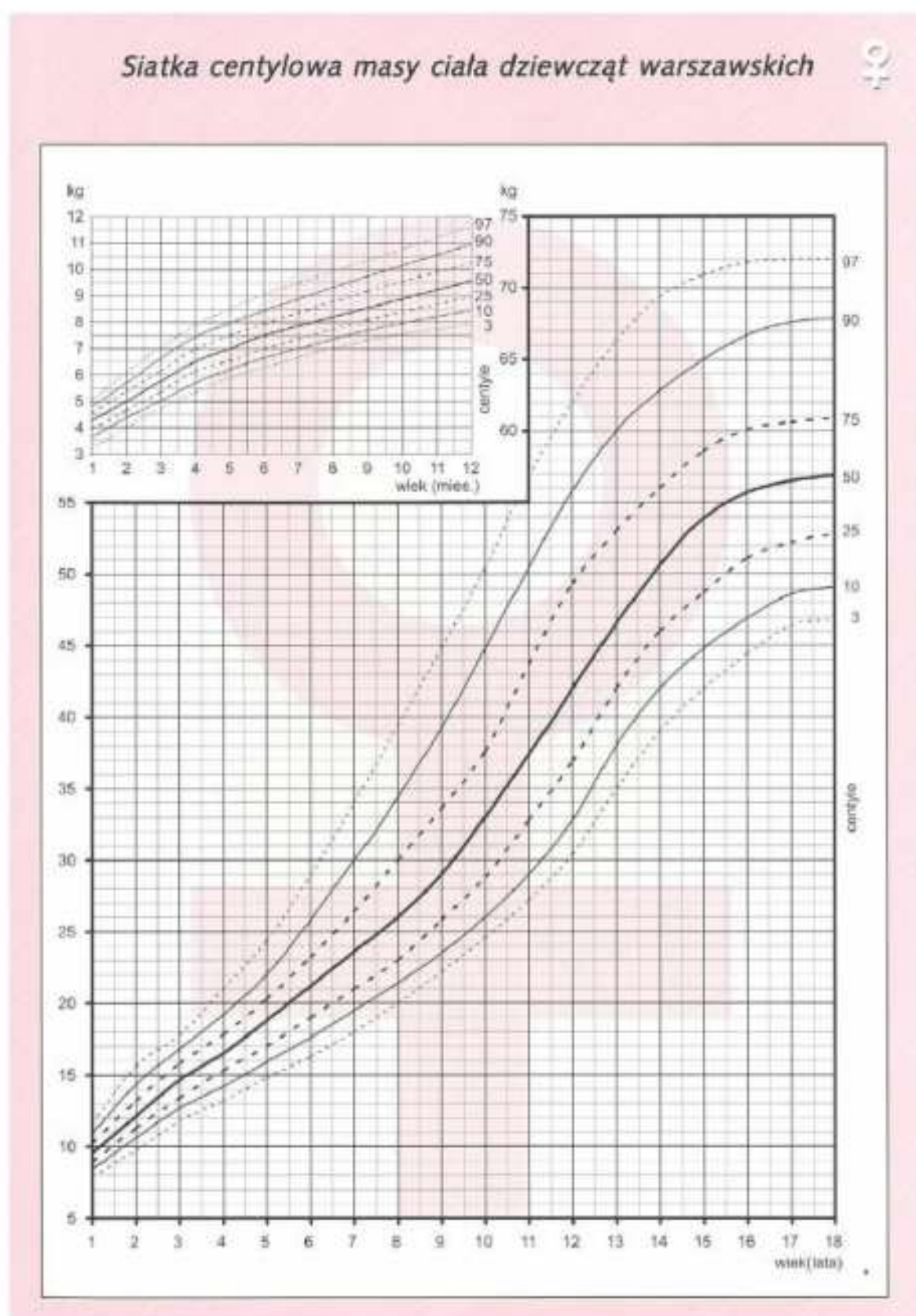
3. W tabeli przedstawiono skalę centylową wyników z języka angielskiego na poziomie rozszerzonym dla egzaminu maturalnego przeprowadzonego w maju 2015 roku (cke.gov.pl).

Język angielski – poziom rozszerzony					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	34	13	68	56
2	1	36	14	70	59
4	1	38	16	72	63
6	1	40	18	74	66
8	1	42	21	76	69
10	1	44	23	78	73
12	1	46	25	80	76
14	2	48	28	82	79
16	2	50	30	84	82
18	3	52	33	86	85
20	4	54	35	88	88
22	4	56	38	90	91
24	6	58	41	92	93
26	7	60	44	94	96
28	8	62	47	96	98
30	9	64	50	98	100
32	11	66	53	100	100

Odpowiedz na pytania.

- Ile procent punktów powinien uzyskać minimalnie maturzysta, aby jego wynik z egzaminu maturalnego z języka angielskiego na poziomie rozszerzonym znalazł się w najwyższym centylu? Czy taki procent punktów wystarczy uczniowi do uzyskania najwyższego centyla na egzaminie maturalnym na poziomie podstawowym? (tabela z zadania 1). Odpowiedź uzasadnij.
- Ola uzyskała z egzaminu z języka angielskiego 30% punktów, a Kasia dwa razy więcej punktów. Czy można stwierdzić, że wynik Kasi wyrażony w centylach jest dwa razy większy od wyniku Oli podanego w centylach?
- Piotrek twierdzi, że jego umiejętności z języka angielskiego na poziomie rozszerzonym są większe niż umiejętności połowy maturzystów. Ze swojego egzaminu maturalnego z języka angielskiego na poziomie rozszerzonym uzyskał $\frac{3}{5}$ punktów możliwych do zdobycia. Czy Piotrek właściwie ocenił poziom swoich umiejętności z tego przedmiotu? Odpowiedź uzasadnij.

4. Na rysunku przedstawiono siatkę centylową masy ciała dziewcząt (link.operon.pl/n73351).



Odpowiedz na pytania.

- Półroczna dziewczynka waży 8 kg. W jakim centylu znajduje się jej waga?
- Dziewczynka w 10. miesiącu życia znalazła się pod względem wagi w 50 centylu. Ile ważyła ta dziewczynka?
- Marta ma 14 lat, Iza o 2 lata mniej od Marty, a Helenka o 3 lata mniej od Izy. Każda z dziewczynek waży 50 kilogramów. Czy waga każdej z nich znajduje się w granicach normy?
- Mama siedmioletniej Kasi powiedziała, że waga dziewczynki znajduje się w górnej granicy normy. Kasia ważyła 24 kilogramy. Czy interpretacja wyniku wagi dziewczynki była prawidłowa?

5. Poniżej przedstawiono wyniki egzaminu maturalnego uzyskane przez Zosię oraz przez Kacpra.



ZOSIA

Zdała egzamin maturalny i uzyskała

z przedmiotów obowiązkowych:

w części ustnej egzaminu:

język polski 63% pkt

język angielski 33% pkt

w części pisemnej egzaminu na poziomie podstawowym:

język polski 69% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 56% zdających

język angielski 78% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 56% zdających

matematyka 84% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 83% zdających

z przedmiotu dodatkowego:

w części pisemnej egzaminu na poziomie rozszerzonym:

matematyka 30% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 40% zdających

KACPER

Zdał egzamin maturalny i uzyskał

z przedmiotów obowiązkowych:

w części ustnej egzaminu:

język polski 70% pkt

język angielski 60% pkt

w części pisemnej egzaminu na poziomie podstawowym:

język polski 58% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 48% zdających

język angielski 62% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 42% zdających

matematyka 84% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 83% zdających

z przedmiotu dodatkowego:

w części pisemnej egzaminu na poziomie rozszerzonym:

matematyka 40% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 48% zdających



- Który maturzysta uzyskał lepsze wyniki z egzaminów? Odpowiedź uzasadnij.
- Porównaj poziom umiejętności Zosi i Kacpra z języka polskiego i z języka angielskiego w części pisemnej egzaminu na tle wszystkich maturzystów.
- Porównaj wyniki procentowe Zosi i Kacpra z języka polskiego i z języka angielskiego w części pisemnej.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

Informacje do zadań 1.–3.

Tabela dotycząca skali centylowej z języka angielskiego na poziomie podstawowym dla egzaminu maturalnego przeprowadzonego w maju 2015 roku (cke.gov.pl) jest przedstawiona w zadaniu 1. w zadaniach do rozwiązania (s. 99). Skorzystaj z zawartych tam informacji.

W tabeli przedstawiono skalę centylową z języka angielskiego na poziomie podstawowym dla egzaminu maturalnego przeprowadzonego w maju 2016 roku (cke.gov.pl)

Język angielski – poziom podstawowy					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	34	11	68	42
2	1	36	12	70	44
4	1	38	14	72	46
6	1	40	15	74	48
8	1	42	17	76	50
10	1	44	19	78	53
12	1	46	21	80	55
14	1	48	23	82	58
16	1	50	25	84	61
18	2	52	26	86	64
20	2	54	28	88	67
22	3	56	30	90	71
24	4	58	32	92	75
26	5	60	34	94	80
28	6	62	36	96	86
30	8	64	38	98	93
32	9	66	40	100	100

- 
1. Marcin zdawał maturę w 2015 roku, a Michał – w 2016 roku. Obydwaj uzyskali z egzaminu z języka angielskiego w zakresie podstawowym 68%. Który z chłopców wykazał się większymi umiejętnościami na tle innych kolegów zdających ten egzamin?
A. Marcin
B. Michał
C. poziom umiejętności był taki sam
D. nie można tego określić
 2. Aby zdać egzamin maturalny na poziomie podstawowym, należy uzyskać minimum 30% punktów. W którym roku egzamin maturalny z języka angielskiego na poziomie podstawowym zdał uczeń, który uzyskał wynik odpowiadający 6 centylovi?
A. w 2015 roku
B. w 2016 roku
C. w 2015 i w 2016 roku
D. w żadnym z podanych lat
 3. W którym roku egzamin maturalny z języka angielskiego na poziomie podstawowym okazał się dla uczniów łatwiejszy?
A. w 2015 roku
B. w 2016 roku
C. poziom trudności był taki sam
D. trudno powiedzieć

3.5. Zadania utrwalające

1. Spośród liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 19, 20 wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 5.
2. W klasie jest dwa razy więcej chłopców niż dziewcząt. Czy przy losowaniu jednej osoby z tej klasy prawdopodobieństwo wylosowania dziewczyny jest równe $\frac{1}{2}$?
Uzasadnij odpowiedź.
3. W pewnej klasie stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy 5:3. Losujemy jedną osobę z tej klasy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to chłopiec.
4. W urnie znajduje się pięć kul ponumerowanych od 1 do 5. Losujemy z urny dwie kule bez zwracania i tworzymy liczbę dwucyfrową. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3?

- 5*. Talia zawiera 52 karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując trzy razy po jednej karcie bez zwracania, wylosujemy trzy asy?
6. Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb: $-3, -2, 0, 3, 5$?
7. Suma liczb x, y, z wynosi 10. Oblicz średnią arytmetyczną liczb $x, y, z, 4$.
8. Na diagramie przedstawiono wyniki klasyfikacji semestralnej z języka angielskiego.



Ile wynosi średnia arytmetyczna ocen uzyskanych przez uczniów?

9. W klasie jest 10 dziewcząt i 15 chłopców. Średnia wzrostu dziewcząt wynosi 162,5 cm, a średnia wzrostu chłopców to 178,2 cm. Oblicz średnią wzrostu uczniów tej klasy.
10. Zmieszano 2 kg cukierków w cenie 22 zł za kilogram, 3 kg cukierków w cenie 28 zł za kilogram i 5 kg w cenie 18 zł za kilogram. Wyznacz cenę 1 kilograma tej mieszanki.
11. W sprawozdaniu dotyczącym sprzedaży akcji pewnej firmy zapisano, że 60% akcji sprzedano po 80 zł za sztukę, 30% akcji – po 90 zł i 10% – po 100 zł. Jaka była średnia cena sprzedaży jednej akcji?
12. Wśród uczniów pewnej klasy przeprowadzono ankietę dotyczącą liczby osób w rodzinie. Wyniki ankiety przedstawiono w tabeli.

liczba osób w rodzinie	2	3	4	5	6	7
liczba uczniów	4	12	6	4	3	1

Ile wynosi dominanta, a ile mediana tego zestawu danych?

13. Marek kupił kilogram pomidorów. Zważył każdego pomidora i zanotował jego masę (w gramach): 40, 42, 44, 50, 74, 64, 56, 72, 46, 55, 46, 59, 68, 37, 60, 55, 52, 40, 40, 51, 50. Oblicz średnią wagę pomidora, dominantę i medianę wagi. Obliczenia wykonaj z dokładnością do 0,1 g.
14. Przeprowadź ankietę dotyczącą rozmiaru obuwia, jakie noszą uczniowie twojej klasy. Zanotuj wyniki w tabeli liczebności. Oblicz średnią arytmetyczną i medianę wyników.
15. Na diagramie lodygowo-listkowym przedstawiono wzrost dziewcząt z klasy 3a. Oblicz średnią arytmetyczną wzrostu dziewcząt tej grupy oraz medianę (z dokładnością do 0,1 cm). Która z liczb jest większa?

1 5	6 7 8
1 6	0 0 1 2 4 4 6 8 8
1 7	0 1 3

16. W tabeli przedstawiono wyniki ocen z geografii, jakie otrzymali uczniowie klas 3a i 3b.

ocena		ndst.	dop.	dst.	db.	bdb.	cel.
liczebność	klasa 3a	2	3	6	9	3	2
	klasa 3b	0	6	10	5	2	2

- a) Oblicz średnią arytmetyczną ocen dla każdej klasy.
b) Oblicz medianę ocen dla każdej klasy.
c) Którą z nich (medianę czy średnią arytmetyczną) powinni podać uczniowie klasy 3a, jeśli chcą pochwalić się uzyskanym wynikiem?
17. W pewnej firmie pracuje sześciu pracowników, którzy miesięcznie zarabiają po 2500 zł, oraz właściciel, którego miesięczny zarobek to 6000 zł. Oblicz wysokość średniej płacy w tej firmie oraz medianę płacy. Jaki procent pracowników zarabia mniej niż średnia płaca, a jaki mniej niż mediana?
18. W tabeli zebrano dane dotyczące liczby dzieci w rodzinach mieszkających przy ulicy Słonecznej.

liczba dzieci	1	2	3	4	5
liczba rodzin	18	21	6	3	2

- a) Oblicz średnią liczbę dzieci w rodzinach.
b) Wyznacz medianę liczby dzieci.
c) W ilu rodzinach liczba dzieci jest mniejsza niż średnia?
19. Dane pokazują, ile dni urlopu wykorzystali pracownicy pewnej firmy w pierwszym półroczu bieżącego roku: 8, 2, 3, 10, 16, 19, 20, 7, 8, 8, 17, 17, 19, 10, 12, 11, 14, 14, 12, 0.
Oblicz medianę i średnią arytmetyczną liczby wykorzystanych dni urlopu.
20. W tabeli przedstawiono zestawienie sprzedaży jagodzianek w ciągu 31 dni lipca.

liczba jagodzianek	17	20	24	31	32
liczba dni	2	8	11	3	7

- a) Ile wynosi dominanta sprzedaży dziennej jagodzianek?
b) Oblicz średnią liczbę sprzedawanych dziennie jagodzianek.
c) Oblicz medianę sprzedaży dziennej jagodzianek.
Która z liczb: dominanta, średnia czy mediana jest największa?

21. W arkuszu kalkulacyjnym zebrano wyniki ocen pracy klasowej.

	A	B	C
1	Ocena	Liczba ocen	Procent
2	cel.	2	8,00%
3	bdb.	3	12,00%
4	db.	6	24,00%
5	dst.	7	28,00%
6	dop.	5	20,00%
7	ndst.	2	8,00%
8	Średnia ocen:	3,36	

- Podaj dominantę zestawu ocen.
- Oblicz medianę wyników. Ilu uczniów otrzymało ocenę wyższą od mediany?
- Ilu uczniów otrzymało ocenę wyższą od średniej ocen?

22. Poniżej przedstawiono wynik egzaminu maturalnego uzyskanego przez Kamila.

Zdał egzamin maturalny i uzyskał z przedmiotów obowiązkowych:

w części ustnej egzaminu:

język polski 90% pkt

język angielski 83% pkt

w części pisemnej egzaminu na poziomie podstawowym:

język polski 60% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 54% zdających

język angielski 84% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 61% zdających

matematyka 48% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 43% zdających

z przedmiotu dodatkowego

w części pisemnej egzaminu na poziomie rozszerzonym:

matematyka 0% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 2% zdających

Odpowiedz na pytania.

- Które egzaminy Kamil zdał tak samo lub lepiej niż 50% maturzystów jego rocznika?
- Ile procent uczniów uzyskało 0 punktów z matematyki na poziomie rozszerzonym?
- Z którego egzaminu w części pisemnej Kamil uzyskał najwyższy wynik?

23. W tabeli przedstawiono skalę centylową z matematyki na poziomie podstawowym dla egzaminu maturalnego przeprowadzonego w maju 2015 roku (cke.gov.pl).

Matematyka – poziom podstawowy					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	34	27	68	68
2	1	36	30	70	70
4	1	38	33	72	72
6	1	40	35	74	74
8	2	42	38	76	76
10	3	44	41	78	77
12	5	46	44	80	79
14	6	48	46	82	81
16	8	50	49	84	83
18	10	52	51	86	85
20	12	54	53	88	86
22	13	56	56	90	89
24	15	58	58	92	91
26	18	60	60	94	93
28	20	62	62	96	96
30	22	64	64	98	98
32	25	66	66	100	100

- Czy w 2015 roku byli maturzyści, którzy uzyskali z egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym taki sam wynik procentowy i centylowy? Jeśli tak, to wymień te wyniki.
- Ile procent maturzystów nie zdało egzaminu maturalnego z matematyki?
- Jaki wynik w skali centylowej osiągnął uczeń, którego wynik procentowy wynosił 40%?

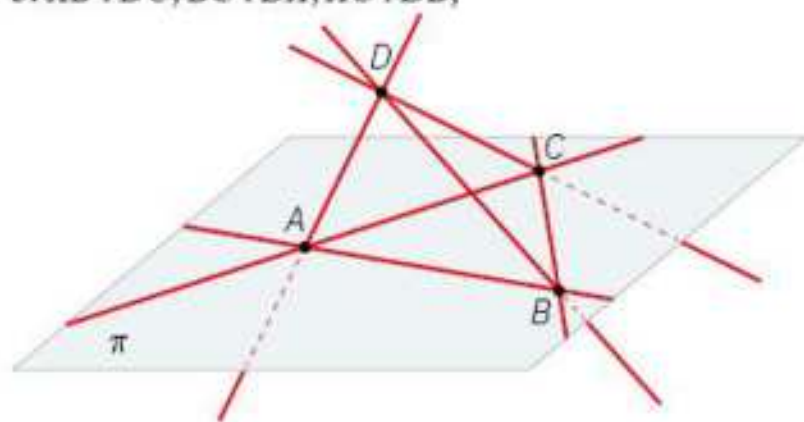
I STEREOMETRIA

1.1. Graniastosłupy

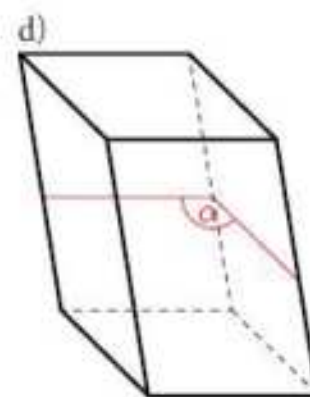
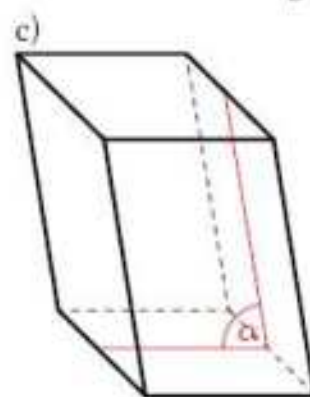
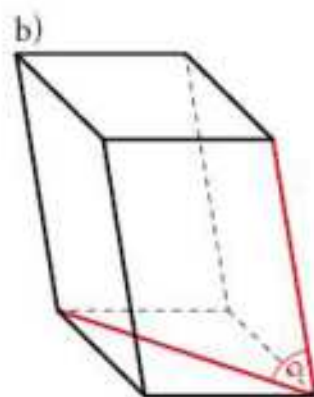
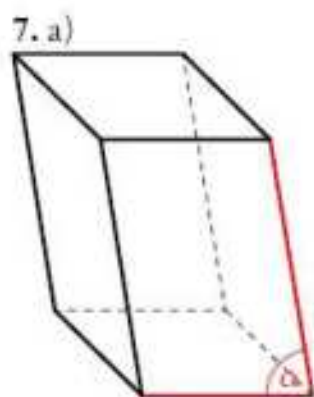
1. a) krawędzi 15, ścian 7, wierzchołków 10, b) krawędzi 33, ścian 13, wierzchołków 22, c) krawędzi 300, ścian 102, wierzchołków 200; 2. $V = 125 \text{ cm}^3$, $P = 150 \text{ cm}^2$; 3. $P = 94 \text{ cm}^2$, $V = 60 \text{ cm}^3$; 4. a) $V = 63$, $P = 102$, b) $V = 225\sqrt{3}$, $P = 15(5\sqrt{3} + 12)$; $P = 72(1 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$; 5. $V = 108 \text{ cm}^3$, $P = 36(1 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$; 6. o 33,1%; 7. $2\sqrt{6} \text{ cm}$; 8. $10\sqrt{2} \text{ cm}$; 9. nie zmieni się; 10. 74 dm^2 ; 11. $V = 108 \text{ cm}^3$; 12. $24\sqrt{2} \text{ cm}$; 13*. $P = 96 \text{ cm}^2$; 14. 9600, $V = 30 \text{ m}^3$; 15. a) 25, b) 48, c) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$. Z.S.: 1. A; 2. D; 3. B; 4. C; 5. C; 6. D.

1.2. Kąt między prostą a płaszczyzną w przestrzeni

2. a) np. EF, b) np. AE, c) np. AB, d) FG, e) np. BF, f) AE, g) EFGH, h) np. ABFE;
3. AB i DC, BC i DA, AC i DB;

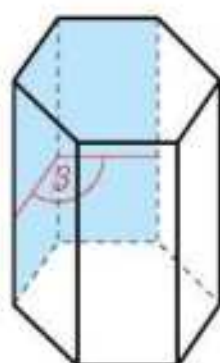
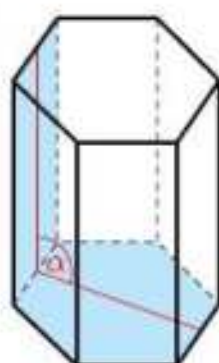


5. a) 12 krawędzi, równoległa do 3, przecina 4, skośna do 4, b) do 6; 6. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$;

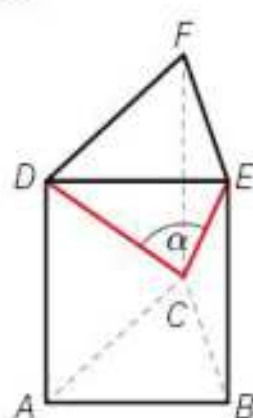


8. $V = 216\sqrt{2} \text{ cm}^3$, 9. a) skośne, b) skośne, c) przecinające się;

10.



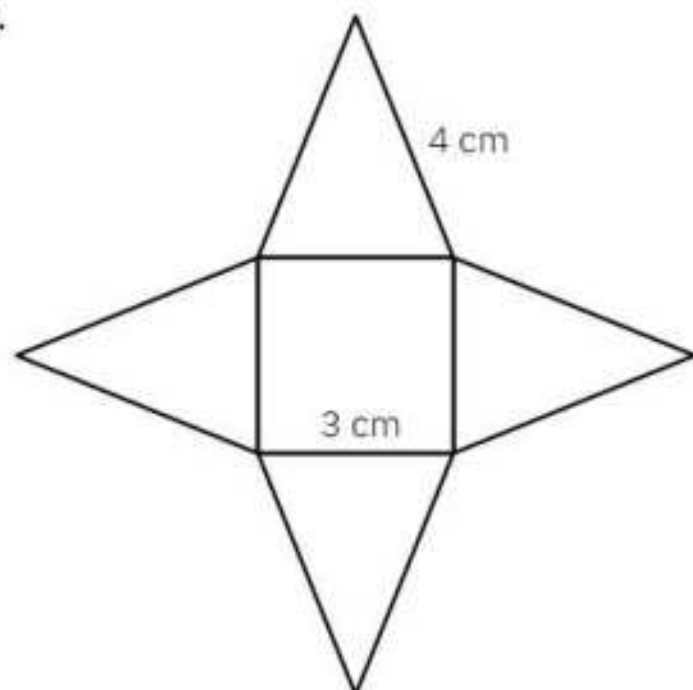
11.



Z.S.: 1. D; 2. C; 3. C; 4. B.

1.3. Ostrosłupy

1. a) krawędzie – 14, ściany – 8, b) krawędzie – 30, ściany – 16, c) krawędzie – 200, ściany – 101;
2.



$$P = (9 + 3\sqrt{55}) \text{ cm}^2; 3. V = 16\sqrt{119} \text{ cm}^3;$$

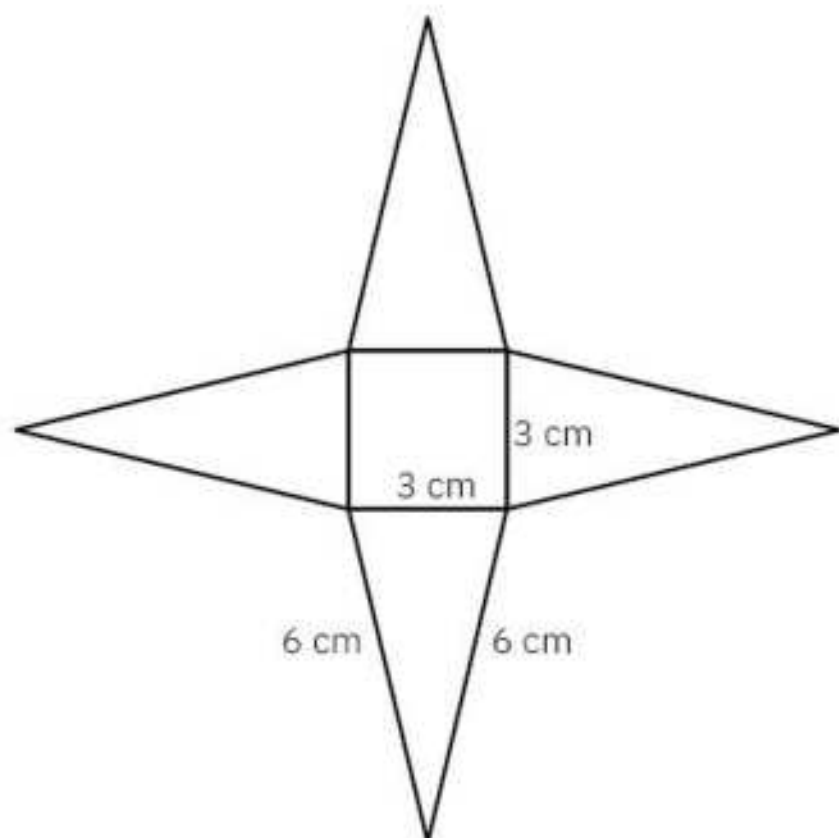
4. α – kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy, β – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, γ – kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy, δ – kąt między krawędzią boczną i wysokością ostrosłupa; 5. $V = 48\sqrt{3} \text{ cm}^3, P = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 6. nie; 7. $\frac{128\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$; 8. 64 cm; 9. 120° ;
10. 2 574 467 m³; 11. $4\sqrt{3} \text{ cm}$; 12. $3\frac{1}{3} \text{ cm}$; 13. $144\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 14. $48\sqrt{7} \text{ cm}^3$; 15. $\frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$; 16. $a = 8 \text{ cm}$, $H = 3 \text{ cm}$; 17. 384 cm³; 18. $V = 48\sqrt{3} \text{ cm}^3, P = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Z.S.: 1. D; 2. D; 3. B; 4. C; 5. C; 6. A.

1.4. Bryły obrotowe

1. $36\pi \text{ cm}^2, 54\pi \text{ cm}^3$; 2. 3,14 m³; 3. 502,4 l; 4. $50\pi(1 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$; 5. 2 cm; 6. $128\pi^2, 32\pi(1 + 2\pi)$;
7. $150\pi \text{ cm}^2$; 8. $36\pi \text{ cm}^2$; 9. $180\pi \text{ cm}^3, 132\pi \text{ cm}^2$; 10. $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi \text{ cm}^3$; 11. $80\pi \text{ cm}^2, 128\pi \text{ cm}^3$; 12. objętość jest mniejsza, gdy się obraca wzdłuż dłuższej przyprostokątnej; 13. $5\sqrt{3}$; 14. $72\pi \text{ cm}^3$; 15. $9\pi(1 + \sqrt{26}) \text{ cm}^2$;
16. $128\pi\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 17. $9\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 18. $240\pi \text{ cm}^3$; 19*. a) $54\pi \text{ cm}^3$, b) $72\pi \text{ cm}^3$; pole powierzchni całkowitej bryły w punkcie a jest mniejsze o $36\pi \text{ cm}^2$; 20. $36\pi(1 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$; 21. $36\pi \text{ cm}^2, 36\pi \text{ cm}^3$; 22. $\frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3$;
23. $972\pi \text{ cm}^3$; 24. $144\pi \text{ cm}^2$; 25. $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3, 100\pi \text{ cm}^2$; 26. $\frac{32\,000\pi}{3} \text{ cm}^3$; 27. a) $972\pi \text{ cm}^3$, b) $288\pi \text{ cm}^3$;
28. 3 cm; 29. walec o $24\pi \text{ cm}^2$; 30. walec 162 cm³, stożek 81 cm³, kula 108 cm³. Z.S.: 1. A; 2. B; 3. D; 4. B; 5. C; 6. D; 7. C; 8. D; 9. D; 10. D.

1.5. Zadania utrwalające

1. KSi LM, LSi KM, MSi KL; 2. $V = 210 \text{ cm}^3, P = 214 \text{ cm}^2$; 3. o 48,8%; 4. 3,5 cm; 5. 180 cm³; 6. $(9 + 9\sqrt{15}) \text{ cm}^2$;



7. $5\sqrt{6}$ cm; 8. $144\sqrt{3}$ cm²; 9. $24\sqrt{3}$ cm; 10. 96 cm³; 11. 4,71 l; 12. 36π cm², 54π cm³; 13. 379 940 cm²; 14. 13 cm; 15. około 0,5 m³; 16. 18π cm³; 17. 8π cm², $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ cm³; 18. $6\sqrt{6}$ cm; 19. 75π cm²; 20. 98π cm²; 21. 3 cm; 22. 6 cm; 23. 37%; 24. kula; 25. 12 cm.

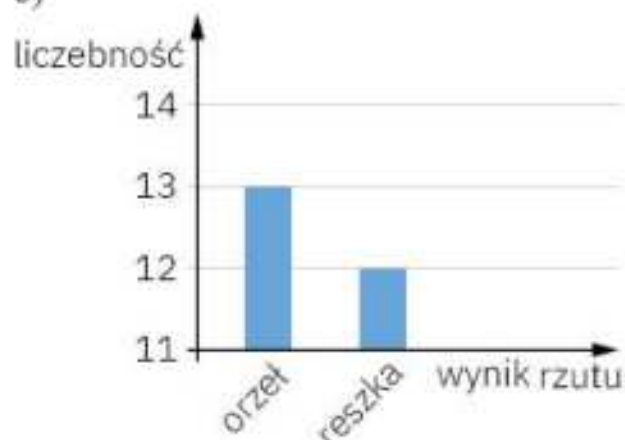
II KOMBINATORYKA

2.1. Doświadczenia losowe

2. a)

Wynik rzutu	O	R
Liczebność	13	12

b)



c) orzeł: 52%, reszka: 48%;

3. a) $\{(O, R), (O, O), (R, O), (R, R)\}$, b) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$; 4. $\{(R, O), (O, R), (O, O)\}$; 5. $\{(1, O), (2, O), (3, O), (4, O), (5, O), (6, O), (1, R), (2, R), (3, R), (4, R), (5, R), (6, R)\}$; 6. a) $\{(b, z, c), (b, c, z), (z, b, c), (z, c, b), (c, b, z), (c, z, b)\}$, b) zdarzenie niemożliwe; 7. a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$, b) $\{(1, 1)$,

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)}, c) (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (2, 5), (4, 5), (6, 5)}, d) {(2, 3), (2, 6), (4, 3), (4, 6), (6, 3), (6, 6)}; **8.** 4; **9.** 6, {AWOD, AWDO, AOWD, AODW, ADWO, ADOW}; **10.** 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43, 12 liczb; **11.** {As kier, As karo, Król kier, Król karo, Dama kier, Dama karo, Walet kier, Walet karo}; **12.** $\{(w^1, p^1), (p^1, w^1), (w^1, p^2), (p^2, w^1), (w^1, p^3), (p^3, w^1), (w^2, p^1), (p^1, w^2), (w^2, p^2), (p^2, w^2), (w^2, p^3), (p^3, w^2), (w^1, w^2), (w^2, w^1), (p^1, p^2), (p^2, p^1), (p^1, p^3), (p^3, p^1), (p^2, p^3), (p^3, p^2)\}$. **Z.S.:** 1. D; 2. B; 3. B; 4. C.

2.2. Reguła mnożenia. Liczba zdarzeń elementarnych

1. 140; **2.** 80; **3.** 216; **4.** 303 600; **5.** 60; **6.** 125; **7.** 4896; **8.** 5040; **9.** 720; **10.** 360; **11.** 20; **12.** 256.

Z.S.: 1. D; 2. B; 3. C; 4. A.

2.3. Reguła dodawania

1. 18; **2.** 3; **3.** 6; **4.** 9; **5.** 18. **Z.S.:** 1. C; 2. D; 3. B.

2.4. Reguła mnożenia i dodawania

1. 6; **2.** 12; **3.** 15; **4.** 9; **5.** 32; **6.** 45; **7.** 23; **8.** 250; **9.** a) 18, b) 30; **10.** 36; **11.** 172. **Z.S.:** 1. D; 2. A; 3. A; 4. B; 5. C.

2.5. Zadania utrwalające

1. 1: 20%, 2: 24%, 3: 28%, 4: 28%; **2.** $\{(O, O)\}$; **3.** $\{(5, O), (6, O)\}$; **4.** a) $\{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$, b) $\{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$; **5.** a) $\{(b, n, \dot{z}), (b, \dot{z}, n), (n, b, \dot{z}), (n, \dot{z}, b), (\dot{z}, b, n), (\dot{z}, n, b)\}$, b) zdarzenie pewne; **6.** 1120; **7.** 216; **8.** 60; **9.** 180; **10.** 210; **11.** 10; **12.** 7; **13.** 74; **14.** 14; **15.** 24; **16.** 45; **17.** 12; **18.** 75; **19.** 36.

III RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKA

3.1. Obliczanie prawdopodobieństwa klasycznego

1. $\frac{1}{4}$; **2.** $\frac{2}{5}$; **3.** kula biała: $\frac{1}{4}$, kula czarna: $\frac{2}{5}$, wylosowanie kuli czarnej; **4.** $\frac{1}{13}$; **5.** $\frac{1}{9}$; **6.** a) 1, b) 0; **7.** $\frac{1}{2}$; **8.** $\frac{1}{4}$; **9.** $\frac{248}{885}$; **10.** $\frac{24}{49}$; **11.** $\frac{7}{10}$; **12.** $\frac{13}{28}$; **13.** prawdopodobieństwo wyboru dwóch kobiet: $\frac{12 \cdot 11}{25 \cdot 24} = \frac{11}{50}$, prawdopodobieństwo wyboru dwóch mężczyzn: $\frac{13 \cdot 12}{25 \cdot 24} = \frac{13}{50}$, bardziej prawdopodobny wybór dwóch mężczyzn:

$\frac{13}{50} > \frac{11}{50}$; **14.** a) kiera, b) tak samo, c) figury. **Z.S.:** 1. D; 2. C; 3. B; 4. A.

3.2. Średnia arytmetyczna, średnia ważona

1. 4; **2.** 12,9; **3.** 3,68; **4.** 6,1°C; **5.** 5,6; **6.** 10,87 s; **7.** 1: 3,5, 2: 4,2, 3: 3, 4: 4, 5: 3,9, 6: 2,9, 7: 4,3, 8: 4,7, j. polski: 4, j. angielski: 4, historia: 3,625, matematyka: 3,5, fizyka: 3,5, geografia: 4,125, podstawy ekonomii: 3,75, elementy prawa: 4, statystyka: 3,625, zasady rachunkowości: 4; **8.** 56,60 zł; **9.** 4,35 zł; **10.** 3; **11.** 43 lata; **12.** 17,85 tys. zł; **13.** 5; **14.** 16°C; **15.** 4. **Z.S.:** 1. B; 2. A; 3. C; 4. D.

3.3. Mediana i dominanta

1. 90 zł; **2.** 3,5; **3.** ocena: 6, mediana: 4; **4.** a) 2,60 zł, b) 2,71 zł; **6.** średnia: 3,8, mediana: 4; **7.** a) 1,5 h, b) 50%; **8.** 10; **9.** 3; **10.** 109 cm; **11.** 2 książki; **12.** 159 cm; **13.** 49 g. **Z.S.:** 1. C; 2. D; 3. C; 4. D; 5. B; 6. A; 7. B; 8. D.

3.4. Skala centylowa

1. a) w 64 centylu, b) 56%, c) nie, d) $<0\%$, 20%; 2. a) z języka angielskiego poziom rozszerzony, b) z matematyki poziom podstawowy, c) nie, bo to tylko 39 centyl; 3. a) 98%, nie, bo byłby to 94 centyl, a nie 100 centyl, b) nie, c) nie, bo 56% maturzystów napisało egzamin lepiej niż Piotrek; 4. a) 75, b) 9 kg, c) Marta i Iza – tak, Helenka – nie, d) nie; 5. a) Zosia – tylko jeden egzamin poniżej 50 centyla, Kacper – 3 egzaminy poniżej 50 centyla, b) Kasia uzyskala ten sam centyl z obu egzaminów, więc jej umiejętności wobec pozostałych maturzystów są na tym samym poziomie z obu przedmiotów, pomimo iż wynik procentowy z języka angielskiego jest wyższy niż z języka polskiego, Kacper lepiej na tle rówieśników wypadł z języka polskiego, c) oboje uzyskali wyższe wyniki procentowe z języka angielskiego. **Z.S.:** 1. B; 2. A; 3. A.

3.5. Zadania utrwalające

1. $\frac{1}{5}$; 2. nie, bo prawdopodobieństwo wylosowania dziewczyny wynosi $\frac{1}{3}$; 3. $\frac{3}{8}$; 4. $\frac{2}{5}$; 5. $\frac{1}{5525}$; 6. 0,6; 7. 3,5; 8. 3,76; 9. 171,92 cm; 10. 21,80 zł; 11. 85 zł; 12. dominanta: 3, mediana 3; 13. dominanta: 40 g, mediana: 51 g, średnia: 52,4 g; 15. średnia: 163,9 cm, mediana 164 cm, mediana; 16. a) 3a: 3,56, 3b: 3,36, b) 3a: 4, 3b: 3 c) medianę; 17. średnia: 3000 zł, mediana: 2500 zł, $85\frac{5}{7}\%$, 0%; 18. a) 2, b) 2, c) 18; 19. mediana: 11,5, średnia: 11,35; 20. a) 24, b) 25, c) 24, średnia; 21. a) 3, b) 3, 11 osób, c) 11 osób; 22. a) język polski, język angielski, b) 2%, c) z języka angielskiego na poziomie podstawowym; 23. a) tak, są to wyniki pomiędzy 56% a 76% oraz pomiędzy 96% a 100%; b) 20%, c) 35 centyl.