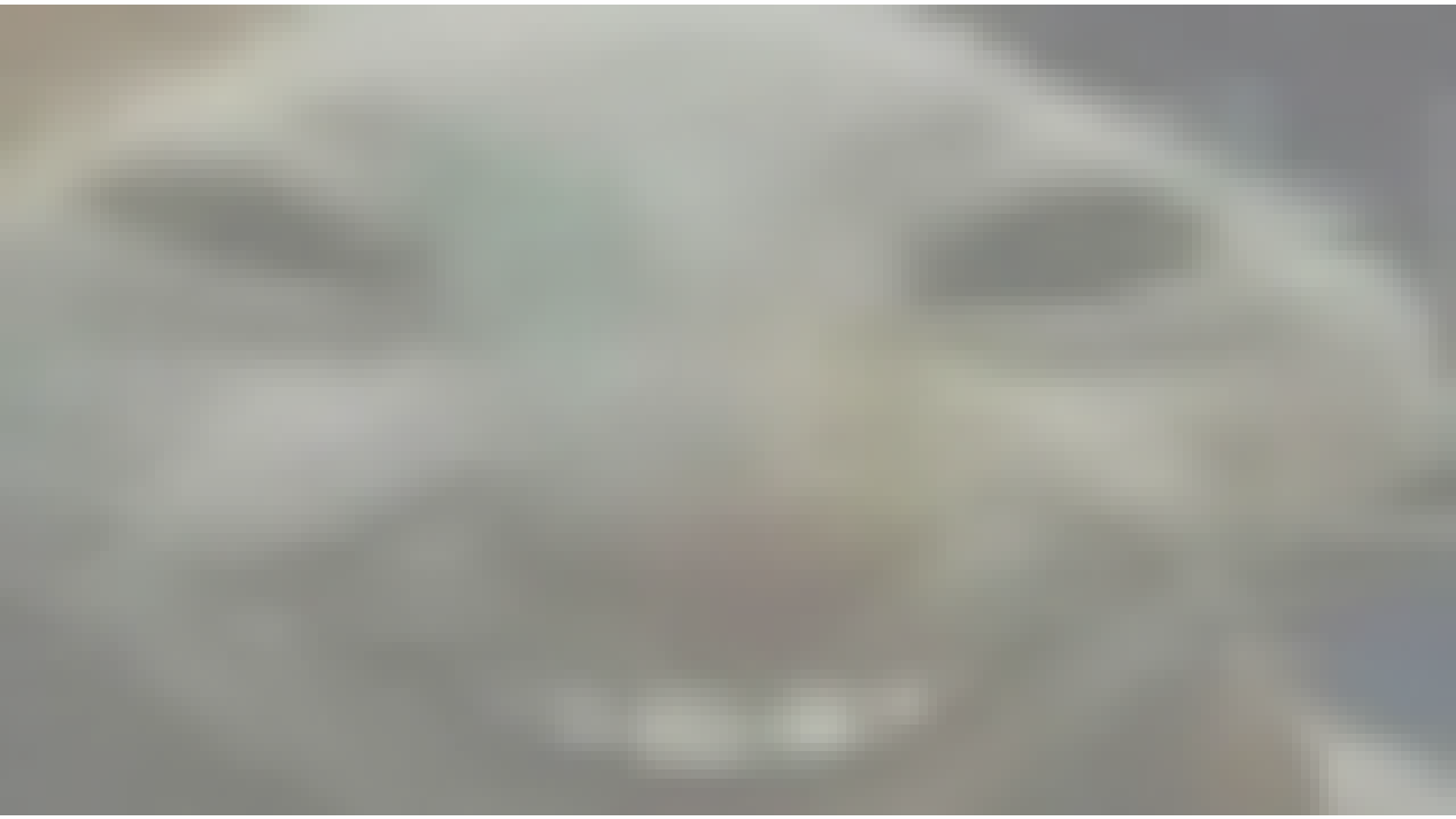
DLA ABSOLWENTÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

MATeMAtyka 2

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy

nowa era



Wojciech Babiański
Lech Chańko

MATeMAtyka 2

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy

nowa era Twoje mocne strony

MATeMAtyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa
Rok dopuszczenia: 2020

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/2/2020

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Ta publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020
ISBN 978-83-267-3899-9

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Katarzyna Radzimińska
Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak, Marcin Minda, Agnieszka Trzpil-Gajek
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak
Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska
Redakcja językowa: Paulina Szulim
Korekta językowa: Anna Wesołowska
Nadzór artystyczny: Kaia Pichler
Opieka graficzna: Ewa Kaletyn
Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek
Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska
Rysunki merytoryczne: Lech Chańko
Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar
Ilustracje na infografikach: Lech Chańko, Enzo di Giacomo, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar
Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:
MATeMAtyka kl. 1 ZP i MATeMAtyka kl. 1 ZPiR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Doroty Ponczek oraz MATeMAtyka kl. 2 ZP i MATeMAtyka kl. 2 ZR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Walstead Central Europe

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:

Fotografia na okładce: Shutterstock/Omelchenko.

Fotografie: Getty Images: iStock/Getty Images Plus - Davel5957 s. 29 (Gateway Arch), Meinzahn s. 107, MediaNews Group/Bay Area News via Getty Images s. 9, Moment/shunli zhao s. 29 (wiszące łańcuchy), ullstein bild s. 48; Shutterstock: Baloncici s. 155, Daniel Prudek s. 135, Direk Yiamsaensuk s. 175, ID1974 s. 226, Jag_cz s. 67, Nicku s. 74, remik44992 s. 145, Vaklav s. 47; Lech Chańko s. 55, 245; M.C. Escher's "Symmetry Drawing E25" © 2020 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com s. 201.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Spis treści

1. Funkcja kwadratowa

1.1. Wykres funkcji kwadratowej – powtórzenie 10
1.2. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej – powtórzenie 13
Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego – warto powtórzyć 15
1.3. Równania kwadratowe (1) 16
1.4. Równania kwadratowe (2) 19
Szkicowanie paraboli – warto wiedzieć 23
1.5. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1) 24
1.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2) 27
1.7. Nierówności kwadratowe 30
1.8. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych 34
1.9. Układy równań 37
Układy równań kwadratowych – warto wiedzieć 40
1.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1) 41
1.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2) 44
1.12. Zagadnienia uzupełniające 47
Zestawy powtórzeniowe 49
Sposób na zadanie 52
Zadania testowe 53
Przed obowiązkową maturą z matematyki 54

2. Wielomiany

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu 56
2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów 59
2.3. Mnożenie wielomianów 64
2.4. Wzory skróconego mnożenia 68
Trójkąt Pascala – warto wiedzieć 72
2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1) 73
2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2) 76
2.7. Równania wielomianowe 78
2.8. Dzielenie wielomianów 82
Dzielenie wielomianu przez trójmian kwadratowy – warto wiedzieć 86
2.9. Twierdzenie Bézouta 87
2.10. Pierwiastki całkowite wielomianu 91
Pierwiastki wymierne wielomianu – warto wiedzieć 94
2.11. Wielomiany – zastosowania 95

2.12. Zagadnienia uzupełniające 97
Zestawy powtórzeniowe 101
Sposób na zadanie 104
Zadania testowe 105
Przed obowiązkową maturą z matematyki 106

3. Funkcje wymierne

Proporcjonalność odwrotna – warto powtórzyć 108
3.1. Wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ 109
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ wzdłuż osi OY 112
3.3. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ wzdłuż osi OX 114
Funkcja homograficzna – warto wiedzieć 117
3.4. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne 118
Działania na liczbach wymiernych – warto powtórzyć 122
3.5. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych 123
3.6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych 126
3.7. Równania wymierne (1) 129
3.8. Równania wymierne (2) 131
3.9. Równania z wartością bezwzględną 136
3.10. Nierówności z wartością bezwzględną 139
3.11. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1) 142
3.12. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2) 145
3.13. Zagadnienia uzupełniające 147
Zestawy powtórzeniowe 149
Sposób na zadanie 152
Zadania testowe 153
Przed obowiązkową maturą z matematyki 154

4. Trygonometria

4.1. Trójkąty prostokątne 156
Trójki pitagorejskie – warto wiedzieć 160
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego 161
4.3. Trygonometria – zastosowania 164
4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych 168
4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi 171
4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1) 176
4.7. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2) 180
Współczynnik kierunkowy prostej – warto wiedzieć 183
4.8. Pole trójkąta 184
Czworokąty wypukłe – warto powtórzyć 188

4.9. Pole czworokąta 189
4.10. Zagadnienia uzupełniające 193
Zestawy powtórzeniowe 195
Sposób na zadanie 198
Zadania testowe 199
Przed obowiązkową maturą z matematyki 200

5. Planimetria

5.1. Okrąg 202
5.2. Koło 205
5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej 208
Konstrukcja stycznej do okręgu. Konstrukcja wspólnej stycznej
do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie – warto wiedzieć 212
5.4. Kąty w okręgu 213
5.5. Okrąg opisany na trójkącie 218
5.6. Okrąg wpisany w trójkąt 222
5.7. Wielokąty foremne 227
Konstrukcje wybranych wielokątów foremnych – warto wiedzieć 230
5.8. Twierdzenie sinusów 231
5.9. Twierdzenie cosinusów (1) 236
5.10. Twierdzenie cosinusów (2) 239
5.11. Zagadnienia uzupełniające 243
Zestawy powtórzeniowe 247
Sposób na zadanie 250
Zadania testowe 251
Przed obowiązkową maturą z matematyki 252

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań 253
Indeks 292
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych 295

Odpowiedzi do pytań i poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.



Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

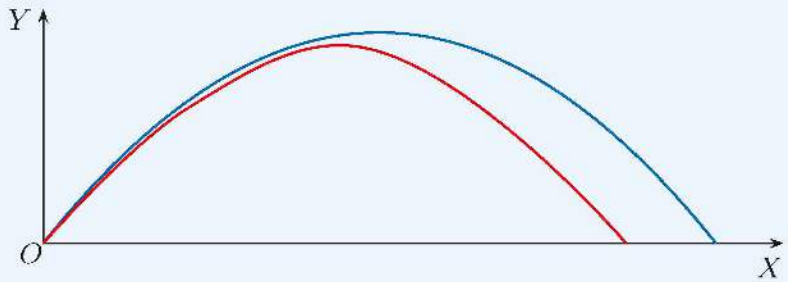


Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Funkcja kwadratowa

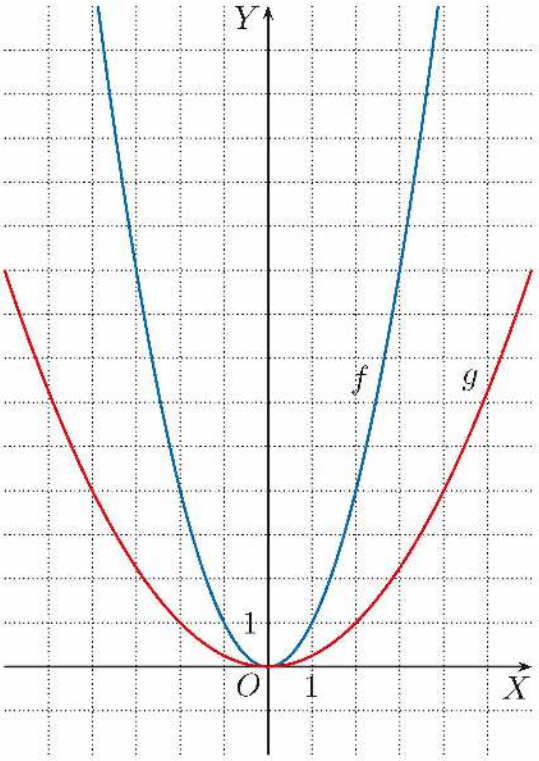
Jeśli pominie się opór powietrza, można przyjąć, że tor lotu rzuconej piłki lub wystrzelonego pocisku jest fragmentem paraboli (kolor niebieski na rysunku). Jednak ze względu na opór powietrza tor ten ma kształt **krzywej balistycznej** (na rysunku zaznaczona kolorem czerwonym).



1.1. Wykres funkcji kwadratowej – powtórzenie

Wykresem funkcji $y = ax^2$, gdzie $a > 0$, jest parabola o ramionach skierowanych do góry. Jej wierzchołkiem jest punkt $O(0,0)$. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = x^2 \quad \text{i} \quad g(x) = \tfrac{1}{4}x^2$$



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = 2x^2$, b) $y = \frac{1}{2}x^2$.

Ćwiczenie 2

Punkt P należy do paraboli $y = ax^2$. Podaj wartość współczynnika a.

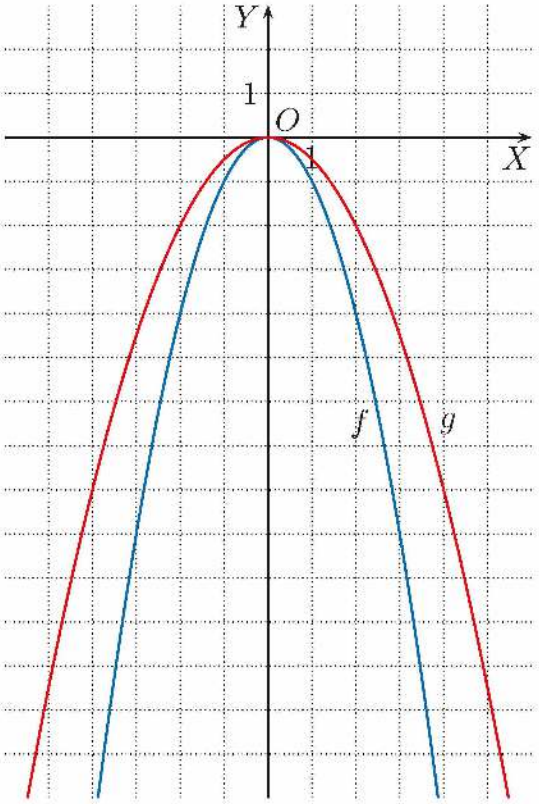
a) $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ c) $P\left(\sqrt{3}, 1\right)$

b) $P(-2, 12)$ d) $P\left(-2\sqrt{2}, \frac{4}{3}\right)$

Uwaga. Mówimy „parabola o równaniu $y = ax^2$" lub krótko „parabola $y = ax^2$".

Wykresem funkcji $y = ax^2$, gdzie $a < 0$, jest parabola o ramionach skierowanych w dół. Jej wierzchołkiem jest punkt $O(0,0)$. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = -x^2 \quad \text{i} \quad g(x) = -\tfrac{1}{2}x^2$$



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = -2x^2$, b) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Ćwiczenie 4

Które z punktów:

$$A\left(\tfrac{1}{2}, -2\right),\ B\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{4}, -1\right),\ C\left(\tfrac{1}{4}, 2\right),$$

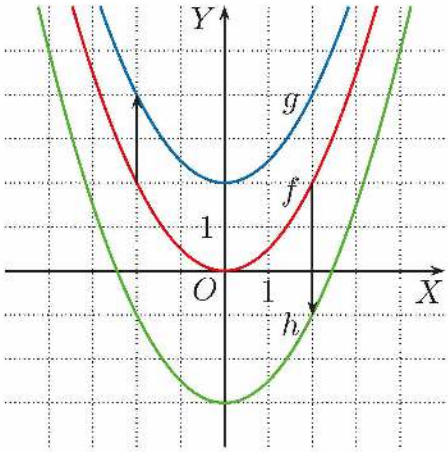
$$D\left(-\tfrac{3}{4}, -18\right),\ E\left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{4}{5}\right)$$

należą do paraboli $y = -8x^2$?

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ oraz:

- $g(x) = \frac{1}{2}x^2+2$ – otrzymany przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w górę (punkt $(0, 2)$ jest wierzchołkiem paraboli),
- $h(x) = \frac{1}{2}x^2-3$ – otrzymany przez przesunięcie wykresu funkcji f o 3 jednostki w dół (punkt $(0, -3)$ jest wierzchołkiem paraboli).



Ćwiczenie 5

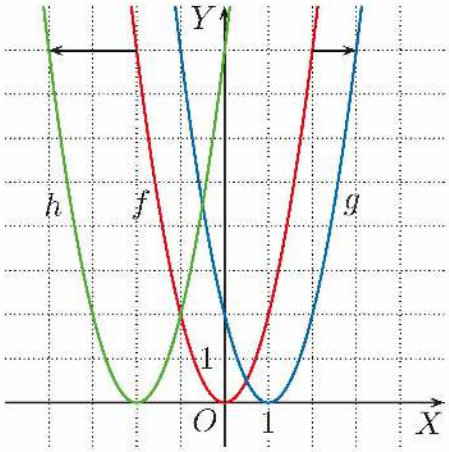
Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji f. Podaj współrzędne wierzchołka tej paraboli oraz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = 2x^2 - 2$ c) $f(x) = -x^2 + 4$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 2x^2$ oraz:

- $g(x) = 2(x - 1)^2$ – otrzymany przez przesunięcie wykresu funkcji f o 1 jednostkę w prawo (punkt $(1, 0)$ jest wierzchołkiem paraboli),
- $h(x) = 2(x + 2)^2$ otrzymany przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w lewo (punkt $(-2, 0)$ jest wierzchołkiem paraboli).



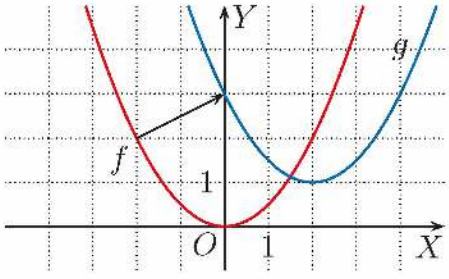
Ćwiczenie 6

Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji f. Podaj współrzędne wierzchołka tej paraboli oraz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = (x - 3)^2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2$ c) $f(x) = -(x + 2)^2$

Przykład 3

Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ o 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę. Parabola będąca wykresem funkcji g ma wierzchołek w punkcie $(2, 1)$.



Wykresem funkcji $f(x) = a(x-p)^2+q$, gdzie $a \neq 0$, jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q).

Ćwiczenie 7

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f, g i h.

a) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -(x-2)^2$, $h(x) = -(x-2)^2 + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$, $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$

Zadania

1. Jak należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g?

a) $f(x) = 5x^2$, $g(x) = 5x^2 - 3$

b) $f(x) = 6x^2$, $g(x) = 6x^2 + 8$

c) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3(x+7)^2$

d) $f(x) = -8x^2$, $g(x) = -8(x-5)^2$

2. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f i wyznacz przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2$

b) $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 - 6$

c) $f(x) = 9(x+5)^2$

d) $f(x) = -7(x-6)^2$

e) $f(x) = \frac{2}{3}(x - \frac{1}{2})^2 - 4$

f) $f(x) = -\frac{7}{6}(x + \frac{5}{2})^2 + \frac{1}{6}$

3. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej zbiór wartości oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

a) $f(x) = (x+2)^2 - 1$

b) $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$

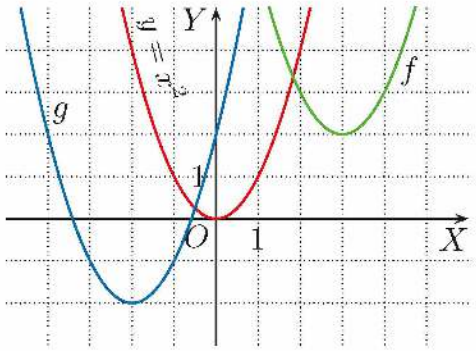
c) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 2$

d) $f(x) = -2(x-1)^2 + 2$

4. Na rysunku obok przedstawiono parabolę $y = x^2$ oraz wykresy funkcji f i g, które powstały przez jej przesunięcie.

a) Dla każdej funkcji podaj jej zbiór wartości i przedziały monotoniczności.

b) Podaj wzory funkcji f i g.



Powtórzenie

5. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Dla każdej z nich podaj zbiór wartości.

a) $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = (x+3)^2$

b) $f(x) = -x^2 - 1$, $g(x) = -(x-1)^2$

c) $f(x) = -2x^2 + 3$, $g(x) = -2(x+3)^2$

6. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = (x-4)^2 + 2$

b) $f(x) = -(x+2)^2 + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 4$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

1.2. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej – powtórzenie

Przypominamy, że postać $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej (trójmianu kwadratowego), natomiast postać $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną**.

Przykład 1

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku $(4, -2)$. Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej, jeśli punkt $(5, 1)$ należy do tej paraboli.

Punkt (p, q) jest wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = a(x-p)^2 + q$. Zatem wzór funkcji f ma postać: $f(x) = a(x-4)^2 - 2$.

Podstawiamy współrzędne punktu $(5, 1)$ do równania paraboli:

$$1 = a(5-4)^2 - 2$$

Stąd $a = 3$. Zatem wzór funkcji f ma postać kanoniczną: $f(x) = 3(x-4)^2 - 2$. Przekształcamy ten wzór do postaci ogólnej:

$$f(x) = 3(x-4)^2 - 2 = 3(x^2 - 8x + 16) - 2 = 3x^2 - 24x + 46$$

Ćwiczenie 1

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku W. Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej, jeśli punkt P należy do tej paraboli.

a) $W(3, 2)$, $P(4, 6)$ b) $W(-2, 5)$, $P(-4, -7)$ c) $W(-3, -6)$, $P(-9, 6)$

Jeśli chcemy przejść od postaci ogólnej do postaci kanonicznej funkcji kwadratowej, możemy skorzystać z poniższych wzorów.

Twierdzenie

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Ćwiczenie 2

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

a) $y = -3x^2 + 2x + 1$ c) $y = -4x^2 + 5x - 2$ e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$

b) $y = 2x^2 + 3x + 7$ d) $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ f) $y = \frac{3}{4}x^2 - \sqrt{2}x + 1$

Przykład 2

Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{-1} = -2$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 1 = 4 + 2 = 6$, stąd $y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6}{4 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{-6}{-2} = 3$

Wierzchołek paraboli: $(-2, 3)$, postać kanoniczna: $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$.

Ćwiczenie 3

Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ b) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$ c) $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

Zadania

1. Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku W. Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej, jeśli punkt P należy do tej paraboli. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $W(1, -2)$, $P(3, 6)$ b) $W(-2, 4)$, $P(2, 0)$ c) $W(-3, -4)$, $P(-1, -2)$

2. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej oraz podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ c) $f(x) = -x^2 - 6x - 6$ e) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$

3. Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$, jeśli punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej jej wykresem.

a) $W(3, 1)$ b) $W(-2, -4)$ c) $W(-1, 3)$

4. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naszkicuj jej wykres oraz podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ c) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$ e) $f(x) = 3x^2 + 6x$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$ f) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x$

Powtórzenie

5. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f oraz naszkicuj ten wykres, przesuwając odpowiednio wykres funkcji $g(x) = x^2$.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ b) $f(x) = x^2 + 4x$ c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

Warto powtórzyć

Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego

1. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -2$ i dla $x = -3$.

a) $x^2 - 3x - 6$ b) $2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ c) $-3x^2 + 2x - 1$

2. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{1}{2}$ i dla $x = \frac{1}{4}$.

a) $4x^2 - 2x + 3$ b) $-8x^2 + 4x - 1$ c) $-2x^2 - 6x + \frac{1}{2}$

3. Oblicz wartości funkcji f, g, h dla argumentu $x = -2$ i uporządkuj je w kolejności rosnącej.

a) $f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 10x - 5$, $h(x) = -3x^2 - \frac{1}{2}x + 4$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 7$, $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - 8$, $h(x) = -\frac{17}{8}x^2 - x - 4$

4. Dana jest funkcja $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + c$. Oblicz współczynnik c, jeśli:

a) $f(-2) = 9$, b) $f(4) = -2$, c) $f\left(-2\sqrt{2}\right) = -6$.

5. Sprawdź, które spośród punktów:

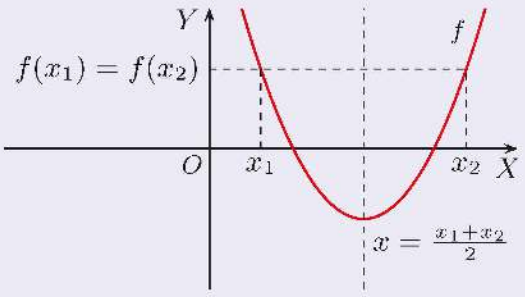
$$A(-1, 2 - 3\sqrt{2}),\ B(-\sqrt{2}, 10 - 2\sqrt{2}),\ C(-2, 8),$$
$$D(1 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}),\ E(\sqrt{2}, 8 - 2\sqrt{2})$$

nie należą do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$.

Twierdzenie

Jeśli dla dwóch różnych argumentów x_1, x_2 funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość, to oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prostą określoną za pomocą równania:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



6. Sprawdź, czy $f(-3) = f(1)$. Podaj równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f oraz współrzędne wierzchołka tej paraboli.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ b) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$

7. Oblicz $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ i $f(2)$. Podaj równanie osi symetrii oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.

a) $f(x) = x^2 - x - 2$ c) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

b) $f(x) = 2x^2 - 6x - 2$ d) $f(x) = -6x^2 - 6x + 8$

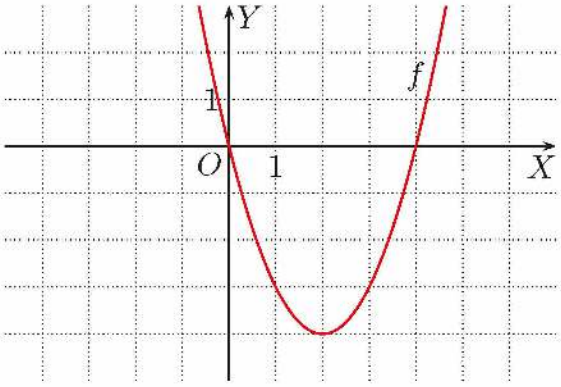
1.3. Równania kwadratowe (1)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego miejsca zerowe tej funkcji.

a) $f(x) = x^2 - 4x$

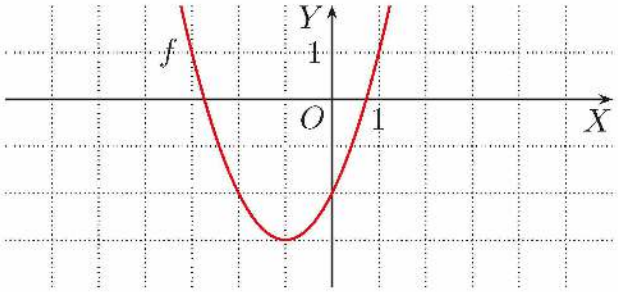
Po przekształceniu do postaci kanonicznej: $f(x) = (x-2)^2 - 4$.



Z wykresu można odczytać miejsca zerowe: 0 i 4.

b) $f(x) = x^2 + 2x - 2$

Po przekształceniu do postaci kanonicznej: $f(x) = (x+1)^2 - 3$.

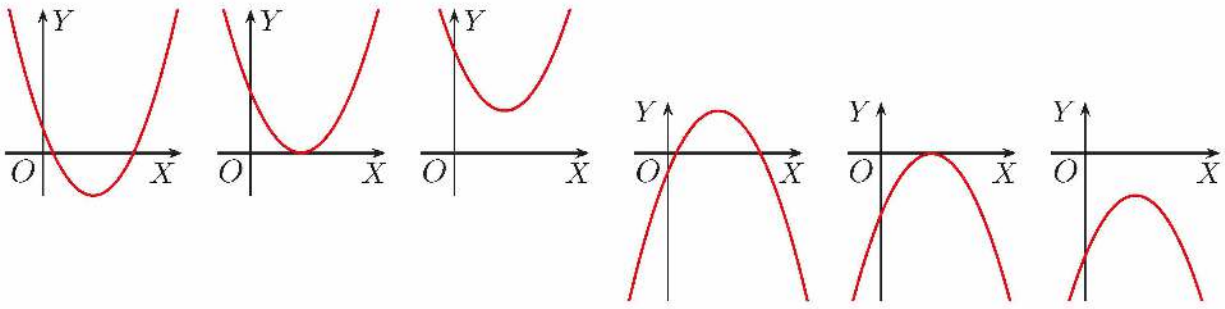


Z wykresu można odczytać tylko przybliżone wartości miejsc zerowych. Wyznaczenie dokładnych wartości wymaga rozwiązania równania $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ to miejsca zerowe funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

Ćwiczenie 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi OX. Ile rozwiązań może mieć równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$?



Uwaga. Rozwiązanie równania z niewiadomą x polega na wyznaczeniu wszystkich wartości x, które spełniają to równanie. Zbiór tych x nazywamy zbiorem rozwiązań równania.

Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 8x = 0$.

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:

$$4x(x-2) = 0$$

czyli $x = 0$ lub $x - 2 = 0$, zatem $x = 0$ lub $x = 2$.

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór $\{0, 2\}$.

> Dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$:
> $a \cdot b = 0$
> wtedy i tylko wtedy, gdy
> $a = 0$ lub $b = 0$.

Ćwiczenie 2

Podaj zbiór rozwiązań równania.

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $7x - 3x^2 = 0$ c) $2x^2 = 5x$ d) $8x = \frac{1}{2}x^2$

W niektórych przykładach przy rozkładzie trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe możemy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 9 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$.

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$
$$2x + 3 = 0 \text{ lub } 2x - 3 = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2} \text{ lub } x = \tfrac{3}{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $-\frac{3}{2}$ i $\frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $16x^2 - 25 = 0$ b) $4 - 100x^2 = 0$ c) $4x^2 - 121 = 0$ d) $\frac{9}{49}x^2 - 81 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

$$(x-2)^2 = 0, \text{ czyli } x - 2 = 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem tego równania.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ c) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ f) $3x^2 + 9 = x^2 - 6\sqrt{2}x$

Przykład 5

a) Rozwiąż równanie $\frac{11}{3}x^2 - 7 = 0$.

$$\frac{11}{3}x^2 = 7 \ / \cdot \frac{3}{11}$$
$$x^2 = \frac{21}{11}$$
$$x = -\sqrt{\frac{21}{11}} \text{ lub } x = \sqrt{\frac{21}{11}}$$

Rozwiązania równania: $-\sqrt{\frac{21}{11}}$ i $\sqrt{\frac{21}{11}}$.

b) Rozwiąż równanie $2x^2 + 9 = 0$.

Zauważmy, że $2x^2 + 9 \geqslant 9$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$, więc $2x^2 + 9$ nie może być równe zeru.
Zatem równanie jest sprzeczne, czyli nie ma rozwiązań.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $6x^2 - 18 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$ c) $\frac{4}{5}x^2 - 2 = 0$ d) $4x^2 + 1 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $-7x^2 + 42x = 0$ c) $36x^2 = 6x$ e) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$
b) $9x^2 + \frac{1}{3}x = 0$ d) $2x + 18x^2 = 0$ f) $\sqrt{3}x = -3x^2$

2. Rozwiąż równanie.

a) $100x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 + 64 = 16x$ g) $x^2 = (1 - x)(1 + x)$
b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9} = 0$ e) $24x - x^2 = 144$ h) $\frac{1}{2}x(6 - x) = 2 + x$
c) $x^2 + 10x + 25 = 0$ f) $1 + 9x^2 + 6x = 0$ i) $(x-3)(x-2) = 7x-30$

3. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

a) $y = 3x^2 - 12x$ c) $y = 3x^2 + 12$ e) $y = 900x^2 + 4$
b) $y = 3x^2 - 12$ d) $y = 900x^2 + 4x$ f) $y = 900x^2 - 4$

4. Wyznacz wspólne miejsce zerowe funkcji f i g.

a) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$
c) $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$

Powtórzenie

5. Rozwiąż równanie.

a) $1 - x^2 = 1 - x$ c) $1 - 6x = -9x^2$ e) $x(x + 1) = 9x - 16$
b) $4 - x = \frac{1}{3}x^2 + 4$ d) $x^2 = 12x - 36$ f) $(2 - x)x = 4 - 2x$

6. Ile rozwiązań ma równanie?

a) $54x^2 - 6x = 0$ b) $54x^2 + 6 = 0$ c) $54x^2 - 6 = 0$

1.4. Równania kwadratowe (2)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

Korzystamy ze wzoru $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

$$(2x - 5)^2 = 0$$
$$2x - 5 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $\frac{5}{2}$.

Czy wiesz, że...
Równania kwadratowe były rozwiązywane już przez starożytnych Babilończyków około 1800 r. p.n.e. Świadczą o tym zachowane gliniane tabliczki z pismem klinowym.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ b) $25x^2 + 40x + 16 = 0$ c) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 27 = 0$.

Zauważmy, że $4x^2 - 20x = (2x - 5)^2 - 25$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 27 = 0$$
$$(2x - 5)^2 = -2$$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x - 5)^2 \geqslant 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

D **Ćwiczenie 2**

Uzasadnij, że podane równanie jest sprzeczne.

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 + 6x + 12 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 5 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 23 = 0$.

$$(2x - 5)^2 - 25 + 23 = 0$$
$$(2x - 5)^2 = 2$$
$$2x - 5 = -\sqrt{2} \text{ lub } 2x - 5 = \sqrt{2}$$
$$2x = 5 - \sqrt{2} \text{ lub } 2x = 5 + \sqrt{2}$$

Zauważmy, że: $(2x - 5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x$.

Równanie ma dwa pierwiastki: $\frac{5-\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 6x + 8 = 0$ c) $x^2 + 6x + 7 = 0$

Postępując tak jak w przykładach 1–3, możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe. Zwykle korzystamy jednak ze wzorów podanych w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek:
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Dowód

Zapiszmy trójmian w postaci kanonicznej: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Stąd $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$, co oznacza, że:
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to powyższe równanie jest sprzeczne.
- Jeśli $\Delta = 0$, to otrzymujemy równanie:
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$
Jego rozwiązaniem jest liczba $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Jeśli $\Delta > 0$, to otrzymujemy:
$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
Rozwiązaniami równania są liczby $x_1 = \frac{b\ \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Uwaga. W przypadku, gdy $\Delta = 0$, pierwiastek $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nazywamy **pierwiastkiem podwójnym** (zauważ, że dla $\Delta = 0$ ze wzorów: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ otrzymujemy $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).

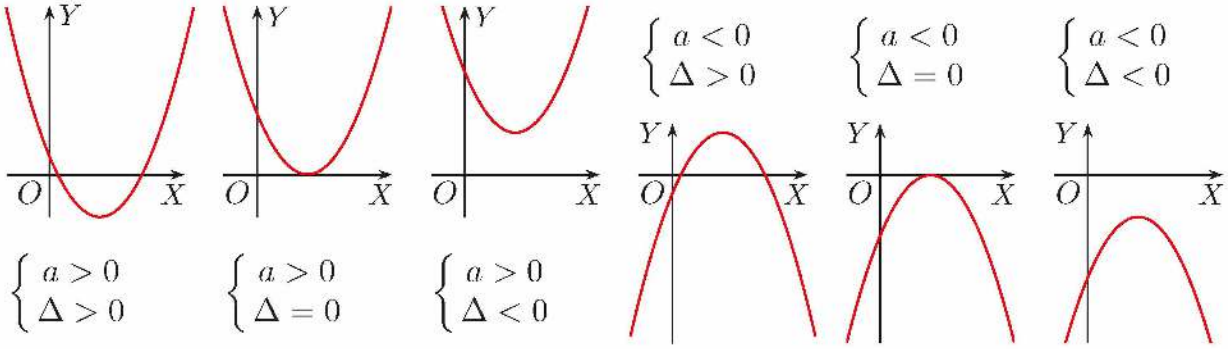
Ćwiczenie 4

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego i podaj liczbę rozwiązań równania.

a) $x^2 + 8x + 15 = 0$
b) $x^2 - 4x + 6 = 0$
c) $5x^2 + 5x - \frac{1}{2} = 0$
d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$
e) $\frac{9}{5}x^2 - 6x + 5 = 0$
f) $-x^2 + 4x - 7 = 0$
g) $-3x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{3} = 0$
h) $\sqrt{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$
i) $4\sqrt{2}x^2 + 3x = 0$

Interpretacja geometryczna

Poniżej przedstawiono możliwe położenia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ.



$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
dwa miejsca zerowe	jedno miejsce zerowe	brak miejsc zerowych	dwa miejsca zerowe	jedno miejsce zerowe	brak miejsc zerowych

W przypadku gdy funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe, możemy je wyznaczyć, korzystając z podanych poprzednio wzorów.

Przykład 4

Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 = 40$. Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2\sqrt{10}}{6} = \frac{2-\sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2\sqrt{10}}{6} = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$$

b) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 36 - 36 = 0$, równanie ma zatem jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

c) $7x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47 < 0$, więc równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

b) $4x^2 - x - 5 = 0$

c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

d) $28x^2 - 4x + \frac{1}{7} = 0$

e) $-x^2 + 6x + 1 = 0$

f) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$

g) $-3x^2 + 2x - 3 = 0$

h) $6x^2 - 2x - 1 = 0$

i) $2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 9x - 35 = 0$
b) $4x^2 - 13x + 3 = 0$
c) $-6x^2 + 13x + 5 = 0$
d) $5x^2 - 6x + 6 = 0$
e) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$
f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
g) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$
h) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$
i) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 3 = -7x$
b) $x + 10 = 3x^2$
c) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$
d) $-2x - 3x^2 + 6 = 0$
e) $5x^2 = 2 - 2x$
f) $5x^2 = 8x - 5$
g) $11(x^2 + 5) = x$
h) $x^2 + x = 4x + 7$
i) $3x^2 + 1 = 7x$

3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
b) $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$
c) $f(x) = -4x^2 + x + 3$
d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 12$
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$
f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x + 1$

4. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)^2$
b) $6x^2 + 7x + 2 = (2 - 3x)(3x + 2)$
c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 9 = (x - 3)(x - 5)$
d) $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)(x + 2) = (5 - x)(6 - x)$
e) $(x - 3)(x + 5) = (2x + 3)(x - 4)$
f) $(4x - 1)(x - 4) = (3x + 2)(x - 7)$

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania.

a) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + 2 = 0$
b) $13x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \frac{1}{8} = 0$

Powtórzenie

6. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$
b) $x^2 - 4x + 7 = 0$
c) $-4x^2 + 6x - 1 = 0$
d) $-4x^2 + 6x - 3 = 0$
e) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 8 = 0$
f) $\frac{1}{4}x^2 + 3x - 8 = 0$

7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 15$
b) $f(x) = 3 + 5x - 2x^2$

8. Rozwiąż równanie.

a) $x(x - 5) = 2x(x - 1)$
b) $2(1 - 5x) = (1 - x)^2$
c) $\frac{x^2 - 5x + 4}{5} = \frac{1 - 3x}{2}$
d) $\frac{(x+1)^2}{3} = \frac{(x+4)^2}{7} - 1$

Warto wiedzieć

Szkicowanie paraboli

Aby naszkicować parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, można wykorzystać postać kanoniczną funkcji f lub postąpić zgodnie z następującą instrukcją.

- Podaj punkt, w którym parabola przecina oś OY. Jest to punkt $(0, c)$.
- Wyznacz (jeśli istnieją) punkty, w których parabola przecina oś OX. Są to punkty $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$, gdzie $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Wyznacz wierzchołek paraboli $W\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- Aby uzyskać dokładniejszy szkic, wyznacz kilka dodatkowych punktów należących do paraboli (można wykorzystać fakt, że prosta $x = -\frac{b}{2a}$ jest osią symetrii paraboli).
- Połącz otrzymane punkty krzywą.

Przykład

Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Parabola przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$.
- Rozwiązujemy równanie $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$\Delta = 16$, stąd $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$, $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

Parabola przecina oś OX w punktach $(-1, 0)$ i $(3, 0)$.

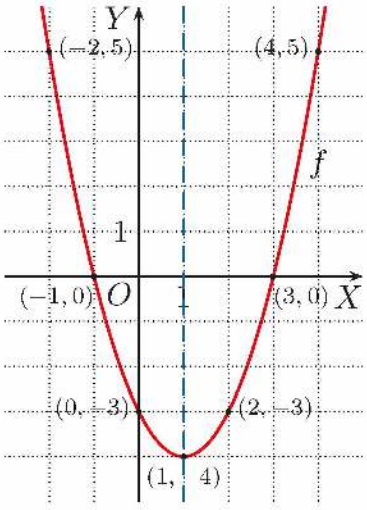
- Wyznaczamy wierzchołek paraboli.

$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

$y_w = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(1, -4)$.

- Wyznaczamy inne punkty należące do paraboli. $f(-2) = 5$, czyli do paraboli należy punkt $(-2, 5)$. Prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli, więc należą do niej także punkty $(4, 5)$ i $(2, -3)$.
- Szkicujemy parabolę.



1. Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji f.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$

d) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

e) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$

1.5. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)

Definicja

Postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Przedstawienie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej nazywamy również **rozkładem na czynniki liniowe**. Rozkład na czynniki liniowe można zapisać na różne sposoby, np.:

$y = (3x + 2)(x - 7) =$ Czynniki liniowe: $3x + 2$ i $x - 7$.

$= 3(x + \frac{2}{3})(x - 7)$ Czynniki liniowe: $x + \frac{2}{3}$ i $x - 7$.

Aby przejść od postaci iloczynowej do ogólnej, wystarczy wykonać mnożenie.

Na przykład dla trójmianu $y = 2(x - 3)(x + 5)$ mamy:

$$y = 2(x - 3)(x + 5) = 2(x^2 + 5x - 3x - 15) = 2x^2 + 4x - 30$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci ogólnej.

a) $y = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 9)$ b) $y = 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ c) $y = \frac{1}{6}x(x + 2)$

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu kwadratowego, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Przykład 1

Postać ogólna	Postać iloczynowa	Czynniki liniowe	Pierwiastki
$y = x^2 - 9x + 14$	$y = (x - 2)(x - 7)$	$x - 2$ i $x - 7$	$x_1 = 2$ i $x_2 = 7$
$y = 4x^2 + 4x + 1$	$y = 4(x + \frac{1}{2})^2$	$x + \frac{1}{2}$ (czynnik podwójny)	$x_0 = -\frac{1}{2}$ (pierwiastek podwójny)
$y = 2x^2 + 6$	nie można rozłożyć na czynniki liniowe		brak pierwiastków

Ćwiczenie 2

Odczytaj czynniki liniowe i podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a) $y = 4(x - 3)(x - 5)$ c) $y = -(x + 4)(x + 8)$ e) $y = -3(x - 2)^2$

b) $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$ d) $y = 8x(x - 9)$ f) $y = 13(x + 7)^2$

Ćwiczenie 3

Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a) $y = -2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})$ b) $y = (x - 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{2})$

Ćwiczenie 4

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = 5x^2 - 3x$ b) $y = 16x^2 - 1$ c) $y = 9x^2 - 8$

Twierdzenie

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, zatem:

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

Postać iloczynowa: $y = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})$.

b) $y = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = 4 + 4 = 8$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$, zatem:

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Postać iloczynowa: $y = \big(x - (1 - \sqrt{2})\big)\big(x - (1 + \sqrt{2})\big)$, którą możemy zapisać: $y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$.

c) $y = -2x^2 + x - 4$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$, więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go rozłożyć na czynniki liniowe.

Ćwiczenie 5

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 - 8x + 15$

b) $y = x^2 + 3x - 28$

c) $y = 3x^2 - 7x + 2$

d) $y = 12x^2 + 11x + 2$

e) $y = -2x^2 - 2x + 24$

f) $y = -4x^2 + 3x + 1$

g) $y = 2x^2 - 3x + 4$

h) $y = x^2 - 2x - 2$

i) $y = 2x^2 - 2x - 1$

Zadania

1. Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisz go w postaci ogólnej.

a) $y = (x + 10)(x - 20)$ d) $y = (2x - 4)(2x - 1)$ g) $y = -x(x + 3)$

b) $y = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ e) $y = (2x + 1)(3x + 1)$ h) $y = \frac{1}{2}x(2x - 1)$

c) $y = 2(x + 3)(3x - 4)$ f) $y = (5x - 2)(4x - 3)$ i) $y = (7 - 3x)x$

2. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = x^2 - x - 6$ d) $y = -2x^2 + 4x - 1$ g) $y = 3x^2 - 10x - 8$

b) $y = -x^2 + x + 6$ e) $y = 3x^2 - 7x + 4$ h) $y = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

c) $y = 2x^2 - 3x - 2$ f) $y = -4x^2 + 2x + 1$ i) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 7$

3. Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej. Podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = 4x^2 - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x$ e) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

b) $f(x) = 9x^2 - 16$ d) $f(x) = 6x - 9x^2$ f) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

D **4.** a) Uzasadnij, że trójmian kwadratowy $y = \sqrt{2}x^2 + (3 - \sqrt{2})x + \frac{1}{4}$ można przedstawić w postaci iloczynowej.

b) Uzasadnij, że trójmianu kwadratowego $y = \sqrt{3}x^2 + (3 - \sqrt{3})x + \frac{1}{2}$ nie można przedstawić w postaci iloczynowej.

5. Przedstaw funkcję f w postaciach iloczynowej i kanonicznej. Naszkicuj parabolę, która jest wykresem tej funkcji.

a) $f(x) = -x^2 - 4x$ c) $f(x) = 2x^2 + 2x$ e) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1$

Powtórzenie

6. Oblicz pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.

a) $y = x^2 - 5x - 6$ c) $y = -6x^2 - 7x + 3$ e) $y = (x - 2)^2 - 4$

b) $y = 2x^2 - 8x + 6$ d) $y = -x^2 + 4x - 4$ f) $y = -2(x - 2)^2 + 2$

7. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 + \sqrt{3}x - 6$ b) $y = \sqrt{3}x^2 + 6x$ c) $y = \sqrt{3}x^2 + 9$

8. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

a) $y = x(x + 6)$ c) $y = (x + 2)(x - 4)$ e) $y = -(2x + 4)(6x - 3)$

b) $y = -\frac{1}{2}x(x - 3)$ d) $y = (x - 6)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ f) $y = (2x - 3)(4x + 5)$

1.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)

Przykład 1

Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastkami są liczby -4 i 2.

Trójmian zapisujemy w postaci iloczynowej, a następnie przekształcamy ją do postaci ogólnej:

$$y = (x+4)(x-2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$$

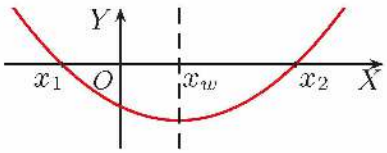
czyli $b = 2$ i $c = -8$.

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynniki b i c trójmianu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastkami są liczby:

a) 3 i 5, b) 4 i -3, c) -5 i -2, d) -2 i $\frac{1}{2}$, e) $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$.

Znajomość miejsc zerowych x_1, x_2 funkcji kwadratowej pozwala wyznaczyć oś symetrii paraboli i współrzędną x_w jej wierzchołka, gdyż $x_w = \frac{x_1+x_2}{2}$.



Ćwiczenie 2

Wyznacz równanie osi symetrii paraboli oraz współrzędne jej wierzchołka.

a) $y = x(x-6)$ c) $y = \frac{1}{2}(x+6)(x-2)$ e) $y = (2x+1)(2x-3)$

b) $y = -x(x-10)$ d) $y = -2(x+3)(x-4)$ f) $y = (4x-1)(5-4x)$

Przykład 2

Wyznacz trójmian kwadratowy, którego pierwiastkami są liczby 2 i 4, a zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; \infty)$.

Trójmian zapisujemy w postaci iloczynowej $y = a(x-2)(x-4)$.
Współrzędne wierzchołka: $x_w = \frac{2+4}{2} = 3$, zbiorem wartości jest przedział: $\langle -2; \infty)$, zatem $y_w = -2$.
Podstawiamy $x = 3$ i $y = -2$ do wzoru $y = a(x-2)(x-4)$ i otrzymujemy $-2 = a(3-2)(3-4)$, więc $a = 2$. Zatem trójmian ma postać $y = 2(x-2)(x-4)$.

Ćwiczenie 3

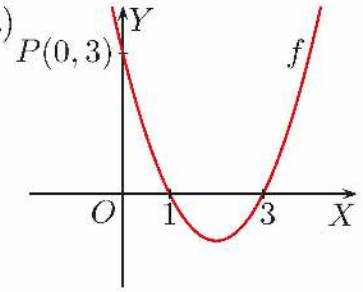
Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości Y.

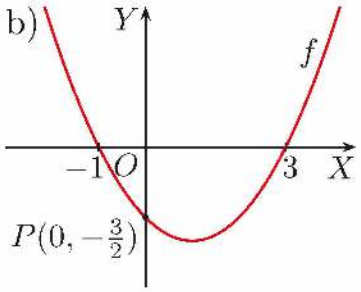
a) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $Y = \langle -4; \infty)$ c) $x_1 = -8$, $x_2 = 2$, $Y = (-\infty; 10\rangle$

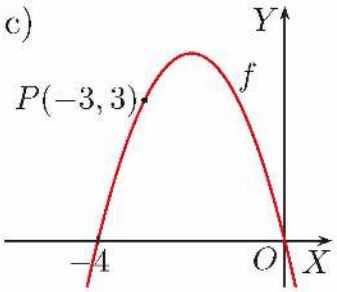
b) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $Y = (-\infty; 2\rangle$ d) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $Y = \langle -6; \infty)$

Zadania

1. Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji kwadratowej f. Wyznacz wzór tej funkcji w postaciach iloczynowej i ogólnej.

a)


b)


c)


2. Wyznacz w postaciach iloczynowej i ogólnej równanie paraboli przechodzącej przez punkty: A, B i C.

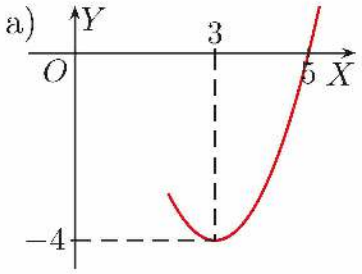
a) $A(1,0)$, $B(4,0)$, $C(3,-4)$

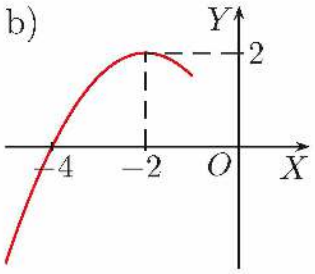
b) $A(-6,0)$, $B(2,0)$, $C(0,-6)$

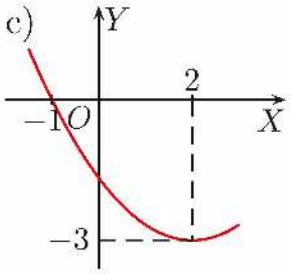
c) $A(-5,0)$, $B(-3,10)$, $C(2,0)$

d) $A(0,-9)$, $B(1,0)$, $C(3,0)$

3. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f. Znajdź miejsce zerowe tej funkcji niezaznaczone na rysunku. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach iloczynowej i kanonicznej.

a)


b)


c)


4. Wykres funkcji f można otrzymać przez przesunięcie paraboli $y = 2x^2$. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach ogólnej i kanonicznej, jeśli wiadomo, że jej miejscami zerowymi są liczby: a) -3 i -1, b) 0 i 2, c) 3 i 7.

Powtórzenie

5. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz wyznacz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.

a) $y = -x(x+6)$ b) $y = (x-1)(x-5)$ c) $y = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$

6. Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości Y. Odpowiedź podaj w każdej z wymienionych poniżej postaci.

a) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $Y = \langle -6; \infty)$

b) $x_1 = -6$, $x_2 = 0$, $Y = (-\infty; 8\rangle$

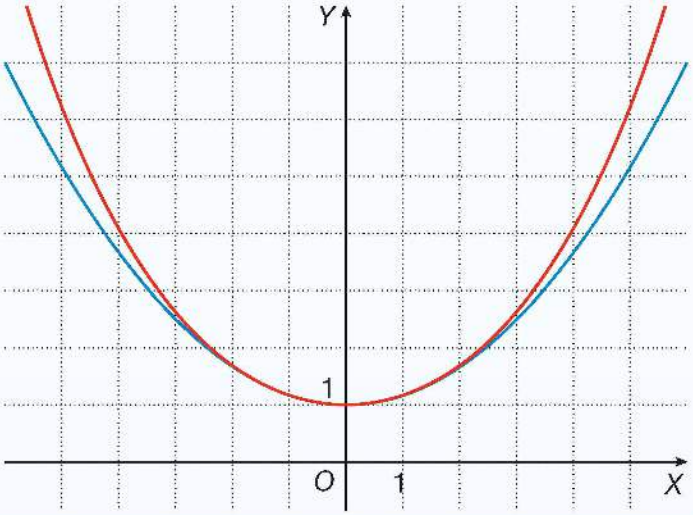
c) $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $Y = (-\infty; 2\rangle$

Postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$
Postać kanoniczna: $y = a(x-p)^2 + q$
Postać iloczynowa: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

Krzywa łańcuchowa

Wiszący, zamocowany na końcach łańcuch przyjmuje kształt przypominający parabolę. W 1638 r. opisywał to już Galileusz, włoski fizyk i astronom. W drugiej połowie XVII w. wykazano, że jest to inna krzywa, zwana **krzywą łańcuchową** lub *catenarią* (od łacińskiego słowa *catena* oznaczającego łańcuch).

Na rysunku obok przedstawiono **krzywą łańcuchową** (kolor czerwony) oraz **parabolę** (kolor niebieski), która dla wartości argumentów bliskich 0 jest bardzo dobrym przybliżeniem tej krzywej łańcuchowej.



Kształt krzywej łańcuchowej przyjmują wiszące łańcuchy, liny lub przewody wysokiego napięcia.



Krzywa ta jest wykorzystywana w architekturze. Gateway Arch w Saint Louis w Stanach Zjednoczonych to monument, którego kształt jest inspirowany krzywą łańcuchową.



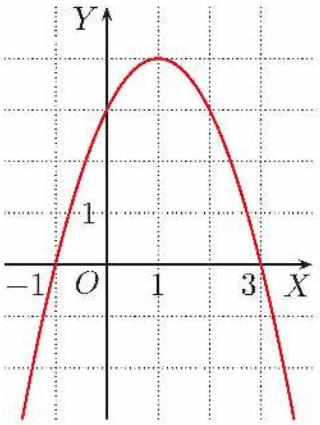
1 Skorzystaj z dostępnych źródeł i znajdź inne przykłady wykorzystania krzywej łańcuchowej w architekturze.

1.7. Nierówności kwadratowe

Jeśli mamy wykres funkcji kwadratowej i znamy jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$. Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x + 3 > 0$.



Z wykresu odczytujemy, że:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ dla } x \in (-1; 3)$$

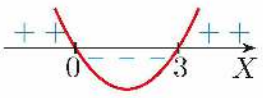
Uwaga. Zauważ, że do rozwiązania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji. Wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane w górę czy w dół.

Przykład 2

a) Rozwiąż nierówność $2x^2 - 6x > 0$.

Najpierw znajdujemy pierwiastki równania $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x - 3) = 0$. Są to liczby: 0 oraz 3.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX. Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:



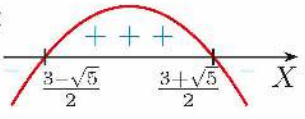
$$2x^2 - 6x > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$$

b) Rozwiąż nierówność $-x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 3x - 1 = 0$.

$\Delta = 9 - 4 = 5$, zatem: $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{-2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX. Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:



$$-x^2 + 3x - 1 \geqslant 0 \text{ dla } x \in \left\langle \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

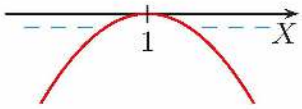
a) $3x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$ b) $2x^2 + x - 1 \leqslant 0$ c) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 2x - 1 = 0$, czyli $-(x-1)^2 = 0$. Zatem $x = 1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0 \text{ dla } x = 1.$$



Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

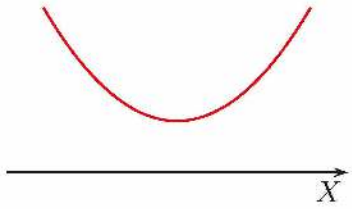
a) $-x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$ b) $-x^2 + 2x - 1 < 0$ c) $-x^2 + 2x - 1 > 0$

Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2 - 3x + 2 < 0$.

$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$

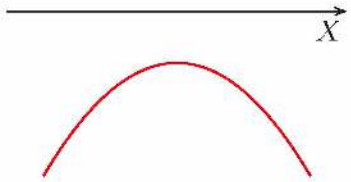
Współczynnik przy x^2 jest dodatni oraz równanie $5x^2 - 3x + 2 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem nad osią OX, a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



b) Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$

Współczynnik przy x^2 jest ujemny oraz równanie $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem pod osią OX, a to oznacza, że każda liczba spełnia daną nierówność, czyli $x \in \mathbf{R}$.



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 + 2x + 1 > 0$ b) $x^2 + x + 3 < 0$ c) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 \leqslant 0$

Przykład 5

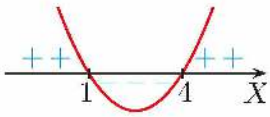
Rozwiąż nierówność $2(2 - x) < -x(x - 3)$.

$$4 - 2x < -x^2 + 3x$$

Wykonujemy mnożenie. Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę nierówności.

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 5x + 4 = 0$ i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 4$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność zachodzi dla $x \in (1; 4)$.



Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $x - x^2 \leqslant 3 - 3x^2$ c) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 > \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$ e) $(2x+1)^2+(x-3)^2 < 10$

b) $-x(2-x) > 1 - x^2$ d) $2 - x^2 < (2-x)^2$ f) $3x - (1-x)^2 \geqslant x^2 - 4$

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:
- rozwiązanie odpowiedniego równania,
- naszkicowanie odpowiedniej paraboli,
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności,
- zapisanie odpowiedzi.

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 > 25$ d) $x^2 - x \geqslant 6$ g) $9x + 5 \geqslant 2x^2$ j) $6x^2 - x > 12$

b) $x^2 \leqslant 16$ e) $x^2 - 4 \leqslant 3x$ h) $2x^2 + 5x > 3$ k) $3x + 8 \geqslant \frac{1}{2}x^2$

c) $4x^2 \geqslant 9$ f) $4x + 5 > x^2$ i) $3x^2 + 1 < x$ l) $\frac{2}{3}x^2 + 6 \leqslant x$

2. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność?

a) $9 - \frac{1}{4}x^2 \geqslant 0$ b) $\frac{1}{3}x^2 > x$ c) $2x^2 - 10 \leqslant x$ d) $2 - x > x^2$

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające daną nierówność.

a) $x^2 - 6x + 3 \leqslant 0$ b) $-3x^2+6x+5 > 0$ c) $2x^2 + 2x - 15 < 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $-2x^2+6x-\frac{9}{2} < 0$ d) $x^2 + 2x + 2 > 0$ g) $2x^2 - x + \frac{1}{2} \leqslant 0$

b) $-3x^2+2x-\frac{1}{3} \leqslant 0$ e) $-9x^2+2x-\frac{1}{9} < 0$ h) $-4x^2+12x-9 \geqslant 0$

c) $3x^2+14x-5 \geqslant 0$ f) $-2x^2-7x+4 \leqslant 0$ i) $x^2 + x + 1 < 0$

5. a) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 5$ przyjmuje wartości większe od 5, a dla jakich mniejsze od -3?

b) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 8x + 15$ przyjmuje wartości należące do przedziału $(3; 8)$?

6. Rozwiąż nierówność.

a) $(2x - 2)(x - 3) < (x - 3)(x - 4)$ d) $(2x - 2)^2 \geqslant (3x - 2)(x - 3)$

b) $(3x - 1)(x + 2) \geqslant (x - 3)(2x - 1)$ e) $2x^2 - 3x + 4 \geqslant -(x - 1)^2 - 6$

c) $(4x - 1)(4 - x) \leqslant (2 - 3x)(x + 1)$ f) $(2x + 3)^2 - 9 < 8 - (3 - x)^2$

7. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 - x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x(x-4)}$.
>
> Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór funkcji ma sens. We wzorze funkcji f występuje pierwiastek, zatem wyrażenie pod nim musi być nieujemne:
>
> $$x(x-4) \geqslant 0$$
>
> Nierówność ta zachodzi dla $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; \infty)$.
> Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 4; \infty)$.

Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
b) $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$
c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$
d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$
e) $f(x) = \sqrt{6x^2 - 7x - 5}$
f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x - 24}$

9. Dane są zbiory A i B. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) A – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$,
B – zbiór rozwiązań nierówności $3x - x^2 \geqslant 0$.

b) A – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 5x + 6 > 0$,
B – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 5x + 4 < 0$.

10. Jedno miejsce zerowe funkcji kwadratowej jest o dwa większe od drugiego. Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli wiadomo, że parabola będąca jej wykresem ma wierzchołek w punkcie $(-2, 4)$. Rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant 0$.

Powtórzenie

11. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 \leqslant 8$
b) $x^2 > 9$
c) $x^2 \geqslant x$
d) $2 > -x^2$
e) $x^2 \leqslant 4x - 4$
f) $6x > -x^2 - 9$
g) $x^2 + 4x - 21 \geqslant 0$
h) $-x^2 + 2x + 15 > 0$
i) $6x^2 - x - 1 < 0$

12. Które dzielniki całkowite liczby 12 spełniają nierówność?

a) $x^2 - 2x + 4 \leqslant 0$
b) $x^2 - 4x + 9 > 0$
c) $-2x^2 + 3x + 1 > 0$
d) $-x^2 + 4x + 1 \leqslant 0$
e) $2x^2 - 1 > 1 - 3x$
f) $1 - x \leqslant x^2$

1.8. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **równaniem dwukwadratowym**. Aby je rozwiązać, wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = x^2$ (gdzie $t \geqslant 0$). Zauważ, że wówczas $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, zatem otrzymujemy równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$.

Równanie dwukwadratowe	podstawienie	Pomocnicze równanie kwadratowe
$ax^4 + bx^2 + c = 0$	$t = x^2,\ t \geqslant 0$ →	$at^2 + bt + c = 0$

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $(x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$. Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy dwa równania kwadratowe: $t = x^2$ i $t^2 - 10t + 9 = 0$. Rozwiązujemy drugie równanie:

$$\Delta = 100 - 36 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$t_1 = \frac{10-8}{2} = 1 \geqslant 0,\ t_2 = \frac{10+8}{2} = 9 \geqslant 0$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$x^2 = 1 \ \text{ lub } \ x^2 = 9$$

$$x = -1 \ \text{ lub } \ x = 1 \ \text{ lub } \ x = -3 \ \text{ lub } \ x = 3$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$ c) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy dwa równania kwadratowe: $t = x^2$ i $t^2 + 8t - 9 = 0$. Rozwiązujemy drugie równanie:

$$\Delta = 64 + 36 = 100, \quad \sqrt{\Delta} = 10$$

$$t_1 = \frac{-8-10}{2} = -9 < 0,\ t_2 = \frac{-8+10}{2} = 1 \geqslant 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Wracamy do niewiadomej x: $x^2 = 1$, czyli $x = -1 \ \text{ lub } \ x = 1$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ c) $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

b) $x^4 + 6x^2 - 16 = 0$ d) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ f) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 - 16x^2 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy dwa równania kwadratowe: $t = x^2$ i $t^2 - 16t = 0$. Rozwiązujemy drugie równanie:

$$t(t - 16) = 0 \quad \text{Wyłączny czynnik } t \text{ przed nawias.}$$

$$t = 0 \text{ lub } t = 16$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$x^2 = 0 \text{ lub } x^2 = 16$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -4 \text{ lub } x = 4$$

Równanie $x^4 - 16x^2 = 0$ można również rozwiązać, zaczynając od wyłączenia x^2 przed nawias: $x^2(x^2 - 16) = 0$.

Zatem rozwiązaniami równania są liczby: -4, 0, 4.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 36x^2 = 0$ b) $x^4 + 36x^2 = 0$ c) $4x^2 - 9x^4 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geqslant 0$) i otrzymujemy dwa równania kwadratowe: $t = x^2$ i $t^2 + 7t + 12 = 0$. Rozwiązujemy drugie równanie:

$$\Delta = 49 - 48 = 1, \quad \sqrt{\Delta} = 1$$

$$t_1 = \frac{-7-1}{2} = -4 < 0, \; t_2 = \frac{-7+1}{2} = -3 < 0$$

Rozwiązania t_1 i t_2 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Zatem równanie $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$ jest sprzeczne.

Ćwiczenie 4

Podaj liczbę rozwiązań równania.

a) $x^4 - 9x^2 = 0$ c) $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ e) $2x^4 + 3x^2 + 5 = 0$

b) $x^4 + 9x^2 = 0$ d) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ f) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

Poza równaniami dwukwadratowymi są również inne równania, które przy odpowiednim podstawieniu można sprowadzić do równań kwadratowych.

Ćwiczenie 5

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Równanie $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ możemy rozwiązać, podstawiając $t = x^3$ (gdzie $t \in \mathbf{R}$). Otrzymujemy równanie kwadratowe $t^2 - 3t + 2 = 0$.

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Wracamy do niewiadomej x: $x^3 = 1$ lub $x^3 = 2$

$$x = 1 \text{ lub } x = \sqrt[3]{2}$$

Rozwiąż równanie.

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ c) $x^6 - x^3 - 2 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ c) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ e) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$ d) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$ f) $9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ c) $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ e) $4x^4 - 12x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$ d) $9x^4 + 6x^2 + 1 = 0$ f) $9x^4 - 30x^2 + 25 = 0$

D **3.** a) Uzasadnij, że funkcje $f(x) = x^4 - 4x^2$ oraz $g(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ nie mają wspólnych miejsc zerowych.

b) Ile wspólnych miejsc zerowych mają funkcje $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ oraz $g(x) = x^4 - 7x^2 + 10$?

4. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2|x| - 8 = 0$ b) $x^2 - 4|x| + 4 = 0$ c) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$

Wskazówka: Podstaw $t = |x|$ i zauważ, że $x^2 = |x|^2 = t^2$.

Powtórzenie

5. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ c) $x^4 - 9x^2 - 10 = 0$ e) $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$

b) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$ d) $4x^4 + 2 = 9x^2$ f) $12x^4 - 6x^2 = x^2 - 1$

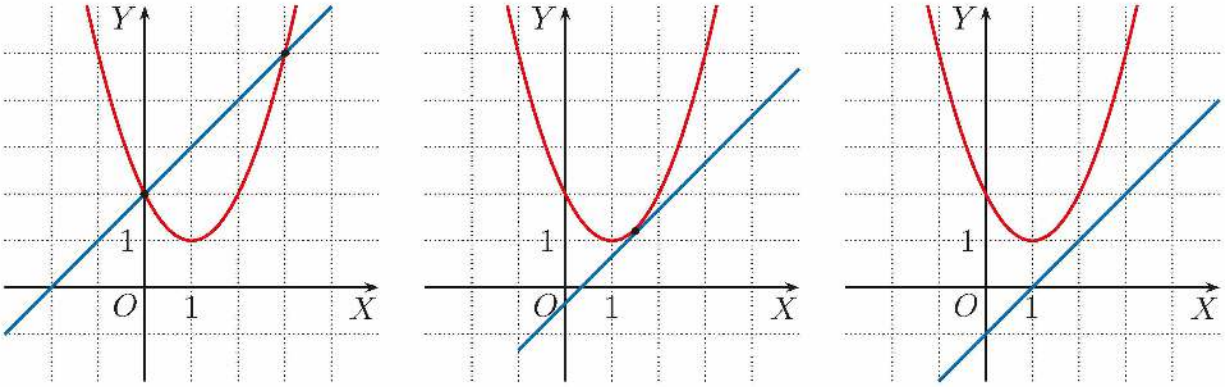
6. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 + 9 = 6x^2$ c) $16x^4 - 1 = 8x^2$ e) $x^4 - 24x^2 = 25$

b) $x^2 - 1 = x^4 - x^2$ d) $12x^2 + 6 = 2 - 9x^4$ f) $x^4 + 2x^2 = \frac{2}{3}x^4 - x^2$

1.9. Układy równań

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **sieczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 = 2x$, czyli:

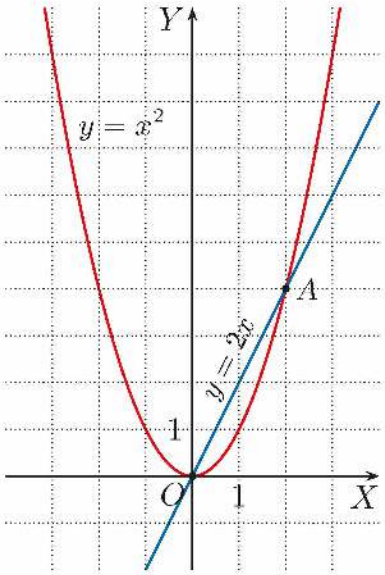
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 2.

Dla $x = 0$ mamy $y = 0$. Dla $x = 2$ mamy $y = 4$.

Układ równań spełniają zatem dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



Prosta $y = 2x$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach $O(0,0)$ i $A(2,4)$.

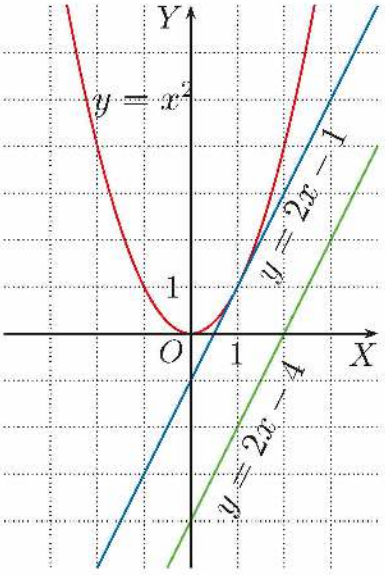
Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$

D Przykład 2

Uzasadnij, że parabola $y = x^2$ ma jeden punkt wspólny z prostą $2x - y - 1 = 0$, natomiast nie ma punktów wspólnych z prostą $y - 2x = -4$.



Prosta i parabola mają jeden punkt wspólny.

Rozpatrzmy najpierw układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 1$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$2x - 1 = x^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)^2 = 0$$

Równanie to ma jeden pierwiastek $x = 1$, zatem jedynym rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Rozpatrzmy teraz układ równań:

$$\begin{cases} y - 2x = -4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 4$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$2x - 4 = x^2$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0$$

Układ równań jest sprzeczny, zatem prosta nie ma punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = 4x - 5 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x^2 + 3 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że układ równań jest sprzeczny.

a) $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4y = x^2 + 4x + 8 \\ \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases}$

Zadania

1. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych paraboli $y = -x^2 + 4$ i prostej:

a) $y - x - 2 = 0$, b) $y + 2x - 5 = 0$, c) $y - 2x - 1 = 0$.

2. Ile punktów wspólnych wykresów funkcji f i g ma obie współrzędne całkowite?

a) $f(x) = x + 3$, $g(x) = 3 - x^2$

b) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x^2 - 2x$

c) $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = -2x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

3. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 4 \\ y = 4x + 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -2x^2 - 8x + 4 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$

4. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 4y - 16 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 3 \\ 8x + y + 5 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 2x^2 + 8x - 5 \\ x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$

5. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = |x| + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = |x| - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = 4 - |x| \end{cases}$

Powtórzenie

6. Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, gdzie $x_1 < x_2$. Oblicz $|y_1 - y_2|$.

a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = x + 1$, $g(x) = -2x^2 + 3$

c) $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = x^2$

d) $f(x) = -x - 2$, $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2$

7. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

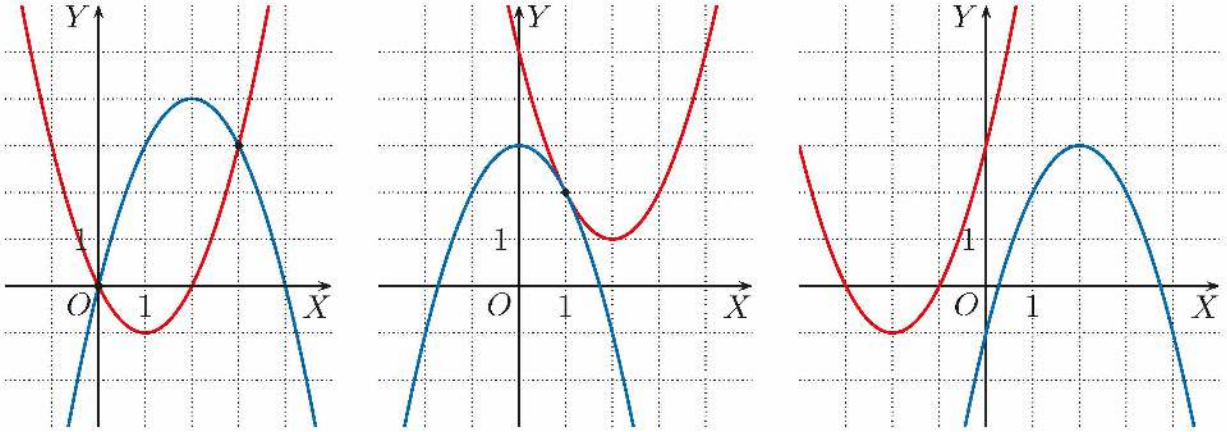
a) $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ y = 2x^2 + 8x + 7 \end{cases}$

Układy równań kwadratowych

Dwie różne parabole mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub mogą nie mieć punktów wspólnych.



1. Naszkicuj parabole będące wykresami funkcji f i g. Ile punktów wspólnych mają te wykresy?

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 1$
c) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+1)^2$
d) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = -x^2 + 4$

Przykład

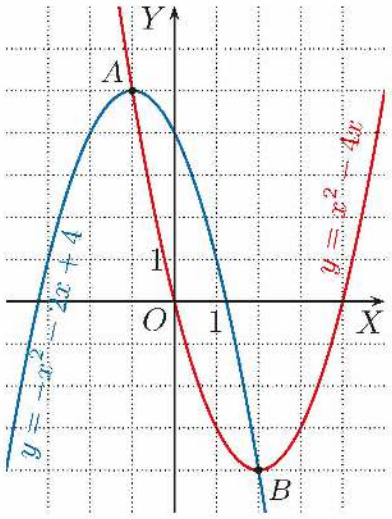
Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 - 4x = -x^2 - 2x + 4$, czyli $2x^2 - 2x - 4 = 0$, zatem: $x = -1$, $x = 2$ (sprawdź).

Dla $x = -1$ mamy $y = 5$. Dla $x = 2$ mamy $y = -4$. Układ równań spełniają więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Parabole $y = -x^2 - 2x + 4$ i $y = x^2 - 4x$ przecinają się w punktach $A(-1, 5)$ oraz $B(2, -4)$.

2. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 1 \\ y = -x^2 - 2x + 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + x \end{cases}$
c) $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -x^2 - 6x - 2 \end{cases}$

1.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Suma liczb p i q jest równa 12. Oblicz największą wartość iloczynu tych liczb.

$p + q = 12$, zatem $q = 12 - p$.

Iloczyn tych liczb: $p \cdot q = p(12 - p) = -p^2 + 12p$.

Wyznaczamy wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem:

$$f(p) = -p^2 + 12p$$

Wykresem funkcji f jest parabola o ramionach skierowanych w dół.

$$p_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad f(p_w) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 36 (dla $p = q = 6$).

Ćwiczenie 1

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

a) 38, b) $\frac{1}{2}$, c) $\sqrt{2}$.

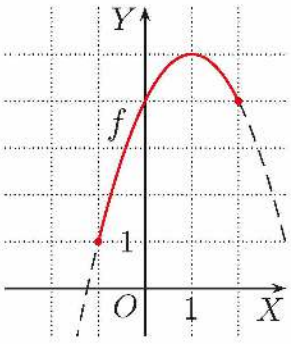
Ćwiczenie 2

Suma liczby p i podwojonej liczby q jest równa 36. Oblicz największą wartość iloczynu liczb p i q.

Przykład 2

Wyznacz najmniejszą wartość i największą wartość funkcji $f(x) = -x^2+2x+4$ w przedziale $\langle -1; 2\rangle$.

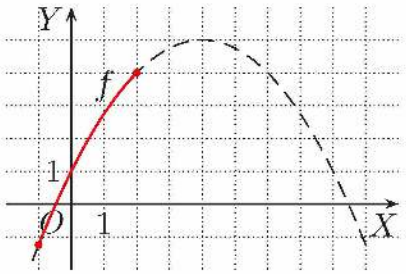
Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału: $f(-1) = 1$ oraz $f(2) = 4$.
Wierzchołek paraboli ma współrzędne: $x_w = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_w = f(1) = 5$. Ponieważ $x_w \in \langle -1; 2\rangle$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji w tym przedziale jest równa 5. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.



Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $\langle p_1; p_2\rangle$, należy obliczyć $f(p_1)$ i $f(p_2)$. Jeśli x_w (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji) należy do przedziału $\langle p_1; p_2\rangle$, to wyznaczamy również y_w, obliczając $f(x_w)$. Najmniejsza spośród tych trzech wartości jest najmniejszą wartością funkcji w danym przedziale, a największa – największą wartością.

Przykład 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $\langle -1; 2\rangle$.



- $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin \langle -1; 2\rangle$

Zatem najmniejsza i największa wartość funkcji f przyjmowana jest na końcach przedziału $\langle -1; 2\rangle$.

- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ – wartość najmniejsza
- $f(2) = 4$ – wartość największa

Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 8$, $\langle -3; 1\rangle$

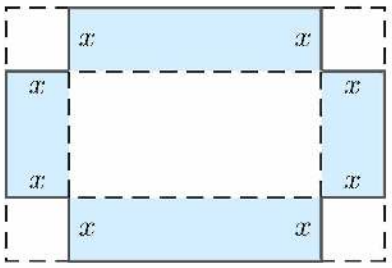
b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1$, $\langle 0; 4\rangle$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$, $\langle -1; 3\rangle$

d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$, $\langle -2; 1\rangle$

Przykład 4

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości boków wyciętych kwadratów opisuje funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji: $D = (0; 20)$. $x > 0,\ 2x < 40,\ 2x < 60$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $y = -8x^2 + 200x$:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12{,}5,\ y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40\,000}{-32} = 1250$$

Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji P przyjmowana jest dla x_w.

Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długość boków wyciętych kwadratów jest równa 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm^2.

Ćwiczenie 4

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm^2 wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.

Zadania

1. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ oraz funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ w przedziale:

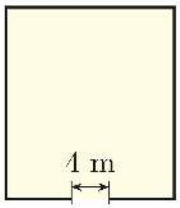
a) $\langle 0; 4\rangle$, b) $\langle -2; 0\rangle$, c) $\langle -4; 6\rangle$.

2. Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8.

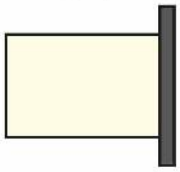
a) Wyznacz największe pole takiego trójkąta.

b) Wyznacz najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej takiego trójkąta.

3. Mamy 80 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ten ogródek, jeśli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 4 m?



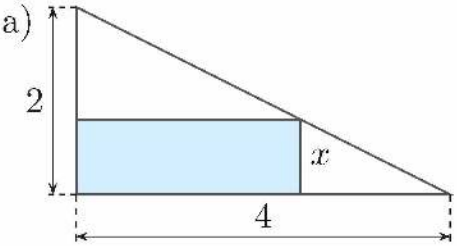
4. Mamy 28 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek przylegający jednym z boków do ściany domu. Jakie powinny być wymiary ogródka, aby jego powierzchnia była jak największa?



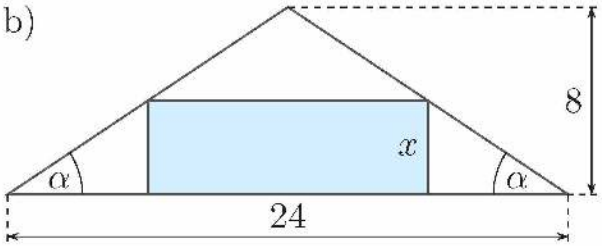
5. Podstawą prostopadłościanu o wysokości 5 cm jest prostokąt o obwodzie 12 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było największe?

6. Wyraź pole prostokąta przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x. Podaj wymiary prostokąta o największym polu.

a)



b)



Powtórzenie

7. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $\langle 0; 3\rangle$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$, $\langle -6; 3\rangle$

8. Mamy 240 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien on mieć?

1.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Ćwiczenie 1

Firma produkująca zabawki oszacowała roczną wielkość sprzedaży lalek na s sztuk w zależności od ceny x zł za sztukę (tabela poniżej).

Cena x w zł	40	50	60	70	80	90
Liczba lalek s	2000	1600	1200	800	400	0

Dane z tabeli spełniają równanie $s = -40x + 3600$.

D a) Uzasadnij, że jeśli koszt wyprodukowania jednej lalki wynosi 20 zł, to zysk firmy ze sprzedaży lalek w cenie x zł za sztukę wyraża się wzorem:

$$z(x) = -40x^2 + 4400x - 72\,000$$

b) Ustal taką cenę za jedną lalkę, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 2

Koszt wyprodukowania jednego pluszowego misia wynosi 10 zł. Przy cenie 15 zł za misia wielkość sprzedaży wynosi 1000 sztuk rocznie. Każdorazowe podniesienie ceny o 1 zł powoduje spadek sprzedaży o 50 sztuk.

a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej roczny zysk w zależności od ceny x zł za sztukę.

b) Ustal taką cenę za jednego misia, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 3

Sklep z odzieżą sportową sprzedaje dziennie 16 bluz dresowych. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł. Właściciel sklepu przewiduje, że obniżenie ceny o każde 5 zł spowoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy?

Ćwiczenie 4

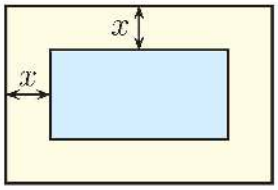
Właściciel kina zauważył, że przy cenie biletu wynoszącej 16 zł na seans przychodzi średnio 100 osób, a każdorazowe podniesienie ceny biletu o złotówkę powoduje, że liczba widzów zmniejsza się o 5. Jaką cenę biletu należy ustalić, aby dochód kina był największy?

Ćwiczenie 5

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 216 m^2. Oblicz wymiary tego trawnika, jeśli różnią się one o: a) 6 m, b) 15 m.

Ćwiczenie 6

Wokół basenu o wymiarach 4 m × 8 m wyłożono kafelkami pas o szerokości x (rysunek obok). Jaka jest szerokość tego pasa, jeśli ma on powierzchnię 45 m^2?



Zadania

1. Plac zabaw ma kształt prostokąta o wymiarach 12 m × 18 m. Szerokość placu zwiększono o x m, a długość o $2x$ m. Oblicz x, jeśli powierzchnia placu wzrosła o 144 m^2.

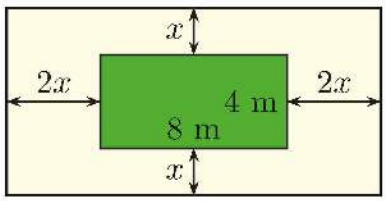
2. Reprodukcję obrazu o powierzchni P oprawiono w ramę o wymiarach zewnętrznych $x \times y$. Oblicz szerokość tej ramy.

a) $P = 2400$ cm^2, $x = 80$ cm, $y = 60$ cm

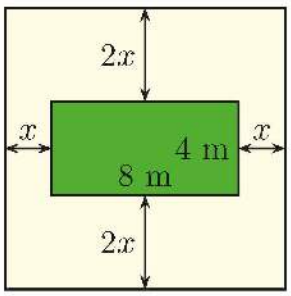
b) $P = 2700$ cm^2, $x = 75$ cm, $y = 55$ cm

3. Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach 4 m × 8 m ma zostać wyłożona kostka. Projektant przedstawił dwie propozycje: A i B (rysunki poniżej). Dla każdej z tych propozycji wyznacz x.

Propozycja A
obszar pokryty kostką – 66 m^2



Propozycja B
obszar pokryty kostką – 78 m^2

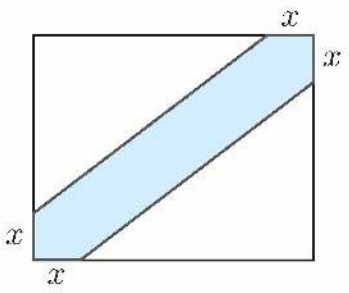


4. Dany jest prostokąt o wymiarach 3 cm × 10 cm. Jego długość i szerokość zwiększono o x cm. Dla jakich wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość większą od 13 cm?

5. Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary może mieć ten pokój, jeśli przekątna podłogi jest nie mniejsza niż 6 m i nie większa niż 10 m?

6. Bok BC trójkąta prostokątnego ABC jest o 2 cm krótszy od boku AB i o 7 cm dłuższy od boku AC. Oblicz obwód tego trójkąta.

7. Boki prostokąta mają długości 8 i 10 (rysunek obok). Dla jakich wartości x zacieniowany obszar stanowi co najmniej 40% powierzchni prostokąta?

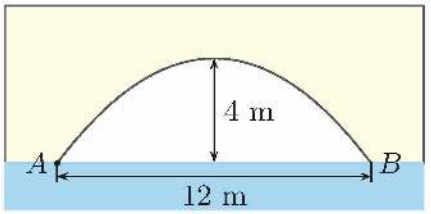


8. Powierzchnia stawu wynosiła 400 m^2. Przez dwa kolejne lata, na skutek suszy, powierzchnia stawu się zmniejszała — w każdym roku o p%. Oblicz p, jeśli wiadomo, że po upływie dwóch lat staw miał powierzchnię 289 m^2.

D **9.** Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt prostokątny, którego boki mają długości równe kolejnym liczbom:

a) naturalnym, b) parzystym.

10. Łuk przęsła mostu ma kształt paraboli (rysunek obok). Korzystając z wymiarów podanych na rysunku, znajdź równanie tej paraboli. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się:



a) w punkcie A, b) w środku odcinka AB.

11. Czy pod mostem opisanym w zadaniu 10. przepłynie barka o szerokości 6 m, która po załadowaniu wystaje 3,1 m ponad powierzchnię wody? Przyjmij, że przekrojem poprzecznym barki jest prostokąt.

Powtórzenie

12. Zdjęcie o wymiarach 6 cm × 9 cm oprawiono w prostokątną ramkę o stałej szerokości. Powierzchnia obramowania jest równa powierzchni zdjęcia. Oblicz szerokość obramowania.

13. Trawnik ma kształt trójkąta prostokątnego. Oblicz obwód i pole tego trawnika, jeśli długości jego boków wyrażone w metrach są równe:

a) x, $x+7$, $x+8$, b) x, $x+1$, $x-17$.

14. Ogrodnik ma dwie kwadratowe działki, z których jedna ma pole powierzchni 2,25 razy większe niż druga. Do ogrodzenia większej działki potrzebuje on o 40 m więcej siatki niż do ogrodzenia mniejszej. Ile metrów siatki potrzebuje do ogrodzenia obu działek?

1.12. Zagadnienia uzupełniające

Spadek swobodny i ruch pionowy w górę

Jeśli pominiemy opór powietrza, to drogę przebytą przez spadające swobodnie ciało możemy opisać za pomocą wzoru $s = \frac{gt^2}{2}$, gdzie t jest czasem, a g – przyspieszeniem ziemskim. Dla $g \approx 9{,}81$ m/s^2 mamy $s \approx 4{,}9t^2$. Galileusz w *Rozmowach i dowodzeniach matematycznych...* z 1638 roku analizował funkcję opisującą ruch spadającego ciała. Znane jest jego doświadczenie, podczas którego z wieży w Pizie, z wysokości 49 metrów, zrzucał metalowe kule.

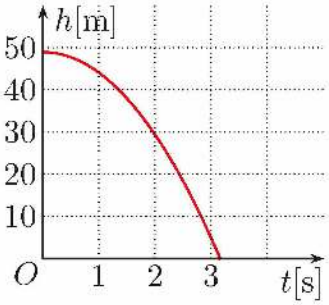
1. Jeśli pominiemy opór powietrza, to odległość h od ziemi kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 49 m, w zależności od czasu t, można opisać za pomocą wzoru $h(t) = -4{,}9t^2 + 49$.



a) Przerysuj tabelę wartości funkcji h do zeszytu i uzupełnij ją. Znajdź miejsca zerowe i określ dziedzinę tej funkcji.

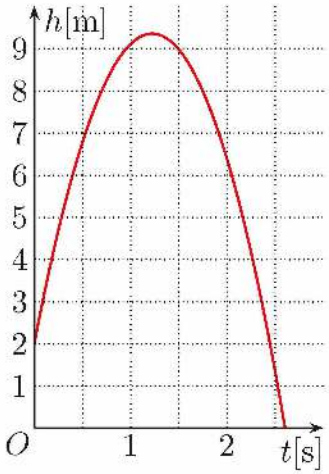
t[s]	0	1	2	3
h[m]	49	?	?	?

b) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji h będący fragmentem paraboli. Ile metrów przebyła kula w ostatniej sekundzie?



c) Naszkicuj wykres funkcji $k(t) = -4{,}9t^2 + 80$ opisującej odległość k od ziemi kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 80 m.

2. Wysokość nad ziemią piłki wyrzuconej pionowo w górę z prędkością 12 m/s (ręka osoby rzucającej piłkę była wzniesiona w momencie rzutu 2 m nad ziemię) dana jest wzorem $h(t) = -4{,}9t^2 + 12t + 2$. Wykres funkcji h przedstawiono na rysunku.



a) Odczytaj z wykresu przybliżoną wysokość, jaką osiągnęła piłka. Jaka jest długość drogi, którą przebyła piłka?

b) Jak sądzisz, kiedy piłka poruszała się z większą prędkością – w chwili $t = 1$ s czy $t = 2$ s?

Suma i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego

Twierdzenie (wzory Viète'a)

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dowód

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki, to dane są one wzorami:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

zatem:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

oraz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} =$$
$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Uwaga. Wzory Viète'a [czyt. wjeta] możemy stosować jedynie wtedy, gdy równanie ma pierwiastki, tzn. gdy $\Delta \geqslant 0$.



François Viète (1540–1603) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Jako pierwszy konsekwentnie stosował w algebrze symbole literowe, chociaż jego notacja znacznie różniła się od używanej obecnie. Był tajnym doradcą na dworze Henryka III i Henryka IV. Dla tego drugiego w roku 1590 złamał hiszpański szyfr liczący 500 znaków.

Przykład 1

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $2x^2 - 20x + 15 = 0$ Najpierw sprawdzamy, czy równanie ma pierwiastki.

$\Delta = 400 - 120 = 280 > 0$, zatem istnieją dwa pierwiastki: x_1, x_2.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{20}{2} = 10$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

b) $3x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Delta = 49 - 72 = -23 < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

3. Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $x^2 - 9x - 7 = 0$

b) $-2x^2+3x+7 = 0$

c) $6x^2 - 15x + 2 = 0$

d) $-3x^2+4x-2 = 0$

e) $-\frac{2}{3}x^2 - 8x + 1 = 0$

f) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = x^2 + 4$ c) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = -x^2 - 2x$ d) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ f) $f(x) = -x^2 - 6x - 1$

2. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby x_1 i x_2, a do jej wykresu należy punkt P. Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $P(0, -4)$ b) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $P(2, 4)$

3. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 49 = 0$ c) $9x^2 - 1 = 0$ e) $4x^2 - 81 = 0$

b) $x^2 - 144 = 0$ d) $36x^2 - 1 = 0$ f) $25x^2 - 36 = 0$

4. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 50 = 0$ c) $3x^2 - 24 = 0$ e) $27x^2 - 18 = 0$

b) $2x^2 - 7 = 0$ d) $28x^2 - 14 = 0$ f) $9x^2 + 4 = 0$

5. Znajdź miejsca zerowe funkcji f. Wyznacz równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.

a) $f(x) = x^2 - 8x$ c) $f(x) = 2x^2 - 3x$ e) $f(x) = x^2 + 14x + 49$

b) $f(x) = x^2 + 6x$ d) $f(x) = 2x + 6x^2$ f) $f(x) = 16x^2 + 8x + 1$

6. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ d) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ g) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

b) $6 - x - x^2 = 0$ e) $-6x^2 - 7x + 5 = 0$ h) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

c) $x - x^2 + 12 = 0$ f) $\frac{9}{4}x^2 - 12x + 16 = 0$ i) $-x^2 + 3\sqrt{2}x - 5 = 0$

7. Rozwiąż równanie.

a) $(x - 3)^2 = (2x - 1)(x - 3)$ c) $9x^2 - (2x - 1)^2 = 0$

b) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(3x - 4)$ d) $4x^2 = (1 - x)^2$

8. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.

a) $y = x^2 + 4x$ c) $y = 2x^2 - 8x$ e) $y = -x^2 + 2x + 8$

b) $y = -x^2 + 2x$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ f) $y = x^2 + 6x + 8$

9. Wyznacz zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x^2 - 8x$ c) $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$ e) $f(x) = -2x^2 - 12x + 1$

b) $f(x) = 6x - x^2$ d) $f(x) = -4x^2 + 4x + 2$ f) $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2x - 2$

10. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f, jeśli do jej wykresu należy punkt P. Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = a(x-2)^2 - 4$, $P(4, -2)$ c) $f(x) = a(x-2)^2 - 2$, $P(6, 6)$

b) $f(x) = a(x+1)^2 + 2$, $P(-3, -2)$ d) $f(x) = a(x-3)^2 + 6$, $P(1, -2)$

Zestaw II

1. Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej.

a) $f(x) = 2x^2 - 6x$ c) $f(x) = -x^2 - 2x + 15$ e) $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ f) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

2. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej f. Wyznacz jej drugie miejsce zerowe, jeśli punkt P jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem tej funkcji. Zapisz jej wzór w postaci kanonicznej.

a) $P(5, 4)$ b) $P(-3, -6)$ c) $P(\frac{1}{2}, 2)$ d) $P(\frac{5}{4}, 6)$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 1 \geqslant 0$ c) $x^2 < x + 12$ e) $4x^2 + 4x > 3$

b) $4 - x^2 > 0$ d) $x^2 \geqslant 5 - 4x$ f) $3x \leqslant 14 - 2x^2$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 4x - 5 \leqslant 0$ d) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 \leqslant 0$ g) $x(x-5) < 2x(x-1)$

b) $2x^2 + 5x + 1 > 0$ e) $7x^2 + 2x < 1$ h) $2(1-5x) > (1-x)^2$

c) $3x^2 - 14x - 5 \geqslant 0$ f) $-3x^2 + x + 1 \geqslant 0$ i) $\frac{1}{5}(x^2 + 4) \leqslant \frac{1}{2}(1-x)$

5. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność.

a) $x^2 + 120 \leqslant 22x$ c) $10x - 23 > x^2$ e) $x^2 - 12x + 33 \leqslant 0$

b) $\frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{2}{3} \leqslant 0$ d) $-3x^2 + 6x > 2$ f) $x^2 - 6x < -3 - x^2$

6. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność?

a) $(2x+3)^2 \leqslant (x-3)^2$ b) $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 > \left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2$

7. Zaznacz na osi liczbowej zbiory: $X \cup Y$, $X \cap Y$ i $X \setminus Y$, jeśli:
X jest zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - x - 6 \leqslant 0$,
Y jest zbiorem rozwiązań nierówności $-x^2 \leqslant 4x + 2$.

8. Rozwiąż równanie.

a) $(x^2-4)(x^2+9)=0$ c) $x^4-2x^2+1=0$ e) $x^4-16x^2=0$

b) $(9x^2-4)(x^2-3)=0$ d) $x^4+16x^2=0$ f) $4x^4+4x^2+1=0$

9. Rozwiąż równanie, stosując odpowiednie podstawienie.

a) $x^4-3x^2-4=0$ d) $8x^4-3x^2-3=0$ g) $x^4-2x^2-8=0$

b) $x^4-6x^2+8=0$ e) $x^4-6x^2-16=0$ h) $x^4+2x^2-15=0$

c) $x^4+7x^2+10=0$ f) $x^4-2x^2-5=0$ i) $x^4+10x^2+25=0$

10. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y=x+3 \\ y=-x^2+5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=2x-2 \\ y=x^2-2x+1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ y=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=3x-5 \\ y=x^2-3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y=-3x-1 \\ y=-x^2-4x+1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ y=\frac{1}{4}x^2+x-4 \end{cases}$

11. Naszkicuj wykres funkcji f. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

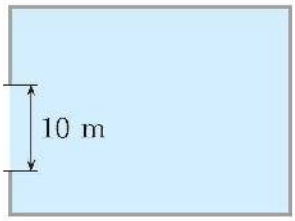
a) $f(x)=2x^2+4x$, $\langle -2;1\rangle$ c) $f(x)=x^2+2x+1$, $\langle 0;2\rangle$

b) $f(x)=-x^2+2x$, $\langle 0;4\rangle$ d) $f(x)=-x^2+3x-2$, $\langle -2;2\rangle$

12. Dla jakich wartości a i b suma a^2+b^2 przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli:

a) $a+b=4$, b) $a-b=3$, c) $2a+b=1$?

13. Mamy 240 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy nią ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ogródek, jeżeli nie będziemy grodzić jednego boku na odcinku 10 metrów?



14. W sklepie zostaje codziennie sprzedanych 40 sztuk pewnego towaru. Zysk przypadający na jedną sztukę tego towaru wynosi 240 zł.

a) Ekspert A twierdzi, że obniżenie ceny o x zł spowoduje wzrost dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

b) Ekspert B twierdzi, że podniesienie ceny o $(20\cdot x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy podnieść cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

Sposób na zadanie

Przykład 1

Dany jest kwadrat o obwodzie nie większym niż $8\sqrt{2}$ i przekątnej długości x. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego kwadratu w zależności od długości jego przekątnej. Podaj dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

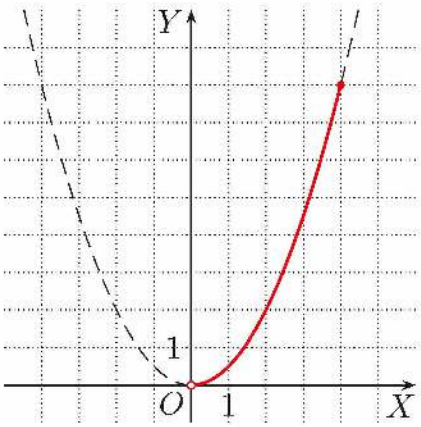
Bok kwadratu o przekątnej x ma długość $\frac{x}{\sqrt{2}}$, zatem pole kwadratu można opisać funkcją:

$$P(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2$$

przy czym muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} x > 0 & \text{Długość przekątnej jest dodatnia.} \\ 4 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \leqslant 8\sqrt{2} & \text{Warunek na obwód kwadratu.} \end{cases}$$

Stąd $x \in (0; 4\rangle$, czyli dziedziną funkcji P jest $D = (0; 4\rangle$. Wykresem funkcji P jest zaznaczony kolorem czerwonym fragment paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$.



Przykład 2

Dany jest prostokąt o bokach długości x i $x - 4$ oraz obwodzie mniejszym od 12. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od x. Podaj dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres. Jakie są długości boków tego prostokąta, jeśli jego pole jest równe 2?

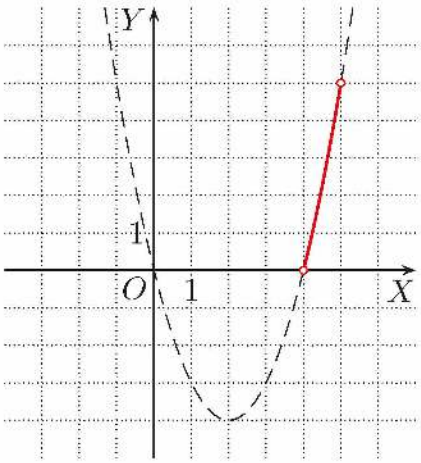
Pole prostokąta można opisać funkcją:

$$P(x) = x(x - 4) = x^2 - 4x$$

przy czym muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 4 > 0 \\ 2x + 2(x - 4) < 12 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Długości boków wyrażone są} \\ \text{liczbami dodatnimi.} \\ \text{Warunek na obwód prostokąta.} \end{array}$$

Stąd $x \in (4; 5)$, czyli dziedziną funkcji P jest $D = (4; 5)$. Wykresem funkcji P jest fragment paraboli $y = x^2 - 4x$ zaznaczony kolorem czerwonym.



Wyznaczamy długości boków prostokąta, którego pole jest równe 2:

$$x^2 - 4x = 2$$
$$x^2 - 4x - 2 = 0$$
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 24, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$$
$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6} \notin (4; 5), \quad x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6} \in (4; 5)$$

Odpowiedź: Pole równe 2 ma prostokąt o bokach $\sqrt{6} + 2$ i $\sqrt{6} - 2$.

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Przedział $(-\infty; -2\rangle$ jest zbiorem wartości funkcji:

A. $y = x^2 + 2$, **B.** $y = x^2 - 2$, **C.** $y = -x^2 + 2$, **D.** $y = -x^2 - 2$.

2. Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = x^2 + 4x$ jest punkt:

A. $W(-2, -4)$, **B.** $W(2, -4)$, **C.** $W(-4, 0)$, **D.** $W(4, 0)$.

3. Pierwiastkami równania $2x^2 + bx + c = 0$ są liczby -3 i 4, zatem:

A. $b = -1$ i $c = -12$,
B. $b = -2$ i $c = -24$,
C. $b = 2$ i $c = -24$,
D. $b = 1$ i $c = -12$.

4. Jeśli punkt $W(-1, -9)$ jest wierzchołkiem paraboli $y = x^2 + bx + c$, to nierówność $x^2 + bx + c \leqslant 0$ zachodzi dla:

A. $x \in \langle 3; 6\rangle$, **B.** $x \in \langle -4; 2\rangle$, **C.** $x \in \langle -3; 3\rangle$, **D.** $x \in \langle -9; -1\rangle$.

5. Największa wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $\langle 1; 2\rangle$ jest równa:

A. 16, **B.** 4, **C.** 3, **D.** 0.

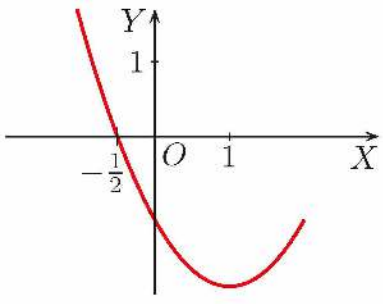
6. Dwa różne pierwiastki dodatnie ma równanie:

A. $x^2 - 4x + 5 = 0$,
B. $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$,
C. $x^2 - 5x + 6 = 0$,
D. $x^2 + 5x - 6 = 0$.

7. Liczba pierwiastków równania $8x^4 + 5x^2 - 12 = 0$ jest równa:

A. 0, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 4.

8. Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $(1, -2)$. Drugim miejscem zerowym funkcji, której wykresem jest ta parabola, jest liczba:



A. $1\frac{1}{2}$, **B.** 2, **C.** $2\frac{1}{2}$, **D.** 3.

9. Pole prostokątnej działki, której jeden bok jest o 2 m dłuższy od drugiego boku, wynosi 288 m^2. Obwód tej działki jest równy:

A. 64 m, **B.** 68 m, **C.** 72 m, **D.** 76 m.

10. Boki prostokąta P_1 o wymiarach 4 cm i 8 cm wydłużono o x cm i uzyskano prostokąt P_2 o polu równym 96 cm^2. Przekątna prostokąta P_2 ma długość równą:

A. $3\sqrt{10}$ cm, **B.** $4\sqrt{10}$ cm, **C.** $3\sqrt{13}$ cm, **D.** $4\sqrt{13}$ cm.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$

Zadanie 3 (2 pkt)

Suma liczby a i potrojonej liczby b wynosi 12. Oblicz największą wartość iloczynu liczb a i b.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (5 pkt)

Wskaż te rozwiązania równania $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$, które spełniają warunek $2x^2 - 3x - 5 > 0$.

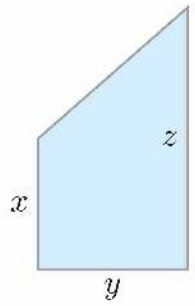
Zadanie 5 (4 pkt)

Dane są proste k: $y = 2x + 2$ i l: $y = -2x - 5$. Sprawdź, która z tych prostych ma więcej punktów wspólnych z parabolą $y = x^2 + 4x + 3$.

D

Zadanie 6 (5 pkt)

Boki trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok spełniają warunki: $x + y + z = 18$ oraz $z = 2x$. Uzasadnij, że jeśli taki trapez ma największe możliwe pole, to jego obwód jest nie mniejszy od 27.

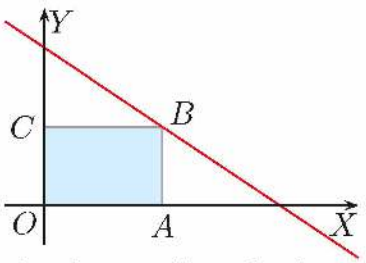


Zadanie 7 (5 pkt)

Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat, wynosi 48 cm. Oblicz największe pole powierzchni całkowitej takiego prostopadłościanu.

Zadanie 8 (5 pkt)

Rozpatrujemy prostokąty położone w I ćwiartce układu współrzędnych. Trzy wierzchołki tych prostokątów leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty leży na prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (rysunek obok).



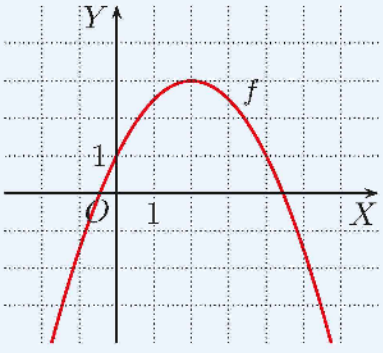
a) Podaj wzór opisujący pole prostokąta w zależności od współrzędnej x_0 punktu A.

b) Który spośród tych prostokątów ma największe pole? Podaj współrzędne jego wierzchołków.

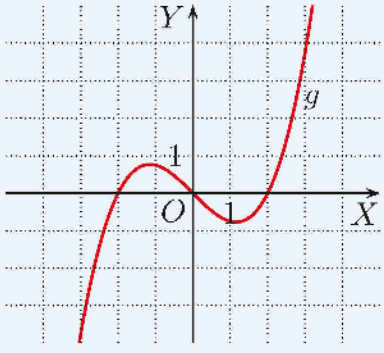


2 Wielomiany

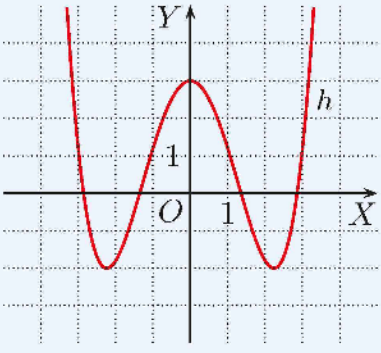
Omawiane w tym rozdziale funkcje, zwane wielomianami, służą do opisu wielu zjawisk. Na przykład za pomocą wielomianu można opisać zależność między liczbą obrotów na minutę silnika łodzi motorowej a jej prędkością. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy przykładowych wielomianów.



$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$



$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$



$h(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^2 + 3$

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Definicja

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbf{N}_+$.
Jednomianem stopnia 0 jest funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$.
Funkcja $y = 0$ jest **jednomianem zerowym**, którego stopnia nie określamy.
Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** jednomianu.

Ćwiczenie 1

Czy poniższa funkcja jest jednomianem? Jeśli tak, to podaj jego stopień.

a) $y = -5x^7$ b) $y = \frac{x}{4}$ c) $y = \frac{4}{x}$ d) $y = 6\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{2}x^3$

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**, np.:

$y = x^3 + 2x$ dwumian trzeciego stopnia
$y = 5x^4 + 1$ dwumian czwartego stopnia

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**, np.:

$y = x^2 + 2x + 1$ trójmian drugiego stopnia (kwadratowy)
$y = 5x^6 - 2x^2 + 4$ trójmian szóstego stopnia

Ogólnie sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**, np.:

$y = 6x^8 - 9x^6 + 2x^3 - x^2$ wielomian ósmego stopnia

Zwróć uwagę na to, że **stopniem wielomianu** jest najwyższy stopień spośród stopni występujących w nim jednomianów. Wielomian jest zapisany w sposób uporządkowany, gdy jednomiany, których jest sumą, są ustawione kolejno – od jednomianu najwyższego stopnia do jednomianu najniższego stopnia.

Definicja

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}_+$, nazywamy **wielomianem** stopnia n.
Jednomian w stopnia 0 nazywamy też **wielomianem stopnia 0**.
Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy też **wielomianem zerowym**.

Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego **wyrazami**.
Liczby: $a_n, a_{n\ 1}, \ldots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu.
Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.

Stopień wielomianu w oznaczamy przez $\mathrm{st}\,(w)$.

Zauważ, że – zgodnie z definicją – wielomianem jest zarówno funkcja liniowa, jak i funkcja kwadratowa.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x + x^3 + x^5 - 1 - x^2 - x^4$

b) $w(x) = 2x^6 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 - x - \frac{3}{2}x^5$

c) $w(x) = 3x^4 - 2 + 6x - x^2 + x^7 + 2x^8$

d) $w(x) = 5 - \frac{1}{2}x + 2x^{10} - x^6 + 3x^2$

Przykład 1

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ i podaj jego stopień.

$a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -2$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_0 = 1$, stopień wielomianu: $\mathrm{st}\,(w) = 4$

Ćwiczenie 3

Wypisz współczynniki wielomianu w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = -2x^5 + x$

b) $w(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^5 + x^6 + x^2 + 1$

c) $w(x) = 2^{10}$

Ćwiczenie 4

Zapisz wielomian czwartego stopnia, dla którego:

a) $a_4 = a_2 = a_0 = -3$, $a_3 = a_1 = 0$,

b) $a_n = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Przykład 2

Oblicz wartości wielomianu $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7$ dla: $x = 2$, $x = -2$ i $x = 0$.

$w(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 7 = 48 - 40 - 7 = 1$

$w(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot (-8) - 7 = 48 + 40 - 7 = 81$

$w(0) = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 7 = -7$

Zauważ, że wartość $w(0)$ jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu w.

Ćwiczenie 5

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

a) $w(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$

b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$

c) $w(x) = x^5 - x^2 + 3x - 2$

d) $w(x) = -x^6 + 2x^3 - x + 3$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{3}{2}$.

a) $w(x) = -4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$

b) $w(x) = 32x^4 - 8x^3 - 2x + \frac{1}{2}$

Zadania

1. Dane są wielomiany: $u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 0{,}1x^4$, $v(x) = -6x^2 + 4 + x^3$, $w(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 - 1$. Wskaż wśród nich wielomian:

a) stopnia trzeciego, uporządkuj go i podaj współczynniki: a_3, a_2, a_1 i a_0,

b) stopnia piątego, uporządkuj go, podaj współczynniki: a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 i a_0 oraz oblicz ich sumę.

D **2.** Uzasadnij, że suma współczynników dowolnego wielomianu w jest równa $w(1)$.

3. Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -2$ i $x = -3$.

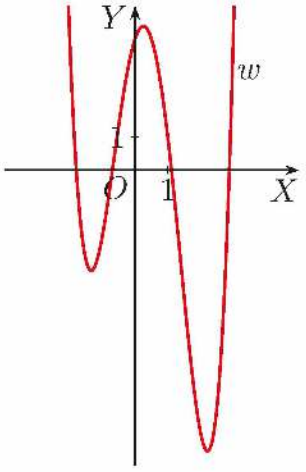
a) $w(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$

b) $w(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 2$

c) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$

d) $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$

4. Punkty: $P(1, a)$, $Q(-1, b)$, $R(2, c)$, $S(3, d)$ należą do wykresu wielomianu $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 4$ (rysunek obok). Wyznacz współrzędne: a, b, c i d.



5. Które z punktów: P, Q należą do wykresu wielomianu u?

a) $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, $P(-2, 7)$, $Q(2, -5)$

b) $u(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}$, $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

6. Oblicz współczynnik a wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = ax^2 + x + 1$, $w(1) = 3$,

b) $w(x) = 3x^3 - x^2 + a$, $w(3) = 0$,

c) $w(x) = x^3 + ax^2 + 3$, $w(-4) = 3$,

d) $w(x) = ax^4 + 4x + 2$, $w(2) = -6$.

7. Oblicz współczynniki a i b wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + 2$, $w(-1) = 4$, $w(2) = 20$,

b) $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$, $w(-3) = 11$, $w(1) = 7$.

Powtórzenie

8. Które spośród punktów: $A(1, 1)$, $B(\frac{1}{3}, 5)$, $C(-1, -3)$ należą do wykresu wielomianu w?

a) $w(x) = -3x^3 - 8x^2 + 3x + 5$

b) $w(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3$

9. Oblicz współczynnik a wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = x^2 - ax + 3$, $w(2) = 1$,

b) $w(x) = 2ax^4 - ax^3 - 5$, $w(-1) = 4$.

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz sumę wielomianów:

$$u(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad \text{i} \quad w(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &= (2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) = \\ &= 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 - 3x^3 + 2x^2 - x = \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz sumę wielomianów u i w. Podaj stopień wielomianu u, wielomianu w oraz stopień ich sumy.

a) $u(x) = 17x^4 - 14x^2 + 7x - 5$, $w(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5x + 5$

b) $u(x) = 9x^7 - 13x^3 + 10x^2 - 2$, $w(x) = -9x^7 + 6x^4 - 12x^2 + 7$

Ćwiczenie 2

Podaj przykłady wielomianów u i w takich, że $\text{st}\,(u) = 4$, $\text{st}\,(w) = 4$ oraz:

a) $\text{st}\,(u + w) = 4$,

b) $\text{st}\,(u + w) = 3$,

c) $\text{st}\,(u + w) = 2$,

d) $\text{st}\,(u + w) = 1$,

e) $\text{st}\,(u + w) = 0$.

Twierdzenie

Jeśli wielomiany: u, w oraz $u + w$ są niezerowe i $\text{st}\,(u) \leqslant \text{st}\,(w)$, to:

$$\text{st}\,(u + w) \leqslant \text{st}\,(w)$$

Przykład 2

Wyznacz sumę wielomianów $u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x$ i $w(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$.

$$u(x) + w(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

Zatem suma $u + w$ jest wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3

Dany jest wielomian $u(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Co można powiedzieć o współczynnikach wielomianu w, jeśli $u + w$ jest wielomianem zerowym?

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, odejmujemy od wyrazów pierwszego wielomianu odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest wielomianem.

Przykład 3

Dane są wielomiany $u(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ i $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$. Wyznacz różnicę $u - w$.

$$\begin{aligned} u(x) - w(x) &= (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \\ &= 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x = \\ &= 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

Zmieniamy znaki współczynników wielomianu w.

Ćwiczenie 4

Wyznacz różnicę $u - w$. Podaj stopnie wielomianów: u, w i $u - w$.

a) $u(x) = 5x^9 + 2x^8 + 4x^4 + 2x + 1$, $w(x) = -2x^8 - 6x^4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $u(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + 1$, $w(x) = 0{,}75x^6 - 0{,}2x^4 + 0{,}125x^2$

Przykład 4

Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1$ i $g(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$. Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= 3(3x^4 - 2x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 + 1) - 2(5x^4 + x^3 - 2x^2 + \tfrac{3}{2}x) = \\ &= 9x^4 - 6x^3 - x^2 + 3 - 10x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x = \\ &= -x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Mnożymy każdy wyraz wielomianu f przez 3 i każdy wyraz wielomianu g przez -2.

Ćwiczenie 5

Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Oblicz $h(-1)$.

a) $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - 8x + 5$, $g(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$

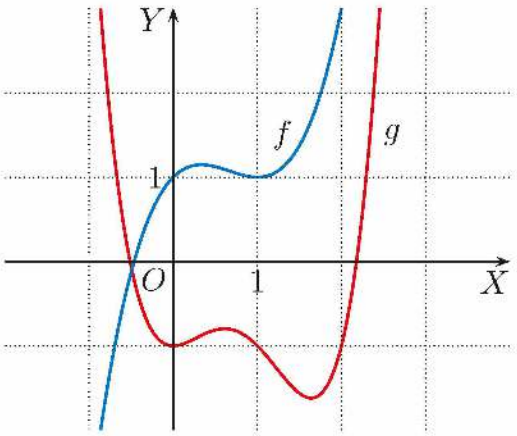
b) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - x^2 + 4x$, $g(x) = 1{,}5x^5 - x^4 + 3x^2 + 3x - 1$

Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ oraz $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.

a) Czy punkt $P(1, -2)$ należy do wykresu wielomianu $u(x) = 2f(x) + 4g(x)$?

b) Niech $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$. Dla jakiej wartości współrzędnej a punkt $Q(0, a)$ należy do wykresu wielomianu w?



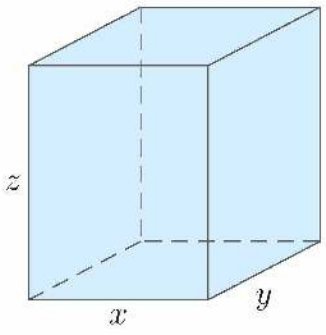
Oprócz wielomianów jednej zmiennej (patrz str. 56) rozpatruje się również **wielomiany wielu zmiennych**, np.:

$u(x,y) = 3x^4y^2 - 7x^2y^3 - xy - 2y^4$ jest wielomianem dwóch zmiennych,

$w(x,y,z) = 9xy^2z + 4x^2y^3z^3 + 6yz$ jest wielomianem trzech zmiennych.

Przykład 5

Podaj wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej oraz wielomian opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości x, y, z (rysunek obok).



$P(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$ jest wielomianem trzech zmiennych opisującym pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Objętość tego prostopadłościanu opisuje wielomian $V(x,y,z) = xyz$.

Wyrazy wielomianu wielu zmiennych są **podobne**, gdy odpowiednie zmienne występują w nich w tych samych potęgach. Wyrazami podobnymi są na przykład $4x^3y^2$ i $6x^3y^2$. Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wielomianów wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Przykład 6

a) Wyznacz sumę wielomianów u i w.

$$u(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - 4xy, \quad w(x,y) = 5xy^3 + 4x^2y + xy + 2$$

$$u(x,y) + w(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - 4xy + 5xy^3 + 4x^2y + xy + 2 =$$
$$= 7x^2y + 5xy^3 + 6xy^2 - 3xy + 2$$

b) Wyznacz różnicę wielomianów u i w.

$$u(x,y,z) = 5x^2y^2z^2 - 4xyz^2, \quad w(x,y,z) = 5x^2y^2z - 3xyz^2 + 2yz^2$$

$$u(x,y,z) - w(x,y,z) = 5x^2y^2z^2 - 4xyz^2 - 5x^2y^2z + 3xyz^2 - 2yz^2 =$$
$$= 5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z - xyz^2 - 2yz^2$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów u i w.

a) $u(x,y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^2 + 2xy + 2$, $w(x,y) = 3x^2y^3 - 6x^2y^2 - 6xy - 3$

b) $u(x,y) = \frac{2}{3}x^4y + 3x^3y - \frac{1}{2}xy^2 + 1$, $w(x,y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}xy^2 - x + 4$

Ćwiczenie 8

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów u i w.

a) $u(x,y,z) = 4xy^2z^3 - 6x^2y^2z - xyz^3$, $w(x,y,z) = xy^2z^3 + 6x^2yz^2 + 2xyz^3$

b) $u(x,y,z) = 8x^2y + 6xz^2 - 4y^2z - yz^2$, $w(x,y,z) = 8xz^2 + 4y^2z - 3yz^2 + z^3$

Zadania

1. Wyznacz sumę $f+g$ oraz różnicę $f-g$ wielomianów f i g.

a) $f(x)=\frac{3}{4}x^6-2x^4+\frac{5}{4}x^2+4,\ \ g(x)=\frac{1}{4}x^6+2x^4+x^3-\frac{1}{4}x^2-2x+2$

b) $f(x)=-2x^2+4x-x^6+2,\ \ g(x)=-5x+3x^2+x^6-3x^5$

c) $f(x)=3x^4+2x^7-5+4x,\ \ g(x)=-3x+x^5-2x^7+2$

2. Wyznacz wielomiany $w(x)=2f(x)-3g(x)$ oraz $u(x)=\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{3}f(x)$. Podaj stopień oraz sumę współczynników każdego z tych wielomianów.

a) $f(x)=x^5+\frac{1}{2}x^2+3,\ \ g(x)=-2x^4+\frac{x^2}{3}+2$

b) $f(x)=3x^5+6x^3-9x,\ \ g(x)=2x^5+4x^3-4x^2$

3. Wiadomo, że $f(x)=u(x)+2w(x)$, $g(x)=2u(x)-3w(x)$, gdzie u i w są pewnymi wielomianami. Oblicz:

a) $f(5)$ i $g(5)$, gdy $u(5)=7$ i $w(5)=-2$,

b) $u\left(-\frac{1}{2}\right)$ i $w\left(-\frac{1}{2}\right)$, gdy $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-9$ i $g\left(-\frac{1}{2}\right)=13$.

4. Co można powiedzieć o stopniu sumy wielomianów p i q, jeśli:

a) $\mathrm{st}\,(p)=5$, $\mathrm{st}\,(q)=4$,

b) $\mathrm{st}\,(p)=5$, $\mathrm{st}\,(q)=5$,

c) $\mathrm{st}\,(p)=m$, $\mathrm{st}\,(q)=n$?

5. Określ stopień wielomianu $u+w$ w zależności od parametru a.

a) $u(x)=2x^4-3x+6,\ \ w(x)=ax^6+5x^2+4$

b) $u(x)=3x^6-ax^5+2x^2-x,\ \ w(x)=-3x^6-6x^5-2x^2+9$

c) $u(x)=(a+1)x^3-x^2+4x,\ \ w(x)=(a^2-1)x^4+x^2+3$

6. Określ stopień wielomianu $u+w$, jeśli $a\in\{0,1\}$ i $b\in\{0,3\}$.

a) $u(x)=ax^3+x^2-6,\ \ w(x)=bx^5-x^3+x+2$

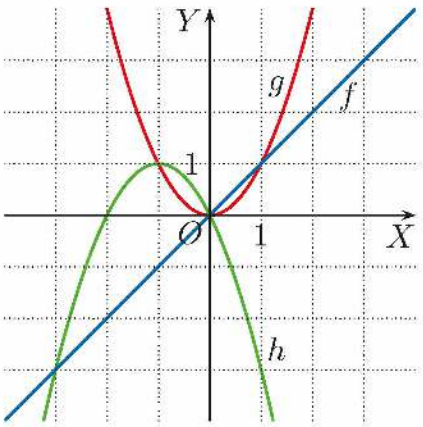
b) $u(x)=ax^7+3x^2+4,\ \ w(x)=-x^7-bx^2-5x+6$

c) $u(x)=(a-1)x^4-bx^3+2x^2+1$,
$w(x)=(3-b)x^4+3x^3-2x^2+9x$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ oraz $h(x)=-2f(x)-g(x)$. Naszkicuj wykres wielomianu v.

a) $v(x)=2h(x)+4g(x)$

b) $v(x)=2f(x)-g(x)-h(x)$

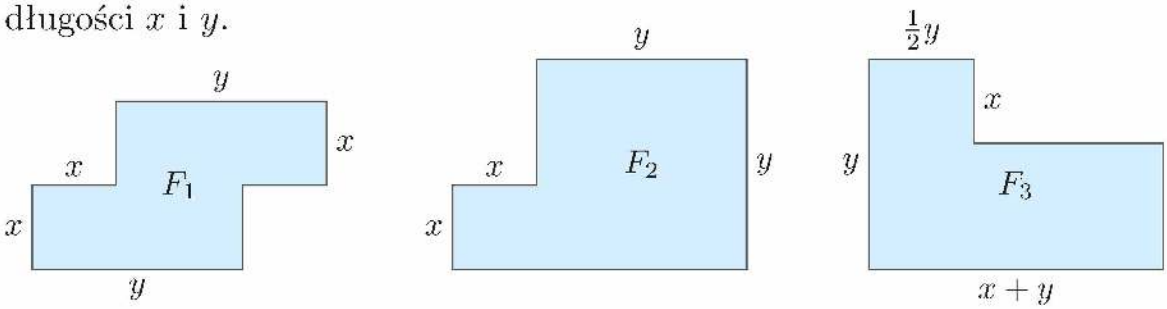


8. Wyznacz sumę $u+w$ oraz różnicę $u-w$ wielomianów u i w. Oblicz wartości sumy i różnicy dla $x=-2$ i $y=3$.

a) $u(x,y)=\frac{1}{3}x^2y-3xy^2+x^3y,\ \ w(x,y)=\frac{1}{2}x^3y-x^2y+xy^2$

b) $u(x,y)=\frac{1}{4}xy^3+\frac{1}{3}x^2y^2-x^2y,\ \ w(x,y)=\frac{1}{6}xy^3-x^2y^2+\frac{1}{2}x^2y$

9. Zapisz wielomian P opisujący sumę pól figur F_1, F_2 i F_3 w zależności od długości x i y.



10. Dla której trójki liczb, P czy Q, wartość wielomianu w jest większa?

a) $w(x,y,z)=2x^2yz-4xyz^2+5xy^2-6z$

b) $w(x,y,z)=2x^6y^3+x^5y^2z-3xy^3z^5+x$

c) $w(x,y,z)=\frac{1}{3}yz^5-\frac{1}{2}xyz^2+\frac{5}{6}x^2y^4z+1$

$$P\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=1\end{cases}\qquad Q\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=-1\end{cases}$$

11. Wyznacz wielomian $v(x,y,z)=2u(x,y,z)-3w(x,y,z)$.

a) $u(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2yz^2+\frac{3}{2}x^2yz-xyz^2,\ \ w(x,y,z)=\frac{2}{3}x^2yz^2-x^2yz+xyz$

b) $u(x,y,z)=2x^3y^2z-xy^2z^2+xyz,\ \ w(x,y,z)=3xyz^2-xyz-2yz^2$

12. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości x, y, z oraz prostopadłościan o krawędziach długości $x+1$, $y+2$, $z+3$. Podaj wielomian opisujący sumę pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów.

Powtórzenie

13. Dane są wielomiany: $u(x)=4x^3+2x^2-1$, $w(x)=2x^3-x^2+1{,}5$. Wyznacz wielomian v.

a) $v(x)=u(x)+3w(x)$ b) $v(x)=2u(x)-w(x)$

14. Wyznacz wielomian $v(x)=u(x)-2w(x)$. Oblicz $v(1)$, $v(-1)$ i $v(-2)$.

a) $u(x)=-3x^4+2x^2,\ \ w(x)=x^4-1{,}5x^2+3x$

b) $u(x)=8x^3-2x^2+x,\ \ w(x)=4x^3-x^2+\frac{1}{4}x$

15. Oblicz wartość wielomianu w dla podanych wartości x i y.

a) $w(x,y)=\frac{1}{3}x^2y^3-3xy^2+x^3y,\ \ x=-2,\ y=3$

b) $w(x,y)=x^5-\frac{1}{4}x^2y^3-\frac{1}{8}xy^2-\frac{1}{16}xy^4,\ \ x=2,\ y=-4$

2.3. Mnożenie wielomianów

Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x) = 2x - 3$ i $v(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} u(x) \cdot v(x) = (2x-3)\cdot(x^2-2x+2) &= 2x(x^2-2x+2) - 3(x^2-2x+2) = \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3x^2 + 6x - 6 = \\ &= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 \end{aligned}$$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

Twierdzenie

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m+n$.

$$\operatorname{st}(w \cdot v) = \operatorname{st}(w) + \operatorname{st}(v)$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w. Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

a) $u(x) = x^3$, $w(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$

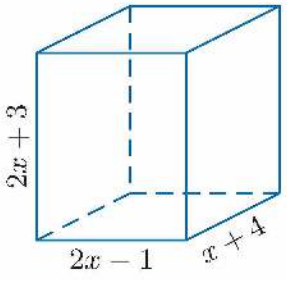
b) $u(x) = x^2 - 1$, $w(x) = x^5 - x + 1$

c) $u(x) = x - 1$, $w(x) = x^2 + x + 1$

d) $u(x) = 5 - 3x + x^2$, $w(x) = x^2 - 1$

Przykład 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.



Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, zatem zakładamy, że:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x > \tfrac{1}{2}$$

Objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} V(x) &= (2x-1)(x+4)(2x+3) = (2x^2 + 8x - x - 4)(2x+3) = \\ &= (2x^2 + 7x - 4)(2x+3) = 4x^3 + 6x^2 + 14x^2 + 21x - 8x - 12 \end{aligned}$$

$V(x) = 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12$ opisuje objętość prostopadłościanu dla $x > \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c.

a) $a = x - 1$, $b = x + 1$, $c = x$

b) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = x + 3$

c) $a = 2x + 1$, $b = \frac{1}{2}x + 1$, $c = 2x - 1$

d) $a = x + 3$, $b = x + 3$, $c = x^2 - 9$

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych przebiega analogicznie do mnożenia wielomianów jednej zmiennej. Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów wielu zmiennych, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Przykład 3

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x, y) = x^2 - 2y$ i $w(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3y$.

$$\begin{aligned} u(x,y) \cdot w(x,y) &= (x^2 - 2y) \cdot (2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= x^2(2x^2 + y^2 - 3y) - 2y(2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 3x^2y - 4x^2y - 2y^3 + 6y^2 = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 7x^2y - 2y^3 + 6y^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w.

a) $u(x, y) = xy - 2x^2$, $w(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + x$

b) $u(x, y) = 3xy^2 - 2x + 1$, $w(x, y) = x^2y + 2xy - y$

c) $u(x, y) = 4x^2y + 3xy^2 - 2xy$, $w(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy$

Ćwiczenie 4

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w.

a) $u(x, y, z) = x^2y + x^2z + yz$, $w(x, y, z) = 2xyz - yz$

b) $u(x, y, z) = 3xyz - 4xz^2 + y^2z$, $w(x, y, z) = x^2y - xy^2 + 2z$

c) $u(x, y, z) = xy^2z^2 + 2xyz^2 - xyz$, $w(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Zadania

1. Wyznacz iloczyn. Podaj współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny otrzymanego wielomianu.

a) $(2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 7x)$

b) $(x^2 + 2)(4x^2 - 3x + 4)$

c) $(x^2 - x)(2x^4 - x + 1)$

d) $(6 - 3x^2 - 2x^3)(x^3 - 4x + 1)$

e) $\left(2x^3 + \frac{1}{2}x + 1\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{4}\right)$

f) $(2 - \sqrt{2}x^2 - x^4)(\sqrt{2} + x + 4x^2)$

2. Podaj stopień, współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny wielomianu w bez wykonywania mnożenia wielomianów.

a) $w(x) = (x-1)(1-x+x^2)$
b) $w(x) = (3x-2)(2x^2-x+3)$
c) $w(x) = (1-x^2)(1-x^2+4x^3)$
d) $w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
e) $w(x) = (1-2x)(1+x)(3x^2+2)$
f) $w(x) = (4x^2+1)(1-x^2)(6-3x)$

3. Wyznacz wielomian $v(x) = [w(x)]^2$ i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3$
b) $w(x) = \sqrt{2}\,x^2 + x - 2\sqrt{2}$

4. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = [u(x)]^2 - w(x)$.

a) $u(x) = x^2 + 3x - 1$, $w(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2$
b) $u(x) = x^4 - x^2 + 1$, $w(x) = -6x^3 + 2x^2 - 1$
c) $u(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $w(x) = 3x^2 - 2x + 1$

5. Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c.

a) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = 2x - 4$
b) $a = x^2 + 4$, $b = x + 2$, $c = x^2 - 1$

6. Wyznacz wielomian $v(x,y) = [u(x,y)]^2 - 2w(x,y)$.

a) $u(x,y) = 2x^2 - xy$, $w(x,y) = 6x^3y^2 - 3x^2y^2 + y^4$
b) $u(x,y) = 3x^2y + 2xy^2$, $w(x,y) = 2x^4y^4 + 4x^4y^2 + 3x^3y^3 - xy^4$

7. Wyznacz iloczyn.

a) $(2x^2y + 3xy^2)(x - y - 4)$
b) $(x+y)(x-2y)(x-xy+y^2)$
c) $(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)$
d) $\left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y\right)\left(2x^2 + \sqrt{6}\,xy + 3y^2\right)$

Powtórzenie

8. Wyznacz iloczyn. Oblicz jego wartości dla $x \in \{-1, 0, 1\}$.

a) $4x^2(2x^5 - 3x^2)$
b) $-9x^3(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x)$
c) $(x+4)(x^2-x)$
d) $(x^2-3)(2x^4-x)$
e) $(x-2)(x^2-3x+1)$
f) $(3x+\frac{1}{2})(2x^3-4x-6)$

9. Wykonaj działania. Uporządkuj otrzymany wielomian.

a) $x(x^2-1) + 4(x^2-2)(x+1)$
b) $(2x+2)(x^2-3) - (x^2+1)x$
c) $(x^2+4)(2-x)^2 - x^2(x^2+2x+3)$
d) $x(x-3)(x-2)^2 - x(x+4)(x-5)$

10. Wyznacz iloczyn.

a) $(x-2y)(y-2z)(z-2x)$
b) $(x+y+z)(x-y-z)$
c) $(2x-y)(3y+2z)(2x+y)(3y-2z)$
d) $(x+xy+xyz)(1+x-yz)$

Powierzchnie

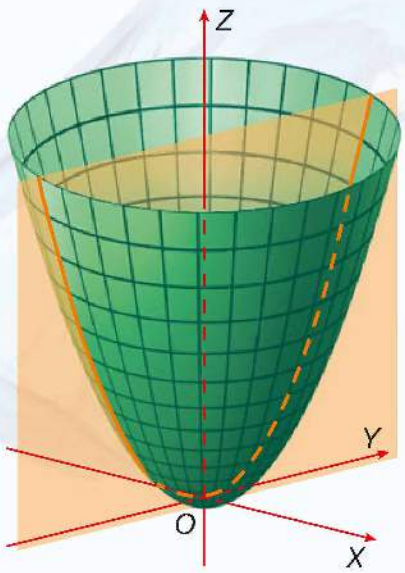
Funkcja f dwóch zmiennych to funkcja, której argumentami są pary liczb rzeczywistych (x, y), a wartościami – liczby rzeczywiste z. Wykres funkcji $z = f(x, y)$ jest powierzchnią w trójwymiarowym układzie współrzędnych.

Wielomiany

Funkcja dwóch zmiennych może być wielomianem. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji określonej równaniem:

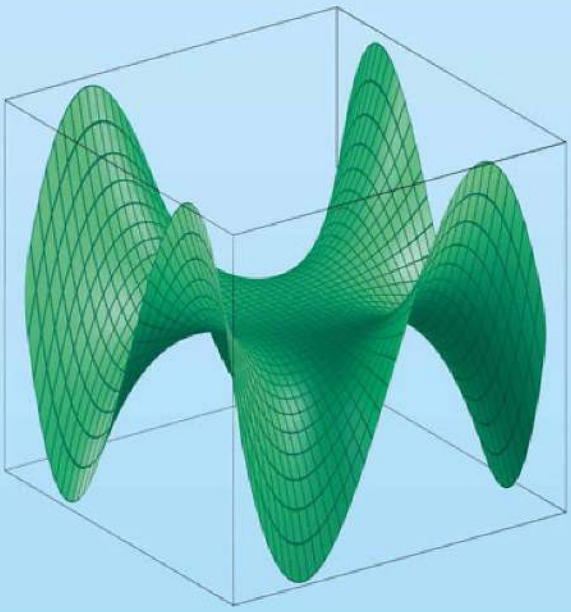
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Wykresem tej funkcji jest powierzchnia nosząca nazwę **paraboloidy obrotowej**. Zwróć uwagę na to, że część wspólna tej paraboloidy i płaszczyzny OYZ jest parabolą o równaniu $z = y^2$, a część wspólna paraboloidy i płaszczyzny OXZ – parabolą o równaniu $z = x^2$.

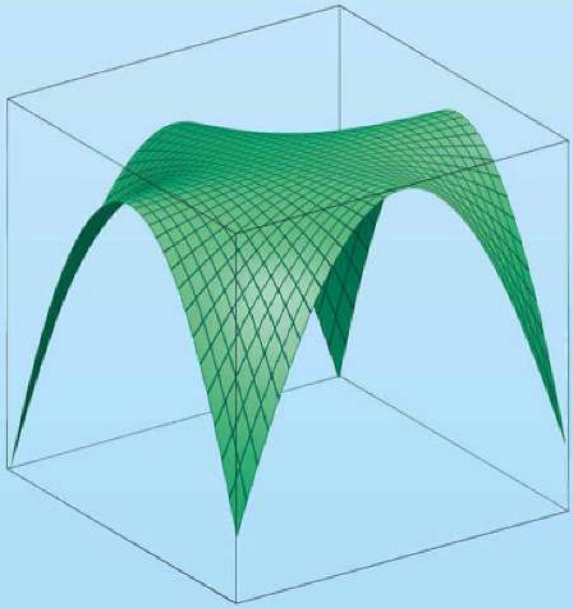


Poniżej przedstawiono inne przykłady powierzchni, które są wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

$$f(x, y) = xy^3 - x^3y$$



$$f(x, y) = x^4y^2 - 10x^2y^2 - y^2$$



1 Za pomocą odpowiedniego programu komputerowego znajdź przykłady innych powierzchni będących wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

2.4. Wzory skróconego mnożenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad \text{sześcian sumy}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad \text{sześcian różnicy}$$

Dowód wzoru na sześcian sumy

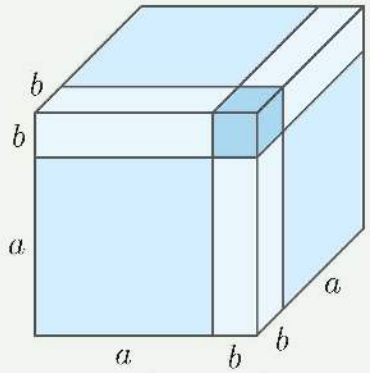
$$\begin{aligned}(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) &= (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

D Ćwiczenie 1

Wyprowadź wzór na sześcian różnicy, korzystając z tego, że:

a) $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$,

b) $(a-b)^3 = (a+(-b))^3$.



Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru na sześcian sumy.

Przykład 1

Zapisz $(x+2)^3$ w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned}&(\boxed{x}+\boxed{2})^3 = \\ &= \boxed{x}^3 + 3\cdot\boxed{x}^2\cdot\boxed{2} + 3\cdot\boxed{x}\cdot\boxed{2}^2 + \boxed{2}^3 = \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+1)^3$ c) $(x+3)^3$ e) $(2x+3)^3$ g) $(3x+1)^3$

b) $(x-1)^3$ d) $(x-4)^3$ f) $(2x-1)^3$ h) $(1-3x)^3$

Przykład 2

Oblicz $(2-\sqrt{3})^3$.

$$(2-\sqrt{3})^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 2\cdot(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $(2+\sqrt{2})^3$ c) $(3-\sqrt{3})^3$ e) $(1+2\sqrt{5})^3$ g) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$

b) $(\sqrt{5}-1)^3$ d) $(\sqrt{2}-4)^3$ f) $(2\sqrt{3}-3)^3$ h) $(\sqrt{3}-\sqrt{6})^3$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad \text{suma sześcianów}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad \text{różnica sześcianów}$$

D Ćwiczenie 4

Wyprowadź wzory na sumę sześcianów i różnicę sześcianów.

Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+2)(x^2-2x+4)$

b) $(x-1)(x^2+x+1)$

c) $(x^2-x+1)(1+x)$

d) $(x^2-6x+36)(x+6)$

e) $(x-8)(x^2+8x+64)$

f) $(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)$

Przykład 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16) =$

$= (x^2-4)(x^4+4x^2+16) =$ Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

$= (x^2)^3 - 4^3 = x^6 - 64$ Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

b) $(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)(9x^4+3x^2+1) =$

$= (3x^2-1)(9x^4+3x^2+1) =$ Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

$= (3x^2)^3 - 1 = 27x^6 - 1$ Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów.

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$

b) $(3+x)(3-x)(x^4+9x^2+81)$

c) $((x+2)^2-4x)(x^4-4x^2+16)$

d) $(2x+5)^2(4x^2-20x+25)$

D Ćwiczenie 7

Wykaż prawdziwość podanego obok wzoru dla $n = 5$.

Dla dowolnych $a \in \mathbf{R}$ i $n \geqslant 2$:
$(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a^2+a+1) = a^n-1$

Ćwiczenie 8

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-1)(1+x+x^2+x^3)$

b) $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)$

c) $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)(x^5+1)$

d) $(x^3+x^2+x+1)(x^2-1)(x-1)$

Zarówno wzór $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)$, jak i wzór na różnicę sześcianów $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ są szczególnymi przypadkami poniższego wzoru.

Twierdzenie

Dla $n \geqslant 2$ różnica n-tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyraża się wzorem:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

D Ćwiczenie 9

Uzasadnij prawdziwość podanego wyżej wzoru dla: a) $n = 4$, b) $n = 5$.

Ćwiczenie 10

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$ b) $(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

Zadania

1. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+4)^3$ c) $(x-2)^3$ e) $(2x+1)^3$ g) $(x-\sqrt{2})^3$

b) $(x+5)^3$ d) $(x-3)^3$ f) $(5x-1)^3$ h) $(x+\sqrt{3})^3$

2. Oblicz objętość sześcianu o krawędzi a.

a) $a = \sqrt{2} - 1$ b) $a = 3 + \sqrt{2}$ c) $a = 2\sqrt{5} - 1$ d) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

3. Oblicz.

a) $(1+\sqrt{2})^3 + (1-\sqrt{2})^3$ c) $(2\sqrt{3}-1)^3 - (2\sqrt{3}+1)^3$

b) $(4+\sqrt{2})^3 - (4-\sqrt{2})^3$ d) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^3 + (\sqrt{5}+\sqrt{2})^3$

4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(2x+y)^3$ c) $(3x+2y)^3$ e) $\left(x+\frac{1}{3}y\right)^3$ g) $(\sqrt{3}x+y)^3$

b) $(x-2y)^3$ d) $(2x-3y)^3$ f) $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3$ h) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-y\right)^3$

5. a) Oblicz sumę objętości sześcianu o krawędzi długości $2x+2y$ i sześcianu o krawędzi długości $2x+3y$.

b) Oblicz różnicę objętości sześcianu o krawędzi długości $3x+y$ i sześcianu o krawędzi długości $x+3y$.

6. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+5)^2(x^2-5x+25)$

b) $(x^2+5x+25)(x-5)^2$

c) $(3x-1)^2(9x^2+3x+1)$

d) $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^4+2x^2+4)$ dla $x=\sqrt[3]{9}$,

b) $(9x^2-6x+4)(3x+2)$ dla $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$,

c) $(x-\sqrt{5})^3-2x(x+5)(x-5)+(x+\sqrt{5})^3$ dla $x=\frac{1}{40}$,

d) $(x+\sqrt{5})(x^2-\sqrt{5}x+5)-(\sqrt{5}-x)(x^2+\sqrt{5}x+5)$ dla $x=\sqrt[3]{4}$.

8. Rozwiąż równanie.

a) $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+x$

b) $(x-4)(x^2+4x+16)=x^3+8x$

c) $(4x^2+2x+1)(2x-1)=26$

d) $\left(\frac{1}{4}x^2-x+4\right)\left(\frac{1}{2}x+2\right)=-9$

9. Skróć ułamek.

a) $\dfrac{(a-1)(a^3+a^2+a+1)}{a^2+1}$

b) $\dfrac{(a^4+a^3+a^2+a+1)(a^2-1)}{a^5-1}$, $a\neq 1$

D **10.** Uzasadnij prawdziwość wzoru.

a) $a^8-b^8=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

b) $a^9-b^9=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$

Powtórzenie

11. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-5)^3+(x+3)^3$

b) $(3x-1)^3-(2x+1)^3$

c) $(x+\frac{1}{2})^3+(x-\frac{1}{2})^3$

d) $(2x+3)^3-(2x-3)^3$

12. Uprość wyrażenie.

a) $(x^2+4)^3+(x^2-4)^3$

b) $(x^2+\frac{1}{3})^3-(x^2-\frac{1}{3})^3$

c) $(2x^2+3)^3+(2x^2-3)^3$

d) $(x^2+x)^3-(x^2-x)^3$

13. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(5+x^2)(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)$

b) $(x^2-x+1)(x+1)(1-x^3)$

14. Rozwiąż równanie.

a) $(x+1)^3-(x-1)^3=6x^2-x$

b) $(x+2)^3-(x+1)^3=3x^2+x$

c) $(2x-1)(1+2x+4x^2)=8x^3-x$

d) $(x^2-3x+9)(x+3)=x^3+9x$

Warto wiedzieć

Trójkąt Pascala

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

są szczególnymi przypadkami **wzoru dwumianowego Newtona** (zwanego też **dwumianem Newtona**) pozwalającego wyznaczyć $(a+b)^n$ dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$.

Współczynniki liczbowe występujące w rozwinięciu $(a+b)^n$ możemy znaleźć w kolejnych wierszach **trójkąta Pascala**.

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Każda liczba w trójkącie Pascala (z wyjątkiem skrajnych, które są jedynkami) jest sumą dwóch liczb znajdujących się nad nią (np. dla $n=8$ mamy: $8 = 1+7$, $28 = 7+21$, $56 = 21+35$, $70 = 35+35$).

Odpowiednie wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

1. Podaj wzory na:

a) $(a+b)^7$, b) $(a-b)^7$, c) $(a+b)^8$, d) $(a-b)^8$.

2. Wyznacz wiersze trójkąta Pascala dla $n=9$ i $n=10$ oraz podaj wzory na $(a+b)^9$ i $(a+b)^{10}$.

3. Korzystając z odpowiednich wzorów skróconego mnożenia, oblicz:

a) $(\sqrt{2}+1)^4$, b) $(\sqrt{3}-1)^4$, c) $(\sqrt{2}+1)^6$, d) $(\sqrt{3}-1)^6$.

2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

Przedstawienie wielomianu jako iloczynu dwóch lub więcej wielomianów nazywamy **rozkładem wielomianu na czynniki**.

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = 12x^5 - 8x^4$ na czynniki.

$w(x) = 12x^5 - 8x^4 = 4x^4(3x - 2)$ Wyłączamy $4x^4$ przed nawias.

Zauważ, że wielomian w został już rozłożony na czynniki liniowe (stopnia pierwszego), ponieważ można go zapisać jako $w(x) = 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (3x - 2)$.

Przykład 2

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 = x^4(x^2 - 6x + 9) =$ Wyłączamy x^4 przed nawias.
$= x^4(x - 3)^2$ Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

b) $w(x) = x^5 - 16x = x(x^4 - 16) =$ Wyłączamy x przed nawias.
$= x(x^2 - 4)(x^2 + 4) =$ Dwukrotnie korzystamy ze wzoru
$= x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Zauważ, że czynnika $x^2 + 4$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

c) $w(x) = 6x^5 - x^4 + x^3 = x^3(6x^2 - x + 1)$ Wyłączamy x^3 przed nawias.

Czynnik $6x^2 - x + 1$ jest trójmianem kwadratowym, którego nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż $\Delta = -23 < 0$.

Podstawowe twierdzenie algebry

> Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Rozkład wielomianu na czynniki stopnia co najwyżej drugiego zawsze istnieje, natomiast nie zawsze potrafimy go wyznaczyć – czasem jest to zbyt skomplikowane obliczeniowo, a czasem niemożliwe (w przypadku niektórych wielomianów stopnia większego od 4).

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 7x^3$
b) $w(x) = 18x^3 + 30x^2$
c) $w(x) = -2x^5 - 8x^4$
d) $w(x) = 6x^3 + 12x^2 + 6x$
e) $w(x) = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2$
f) $w(x) = -27x^6 + 18x^5 - 3x^4$

D Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian w na czynniki. Jeżeli w rozkładzie pojawi się czynnik stopnia drugiego, uzasadnij, że nie da się go rozłożyć na czynniki liniowe.

a) $w(x) = 3x^3 + 12x$

b) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + \frac{3}{4}x^4$

c) $w(x) = -6x^5 - 42x^3$

d) $w(x) = -\sqrt{2}\,x^7 - \sqrt{6}\,x^5$

c) $w(x) = 7x^{11} - 5x^{10} + x^9$

f) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + x^5 + 2x^4$

g) $w(x) = -4x^5 + 3x^4 - 7x^3$

h) $w(x) = 3\sqrt{2}\,x^5 - 2\sqrt{3}\,x^4 + \sqrt{6}\,x^3$

Przykład 3

Rozłóż wielomian $w(x) = 4x^5 + 3x^4 - x^3$ na czynniki.

$$w(x) = x^3(4x^2 + 3x - 1)$$ Wyłączamy x^3 przed nawias.

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 + 3x - 1$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{8} = -1, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4}$$

Zatem trójmian ten możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$4x^2 + 3x - 1 = 4(x+1)(x-\tfrac{1}{4})$$

czyli wielomian w można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$$w(x) = 4x^3(x+1)(x-\tfrac{1}{4})$$

Ćwiczenie 3

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$

b) $w(x) = 2x^5 - x^4 - x^3$

c) $w(x) = -2x^3 - x^2 + 6x$

d) $w(x) = 20x^5 + 14x^4 + 2x^3$

e) $w(x) = -2x^3 + 20x^2 - 10x$

f) $w(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{5}{4}x^2$

g) $w(x) = 2x^5 - 4x^4 + x^3$

h) $w(x) = 4x^6 - 12x^5 + x^4$

Czy wiesz, że...

W 1799 r. Carl Friedrich Gauss [czyt. karl fridriś gałs] (1777–1855) podał dowód podstawowego twierdzenia algebry. Ze względu na swe wybitne osiągnięcia Gauss zyskał przydomek „princeps mathematicorum" [czyt. princeps matematikorum] (książę matematyków). Jako dziewiętnastoletni student, Gauss wykazał możliwość konstrukcji (za pomocą cyrkla i linijki) siedemnastokąta foremnego. Życzył sobie, by został on wyryty na jego nagrobku, ale jego życzenie nie zostało spełnione.



Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 4x^3 - \frac{1}{9}x$ b) $w(x) = 16x^5 - 4x^3$ c) $w(x) = 2x^4 - 6x^2$

2. Wyłącz przed nawias wskazany czynnik. Sprawdź, czy otrzymany w nawiasie trójmian kwadratowy można rozłożyć na czynniki liniowe. Jeśli tak, to podaj rozkład wielomianu w na czynniki liniowe.

a) $w(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3$, x^3

b) $w(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$, x^2

c) $w(x) = 2x^6 - 4x^5 + 2x^4$, $2x^4$

d) $w(x) = 6x^4 + 3x^3 - 3x^2$, $6x^2$

e) $w(x) = 6x^3 - 15x^2 + 9x$, $6x$

f) $w(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$, $\frac{3}{4}x^3$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

b) $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 5x$

c) $w(x) = -6x^5 + 5x^4 - x^3$

d) $w(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2$

e) $w(x) = x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x$

f) $w(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3)$

g) $w(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 + 5x + 4)$

h) $w(x) = (2x^2 - 5x - 3)(2x^2 - 7x + 3)$

i) $w(x) = (x^3 + x^2 - 2x)(x^3 + 2x^2 - 15x)$

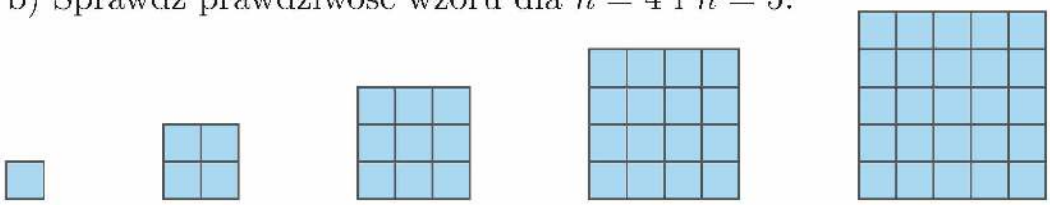
j) $w(x) = (x^4 + x^3 - 6x^2)(x^5 + 2x^4 + 3x^3)$

4. Sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ na czynniki.

b) Sprawdź prawdziwość wzoru dla $n = 4$ i $n = 5$.



Powtórzenie

5. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 18x^5 - 3x^4 + 6x^3$

b) $w(x) = 4x^5 - 4x^4 - 24x^3$

c) $w(x) = 4x^5 + 7x^4 - 2x^3$

d) $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - x^2$

e) $w(x) = -2x^7 + x^6 - x^5$

f) $w(x) = x^5 - 2x^4 + \sqrt{2}x^3$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 9x)$

b) $w(x) = (x^3 - 4x^2)(x^4 - 16x^2)$

c) $w(x) = (x^4 - 4x^2)(x^3 + 4x^2 + 4x)$

d) $w(x) = (x^4 - 1)(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$

2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = x^7 + 8x^4$ na czynniki.

$$w(x) = x^7 + 8x^4 = x^4(x^3 + 8) = \\ = x^4(x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sześcianów: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Czynnik $x^2 - 2x + 4$ jest nierozkładalny, gdyż $\Delta = 4 - 16 < 0$.

Przykład 2

Rozłóż wielomian $w(x) = 27x^7 - x^4$ na czynniki.

$$w(x) = 27x^7 - x^4 = x^4(27x^3 - 1) = \\ = x^4(3x-1)(9x^2 + 3x + 1)$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Czynnik $9x^2 + 3x + 1$ jest nierozkładalny, gdyż $\Delta = 9 - 36 < 0$.

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 2x^5 + 2x^2$

b) $w(x) = -x^6 - 8x^3$

c) $w(x) = 8x^4 - x$

d) $w(x) = x^2 - 0{,}001x^5$

e) $w(x) = 8x^6 - 27x^3$

f) $w(x) = 0{,}054x^4 + 2x$

W pewnych przypadkach wielomian możemy rozłożyć na czynniki, grupując odpowiednio jego wyrazy.

Przykład 3

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $u(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$

$$u(x) = \underbrace{x^3 - 4x^2}_{} + \underbrace{x - 4}_{} = \\ = x^2(x-4) + (x-4) = (x^2+1)(x-4)$$

Z dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wyrazów można wyłączyć ten sam czynnik: $x - 4$.

b) $u(x) = 7x^3 + 2x^2 - 14x - 4$

$$u(x) = \underbrace{7x^3 + 2x^2}_{} \underbrace{- 14x - 4}_{} = x^2(7x+2) - 2(7x+2) = (x^2-2)(7x+2) = \\ = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)(7x+2)$$

c) $u(x) = 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 8x^2$

$$u(x) = \underbrace{4x^5 - 2x^4}_{} \underbrace{- 16x^3 + 8x^2}_{} = 2x^4(2x-1) - 8x^2(2x-1) = \\ = (2x^4 - 8x^2)(2x-1) = 2x^2(x^2-4)(2x-1) = 2x^2(x-2)(x+2)(2x-1)$$

Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $u(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$
b) $u(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
c) $u(x) = 4x^3 + x^2 - 16x - 4$
d) $u(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x$
e) $u(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$
f) $u(x) = \sqrt{5}x^3 - x^2 - \sqrt{5}x + 1$
g) $u(x) = 8x^5 + 16x^3 - x^2 - 2$
h) $u(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6}x^2$

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 + 27x$
b) $w(x) = x^5 - 8x^2$
c) $w(x) = -x^4 - 64x$
d) $w(x) = -\frac{1}{8}x^5 + 64x^2$
e) $w(x) = 27x^6 + 8x^3$
f) $w(x) = 125x^8 - x^5$

2. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 8x - 16$
b) $w(x) = 14x^3 - 7x^2 + 4x - 2$
c) $w(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 15$
d) $w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 3x + 1$
e) $w(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 6x + 27$
f) $w(x) = x^3 - \sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{2}\,x - 2$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$
b) $w(x) = 4x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2 + x - 2$
c) $w(x) = 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 9x - 6$

4. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = (20x^3 - 28x^2 + 8x)(x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 12x)$
b) $w(x) = \left(-\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 4x^2\right)(x^3 - 7x^2 - 4x + 28)$
c) $w(x) = (7x^4 + 14x^3 - 21x^2)(x^5 - 4x^3 - x^2 + 4)$
d) $w(x) = \left(3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2\right)(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6)$

Powtórzenie

5. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 6x^5 - 6x^2$
b) $w(x) = 2x^6 - 16x^3$
c) $w(x) = x^7 - 64x^4$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18$
b) $w(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$
c) $w(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1$
d) $w(x) = 5x^3 + 15x^2 - x - 3$
e) $w(x) = x^5 + 2x^4 - 27x^2 - 54x$
f) $w(x) = \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 4$

2.7. Równania wielomianowe

Równanie postaci $w(x) = 0$, gdzie w jest wielomianem, nazywamy **równaniem wielomianowym**.
Rozkład wielomianu w na czynniki może być wykorzystany do wyznaczenia jego **pierwiastków**, tj. takich argumentów x, dla których spełnione jest równanie $w(x) = 0$.

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$.

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w (czyli jego miejsca zerowe), rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$$
$$\frac{1}{4}x^2(x-4) = 0$$
$$x^2 = 0 \text{ lub } x - 4 = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x = 4$$

> $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

$$x(x^2 - 6x + 9) = 0$$
$$x(x-3)^2 = 0 \quad \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.}$$
$$x = 0 \text{ lub } x = 3$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 3.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $6x^4 + 2x^3 = 0$
b) $-x^5 + 4x^3 = 0$
c) $x^6 + x = x + 2x^4$
d) $\frac{x^4 - 4x^3}{2} = \frac{x^5 - 6x^3}{3}$
e) $\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x = 0$
f) $-4x^4 + 4x^3 - x^2 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^5 - 2x^4 - 15x^3 = 0$.

$$x^3(x^2 - 2x - 15) = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 2x - 15 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe $x^2 - 2x - 15 = 0$:

$$\Delta = 4 + 60 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$
$$x = \frac{2-8}{2} = -3 \text{ lub } x = \frac{2+8}{2} = 5$$

Zatem wyjściowe równanie ma trzy rozwiązania: 0, -3 i 5.

Przykład 4

Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$.

$$x(5x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } 5x^2 + 4x + 4 = 0 \qquad \Delta = 16 - 80 = -64 < 0$$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne ($\Delta < 0$), zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

b) $-2x^4 + 9x^3 + 5x^2 = 0$

c) $3x^3 + 4x^2 + x = 0$

d) $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$

e) $2x^2 - 3x = x - x^3$

f) $2x^6 - x^5 = x^5 + x^4$

Przykład 5

Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu $w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ i osi OX.

Aby wyznaczyć pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu wielomianu w oraz osi OX, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

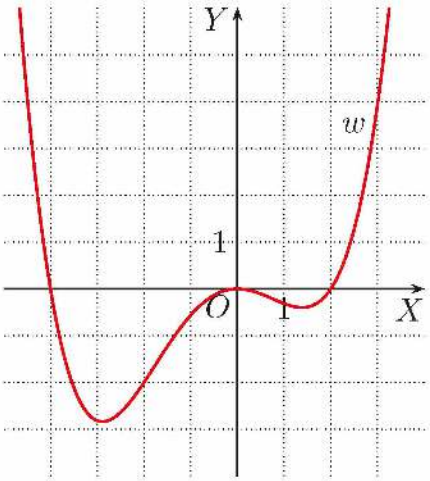
$$\frac{1}{16}x^2(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36 = 6^2$$

$$x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

Szukane punkty: $(-4, 0)$, $(0, 0)$ i $(2, 0)$.



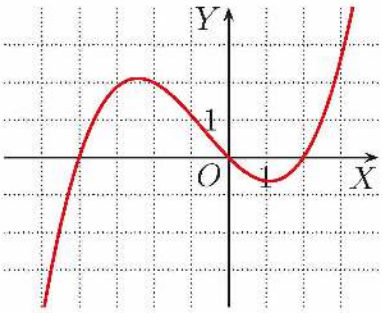
$w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

Pierwiastki równania $w(x) = 0$ to miejsca zerowe wielomianu w.

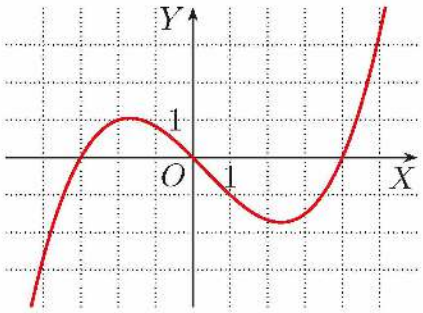
Ćwiczenie 3

Dane są wielomiany: $u(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$, $v(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - x$ oraz $w(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x$. Rozwiąż odpowiednie równania i podaj pierwiastki tych wielomianów. Do każdego z nich dopasuj jeden z poniższych wykresów.

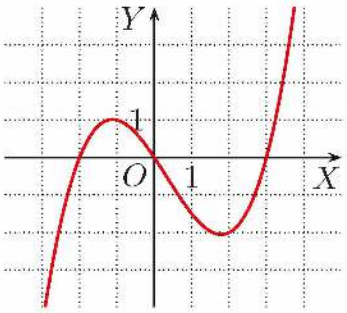
A.



B.



C.



Przykład 6

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

Rozkładamy wielomian w na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$w(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1) = (x^2-9)(x-1) =$$
$$= (x-3)(x+3)(x-1)$$

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu, rozwiązujemy równanie:

$$(x-3)(x+3)(x-1) = 0$$
$$x-3=0 \text{ lub } x+3=0 \text{ lub } x-1=0$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby: -3, 1 i 3.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 9x^2 + 2x - 18 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

c) $x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 = 0$

d) $3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 10x = 0$

e) $x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 = 0$

f) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 6 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 = 4x^2$

b) $x^5 = 9x^3$

c) $x^4 = -27x^3$

d) $x^5 = 8x^2$

e) $x^5 - 16x = 0$

f) $x^6 - 25x^2 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^5 - 2x^3 + x = 0$

b) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

c) $x^4 = 4x^3 + 5x^2$

d) $6x^3 + 9x^2 = 3x^4$

e) $2x^5 = 2x^4 + 12x^3$

f) $10x^4 + x^3 = 2x^2$

g) $9x^6 + 6x^5 + x^4 = 0$

h) $x^5 + 4x^4 = 12x^3$

i) $x^3 + 4x = -5x^2$

j) $-\frac{1}{2}x^4 + x^3 = \frac{1}{2}x^2$

k) $3x^5 = \frac{x^7+3x^6}{6}$

l) $\frac{20x^7+x^3}{8} = \frac{x^7-2x^5}{2}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 3x^2 = 12 - 4x$

b) $2x^3 + 3 = x^2 + 6x$

c) $x^4 + 9x^3 = x + 9$

d) $1 - x^3 = x^2 - x$

e) $x^4 - 8x = 8 - x^3$

f) $x^4 + 4x^3 = x + 4$

g) $x^3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

h) $\frac{x^3}{2} + \frac{3}{4}x^2 = 3 + 2x$

i) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 - x^3$

4. Rozwiąż równanie.

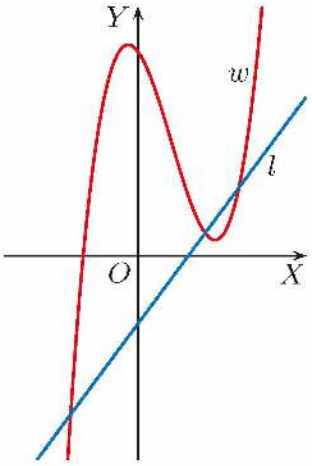
a) $x^3 - 5x - 4 = 0$

b) $x^3 - 3x + 2 = 0$

c) $x^4 - 7x^2 + 6x = 0$

Wskazówka. W podpunkcie a) zapisz $-5x$ jako $-x - 4x$.

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $w(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 9$ i prostą $l: y = 2x - 3$. Wyznacz punkty, w których prosta l przecina wykres wielomianu w.



6. Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu w i prostej l.

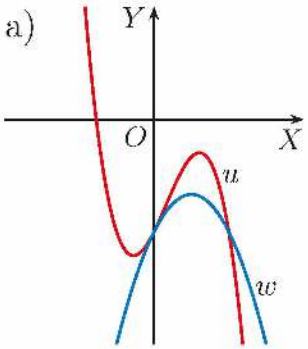
a) $w(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 2$, $l: y = 4x + 2$

b) $w(x) = 4x^3 - x^2 - 5x + 3$, $l: y = 3x + 1$

c) $w(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2$, $l: y = 4x - 3$

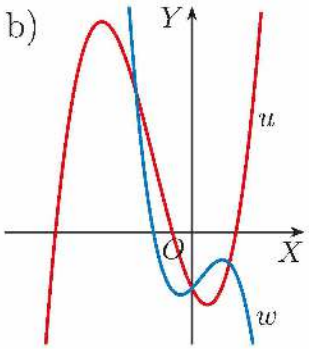
7. Wyznacz punkty wspólne wykresów wielomianów u i w.

a)



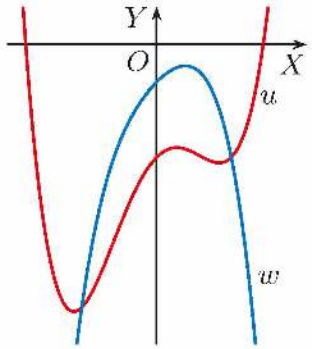
$u(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 3$
$w(x) = -x^2 + 2x - 3$

b)



$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x - 3$
$w(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

c)



$u(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + x - 3$
$w(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

8. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: a) $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$, b) 1, 2, 3.

9. Podaj przykład wielomianu stopnia n, którego jedynymi pierwiastkami są liczby -2 i 3, wyraz wolny jest równy 1 oraz: a) $n = 2$, b) $n = 4$, c) $n = 6$.

Powtórzenie

10. Rozwiąż równanie.

a) $4x^5 - x = 0$
b) $8x^5 + x^2 = 0$
c) $\sqrt{2}x^6 = -\sqrt{5}x^5$
d) $\frac{\sqrt{2}}{4}x^3 - \sqrt{2}x = 0$
e) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$
f) $9x^5 + 6x^4 + x^3 = 0$

11. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 + 6x^3 + 5x^2 = 0$
b) $2x^3 + 5x^2 + 2x = 0$
c) $3x^4 + 6x^3 = 3x^2$
d) $x^5 + \frac{1}{4}x^3 = x^4$
e) $x^5 + x^4 + 2x^3 = 0$
f) $\frac{x^4}{2} + x^2 = \sqrt{2}x^3$

12. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 3x^2 - 9x = 27$
b) $2x^3 + 8x = 5x^2 + 20$
c) $x^5 + x^2 = 8x^3 + 8$

2.8. Dzielenie wielomianów

Przypomnijmy, że jeśli n i m są liczbami całkowitymi (gdzie $m \neq 0$), to mówimy, że n jest podzielne przez m, jeśli istnieje taka liczba całkowita k, że $n = k \cdot m$.
Podobnie mówimy, że wielomian w jest podzielny przez niezerowy wielomian q ($q \not\equiv 0$), jeśli istnieje wielomian p taki, że $w = p \cdot q$.

Przykład 1
$(x^3 + 5x^2 + 6x) : (x + 3) = x^2 + 2x$, ponieważ:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = (x^2 + 2x) \cdot (x + 3)$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych.

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r} 3171 : 7 = 453 \\ -28 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 21 \\ -21 \\ \hline 0 \end{array}$$

Przykład 2
Wykonaj dzielenie $(3x^2 - x - 4) : (x + 1)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \\ 4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Poniżej wyjaśniamy, jak wyglądały kolejne kroki podczas wykonywania tego dzielenia.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \end{array}$$

Dzielimy $3x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy $3x$ przez dzielnik $x+1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \\ 4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dzielimy $-4x$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy -4 przez dzielnik $x+1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy. Otrzymaliśmy resztę równą 0.

Sprawdzenie: $(3x - 4)(x + 1) = 3x^2 + 3x - 4x - 4 = 3x^2 - x - 4$

Ćwiczenie 1
Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(2x^2 + x - 1) : (x + 1)$
b) $(4x^2 + 7x - 2) : (x + 2)$
c) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$
d) $(9x^2 + 3x - 12) : (x - 1)$

Tak jak iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną, tak dla wielomianów w i q $(q \not\equiv 0)$ nie zawsze istnieje wielomian p taki, że $w : q = p$. Wykonujemy wówczas dzielenie z resztą.

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (5x^2 + 13x + 11) : (x + 2) = 5x + 3 \\ -5x^2 - 10x \\ \hline 3x + 11 \\ -3x - 6 \\ \hline 5 \end{array}$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r} 752 : 9 = 83 \\ -72 \\ \hline 32 \\ -27 \\ \hline 5 \end{array}$$

$752 = 83 \cdot 9 + 5$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy wielomian $p(x) = 5x+3$ oraz resztę 5 (która jest wielomianem stopnia 0), zatem $5x^2 + 13x + 11 = (5x + 3)(x + 2) + 5$.
Sprawdzenie: $(5x + 3)(x + 2) + 5 = 5x^2 + 10x + 3x + 6 + 5 = 5x^2 + 13x + 11$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 4x - 18) : (x + 3)$
b) $(2x^2 - x - 1) : (x - 2)$
c) $(x^2 - 8x + 19) : (x - 5)$
d) $(4x^2 + 6x + 7) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : \left(x - \frac{3}{2}\right)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 - 2x - 5) : \left(x - \frac{3}{2}\right) = 2x^2 + 2x + 1 \\ -2x^3 + 3x^2 \\ \hline 2x^2 - 2x - 5 \\ -2x^2 + 3x \\ \hline x - 5 \\ -x + \frac{3}{2} \\ \hline -3\frac{1}{2} \end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę równą $-3\frac{1}{2}$.

Sprawdzenie:

$$(2x^2 + 2x + 1) \cdot \left(x - \tfrac{3}{2}\right) - 3\tfrac{1}{2} = 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + x - \tfrac{3}{2} - 3\tfrac{1}{2} = 2x^3 - x^2 - 2x - 5$$

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4)$
b) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 2)$
c) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x) : (x + 2)$
d) $(3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

Zwróćmy uwagę, że w wyniku dzielenia wielomianu w przez dwumian $x-a$ otrzymujemy jako iloraz pewien wielomian p oraz resztę r, która jest funkcją stałą.

Przykład 5

Wykonaj dzielenie wielomianu $w(x) = 2x^3+x^2+6$ przez dwumian $q(x) = x+2$. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x)+r(x)$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q.

$$(2x^3+x^2+0x+6) : (x+2) = 2x^2-3x+6$$
$$-2x^3-4x^2$$
$$-3x^2+0x+6$$
$$3x^2+6x$$
$$6x+6$$
$$-6x-12$$
$$-6$$

Zauważ, że wielomian w został zapisany ze składnikiem $0x$.

Otrzymaliśmy resztę równą -6.

Zatem $w(x) = (2x^2-3x+6)(x+2)-6$.

Ćwiczenie 4

Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x)+r(x)$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q.

a) $w(x) = x^3-2x^2+x,\ q(x) = x-2$

b) $w(x) = -2x^3+3x^2+4,\ q(x) = x+3$

c) $w(x) = x^4+x^3-3x^2+x,\ q(x) = x-1$

d) $w(x) = 3x^4-x^2+9x-1,\ q(x) = x+2$

dzielna, dzielnik

$$w(x) = p(x)q(x)+r(x)$$

iloraz, reszta

Wielomian w jest podzielny przez dwumian q, jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa zero (jest wielomianem zerowym).

Zadania

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q?

a) $w(x) = 2x^2-5x-12,\ q(x) = x-4$

b) $w(x) = x^3-2x^2+3x-4,\ q(x) = x+2$

c) $w(x) = -2x^4+3x^2+6,\ q(x) = x-3$

d) $w(x) = 4x^3+8x^2+4x-9,\ q(x) = x+3$

e) $w(x) = 2x^3-x^2+3x-4,\ q(x) = x-1$

2. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = x^3 + 3x + 7,\ \ q(x) = x + 3$

b) $w(x) = 3x^4 - x^2,\ \ q(x) = x - 1$

c) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 4,\ \ q(x) = x + 6$

d) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x - 2,\ \ q(x) = x + \frac{1}{2}$

3. Sprawdź, czy dzielenie zostało wykonane poprawnie.

a) $(-2x^3 + 3x^2 + 12x - 9) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -2x^2 - 3x + 3$

b) $(-3x^3 + 7x^2 + 6x - 6) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -3x^2 - 2x + 2$

c) $(3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 2x - 2) : (x - 2) \stackrel{?}{=} 3x^3 - 2x^2 + 1$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykonaj dzielenie $(2x^3 + x^2 - 7x + 5) : (2x + 3)$.

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + x^2 - 7x + 5) : (2x + 3) = x^2 - x - 2 \\
\underline{-2x^3 - 3x^2} \\
\quad -2x^2 - 7x + 5 \\
\quad \underline{2x^2 + 3x} \\
\quad\quad -4x + 5 \\
\quad\quad \underline{4x + 6} \\
\quad\quad\quad 11
\end{array}
$$

Otrzymaliśmy resztę 11.

Zatem $(2x^3 + x^2 - 7x + 5) = (2x + 3)(x^2 - x - 2) + 11$.

Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q.

a) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9,\ \ q(x) = 2x + 1$

b) $w(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x - 1,\ \ q(x) = 3x + 4$

c) $w(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 2,\ \ q(x) = \frac{1}{2}x + 3$

Powtórzenie

5. Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^3 - 3x^2 - x + 8) : (x - 2)$ b) $(x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 7) : (x + 3)$

6. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = x^3 + 3x^2 - x + 5,\ \ q(x) = x - 2$

b) $w(x) = 2x^3 + 4x^2 + x - 2,\ \ q(x) = x + 3$

Warto wiedzieć

Dzielenie wielomianu przez trójmian kwadratowy

Niech q będzie wielomianem drugiego stopnia, a w dowolnym wielomianem. Wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)q(x) + ax + b$, gdzie p jest pewnym wielomianem, a $ax + b$ jest resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian q.

Przykład 1

Wykonaj dzielenie $(x^4 + x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 - x)$.

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 + 3x^2 + 0x - 1) : (x^2 - x) = x^2 + 2x + 5 \\ \underline{-x^4 + x^3} \\ 2x^3 + 3x^2 + 0x - 1 \\ \underline{-2x^3 + 2x^2} \\ 5x^2 + 0x - 1 \\ \underline{-5x^2 + 5x} \\ 5x - 1 \end{array}$$

Otrzymaliśmy iloraz $p(x) = x^2 + 2x + 5$ oraz resztę $r(x) = 5x - 1$. Wielomian w można przedstawić w postaci:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 - 1 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - x) + 5x - 1$$

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $(2x^3 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3)$.

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 0x^2 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3) = 2x - 2 \\ \underline{-2x^3 - 2x^2 - 6x} \\ -2x^2 + 2x - 1 \\ \underline{2x^2 + 2x + 6} \\ 4x + 5 \end{array}$$

Otrzymaliśmy iloraz $p(x) = 2x - 2$ oraz resztę $r(x) = 4x + 5$. Wielomian w można przedstawić w postaci:

$$2x^3 + 8x - 1 = (2x - 2)(x^2 + x + 3) + 4x + 5$$

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = -3x^3 - x^2 + 3x - 4, \quad q(x) = x^2 - 4$

b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x + 2, \quad q(x) = x^2 + x$

c) $w(x) = x^3 + 6, \quad q(x) = x^2 + x + 1$

d) $w(x) = 4x^4 - 2x + 3, \quad q(x) = x^2 - 1$

2.9. Twierdzenie Bézouta

Po podzieleniu wielomianu w przez dwumian $x-a$ otrzymujemy iloraz p oraz resztę r: $w(x) = p(x)(x-a)+r(x)$. Reszta w tym przypadku jest wielomianem stopnia 0 (dalej będziemy pisać krótko: reszta r).
Czasami interesuje nas tylko reszta z dzielenia – wówczas możemy postąpić jak w poniższym przykładzie.

Przykład 1

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 3x - 5$ przez dwumian $x - 4$.

Wielomian w zapisujemy w postaci $w(x) = p(x)(x-4) + r$. Dla $x = 4$:

$$w(4) = p(4)(4-4) + r = 0 + r = r$$

Obliczamy resztę z dzielenia wielomianu w przez $x - 4$:

$$r = w(4) = \tfrac{1}{8} \cdot 4^3 + 4^2 - 3 \cdot 4 - 5 = 8 + 16 - 12 - 5 = 7$$

Twierdzenie o reszcie

> Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to $r = w(a)$.

D Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o reszcie, korzystając z tego, że wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)(x-a) + r$.

Przykład 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ przez dwumian $x + 2$, nie wykonując dzielenia.

$$r = w(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 5 = -16 + 12 + 2 + 5 = 3$$

Ćwiczenie 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q, nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$, $q(x) = x - 3$

b) $w(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

c) $w(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$, $q(x) = x + 1$

d) $w(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x + 6$, $q(x) = x + 2$

Rozważmy przypadek, gdy reszta r z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x-a$ jest równa zeru ($r \equiv 0$), czyli gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$.

Twierdzenie Bézouta

> Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$.

Zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy" w twierdzeniu Bézouta [czyt. bezu] oznacza, że jednocześnie prawdziwe są dwa zdania:
Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w, to wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$.
Jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w.

Dowód
Załóżmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w, czyli $w(a)=0$. Jeśli podzielimy wielomian w przez dwumian $x-a$, to otrzymamy wielomian p i resztę r:

$$w(x) = p(x)(x-a) + r$$

Podstawiamy $x=a$:

$$w(a) = p(a)(a-a) + r = r$$

Ale $w(a)=0$, więc $r=0$, co oznacza, że wielomian w jest podzielny przez $x-a$.

Załóżmy teraz, że wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-a$, czyli istnieje taki wielomian p, że $w(x)=p(x)(x-a)$. Wówczas $w(a)=p(a)(a-a)=0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu w.

Przykład 3

Który z wielomianów: $w(x)=x^3+2x^2-3x-10$ czy $u(x)=x^3-5x^2+2x-6$ jest podzielny przez dwumian $x-2$?

$w(2)=2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2-10=8+8-6-10=0$, zatem wielomian w jest podzielny przez dwumian $x-2$.

$u(2)=2^3-5\cdot 2^2+2\cdot 2-6=8-20+4-6=-14\neq 0$, zatem wielomian u nie jest podzielny przez dwumian $x-2$.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q.

a) $w(x)=x^4-2x^3+3x^2-3x+1,\ \ q(x)=x-1$

b) $w(x)=2x^4-3x^3+6x^2+2x-9,\ \ q(x)=x+1$

c) $w(x)=-x^4+x^3+3x^2+11,\ \ q(x)=x-3$

d) $w(x)=x^4+8x^2+2x+16,\ \ q(x)=x+2$

W pewnych przypadkach znajomość jednego z pierwiastków wielomianu umożliwia znalezienie pozostałych pierwiastków.

Przykład 4

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu w, więc na podstawie twierdzenia Bézouta wielomian ten można przedstawić w postaci:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = p(x)(x - 2)$$

Aby wyznaczyć wielomian p, wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ \quad -2x^2 + x + 6 \\ \quad \underline{2x^2 - 4x} \\ \quad\quad -3x + 6 \\ \quad\quad \underline{3x - 6} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Zatem $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3)(x - 2)$.
Pozostałymi pierwiastkami wielomianu w są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x - 3$. Są to liczby -1 i 3.

Ćwiczenie 4

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki i rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, $a = -4$

b) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, $a = 1$

c) $w(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$, $a = -2$

d) $w(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$, $a = 3$

Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia w, to pozostałe pierwiastki tego wielomianu (jeżeli istnieją) możemy wyznaczyć w następujący sposób:
1. Dzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$.
2. Otrzymujemy trójmian kwadratowy, którego pierwiastki (jeżeli istnieją) są pozostałymi pierwiastkami wielomianu w. Wyznaczamy te pierwiastki.

Zadania

1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q, nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = -3x^3 + 11x^2 + 8x - 6$, $q(x) = x + 1$

b) $w(x) = -2x^4 + 10x^2 + x - 8$, $q(x) = x - 2$

c) $w(x) = 8x^3 + 4x^2 + 4x - 4$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

2. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14$, $a = 1$

b) $w(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$, $a = -2$

c) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 20$, $a = -5$

d) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, $a = \frac{1}{2}$

e) $w(x) = x^3 - 17x + 4$, $a = 4$

3. Sprawdź, która z liczb: -1, 1 czy 2 jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $w(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$

b) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

c) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$

d) $w(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$

4. Dla jakich wartości parametru m wielomian w jest podzielny przez q?

a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + mx + 3$, $q(x) = x + 3$

b) $w(x) = -2x^3 + m^2x^2 + x - 6$, $q(x) = x - 2$

c) $w(x) = m^2x^3 + mx^2 + x + 7$, $q(x) = x + 1$

5. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u.

a) $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, $u(x) = (x - 1)(x + 3)$

b) $w(x) = 7x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, $u(x) = 2x^2 + x - 1$

c) $w(x) = 4x^4 + x^3 - 19x^2 - 4x + 12$, $u(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$

Powtórzenie

6. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = 8x^4 - 4x^3 + 6x$ przez dwumian q.

a) $q(x) = x - 1$ b) $q(x) = x + 1$ c) $q(x) = x + 2$ d) $q(x) = x + \frac{1}{2}$

7. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 2x^3 + 6x^2 - 9x - 4$, $a = -4$

b) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $a = \frac{1}{2}$

c) $w(x) = 6x^3 - 19x^2 + x + 6$, $a = 3$

d) $w(x) = 4x^3 + 16x^2 + 9x - 9$, $a = -3$

e) $w(x) = 4x^3 + 5x^2 - 7x - 2$, $a = -\frac{1}{4}$

2.10. Pierwiastki całkowite wielomianu

Aby znaleźć pierwiastki całkowite równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_0 \neq 0)$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Dowód

Załóżmy, że $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$, $a_0 \neq 0$ oraz liczba całkowita x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_n x^n + a_{n\ 1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Wówczas:

$$a_n x_1^n + a_{n\ 1}x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

$$a_0 = -a_n x_1^n - a_{n-1}x_1^{n-1} - \ldots - a_1 x_1 = x_1(-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1}x_1^{n-2} - \ldots - a_1)$$

Liczba $-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1}x_1^{n-2} - \ldots - a_1$ jest całkowita, więc x_1 jest dzielnikiem a_0.

Przykład 1

Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Zgodnie z twierdzeniem, pierwiastków całkowitych wielomianu w szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego $a_0 = 3$, czyli wśród liczb: 1, -1, 3 i -3.

$w(1) = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$ — Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu w.

$w(-1) = -2 + 3 + 8 + 3 \neq 0$ — Liczba -1 nie jest pierwiastkiem wielomianu w.

$w(3) = 54 + 27 - 24 + 3 \neq 0$ — Liczba 3 nie jest pierwiastkiem wielomianu w.

$w(-3) = -54 + 27 + 24 + 3 = 0$ — Liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu w.

Zatem jedynymi pierwiastkami całkowitymi wielomianu w są liczby 1 i -3.

Uwaga. Wielomian w z przykładu 1. ma jeszcze jeden pierwiastek, ale nie jest on całkowity jest nim liczba $\frac{1}{2}$. Sprawdzenie:

$$w\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 8 \cdot \tfrac{1}{2} + 3 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} - 4 + 3 = 0$$

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie dzielniki całkowite wyrazu wolnego wielomianu w i sprawdź, które z nich są jego pierwiastkami.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

b) $w(x) = 3x^3 + 10x^2 - 9x - 4$

c) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $w(x) = x^4 - 7x^2 + 10$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $5x^3 - 8x^2 - 5x + 2 = 0$.

Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 2$ są liczby: $1, -1, 2, -2$. Obliczamy wartości wielomianu $w(x) = 5x^3 - 8x^2 - 5x + 2$ dla tych liczb:

$$w(1) = -6 \neq 0, \quad w(-1) = -6 \neq 0, \quad w(2) = 0, \quad w(-2) = -60 \neq 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem całkowitym równania.
Wykonujemy dzielenie:

$$(5x^3 - 8x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = 5x^2 + 2x - 1$$

i wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $5x^2 + 2x - 1$:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{6}}{5}$$

które są pozostałymi pierwiastkami równania.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie. Zacznij od znalezienia pierwiastka całkowitego.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

b) $3x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = 0$

d) $4x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = 0$.

Wyraz wolny $a_0 = 9$ ma następujące dzielniki: $1, -1, 3, -3, 9, -9$. Stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem całkowitym tego równania. Zatem wielomian $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9$ jest podzielny przez $x - 1$:

$$(x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$$

Otrzymany wielomian rozkładamy na czynniki, grupując wyrazy:

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = x^2(x + 3) - 3(x + 3) = (x^2 - 3)(x + 3) =$$
$$= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3)$$

Stąd:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3)$$

a zatem rozwiązaniami równania są liczby: -3, $-\sqrt{3}$, 1 i $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 20x + 15 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0$

c) $2x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$

d) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0$

e) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

f) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 12x + 4 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$

b) $x^3 - 7x - 6 = 0$

c) $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$

d) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 0$

e) $3x^3 + 11x^2 - 3x + 4 = 0$

f) $5x^2 - 2x = 1 - 6x^3$

g) $x^3 - 6 = 4x^2 - 5x$

h) $-3x^3 + 15x^2 - 20x + 6 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x = 0$

b) $x^4 + x^2 - 6x + 4 = 0$

c) $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$

d) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$

e) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = 0$

f) $4x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 6x + 1 = 0$

3. Wyznacz pierwiastki wielomianu w i rozłóż go na czynniki.

a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1$

b) $w(x) = x^3 + 3x^2 - x - 6$

c) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

d) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

4. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2} = 0$

b) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{9}x^2 - \frac{7}{9}x + \frac{1}{3} = 0$

c) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$

d) $0{,}4x^3 - x^2 + 0{,}2x + 0{,}4 = 0$

e) $0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 3{,}5x - 1 = 0$

f) $0{,}5x^3 - 2{,}75x^2 + 2{,}5x + 2 = 0$

5. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości $x + 1$, $x + 2$ i $3x - 4$, jeśli jego objętość jest równa 24.

Powtórzenie

6. Wypisz wszystkie dzielniki całkowite wyrazu wolnego wielomianu w oraz sprawdź, które z nich są pierwiastkami tego wielomianu.

a) $w(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

b) $w(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

c) $w(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x - 3$

d) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 14x - 8$

7. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + x^2 - 3 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$

c) $x^3 + 6x^2 = -6x - 5$

d) $3x^3 - x = 12 - 10x^2$

8. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0$

b) $x^4 - x^3 - 2x - 4 = 0$

c) $x^4 + x^3 - 4x^2 = 3 - 5x$

d) $x^4 + x + 6 = x^3 + 7x^2$

Warto wiedzieć

Pierwiastki wymierne wielomianu

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0)$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny $x = \frac{p}{q}$ oraz p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Przykład

Rozwiąż równanie $2x^3 + 3x^2 + 7x + 3 = 0$.

Wypisujemy dzielniki wyrazu wolnego: 1, -1, 3, -3. Żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 3$ (sprawdź), zatem nie ma on pierwiastków całkowitych. Zgodnie z twierdzeniem pierwiastkami wymiernymi wielomianu w mogą być jedynie liczby: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$.
Zauważmy, że $w(\frac{1}{2}) > 0$, obliczamy więc wartość dla $-\frac{1}{2}$:

$$w(-\tfrac{1}{2}) = 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) + 3 = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{7}{2} + 3 = 0$$

Zatem $-\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu w. Wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{l} (2x^3 + 3x^2 + 7x + 3) : (x + \frac{1}{2}) = 2x^2 + 2x + 6 \\ \underline{-2x^3 - x^2 \qquad\qquad\quad} \\ \qquad 2x^2 + 7x + 3 \\ \qquad \underline{-2x^2 - x \qquad\quad} \\ \qquad\qquad 6x + 3 \\ \qquad\qquad \underline{-6x - 3} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Równanie $2x^3 + 3x^2 + 7x + 3 = 0$ jest równoważne równaniu:

$$(x + \tfrac{1}{2})(2x^2 + 2x + 6) = 0$$

Trójmian $2x^2 + 2x + 6$ nie ma pierwiastków ($\Delta < 0$), więc jedynym rozwiązaniem równania jest liczba $-\frac{1}{2}$.

1. Współczynniki wielomianu w są liczbami całkowitymi. Które z podanych liczb nie mogą być pierwiastkami wielomianu w?

a) $-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$; $\quad w(x) = -4x^6 + \ldots - 1$

b) $-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$; $\quad w(x) = 2x^5 + \ldots + 3$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

b) $2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

c) $2x^3 + 9x^2 + x - 3 = 0$

d) $9x^4 + 9x^3 + 11x^2 + 9x + 2 = 0$

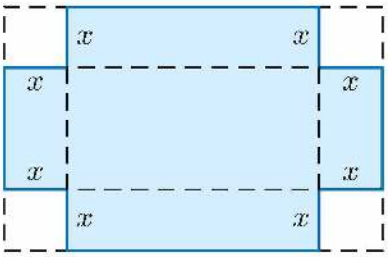
2.11. Wielomiany – zastosowania

Ćwiczenie 1

Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 5 cm, 6 cm i 8 cm. Każdą jego krawędź zwiększono o x cm. Wyznacz x, jeśli wiadomo, że objętość prostopadłościanu wzrosła o 320 cm^3.

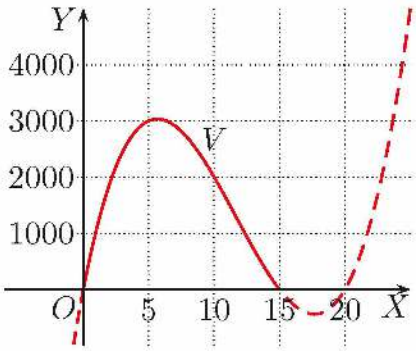
Ćwiczenie 2

Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach 30 cm na 40 cm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach długości x cm, a następnie pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko.



a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V. Na podstawie tego wykresu podaj przybliżone wymiary pudełka o największej objętości.



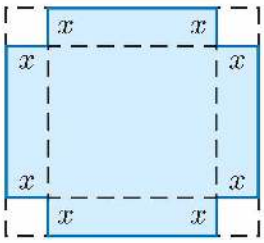
c) Sprawdź, czy spełniona jest nierówność:

$$V(10) > V(2{,}5)$$

Ćwiczenie 3

Z kwadratowego arkusza kartonu o boku 12 dm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach x dm, a następnie pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko.

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.

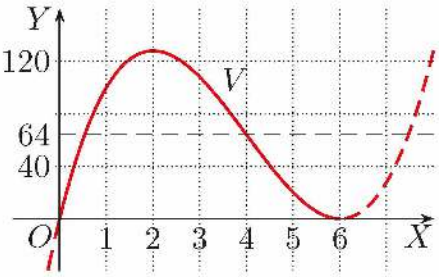


b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	1	2	3	4	5
$V(x)$	100	?	?	?	20

c) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V. Odczytaj z wykresu przybliżone rozwiązanie nierówności $V(x) \leqslant 64$ dla $x \in (0;6)$.

d) Rozwiąż równanie $V(x) = 64$ dla $x \in (0;6)$.

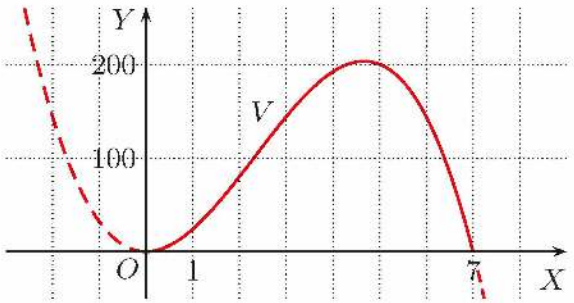


Zadania

1. Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość prostopadłościennego klocka o wymiarach $2x$ cm $\times$ $2x$ cm $\times$ $(7-x)$ cm. Określ dziedzinę tej funkcji. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$V(x)$	?	?	?	?	?

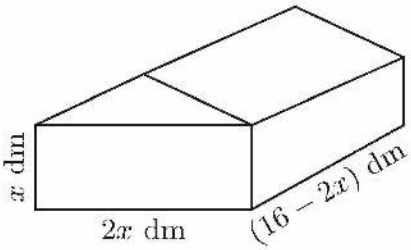
Oblicz pole powierzchni całkowitej tego klocka, jeśli wiadomo, że jego objętość jest równa 0,2 dm^3.



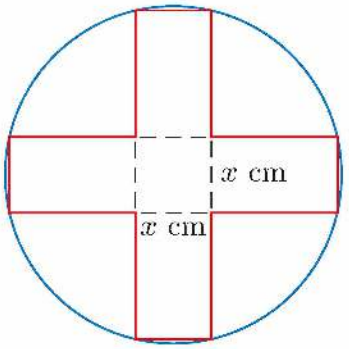
2. Domek dla lalek jest graniastosłupem prostym (rysunek obok). Wysokość domku w najwyższym punkcie jest równa 5 dm.

a) Wyraź objętość domku V jako funkcję zmiennej x. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakiej wartości x objętość domku jest równa 240 dm^3?



3. Z tekturowego koła wycięto figurę w kształcie takim, jak pokazano na rysunku obok, i sklejono z niej otwarte prostopadłościenne pudełko. Podstawa pudełka jest kwadratem o boku x cm, a wysokość pudełka jest równa $(2x-1)$ cm. Oblicz pole koła, jeśli objętość pudełka jest równa 162 cm^3.



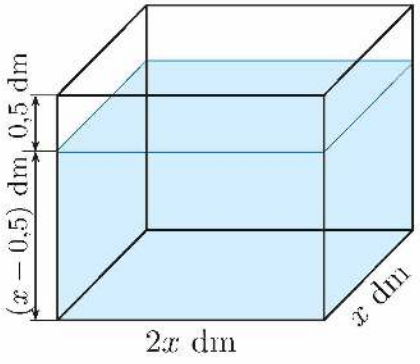
Powtórzenie

4. W prostopadłościanie, którego podstawą jest kwadrat o boku x dm, suma długości wszystkich krawędzi jest równa 40 dm.

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość tego prostopadłościanu. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakich wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 36 dm^3?

5. Do akwarium (rysunek obok) wlano wodę do wysokości $(x-0{,}5)$ dm. Podaj wymiary akwarium (pomiń grubość szkła), jeśli wiadomo, że wlano do niego 112 l wody.



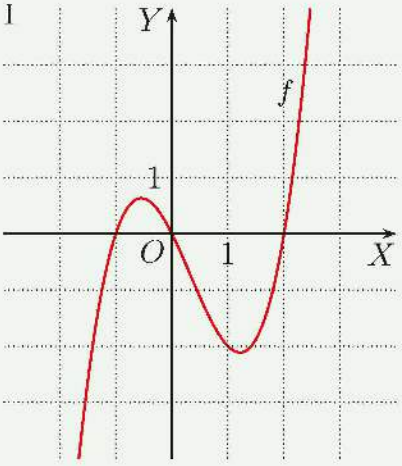
2.12. Zagadnienia uzupełniające

Wykres wielomianu

Wykresem wielomianu stopnia pierwszego jest prosta, a wykresem wielomianu stopnia drugiego jest parabola. Dokładne narysowanie wykresu wielomianu wyższego stopnia, bez korzystania z kalkulatora graficznego lub komputera, zazwyczaj bywa bardzo pracochłonne.

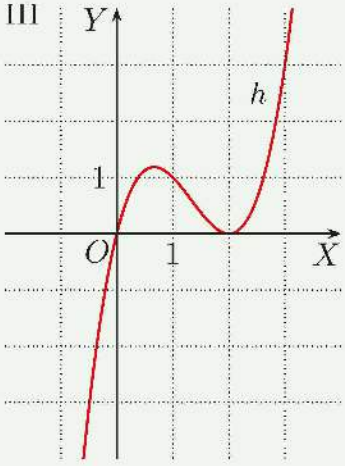
Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów trzeciego stopnia.

I



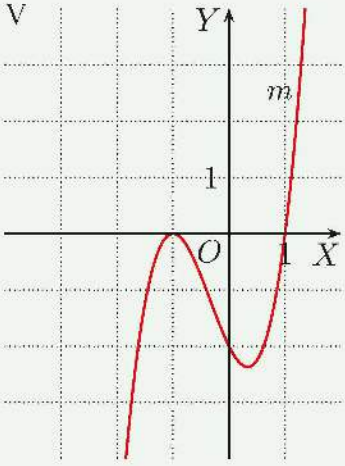
$f(x) = x(x+1)(x-2)$

III



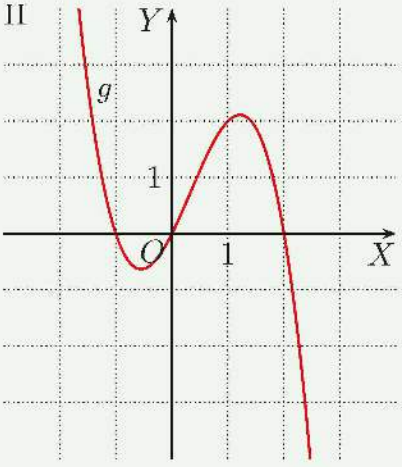
$h(x) = x(x-2)^2$

V



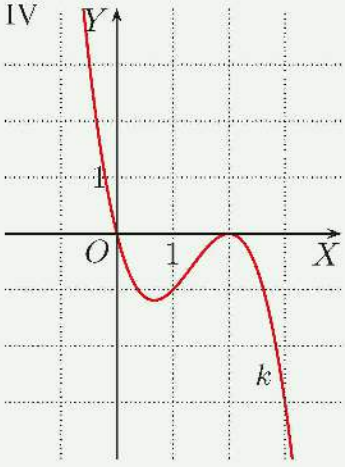
$m(x) = 2(x+1)^2(x-1)$

II



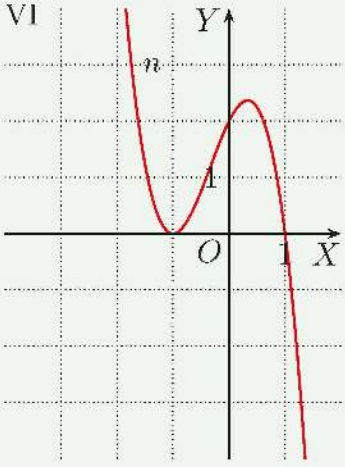
$g(x) = -x(x+1)(x-2)$

IV



$k(x) = -x(x-2)^2$

VI



$n(x) = -2(x+1)^2(x-1)$

1. Dla każdego z przedstawionych powyżej wielomianów podaj:

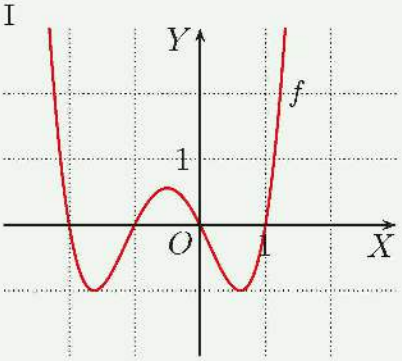
a) jego miejsca zerowe,

b) zbiór argumentów, dla których przyjmuje on wartości dodatnie,

c) zbiór argumentów, dla których przyjmuje on wartości nieujemne.

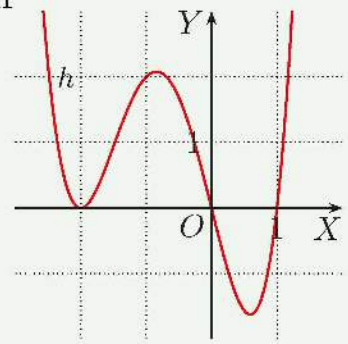
Poniżej przedstawiono kilka wykresów wielomianów czwartego stopnia.

I



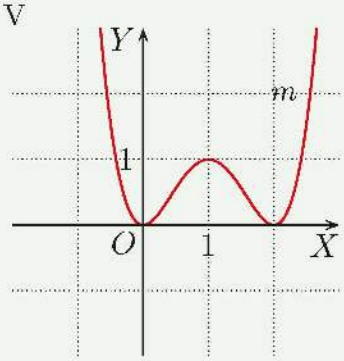
$f(x) = x(x+2)(x+1)(x-1)$

III



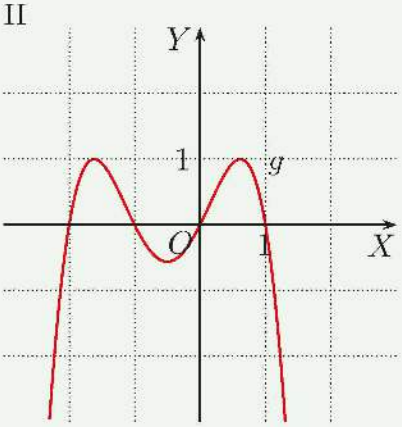
$h(x) = x(x-1)(x+2)^2$

V



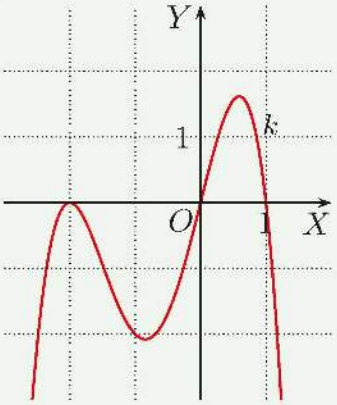
$m(x) = x^2(x-2)^2$

II



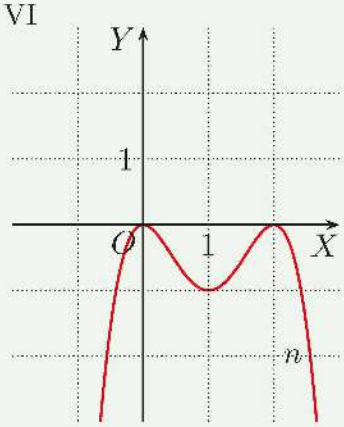
$g(x) = -x(x+2)(x+1)(x-1)$

IV



$k(x) = -x(x-1)(x+2)^2$

VI

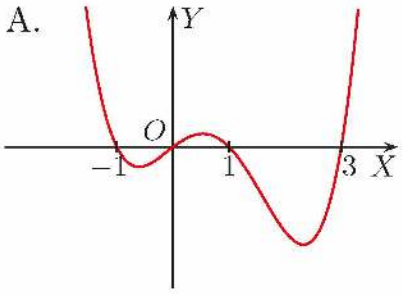


$n(x) = -x^2(x-2)^2$

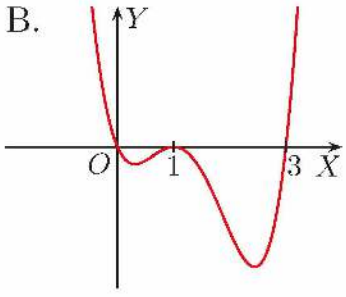
2. Podaj dla każdego z przedstawionych powyżej wielomianów miejsca zerowe oraz zbiór argumentów, dla których wielomian ten przyjmuje wartości nieujemne.

3. Poniżej przedstawiono szkice wykresów wielomianów: f, g i h.

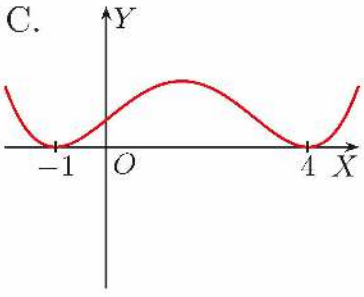
A.



B.



C.



Dobierz szkic wykresu do każdego z podanych niżej wielomianów.

$$f(x) = x(x-1)^2(x-3),$$
$$g(x) = (x+1)^2(x-4)^2,$$
$$h(x) = x(x+1)(x-1)(x-3)$$

Schemat (algorytm) Hornera

Schemat Hornera (William Horner – angielski matematyk, żył w latach 1786–1837) pozwala na zmniejszenie liczby wykonywanych operacji mnożenia podczas obliczania wartości wielomianu dla danego argumentu.

Rozpatrzmy wielomian:

$$w(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$$
$$= a_3 \cdot x \cdot x \cdot x + a_2 \cdot x \cdot x + a_1 \cdot x + a_0$$

Aby obliczyć wartość tego wielomianu dla danego argumentu, należy wykonać sześć działań mnożenia i trzy dodawania.

Zauważmy, że:

$$w(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$$
$$= (a_3x^2 + a_2x + a_1) \cdot x + a_0 =$$
$$= ((a_3 \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

Korzystając z otrzymanej postaci wielomianu w, możemy obliczyć jego wartość dla argumentu $x = a$, wykonując trzy działania mnożenia i trzy dodawania.

Jeśli wprowadzimy oznaczenia:

$$w(a) = ((\underbrace{\underbrace{a_3}_{b_3} \cdot a + a_2}_{b_2} \cdot a + a_1)_{b_1} \cdot a + a_0)_{b_0}$$

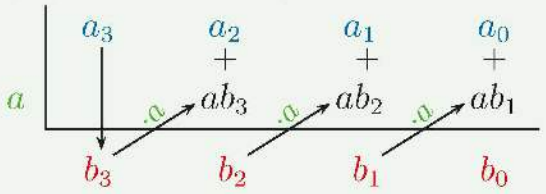
$b_3 = a_3$

$b_2 = ab_3 + a_2$

$b_1 = ab_2 + a_1$

$b_0 = ab_1 + a_0 = w(a)$

to obliczenia możemy przedstawić w postaci schematu:



Przykład 1

Dany jest wielomian $w(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 20$. Korzystając ze schematu Hornera, oblicz $w(2)$.

$b_3 = 4$

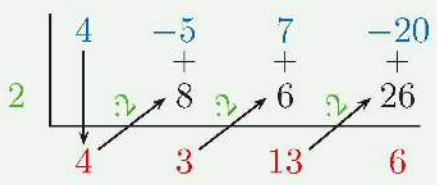
$b_2 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$

$b_1 = 2 \cdot 3 + 7 = 13$

$b_0 = 2 \cdot 13 - 20 = 6$

Zatem $w(2) = 6$.

Zapis w postaci schematu:



4. Oblicz wartość wielomianu w dla argumentu a. Skorzystaj ze schematu Hornera.

a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 7, \ \ a = 3$

b) $w(x) = 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 + x - 1, \ \ a = 2$

Schemat Hornera możemy również wykorzystać do wyznaczenia ilorazu i reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$.

Rozpatrzmy wielomian $w(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zgodnie z przyjętymi poprzednio oznaczeniami mamy:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= b_3x^3 + (b_2 - ab_3)x^2 + (b_1 - ab_2)x + b_0 - ab_1 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)x - (b_3x^2 + b_2x + b_1)a + b_0 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)(x - a) + b_0 \end{aligned}$$

Zatem $b_3x^2 + b_2x + b_1$ jest ilorazem, a b_0 resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$.

Przykład 2

Wyznacz iloraz p i resztę r z dzielenia wielomianu $w(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 3$ przez dwumian $x - 2$. Wielomian w zapisz w postaci $w(x) = p(x)(x - 2) + r$.

Sporządzamy schemat:

	5	−7	3	−3
		+	+	+
2	?	10	? 6	? 18
	5	3	9	15

Ze schematu odczytujemy iloraz $p(x) = 5x^2 + 3x + 9$ i resztę $r = 15$. Zatem $w(x) = (5x^2 + 3x + 9)(x - 2) + 15$.

5. Wykonaj w sposób tradycyjny dzielenie $(3x^4 - 10x^3 - 29x + 2) : (x - 4)$. Porównaj zapis tego dzielenia z podanym niżej zapisem dzielenia wykorzystującym schemat Hornera.

	3	−10	0	−29	2
4		12	8	32	12
	3	2	8	3	14

Zwróć uwagę na współczynnik 0 przy x^2.

6. Wykonaj dzielenie wielomianów, korzystając ze schematu Hornera.

a) $(6x^3 - 3x^2 - 10x + 9) : (x - 3)$

b) $(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) : (x + 2)$

c) $(x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 8) : (x - 2)$

d) $(x^4 - 5x^2 - x - 2) : (x + 2)$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Dane są wielomiany $w(x) = x^3 - 1$ i $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Wyznacz wielomian u i podaj jego stopień.

a) $u(x) = 2w(x) + (1 - x)p(x)$

b) $u(x) = [w(x)]^2 - \frac{x^4}{2} \cdot p(x)$

2. Wykonaj działania, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $(x + 2)^3 + (x + 2)^2$

b) $\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$

c) $(3x + 2)^3 + (3x - 2)^3$

d) $(x^2 - 2x)^3 - (x^2 + 2x)^3$

3. Podaj sumę współczynników wielomianu u.

a) $u(x) = (2x^2 - 1)^2 - (2x - 1)^2$

b) $u(x) = (x^2 + 8)(\sqrt{8} - x)(x + 2\sqrt{2})$

c) $u(x) = (x - 2)^3 - (x - 2)^2$

d) $u(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

4. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 3x^4 - 3x^2$

b) $w(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x$

c) $w(x) = x^6 + 7x^5 + 6x^4$

d) $w(x) = 5x^5 - 10x^3 + 5x$

e) $w(x) = -3x^5 + 30x^3 - 75x$

f) $w(x) = 32x^6 - 16x^4 + 2x^2$

5. Dany jest wielomian w, dla którego $w(-1) = 4$ i $w(0) = 3$. Oblicz a i b.

a) $w(x) = x^3 + (a - b)x^2 - 4x + \frac{b}{2}$

b) $w(x) = -ax^3 + 3x^2 + a - 6b$

6. Rozwiąż równanie.

a) $5x^2 + 2x^4 + x^3 = 0$

b) $-2x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

c) $x^5 - 7x^4 + 12x^3 = 0$

d) $20x^6 + x^5 = x^4$

c) $4x^5 + x^3 = 4x^4$

f) $x^4 = 2x^6 + x^5$

7. Zbiór A jest zbiorem miejsc zerowych wielomianu u, zbiór B – zbiorem miejsc zerowych wielomianu v, zbiór C – zbiorem miejsc zerowych wielomianu w. Wyznacz zbiór $(A \cup B) \setminus C$.

a) $u(x) = x^3 - x^2$, $v(x) = x^3 + 2x^2$, $w(x) = x^3 - 4x$

b) $u(x) = x^4 - 3x^2$, $v(x) = x^4 + 9x^2$, $w(x) = \frac{1}{3}x^4 + 9x^3$

8. Rozłóż wielomian w na czynniki i podaj jego pierwiastki.

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

b) $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$

c) $w(x) = 5x^3 + x^2 - 15x - 3$

d) $w(x) = 125x^3 - 27$

c) $w(x) = 27x^4 + \frac{1}{8}x$

f) $w(x) = -14x^3 + 7x$

9. Rozwiąż równanie. Ile pierwiastków tego równania należy do przedziału $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$?

a) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$

c) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

e) $81x^3 - 9x^2 - 9x + 1 = 0$

f) $x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$

g) $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$

h) $4x^5 - x^3 - 4x^2 + 1 = 0$

10. Dla jakich wartości m liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w?

a) $w(x) = x^3 + (2m - 1)x^2 - 3x + 7, \ a = 2$

b) $w(x) = -x^3 + mx^2 - mx + 5, \ a = 3$

c) $w(x) = x^3 + 3x^2 + (m^2 - 2m)x + 2, \ a = -2$

11. Rozłóż wielomiany u i v na czynniki, grupując wyrazy. Ile różnych pierwiastków ma wielomian $u \cdot v$?

a) $u(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12, \ v(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

b) $u(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18, \ v(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

c) $u(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2, \ v(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

Zestaw II

1. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$.

a) $w(x) = x^3 + x + 1, \ a = 3$

b) $w(x) = x^4 + x^2 + 1, \ a = -\frac{1}{2}$

2. Przedstaw wielomian w w postaci $w(x) = (x + 2)p(x) + r(x)$.

a) $w(x) = x^3 + 2x + 5$

b) $w(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

c) $w(x) = 4x^4 + 8x^3 - x^2 - 2x$

d) $w(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

3. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24, \ a = -2$

b) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 4, \ a = 4$

c) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1, \ a = \frac{1}{2}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 - 5x - 14 = 0$

c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 3x - 9 = 0$

e) $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$

f) $15x^3 + 8x^2 - 9x - 2 = 0$

g) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

h) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10 = 0$

5. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 5x = 6x^2 - 6$

b) $3x^3 - 3 = 7x^2 - 7x$

c) $(x^2 - 1)(x + 3) = x - 1$

d) $x^4 + 2x^3 - x^2 = 6 - 4x$

e) $x^4 + x^3 + x^2 = x + 2$

f) $-5x(x^2 - x - 1) = 6 - x^4$

6. Dla jakich wartości parametru a wielomian w jest podzielny przez dwumian q?

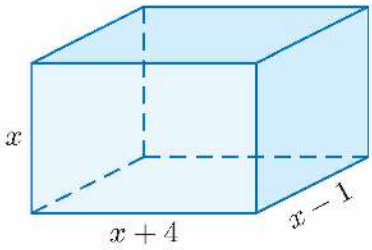
a) $w(x) = (a + 1)x^3 - x + a^3$, $q(x) = x - 1$

b) $w(x) = x^3 - 6x - 3a$, $q(x) = x - a$

7. Wyznacz wartość parametru a, dla której reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^3 + ax - 3$ przez dwumian:

a) $x - 1$ jest równa 4, b) $x + 2$ jest równa 5.

8. Podaj wzór funkcji opisującej objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Dla jakiej wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 12?



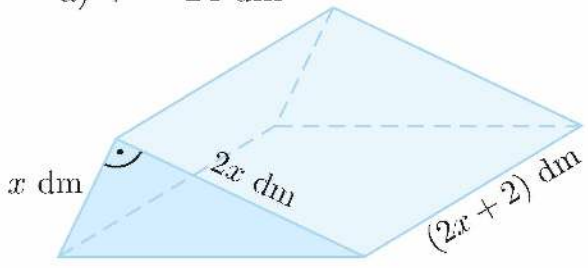
D **9.** Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x cm, $(x - 3)$ cm, $(x + 5)$ cm i objętości 30 cm^3. Uzasadnij, że suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest mniejsza od 56 cm.

10. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x m, $(x + 1)$ m, $(4x - 3)$ m i objętości 0,75 m^3. Która ściana tego prostopadłościanu ma najmniejsze pole? Oblicz to pole.

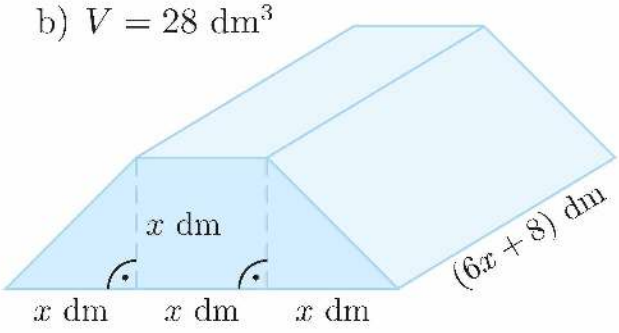
11. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $(2x - 3)$ dm, a jego wysokość jest równa $(x - \frac{1}{2})$ dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeśli ma on objętość $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ dm^3.

12. Drewniana belka ma kształt graniastosłupa (rysunek poniżej), którego objętość jest równa V. Oblicz długość najdłuższej krawędzi tej belki.

a) $V = 24$ dm^3



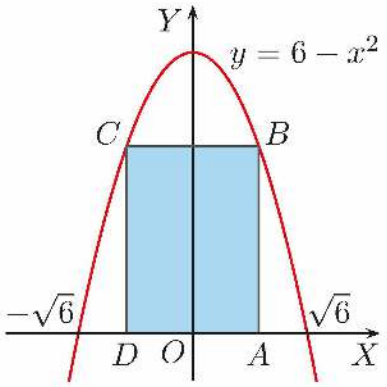
b) $V = 28$ dm^3



Sposób na zadanie

Przykład

Dwa wierzchołki prostokąta $ABCD$ o polu równym 8 leżą na osi OX, a dwa pozostałe – nad osią OX i należą do paraboli o równaniu $y = 6-x^2$. Wierzchołki te mają współrzędne: $A(t, 0)$, $B(t, 6-t^2)$, $C(-t, 6-t^2)$, $D(-t, 0)$ dla pewnego $t \in (0; \sqrt{6})$ (rysunek obok). Oblicz obwód tego prostokąta.



Zauważmy, że $|AD| = 2t$ oraz $|AB| = 6 - t^2$.
Zatem pole prostokąta:

$$P = |AD| \cdot |AB| = 2t(6 - t^2) = 12t - 2t^3$$

Pole prostokąta jest równe 8, więc rozwiązujemy równanie:

$$-2t^3 + 12t = 8$$
$$-2t^3 + 12t - 8 = 0 \ /:(-2)$$
$$t^3 - 6t + 4 = 0$$

Pierwiastków całkowitych tego równania szukamy wśród całkowitych dzielników liczby 4. Takim pierwiastkiem jest liczba 2, gdyż:

$$2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

Wielomian $w(t) = t^3 - 6t + 4$ dzielimy przez dwumian $t - 2$:

$$\begin{array}{r} (t^3 + 0t^2 - 6t + 4) : (t - 2) = t^2 + 2t - 2 \\ \underline{-t^3 + 2t^2} \\ 2t^2 - 6t + 4 \\ \underline{-2t^2 + 4t} \\ -2t + 4 \\ \underline{2t - 4} \\ 0 \end{array}$$

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $t^2 + 2t - 2$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-2) = 12, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$t_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \notin (0; \sqrt{6})$$
$$t_2 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3} \in (0; \sqrt{6})$$

Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 8, gdy $t = 2$ lub $t = \sqrt{3} - 1$.

Jeśli $t = 2$, to $|AD| = 4$ oraz $|AB| = 6 - 2^2 = 2$. Obwód prostokąta jest wówczas równy 12.

Jeśli $t = \sqrt{3} - 1$, to $|AD| = 2\sqrt{3} - 2$ oraz $|AB| = 6 - (\sqrt{3} - 1)^2 = 2 + 2\sqrt{3}$. Obwód prostokąta jest wówczas równy $8\sqrt{3}$.

Odpowiedź: Obwód prostokąta jest równy 12 lub $8\sqrt{3}$.

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Wielomian $w(x) = -2x^4+ax^2+2x-4$ spełnia warunek $w(\sqrt{2}) = -w(-\sqrt{2})$. Wynika stąd, że:

A. $a = 6$, **B.** $a = 4$, **C.** $a = 2$, **D.** $a = -2$.

2. Dany jest wielomian $w(x) = (2-x)^3 \cdot \left(\sqrt{2}x-1\right)^3$. Współczynnik przy najwyższej potędze tego wielomianu jest równy:

A. $-8\sqrt{2}$, **B.** $-2\sqrt{2}$, **C.** $2\sqrt{2}$, **D.** $8\sqrt{2}$.

3. Jeśli $w(x) = 2x^2 - 6$ i $u(x) = -x^3 + 4x + 2$, to $f(2) = 4$ dla:

A. $f(x) = w(x) + 2u(x)$,
B. $f(x) = 2w(x) - u(x)$,
C. $f(x) = w(x) \cdot u(x)$,
D. $f(x) = w(x) \cdot (u(x) + 2)$.

4. Która para punktów należy do wykresu wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 + 6$?

A. $A_1(-1,4)$, $A_2(1,4)$
B. $B_1(2,8)$, $B_2(-2,6)$
C. $C_1\left(-\frac{1}{2}, 5\frac{5}{8}\right)$, $C_2\left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{8}\right)$
D. $D_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$, $D_2\left(\frac{3}{2}, 7\frac{1}{8}\right)$

5. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: $x-4$, $x+4$, x^2-4, gdzie $x > 4$. Objętość tego prostopadłościanu jest opisana wzorem:

A. $V(x) = x^4 - 16$,
B. $V(x) = x^4 - 64$,
C. $V(x) = x^4 - 16x^2 + 16$,
D. $V(x) = x^4 - 20x^2 + 64$.

6. Reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 - 18x^2 - 3x + 32$ przez dwumian $x + \sqrt{2}$ jest równa:

A. -2, **B.** $\sqrt{2}$, **C.** 2, **D.** $3\sqrt{2}$.

7. Pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - \left(4 + 2\sqrt{3}\right)x$ jest liczba:

A. $-\sqrt{3}$, **B.** $\sqrt{3}$, **C.** $1 - \sqrt{3}$, **D.** $1 + \sqrt{3}$.

8. Liczby -3, 1 są jedynymi pierwiastkami równania:

A. $x^3 + 2x^2 = 3x$,
B. $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$,
C. $(x-1)^2(x^2+6x+9) = 0$,
D. $(x^2-1)(x+3)^2 = 0$.

9. Ile rozwiązań ma równanie $x^7 - x^3 = x^4 - 1$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

10. Iloczyn niezerowych pierwiastków równania $8x^7 + \frac{1}{2}x^3 = 4x^5$ jest równy:

A. $-\frac{1}{4}$, **B.** $-\frac{1}{2}$, **C.** 2, **D.** 4.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz wartość wielomianu $w(x) = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^4+3x^2+9)$ dla $x = \sqrt[3]{9}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Objętość sześcianu jest równa $a\sqrt{6}+b\sqrt{3}$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{Z}$. Wyznacz a i b, jeśli długość krawędzi tego sześcianu jest równa $\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 + 8x + 8 = 0$.

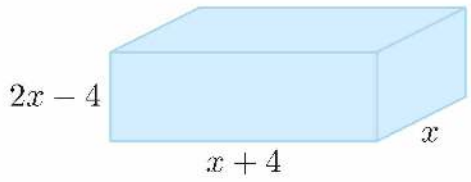
Zadanie 4 (2 pkt)

Które z liczb całkowitych o wartości bezwzględnej mniejszej od 4 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^3 + 2x^2 - 16x - 32$?

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (4 pkt)

Podaj wzór wielomianu opisującego objętość pudełka w zależności od x (rysunek obok). Jaka jest dziedzina tej funkcji? Dla jakiej wartości x objętość pudełka jest równa 32?



D **Zadanie 6 (3 pkt)**

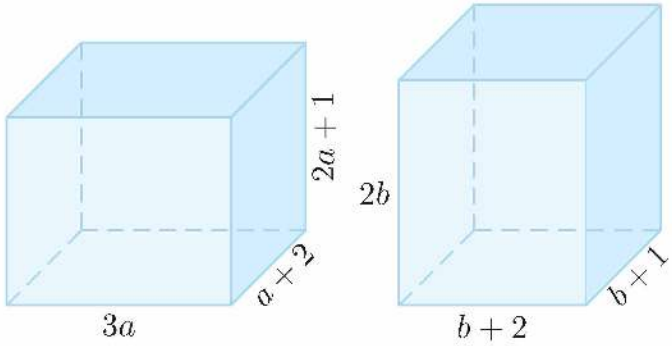
Uzasadnij, że trójmian kwadratowy, który otrzymamy w wyniku podzielenia wielomianu $w(x) = 3x^3 - 3x^2 - 16x - 6$ przez dwumian $x - 3$, nie ma pierwiastków wymiernych.

Zadanie 7 (3 pkt)

Wyznacz punkty wspólne wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x$ i $g(x) = x$.

D **Zadanie 8 (5 pkt)**

Każdy z przedstawionych obok prostopadłościanów ma objętość równą 120. Uzasadnij, że prostopadłościany te mają równe pola powierzchni całkowitych.



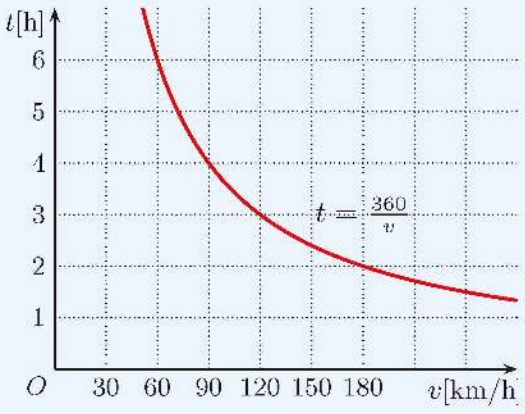
Zadanie 9 (5 pkt)

Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX, dwa pozostałe należą do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta, jeżeli jego pole jest równe 39.



3 Funkcje wymierne

Czas potrzebny na przebycie pewnej ustalonej odległości jest tym mniejszy, im większa jest prędkość, z jaką się poruszamy. Na wykresie obok przedstawiono zależność między prędkością a czasem potrzebnym na pokonanie odległości 360 km. Prędkość i czas (potrzebny do przebycia określonej drogi) to wielkości odwrotnie proporcjonalne.



Warto powtórzyć

Proporcjonalność odwrotna

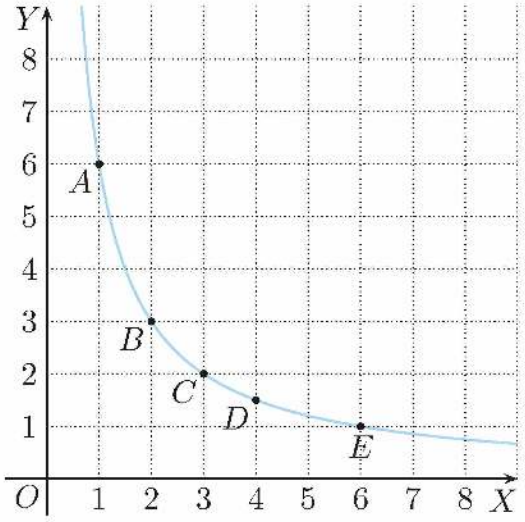
Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz a jest stałą dodatnią, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości x i y nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj współczynnik i wzór tej proporcjonalności.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	?	4	6	9	10	?
y	?	?	?	6	?	3	?	?	1

2. a) Na zakup gruszek przeznaczono 6 zł. Niech x oznacza cenę w złotych za kilogram, a y – liczbę kupionych kilogramów gruszek. Na rysunku przedstawiono wykres zależności y od x. Wpisz do tabeli współrzędne punktów B, C, D i E.

	A	B	C	D	E
x [zł]	1	?	?	?	?
y [kg]	6	?	?	?	?



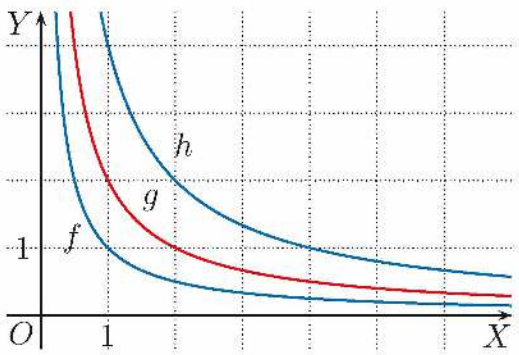
b) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Naszkicuj wykres zależności y od x, jeżeli na zakup gruszek przeznaczono 8 zł.

x [zł]	1	2	3	4	5
y [kg]	?	?	?	?	?

3. Podaj wzór proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$, do której wykresu należy punkt: a) $A(3,6)$, b) $B(\frac{1}{2},8)$, c) $C(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$, d) $D(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$.

4. Na rysunku przedstawiono wykresy proporcjonalności odwrotnych: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x}$, $h(x) = \frac{4}{x}$. Do którego z tych wykresów należy punkt:

a) $A(3, \frac{2}{3})$,
b) $B(\frac{5}{3}, \frac{3}{5})$,
c) $C(\frac{4}{3}, 3)$,
d) $D(\frac{8}{3}, \frac{3}{4})$,
e) $E(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,
f) $F(2{,}5;\ 1{,}6)$?



3.1. Wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ – jest ona określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Sporządzamy tabelę wartości funkcji f, a następnie łączymy wyznaczone punkty krzywą jak na rysunku.

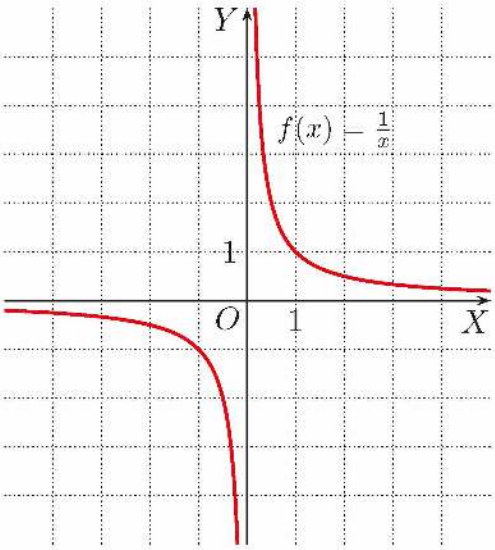
x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, oraz każdą krzywą powstałą z tego wykresu przez przesunięcie nazywamy **hiperbolą**.

Własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

- Dla $x < 0$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne, natomiast dla $x > 0$ przyjmuje wartości dodatnie.
- Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
- Funkcja f jest **malejąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$.

Uwaga. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ **nie jest** malejąca w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.



Hiperbola składa się z dwóch gałęzi.

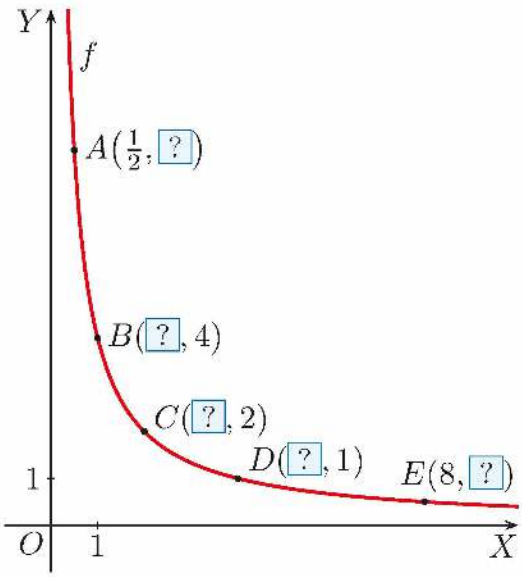
Zauważmy, że każda z gałęzi wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ „zbliża się" do prostej poziomej $y = 0$ oraz „zbliża się" do prostej pionowej $x = 0$. O takich prostych mówimy, że są **asymptotami** wykresu funkcji – odpowiednio **asymptotą poziomą** i **asymptotą pionową**.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono jedną gałąź hiperboli $f(x) = \frac{4}{x}$.

a) Podaj brakujące współrzędne punktów: A, B, C, D i E.

b) Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj obie gałęzie tej hiperboli.



Ćwiczenie 2

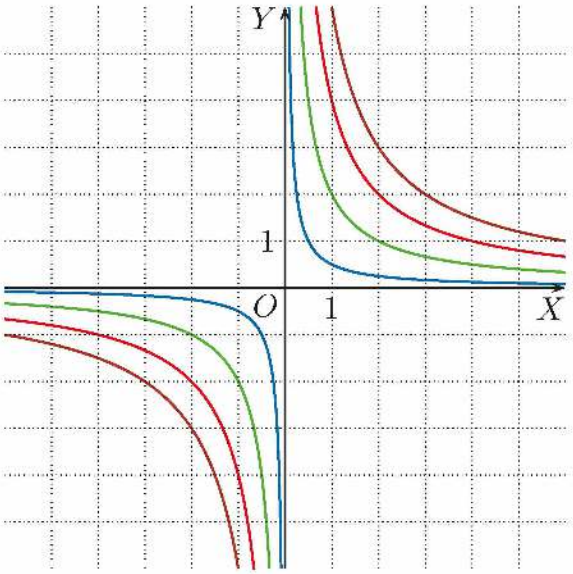
Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$

Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{2x},\ \ g(x) = \frac{2}{x},$$
$$h(x) = \frac{4}{x},\ \ k(x) = \frac{6}{x}$$

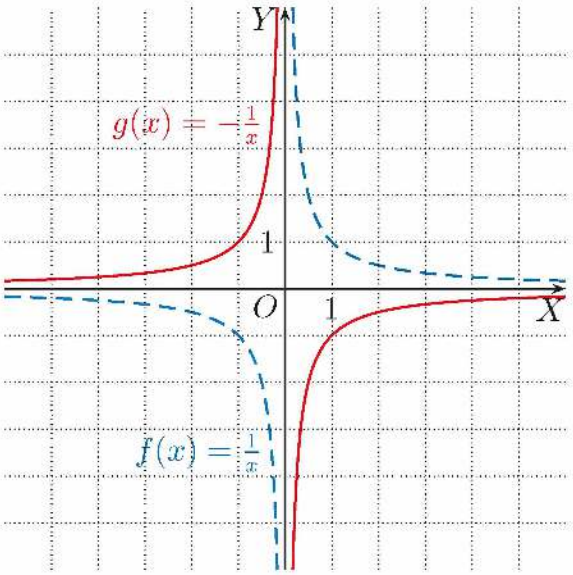


a) Podaj wartości każdej z tych funkcji dla $x = 1$.

b) Dobierz wzór do każdego wykresu.

c) Do których hiperbol należą punkty:
$A(2,3)$, $B\left(\frac{2}{3},3\right)$, $C\left(4,\frac{1}{8}\right)$,
$D\left(-4,-\frac{1}{2}\right)$, $E\left(-\frac{2}{3},-6\right)$?

Aby naszkicować wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, można sporządzić odpowiednią tabelę wartości funkcji lub odbić symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.



Własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$:

- Dla $x < 0$ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości ujemne.
- Funkcja g nie ma miejsc zerowych.
- Funkcja g jest **rosnąca w przedziałach** $(-\infty;0)$ i $(0;\infty)$, ale nie jest funkcją rosnącą w swojej dziedzinie.
- Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą, a prosta $x = 0$ asymptotą pionową wykresu funkcji g.

Ćwiczenie 4

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -\frac{2}{x}$ b) $f(x) = -\frac{3}{x}$ c) $f(x) = -\frac{4}{x}$ d) $f(x) = -\frac{0{,}5}{x}$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$, której dziedziną jest zbiór D. Podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ b) $D = (-\infty;-1)$ c) $D = \langle 2;8 \rangle$

2. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale $\langle 1;2\rangle$.

a) $f(x)=\frac{6}{x}$ b) $f(x)=-\frac{4}{x}$ c) $f(x)=\frac{1}{2x}$ d) $f(x)=-\frac{5}{x}$

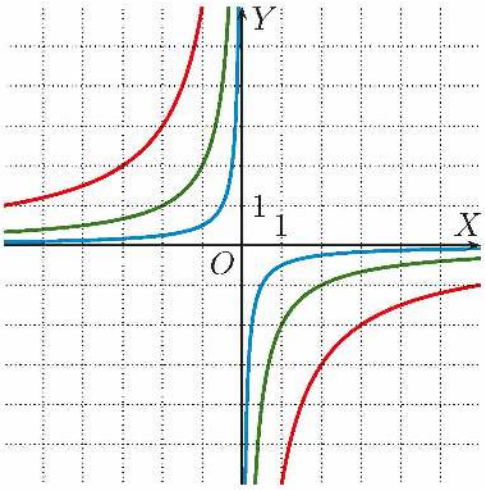
3. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

$f(x)=-\frac{6}{x}$, $g(x)=-\frac{2}{x}$, $h(x)=-\frac{1}{2x}$

a) Dobierz wzór do każdego wykresu.

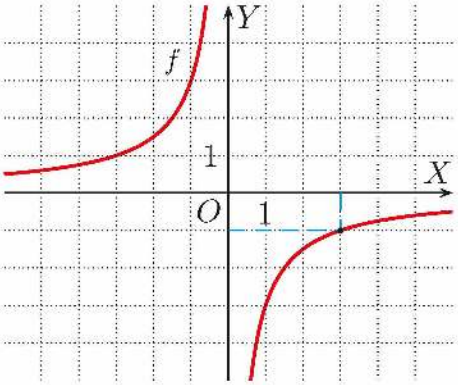
b) Które spośród punktów: $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $Q(-\frac{1}{2},4)$ i $R(3\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ należą do wykresu funkcji g?

c) Dziedziną funkcji $k(x)=-\frac{6}{x}$ jest przedział $\langle -3;-1\rangle$. Podaj zbiór wartości tej funkcji.

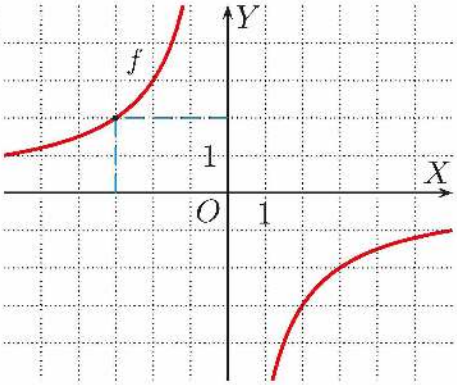


4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$. Oblicz a. Znajdź współrzędne punktu, w którym hiperbola przecina prostą $y=-3$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3.

a)



b)



Powtórzenie

5. Do wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ należy punkt P. Naszkicuj ten wykres.

a) $P\left(4,\frac{1}{2}\right)$ b) $P\left(-\frac{1}{9},-3\right)$ c) $P\left(8,-\frac{1}{2}\right)$ d) $P\left(-\frac{1}{8},16\right)$

6. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli $y=\frac{a}{x}$?

a) $P(-1,8)$ b) $P(4,-16)$ c) $P(-\frac{1}{7},2)$ d) $P(-5,-25)$

7. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $a>0$. Prosta $x=1$ przecina wykres funkcji f w punkcie P, a wykres funkcji $g(x)=-f(x)$ w punkcie Q. Wyznacz wzór funkcji f. Naszkicuj wykresy funkcji f i g.

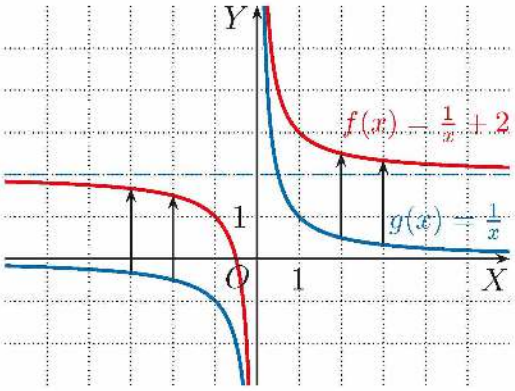
a) $|PQ|=2$ b) $|PQ|=12$ c) $|PQ|=1$

3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ wzdłuż osi OY

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{x}+2$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x)=\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w górę.

Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$. Prosta $y=2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f, a prosta $x=0$ – jego asymptotą pionową.



Twierdzenie

- Wykres funkcji $y=f(x)+q$ dla $q>0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y=f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY.
- Wykres funkcji $y=f(x)-q$ dla $q>0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y=f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY.

Ćwiczenie 1

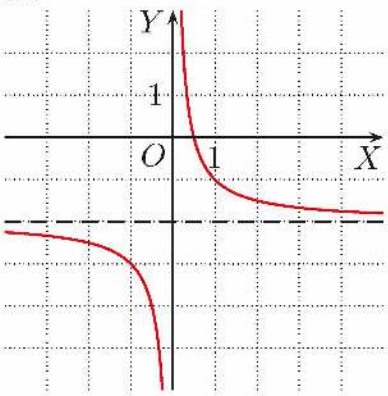
Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{x}$, a następnie, stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g. Podaj zbiór wartości funkcji g oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $g(x)=\frac{1}{x}+3$ b) $g(x)=\frac{1}{x}-1$ c) $g(x)=\frac{1}{x}-3$

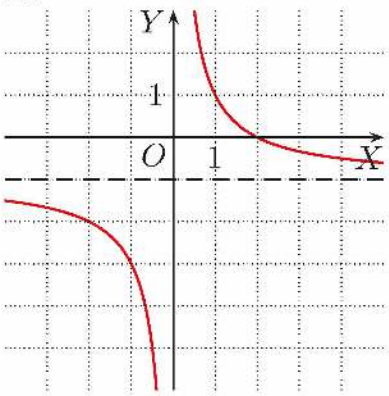
Ćwiczenie 2

Poniżej przedstawiono wykresy funkcji: $f(x)=\frac{2}{x}-2$, $g(x)=\frac{2}{x}-1$ oraz $h(x)=\frac{1}{x}-2$. Dopasuj wzór funkcji do każdego wykresu.

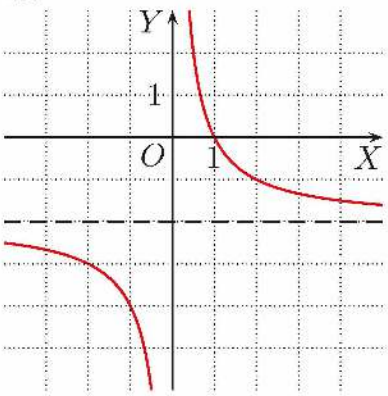
A.



B.



C.



Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = -\frac{1}{x} - 1$ c) $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$ e) $f(x) = \frac{6}{x} - 3$

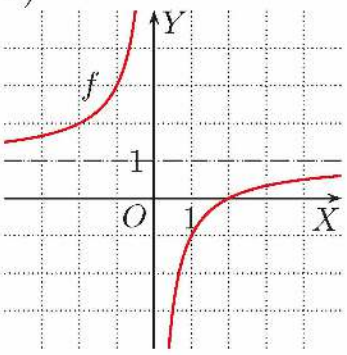
b) $f(x) = \frac{3}{x} - 2$ d) $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$ f) $f(x) = -\frac{1}{2x} + 1$

2. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Podaj wzór funkcji g, jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot, jeśli wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

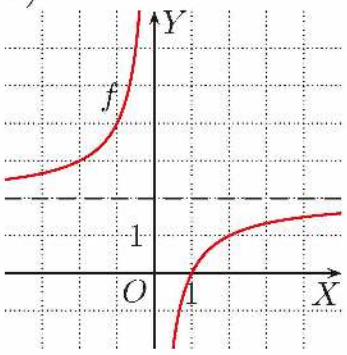
a) $f(x) = \frac{2}{x}$ o 2 jednostki w górę, b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ o 2 jednostki w dół.

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{x} + a$. Podaj wartość współczynnika a oraz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f.

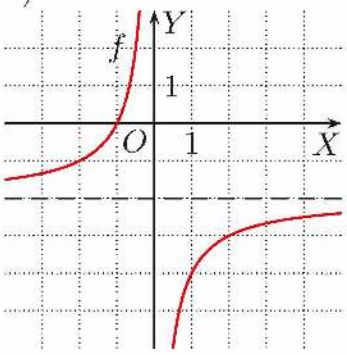
a)



b)



c)



4. Dla jakiej wartości współczynnika q punkt P należy do wykresu funkcji f?

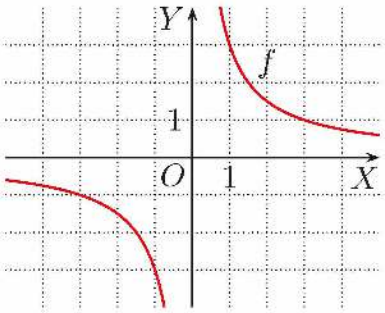
a) $f(x) = \frac{6}{x} + q$, $P(3, 1)$ c) $f(x) = -\frac{1}{3x} + q$, $P(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

b) $f(x) = -\frac{2}{x} + q$, $P(-6, -\frac{1}{2})$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{x} + q$, $P(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Powtórzenie

5. Do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{x} + q$ należy punkt P. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $P(1, 4)$ b) $P\left(2, -3\frac{1}{2}\right)$ c) $P\left(\frac{1}{4}, -1\right)$

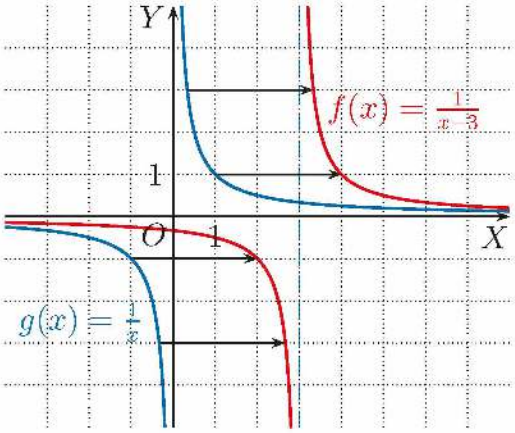


6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Wyznacz współczynnik a. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) + q$, jeśli jej miejscem zerowym jest liczba: a) 1, b) 3, c) -3.

3.3. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ wzdłuż osi OX

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$.



Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. Prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f, a prosta $y = 0$ jego asymptotą poziomą.

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX.

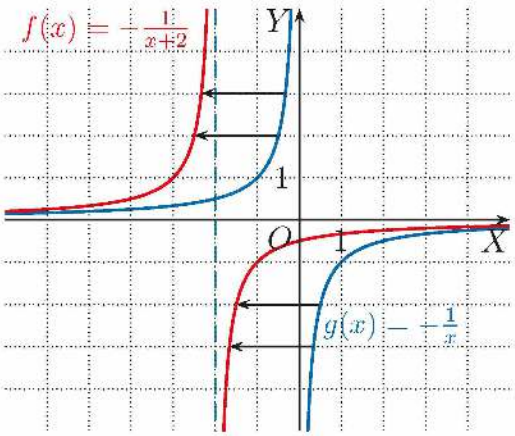
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$.



Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w lewo.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = -2$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = -\frac{2}{x+3}$ e) $f(x) = -\frac{4}{x+4}$

b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ d) $f(x) = \frac{3}{x+2}$ f) $f(x) = \frac{4}{x+4}$

Zadania

1. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Podaj wzór funkcji g, jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu, jeśli wykres ten otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ o 1 jednostkę w lewo, c) $f(x) = -\frac{2}{x}$ o 3 jednostki w prawo,

b) $f(x) = \frac{4}{x}$ o 3 jednostki w lewo, d) $f(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w prawo.

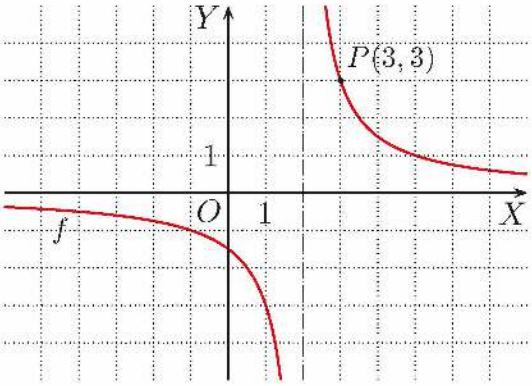
2. Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji f.

a) $f(x) = \frac{6}{x-4}$, $P(2, -4)$ c) $f(x) = \frac{3}{x-1}$, $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

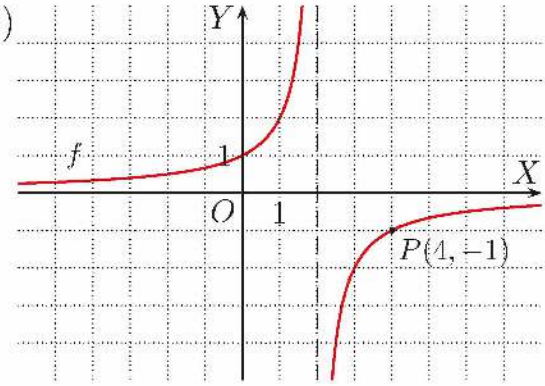
b) $f(x) = \frac{3}{x+2}$, $P\left(4, \frac{1}{2}\right)$ d) $f(x) = \frac{0{,}5}{x+4}$, $P\left(-6, -\frac{1}{4}\right)$

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-2}$ dla pewnego a. Wyznacz wzór funkcji f. Oblicz $f\left(1\frac{3}{4}\right)$ i $f(-4)$.

a)



b)



4. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Podaj równania ich asymptot.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ b) $f(x) = \frac{4}{x+1}$, $g(x) = \frac{4}{x+1} - 2$

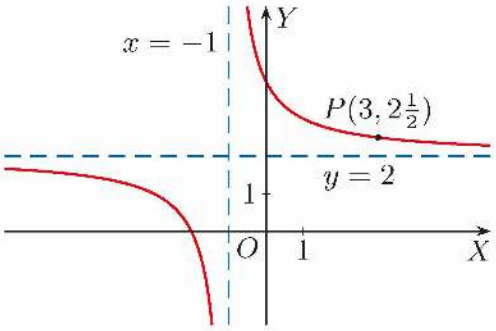
5. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$ c) $f(x) = \frac{6}{x-2} + 1$ e) $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$

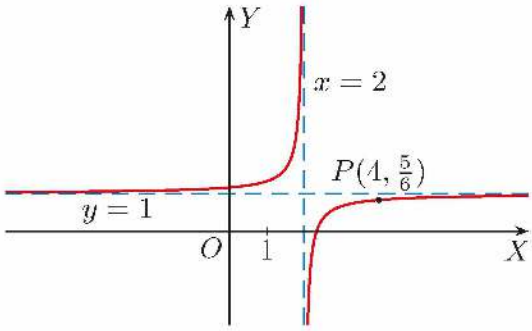
b) $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ d) $f(x) = \frac{3}{x+1} + 3$ f) $f(x) = \frac{2}{-x+4} + 2$

***6.** Wyznacz równanie przedstawionej hiperboli na podstawie informacji podanych na rysunku.

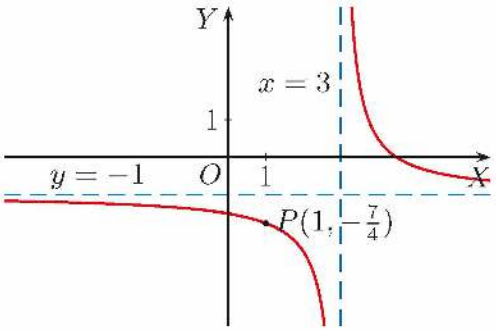
a)



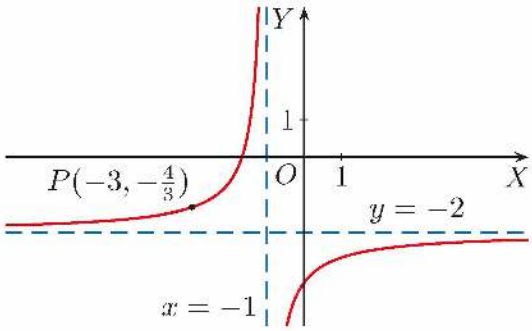
c)



b)



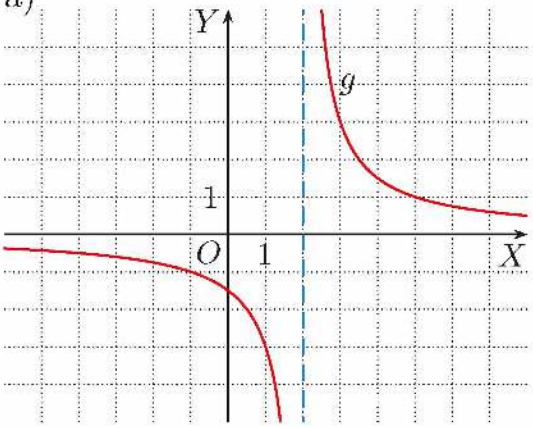
d)



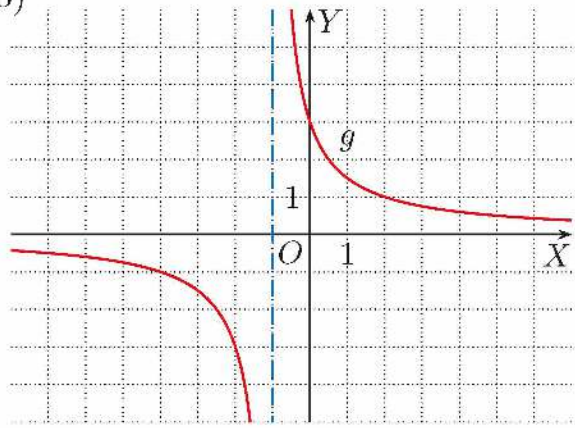
Powtórzenie

7. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji g, który otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$ wzdłuż osi OX. Podaj wzór funkcji g, jej przedziały monotoniczności oraz równania asymptot jej wykresu.

a)



b)



8. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę i przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{-4}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x+3}$ d) $f(x) = \frac{2}{x-2}$

9. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x-a}$, jeśli jego asymptota pionowa przechodzi przez punkt Q.

a) $Q(1, 6)$ b) $Q(-3, 8)$ c) $Q\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ d) $Q\left(-\frac{3}{2}, 15\right)$

Funkcja homograficzna

Funkcja homograficzna to funkcja, której wykresem jest **hiperbola**.
Wykres każdej funkcji homograficznej możemy otrzymać, przesuwając wzdłuż osi OX i osi OY hiperbolę $y = \frac{r}{x}$, gdzie r jest pewną stałą różną od 0.

Wzór funkcji homograficznej możemy zapisać w postaci:

- **kanonicznej:** $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{p\}$ i $r \neq 0$,
- **ogólnej:** $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ i $c \neq 0$.

1. Zapisz wzór funkcji homograficznej w postaci ogólnej.

a) $f(x) = \frac{4}{x+1} + 3$ b) $f(x) = \frac{2}{x-6} + 4$ c) $f(x) = \frac{-3}{x+2} - 6$

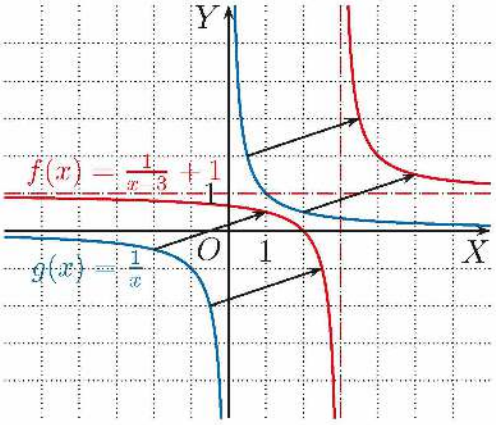
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.
Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-3)+1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 1$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę.



2. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Przykład 2

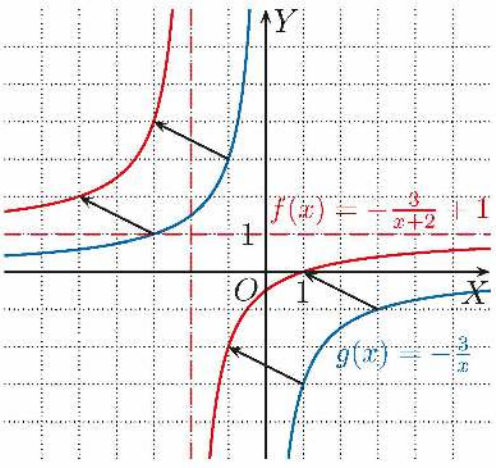
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$.
Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{(x+2)-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} =$$

$$= -\frac{3}{x+2} + 1$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = -\frac{3}{x}$ o 2 jednostki w lewo i 1 jednostkę w górę.



3. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x+3}{x+4}$ b) $f(x) = \frac{x-5}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$

3.4. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne

Wyrażenie wymierne to wyrażenie arytmetyczne utworzone z liczb wymiernych i zmiennych, w którym mogą występować tylko działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, np.: $\frac{6x+4}{2}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{x^2+3}{x-4}$, $\frac{x}{x^2-1}$, $\frac{x^2-4}{x^2+1}$.

Dziedziną wyrażenia wymiernego jest zbiór tych wszystkich liczb, dla których wyrażenie ma sens liczbowy. Należy zatem pamiętać, że miejsca zerowe mianownika nie należą do dziedziny.

Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{2x+8}$.

$2x + 8 = 0$ dla $x = -4$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $-\frac{3}{4x}$ b) $\frac{6}{x-5}$ c) $\frac{x-3}{2x+6}$ d) $\frac{-x^2+9}{-2x+7}$

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla $x = 1$ oraz $x = -1$.

a) $\frac{x+1}{x}$ b) $\frac{2x+4}{x-3}$ c) $\frac{4x}{x^2-9}$ d) $\frac{x+3}{x^2+3}$

Aby uprościć wyrażenie wymierne, rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$, a następnie je uprość.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2\cancel{(x-2)}^{1}}{(x+2)\cancel{(x-2)}^{1}} = \frac{x^2}{x+2}$$

Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{x^2-9}{3-x}$ c) $\frac{2x^2+10x}{x^2-25}$ e) $\frac{x^2-1}{x^4-x^3}$ g) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{3x^2-6x}{x-2}$ d) $\frac{x^3+4x}{x^2+4}$ f) $\frac{4-x^2}{x^2-2x}$ h) $\frac{x^2+4x+4}{x^4-16}$

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$, gdzie v i w są wielomianami (w nie jest wielomianem zerowym). Dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których $w(x) \neq 0$.

Przykład 3

a) Funkcja dana wzorem $f(x) = \frac{3x^2+5x-4}{x}$ jest funkcją wymierną, jej dziedziną jest zbiór $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

b) Funkcja dana wzorem $g(x) = \frac{x^4+1}{x^2-9}$ jest funkcją wymierną, jej dziedziną jest zbiór $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji f. Oblicz $f(0)$, $f(-1)$ i $f(1)$.

a) $f(x) = \frac{2x^2-8}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$ c) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4x+4}$

Przykład 4

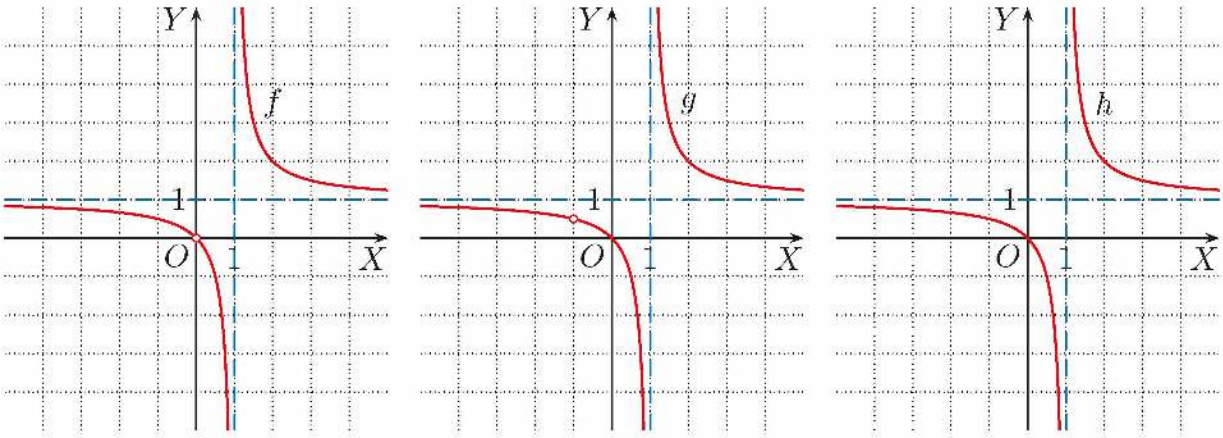
Określ dziedziny funkcji: f, g i h, a następnie uprość ich wzory.

$f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, wzór po uproszczeniu: $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$g(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, wzór po uproszczeniu: $g(x) = \frac{x}{x-1}$

$h(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2}$, $D_h = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, wzór po uproszczeniu: $h(x) = \frac{x}{x-1}$

Zwróć uwagę, że funkcje: f, g, h nie są równe, gdyż mają różne dziedziny.



Ćwiczenie 5

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$ b) $f(x) = \frac{x^2+4x}{x+4}$ c) $f(x) = \frac{x^3-4x}{x}$

Dziedzina funkcji

Gdy jest podany wzór funkcji $y = f(x)$, ale nie została określona jej dziedzina, przyjmuje się, że dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których wzór funkcji ma sens liczbowy (taką dziedzinę nazywa się też **dziedziną naturalną** funkcji).

Przykład 5

Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$.

Wzór funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ ma sens liczbowy, gdy $x \geqslant 0$ (ze względu na wyrażenie pod pierwiastkiem) oraz $x \neq 2$ (ze względu na mianownik ułamka).

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle 0; 2) \cup (2; \infty)$.

Ćwiczenie 6

Określ dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{x-8}$

b) $f(x) = \sqrt{3-x}$

c) $f(x) = \sqrt{-x}$

d) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-1}}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{x^2\sqrt{3-x}}$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{(x^2-4)\sqrt{x+2}}$

Przykład 6

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$.

Wzór funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$ ma sens liczbowy, gdy $x + 1 > 0$, zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-1; \infty)$.

Równość $x^2 - 4 = 0$ zachodzi dla $x = -2$ oraz $x = 2$. Zauważ, że $-2 \notin D_f$, zatem jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2.

Ćwiczenie 7

Podaj dziedzinę funkcji f. Czy funkcja f ma miejsca zerowe?

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2-x^2}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$

e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{1-x}}$

Ćwiczenie 8

Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2-16}{|x|+4}$

b) $f(x) = \frac{5-|x|}{x^2-25}$

c) $f(x) = \frac{x(x-3)}{|x|-3}$

Zadania

1. Czy liczba 2 należy do dziedziny wyrażenia?

a) $\frac{x-2}{x+2}$ b) $\frac{2}{4x-8}$ c) $\frac{2x-4}{x^2-4}$ d) $\frac{x^2-2x}{x^2+4}$

2. Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{-3x^2+1}{x-1}$ c) $\frac{5x-19}{3x+9}$ e) $\frac{6x+8}{x^2-16}$ g) $\frac{3x^2-12}{9x^2-1}$

b) $\frac{3x^2-6x}{2x-6}$ d) $\frac{5x^4-2x}{2x+5}$ f) $\frac{x^2+3x}{x^2-2}$ h) $\frac{x^3-3}{4x^2-9}$

3. Rozłóż mianownik wyrażenia na czynniki i podaj dziedzinę tego wyrażenia.

a) $\frac{8x^3+4x+1}{x^3-2x^2}$ c) $\frac{-x^3+2x-7}{x^3+9x}$ e) $\frac{9x^2-6x+1}{x^3-6x^2+9x}$

b) $\frac{2x^3-4x^2-x}{x^3+9x^2}$ d) $\frac{5x^3-x^2+2}{x^3-9x}$ f) $\frac{x^6+x^4+x^2}{4x^4+4x^3+x^2}$

4. Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartość dla $x=-1$.

a) $\frac{3x^5+2x^3+x}{x^2-9}$ c) $\frac{19x^4+8x^3-6}{x^2-3x}$ e) $\frac{6x-9}{x^2+5x+6}$ g) $\frac{14x^4+8x^2+4}{x^5+27x^2}$

b) $\frac{6x^2+3x-7}{4x^2-25}$ d) $\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+5x}$ f) $\frac{4x^3+2x+1}{2x^2-7x+6}$ h) $\frac{5x^2-10x}{x^3-5x^2+4x-20}$

5. Podaj dziedzinę funkcji f. Oblicz: $f(-3)$, $f(1)$ i $f(3)$.

a) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$ c) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-4}$ e) $f(x)=\frac{x^2+21}{x^2-3}$

b) $f(x)=\frac{x^2-3x}{3x-1}$ d) $f(x)=\frac{6x}{x^2+9}$ f) $f(x)=\frac{x^3+3x^2}{x^2-4}$

6. Określ dziedzinę funkcji f.

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+9}$ b) $f(x)=\frac{x^2-16}{\sqrt{x+3}}$ c) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{5-x}}$ d) $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+4}}$

Powtórzenie

7. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartości dla $x=\frac{1}{2}$ oraz dla $x=-\frac{3}{2}$.

a) $\frac{72}{18x}$ c) $\frac{4x+8}{x+2}$ e) $\frac{x^2+x}{2x}$ g) $\frac{x^2-9}{x-3}$

b) $\frac{16x}{2x^2}$ d) $\frac{x-5}{2x-10}$ f) $\frac{x^2-\frac{1}{2}x}{x}$ h) $\frac{2x+6}{x^2-9}$

8. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{x^2+4x}{x^2-16}$ c) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ e) $\frac{x^2+2x}{x^3-4x}$ g) $\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$

b) $\frac{4x-2}{4x^2-1}$ d) $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$ f) $\frac{2x^2+6x}{x^3-9x}$ h) $\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$

Działania na liczbach wymiernych

1. Oblicz.

a) $\frac{36}{32} \cdot \frac{24}{27}$ c) $\frac{12}{25} : \frac{18}{10}$ e) $3\frac{3}{5} \cdot \left(-2\frac{2}{9}\right)$ g) $\left(-1\frac{3}{4}\right) : 1\frac{2}{5}$

b) $\frac{72}{78} \cdot \frac{52}{54}$ d) $\frac{48}{14} : \frac{40}{56}$ f) $\left(-5\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-6\frac{3}{4}\right)$ h) $6\frac{2}{3} : \left(-4\frac{4}{9}\right)$

2. Oblicz.

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{10}{21}$ b) $\frac{3}{16} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{7}{15}$ c) $\frac{33}{8} \cdot \frac{22}{45} \cdot \frac{27}{121}$ d) $\frac{25}{27} \cdot \frac{49}{20} \cdot \frac{36}{35}$

3. Oblicz.

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ c) $\frac{5}{12} + \frac{5}{18}$ e) $\frac{3}{5} + \frac{4}{15} - \frac{2}{25}$

b) $1\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\frac{3}{4}$ d) $\frac{11}{45} - \frac{9}{30}$ f) $\frac{5}{12} - \frac{2}{15} - \frac{3}{10}$

4. Dla jakiej wartości parametru m wartość wyrażenia jest równa 0?

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + m$ c) $1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} - 2m$ e) $1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}m - 0{,}75$

b) $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + m$ d) $3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{6} + \frac{7}{3}m$ f) $0{,}125m - \frac{3}{5} - 1\frac{1}{4}$

5. Zaokrąglij liczbę p do liczby całkowitej.

a) $p = \left(\frac{6}{5} - 0{,}75\right) : \left(\frac{1}{6} - 0{,}125\right)$ c) $p = \left(8 - \left(-2\frac{1}{2}\right)\right) : \left(1\frac{4}{5} : \frac{14}{15} - 2\right)$

b) $p = \left(2\frac{1}{6} - \frac{11}{4}\right) : \left(2\frac{1}{9} - \frac{13}{6}\right)$ d) $p = \frac{1}{3}\left(2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{6}\right)$

6. Podaj największą liczbę całkowitą mniejszą od liczby p.

a) $p = 4\frac{2}{5} : \left(\frac{7}{15} - \frac{1}{10}\right)$ c) $p = \dfrac{1\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{1}{4}}{1\frac{1}{6} - \frac{5}{12}}$ c) $p = \dfrac{\frac{4}{5} + 2\frac{1}{10} - \frac{1}{2}}{0{,}6 - \frac{2}{15} + \frac{1}{5}}$

b) $p = 1\frac{3}{8} : \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{6}\right)$ d) $p = \dfrac{1\frac{1}{4} - 2\frac{1}{8} - 1{,}5}{-\frac{1}{12} - 1\frac{1}{6}}$ f) $p = \dfrac{3\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} - \frac{5}{18} + 1}$

7. Rozwiąż równanie.

a) $x - \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ c) $1\frac{1}{5} + x = 2\frac{9}{10}$ e) $\frac{7}{4} - \frac{1}{18}x = \frac{5}{9}$

b) $x + \frac{5}{9} = \frac{5}{6}$ d) $2\frac{3}{7} - x = \frac{2}{21}$ f) $1\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6}x = 2\frac{2}{3}$

8. Oblicz sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb x i y spełniających warunki:

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)x = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \quad \text{i} \quad \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - y\right) = -\frac{1}{8}$$

9. a) Znajdź dwie liczby, których suma jest równa 1530, jeśli wiadomo, że pierwsza liczba stanowi $\frac{13}{17}$ drugiej liczby.

b) Znajdź trzy liczby, których suma jest równa 134, jeśli wiadomo, że pierwsza liczba stanowi $\frac{15}{16}$ drugiej liczby, a druga $\frac{4}{9}$ trzeciej.

3.5. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Przykład 1

Wykonaj mnożenie $\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1}$.

Zakładamy, że $x^2 - 9 \neq 0$ i $2x - 1 \neq 0$, zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$.

$$\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1} = \frac{\overset{1}{\cancel{(2x-1)}}(2x+1)\overset{1}{\cancel{(x-3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-3)}}(x+3)\underset{1}{\cancel{(2x-1)}}} = \frac{2x+1}{x+3}$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{4x-12}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2x-6}$

b) $\frac{3-x}{x} \cdot \frac{2x+6}{x^2-9}$

c) $\frac{-x^2+5x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2-1}{x^2}$

d) $\frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{0{,}5x+1}{9-3x}$

e) $\frac{(x-2)^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2+x}{x^2-4}$

f) $\frac{3x^2-x^3}{2x-6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^4-x^2}$

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12}$.

Zakładamy, że $x + 4 \neq 0$ i $3x + 12 \neq 0$, zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

$$\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{x+4}}} \cdot \frac{3\overset{1}{\cancel{(x+4)}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{3}{5}$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8}$

b) $\frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3}$

c) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$

d) $\frac{16}{3x+1} : \frac{12}{9x+3}$

e) $\frac{7}{5x+35} : \frac{-35}{x+7}$

f) $\frac{25}{6x+9} : \frac{15}{4x+6}$

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x}$.

Zakładamy, że $x^2 - 1 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$ i $x^2 - x \neq 0$, zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$
dla $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{\overset{1}{\cancel{x(x+2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+1)} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{x(x-1)}}}{\underset{1}{\cancel{x+2}}} = \frac{x^2}{x+1}$$

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2}$

b) $\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1}$

c) $\frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9}$

Ćwiczenie 4

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{125-x^3}{x^2+2x+1} : \frac{x-5}{x+1}$ b) $\frac{x^3-1}{x-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ c) $\frac{x+4}{x^2-3x+9} : \frac{x^2+4x}{x^3+27}$

Przykład 4

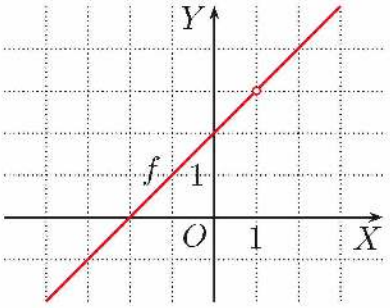
Podaj dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\frac{2x+4}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}$ i naszkicuj jej wykres.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Upraszczamy wzór funkcji f:

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-1} : \frac{2}{x-1} = \frac{2(x+2)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2} = x+2$$

Wykresem funkcji f jest prosta bez punktu o współrzędnych $(1, 3)$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{1}{x}}$ c) $f(x) = \frac{\frac{3x-6}{x}}{\frac{x-2}{x}}$ c) $f(x) = \frac{\frac{x^2-x}{x-1}}{\frac{1}{x}}$

b) $f(x) = \frac{\frac{6}{x-1}}{\frac{3}{x-1}}$ d) $f(x) = \frac{\frac{4x}{x+2}}{\frac{2}{x+2}}$ f) $f(x) = \frac{\frac{2x-8}{x}}{\frac{2}{x^2}}$

Zadania

1. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{14}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{7}$ c) $\frac{x^2}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x}$ e) $\frac{4x^2-1}{4} \cdot \frac{6}{2x-1}$

b) $\frac{24}{x^2-16} \cdot \frac{x-4}{3}$ d) $\frac{2x}{x+6} \cdot \frac{x^2-36}{x^2}$ f) $\frac{3x+2}{3} \cdot \frac{12}{9x^2-4}$

2. Dane są wyrażenia A i B. Wyznacz dziedzinę wyrażeń A, B oraz $A \cdot B$.

a) $A = \frac{x^2-2}{x^2-9x}$, $B = \frac{x^2+4x}{x^2+2x}$ c) $A = \frac{6x-5}{x^3-4x}$, $B = \frac{5x-6}{x^3-4x^2+4x}$

b) $A = \frac{4x^2-1}{x^2-4}$, $B = \frac{9x-x^3}{4x-x^3}$ d) $A = \frac{5x^2-2x+4}{x^3-2x^2-x+2}$, $B = \frac{3x^2-2x+5}{x^2+x-2}$

3. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x-2}{x^2} \cdot \frac{3x}{2x-4}$ d) $\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^4-1}$ g) $\frac{4x^2-16}{6-3x} \cdot \frac{x^2}{4x+8}$

b) $\frac{3x+4{,}5}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+1{,}5}$ e) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-1} \cdot \frac{(x+1)^2}{2x-1}$ h) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{4-x^2}{x^2-1}$

c) $\frac{x^2}{3-x} \cdot \frac{3x-9}{x^4}$ f) $\frac{x^2-4}{x^3+3x^2} \cdot \frac{x^4-9x^2}{x^2+2x}$ i) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x+9} \cdot \frac{x^3-27}{x^2-9}$

4. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^2+6x+9}{2x^2-8} \cdot \frac{x^3-2x^2}{x^2+3x}$ b) $\frac{x^2-16}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x+4}$ c) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+2}{x^2-1}$

5. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{8}{2x-9} : \frac{7}{4x-18}$ c) $\frac{18}{2x-6} : \frac{-3}{4x-12}$ e) $\frac{9x}{2x+4} : \frac{6}{x+2}$

b) $\frac{-8}{3x-2} : \frac{2}{9x-6}$ d) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$ f) $\frac{10x^2}{x-5} : \frac{5}{10-2x}$

6. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3x-3}{4x} : \frac{x-1}{6x}$ c) $\frac{10x+2}{x^2} : \frac{5x+1}{x}$ c) $\frac{x^3}{6x-2} : \frac{2x}{1-3x}$

b) $\frac{2x+4}{x-3} : \frac{3-x}{x+2}$ d) $\frac{6-4x}{(1-x)^2} : \frac{2x-3}{x-1}$ f) $\frac{x+1}{(x+2)^2} : \frac{x^2-1}{x^2-4}$

7. Uprość wyrażenie.

a) $\dfrac{\frac{x^2+2x+1}{x-3}}{\frac{x+1}{x^2-9}}$ b) $\dfrac{\frac{x^2+8x+16}{6x-9}}{\frac{x^3-16x}{6x-4x^2}}$ c) $\dfrac{\frac{4x^2-1}{x^2+4x+4}}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2-4}}$

8. Pole prostokąta wyraża się wzorem $P = \frac{6}{x^2-4}$, a długość jednego z jego boków jest równa $\frac{2}{x-2}$, gdzie $x > 2$. Wyznacz długość drugiego boku tego prostokąta.

9. Dany jest prostokąt o bokach a, b oraz polu P. Przerysuj do zeszytu tabelę przedstawioną obok i ją uzupełnij. Podaj odpowiednie założenia.

a	b	P
$\frac{x+1}{x^2+1}$	$\frac{1}{x+1}$	?
?	$\frac{x+2}{2}$	$\frac{3x+6}{x^2+4}$
$\frac{4}{x-3}$	?	$\frac{4x^2+8}{x^2-9}$

Powtórzenie

10. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{2x}$ b) $\frac{x}{x^2+5x} \cdot \frac{x^2-25}{x+2}$ c) $\frac{4x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{2x^2+x}$

11. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^2-6x}{x+3} : \frac{x}{x+2}$ b) $\frac{x}{6-x} : \frac{x^2+x}{x^2-36}$ c) $\frac{x^2-1}{x^2+x} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

D **12.** Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje stałą wartość dla tych x, dla których jest określone.

a) $\frac{4x}{x+2} \cdot \frac{2x^2+4x}{x^2}$ b) $\frac{4-x^2}{x-2} \cdot \frac{6x}{x^2+2x}$ c) $\frac{(x-1)^2}{1-x^2} \cdot \frac{x+1}{x-1}$

3.6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Reguły dodawania wyrażeń wymiernych są analogiczne do reguł dodawania ułamków. Szczególną uwagę należy zwrócić na dziedziny dodawanych wyrażeń.

Przykład 1

a) Wykonaj dodawanie $\frac{2}{x}+\frac{1}{3x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{3x}=\frac{3\cdot 2}{3\cdot x}+\frac{1}{3x}=\frac{6}{3x}+\frac{1}{3x}=\frac{7}{3x}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $3x$.

b) Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x+2}-\frac{3x}{2x+4}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

$$\frac{1}{x+2}-\frac{3x}{2x+4}=\frac{2}{2(x+2)}-\frac{3x}{2x+4}=\frac{2}{2x+4}-\frac{3x}{2x+4}=\frac{2-3x}{2x+4}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $2x+4$.

Ćwiczenie 1

Wykonaj działanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{6}{x}+\frac{5}{2x}$

b) $\frac{4}{3x}-\frac{3}{4x}$

c) $\frac{3}{x-2}+\frac{x}{2x-4}$

d) $\frac{x}{3x+3}-\frac{1}{x+1}$

e) $\frac{x+1}{x-3}+\frac{2x-5}{4x-12}$

f) $\frac{2x-1}{3x+6}-\frac{x-1}{x+2}$

Przykład 2

a) Wykonaj dodawanie $\frac{-4}{2x+1}+\frac{2}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

$$\frac{-4}{2x+1}+\frac{2}{x}=\frac{-4x}{(2x+1)x}+\frac{2(2x+1)}{(2x+1)x}=$$

$$=\frac{-4x+4x+2}{(2x+1)x}=\frac{2}{(2x+1)x}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(2x+1)x$.

b) Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x-3}-\frac{1-x}{x^2-9}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$.

$$\frac{1}{x-3}-\frac{1-x}{x^2-9}=\frac{1}{x-3}-\frac{1-x}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{x+3}{(x-3)(x+3)}-\frac{1-x}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{x+3-(1-x)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x+2}{x^2-9}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+3)(x-3)$.

Ćwiczenie 2

Wykonaj działanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x+3}$

b) $\frac{x-5}{x}-\frac{x}{x+2}$

c) $\frac{2}{x}+\frac{2}{x+3}$

d) $\frac{x+6}{x^2-9}+\frac{-2}{x+3}$

Ćwiczenie 3

Wykonaj dodawanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x+3}{x+4}+\frac{x-4}{x-1}$

b) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+1}$

c) $\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^2+x}$

d) $\frac{2}{x^2+x}+\frac{2}{x^2-x}$

e) $\frac{3}{x-2}+\frac{x+6}{x^2-4x+4}$

f) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+2x+1}$

Ćwiczenie 4

Wykonaj odejmowanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{x}-\frac{4}{x+2}$

b) $\frac{6}{x-2}-3$

c) $\frac{x-1}{x+4}-\frac{x}{x+1}$

d) $\frac{-4x}{x-4}-\frac{2x}{x+2}$

e) $\frac{8}{x^2-16}-\frac{x+4}{x-4}+1$

f) $\frac{3x}{x+1}-\frac{x+2}{x}-2$

Ćwiczenie 5

Podaj dziedzinę funkcji f i uprość jej wzór. Oblicz $f(-1)$ i $f(1)$.

a) $f(x)=\frac{7x+7}{2x+4}+\frac{3x+5}{2x+4}-\frac{2x}{x+2}$

b) $f(x)=\frac{x}{6-3x}-\frac{3}{x-2}+\frac{4x}{3x-6}$

Zadania

1. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}$

b) $\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x-1}$

c) $\frac{3x-6}{x-1}+\frac{6x-1}{2x+2}$

d) $\frac{3x-1}{x}-\frac{x-7}{2x-4}$

e) $\frac{x}{x+5}+\frac{2-3x}{3x-1}$

f) $\frac{2x+1}{6-x}-\frac{3-2x}{x+6}$

2. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x-6}{x-1}+\frac{2x-6}{x^2-1}$

b) $\frac{4x}{x^2-4}-\frac{4}{2+x}$

c) $\frac{3x}{x-1}+\frac{1-3x^2}{x^2-2x+1}$

d) $\frac{2-x}{x+2}-\frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+4}$

e) $\frac{x+2}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+x}$

f) $\frac{x-1}{x^2+x}+\frac{x+1}{x^2-x}$

3. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{x^2+4}{x^2-4}$

b) $\frac{4}{x^2+6x}-\frac{1-x}{2x}+\frac{x-1}{x+6}$

c) $\frac{x^2}{4x^2-9}+\frac{2-x}{2x-3}-\frac{6}{3-2x}$

d) $\frac{2x^2-7}{9x^2-6x+1}-\frac{2-3x^2}{3x-1}-x$

e) $\frac{2x-4}{x^2-2x+1}-\frac{x+2}{x}+\frac{x+1}{x-1}$

f) $\frac{6x-1}{4x^2-1}+\frac{3-2x}{2x^2-x}-\frac{1}{2x+1}$

4. Uprość wyrażenie. Oblicz jego wartość dla $x=-3$.

a) $\frac{x^2+x-3}{x^2-6x+9}-\frac{x+2}{2x-6}-1$

b) $\frac{2x^2-4x}{x^2+4x+4}+\frac{x-1}{x+2}-3$

c) $\frac{-3x-3}{x^2-16}-\frac{x+1}{4-x}+\frac{5-x}{2x+8}$

d) $\frac{2x^2+x+1}{4x^2-1}+\frac{x+3}{2x-1}-\frac{2x}{2x+1}$

5. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2-3x}{x^2-1}$ c) $\frac{x+3}{x^2-2x+1}-\frac{x-3}{x^2-1}$ e) $\frac{x^2-9}{x^2-4}+\frac{x-3}{x+2}-\frac{1-x}{x-2}$

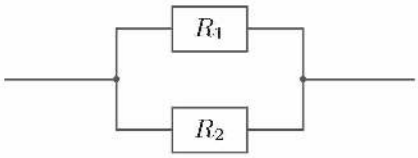
b) $\frac{2}{x}-\frac{4}{x-3}+\frac{2x-1}{x^2-3x}$ d) $\frac{1}{x-3}+\frac{3x}{x^3-27}$ f) $\frac{16-x^2}{x^2-5x}-\frac{x-4}{x}+\frac{2}{x+5}$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz R_1 ze wzoru $\frac{1}{R_c}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

$$\frac{1}{R_c}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$
$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_c}-\frac{1}{R_2}$$
$$\frac{1}{R_1}=\frac{R_2-R_c}{R_c\cdot R_2}$$

Zatem $R_1=\frac{R_c\cdot R_2}{R_2-R_c}$.



R_c jest oporem zastępczym układu dwóch oporów R_1 i R_2 połączonych równolegle.

Wyznacz R_2 oraz R_c ze wzoru $\frac{1}{R_c}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

7. Wyznacz ze wzoru wskazaną zmienną.

a) $P=\pi r^2+\pi rl,\ l$ e) $F=mg-m\omega^2R,\ R$

b) $P=\frac{a+b}{2}h,\ b$ f) $F=mg-m\omega^2R,\ m$

c) $V=\frac{1}{3}\pi r^2h,\ h$ g) $W=GMm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right),\ m$

d) $V=\frac{4}{3}\pi r^3,\ r$ h) $W=GMm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right),\ r$

D **8.** Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach a i b. Wysokość tego prostopadłościanu jest równa h, jego pole powierzchni całkowitej wynosi P, a objętość – V. Uzasadnij, że:

$$\frac{P}{V}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{h}\right)$$

Powtórzenie

9. Wykonaj działanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{4x}+\frac{2}{x^2}$ b) $\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{5x}$ c) $\frac{4x}{3}-\frac{1}{2x}$ d) $\frac{2}{3x^2}+\frac{3}{2x^3}$

10. Wykonaj działanie. Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $x=2$.

a) $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x-1}{x-3}+\frac{x}{1-x}$ c) $\frac{x-5}{x^2-x}+\frac{10}{x}$ d) $\frac{2}{x}-\frac{x-1}{x^2-3x}$

11. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{x+4}+\frac{5}{x-4}-\frac{x}{x-4}$ c) $\frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}+\frac{4}{x+1}$ e) $\frac{x-1}{x^2+3x}+\frac{x+2}{x^2-4x}$

b) $\frac{6}{x-3}-\frac{4}{3-x}+\frac{1}{x+3}$ d) $\frac{x+3}{x^2+2x}+\frac{1}{2x+4}-\frac{3}{x}$ f) $\frac{x+1}{x^2+2x+1}-\frac{x}{x^2+x}$

3.7. Równania wymierne (1)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{x(x+3)}{x-2} = 0$.

Zakładamy, że $x-2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R}\setminus\{2\}$. W wyznaczonej dziedzinie równanie $\frac{x(x+3)}{x-2} = 0$ jest równoważne równaniu $x(x+3) = 0$.

$x(x+3) = 0$ dla $x = 0$ lub $x = -3$ Przyrównujemy do zera licznik wyrażenia.

Rozwiązaniem równania są liczby 0 i -3.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+4}{x+2} = 0$ c) $\frac{4x+2}{2x-4} = 0$ e) $\frac{x-2}{x(x-1)} = 0$

b) $\frac{6x-2}{x} = 0$ d) $\frac{2x-3}{2x+1} = 0$ f) $\frac{3x+6}{x(x+3)} = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{x(x-2)}{x^2-4} = 0$.

Zakładamy, że $x^2 - 4 \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$. W wyznaczonej dziedzinie wyjściowe równanie jest równoważne równaniu $x(x-2) = 0$, które zachodzi gdy $x = 0$ lub $x = 2$. Odrzucamy liczbę 2 jako nienależącą do dziedziny. Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 0.

Rozwiązywanie równania wymiernego $\frac{u(x)}{w(x)} = 0$ składa się z etapów:

- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu w i przyjęcie założeń,
- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu u,
- uwzględnienie założeń i sformułowanie odpowiedzi.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x(x+2)}{2x-6} = 0$ c) $\frac{(x-1)(2x+1)}{x+\frac{1}{2}} = 0$ e) $\frac{(4x-3)(x-2)}{6x-2} = 0$

b) $\frac{(3x+12)x}{x+4} = 0$ d) $\frac{(3x+2)(4x+3)}{6x+4} = 0$ f) $\frac{(3x-2)(2x+3)}{2x-3} = 0$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x(x-1)}{x^2-1} = 0$ b) $\frac{x(x+1)}{x^2-1} = 0$ c) $\frac{x(x+1)}{x^2+1} = 0$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x(x-3)}{x(x+2)}=0$ c) $\frac{x^2+4x}{x(x-6)}=0$ e) $\frac{x^2-16}{2x^2+8x}=0$

b) $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+4)}{(x-3)(2x+1)}=0$ d) $\frac{(x+2)(x+3)}{x^2-9}=0$ f) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{(x+1)(3x+6)}{x(2x+4)}=0$ c) $\frac{x(4x-2)}{(2x-1)(x-2)}=0$ e) $\frac{(x+16)(x+4)}{x^2-16}=0$

b) $\frac{(x+3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=0$ d) $\frac{(3-2x)(6x+1)}{(x+6)(4x-6)}=0$ f) $\frac{x^2-9}{(2x+6)(x-9)}=0$

2. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x)=\frac{x(4x+12)}{3x+9}$ c) $f(x)=\frac{(6x-2)(1-2x)}{x(6x-3)}$ e) $f(x)=\frac{x(x^2-1)}{x^2-2x+1}$

b) $f(x)=\frac{(4x-10)(x+3)}{x(2x-5)}$ d) $f(x)=\frac{(2x+1)(6x+2)}{(3x+1)(6x+3)}$ f) $f(x)=\frac{x(x^2-4)}{x^2+4x+4}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(3x+1)(x+2)}=0$ d) $\frac{x(x+5)(x+6)^2}{x^2-25}=0$ g) $\frac{(2x+1)(x+3)}{x(4x^2-1)}=0$

b) $\frac{x(x+2)(x-4)}{x(x-2)(x+4)}=0$ e) $\frac{(4x-9)^2(2x-3)}{4x^2-9}=0$ h) $\frac{x^3+2x^2+x}{(x+1)(x+2)}=0$

c) $\frac{x^2(x-3)(x+2)}{x(x+2)(4-x)}=0$ f) $\frac{(x+2)^2(x-2)^2}{x^2+4}=0$ i) $\frac{x^3-9x}{x^2-6x+9}=0$

4. Podaj dziedzinę wyrażenia i określ, dla jakich x przyjmuje ono wartość równą zero.

a) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x^3+3x^2+4x}$ b) $\frac{x^3-7x^2+12x}{2x^4-5x^3-3x^2}$ c) $\frac{2x^4+4x^3+x^2}{x^4-2x^2+1}$

Powtórzenie

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x(3x-4)}{x-3}=0$ c) $\frac{(2x+8)(x-1)}{x(x+4)}=0$ e) $\frac{x^2-16}{x^2+16}=0$

b) $\frac{(x-4)(5x+2)}{2x+5}=0$ d) $\frac{x(3x-5)}{(6x-10)(6x-1)}=0$ f) $\frac{x^2+16}{x^2-16}=0$

6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{(2x+1)(6-2x)}{x(x-3)(x+2)}=0$ b) $\frac{x(x+1)\left(\frac{1}{2}x-1\right)}{(4x-2)(x-1)}=0$ c) $\frac{(x+3)^2(2x-3)^2}{\left(2x+6\right)(x-\frac{3}{2})}=0$

3.8. Równania wymierne (2)

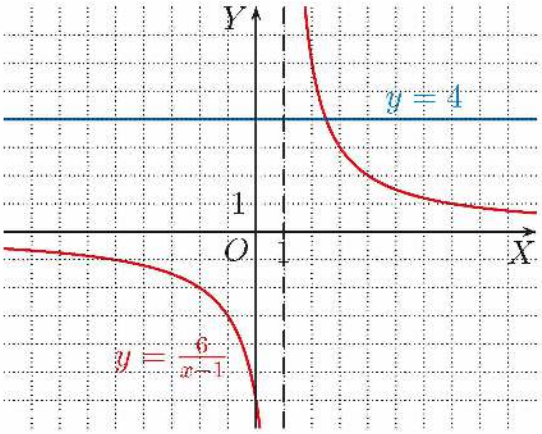
Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{6}{x-1} = 4$.

Zakładamy, że $x - 1 \neq 0$, czyli $x \neq 1$.

$$\frac{6}{x-1} = 4 \ / \cdot (x-1)$$
$$6 = 4x - 4$$
$$10 = 4x$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Liczba $\frac{5}{2}$ spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.



Hiperbola $y = \frac{6}{x-1}$ i prosta $y = 4$ przecinają się dla $x = \frac{5}{2}$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{6}{x+1} = 4$ c) $\frac{3}{-2x+7} = 1$ c) $\frac{7x+6}{1-3x} = -4$ g) $\frac{x-5}{3x+1} - 2 = 0$

b) $\frac{3x+2}{x} = 5$ d) $\frac{2x}{x-1} = 3$ f) $\frac{4-2x}{4-x} = -2$ h) $\frac{2x+4}{x-1} + 4 = 0$

Ćwiczenie 2

Które z podanych równań nie mają rozwiązania, a które mają nieskończenie wiele rozwiązań?

I. $\frac{3x-3}{x-1} = 2$ II. $\frac{6x-2}{3x-1} = 2$ III. $\frac{1-4x}{8x-2} = -0{,}5$ IV. $\frac{3x+9}{10x+30} = 0{,}3$

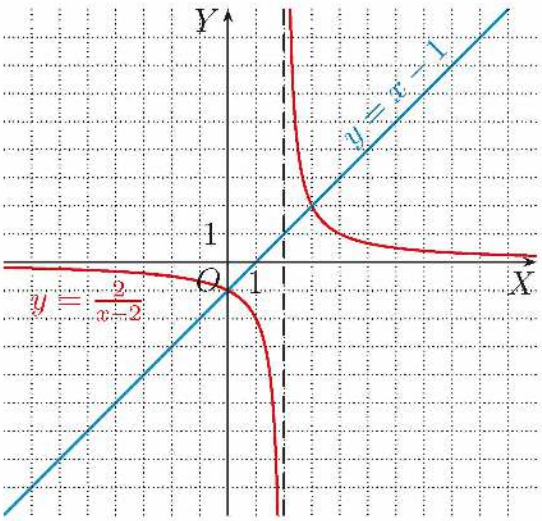
Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x-2} = x - 1$.

Zakładamy, że $x - 2 \neq 0$, czyli $x \neq 2$.

$$\frac{2}{x-2} = x - 1 \ / \cdot (x-2)$$
$$2 = (x-1)(x-2)$$
$$2 = x^2 - 3x + 2$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \text{ lub } x = 3$$

Liczby 0 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.



Hiperbola $y = \frac{2}{x-2}$ i prosta $y = x - 1$ przecinają się dla $x = 0$ oraz $x = 3$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2}{x} = x + 1$ c) $\frac{4}{x+3} = x + 3$ e) $\frac{6}{x} = x + 5$ g) $\frac{3}{x+2} = x$

b) $-\frac{1}{x} = x + 2$ d) $\frac{9}{6-x} = x$ f) $-\frac{8}{x} = x + 6$ h) $-\frac{6}{x-3} = 2x + 1$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$.

Zakładamy, że $x + 1 \neq 0$ i $x - 2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$.

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2} \quad / \cdot (x+1)(x-2)$$
$$2(x-2) = 3(x+1)$$
$$2x - 4 = 3x + 3$$
$$x = -7$$

Liczba -7 spełnia założenia, więc jest rozwiązaniem równania.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5}$ c) $\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$ e) $\frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{x-3}$

b) $\frac{-2}{x-1} = \frac{4}{2x+3}$ d) $\frac{x-3}{2x} = \frac{x-2}{2x+1}$ f) $\frac{2x}{x-7} = \frac{x}{x+1}$

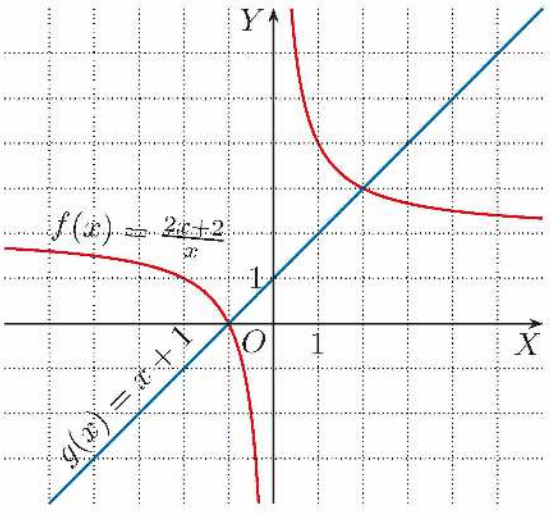
Przykład 4

Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji:

$$f(x) = \frac{2x+2}{x} \quad \text{i} \quad g(x) = x + 1$$

Zakładamy, że $x \neq 0$. Aby wyznaczyć współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f i g, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{2x+2}{x} = x + 1 \quad / \cdot x$$
$$2x + 2 = x^2 + x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$



Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, którego rozwiązaniami są liczby -1 i 2.
Dla $x = -1$ mamy $y = 0$,
a dla $x = 2$ mamy $y = 3$.

Zatem punktami wspólnymi wykresów funkcji f i g są punkty $(-1, 0)$ i $(2, 3)$. Zauważ, że współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f i g można odczytać z wykresów tych funkcji.

Ćwiczenie 5

Wyznacz algebraicznie współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f i g. Naszkicuj wykresy tych funkcji i sprawdź otrzymaną odpowiedź.

a) $f(x)=\frac{1-x}{x}$, $g(x)=x-1$

b) $f(x)=\frac{x+3}{x}$, $g(x)=3x+1$

c) $f(x)=\frac{-2x-2}{x}$, $g(x)=-2x-2$

d) $f(x)=\frac{x-6}{x}$, $g(x)=-\frac{3}{2}x+1$

Wskazówka do podpunktu a). Zauważ, że $f(x)=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1$.

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5}{x}=4$

b) $\frac{-7}{x-1}=8$

c) $\frac{x}{2x+1}=1$

d) $\frac{-6x}{2x-5}=2$

e) $\frac{5x+4}{2x-1}=3$

f) $\frac{4x-2}{3-2x}=\frac{1}{2}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x+1}=1$

b) $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-2}=5$

c) $6+\frac{1}{x+1}=-\frac{2}{x+1}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x}=\frac{3}{2+x}$

b) $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-3}=0$

c) $\frac{x}{x-1}=\frac{x+2}{x}$

d) $\frac{x-3}{x-2}=\frac{x+3}{x+2}$

e) $\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{2x+1}$

f) $\frac{x+4}{2x-1}-\frac{1}{x}=0$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{-3}=\frac{-5}{x+2}$

b) $x=\frac{5x+3}{2x}$

c) $x+1=\frac{2-2x}{x-1}$

d) $\frac{2x-2}{x+2}=\frac{x}{x-1}$

e) $\frac{6x-4}{2-3x}=-2x$

f) $6x+1=\frac{2}{x}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x^2+1}{x^2}=3$

b) $\frac{6x}{x^2+9}=-1$

c) $\frac{x^2+8}{x^2-4}=2$

d) $\frac{2x^2-10}{x^2-9}=1$

e) $\frac{-3x^2+2x}{x^2+4}=-3$

f) $\frac{2x^2+4x}{x^2-3}=1$

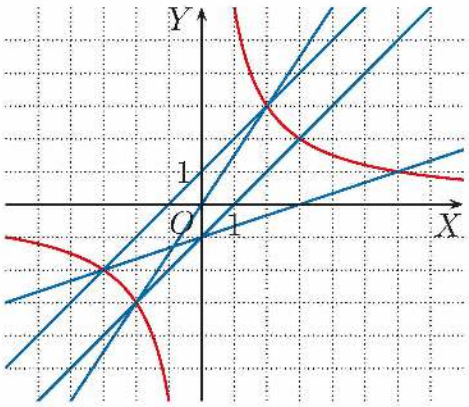
6. Na rysunku obok przedstawiono hiperbolę $y=\frac{6}{x}$ i proste: $y=\frac{3}{2}x$, $y=\frac{1}{3}x-1$, $y=x+1$, $y=x-1$. Rozwiąż równanie i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\frac{6}{x}=\frac{3}{2}x$

b) $\frac{6}{x}=x+1$

c) $\frac{6}{x}=x-1$

d) $\frac{6}{x}=\frac{1}{3}x-1$



7. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x}=2$

b) $\frac{3-x}{4x^2+4x+1}-\frac{5x}{2x+1}=0$

c) $\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1-x}{x^2+2x+1}$

d) $\frac{2x+1}{x^2+6x+9}+\frac{x-1}{9-x^2}=0$

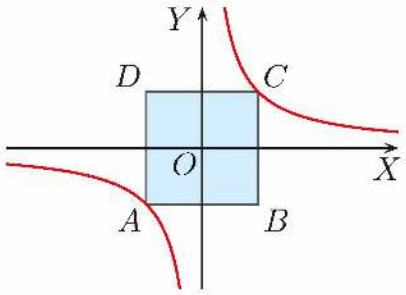
e) $\frac{2}{x+4}+\frac{3}{x-4}=\frac{14}{x^2-16}$

f) $\frac{3}{x+2}+\frac{12}{x^2-4}+\frac{1}{2x}=0$

g) $\frac{x+5}{x-4}+\frac{3}{x}=\frac{36}{x^2-4x}$

h) $\frac{x}{x+2}-\frac{1}{2-x}=\frac{4}{x^2-4}$

8. Osie układu współrzędnych są osiami symetrii kwadratu $ABCD$ (rysunek obok). Wierzchołki A i C należą do hiperboli $y=\frac{a}{x}$. Podaj współrzędne wierzchołków kwadratu i oblicz jego pole dla $a=4$ oraz dla $a=3$.



9. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{2}{x+2}-1$.

a) Odczytaj z wykresu rozwiązania równania $f(x)=a$ dla $a\in\{-3,0,1\}$. Sprawdź algebraicznie otrzymane odpowiedzi.

b) Dla jakich wartości b równanie $f(x)=b$ nie ma rozwiązań?

Powtórzenie

10. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4x+5}{2x}=4$

b) $\frac{15}{x}=x-2$

c) $x=\frac{7x-4}{2x-2}$

d) $x+2=\frac{2-2x}{x}$

e) $\frac{2x+7}{x+1}=x-1$

f) $\frac{6x+2}{-1-3x}=-2x-2$

11. Podaj, ile rozwiązań ma równanie.

a) $\frac{x+1}{x}=\frac{2x+2}{x-1}$

b) $\frac{4}{x}+\frac{4-3x}{x-1}=0$

c) $\frac{2}{x}+\frac{4}{x}=\frac{3x}{x-2}$

d) $\frac{-1}{x+2}=\frac{x+2}{x-4}$

e) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+1}{3x+1}$

f) $\frac{2x-7}{x-3}-\frac{2x-6}{x+1}=0$

g) $\frac{3-x}{2x-1}=\frac{2x-6}{2-4x}$

h) $\frac{2x-1}{x-1}=\frac{6x-3}{x-1}$

i) $\frac{x-9}{x-5}-\frac{3x}{3x-4}=0$

12. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{9-x^2}{x^2}=3$

b) $\frac{12x^2-9}{x^2}=4$

c) $\frac{x^2+8}{2x^2+1}=3$

d) $\frac{2x^2-x}{4x^2+3}=\frac{1}{2}$

13. W tym samym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji f i g. Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x)=g(x)$ i sprawdź jego poprawność, przeprowadzając odpowiednie obliczenia.

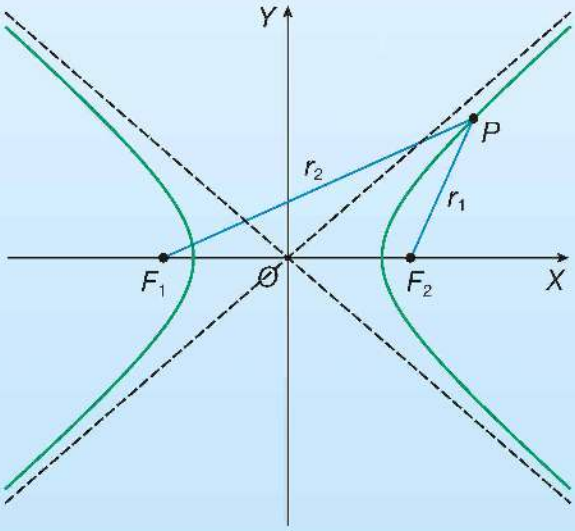
a) $f(x)=\frac{2}{x}+1,\ g(x)=2x+1$

b) $f(x)=-\frac{3}{x}-1,\ g(x)=-x+1$

Hiperbola i hiperboloida

Ogólna definicja mówi, że hiperbola to zbiór tych wszystkich punktów P na płaszczyźnie, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch konkretnych punktów F_1 i F_2, zwanych ogniskami, jest stała:

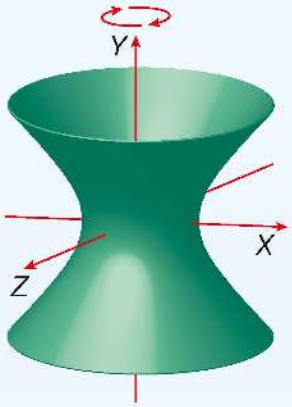
$$|r_1 - r_2| = \text{const.}$$



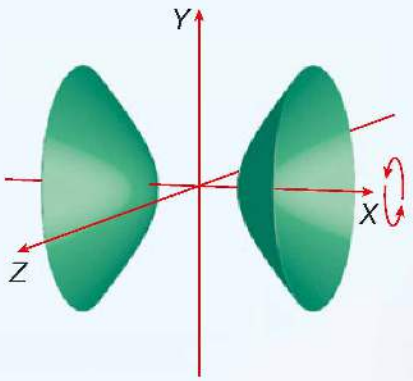
Obrót hiperboli

Hiperboloida to powierzchnia zakreślona w wyniku obrotu hiperboli wokół jej osi symetrii w przestrzeni trójwymiarowej.

Po obróceniu pokazanej wyżej hiperboli wokół osi *OY* powstanie **hiperboloida jednopowłokowa**.



Po obróceniu tej hiperboli wokół osi *OX* otrzymujemy **hiperboloidę dwupowłokową**.

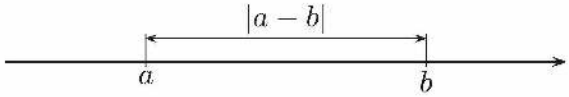


Chłodnie kominowe

Chłodnie kominowe mają najczęściej kształt hiperboloidy jednopowłokowej. Pozwala to na oszczędne zużycie materiałów konstrukcyjnych. Mimo znacznych rozmiarów (wysokość chłodni przekracza zwykle 120 m, a średnica podstawy chłodni – 90 m) grubość żelbetowego płaszcza w najcieńszych miejscach wynosi zaledwie 12–18 cm. Taki kształt chłodni zwiększa również ich odporność na zginanie.

3.9. Równania z wartością bezwzględną

Wartość bezwzględna liczby a jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0.
Ogólnie odległość na osi liczbowej między liczbami a i b jest równa $|a-b|$.



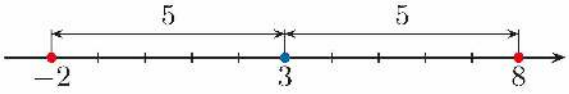
$$|a-b| = |b-a|$$

Odległość między liczbami a i b na osi liczbowej jest taka sama jak odległość między liczbami b i a.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $|x-3| = 5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od 3 wynosi 5.



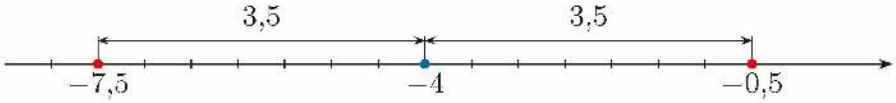
Szukanymi liczbami są -2 i 8.

Sprawdzenie:
dla $x=-2$: $|-2-3| = |-5| = 5$,
dla $x=8$: $|8-3| = |5| = 5$.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|x+4| = 3{,}5$.

Równanie zapisujemy w postaci: $|x-(-4)| = 3{,}5$ i szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od -4 wynosi 3,5.



Szukanymi liczbami są 7,5 i $-0{,}5$.

Sprawdzenie:
dla $x=-7{,}5$: $|-7{,}5+4| = |-3{,}5| = 3{,}5$,
dla $x=-0{,}5$: $|-0{,}5+4| = |3{,}5| = 3{,}5$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $|x-2| = 3$ c) $|x+6| = 2$ e) $|6-x| = 1$ g) $|x+\frac{1}{4}| = \frac{1}{2}$

b) $|x-4| = 3{,}5$ d) $|x+1| = \frac{1}{2}$ f) $|3+x| = 4$ h) $|2+x| = \sqrt{3}$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x-4| = -2$.

$|a| \geqslant 0$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

Równanie jest sprzeczne (nie ma rozwiązań).

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $|x+1| = -1$ b) $|x-5| = 0$ c) $|x+9| = 0$ d) $|x-2| = 1-\sqrt{2}$

Równania typu $|ax+b|=c$ możemy rozwiązywać, korzystając z podanej obok własności wartości bezwzględnej.

Jeśli $a>0$, to $|x|=a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=-a$ lub $x=a$.

Przykład 4

a) Rozwiąż równanie $|x-1|=6$.

$$|x-1|=6 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x-1=-6 \text{ lub } x-1=6$$
$$x=-5 \text{ lub } x=7$$

Rozwiązania równania: -5 i 7.

b) Rozwiąż równanie $|3x-4|=2$.

$$3x-4=-2 \text{ lub } 3x-4=2$$
$$3x=2 \text{ lub } 3x=6$$
$$x=\tfrac{2}{3} \text{ lub } x=2$$

Rozwiązania równania: $\frac{2}{3}$ i 2.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $|5x-3|=2$ c) $|9x+5|=4$ e) $\left|\frac{2}{3}x+4\right|=6$ g) $\left|6-\frac{7}{5}x\right|=1$

b) $|2x-1|=1$ d) $|3x+2|=4$ f) $\left|\frac{1}{2}x-3\right|=1$ h) $\left|5+\frac{3}{2}x\right|=1$

Przykład 5

Rozwiąż równanie $|x-5|+2|x-5|=12$.

$$3|x-5|=12 \;/:3$$
$$|x-5|=4$$
$$x-5=-4 \text{ lub } x-5=4$$
$$x=1 \text{ lub } x=9$$

Rozwiązania równania: 1 i 9.

Przykład 6

Rozwiąż równanie $|2x-4|+|x-2|=12$.

1. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{a}{|b|}$ dla $b\neq 0$

$$2|x-2|+|x-2|=12$$
$$3|x-2|=12 \;/:3$$
$$|x-2|=4$$
$$x-2=-4 \text{ lub } x-2=4$$
$$x=-2 \text{ lub } x=6$$

Rozwiązania równania: -2 i 6.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $|x-3|+|2x-6|=9$ c) $|4x-8|+|2-x|=5$

b) $|3x-6|-|x-2|=8$ d) $|5x-20|-|2x-8|=15$

Przykład 7

Rozwiąż równanie $\frac{2}{|x-1|} = 1$.

Zakładamy, że $x \neq 1$.

Mnożymy obie strony równania przez $|x-1|$ i otrzymujemy:

$$|x-1| = 2$$
$$x-1 = -2 \text{ lub } x-1 = 2$$
$$x = -1 \text{ lub } x = 3$$

Rozwiązania równania: -1 i 3.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{|x+2|} = 1$ b) $\frac{2}{|7x-1|} = 5$ c) $\frac{-5}{|2x-1|} = 3$ d) $\frac{1}{|5x-2|} = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $|x-5| = 1$ c) $|x+6| = 4$ e) $\left|x-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6}$ g) $|7-x| = \frac{1}{2}$

b) $|x-8| = 9$ d) $|x+9| = 2$ f) $\left|x+\frac{1}{4}\right| = \frac{3}{8}$ h) $\left|\frac{1}{3}+x\right| = \frac{2}{3}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $|3x+1| = 5$ c) $\left|\frac{3}{5}x+1\right| = 2$ e) $|4x+5| = 0$ g) $|3x+5| = 2$

b) $|2x-3| = 1$ d) $\left|2-\frac{2}{3}x\right| = 3$ f) $|3x-6| = 4$ h) $|x+\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $|4x+6| + |6x+9| = 10$ c) $|x-6| + |4x-24| + |2x-12| = 7$

b) $|11x-33| - |2x-6| = 27$ d) $|6x+4| - |3x+2| + |9x+6| = 8$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{7}{|x-1|} = 2$ b) $\frac{6}{|2x+1|} = 3$ c) $\frac{2}{|6-3x|} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{|4x-1|} = -2$

Powtórzenie

5. Rozwiąż równanie.

a) $|x-3| = 7$ c) $|2x-8| = 4$ e) $\left|\frac{1}{2}x-1\right| = 3$ g) $|10-x| = 4$

b) $|x+2| = 6$ d) $|4x+2| = 6$ f) $\left|\frac{2}{3}x+4\right| = 2$ h) $|1-3x| = 6$

6. Rozwiąż równanie.

a) $|x-1| + |3x-3| = 16$ c) $|9x+18| - |7x+14| = 10$

b) $|6x-9| + |4x-6| = 20$ d) $|6x+10| + |9x+15| = 25$

3.10. Nierówności z wartością bezwzględną

Przykład 1

a) Rozwiąż nierówność $|x-2|<5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od 2 jest mniejsza od 5.



Zatem $-3<x<7$, czyli $x\in(-3;7)$.

b) Rozwiąż nierówność $|x+4|\leqslant 3$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od -4 jest mniejsza od 3 lub równa 3.



Zatem $-7\leqslant x\leqslant -1$, czyli $x\in\langle -7;-1\rangle$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a) $|x-1|<3$ b) $|x+3|<1$ c) $|x-6|\leqslant 2$ d) $\left|x+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{3}{2}$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $|x-4|>2$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od 4 jest większa od 2.



Zatem $x<2$ lub $x>6$, czyli $x\in(-\infty;2)\cup(6;\infty)$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $|x-2|>3$ b) $|x+3|>4$ c) $|x-3|\geqslant 5$ d) $\left|x+\frac{1}{4}\right|\geqslant\frac{1}{4}$

Przykład 3

Wyznacz zbiór liczb spełniających warunek $1<|x-2|<4$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x, których odległość od 2 jest większa od 1 i mniejsza od 4.



Zatem $x\in(-2;1)\cup(3;6)$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $1 < |x-1| < 5$ c) $2 \leqslant |x-4| \leqslant 6$ e) $1 < |x-3| \leqslant 4$

b) $2 < |x+3| < 4$ d) $\frac{1}{2} \leqslant |x+2| \leqslant 3$ f) $2 \leqslant |x+5| < 3$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $|2x+3| < 5$, korzystając z podanej obok własności.

$$\begin{aligned} -5 &< 2x+3 < 5 \\ -8 &< 2x < 2 \ / : 2 \\ -4 &< x < 1 \\ x &\in (-4;1) \end{aligned}$$

Jeśli $a > 0$, to $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a < x < a$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $|2x+5| < 1$ b) $|3x-2| < 4$ c) $|4x+1| \leqslant 5$ d) $\left|2x-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{3}{2}$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $|3x-1| > 2$, korzystając z podanej obok własności.

$$\begin{gathered} |3x-1| > 2 \\ 3x-1 < -2 \quad \text{lub} \quad 3x-1 > 2 \\ 3x < -1 \quad \text{lub} \quad 3x > 3 \\ x < -\tfrac{1}{3} \quad \text{lub} \quad x > 1 \\ x \in \left(-\infty; -\tfrac{1}{3}\right) \cup (1;\infty) \end{gathered}$$

Jeśli $a > 0$, to $|x| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < -a$ lub $x > a$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność.

a) $|3x+4| > 8$ b) $|4x-2| > 6$ c) $\left|\frac{1}{2}x+1\right| \geqslant 3$ d) $\left|\frac{1}{4}x-1\right| \geqslant \frac{1}{2}$

Przykład 6

Rozwiąż nierówność $\sqrt{(x-2)^2} \leqslant 5$, korzystając z podanej własności.

$$\begin{aligned} |x-2| &\leqslant 5 \\ -5 &\leqslant x-2 \leqslant 5 \\ -3 &\leqslant x \leqslant 7 \\ x &\in \langle -3;7 \rangle \end{aligned}$$

Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:
$\sqrt{a^2} = |a|$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{x^2-6x+9} \leqslant 6$ b) $\sqrt{x^2+8x+16} < 3$ c) $\sqrt{4x^2-4x+1} > 2$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

a) $|x-7| < 3$ c) $|x+4| < 1$ e) $|4-x| > 1$ g) $\left|x+\frac{2}{3}\right| > \frac{1}{3}$

b) $|x-3| \leqslant 7$ d) $|x+1| \leqslant 4$ f) $|4+x| \geqslant 3$ h) $\left|x-\sqrt{7}\right| \geqslant \sqrt{7}$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $|x-5| > 1$ c) $|x+2| \geqslant 6$ e) $|3+x| < 6$ g) $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{3}{4}$

b) $|x-2| \geqslant 5$ d) $|x+3| \geqslant 3$ f) $|9-x| \leqslant 7$ h) $\left|x+\frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $|3x-5| \leqslant 2$ c) $|2x+4| < 8$ e) $|6-3x| \leqslant 9$ g) $\left|-\frac{3}{2}x+6\right| \leqslant 0$

b) $|4x-2| < 8$ d) $\left|\frac{1}{3}+x\right| < \frac{1}{2}$ f) $\left|\frac{1}{3}x-1\right| \leqslant 7$ h) $\left|-\frac{2}{5}x-2\right| < 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $|5x+2| > 7$ c) $\left|\frac{1}{3}x+2\right| \geqslant 1$ e) $\left|\frac{2}{3}x-3\right| \geqslant 5$ g) $|2x-3| > 0$

b) $\left|3x-\frac{1}{2}\right| > \frac{3}{2}$ d) $|6x+2| > 1$ f) $\left|3x-\frac{1}{4}\right| > \frac{1}{8}$ h) $|4x-1| \geqslant 0$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozwiąż nierówność.

a) $\frac{4}{|x+2|} > 1$ c) $\frac{2}{|x-1|} < 1$

b) $\frac{6}{|x-5|} \geqslant 3$ d) $\frac{1}{|x+3|} \leqslant \frac{1}{2}$

Rozwiąż nierówność $\frac{2}{|x-3|} > 1$.

Zakładamy, że $x \neq 3$.

$$\frac{2}{|x-3|} > 1 \ / \cdot |x-3| \qquad |x-3| > 0$$

$$2 > |x-3|$$

$$-2 < x-3 < 2, \text{ stąd } 1 < x < 5.$$

Zatem $x \in (1;3) \cup (3;5)$.

Powtórzenie

6. Rozwiąż nierówność.

a) $|x-1| \leqslant 3$ c) $|x-2| < 1$ e) $|x-4| > 5$ g) $\left|\frac{2}{5}-x\right| \geqslant \frac{1}{5}$

b) $|x-3| < 1$ d) $|x+2| \leqslant 9$ f) $|x+5| \geqslant 3$ h) $\left|\frac{1}{6}+x\right| > \frac{1}{3}$

7. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x+3| \leqslant 5$ c) $\left|2x+\frac{1}{2}\right| > 2$ e) $\left|\frac{5}{2}x+10\right| \geqslant 5$ g) $|2x-4| \leqslant 0$

b) $|3x-9| \geqslant 6$ d) $\left|2-\frac{1}{3}x\right| < 1$ f) $\left|\frac{3}{4}+\frac{5}{4}x\right| < \frac{1}{4}$ h) $|x+11| > 0$

3.11. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

Przykład 1

Licznik pewnego ułamka jest równy 6. Jeśli licznik tego ułamka zmniejszymy o 2, a mianownik o 3, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?

Szukany ułamek możemy zapisać w postaci $\frac{6}{x}$, wówczas nowy ułamek będzie miał postać $\frac{6-2}{x-3}$, czyli $\frac{4}{x-3}$. Otrzymujemy więc równanie:

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{x-3}, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$$

$$6(x-3) = 4x$$

$$x = 9$$

Zatem szukany ułamek to $\frac{6}{9}$.

Ćwiczenie 1

a) Licznik pewnego ułamka jest równy 10. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 20, a mianownik o 30, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?

b) Licznik pewnego ułamka nieskracalnego jest o 2 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 9, a mianownik o 5, to wartość ułamka dwukrotnie wzrośnie. Wyznacz ten ułamek.

c) Dane są dwie liczby dodatnie. Jedna z tych liczb jest o 3 mniejsza od drugiej, a ich stosunek jest jak 75 do 100. Wyznacz te liczby.

Ćwiczenie 2

a) Obwód kwadratu jest równy 52 cm. Jeden bok tego kwadratu wydłużono o x cm, a drugi skrócono o x cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy $4:3$. Oblicz pole tego prostokąta.

b) Pole kwadratu jest równe 324 cm^2. Jeden bok tego kwadratu wydłużono o $(x+1)$ cm, a drugi – o $2x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy $5:6$. Oblicz obwód tego prostokąta.

Ćwiczenie 3

a) Ola kupiła cukierki A w cenie x zł/kg i zapłaciła 24 zł. Ala kupiła taką samą ilość cukierków B, droższych o 4 zł/kg, i zapłaciła 30 zł. Ile kosztuje kilogram cukierków A, a ile – cukierków B?

b) Cena winogron to obecnie x zł/kg. Tydzień temu, kiedy winogrona były o 4 zł/kg droższe, Tomek wydał na ich zakup 20 zł. Gdyby obecna cena spadła o 1 zł/kg, to taką samą ilość winogron można by kupić za 12 zł. Jaka jest obecna cena winogron?

Zadania

1. a) Mama Bartka jest o 6 lat młodsza od jego taty. Stosunek wieku mamy i taty jest jak 8 do 9. Ile lat ma mama Bartka, a ile jego tata?

b) Wujek Stefana jest o 4 lata starszy od jego cioci. Stosunek podwojonego wieku wujka do wieku cioci jest równy $20:9$. Ile lat ma wujek, a ile ciocia?

2. a) Magda ma 25 lat, a jej młodsza siostra – 13 lat. Za ile lat stosunek wieku Magdy i jej siostry będzie równy $\frac{3}{2}$?

b) Babcia Krysi jest o 8 lat młodsza od jej dziadka. 34 lata temu stosunek wieku babci do wieku dziadka był jak 2 do 3. Ile lat ma babcia, a ile dziadek?

3. a) Boki prostokąta mają długości x cm i $2x$ cm. Gdyby jego krótszy bok wydłużyć o 6 cm, a dłuższy – o 5 cm, to stosunek długości boków byłby równy $2:3$. Oblicz obwód tego prostokąta.

b) Dany jest prostokąt o bokach 30 cm i 18 cm. Jeden z tych boków wydłużono o x cm, a drugi – o $2x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy $5:9$. O ile zwiększył się obwód tego prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Piotrek potrzebuje 4 godzin na pomalowanie płotu wokół domu. Adam tę samą pracę wykonałby w ciągu 8 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie płotu, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

Oznaczmy przez w pracę, którą należy wykonać. Wówczas:

$\frac{w}{4}$ – praca wykonana przez Piotrka w ciągu godziny,

$\frac{w}{8}$ – praca wykonana przez Adama w ciągu godziny,

$\frac{w}{4}+\frac{w}{8}=\frac{3}{8}w$ praca wykonana wspólnie w ciągu godziny.

Z tego wynika, że na wspólne wykonanie pracy chłopcy potrzebowaliby:

$$w:\frac{3}{8}w=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}\ [\text{h}]$$

czyli 2 godzin i 40 minut.

Artur potrzebuje 10 godzin na pomalowanie pokoju, a Darek zrobiłby to w ciągu 6 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie pokoju, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

5. Dwie koparki, pracując razem, wykonują wykop w ciągu 8 dni. Gdyby w tym samym tempie pracowała tylko pierwsza z nich, wykop powstałby w ciągu 12 dni. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu drugiej koparce?

6. Pierwsza koparka wykonała połowę wykopu w ciągu 6 godzin, resztę wykopu wykonała druga koparka w ciągu 9 godzin. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu, gdyby obie koparki pracowały jednocześnie, każda w swoim tempie?

7. W tabeli podano, ile czasu potrzeba na wypompowanie wody ze zbiornika przy wykorzystaniu pompy: A, B lub C.

Pompa A	10 godzin
Pompa B	9 godzin
Pompa C	6 godzin

a) Ile czasu zajmie wypompowanie wody, jeśli wykorzystamy jednocześnie pompy A i C?

b) O której godzinie zakończy się wypompowywanie wody, jeśli pompy B i C zaczną pracować o godzinie 9:00?

8. Objętość wody przepływającej w ciągu minuty przez rurę A jest o 3 m^3 większa od połowy objętości wody przepływającej w tym czasie przez rurę B, a stosunek tych objętości $(V_A : V_B)$ jest równy $4:5$. Oblicz, ile czasu zajmie napełnienie zbiornika o pojemności 360 m^3 jednocześnie z obu rur.

Powtórzenie

9. a) Licznik pewnego ułamka jest o 6 większy od jego mianownika. Jeśli licznik i mianownik zwiększymy o 11, to otrzymamy ułamek równy $\frac{4}{3}$. Znajdź wyjściowy ułamek.

b) Licznik pewnego ułamka jest liczbą dodatnią i jest o 3 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik i mianownik zwiększymy o 10, to otrzymamy ułamek dwa razy większy. Znajdź wyjściowy ułamek.

10. a) Boki prostokąta mają długości x cm i $(x+4)$ cm. Jeśli oba boki skrócimy o 4 cm, to stosunek ich długości będzie równy $3:5$. Oblicz obwód tego prostokąta.

b) Dany jest prostokąt o bokach 32 cm i 51 cm. Jego krótszy bok skrócono o x cm, a dłuższy bok – o $3x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy $3:4$. O ile zmniejszył się obwód prostokąta? Rozpatrz dwa przypadki.

11. Rodzice Roberta mają na działce truskawki. Zebranie truskawek zajęłoby Robertowi 4 godziny, a jego młodszemu bratu – 6 godzin. Ile czasu zajmie im zbiór truskawek, jeśli będą pracować razem, każdy w swoim tempie?

3.12. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

Przykład 1

Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z Malborka. Po pewnym czasie pierwszy znajdował się w odległości 320 km, a drugi 240 km od tego miasta. Średnia prędkość drugiego samochodu była o 20 km/h mniejsza od prędkości pierwszego. Oblicz średnie prędkości, z jakimi poruszały się te samochody.

Oznaczmy przez v_1 i v_2 średnie prędkości samochodów. Wówczas:

$$\frac{320}{v_1} = \frac{240}{v_1 - 20}$$

Korzystamy ze wzoru $t = \frac{s}{v}$, gdzie t oznacza czas, s – drogę.

$320(v_1 - 20) = 240v_1$, stąd $v_1 = 80$ oraz $v_2 = 80 - 20 = 60$

Średnie prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 80 km/h i 60 km/h.

Ćwiczenie 1

a) Samochód jadący ze średnią prędkością v pokonał odległość 195 km. Samochód jadący ze średnią prędkością o 20 km/h większą pokonał w tym samym czasie 260 km. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

b) Droga między miastami A i B ma 350 km. Z tych miast wyruszyły równocześnie naprzeciw siebie dwa samochody. Pierwszy z nich jechał ze średnią prędkością o 30 km/h większą niż drugi. Samochody minęły się, gdy pierwszy pokonał $\frac{3}{5}$ trasy między miastami. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

Ćwiczenie 2

a) Pociąg ekspresowy jechał ze średnią prędkością o 30 km/h większą niż pociąg osobowy i przebył trasę długości 360 km w czasie o godzinę krótszym. Oblicz średnie prędkości tych pociągów.

b) Trasa kolejowa z miasta A do miasta B ma 510 km. Z tych miast wyruszyły równocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi. Średnia prędkość pierwszego była o 10 km/h większa niż średnia prędkość drugiego. Pociągi spotkały się w odległości 270 km od miasta A. Oblicz średnie prędkości, z jakimi się poruszały.



Zadania

1. Pociąg miał pokonać trasę między dwoma miastami w czasie określonym w rozkładzie jazdy. Z powodu awarii został zatrzymany na pół godziny na stacji pośredniej. Pozostałe 120 km przejechał z prędkością większą o 20 km/h i dzięki temu nadrobił powstałe opóźnienie. Oblicz, jaka powinna być średnia prędkość pociągu zgodnie z rozkładem jazdy.

2. Dwaj rowerzyści wyjechali równocześnie na trasę długości 36 km. Średnia prędkość pierwszego rowerzysty była o 6 km/h większa niż średnia prędkość drugiego, więc pokonał on trasę w czasie o godzinę krótszym niż drugi. Oblicz średnie prędkości obu rowerzystów.

3. Tomek przejechał na rowerze 32 km szosą i 20 km polną drogą w czasie 2 godzin i 40 minut. Średnia prędkość jazdy po szosie była o 20 km/h większa od średniej prędkości jazdy po polnej drodze. Oblicz średnią prędkość na szosie i średnią prędkość na polnej drodze.

4. Trasa rowerowa wokół jeziora ma długość 12 km. Dwóch rowerzystów wyruszyło jednocześnie z tego samego miejsca i okrążało jezioro w tym samym kierunku. Średnia prędkość jednego z nich była o 5 km/h mniejsza niż średnia prędkość drugiego. Do ponownego spotkania rowerzystów doszło, gdy szybszy z nich wykonał 4 okrążenia jeziora, a wolniejszy – 3. Oblicz średnie prędkości obu rowerzystów.

5. Samochód przejechał drogę z miasta A do B o długości 240 km ze średnią prędkością v. W drodze powrotnej przez godzinę jechał ze średnią prędkością v, a następnie zwiększył prędkość o połowę, w rezultacie drogę powrotną przejechał w czasie o godzinę krótszym. Wyznacz średnią prędkość v.

Powtórzenie

6. Droga między miastami A i B ma 210 km. Z tych miast wyjechały jednocześnie naprzeciw siebie dwa samochody. Każdy z nich jechał ze stałą prędkością. Minęły się one w odległości 90 km od miasta A. Oblicz prędkość każdego z nich, jeśli jeden jechał o 15 km/h szybciej niż drugi.

7. Trasę o długości 144 km samochód przejechał w czasie o godzinę krótszym niż motocykl. Oblicz średnią prędkość każdego z pojazdów na tym odcinku, jeśli średnia prędkość samochodu była o 24 km/h większa niż średnia prędkość motocykla.

3.13. Zagadnienia uzupełniające

Nierówności wymierne

Przykład 1

Rozwiąż nierówność $\frac{3}{x} < -1$.

Zakładamy, że $x \neq 0$.

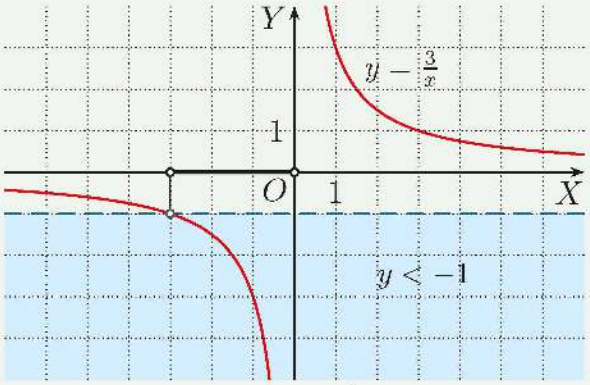
$$\frac{3}{x} < -1$$
$$\frac{3}{x} + 1 < 0$$
$$\frac{3+x}{x} < 0 \ / \cdot x^2$$

Mnożymy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika. Zwrot nierówności się nie zmienia, ponieważ kwadrat wyrażenia różnego od zera jest zawsze dodatni.

$$(3+x)x < 0$$

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in (-3; 0)$.





Rozwiązanie nierówności $\frac{3}{x} < -1$ można również odczytać z wykresu.

1. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{4}{x} > 2$ b) $\frac{2}{x} \leqslant -1$ c) $-\frac{3}{2x} \geqslant 2$ d) $-\frac{3}{4x} < 2$

Przykład 2

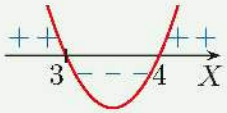
Rozwiąż nierówność $\frac{2x-5}{x-3} \leqslant 3$.

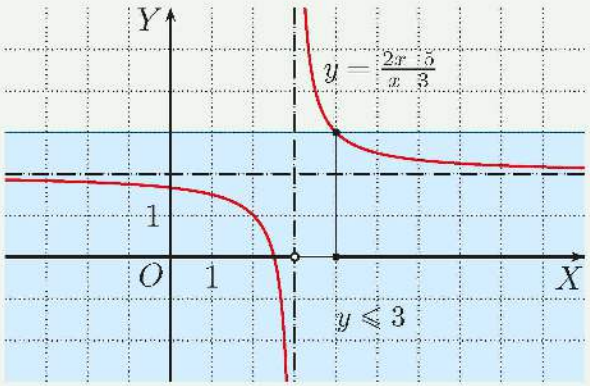
Zakładamy, że $x \neq 3$.

$$\frac{2x-5}{x-3} - 3 \leqslant 0$$
$$\frac{2x-5-3(x-3)}{x-3} \leqslant 0$$
$$\frac{-x+4}{x-3} \leqslant 0 \ / \cdot (x-3)^2$$
$$-(x-4)(x-3) \leqslant 0 \ / \cdot (-1)$$
$$(x-4)(x-3) \geqslant 0$$

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$x \in (-\infty; 3) \cup \langle 4; \infty)$$

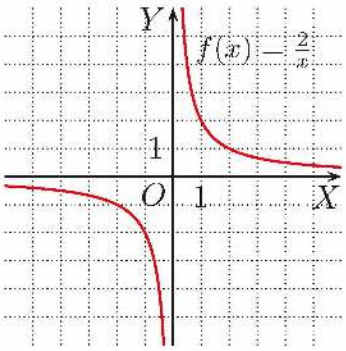




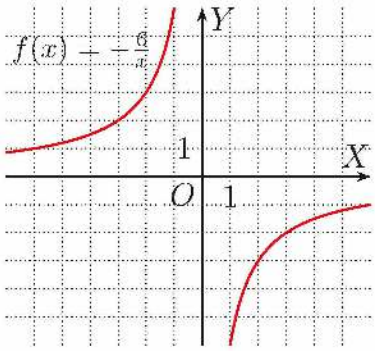
Rozwiązanie nierówności $\frac{2x-5}{x-3} \leqslant 3$ można również odczytać z wykresu.

2. Odczytaj z wykresu funkcji f rozwiązania nierówności $f(x) > 2$ oraz $f(x) \geqslant -2$. Sprawdź odpowiedzi, rozwiązując odpowiednie nierówności.

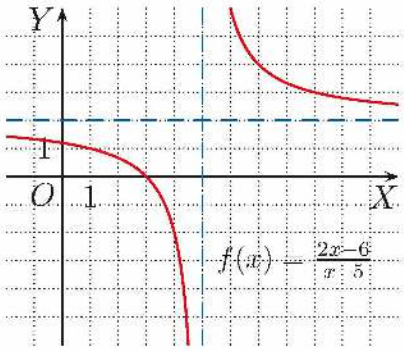
a)



b)



c)



3. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3}{x-2} \geqslant 1$ c) $\frac{2}{4-x} < 3$ e) $\frac{1-x}{x} \leqslant -4$ g) $\frac{2x+3}{x+3} < 5$

b) $\frac{2x+7}{x-4} > 3$ d) $\frac{4x-7}{x-2} \leqslant 5$ f) $\frac{2x-2}{x+1} > 2$ h) $\frac{-7x+2}{x+\frac{1}{2}} \leqslant -6$

Wyrażenia wymierne dwóch zmiennych

4. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = 2$ oraz $y = -4$.

a) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ b) $\frac{x^3-x^2y}{yx-y^2}$ c) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

5. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $a = -1$ i $b = 2$.

a) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ b) $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2-2ab} \cdot \frac{a-b}{ab+b^2}$

6. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{y+3}{x^2} \cdot \frac{x^3}{y^2+6y+9}$ c) $\frac{x^2-4xy}{5x} : \frac{x-4y}{20xy}$ e) $\frac{x^3-y^3}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$

b) $\frac{4y^2-9}{4x} \cdot \frac{6x^2}{3-2y}$ d) $\frac{x^2-y^2}{x+2y} : \frac{4y^2-4x^2}{x^2+4xy+4y^2}$ f) $\frac{(x+y)^3}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$

7. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$ c) $\frac{y^2-1}{xy^3} - \frac{x^2-1}{x^3y}$ e) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} - \frac{2xy}{x^2-y^2}$

b) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$ d) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$ f) $\frac{3x}{2x-y} - \frac{3x}{2x+y} + \frac{4xy}{4x^2-y^2}$

8. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{a^2+ab}{a^2b^2}\left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}\right)$ b) $\left(a - \frac{a^2}{a-1}\right)^{-1}\left(\frac{a+1}{b} - \frac{1}{b-ab}\right)$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Podaj wzór proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$, jeśli do jej wykresu należy punkt A. Podaj współrzędne trzech innych punktów należących do wykresu tej zależności.

a) $A(3, 8)$ b) $A(\frac{1}{2}, 4)$ c) $A(7, \frac{1}{28})$ d) $A(27, \frac{1}{9})$

2. Oblicz wartości funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla:

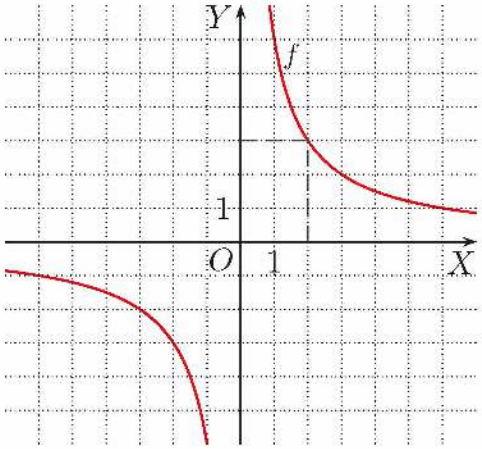
a) $x \in \{-4, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$, $a = -2$,

b) $x \in \{-2, -1, \frac{1}{4}\}$, $a = \frac{1}{2}$,

c) $x \in \{-9, \frac{9}{10}, 1\frac{1}{2}\}$, $a = 1\frac{1}{5}$,

d) $x \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{8}, \sqrt{2} - 1\right\}$, $a = \sqrt{2}+1$.

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a.



a) Które spośród punktów: $P(-8, -\frac{3}{4})$, $Q(\frac{1}{2}, 12)$, $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ należą do wykresu funkcji f?

b) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3.

c) Rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant 4$.

4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{5}{x}$, której dziedziną jest zbiór D. Podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ b) $D = (-\infty; -1)$ c) $D = \langle 1; 5\rangle$ d) $D = \langle -1; 1\rangle \setminus \{0\}$

5. Naszkicuj wykresy funkcji f i g. Podaj dziedzinę funkcji g i równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x} + 1$

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = -\frac{3}{x} - 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-4}$

d) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x+2}$

6. Naszkicuj wykresy funkcji: f, g i h. Podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x-1}$, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 1$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x+1}$, $h(x) = \frac{3}{x+1} - 1$

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $g(x) = -\frac{2}{x+2}$, $h(x) = -\frac{2}{x+2} + 3$

7. Które spośród liczb: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 nie należą do dziedziny wyrażenia?

a) $\frac{16x^2+x+5}{x^3-9x^2}$ b) $\frac{x^2+6x+9}{x^4-4x^3+4x^2}$ c) $\frac{x^5-3x^4+x}{x^2-x-6}$ d) $\frac{2x^4-16x^3+9}{x^3-x^2-2x}$

8. Wyznacz dziedzinę funkcji f. Oblicz $f(-3)$, $f(1)$ i $f(3)$.

a) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-4}$ c) $f(x)=\frac{x+0{,}5}{4x^2-1}$

b) $f(x)=\frac{x^2+21}{x^2-3}$ d) $f(x)=\frac{3x^2-6x}{4x^2-9}$

9. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{2x}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+x}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+8x+16}\cdot\frac{2x+8}{x-3}$ e) $\frac{2-1{,}5x}{9x^2-16}:\frac{x+3}{4+3x}$

b) $\frac{4x^2-9}{4x^2-1}\cdot\frac{2x+1}{3-2x}$ d) $\frac{x^4-x}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x^2+x+1}$ f) $\frac{x^2+2x+4}{x^3-8}:\frac{x+2}{x-2}$

10. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{x+4}+\frac{5}{x-4}$ c) $\frac{3}{x}+\frac{1}{x+3}$ e) $\frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}$

b) $\frac{6}{x-3}-\frac{4}{3-x}$ d) $\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x+1}$ f) $\frac{2}{x-3}+\frac{6}{x^2-3x}$

11. Wyznacz pole trapezu o podstawach a, b i wysokości h $(x>0)$.

a) $a=\frac{2}{x+3}$, $b=\frac{4}{x+3}$, $h=\frac{2x+6}{3}$ b) $a=\frac{1}{2x+1}$, $b=\frac{4x+3}{2x+1}$, $h=\frac{2x+1}{2x+2}$

12. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x-3}}$ b) $f(x)=\frac{\sqrt{-x-2}}{\sqrt{x+5}}$ c) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{6-x}}$

Zestaw II

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2+6x}{x^2-6x}=0$ c) $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4x+4}=0$ e) $\frac{x^2-2x-8}{x^2-x-2}=0$

b) $\frac{x^2-4}{x^2+2x}=0$ d) $\frac{4x^2-12x+9}{3x-2x^2}=0$ f) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}=0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x^2+5x-3}{4x^2-4x+1}=0$ c) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=0$ e) $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2}=0$

b) $\frac{9x^2+12x+4}{3x^2-x-2}=0$ d) $\frac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}=0$ f) $\frac{6x^2+x-1}{3x^2+5x-2}=0$

3. Rozwiąż równanie dla $a=0$ oraz dla $a=1$.

a) $\frac{x+8}{2x}=a$ b) $\frac{x+9}{2-x}=a$ c) $\frac{4x^2-1}{x+\frac{1}{2}}=a$ d) $\frac{x^2-x-2}{x+1}=a$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{x-1} = 2$ d) $-\frac{x}{x+2} = x$ g) $x - 1 = \frac{x+4}{x-2}$

b) $\frac{x+1}{3-x} = 1$ e) $\frac{x}{x-4} = x - 3$ h) $2x + 1 = \frac{6-8x}{4x-3}$

c) $\frac{2x-7}{x} = -5$ f) $\frac{2x+10}{x+5} = x - 2$ i) $4x - 4 = -\frac{1}{x}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5x-2}{5x} = \frac{x-1}{x+1}$ d) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2-x}{x+1}$ g) $\frac{2}{5x+10} = \frac{-3}{x^2-4}$

b) $\frac{2x}{x+4} = \frac{6x+2}{3x+6}$ e) $\frac{x+4}{x-2} - \frac{x-4}{x+2} = 0$ h) $\frac{2x+5}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$

c) $\frac{2x-5}{2x+1} = \frac{x-1}{x+3}$ f) $\frac{x-3}{1-x} + \frac{x+6}{x+2} = 0$ i) $\frac{2x+1}{x^2-9} - \frac{3}{x-3} = 0$

6. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną.

a) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h,\ b$ c) $P = \pi r^2 + \pi r l,\ l$ e) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,\ r$

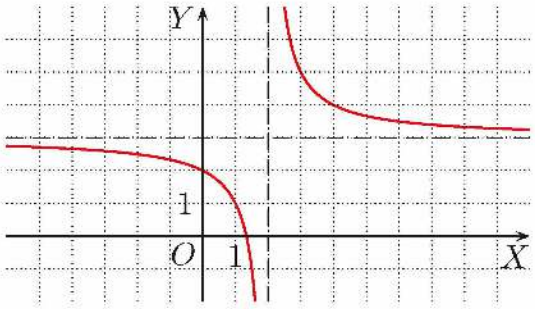
b) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h,\ h$ d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,\ h$ f) $V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ r$

7. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{a\ x}{x}$. Wyznacz współrzędne punktów, w których wykres funkcji f przecina prostą $y = 2$ oraz prostą $y = x$.

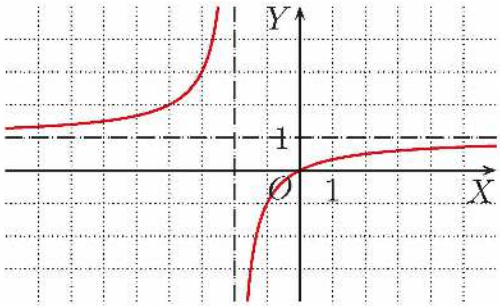
a) $a = 2$ b) $a = -1$ c) $a = 1$ d) $a = -2$

8. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{x}{x+2}$ i $g(x) = \frac{3x-4}{x-2}$.

I



II



a) Dopasuj wzór do wykresu. Podaj miejsca zerowe funkcji f i g.

b) Rozwiąż równania: $g(x) = x$ oraz $f(x) = -x$.

9. Rozwiąż równanie.

a) $|2x - 6| = 4$ c) $|4 - 2x| = 7$ c) $|x - 3| + |3x - 9| = 8$

b) $|4x + 8| = 2$ d) $|-4x - 1| = 9$ f) $|6x+3| - |4x+2| = 4$

10. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x - 8| \leqslant 8$ c) $|3x + 6| > 6$ c) $|4x-4| + |3x-3| < 7$

b) $|4 - 2x| < 6$ d) $|-9 - 3x| \geqslant 3$ f) $|8x+4| - |2x+1| \geqslant 6$

Sposób na zadanie

Przykład

Z miasta A do oddalonego o 640 km miasta B wyruszył samochód jadący ze średnią prędkością v km/h. Równocześnie z miasta B tą samą drogą wyruszył samochód do miasta A ze średnią prędkością o 20 km/h większą. Samochody te minęły się w odległości 280 km od miasta A. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

Zadanie to można rozwiązać, układając i rozwiązując równanie wymierne lub układ równań.

I sposób

Korzystamy z zależności: $t = \frac{s}{v}$, gdzie t jest czasem, s – drogą, a v – prędkością.
Pierwszy samochód, jadąc z prędkością v km/h do momentu minięcia z drugim samochodem, przejechał 280 km. Zatem otrzymujemy równość $t = \frac{280}{v}$.
Drugi samochód, jadąc z prędkością $(v + 20)$ km/h, w tym samym czasie przejechał $640 - 280 = 360$ [km]. Zatem otrzymujemy równość $t = \frac{360}{v+20}$.

$$\frac{360}{v+20} = \frac{280}{v}$$
$$360v = 280(v + 20)$$
$$360v = 280v + 5600$$
$$80v = 5600$$
$$v = 70$$

II sposób

Korzystamy z zależności: $s = v \cdot t$, gdzie s jest drogą, v – prędkością, a t – czasem.
Pierwszy samochód, jadąc z prędkością v km/h, pokonał w czasie t drogę 280 km. Zatem $280 = v \cdot t$.
Drugi samochód, jadąc z prędkością $(v + 20)$ km/h, pokonał w tym samym czasie drogę 360 km. Zatem $360 = (v + 20) \cdot t$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 280 = vt \\ 360 = vt + 20t \end{cases}$$
$$360 = 280 + 20t$$
$$20t = 80$$
$$t = 4$$

Podstawiamy $t = 4$ do pierwszego równania i otrzymujemy $v = 70$.

Odpowiedź: Średnie prędkości samochodów wynosiły 70 km/h i 90 km/h.

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Punkty $P(1,2)$ i $Q(3,4)$ należą do wykresu funkcji:

A. $f(x)=\frac{3x-6}{x-2}$, **C.** $f(x)=\frac{x-7}{x-4}$,

B. $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$, **D.** $f(x)=\frac{2x+6}{x+3}$.

2. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $f(x)=\frac{-4}{x-p}+q$ dla:

A. $p=-3,\ q=0$, **C.** $p=4,\ q=-3$,

B. $p=2,\ q=-1$, **D.** $p=1,\ q=2$.

3. Funkcją rosnącą w każdym z przedziałów $(-\infty;-2)$ i $(-2;\infty)$ jest funkcja:

A. $f(x)=\frac{1-\sqrt{2}}{x+2}$, **C.** $f(x)=\frac{2-\sqrt{3}}{x+2}$,

B. $f(x)=\frac{6}{x+2}$, **D.** $f(x)=\frac{1}{x+2}+8$.

4. Liczby -5 i 1 są rozwiązaniami równania:

A. $\frac{8-8x}{x-1}=x-3$, **C.** $\frac{6x+30}{x+5}=x+5$,

B. $\frac{2-6x}{x+1}=x-3$, **D.** $\frac{x+5}{x+1}=x+5$.

5. Ile rozwiązań ma równanie $\frac{(x^2-1)(x^2-2)}{(x-1)^2(x-2)^2}=0$?

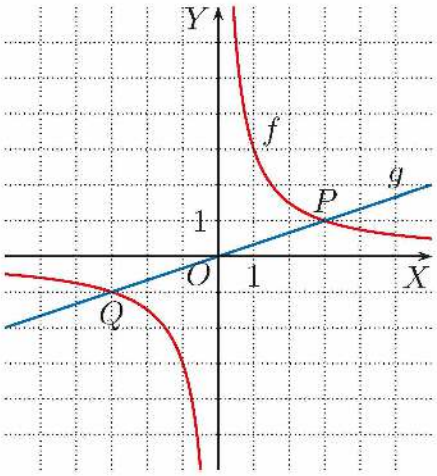
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

6. Jeśli $\frac{m}{a}-2-\frac{1}{a}=n$, to:

A. $a=\frac{m-1}{n+2}$, **B.** $a=\frac{m-1}{n-2}$, **C.** $a=\frac{n+2}{m-1}$, **D.** $a=\frac{n-2}{m-1}$.

7. Wykresy funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ i $g(x)=bx$ przecinają się w punktach $P(3,1)$ i $Q(-3,-1)$ (rysunek obok). Wynika stąd, że $a+b$ jest równe:

A. $-2\frac{2}{3}$, **B.** 0, **C.** $3\frac{1}{3}$, **D.** 6.



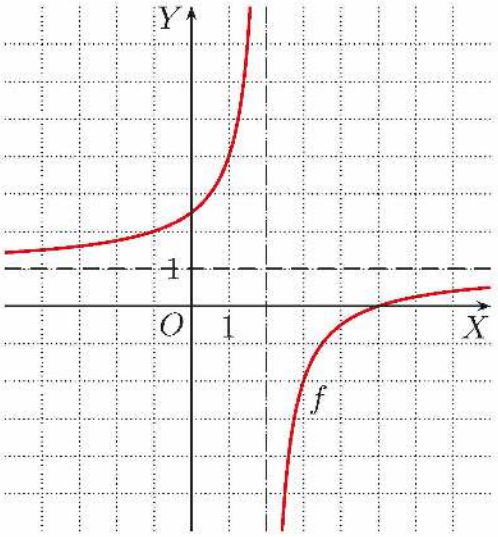
8. Kajakarz płynie po stojącej wodzie z prędkością 10 km/h. Płynąc z prądem rzeki, pokonuje trasę długości 24 km w czasie o godzinę krótszym, niż zrobiłby to, gdyby płynął pod prąd. Prąd rzeki ma prędkość:

A. 1 km/h, **B.** 1,5 km/h, **C.** 2 km/h, **D.** 2,5 km/h.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$. Powstał on w wyniku przesunięcia hiperboli $y = -\frac{3}{x}$. Oblicz współczynniki a i b.



Zadanie 2 (2 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a, jeśli wzór funkcji f można zapisać w postaci $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{1}{x}$.

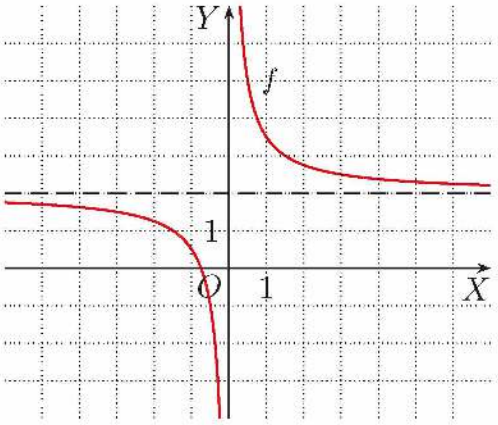
Zadanie 3 (2 pkt)

Rozwiąż równanie $|6x - 3| - |1 - 2x| = 10$.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{2x} + b$.



a) Podaj wartość współczynnika b i oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle \frac{1}{2}; 6 \rangle$.

b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

$$g(x) = f(x) - \frac{3}{8}x$$

D **Zadanie 5 (3 pkt)**

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{9x^3 - x}{9x^3 + 6x^2 + x}$ ma tylko jedno miejsce zerowe.

Zadanie 6 (4 pkt)

Pierwszą połowę trasy pociąg przebył ze średnią prędkością v, a drugą połowę – ze średnią prędkością dwa razy mniejszą. Cała trasa ma długość 140 km. Wyznacz wzór opisujący zależność między czasem t, w jakim pociąg przebył całą trasę, a średnią prędkością v. Oblicz t dla $v = 120$ km/h.

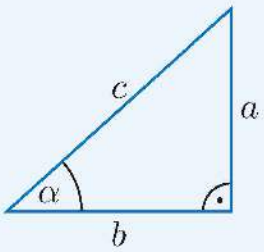
Zadanie 7 (4 pkt)

Ze stacji A do stacji B, oddalonych od siebie o 100 km, wyjechał pociąg. Po przejechaniu 20 km zatrzymał się z powodu awarii i stał 10 minut. Aby nadrobić opóźnienie, pozostałą część trasy jechał ze średnią prędkością 1,2 raza większą niż przed awarią. Oblicz średnią prędkość, z jaką jechał pociąg na pierwszym odcinku trasy.



4 Trygonometria

Jedną z funkcji trygonometrycznych omawianych w tym rozdziale jest funkcja sinus – słowo to po łacinie oznacza zagięcie, zatokę. Jeśli znamy wartość sinusa kąta α (w skrócie $\sin\alpha$) oraz długość przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego, możemy obliczyć długość przyprostokątnej a (rysunek obok), korzystając z równości $a = c\sin\alpha$.



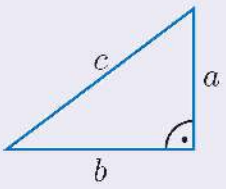
Na przykład, chcąc się dowiedzieć, na jaką wysokość sięgnie drabina strażacka o długości 40 m podniesiona pod kątem 65°, wykonujemy mnożenie $40\cdot\sin 65°$. Ponieważ $\sin 65° \approx 0{,}9$, więc wysokość ta jest równa około 36 m.

4.1. Trójkąty prostokątne

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia (patrz str. 193 194), tu korzystamy z własności podobieństwa trójkątów.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. Prowadzimy w nim wysokość CD (rysunek poniżej). Na podstawie cechy KKK trójkąty: CBD, ACD i ABC są podobne.
Z podobieństwa trójkątów ABC i CBD otrzymujemy:

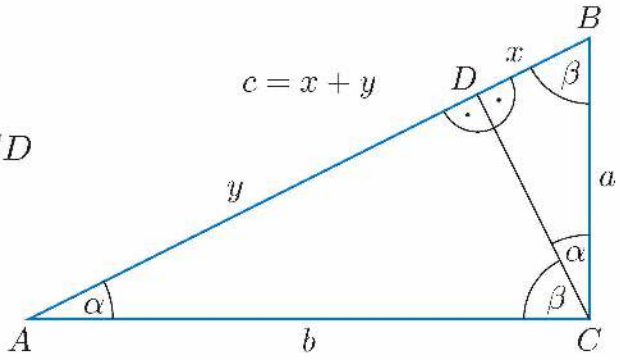
$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$$

$$a^2 = cx$$

Z podobieństwa trójkątów ABC i ACD otrzymujemy:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$

$$b^2 = cy$$



Zatem $a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y)$, ale $x + y = c$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

Ćwiczenie 1

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.

a) $a = 30, b = 40$

b) $a = \sqrt{5}, b = 2$

c) $a = 2\sqrt{2} - 1, b = 2\sqrt{2} + 1$

d) $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}, b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

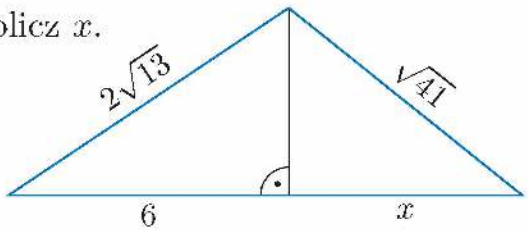
e) $a = b = 2\sqrt{2}$

f) $a = \frac{1}{b} = 2$

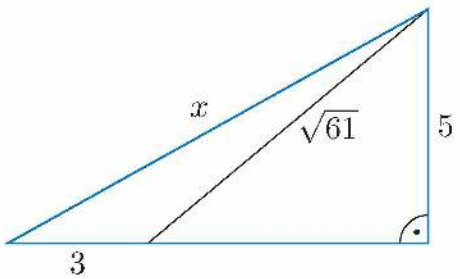
Ćwiczenie 2

Oblicz x.

a)



b)



Aby sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny, można wykorzystać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

> Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Dowód

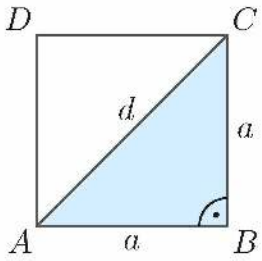
Rozpatrzmy trójkąt T o bokach długości a, b, c takich, że $a^2 + b^2 = c^2$, oraz trójkąt prostokątny T_1 o przyprostokątnych długości a i b.
Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna c_1 trójkąta T_1 spełnia warunek $c_1^2 = a^2 + b^2$. Zatem $c_1 = c$.
Oznacza to, że trójkąty T i T_1 są przystające na podstawie cechy BBB. Zatem trójkąt T jest trójkątem prostokątnym.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy trójkąt o danych bokach jest trójkątem prostokątnym.

a) 3, 4, 5 b) 5, 9, 11 c) 9, 40, 41 d) $\frac{9}{10}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$

Szczególne znaczenie mają dwa trójkąty prostokątne. Jeden z nich to trójkąt będący połową kwadratu, czyli o kątach 45°, 45°, 90°.



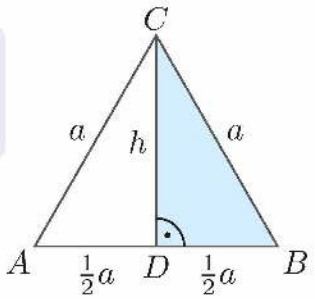
> Przekątna kwadratu o boku długości a jest równa $a\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 4

D a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

b) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego pole jest równe 72 cm^2.

Drugi ważny trójkąt prostokątny to trójkąt będący połową trójkąta równobocznego, czyli o kątach 30°, 60°, 90°.



> Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ćwiczenie 5

D a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 6 cm.

Zadania

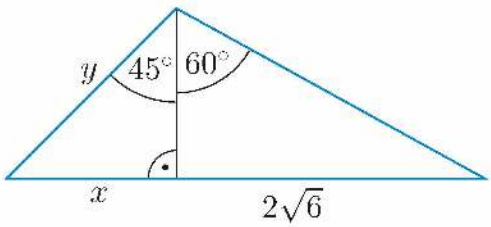
1. Oblicz pole równoramiennego trójkąta prostokątnego, którego:

a) obwód jest równy $6(1+\sqrt{2})$,

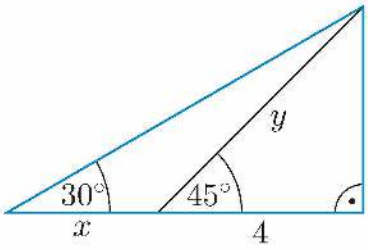
b) przeciwprostokątna jest o $1+\sqrt{2}$ dłuższa od przyprostokątnej.

2. Oblicz x i y.

a)



b)

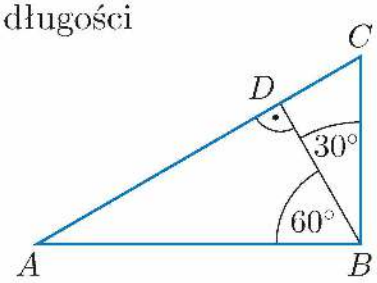


3. a) Najdłuższy bok trójkąta równoramiennego ma długość 15 cm, a jeden z jego kątów ma miarę 120°. Oblicz obwód tego trójkąta.

b) Kąty ostre trójkąta mają miary 30° i 45°, a wysokość opuszczona na najdłuższy bok jest równa 3 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

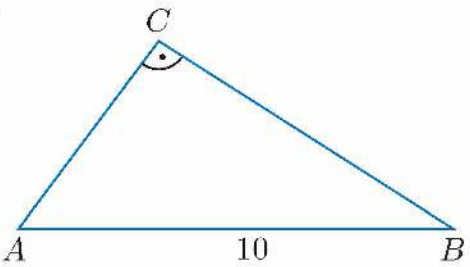
4. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ostrych jest dwukrotnie większy od drugiego kąta, a suma długości przeciwprostokątnej i dłuższej przyprostokątnej jest równa $2\sqrt{6}+6\sqrt{2}$.

5. Oblicz obwód trójkąta ABD (rysunek obok), jeśli pole trójkąta BCD jest równe $3\sqrt{3}$.

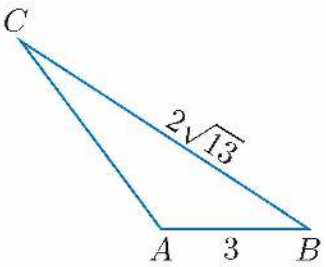


6. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C ma długość 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

a)



b)



7. a) Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

b) Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60°, a jego przeciwprostokątna ma długość 12 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

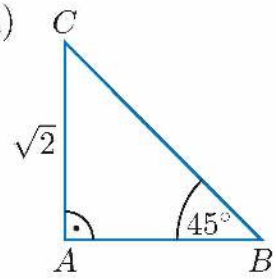
8. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 30 cm, a jego najdłuższy bok ma długość 13 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

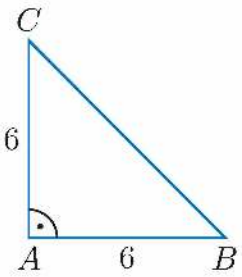
b) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 2 cm. Długość jednej z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną długości przeciwprostokątnej i drugiej przyprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta.

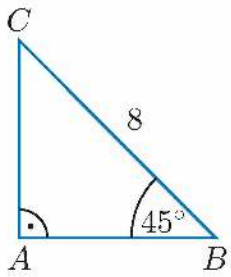
9. Obwód rombu jest równy $4\sqrt{41}$ cm, a jedna z jego przekątnych jest o 2 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

Powtórzenie

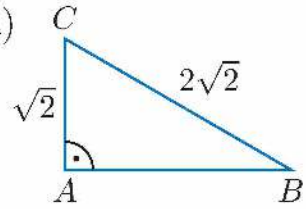
10. Oblicz obwód trójkąta ABC.

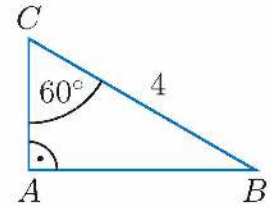
a) 

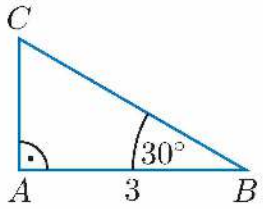
b) 

c) 

11. Oblicz obwód trójkąta ABC.

a) 

b) 

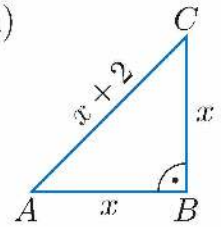
c) 

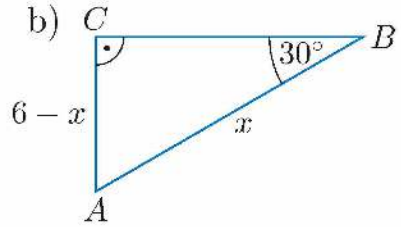
12. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest dwukrotnie większy od drugiego kąta. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

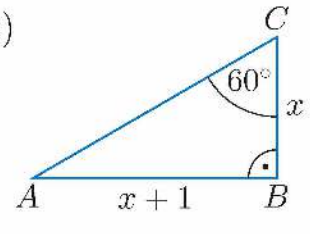
a) jego obwód jest równy $6 + 2\sqrt{3}$,

b) różnica długości jego przyprostokątnych jest równa $12 - 4\sqrt{3}$.

13. Oblicz obwód trójkąta ABC.

a) 

b) 

c) 

14. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 60°, a dłuższa przyprostokątna ma długość 18. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

Warto wiedzieć

Trójki pitagorejskie

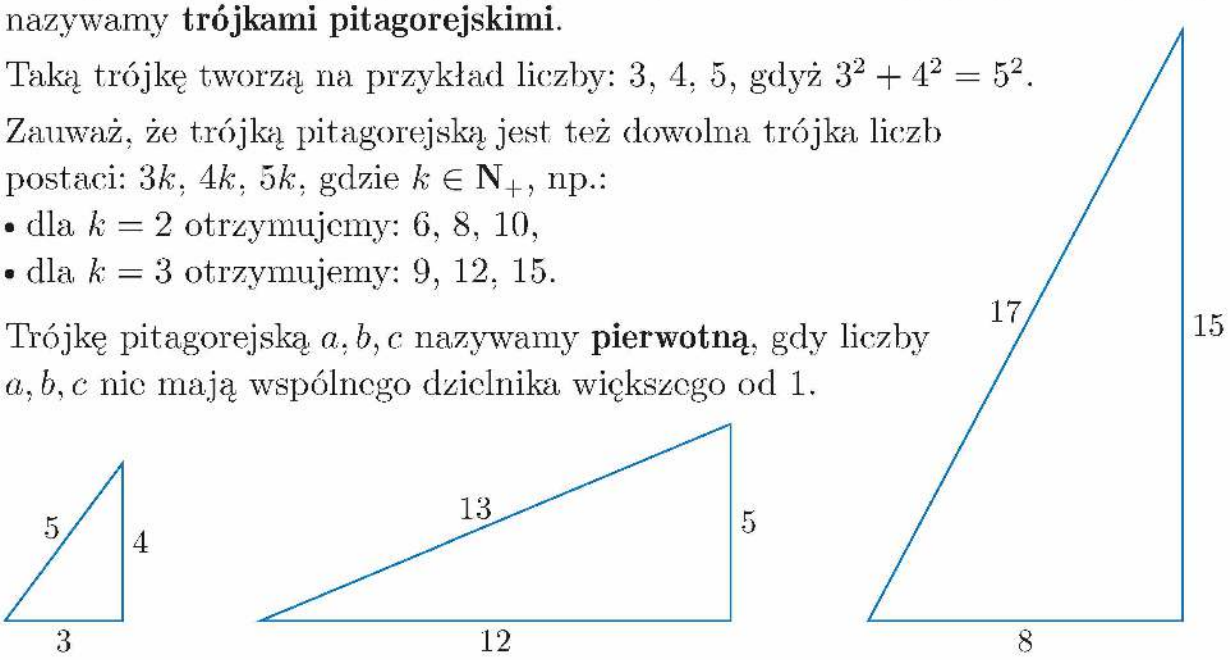
Liczby naturalne: a, b, c, wyrażające długości boków trójkąta prostokątnego nazywamy **trójkami pitagorejskimi**.

Taką trójkę tworzą na przykład liczby: 3, 4, 5, gdyż $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Zauważ, że trójką pitagorejską jest też dowolna trójka liczb postaci: $3k$, $4k$, $5k$, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, np.:

- dla $k = 2$ otrzymujemy: 6, 8, 10,
- dla $k = 3$ otrzymujemy: 9, 12, 15.

Trójkę pitagorejską a, b, c nazywamy **pierwotną**, gdy liczby a, b, c nie mają wspólnego dzielnika większego od 1.



Jest 16 pierwotnych trójek pitagorejskich, w których największa liczba jest mniejsza od 100:

3, 4, 5	20, 21, 29	11, 60, 61	13, 84, 85
5, 12, 13	12, 35, 37	16, 63, 65	36, 77, 85
8, 15, 17	9, 40, 41	33, 56, 65	39, 80, 89
7, 24, 25	28, 45, 53	48, 55, 73	65, 72, 97

Twierdzenie

Jeśli x i y są dodatnimi liczbami naturalnymi oraz $x > y$, to liczby:

$$a = x^2 - y^2, \; b = 2xy, \; c = x^2 + y^2$$

tworzą trójkę pitagorejską.

Dowód

$$a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 =$$
$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = c^2$$

Trójek pitagorejskich jest nieskończenie wiele. Każdą trójkę pitagorejską można otrzymać, korzystając ze wzorów podanych w powyższym twierdzeniu lub jest ona wielokrotnością liczb tej postaci.

1. Korzystając z podanych w twierdzeniu wzorów, wyznacz trójki pitagorejskie dla:

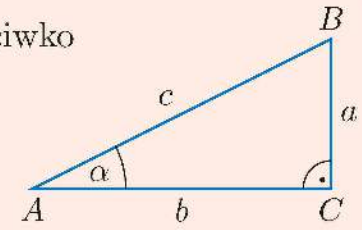
a) $x = 4, \; y = 3,$ b) $x = 5, \; y = 2,$ c) $x = 6, \; y = 1,$ d) $x = 3, \; y = 2.$

4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego są tak powszechnie stosowane, że otrzymały własne nazwy.

Definicja

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem** tego kąta.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem** tego kąta.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie nazywamy **tangensem** tego kąta.

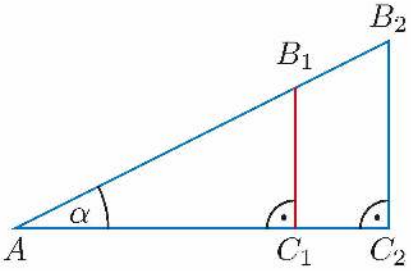
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Stosunki te nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kąta ostrego α.

Rozpatruje się też stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta. Jest to **cotangens** kąta: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Zwróć uwagę, że stosunki te nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α. Z podobieństwa trójkątów: AB_1C_1, AB_2C_2 wynikają równości:

$$\sin\alpha = \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AB_2|}$$



D Ćwiczenie 1

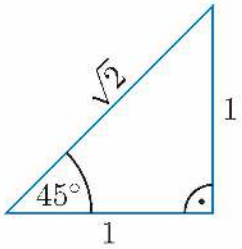
Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą nierówności:

$$\sin\alpha < 1 \quad \text{i} \quad \cos\alpha < 1$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45°.

Rozpatrzmy trójkąt o kątach 45°, 45°, 90° (rysunek obok).



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

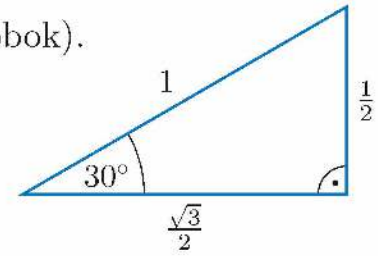
Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30°.

Rozpatrzmy trójkąt o kątach 30°, 60°, 90° (rysunek obok).

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Ćwiczenie 2

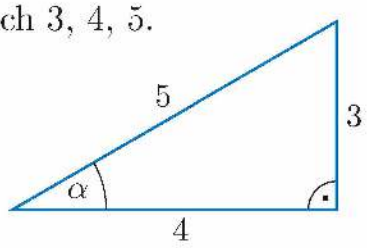
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60°.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o bokach 3, 4, 5.
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$



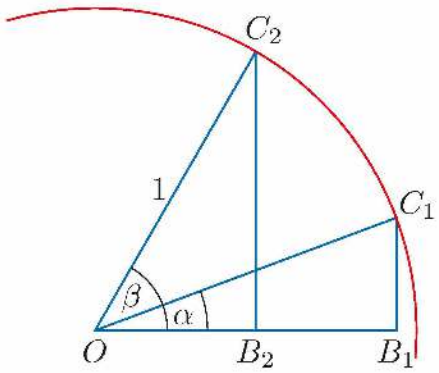
Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach a, b, c.

a) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ b) $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$ c) $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \frac{3}{2}$

Dla kątów ostrych α i β z nierówności $\alpha < \beta$ wynika nierówność $\sin\alpha < \sin\beta$. Aby to uzasadnić, rozpatrzmy trójkąty OB_1C_1 i OB_2C_2 (rysunek obok). Punkty C_1 i C_2 leżą na łuku okręgu o środku w punkcie O i promieniu 1.

Zauważ, że $\sin\alpha = |B_1C_1|$, $\sin\beta = |B_2C_2|$ oraz $|B_1C_1| < |B_2C_2|$, zatem $\sin\alpha < \sin\beta$.



D **Ćwiczenie 4**

Uzasadnij, że jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\cos\alpha > \cos\beta$.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach długości:

a) 6, 8, 10,
b) 7, 24, 25,
c) 1, 4, $\sqrt{17}$,
d) 1, 4, $\sqrt{15}$,
e) $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 5,
f) $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, 2.

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	?	?
$\cos\alpha$	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	1	?

Czy wiesz, że...

Skrót *sin* pochodzi od łacińskiego słowa *sinus* – zagięcie, zatoka;

cos to skrót od *complementi sinus*, czyli sinus dopełnienia;

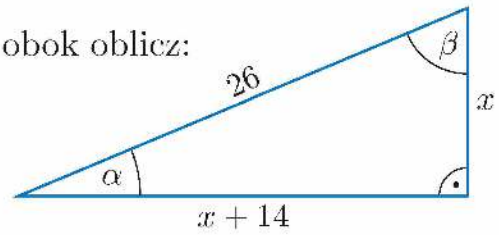
tg – skrót słowa *tangens* oznaczającego styczną.

3. Przekątna prostokąta o bokach długości 1 dm i 2 dm dzieli prostokąt na dwa trójkąty. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

4. Dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok oblicz:

a) długości przyprostokątnych,

b) wartości: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ oraz $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$.



5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

6. Dany jest równoległobok (niebędący prostokątem) o bokach długości 10 cm i 9 cm. Jedna z przekątnych dzieli równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 6 i 10, a wysokość jest równa 5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między dłuższą podstawą trapezu a jego:

a) przekątną, b) ramieniem.

Powtórzenie

8. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.

a) $a = 2$, $b = 6$ b) $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ c) $a = 2$, $b = \sqrt{5}$

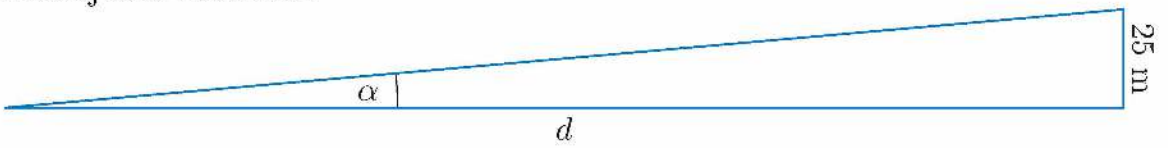
9. Dany jest prostokąt $ABCD$ o obwodzie równym 10 cm i krótszym boku BC długości 2 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC.

4.3. Trygonometria – zastosowania

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się w wielu sytuacjach praktycznych. Ich przybliżone wartości odczytamy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych na str. 295. Możemy też skorzystać z odpowiedniego kalkulatora.

Przykład 1

Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 25 m nad poziomem morza i widać go z jachtu pod kątem $\alpha = 5^\circ$. Jaka jest odległość jachtu od podnóża skarpy, na której stoi latarnia?

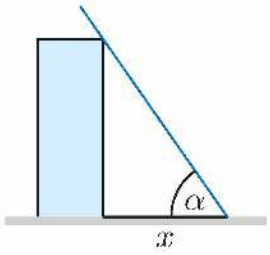


Do wyznaczenia szukanej wartości d wykorzystamy odczytaną z tablic przybliżoną wartość $\operatorname{tg} 5^\circ \approx 0{,}0875$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{25}{d}, \quad \text{czyli} \quad d = \frac{25}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{25}{0{,}0875} \approx 286 \text{ [m]}$$

Ćwiczenie 1

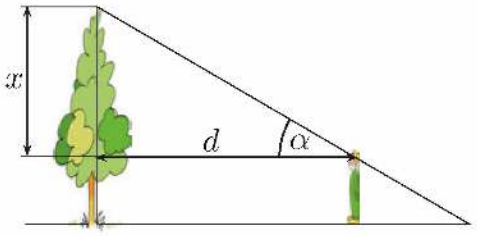
Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość x w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt α.



a) $x = 5$ m, $\alpha = 58^\circ$ b) $x = 12$ m, $\alpha = 39^\circ$

Przykład 2

Obserwator widzi czubek drzewa odległego o $d = 65$ m pod kątem $\alpha = 29^\circ$ (oczy ma na wysokości 1,5 m nad ziemią). Jak wysokie jest drzewo?



$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{x}{65}$$

Z tablic odczytujemy: $\operatorname{tg} 29^\circ \approx 0{,}5543$, czyli $x \approx 65 \cdot 0{,}5543 \approx 36$ [m].
Wysokość drzewa jest więc równa około $36 + 1{,}5 = 37{,}5$ [m].

Ćwiczenie 2

Przyjmij, jak w przykładzie 2., że obserwator ma oczy na wysokości 150 cm nad ziemią i oblicz wysokość drzewa, jeśli:

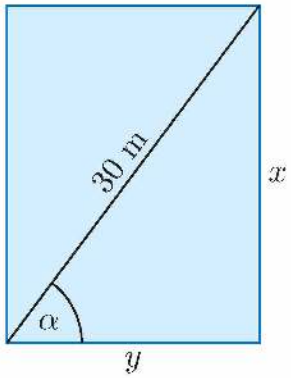
a) $\alpha = 40^\circ$, $d = 22$ m, b) $\alpha = 14^\circ$, $d = 100$ m.

Przykład 3

Przekątna prostokątnej działki budowlanej ma długość 30 m i tworzy z krótszym bokiem działki kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}6$. Ile metrów bieżących siatki potrzeba na jej ogrodzenie, jeżeli na bramę wjazdową należy zostawić 3 m?

Obliczamy długość jednego boku działki:

$\frac{y}{30} = \cos\alpha = 0{,}6$, czyli $y = 30 \cdot 0{,}6 = 18$ [m].



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 = 30^2 - y^2 = 900 - 324 = 576$$

$$x = \sqrt{576} = 24 \text{ [m]}$$

Zatem obwód działki: $2x + 2y = 48 + 36 = 84$ [m], czyli potrzeba $84 - 3 = 81$ [m] siatki.

Ćwiczenie 3

Oblicz obwód prostokąta, którego przekątna długości d tworzy z jednym z boków kąt o mierze α.

a) $d = 15$, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ b) $d = 8$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Znajomość wartości funkcji trygonometrycznych może posłużyć do znajdowania miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

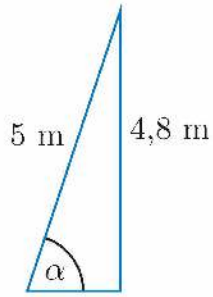
Ćwiczenie 4

Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295), podaj przybliżoną miarę kąta α, dla którego:

a) $\sin\alpha = 0{,}4067$, b) $\sin\alpha = 0{,}4226$, c) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5735$, d) $\cos\alpha = 0{,}9200$.

Przykład 4

Drabinę długości 5 m oparto o ścianę budynku tak, że dotyka jej na wysokości 4,8 m. Jaki kąt tworzy drabina z ziemią?



$\sin\alpha = \frac{4{,}8}{5} = 0{,}96$. Z tablic odczytujemy: $\alpha \approx 74^\circ$.

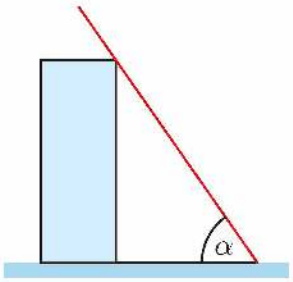
Ćwiczenie 5

Jaki kąt tworzy z ziemią drabina o długości:

a) 6,5 m, jeśli oparta o ścianę budynku sięga na wysokość 5,5 m,

b) 4,5 m, jeżeli jej koniec opierający się o ziemię jest odległy o 1 m od ściany budynku?

Zadania



1. Budynek (rysunek obok) rzuca cień długości 19 m w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt $\alpha = 55°$. Oblicz wysokość tego budynku.

2. Oblicz długość cienia rzucanego przez budynek o wysokości 25 m w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt $40°$.

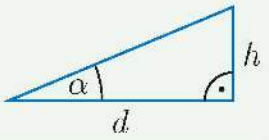
3. Czubek drzewa widać z odległości 80 m pod kątem $25°$ (z poziomu ziemi). Jaka jest wysokość drzewa? Jaka jest długość cienia rzucanego przez to drzewo, jeśli promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt $70°$?

4. Naciągnięty sznurek długości 20 m, na którego końcu zamocowany jest latawiec, tworzy z poziomem kąt $70°$. Jak wysoko nad ziemią znajduje się latawiec?

Nachylenie drogi jest zwykle podawane w procentach:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$

Zauważ, że $\frac{h}{d} = \operatorname{tg}\alpha$.



5. Wyznacz kąt α (rysunek powyżej), jeśli nachylenie drogi jest równe:
   a) 10%, b) 30%, c) 50%, d) 100%.

6. Podjazd dla wózków jest nachylony do poziomu pod kątem α. Wyraź w procentach nachylenie tego podjazdu. Czy spełnia on wymóg, że nachylenie podjazdu ma być mniejsze od 8%?
   a) $\alpha = 3°$ b) $\alpha = 4°$ c) $\alpha = 5°$

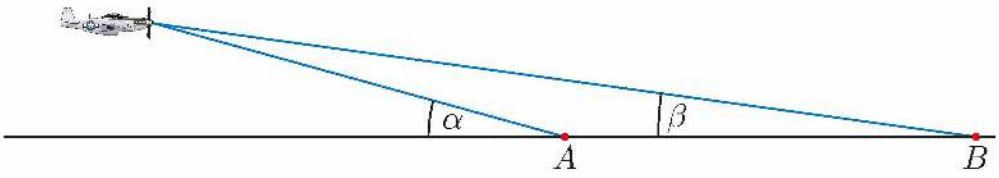
7. Drabina wozu strażackiego może być rozsunięta na długość 20 m i podniesiona pod kątem $72°$. Na jaką wysokość sięgnie drabina, jeśli jest zamocowana 2,4 m nad ziemią?

8. a) Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli drzewo o wysokości 20 m rzuca cień długości 17 m?

   b) Drabinę oparto o ścianę tak, że dotyka jej na wysokości 3,6 m i tworzy z ziemią kąt $54°$. Jaki kąt będzie tworzyła z ziemią ta drabina, jeśli zostanie oparta o ścianę na wysokości 4 m?

9. Przekrój poprzeczny strychu jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości 9 m i ramionach długości 6 m. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

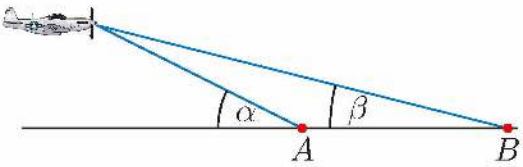
10. Pilot lecący samolotem na wysokości 50 m widzi początek pasa startowego pod kątem $\alpha = 30°$, a jego koniec pod kątem $\beta = 10°$. Samolot nadlatuje wzdłuż pasa startowego. Jaka jest długość tego pasa?



11. Samolot zbliżający się do lotniska leci na wysokości 2400 m. Do lądowania musi schodzić pod kątem 4°. Jak daleko od początku pasa startowego powinien rozpocząć ten manewr?

12. Startujący samolot wznosi się pod kątem 15° z prędkością 80 m/s. Jaką wysokość osiągnie samolot po 2 minutach od momentu oderwania się od ziemi?

13. Dwaj obserwatorzy stojący w punktach A i B (rysunek obok) w odległości 400 m od siebie widzą nadlatujący wzdłuż kierunku AB samolot pod kątami $\alpha = 20°$ i $\beta = 8°$. Na jakiej wysokości leci samolot?



14. Wierzchołek komina widać z punktu A pod kątem 26°, a z punktu B pod kątem 40°. Podstawa komina oraz punkty A i B leżą na jednej prostej. Komin ma wysokość 20 m. Jaka jest odległość między punktami A i B? Rozpatrz dwa przypadki (pomiń grubość komina).

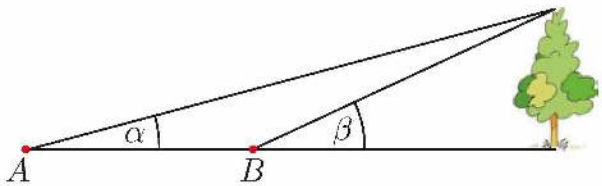
Powtórzenie

15. Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli budynek o wysokości 30 m rzuca cień długości: a) 20 m, b) 30 m, c) 60 m?

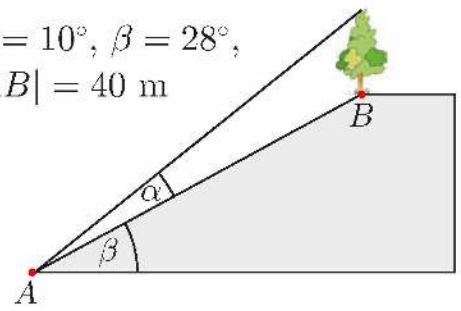
16. O ile wyżej sięgnie sześciometrowa drabina ustawiona pod kątem 73° do poziomu ziemi od takiej samej drabiny ustawionej pod kątem 53°?

17. Oblicz wysokość drzewa.

a) $\alpha = 15°$, $\beta = 25°$, $|AB| = 20$ m



b) $\alpha = 10°$, $\beta = 28°$, $|AB| = 40$ m



4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i wyznaczenie miar jego trzech kątów.

Aby **rozwiązać trójkąt prostokątny**, wystarczy znać:

– długości dowolnych dwóch boków

lub

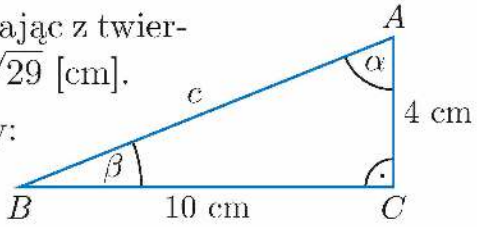
– długość dowolnego boku i miarę jednego z kątów ostrych.

Przykład 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, mając dane długości jego przyprostokątnych: 4 cm i 10 cm.

Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $c = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$ [cm].

$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Z tablic (str. 295) odczytujemy: $\beta \approx 22^\circ$ i stąd $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 68^\circ$.



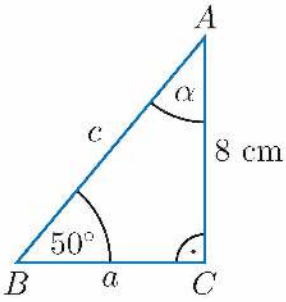
Przykład 2

Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 50° jest równa 8 cm.

$\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$\frac{8}{c} = \sin 50^\circ \approx 0{,}766$, stąd $c \approx 10{,}44$ cm.

$\frac{8}{a} = \operatorname{tg} 50^\circ \approx 1{,}1918$, stąd $a \approx 6{,}71$ cm.



Ćwiczenie 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli:

a) dwa jego dłuższe boki mają długości 9 cm i 10 cm,

b) długości przyprostokątnych są równe 5 cm i 13 cm,

c) przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jeden z kątów ma miarę 37°,

d) długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 54° jest równa 8 cm.

Jeśli potrzebna jest większa dokładność, to miarę kąta możemy podawać w stopniach i minutach, a nawet w sekundach.

1 **minuta** (oznaczana $1'$) jest równa $\frac{1}{60}$ stopnia.

1 **sekunda** (oznaczana $1''$) jest równa $\frac{1}{60}$ minuty.

Na przykład $24{,}5^\circ = 24^\circ 30'$.

$1^\circ = 60'$
$1' = 60''$
$1^\circ = 3600''$

Przykład 3

Wyraź w minutach i sekundach $\frac{1}{1000}$ kąta 45°.

$$\frac{45^\circ}{1000} = \frac{45}{1000} \cdot 3600'' = 162'' = 120'' + 42'' = 2'42''$$

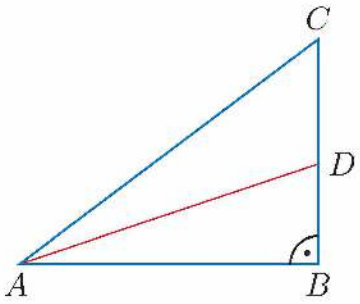
Ćwiczenie 2

Wyraź w stopniach, minutach i sekundach $\frac{1}{100}$ kąta:

a) 360°, b) 4°, c) 15°, d) 12°, e) 42°.

Przykład 4

Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). Odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC. Oblicz miary kątów trójkąta ADC, jeśli $|AB| = 8$, $|BC| = 6$.



$$\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \frac{6}{8} = 0{,}75, \text{ czyli } \sphericalangle BAC \approx 37^\circ$$

Zatem: $\sphericalangle CAD \approx \frac{1}{2} \cdot 37^\circ = 18^\circ 30'$

$\sphericalangle ACD \approx 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$

$\sphericalangle ADC \approx 180^\circ - 18^\circ 30' - 53^\circ = 108^\circ 30'$

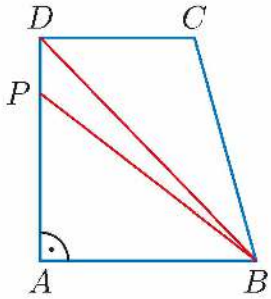
Ćwiczenie 3

W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku A kąt BCA ma miarę 55°, a $|CB| = 10$. Oblicz długość odcinka CD oraz miary kątów trójkąta BCD, jeśli punkt D należy do boku AB oraz odcinek CD jest:

a) zawarty w dwusiecznej kąta BCA, b) środkową trójkąta ABC.

Zadania

1. W trapezie prostokątnym $ABCD$ (rysunek obok) kąt ADB ma miarę $43^\circ 46' 25''$, a kąt ABC – miarę $73^\circ 42' 10''$.



a) Wyznacz miary kątów trójkąta BCD.

b) Wyznacz miary kątów trójkąta ABP, jeśli punkt P leży na dwusiecznej kąta ABC.

2. Rozwiąż trójkąt prostokątny o podanych długościach przyprostokątnych.

a) 4 cm, 6 cm b) 1 cm, 7 cm c) 8 cm, 10 cm

3. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli wiadomo, że:

a) $\sphericalangle CAB = 34^\circ$, $|CB| = 6$, b) $\sphericalangle CBA = 66^\circ$, $|AB| = 10$.

4. Oblicz obwód i pole trójkąta równoramiennego:

a) o ramieniu długości 4 i kącie przy podstawie 37°,

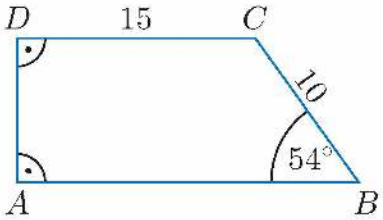
b) o podstawie długości 10 i kącie między ramionami 70°.

5. a) Trapez równoramienny ma podstawy długości 6 dm i 10 dm, a jego obwód jest równy 32 dm. Oblicz miary kątów tego trapezu.

b) Trapez równoramienny ma podstawy długości 4 cm i 8 cm oraz wysokość 8 cm. Oblicz miarę kąta, jaki przekątna trapezu tworzy z jego podstawą.

c) W trapezie równoramiennym przekątna o długości 13 cm tworzy z ramieniem kąt prosty. Oblicz miary kątów trapezu, jeśli jego wysokość jest równa 5 cm.

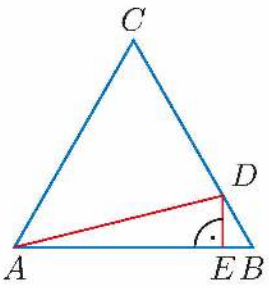
6. Oblicz długości boków AB i AD trapezu prostokątnego $ABCD$ oraz miarę kąta DCA (rysunek obok).



7. Przekątne deltoidu mają długości 20 cm i 30 cm. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku $2:1$. Oblicz miary kątów deltoidu.

8. Wyznacz kąty rombu, jeśli wysokość poprowadzona do jego boku podzieliła go w stosunku $1:3$.

9. W trójkącie równobocznym o boku 12 na boku CB obrano taki punkt D, że $3|DB| = |CD|$ (rysunek obok). Oblicz długość odcinka ED. Rozwiąż trójkąt ABD.



Powtórzenie

10. Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości:

a) 5, 12, b) 8, 15, c) 12, 16.

11. Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli długość jego:

a) przeciwprostokątnej jest równa 12 cm, a przyprostokątnej – 10 cm,

b) przeciwprostokątnej jest równa 7 cm, a jeden z kątów ma miarę 43°,

c) przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 26° jest równa 12,5 cm,

d) przyprostokątnej leżącej przy kącie 69° jest równa 15 cm.

12. W równoległoboku o bokach długości 10 cm i 30 cm krótsza przekątna tworzy z jednym bokiem kąt 90°. Oblicz miary kątów tego równoległoboku.

4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których jest określona.

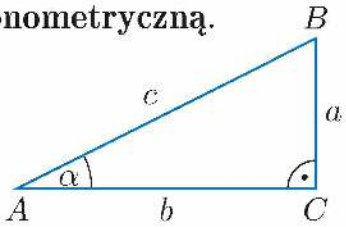
Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są poniższe zależności.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Uwaga. Zapis $\sin^2\alpha$ oznacza $(\sin\alpha)^2$, analogicznie $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$.

Tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.



Dowód jedynki trygonometrycznej

Przy oznaczeniach takich, jak na rysunku obok:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \text{oraz} \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij tożsamość trygonometryczną $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej, to – korzystając z podanych wyżej tożsamości – można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Oblicz $\cos\alpha$, jeśli $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ oraz α jest kątem ostrym.

Wartość $\cos\alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.

Ćwiczenie 2

Oblicz $\sin\alpha$, jeśli $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ oraz α jest kątem ostrym.

Przykład 2

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Wartość $\sin\alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.

Obliczamy wartość $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 3

a) Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\sin\alpha = 0{,}8$ oraz α jest kątem ostrym.

b) Oblicz $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ oraz α jest kątem ostrym.

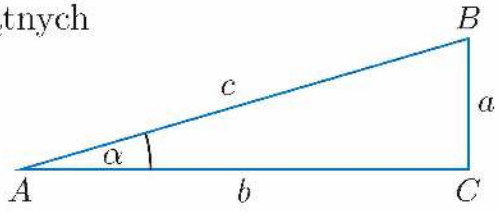
c) Oblicz $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ oraz α jest kątem ostrym.

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych, możemy wykorzystać odpowiedni trójkąt prostokątny.

Przykład 3

Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$ oraz α jest kątem ostrym.

Rysujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a = 7$ i $b = 24$. Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:



$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Zatem:

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

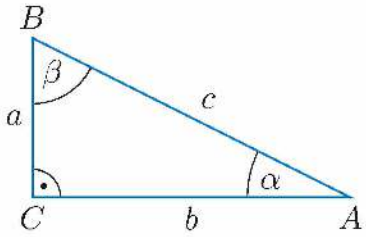
a) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$, d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 5

Narysuj odpowiedni trójkąt prostokątny i oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, d) $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).



W tym trójkącie $\beta = 90^\circ - \alpha$. Zauważmy, że:

$$\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

i jednocześnie $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, zatem $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

Twierdzenie

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą równości:

1. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
3. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

D Ćwiczenie 6

Uzasadnij podane wyżej tożsamości trygonometryczne 2. i 3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$.

Zadania

1. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\cos\alpha = 0{,}8$, c) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, e) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$, g) $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{2}{5}$,

b) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, d) $\sin\alpha = 0{,}4$, f) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, h) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$.

2. a) Oblicz sinus kąta ostrego α, jeśli jest on trzy razy większy od cosinusa tego kąta.

b) Oblicz cosinus kąta ostrego α, jeśli jest on dwa razy większy od sinusa tego kąta.

3. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

4. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeśli α jest jednym z kątów ostrych tego trójkąta oraz:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, a długość przeciwprostokątnej równa jest 10 cm,

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, a długość przeciwprostokątnej równa jest 39 cm.

5. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Oblicz obwód tego trójkąta.

a) $|AC| = 12$, $\sin\sphericalangle BAC = \frac{5}{13}$

b) $|AC| = 4$, $\sin\sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $|BC| = \sqrt{3}$, $\sin\sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{6}}{3}$

d) $|BC| = 6$, $\cos\sphericalangle BAC = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

6. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{5}{13}$,

c) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}$,

d) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

e) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$,

f) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 2$.

7. Przedstaw w prostszej postaci.

a) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$

b) $(1+\sin(90^\circ-\alpha))(1-\cos\alpha)$

c) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$

d) $\sin\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

e) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

f) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

8. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295), wyznacz przybliżone wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

a) $\sin\alpha = 0{,}91$ b) $\cos\alpha = 0{,}91$ c) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}55$ d) $\operatorname{tg}\alpha = 4$

Czy wiesz, że...

Do oznaczania kątów zwykle używamy liter alfabetu greckiego.

$A\ \alpha$ alfa	$H\ \eta$ eta	$N\ \nu$ ni	$T\ \tau$ tau
$B\ \beta$ beta	$\Theta\ \theta$ teta	$\Xi\ \xi$ ksi	$\Upsilon\ \upsilon$ ypsilon
$\Gamma\ \gamma$ gamma	$I\ \iota$ jota	$O\ o$ omikron	$\Phi\ \phi$ fi
$\Delta\ \delta$ delta	$K\ \kappa$ kappa	$\Pi\ \pi$ pi	$X\ \chi$ chi
$E\ \varepsilon$ epsilon	$\Lambda\ \lambda$ lambda	$P\ \rho$ ro	$\Psi\ \psi$ psi
$Z\ \zeta$ dzeta	$M\ \mu$ mi	$\Sigma\ \sigma$ sigma	$\Omega\ \omega$ omega

Powtórzenie

9. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$

d) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

f) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

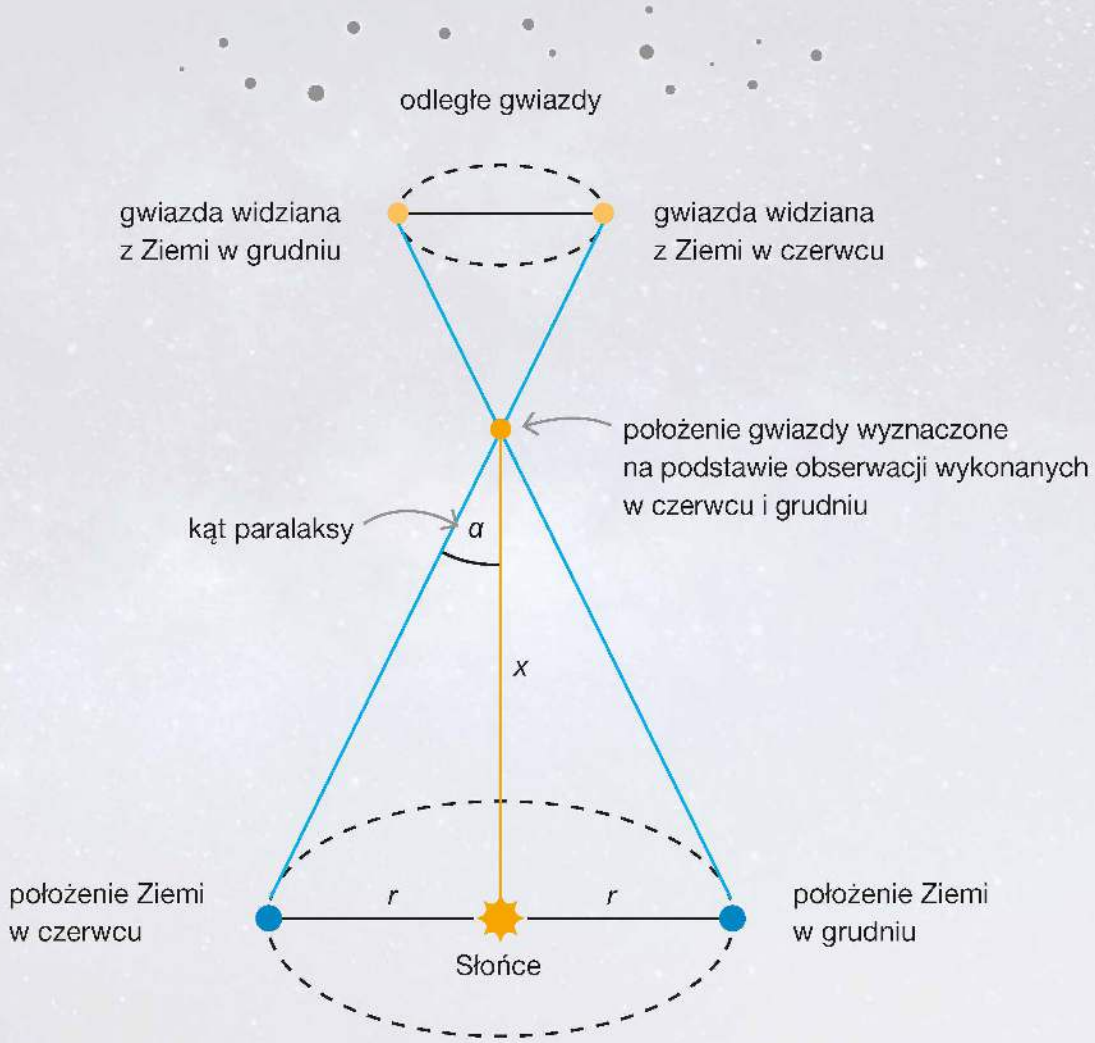
10. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α, a przeciwprostokątna ma długość c. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $c = 15$ cm

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $c = 39$ cm

Trygonometria i astronomia

Odległości dzielące nas od stosunkowo bliskich gwiazd można obliczyć na podstawie obserwacji zmiany ich położenia na tle odległych gwiazd. Astronomowie w tym celu wyznaczają kąt, zwany kątem paralaksy. Ma on miarę rzędu setnych części sekundy.



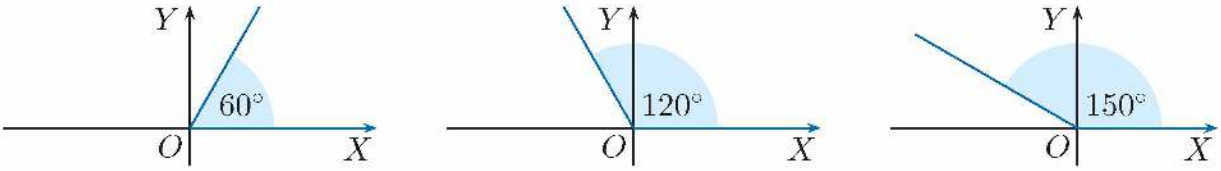
Do wyznaczenia kąta paralaksy możemy wykorzystać obserwacje wykonane w czerwcu i grudniu, gdy Ziemia znajduje się w dwóch przeciwległych położeniach na swojej orbicie wokół Słońca (patrz rysunek). Oznaczmy przez r średnią odległość Ziemi od Słońca, równą w przybliżeniu 150 mln km (wielkość ta została nazwana **jednostką astronomiczną**). Odległość x obliczamy, korzystając ze wzoru $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{x}$, gdzie α – kąt paralaksy.

1 Oblicz odległość od Słońca najbliższej nam gwiazdy spoza Układu Słonecznego – Proximy Centauri, dla której kąt paralaksy $\alpha = 0{,}77''$. Przyjmij $\operatorname{tg} 0{,}77'' \approx 0{,}00000373$.

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)

W tej i kolejnych lekcjach będziemy rozpatrywać kąty umieszczone w układzie współrzędnych w ten sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta, a jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX. Drugie ramię będziemy nazywać **ramieniem końcowym**. Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

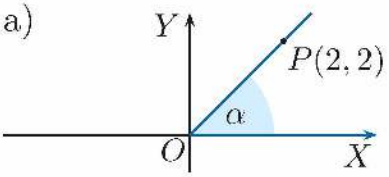
Figurę nazwamy **wypukłą**, gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty należące do tej figury jest w niej zawarty. W tym rozdziale rozpatrujemy kąty **wypukłe**, których miary należą do przedziału $\langle 0°; 180°\rangle$. Przypominamy, że kąt nazywamy **rozwartym**, gdy jego miara należy do przedziału $(90°; 180°)$.



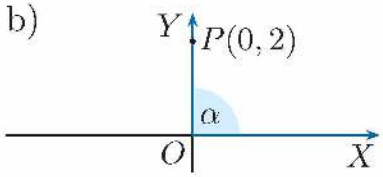
Ćwiczenie 1

Jaka jest miara kąta, do którego ramienia końcowego należy punkt P? Podaj współrzędne innego punktu należącego do ramienia końcowego tego kąta.

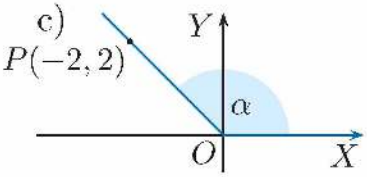
a)



b)

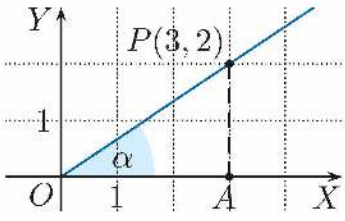


c)



Przykład 1

Dany jest trójkąt POA, gdzie $P(3,2)$ i $A(3,0)$. Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA.



Rysujemy trójkąt prostokątny POA (rysunek obok). Oznaczmy miarę kąta POA przez α.

Ponieważ $|OA| = 3$, $|AP| = 2$, z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|OP| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Zatem $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

Ćwiczenie 2

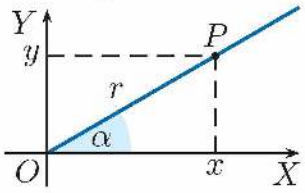
Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA.

a) $P(3,4)$, $A(3,0)$ b) $P(6,8)$, $A(6,0)$ c) $P(\sqrt{3},1)$, $A(\sqrt{3},0)$

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α. Wtedy:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},$$

gdzie $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$



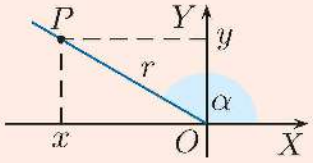
Podane powyżej wzory służą również do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$.

Definicja

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$. Wtedy:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

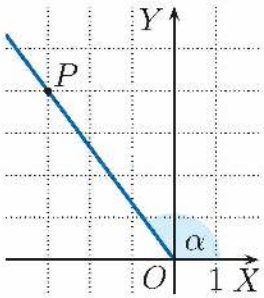
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0$, czyli $\alpha \neq 90^\circ)$.



Zauważ, że każdy ze stosunków: $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ zależy wyłącznie od położenia ramienia końcowego kąta, a nie zależy od wyboru punktu P leżącego na tym ramieniu.

Przykład 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.



Punkt P ma współrzędne $(-3, 4)$, zatem $x = -3$, $y = 4$, czyli:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, zatem $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Ćwiczenie 3

Do ramienia końcowego kąta α należą punkty P i Q. Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych, korzystając ze współrzędnych wybranego punktu.

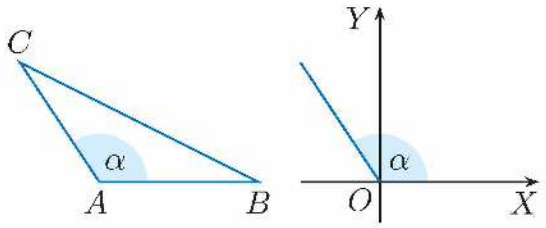
a) $P(-4, 3)$, $Q(-8, 6)$ b) $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $Q(-2, 6)$

Ćwiczenie 4

Wybierz dowolny punkt na ramieniu końcowym kąta α i oblicz wartości tych funkcji trygonometrycznych kąta α, które są dla niego określone.

a) $\alpha = 0^\circ$ b) $\alpha = 90^\circ$ c) $\alpha = 180^\circ$

Jako wartości funkcji trygonometrycznych kąta BAC w trójkącie ABC przyjmujemy wartości funkcji trygonometrycznych przystającego do niego kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych.



Dla $\alpha \in (0°; 90°)$ zachodzą nierówności: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Dla $\alpha \in (90°; 180°)$ zachodzą nierówności: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Ćwiczenie 5

Określ, czy liczba a jest dodatnia, czy ujemna.

a) $a = \cos 110° + \operatorname{tg} 115°$ b) $a = \cos 130° \cdot \operatorname{tg} 140°$ c) $a = \sin 160° \cdot \operatorname{tg} 170°$

Ćwiczenie 6

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 1)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Sprawdź, czy dla obliczonych wartości zachodzi równość:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, b) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Poznane wcześniej tożsamości trygonometryczne zachodzą dla dowolnych kątów wypukłych.

D **Ćwiczenie 7**

a) Uzasadnij podane obok twierdzenie.

b) Uzasadnij, że dla dowonego kąta wypukłego α zachodzą nierówności:

$$\sin\alpha \leqslant 1 \quad \text{i} \quad \cos\alpha \leqslant 1$$

Dla kąta $\alpha \in \langle 0°; 180°\rangle$ prawdziwe są zależności:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 90°$

Przykład 3

Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (90°; 180°)$ i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$\cos^2\alpha = \tfrac{15}{16}, \quad \text{stąd} \quad \cos\alpha = \tfrac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{lub} \quad \cos\alpha = -\tfrac{\sqrt{15}}{4}$$

Dla $\alpha \in \langle 90°; 180°\rangle$ cosinus jest ujemny, więc $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Obliczamy wartość $\operatorname{tg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{15}} = -\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

Ćwiczenie 8

Oblicz $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (90°; 180°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, b) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ćwiczenie 9

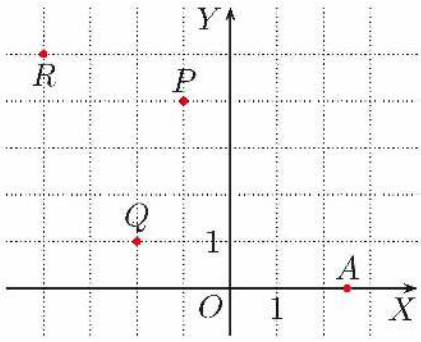
Oblicz $\sin^2\alpha$, $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ oraz:

a) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Zadania

1. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta (rysunek obok).

a) $\sphericalangle AOP$ b) $\sphericalangle AOQ$ c) $\sphericalangle AOR$



2. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β. Oblicz $\sin\alpha - \sin\beta$.

a) $P(-2,4)$, $Q(4,2)$ b) $P(-9,3)$, $Q(2,6)$

3. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt Q do ramienia końcowego kąta β. Oblicz $\cos\alpha + \cos\beta$.

a) $P(3,1)$, $Q(-1,\frac{1}{2})$ b) $P(-2,4)$, $Q(-4,2)$ c) $P(-2,\sqrt{2})$, $Q(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

4. Oblicz: $\sin^2\alpha$, $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli α jest kątem rozwartym oraz:

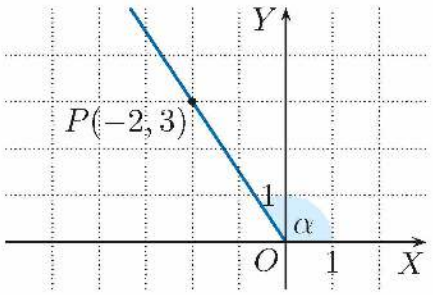
a) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, b) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

W układzie współrzędnych narysowano kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$, taki że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$. Oblicz $\sin\alpha$.

$r = |OP| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, stąd:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$



W układzie współrzędnych narysuj odpowiedni kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$ oraz oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, jeśli: a) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

Powtórzenie

6. Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P(5,12)$ c) $P(-5,12)$ e) $P(\sqrt{5},2)$ g) $P(-\sqrt{3},1)$

b) $P(1,\frac{4}{3})$ d) $P(-5,10)$ f) $P(\sqrt{2},1)$ h) $P(-\sqrt{3},\sqrt{6})$

4.7. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)

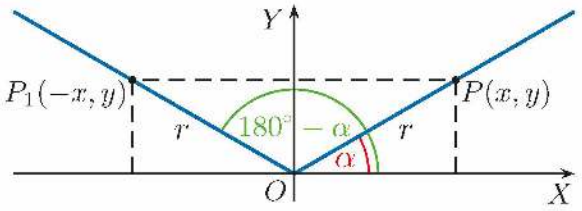
Rozpatrzmy punkt $P(x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta α oraz punkt $P_1(-x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$ (rysunek poniżej).

Zauważmy, że $|OP_1| = |OP| = r$, zatem:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\operatorname{tg}\alpha$$



Przykład 1

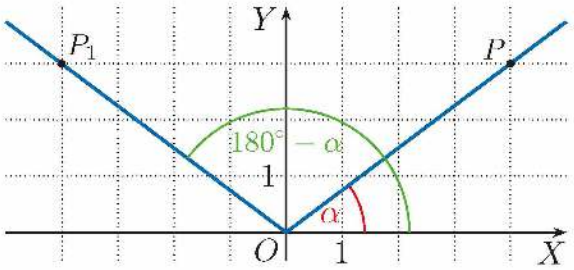
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$, jeżeli punkt $P(4, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt $P_1(-4, 3)$ – do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$.

$|OP_1| = |OP| = 5$, zatem:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}$



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych kąt α, do którego ramienia końcowego należy punkt $P(4, 2)$, oraz kąt $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

Dla kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ prawdziwe są wzory:

1. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
2. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
3. $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ$

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°.

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta: a) $\alpha = 135^\circ$, b) $\alpha = 150^\circ$.

Zadania

1. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	?	?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	?	?	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?	?
$\cos\alpha$	?	?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	?	?	$-\frac{1}{2}$	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	?	1	?	×	$-\sqrt{3}$	?	?	?

2. Oblicz.

a) $\sin 120^\circ + \sin 60^\circ$ c) $\sin 135^\circ \cdot \sin 150^\circ$ e) $4\cos 150^\circ - 3\operatorname{tg} 135^\circ$

b) $\cos 150^\circ - \cos 30^\circ$ d) $\cos 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$ f) $8\operatorname{tg} 120^\circ + 6\operatorname{tg} 150^\circ$

3. Oblicz.

a) $\frac{\sin 120^\circ - \cos 150^\circ}{3\operatorname{tg} 150^\circ}$ c) $\frac{\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 120^\circ}$ e) $\frac{\cos 135^\circ + \cos 150^\circ}{\sin 120^\circ + \sin 135^\circ}$

b) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 120^\circ}$ d) $\frac{\operatorname{tg} 135^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ}$ f) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\cos 150^\circ + \cos 60^\circ}$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295), oblicz przybliżone wartości $\sin 125^\circ$ i $\cos 168^\circ$.
>
> $\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ \approx 0{,}8192$
>
> $\cos 168^\circ = \cos(180^\circ - 12^\circ) = -\cos 12^\circ \approx -0{,}9781$

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 105^\circ$, b) $\sin 165^\circ$, c) $\cos 130^\circ$, d) $\cos 175^\circ$, e) $\operatorname{tg} 142^\circ$, f) $\operatorname{tg} 163^\circ$.

5. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, sprawdź, czy prawdziwa jest podana nierówność.

a) $\sin 160^\circ + \cos 130^\circ < 0$ b) $\sin 105^\circ + \cos 145^\circ > 0$

6. Korzystając z podanych obok informacji, oblicz:

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{5}{6}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$

a) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \beta)$,

b) $2\sin(180^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \beta) + \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma)$.

7. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, wyznacz przybliżoną miarę kąta rozwartego β.

a) $\sin\beta = 0{,}9397$ c) $\cos\beta = -0{,}9613$ c) $\operatorname{tg}\beta = -0{,}7265$

b) $\sin\beta = 0{,}4695$ d) $\cos\beta = -0{,}4226$ f) $\operatorname{tg}\beta = -2{,}9042$

D **8.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

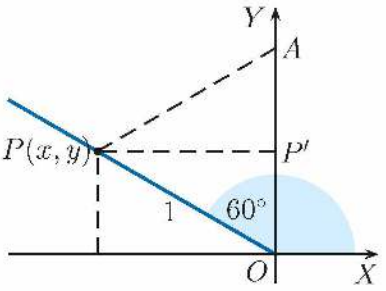
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150°.

Zauważmy, że $150^\circ = 90^\circ + 60^\circ$.

Rozpatrzmy trójkąt równoboczny POA (rysunek obok) o boku długości 1, wówczas:

$$|OP'| = \frac{1}{2}, \quad |PP'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 150° ma współrzędne $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, a stąd:

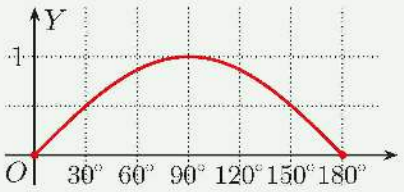


$$\sin 150^\circ = \frac{y}{|OP|} = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = \frac{x}{|OP|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 150^\circ = \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Uzasadnij, że punkt $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ należy do ramienia końcowego kąta 135° i oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

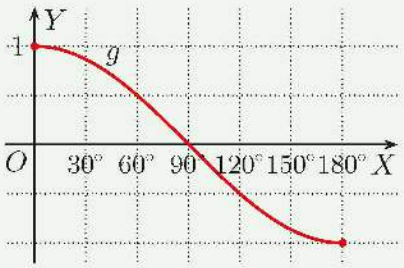
Na rysunku obok przedstawiono przyporządkowanie kątowi z przedziału $\langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$ wartości sinusa tego kąta. Zauważ, że dla dowolnego $x \in \langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$ zachodzi równość:

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x$$



Na rysunku obok przedstawiono przyporządkowanie kątowi z przedziału $\langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$ wartości cosinusa tego kąta. Zauważ, że dla dowolnego $x \in \langle 0^\circ; 180^\circ\rangle$ zachodzi równość:

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$$



Powtórzenie

9. Jakie miary kąta można wpisać w miejsce ?, aby, korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295), można było podać przybliżoną wartość funkcji? Podaj tę wartość.

a) $\sin 111^\circ = \sin(180^\circ - ?)$

b) $\sin 132^\circ = \sin(180^\circ - ?)$

c) $\cos 123^\circ = -\cos(180^\circ - ?)$

d) $\cos 107^\circ = -\cos(180^\circ - ?)$

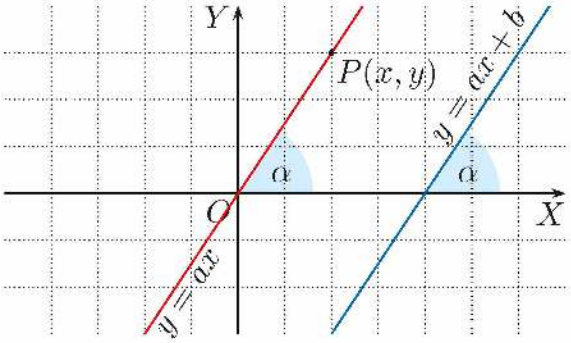
10. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 160^\circ$, b) $\sin 95^\circ$, c) $\cos 100^\circ$, d) $\cos 147^\circ$, e) $\operatorname{tg} 102^\circ$.

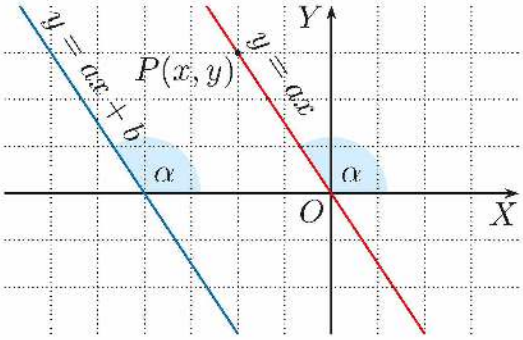
Warto wiedzieć

Współczynnik kierunkowy prostej

$a > 0$



$a < 0$



Niech punkt $P(x, y)$ należy do prostej $y = ax$, gdzie $a \neq 0$, i leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych. Wówczas zgodnie z definicją funkcji tangens:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli } y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x$$

Zauważ też, że dla dowolnego współczynnika b prosta $y = ax + b$ tworzy z osią OX taki sam kąt jak prosta $y = ax$. Wynika stąd poniższe twierdzenie.

Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, jest równy tangensowi kąta α, jaki ta prosta tworzy z osią OX:

$$a = \operatorname{tg}\alpha$$

1. Wyznacz miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX.

a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ b) $y = \sqrt{3}x$ c) $y + x = 0$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz miarę kąta między prostymi:

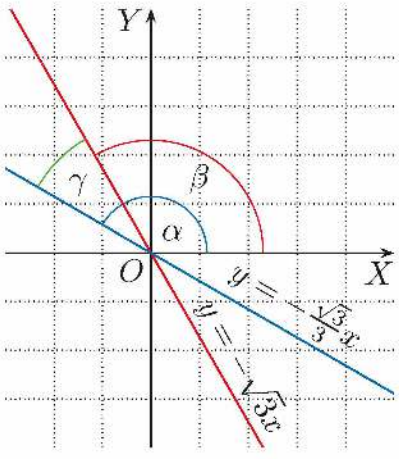
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ i } y = -\sqrt{3}x$$

Prosta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ tworzy z osią OX kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 150°$.

Prosta $y = -\sqrt{3}x$ tworzy z osią OX kąt β taki, że $\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$, czyli $\beta = 120°$.

Kąt między tymi prostymi jest więc równy:

$$\gamma = \alpha - \beta = 150° - 120° = 30°$$



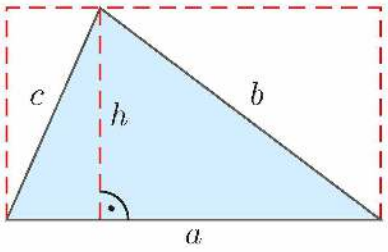
Wyznacz miarę kąta między prostymi:

a) $y = -\sqrt{3}x$ i $y = x$, b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ i $y = -x + 2$.

4.8. Pole trójkąta

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = \frac{1}{2}ah$$



Ćwiczenie 1

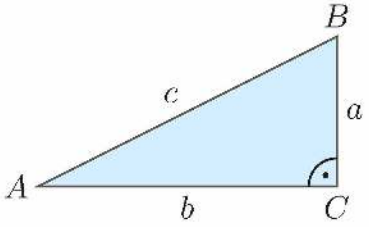
Oblicz pole trójkąta równoramiennego o obwodzie równym 28 cm, jeśli:

a) jego ramię jest o 4 cm krótsze od podstawy,

b) cosinus kąta przy podstawie jest równy $\frac{2}{5}$.

Pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych.

$$P = \frac{1}{2}ab$$



Ćwiczenie 2

Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 26 cm, jeśli:

a) sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{5}{13}$,

b) tangens jednego z jego kątów ostrych jest równy 2,4,

c) jego kąty ostre α i β spełniają warunek $\sin\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

a) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu 4,5 cm^2.

b) Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o obwodzie równym $(30 + 15\sqrt{2})$ cm.

Ćwiczenie 4

D a) Wyprowadź podany obok wzór.

b) Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie równym $30\sqrt{3}$ cm.

Pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ćwiczenie 5

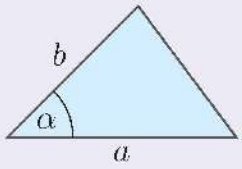
a) Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 4 cm.

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego o polu równym $108\sqrt{3}$ cm^2.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



Dowód

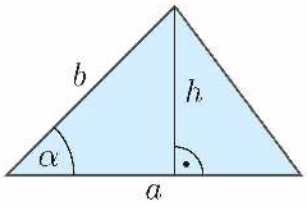
Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt α zawarty między bokami a i b trójkąta. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 6).

1° Kąt α jest kątem ostrym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na bok a.

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin\alpha$, więc $h = b\sin\alpha$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

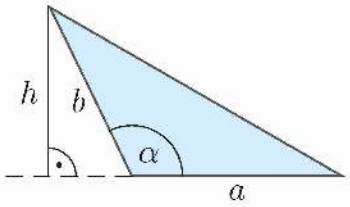


2° Kąt α jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na przedłużenie boku a.

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin(180^\circ - \alpha)$, więc $h = b\sin(180^\circ - \alpha)$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin(180^\circ - \alpha)$.



Korzystamy ze wzoru $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ i otrzymujemy $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

D Ćwiczenie 6

Uzasadnij prawdziwość wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ w przypadku, gdy kąt α zawarty między bokami a i b jest kątem prostym.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta ABC, gdy:

a) $|AB| = 6$, $|BC| = 10$ i $\sphericalangle ABC = 30^\circ$,

b) $|AB| = 10$, $|AC| = 12$ i $\sphericalangle CAB = 120^\circ$,

c) $|AB| = 4\sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{3}$, $\sphericalangle ABC = 35^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 100^\circ$,

d) $|AB| = |AC| = 3\sqrt{2}$ i $\sphericalangle ABC = 15^\circ$.

Ćwiczenie 8

W trójkącie ABC o polu 12 cm^2 bok AB ma długość 4 cm. Oblicz długość boku AC, jeśli kąt CAB ma miarę:

a) 30°, b) 45°, c) 120°.

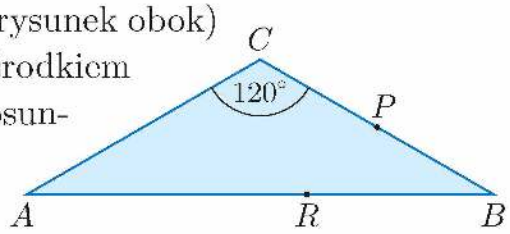
Zadania

1. a) W trójkącie ABC: $|AB| = 7$, $|AC| = 5$ i $\sphericalangle CAB = 120^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.

b) Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 8 cm, a kąt przy podstawie ma miarę $22^\circ 30'$.

2. Obwód trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok) jest równy $(12 + 8\sqrt{3})$ cm. Punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R dzieli bok AB w stosunku $3:2$. Oblicz pole trójkąta:

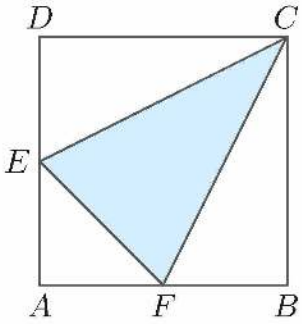
a) APC, b) ARC, c) PRB.



3. a) Podstawa trójkąta równoramiennego jest cztery razy dłuższa od wysokości opuszczonej na tę podstawę. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli jego pole jest równe 36 cm^2.

b) W trójkącie równoramiennym o polu $12\sqrt{3}$ cm^2 stosunek wysokości opuszczonej na podstawę do długości tej podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta oraz jego obwód.

4. W kwadracie $ABCD$ o boku 8 cm punkty E i F są środkami odpowiednio boków AD i AB (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta EFC oraz jego obwód.



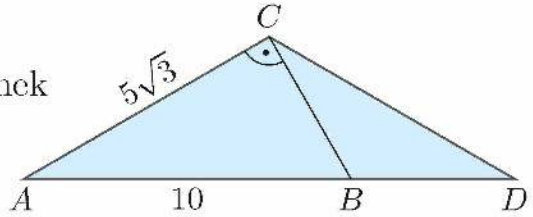
5. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 12 i tworzy z podstawą kąt o mierze 45°.

a) Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną do podstawy.

b) Z wierzchołka tego trójkąta poprowadzono do podstawy odcinek dzielący kąt między ramionami w stosunku $2:1$. Oblicz pola powstałych trójkątów.

6. Stosunek długości ramienia trójkąta równoramiennego do jego obwodu wynosi 0,3. Pole trójkąta jest równe $8\sqrt{5}$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

7. Oblicz obwód i pole trójkąta BCD (rysunek obok), jeśli wiadomo, że $|BC| = |BD|$.



8. Rozpatrzmy trójkąty o dwóch danych bokach a i b. Jaka powinna być miara kąta między tymi bokami, aby pole trójkąta było największe?

D **9.** Dany jest trójkąt, w którym kąt między bokami o długościach x i $2x$ ma miarę 120°. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest dwukrotnie większe od pola trójkąta równobocznego o boku długości x.

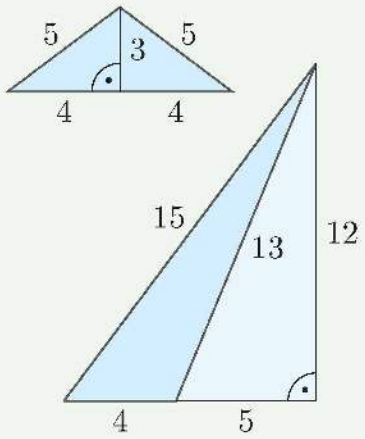
Czy wiesz, że...

Jeżeli dane są długości boków a, b, c trójkąta, to można obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona (Heron z Aleksandrii, I wiek n.e.):

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Trójkątami Herona nazywamy trójkąty, których długości boków oraz pole wyrażają się liczbami naturalnymi.



Przykładem trójkąta Herona jest trójkąt o bokach 5, 5, 8 (który powstał przez złączenie dwóch trójkątów prostokątnych o bokach 3, 4, 5) oraz trójkąt o bokach 4, 13, 15 (który powstał przez odcięcie z trójkąta prostokątnego o bokach 9, 12, 15 trójkąta prostokątnego o bokach 5, 12, 13).

10. Oblicz pole trójkąta o podanych bokach, korzystając ze wzoru Herona. Czy trójkąt ten jest trójkątem Herona?

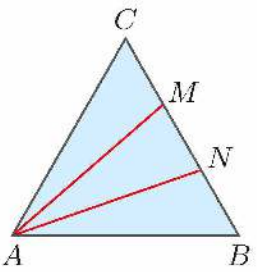
a) 3, 4, 5 c) 5, 5, 6 e) 9, 10, 17

b) 4, 5, 7 d) 4, 6, 8 f) 7, 15, 20

Powtórzenie

11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ABC = 105^\circ$, $\sphericalangle BCA = 45^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli $|AC| = 6$, $|AB| = 6 + 6\sqrt{3}$.

12. W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 6 punkty M i N dzielą bok BC na trzy równe części. Oblicz pola trójkątów BAM i NAM.

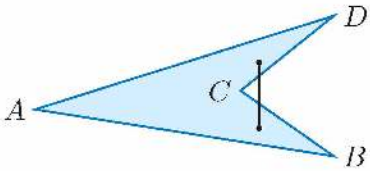


13. a) Boki trójkąta równobocznego wydłużono o 50%. O ile procent wzrosło pole tego trójkąta?

b) O ile procent należy wydłużyć boki trójkąta równobocznego, by jego pole wzrosło o 69%?

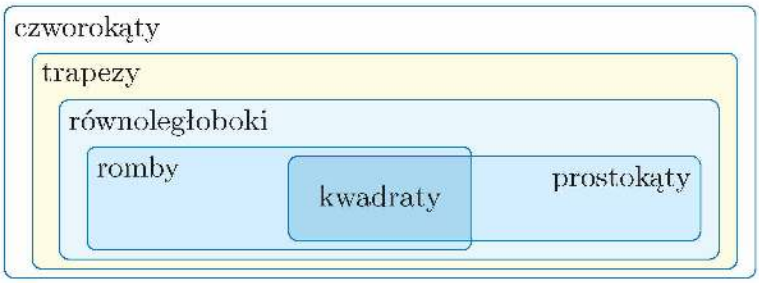
Czworokąty wypukłe

Wielokąt nazywamy **wypukłym**, gdy odcinek łączący dowolne dwa jego punkty jest w nim zawarty. Wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta wypukłego są wypukłe. Wielokąt, który nie jest wypukły, nazywamy **wklęsłym**.

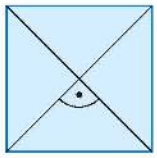


Czworokąt $ABCD$ nie jest wypukły.

Czworokątami wypukłymi są m.in.: kwadraty, romby, prostokąty, równoległoboki i trapezy.

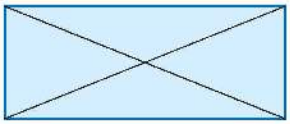


Kwadrat



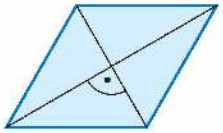
- Wszystkie kąty są proste, wszystkie boki są równej długości.
- Przekątne są równej długości, są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

Prostokąt



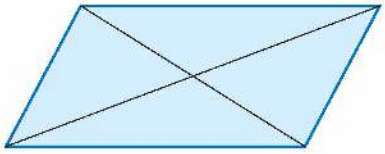
- Wszystkie kąty są proste, przeciwległe boki są równe i równoległe.
- Przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

Romb



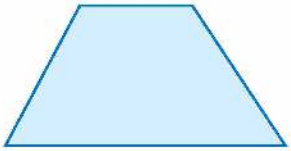
- Wszystkie boki są równej długości, przeciwległe boki są równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Przekątne są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.
- Suma kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180°.

Równoległobok



- Przeciwległe boki są równe i równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy.
- Suma kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180°.

Trapez



- Ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
- Suma kątów wewnętrznych przy każdym z ramion jest równa 180°.

Trapez równoramienny



- W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

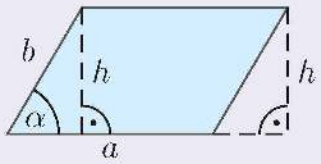
4.9. Pole czworokąta

Aby obliczyć pole dowolnego czworokąta, możemy podzielić go na dwa trójkąty, a następnie obliczyć pola tych trójkątów i je dodać. Do obliczania pól szczególnych czworokątów, takich jak równoległobok, romb i trapez, możemy stosować odpowiednie wzory.

Równoległobokiem nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$



Ćwiczenie 1

Boki równoległoboku mają długości 6 cm i 10 cm, a kąt ostry ma miarę 60°. Oblicz wysokości tego równoległoboku i jego pole.

D **Ćwiczenie 2**

Uzasadnij podany obok wzór.

Pole równoległoboku o bokach a i b oraz kącie ostrym α wyraża się wzorem $P = ab\sin\alpha$.

Ćwiczenie 3

Oblicz pole równoległoboku, którego boki mają długości 8 i 12, a kąt:

a) ostry ma miarę 45°, b) rozwarty jest pięć razy większy od kąta ostrego.

Ćwiczenie 4

D a) Uzasadnij, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.

b) Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne mają długości 5 cm i 10 cm oraz przecinają się pod kątem 30°.

Rombem nazywamy czworokąt mający wszystkie boki równe.

Aby obliczyć pole rombu, możemy zastosować wzór na pole równoległoboku lub skorzystać z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, a ich punkt przecięcia dzieli je na połowy.

D **Ćwiczenie 5**

Udowodnij podany obok wzór.

Pole rombu o przekątnych długości d_1, d_2 wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Przykład 1

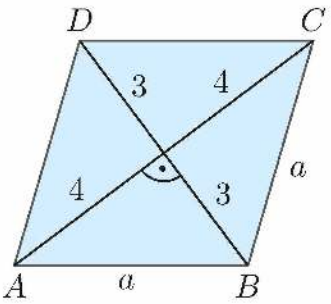
Ile jest równa wysokość rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm?

Długość boku rombu obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 = 3^2 + 4^2$, czyli $a = 5$ cm.

Pole rombu: $P = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ [cm^2].

Ale jednocześnie $P = ah$, czyli $h = \frac{P}{a}$, zatem:

$$h = \frac{24}{5} = 4{,}8 \text{ [cm]}$$



Ćwiczenie 6

Oblicz pole i wysokość rombu o boku:

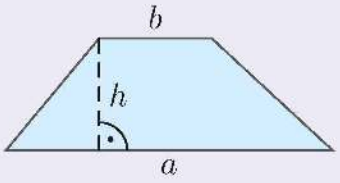
a) 13 cm i dłuższej przekątnej równej 24 cm,

b) 6 cm i kącie ostrym α takim, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

Pole trapezu o podstawach długości a, b i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

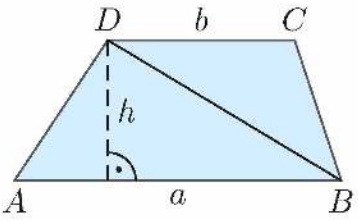


Uzasadnienie wzoru na pole trapezu

Pole trapezu $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD. Trójkąty te mają taką samą wysokość h, a ich pola są równe:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ah, \quad P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}bh$$

Zatem pole trapezu $P = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h$.



Ćwiczenie 7

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, jeśli:

a) jego podstawy mają długości 10 i 6, a przekątna ma długość 9,

b) jego ramię ma długość 7, krótsza podstawa 5, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$,

c) jego krótsza podstawa ma długość $3\sqrt{3}$, dłuższa podstawa $7\sqrt{3}$, a miara kąta rozwartego wynosi 150°,

d) jedna z jego podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, przekątna ma długość 9, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Zadania

1. a) Oblicz pole równoległoboku, w którym kąt rozwarty ma miarę 150°, a boki mają długości 4 cm i 9 cm.

b) Pole równoległoboku wynosi 8 cm^2, a jego obwód 24 cm. Oblicz wysokości tego równoległoboku, jeśli sinus jego kąta ostrego jest równy 0,25.

D **2.** a) Wykaż, że jeśli przekątne równoległoboku o długościach p i q przecinają się pod kątem α, to pole równoległoboku wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}pq\sin\alpha$$

b) Przekątne równoległoboku o długościach 6 cm i 10 cm tworzą z jednym z boków odpowiednio kąty 12° i 33°. Oblicz pole tego równoległoboku.

3. Przekątne równoległoboku o polu równym $16\sqrt{2}$ cm^2 przecinają się pod kątem, którego sinus wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest trzykrotnie dłuższa od drugiej.

D a) Uzasadnij, że krótsze boki tego równoległoboku są prostopadłe do jednej z jego przekątnych.

b) Oblicz obwód tego równoległoboku.

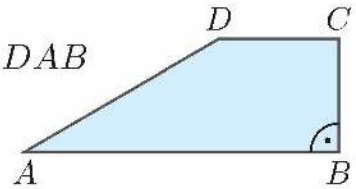
4. a) Przekątne rombu mają długości 12 cm i 16 cm, a jego kąt ostry ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha$.

b) Pole rombu o obwodzie równym 48 cm wynosi 108 cm^2. Oblicz wysokość tego rombu.

5. W prostokącie o przekątnej długości 12 cm połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Otrzymany romb ma pole równe $12\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego tego rombu.

6. W trapezie prostokątnym o polu 90 cm^2 i kącie ostrym 45° dłuższa przekątna tworzy z podstawami kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trapezu.

7. W trapezie prostokątnym (rysunek obok) sinus kąta DAB jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, a boki AD i AB mają odpowiednio długości 10 cm i 14 cm. Oblicz pole tego trapezu.

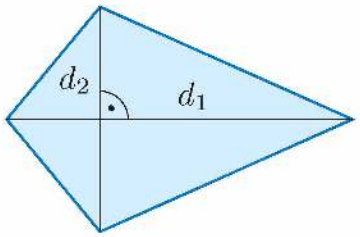


8. a) Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego kąt ostry ma miarę 30°, a podstawy mają długości 4 cm i 10 cm.

b) Trapez równoramienny o podstawach długości 2 cm i 4 cm ma pole równe 18 cm^2. Oblicz sinus kąta, pod jakim przecinają się przekątne tego trapezu.

D **9.** a) Na rysunku obok przedstawiono deltoid o przekątnych d_1 i d_2. Uzasadnij, że jego pole wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1d_2$.

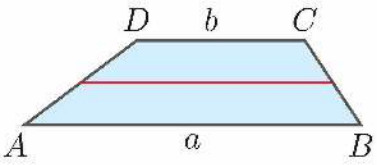
b) Krótsza przekątna deltoidu o bokach $3\sqrt{2}$ i 5 ma długość 6. Oblicz pole tego deltoidu.



10. Działkę budowlaną w kształcie trapezu o bokach długości: 50 m, 25 m, 20 m i 25 m podzielono linią równoległą do podstaw tak, że obwody każdej z nowo powstałych działek są równe. Ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia obu działek (siatka między działkami jest wspólna), jeżeli będą one miały furtki o szerokości 1,5 m? Oblicz pola tych działek.

D **11.** Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E. Wykaż, że trójkąty AED i BEC mają równe pola.

D **12.** Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion AD i BC trapezu $ABCD$ (rysunek obok) ma długość $\frac{a+b}{2}$.

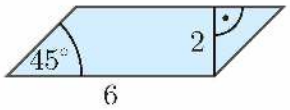


13. Ramiona trapezu mają długości 3 cm i 4 cm, krótsza podstawa ma długość 7,5 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu i jego pole.

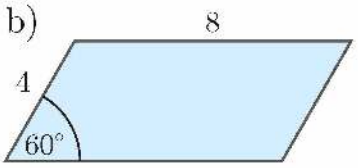
Powtórzenie

14. Oblicz pole i obwód równoległoboku.

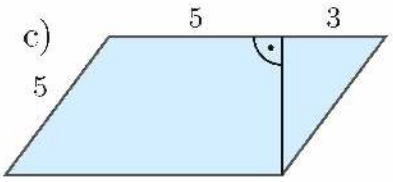
a)



b)

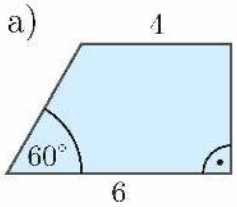


c)

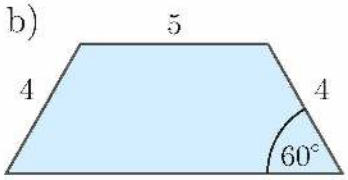


15. Oblicz pole i obwód trapezu.

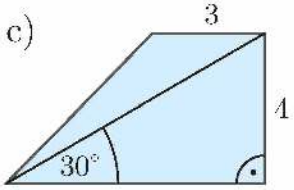
a)



b)



c)



16. a) W prostokącie o przekątnej długości 24 cm połączono odcinkami środki sąsiednich boków i otrzymano romb o kącie ostrym 60°. Oblicz obwód i pole tego rombu.

b) W rombie o boku długości 4 cm i kącie ostrym 60° połączono odcinkami środki sąsiednich boków i otrzymano prostokąt. Oblicz jego pole.

4.10. Zagadnienia uzupełniające

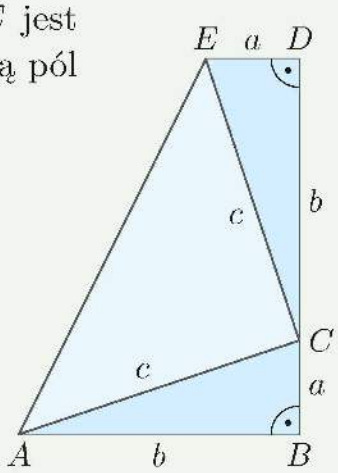
Dowody twierdzenia Pitagorasa

Znanych jest wiele dowodów twierdzenia Pitagorasa. Autorem pierwszego z przedstawionych poniżej dowodów jest 20. prezydent Stanów Zjednoczonych James Abram Garfield [czyt. dżejms abram garfild] (1831–1881).

Dowód 1

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. Rysujemy trapez prostokątny $ABDE$ o podstawach a i b oraz wysokości $a+b$ (rysunek obok). Kąt ACE jest kątem prostym (uzasadnij). Pole P trapezu jest sumą pól trójkątów ABC, CDE i ACE:

$$P = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}c^2$$



Korzystamy teraz ze wzoru na pole trapezu:

$$P = \tfrac{1}{2}(a+b)(a+b)$$

i otrzymujemy równość:

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$

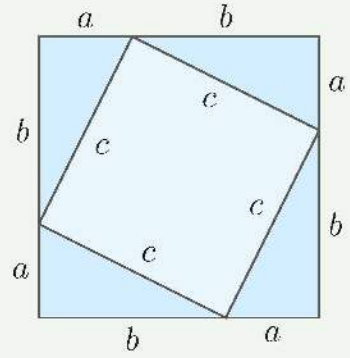
Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.

Dowód 2

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. Rysujemy kwadrat o boku $a+b$ i wewnątrz niego kwadrat o boku c (rysunek poniżej).

Duży kwadrat ma bok równy $a+b$, więc jego pole:

$$P = (a+b)^2$$

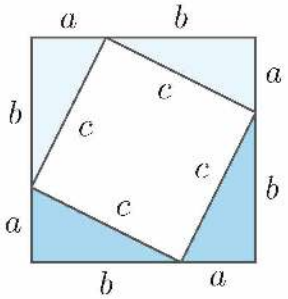


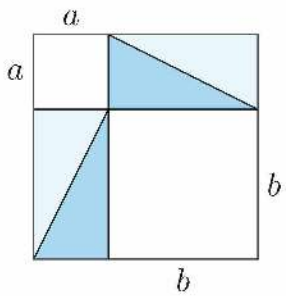
Pole dużego kwadratu jest równe sumie pola małego kwadratu i pól czterech trójkątów:

$$P = c^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}a \cdot b$$

Zatem $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

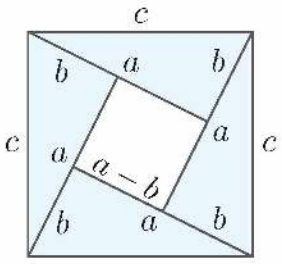
D **1.** Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, korzystając z przedstawionych obok rysunków.





D **2.** a) Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, wyznaczając pole dużego kwadratu przedstawionego na rysunku obok.

b) Przyjmij, że bok dużego kwadratu ma długość 8, a bok małego – długość 2. Oblicz długości przyprostokątnych a i b.

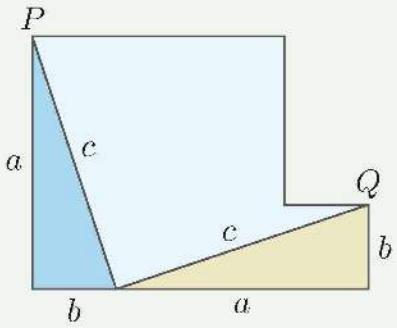


Dowód 3

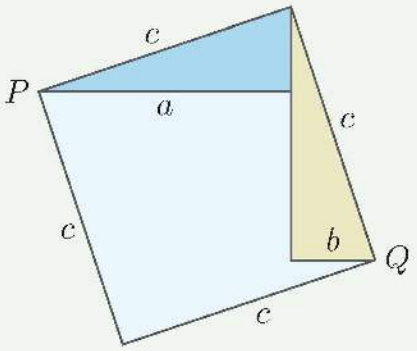
Rozpatrzmy dwa kwadraty o bokach a i b położone jak na rysunku obok. Suma ich pól jest równa $a^2 + b^2$.



Trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c są przystające (rysunek poniżej).



Trójkąt niebieski obracamy wokół punktu P, a żółty – wokół punktu Q, aż otrzymamy kwadrat o boku c.
Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.

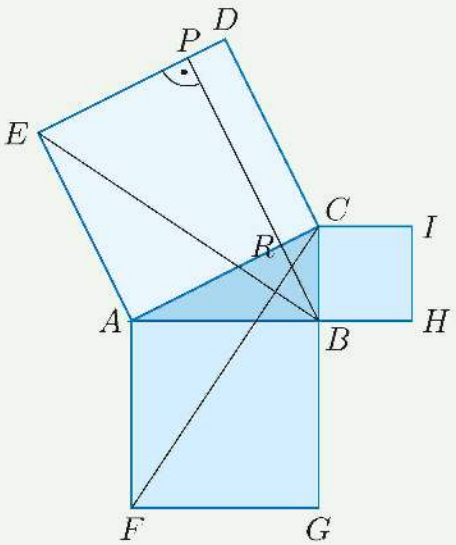


Twierdzenie Pitagorasa można sformułować następująco:
Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na jego przyprostokątnych.

Szkic dowodu 4

- Trójkąty FAC i BAE są przystające.
- Pole trójkąta FAC jest równe połowie pola kwadratu $AFGB$.
- Pole trójkąta BAE jest równe połowie pola prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $AFGB$ jest równe polu prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $CBHI$ jest równe polu prostokąta $DCRP$.

Przedstawione powyżej rozumowanie pochodzi z I księgi „Elementów" Euklidesa.



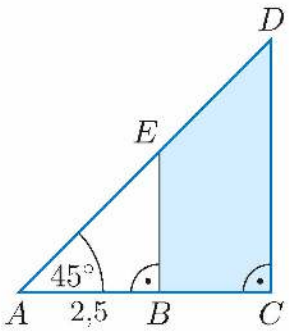
D **3.** Podaj uzasadnienia kolejnych etapów szkicu dowodu 4.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

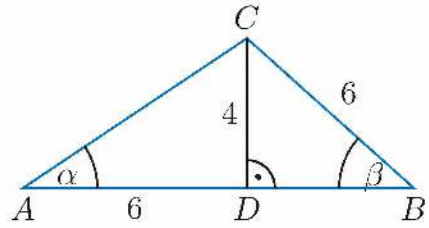
1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 4\sqrt{3}$ cm, $|AC| = |BC| = 4$ cm. Punkt P jest środkiem odcinka AB. Oblicz wysokości trójkąta APC.

2. Oblicz obwód trójkąta ACD (rysunek obok), jeśli wiadomo, że krótsza przekątna trapezu $BCDE$ ma długość równą $\frac{1}{2}\sqrt{41}$.



3. Przekątna prostokąta ma długość 10, a obwód każdego z trójkątów powstałych przez podział prostokąta przekątną jest równy 24. Oblicz pole prostokąta.

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β w trójkącie ABC (rysunek obok).



5. a) W trójkącie prostokątnym, którego obwód jest równy 60, tangens jednego z kątów ostrych wynosi 2,4. Oblicz długości boków tego trójkąta.

b) W trójkącie prostokątnym o polu równym $4\sqrt{2}$ sinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

c) W trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej 16 i kątach ostrych α i β zachodzi równość $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{8}$. Oblicz pole tego trójkąta.

6. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC.

a) $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,2)$

b) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$

c) $A(-6,1)$, $B(6,-4)$, $C(6,1)$

d) $A(-1,-5)$, $B(4,5)$, $C(-4,1)$

7. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że:

a) $\sin\alpha = 0{,}1$, c) $\cos\alpha = \frac{1}{6}$, e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, g) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$,

b) $\cos\alpha = 0{,}9$, d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, f) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$, h) $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}$.

8. Rozwiąż trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB, jeśli:

a) $\sphericalangle ACB = 40°$, a wysokość CD trójkąta ma 6 cm,

b) jego obwód jest równy 34 cm, a wysokość CD ma 13 cm,

c) jego pole jest równe 12 cm^2, a $\sphericalangle CAB = 40°$.

9. a) Obserwator widzi wierzchołek 70-metrowej wieży stojącej na płaskim terenie pod kątem 12° do poziomu. Jaka jest odległość obserwatora od podstawy wieży? Pomiń wzrost obserwatora.

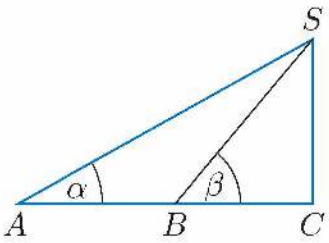
b) Linę podtrzymującą maszt przymocowano do niego na wysokości 110 m nad ziemią i zakotwiczono w ziemi w odległości 40 m od podstawy masztu. Oblicz miarę kąta, jaki lina tworzy z poziomem.

10. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5°.

a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?

b) Jak długo musiałby iść tą drogą z prędkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m?

11. Z punktów A i B odległych od siebie o 800 m widać szczyt góry S pod kątami $\alpha = 29^\circ$ i $\beta = 50^\circ$. Oblicz wysokość SC tej góry.



Zestaw II

1. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 75°, bok AC ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a wysokość opuszczona z wierzchołka C jest równa 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

2. Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie 30°. Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.

3. a) Obwód rombu jest równy 52 cm, a jedna z jego przekątnych ma długość 10 cm. Oblicz pole tego rombu oraz sinus kąta ostrego.

b) Pole rombu o obwodzie równym 48 cm wynosi 108 cm^2. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu.

4. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Kąt BAD ma miarę 60°, a przekątna BD ma długość $6\sqrt{3}$ i jest prostopadła do boku AD. Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta ABP.

5. W równoległoboku o obwodzie 32 cm jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego, a kąt rozwarty ma miarę 120°. Oblicz długości przekątnych i pole tego równoległoboku.

6. Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 6 cm, a kąt między przekątną a tą podstawą ma miarę α. Oblicz pole tego trapezu, jeśli jego wysokość jest równa 2 cm, a $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

7. Dany jest trapez prostokątny o kącie ostrym α, dłuższej podstawie a, krótszej podstawie b i wysokości h. Oblicz obwód i długości przekątnych tego trapezu, jeśli:

a) $\alpha = 60^\circ$, $a = 8$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm, b) $\alpha = 30^\circ$, $b = 10$ cm, $h = 4$ cm.

8. Przekątne trapezu równoramiennego $ABCD$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie P. Podstawy trapezu mają długości $|AB| = 12$ cm i $|CD| = 4$ cm. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta PAD.

9. Podstawy trapezu mają długości 10 i 4, a jego ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60°. Oblicz pole tego trapezu.

10. Dany jest trapez równoramienny o kącie ostrym 30° i podstawach długości 16 i 12. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

11. Narysuj w układzie współrzędnych kąt α, do którego ramienia końcowego należy punkt P. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P(1, 4)$ b) $P(-1, 4)$ c) $P(-3, 2)$ d) $P(-2, 3)$

D **12.** Uzasadnij, że nie istnieje kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ spełniający podane równanie.

a) $\frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cos\alpha$ b) $\sqrt{5}\sin\alpha = 5 - \sqrt{5}$ c) $3\cos\alpha + \sqrt{3} = 6$

13. Oblicz.

a) $\sin 30^\circ(\cos 0^\circ - 2\cos 135^\circ)$

b) $(\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$

c) $\frac{\sin 150^\circ - 2\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} - \operatorname{tg} 135^\circ$

d) $\frac{\sin 45^\circ + \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} \cdot \cos 180^\circ$

e) $\cos 135^\circ \cdot \sin 90^\circ - \sin 135^\circ \cdot \cos 90^\circ$

f) $\sin 15^\circ \cdot (\operatorname{tg} 135^\circ + 1) + \cos^2 0^\circ$

g) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 150^\circ} + \sin^2 180^\circ$

h) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ}{\sin 60^\circ} : \sin 90^\circ$

D **14.** Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje wartość 1.

a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$

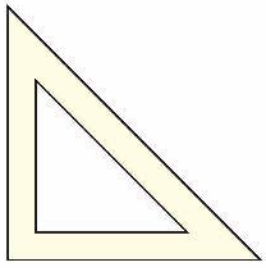
b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ$

c) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ$

d) $\sin^2 26^\circ + \sin 64^\circ \cdot \cos 26^\circ$

Wskazówka. Skorzystaj z zależności $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

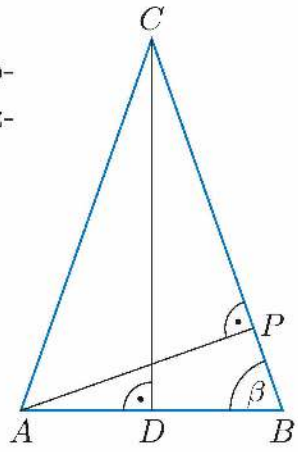
* **15.** Ekierki mające kształt połowy kwadratu o boku 20 cm są produkowane z drewnianych listew o szerokości 2 cm i grubości 2 mm. Jaka jest objętość drewna zużytego do wyprodukowania 1000 takich ekierek? Pomijamy objętość odpadów. Jaka byłaby objętość drewna zużytego do wyprodukowania z takich samych listew 1000 ekierek mających kształt połowy trójkąta równobocznego o boku 24 cm?



Sposób na zadanie

Przykład

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm i ramionach długości 6 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na jego ramię.



Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Możemy skorzystać z podobieństwa trójkątów APB i CDB (cecha KKK): $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ [cm], zatem:

$$|AP| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|CB|} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ [cm]}$$

II sposób

Kąt β jest kątem ostrym trójkąta CDB:

$$\cos\beta = \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Zatem $\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Kąt β jest również kątem ostrym trójkąta ABP, więc:

$\frac{|AP|}{|AB|} = \sin\beta$, stąd $|AP| = |AB| \cdot \sin\beta = 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ [cm].

III sposób

Obliczamy wysokość CD trójkąta ABC: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ [cm].

Pole trójkąta ABC obliczamy na dwa sposoby:

$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ [cm^2]

$P = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |AP| = 3|AP|$ [cm^2]

Porównujemy wyznaczone wyrażenia i otrzymujemy:

$$3|AP| = 8\sqrt{2}, \text{ stąd } |AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

IV sposób

Oznaczmy $|PB| = x$, wówczas $|PC| = 6 - x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów APB oraz APC i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} |AP|^2 = 4^2 - x^2 \\ |AP|^2 = 6^2 - (6-x)^2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie $4^2 - x^2 = 6^2 - (6-x)^2$ i otrzymujemy: $x = \frac{4}{3}$ cm oraz $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm.

Odpowiedź: $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość c, może mieć pole równe:

A. $\frac{1}{4}c^2$, **B.** $\frac{1}{3}c^2$, **C.** $\frac{1}{2}c^2$, **D.** c^2.

2. Dany jest trapez równoramienny, którego ramiona są tej samej długości co krótsza podstawa, a dłuższa podstawa jest dwa razy dłuższa od krótszej. Przekątne tego trapezu przecinają się pod kątem:

A. 90°, **B.** 60°, **C.** 45°, **D.** 30°.

3. Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, to $\cos\alpha$ jest równy:

A. $\frac{4}{5}$, **B.** $\frac{\sqrt{6}}{5}$, **C.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, **D.** $\frac{1}{4}$.

4. Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to α należy do przedziału:

A. $(0^\circ; 30^\circ)$, **B.** $(30^\circ; 45^\circ)$, **C.** $(45^\circ; 60^\circ)$, **D.** $(60^\circ; 90^\circ)$.

5. Jeżeli w trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 50 cm, a sinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{24}{25}$, to:

A. pole tego trójkąta jest równe 300 cm^2,

B. obwód tego trójkąta jest równy 112 cm,

C. cosinus jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\frac{1}{25}$,

D. tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\frac{25}{24}$.

6. Dla $\alpha = 60^\circ$ prawdziwa jest równość:

A. $\sqrt{3}\sin\alpha + \frac{1}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ$,

B. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$,

C. $\cos\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$,

D. $2\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

7. Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

A. $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ$

B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ$

C. $2\sin^2 30^\circ - 2\cos^2 30^\circ$

D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{tg} 45^\circ$

8. Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

A. $\sin 61^\circ + \cos 151^\circ$

B. $\sin 151^\circ - \cos 61^\circ$

C. $\sin 151^\circ \cdot \cos 61^\circ$

D. $\sin 151^\circ : \cos 61^\circ$

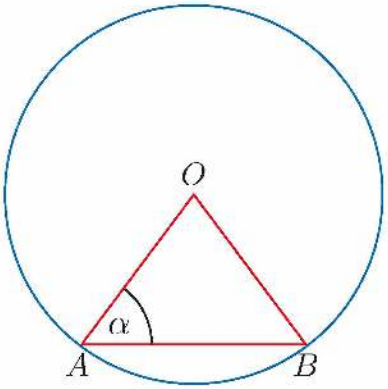
9. Wartość wyrażenia $(\sin 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ) \cdot \frac{\operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 150^\circ}$ jest liczbą przeciwną do liczby:

A. -1, **B.** 1, **C.** $\sqrt{3}$, **D.** $-\sqrt{3}$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$ oraz kątach ostrych α i β. Oblicz $\sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Zadanie 2 (2 pkt)
Dany jest okrąg o środku O i promieniu 6 (rysunek obok). Oblicz długość cięciwy AB, jeśli $\sin\alpha = 0{,}8$.

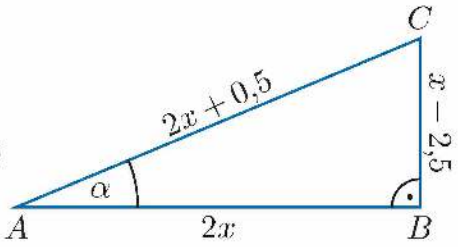


Zadanie 3 (2 pkt)
Punkt P jest spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C. Oblicz długości odcinków AP i BP, jeśli $|BC| = 6$ i $|AB| = |AC| = 8$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Oblicz cosinus kąta rozwartego, jeśli kwadrat odwrotności sinusa tego kąta jest równy 5.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

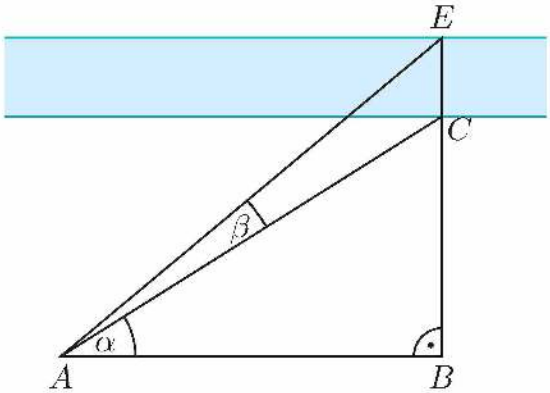
Zadanie 5 (4 pkt)
Oblicz obwód trójkąta ABC (rysunek obok) oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.



Zadanie 6 (4 pkt)
Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych α i β są kolejnymi liczbami parzystymi. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha + \sin\beta)^2$.

Zadanie 7 (4 pkt)
Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i $(7 + 3\sqrt{3})$ cm oraz wysokości 3 cm. Jego kąty ostre przylegają do dłuższej podstawy, a jeden z nich ma miarę równą 45°. Oblicz iloczyn cosinusów kątów rozwartych tego trapezu.

Zadanie 8 (4 pkt)
Aby obliczyć szerokość rzeki (długość odcinka CE na rysunku obok), dokonano pomiarów w terenie: $\alpha = 32°$, $\beta = 8°$, $|AC| = 120$ m. Oblicz szerokość rzeki.





5 Planimetria

Z regularnym podziałem płaszczyzny możemy mieć do czynienia w praktyce, np. przy układaniu kafelków lub bruku.
Bardzo ciekawe przykłady sposobu podziału płaszczyzny znajdziemy w pracach holenderskiego malarza i grafika Mauritsa Cornelisa Eschera [czyt. eszera] (1898 1972). Inspirację matematyką widać w wielu jego pracach.

5.1. Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r.

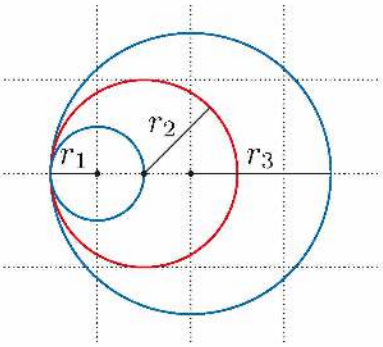
Stosunek długości okręgu do jego średnicy jest stały. Oznaczamy go grecką literą π. Oznaczenie to zostało wprowadzone przez brytyjskiego matematyka Williama Jonesa [czyt. łiliama dżonsa] w 1706 roku. Liczba π jest niewymierna, w obliczeniach często wykorzystujemy jej przybliżoną wartość: $\pi \approx 3{,}14$.

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}} = \pi$$

Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem: $l = 2\pi r$.

Przykład 1

Oblicz długości okręgów o promieniach: $r_1 = 0{,}5$ cm, $r_2 = 1$ cm, $r_3 = 1{,}5$ cm (rysunek obok).

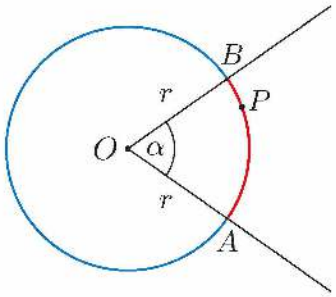


Długości okręgów wynoszą odpowiednio:

$$l_1 = 2\pi \cdot 0{,}5 = \pi \text{ [cm]}$$
$$l_2 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ [cm]}$$
$$l_3 = 2\pi \cdot 1{,}5 = 3\pi \text{ [cm]}$$

Dowolne dwa punkty A, B należące do okręgu dzielą ten okrąg na dwa **łuki**. Jeśli nie są one półokręgami, to mówiąc „łuk AB", będziemy mieć na myśli krótszy z nich, chyba, że jest powiedziane inaczej. Łuk taki oznaczamy $\overset{\frown}{AB}$. Czasami, by uniknąć niejednoznaczności, stosujemy oznaczenie trzyliterowe, np. czerwony łuk na rysunku poniżej to łuk $\overset{\frown}{APB}$.

Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym**.



Na rysunku obok ramiona kąta α przecinają okrąg w punktach A i B – kąt ten wyznacza łuk $\overset{\frown}{AB}$.

Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem $L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

Ćwiczenie 1

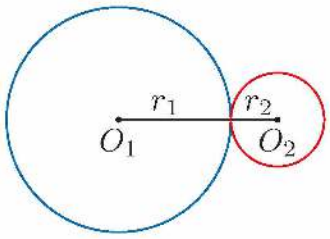
Jaką miarę ma kąt AOB, jeśli punkty A, B leżące na okręgu o środku O i promieniu $r = 12$ cm wyznaczają łuk długości 3π cm?

Ćwiczenie 2

W okręgu o średnicy 24 cm poprowadzono cztery promienie tak, że stosunek miary kątów pomiędzy kolejnymi promieniami wynosi $1:3:5:7$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez leżące na okręgu końce tych promieni.

Okręgi mające tylko jeden punkt wspólny (zwany **punktem styczności**) nazywamy **okręgami stycznymi**. Promienie okręgów stycznych poprowadzone do punktu styczności leżą na jednej prostej.

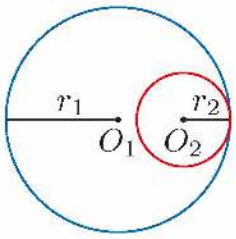
Okręgi styczne zewnętrznie



$|O_1O_2| = r_1 + r_2$

Odległość między środkami okręgów jest równa sumie ich promieni.

Okręgi styczne wewnętrznie

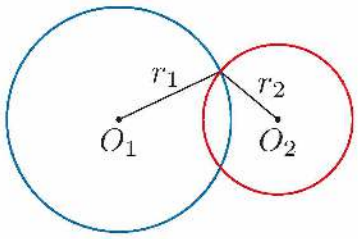


$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$

Jeśli $r_1 > r_2$, to odległość między środkami okręgów jest równa $r_1 - r_2$.

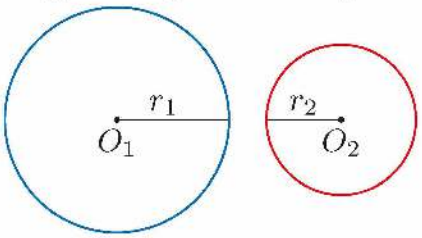
Dwa różne okręgi mogą też mieć dwa punkty wspólne (**okręgi przecinające się**) lub nie mieć punktów wspólnych (**okręgi rozłączne**).

Okręgi przecinające się



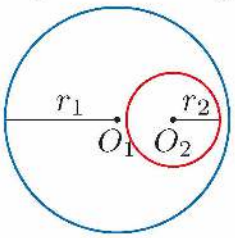
$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$

Okręgi rozłączne zewnętrznie



$|O_1O_2| > r_1 + r_2$

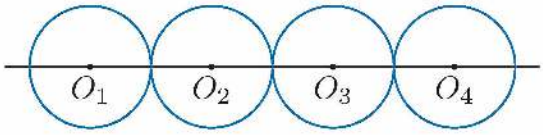
Okręgi rozłączne wewnętrznie



$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$

Ćwiczenie 3

Cztery okręgi o równych promieniach są odpowiednio styczne (rysunek obok), a ich środki leżą na jednej prostej. Oblicz średnicę tych okręgów, jeśli $|O_1O_4| = 48$.



Zadania

1. Punkty A, B leżą na okręgu o średnicy 10 cm oraz $|AB| = 5$ cm. Oblicz długość łuku $\overset{\frown}{AB}$.

2. Oblicz długość łuku okręgu o średnicy d wyznaczonego przez kąt środkowy α.

a) $d = 12$ cm, $\alpha = 75^\circ$ b) $d = 30$ cm, $\alpha = 15^\circ$ c) $d = 5$ cm, $\alpha = 330^\circ$

3. Łuk okręgu wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 20° ma długość 2π cm. Oblicz średnicę tego okręgu.

4. Oblicz miarę kąta środkowego wyznaczającego na okręgu o średnicy 18 cm łuk o długości 4π cm.

5. Wyznacz wartości x, dla których okrąg o środku w punkcie $P(x, 0)$ i promieniu $r_1 = 5$ oraz okrąg o środku w punkcie $Q(-1, 0)$ i promieniu $r_2 = 3$ są styczne: a) zewnętrznie, b) wewnętrznie.

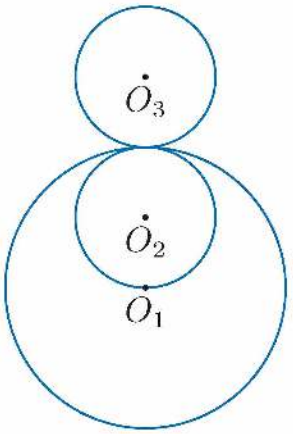
6. Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2. Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile mają one punktów wspólnych?

a) $O_1(-2, 0)$, $r_1 = 4$, $O_2(-1, 0)$, $r_2 = 2$

b) $O_1(0, -2)$, $r_1 = 4$, $O_2(0, 3)$, $r_2 = 1$

c) $O_1(1, 3)$, $r_1 = 2$, $O_2(4, 3)$, $r_2 = 5$

7. Punkty O_1, O_2 i O_3, będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej. Dwa mniejsze okręgi mają równe promienie. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów, jeśli $|O_1O_3| = 18$.



Powtórzenie

8. Oblicz promień okręgu, w którym kąt środkowy α wyznacza łuk długości L, jeśli: a) $\alpha = 40^\circ$, $L = 6\pi$, b) $\alpha = 7^\circ 30'$, $L = \pi$.

9. Odległość między środkami okręgów o promieniach 3 i 5 jest równa n, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Podaj możliwe wartości n, jeśli okręgi te mają dwa punkty wspólne.

10. Końce przekątnej prostokąta o bokach długości 4 cm i 8 cm są środkami dwóch okręgów stycznych zewnętrznie. Punkt styczności dzieli przekątną prostokąta w stosunku $1:3$. Oblicz długości tych okręgów.

5.2. Koło

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

Zwróć uwagę, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła.

Wzór na pole koła został udowodniony przez Archimedesa.

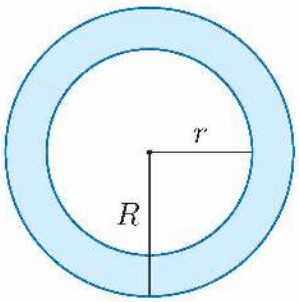
Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem: $P = \pi r^2$.

Ćwiczenie 1

a) Oblicz pole największego koła zawartego w kwadracie o polu 36 cm^2.

b) Oblicz długość okręgu ograniczającego koło o polu $2{,}25\pi$ cm^2.

Część płaszczyzny ograniczoną przez dwa współśrodkowe okręgi (wraz z tymi okręgami) nazywamy **pierścieniem kołowym**.
Opisując pierścień kołowy, podajemy jego **promień zewnętrzny** i **promień wewnętrzny**. Różnicę tych promieni nazywamy **szerokością pierścienia**. Dla pierścienia na rysunku obok jest ona równa $R - r$.



Ćwiczenie 2

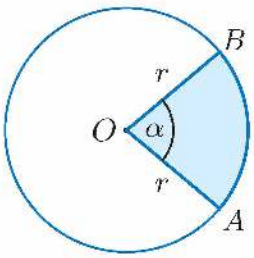
a) Oblicz pole pierścienia kołowego o promieniu zewnętrznym 25 cm i promieniu wewnętrznym 24 cm. Podaj promień koła, którego pole jest równe polu tego pierścienia.

b) Pole pierścienia kołowego o szerokości 1 cm wynosi 17π cm^2. Oblicz promień zewnętrzny i promień wewnętrzny tego pierścienia.

Część koła o środku O (wraz z jej brzegiem) ograniczoną łukiem $\overset{\frown}{AB}$ i promieniami OA i OB nazywamy **wycinkiem koła** lub **wycinkiem kołowym**.

Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Ćwiczenie 3

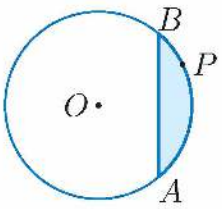
Oblicz pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy α.

a) $r = 12$, $\alpha = 75^\circ$ b) $r = 2$, $\alpha = 22^\circ 30'$ c) $r = \sqrt{3}$, $\alpha = 315^\circ$

Ćwiczenie 4

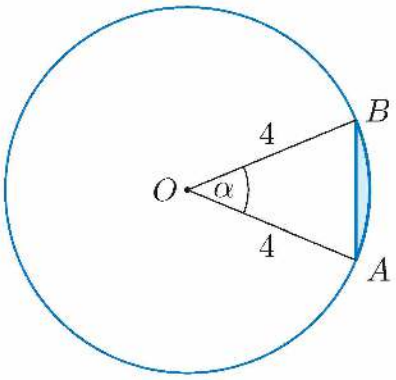
Pole wycinka koła o promieniu 6 wyznaczonego przez kąt α jest równe 2π. Oblicz miarę kąta α.

Część koła (wraz z jej brzegiem) ograniczoną łukiem $\overset{\frown}{APB}$ i cięciwą AB nazywamy **odcinkiem koła** lub **odcinkiem kołowym**.



Przykład 1

Oblicz pole odcinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez cięciwę AB i kąt AOB o mierze 45° (rysunek obok).



Obliczamy pole wycinka koła AOB:

$$P_1 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = 2\pi$$

Następnie obliczamy pole trójkąta AOB:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$$

Zatem pole odcinka koła:

$$P = P_1 - P_2 = 2\pi - 4\sqrt{2}$$

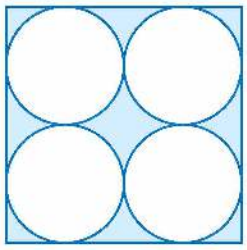
Ćwiczenie 5

Punkty A, B należące do okręgu o środku O i promieniu 12 wyznaczają kąt AOB. Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez ten kąt, jeśli:

a) $\sphericalangle AOB = 90^\circ$, b) $\sphericalangle AOB = 60^\circ$, c) $\sphericalangle AOB = 30^\circ$.

Zadania

D **1.** Bok kwadratu ma długość 6. Wykaż, że pole zacieniowanego obszaru jest mniejsze od 9 (rysunek obok).

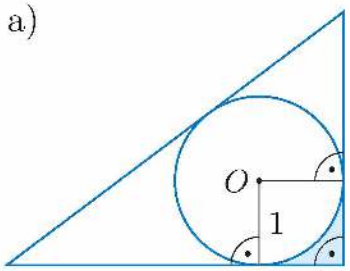


2. Cięciwa łącząca punkty A i B leżące na okręgu o promieniu 5 ma długość $5\sqrt{3}$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez te punkty oraz pola odpowiednich wycinków.

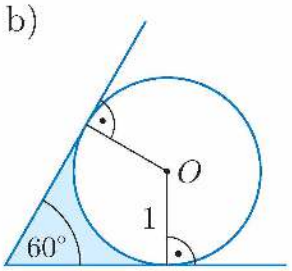
3. W kole o środku O i promieniu 4 poprowadzono cięciwę AB. Oblicz pola figur, na które cięciwa podzieliła koło, jeśli pole $\triangle AOB$ jest równe $4\sqrt{2}$.

4. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

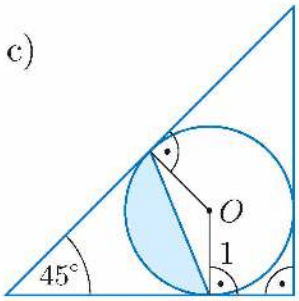
a)



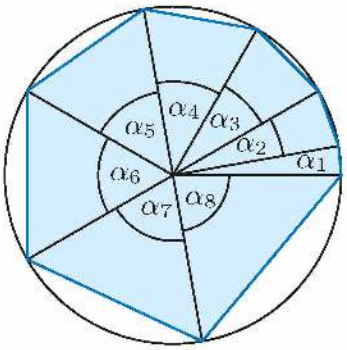
b)



c)



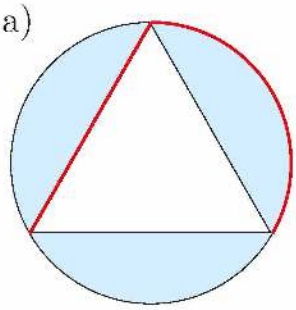
5. Wierzchołki ośmiokąta (rysunek obok) należą do okręgu o promieniu 3. Spośród kolejnych kątów środkowych: α_1, ..., α_8 każdy następny jest o 10° większy od poprzedniego.

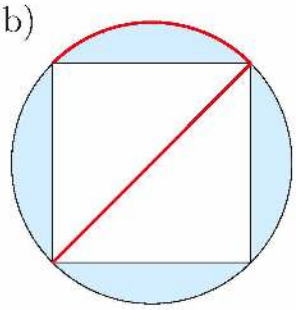


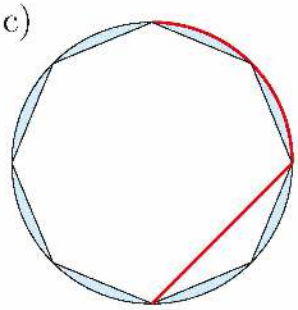
a) Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt α_8.

b) Oblicz sumę pól odcinków koła wyznaczonych przez kąty α_3 i α_6.

6. Dany jest wielokąt foremny, którego wierzchołki leżą na okręgu o promieniu 2. Oblicz długość czerwonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.

a) 

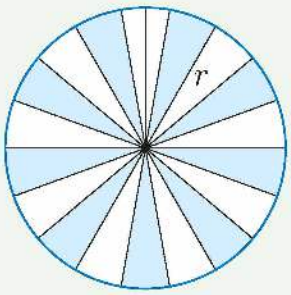
b) 

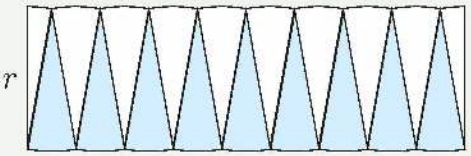
c) 

D **7.** Uzasadnij, że pole odcinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 60° jest równe $\frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Czy wiesz, że...

Do uzasadnienia wzoru na pole koła wykorzystuje się ustawienie wycinków koła w figurę taką jak na rysunku obok.





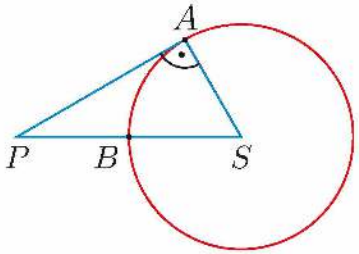
Dolna linia składająca się z łuków ma długość πr.

Powtórzenie

8. Oblicz promień koła, którego wycinek wyznaczony przez kąt α ma pole P.

a) $\alpha = 45^\circ$, $P = 0{,}75\pi$ b) $\alpha = 140^\circ$, $P = 7\pi$ c) $\alpha = 300^\circ$, $P = 18\pi$

9. Punkt A leży na okręgu o środku w punkcie S (rysunek obok). Odległość od punktu P do środka okręgu jest równa 2 cm, a do punktu A jest równa $\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole:



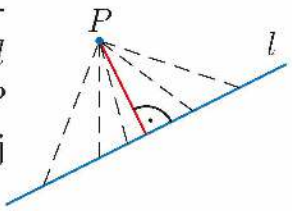
a) trójkąta PSA, b) wycinka koła BSA.

5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij, że najkrótszy odcinek łączący dany punkt P z punktem leżącym na prostej l, gdzie $P \notin l$, jest do tej prostej prostopadły.

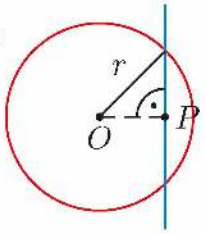
Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l, to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

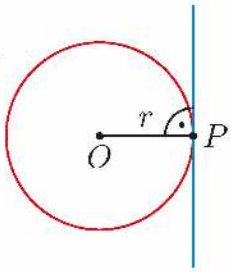
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.

$|OP| < r$



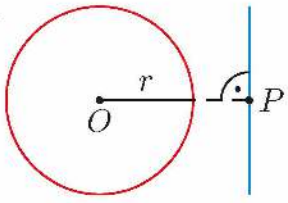
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

$|OP| = r$



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu prowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

$|OP| > r$



Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Ćwiczenie 2

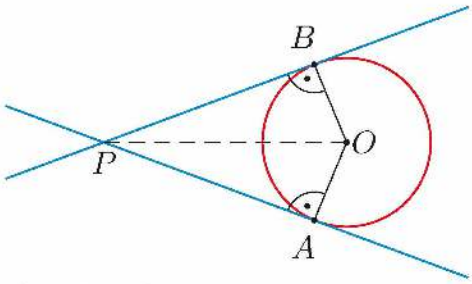
a) Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 6 cm w punkcie P. Punkt A leży na prostej l i $|PA| = 4$ cm. Oblicz odległość punktu A od środka okręgu.

b) Prosta AB jest styczna do okręgu o środku w punkcie O. Punkt styczności P jest środkiem odcinka AB. Oblicz promień okręgu, jeśli $|AO| = 20$ cm i $|AB| = 32$ cm.

Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to:

$$|PA| = |PB|$$

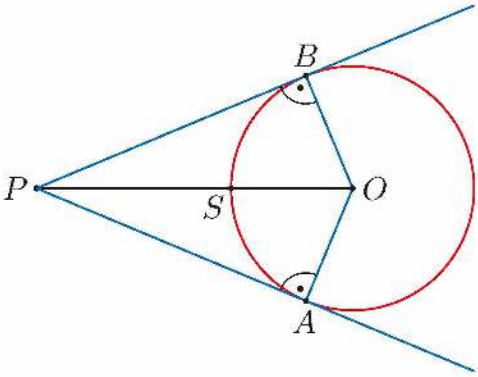


Dowód powyższego twierdzenia wynika z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów PAO i PBO.

Ćwiczenie 3

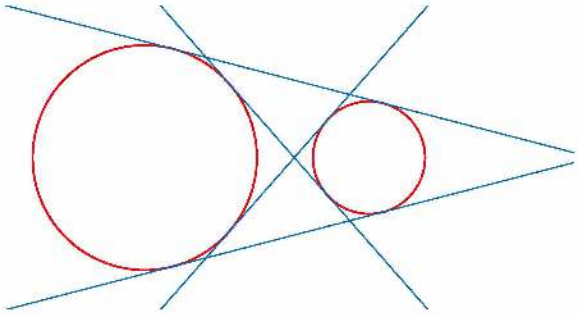
a) Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 6 cm. Z punktu P odległego od punktu O o 10 cm poprowadzono dwie proste styczne do okręgu w punktach A i B. Oblicz obwód czworokąta $PAOB$.

b) Obwód czworokąta $PAOB$ (rysunek obok) jest równy 34 cm. Oblicz promień okręgu, jeśli odcinek PS ma długość 8 cm.

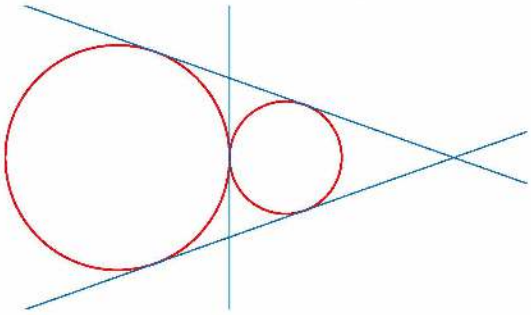


Liczba wspólnych stycznych dwóch okręgów zależy od położenia tych okręgów.

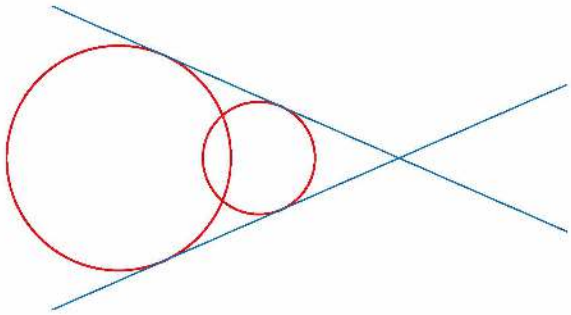
Okręgi rozłączne zewnętrznie
cztery wspólne styczne



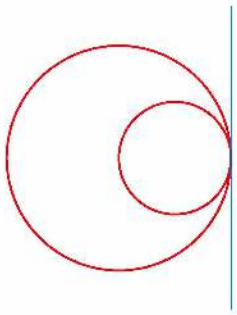
Okręgi styczne zewnętrznie
trzy wspólne styczne



Okręgi przecinające się
dwie wspólne styczne



Okręgi styczne wewnętrznie
jedna wspólna styczna



Okręgi rozłączne wewnętrznie nie mają wspólnych stycznych.

Ćwiczenie 4

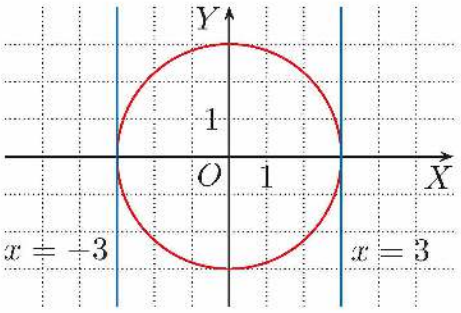
Dany jest okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2. Określ liczbę wspólnych stycznych tych okręgów.

a) $r_1 = 3\frac{1}{2},\ r_2 = 4\frac{1}{2},\ |O_1O_2| = 5\frac{1}{2}$ c) $r_1 = \frac{1}{3},\ r_2 = \frac{1}{2},\ |O_1O_2| = \frac{1}{6}$

b) $r_1 = 11,\ r_2 = 13,\ |O_1O_2| = 24$ d) $r_1 = \sqrt{2},\ r_2 = \sqrt{3},\ |O_1O_2| = 4$

Przykład 1

Dany jest okrąg o środku $O(0,0)$ i promieniu 3. Ile punktów wspólnych z okręgiem ma prosta $x = m$ w zależności od parametru m?



Prosta $x = m$ z danym okręgiem:

- ma jeden punkt wspólny dla $m \in \{-3, 3\}$,
- ma dwa punkty wspólne dla $m \in (-3; 3)$,
- nie ma punktów wpólnych dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

Ćwiczenie 5

Dany jest okrąg o środku $S(0,2)$ i promieniu 4. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta $y = m$ w zależności od parametru m?

Przykład 2

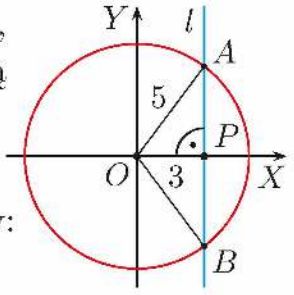
Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty wspólne prostej l: $x = 3$ i okręgu o środku $O(0,0)$ i promieniu 5.

Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l, a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą. Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 8$$



Ćwiczenie 6

a) Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej $y = -3$ i okręgu o środku w punkcie $(2,0)$ i promieniu 4.

b) Cięciwa długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej $x = 1$ i okręgu o środku w punkcie $(-3,2)$. Oblicz promień tego okręgu.

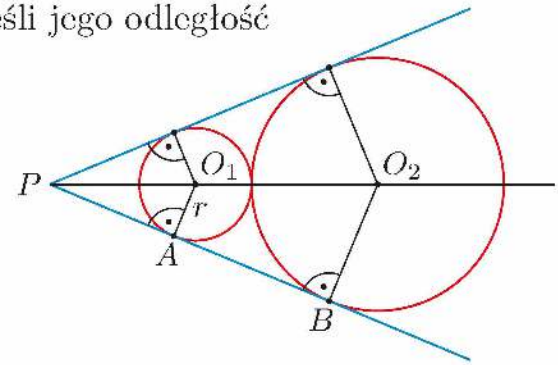
Zadania

1. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 10 w punktach A i B. Wyznacz równanie tej prostej, jeśli:

a) $|AB| = 12$, b) $|AB| = 10\sqrt{2}$, c) $|AB| = 10$, d) $|AB| = 20$.

2. Dany jest okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 11. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do osi OX i ma długość 20. Wyznacz współrzędne punktu P należącego do tej cięciwy, jeśli jego odległość od środka okręgu jest równa 5.

3. Z punktu P poprowadzono wspólne styczne okręgów o środkach w punktach O_1 i O_2 (rysunek obok). Oblicz promień r okręgu o środku w punkcie O_1, jeśli $|O_2B| = 5$ i $|O_2P| = 13$.

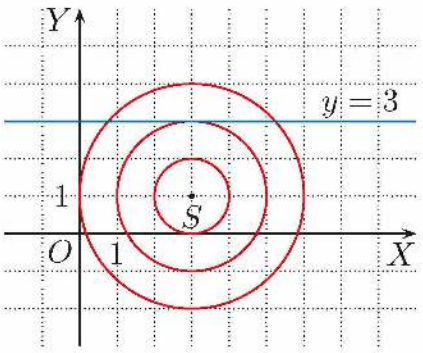


4. Punkty A i B leżą na okręgu o średnicy 12 cm, a odległość między nimi jest równa promieniowi tego okręgu. Styczne do okręgu poprowadzone w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Oblicz pole trójkąta APB.

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ile punktów wspólnych ma prosta $y = 3$ z okręgiem o środku $S(3,1)$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Prosta $y = 3$ z okręgiem:
- ma jeden punkt wspólny dla $r = 2$,
- ma dwa punkty wspólne dla $r \in (2;\infty)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $r \in (0;2)$.



Ile punktów wspólnych ma prosta k z okręgiem o środku S w zależności od promienia r tego okręgu?

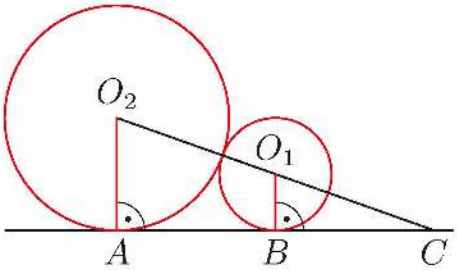
a) k: $y = 3$, $S(3,-1)$ b) k: $x = -1$, $S\left(-\frac{3}{2},4\right)$ c) k: $x = \sqrt{2}$, $S(-1,1)$

Powtórzenie

6. Punkty A i B leżą na okręgu o środku O i promieniu r. Oblicz pole trójkąta AOB, jeśli:

a) $|AB| = 4$ cm, $r = 2\sqrt{10}$ cm, b) $|AB| = 14$ cm, $r = 25$ cm.

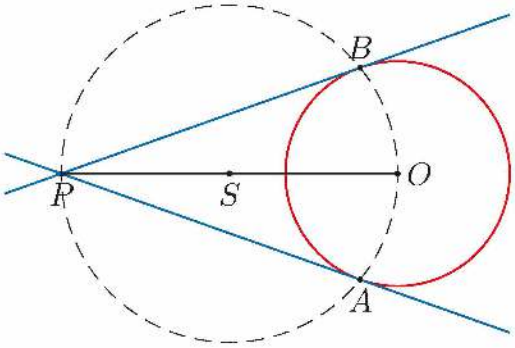
7. Dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach odpowiednio 1 i 2 są styczne zewnętrznie (rysunek obok). Prosta AB jest ich wspólną styczną. Oblicz długość odcinka CO_1 oraz pole trapezu ABO_1O_2.



Konstrukcja stycznej do okręgu

Aby skonstruować styczną do danego okręgu o środku O, przechodzącą przez punkt P leżący na zewnątrz okręgu, postępujemy w następujący sposób.

- Wyznaczamy środek odcinka OP – punkt S na rysunku poniżej.
- Rysujemy okrąg, którego promieniem jest odcinek SO – okrąg ten przecina dany okrąg w punktach A i B.
- Prosta PA jest styczna do danego okręgu. Zauważ, że $PA \perp OA$ (aby to uzasadnić, można rozpatrzyć kąty trójkątów równoramiennych PSA i OSA). Drugą styczną jest prosta PB.

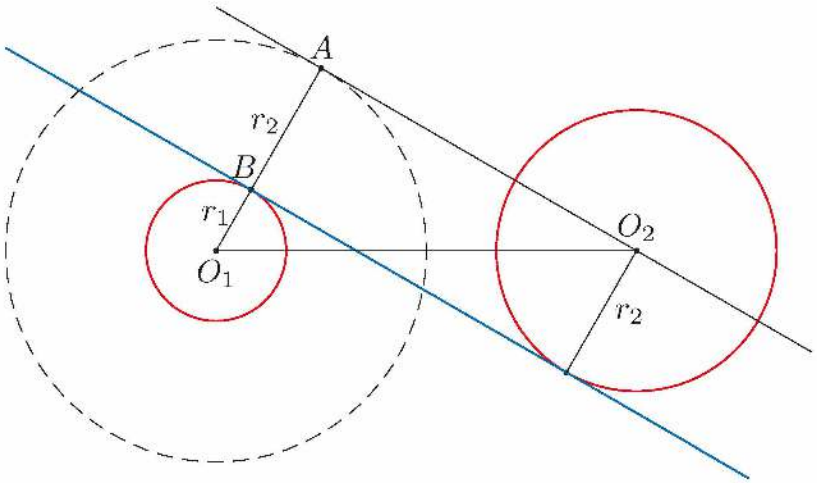


1. Opisz konstrukcję stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt należący do tego okręgu.

Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie

Rozpatrzmy okrąg L_1 o środku O_1 i promieniu r_1 oraz rozłączny z nim zewnętrznie okrąg L_2 o środku O_2 i promieniu r_2 (rysunek poniżej).

- Rysujemy okrąg L_3 o środku w punkcie O_1 i promieniu równym $r_1 + r_2$.

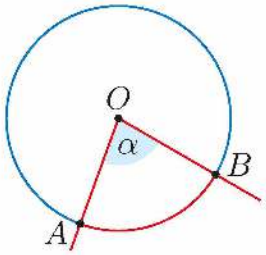


- Rysujemy prostą O_2A – styczną do okręgu L_3 przechodzącą przez punkt O_2.
- Wyznaczamy punkt B – punkt przecięcia odcinka O_1A z okręgiem L_1.
- Rysujemy styczną do okręgu L_1 przechodzącą przez punkt B. Jest ona również styczna do okręgu L_2 (uzasadnij).

***2.** Opisz, jak skonstruować pozostałe wspólne styczne dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie.

5.4. Kąty w okręgu

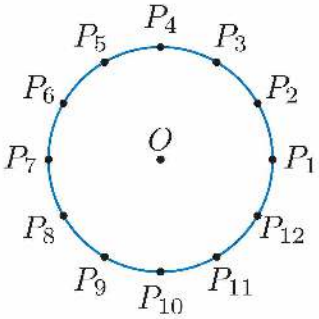
Kąt środkowy α przedstawiony na rysunku obok jest wyznaczony przez zaznaczonony kolorem czerwonym łuk $\overset{\frown}{AB}$.
Mówimy też, że kąt środkowy α jest oparty na łuku $\overset{\frown}{AB}$ lub na cięciwie AB.



Ćwiczenie 1

Punkty: $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ dzielą okrąg na 12 łuków o równej długości. Podaj miarę kąta środkowego opartego na łuku:

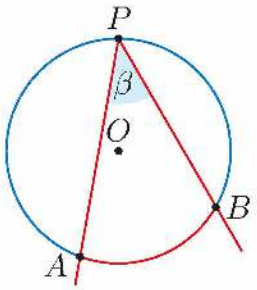
a) $\overset{\frown}{P_1P_2P_3}$, b) $\overset{\frown}{P_4P_7P_{12}}$, c) $\overset{\frown}{P_6P_1P_7}$.



Definicja

Kąt wpisany w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego okręgu.

O kącie wpisanym β (rysunek obok) mówimy, że jest oparty na łuku $\overset{\frown}{AB}$.



Twierdzenie

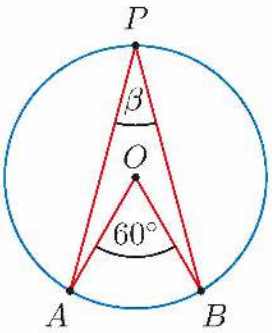
Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Dowód – patrz ćwiczenie 4. na następnej stronie.

Ćwiczenie 2

a) Podaj miarę kąta β (rysunek obok).

b) Narysuj w dowolnym okręgu kąt środkowy $\alpha = 120°$ i trzy różne kąty wpisane oparte na tym samym łuku co kąt α. Podaj miarę tych kątów.



Ćwiczenie 3

Kąt wpisany β jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy α. Wyznacz miarę kąta $\alpha + \beta$, jeśli:

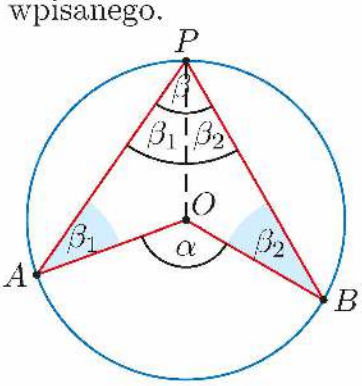
a) $\alpha = 110°$, b) $\alpha = 45°$, c) $\beta = 17°$, d) $\beta = 105°$.

D Ćwiczenie 4

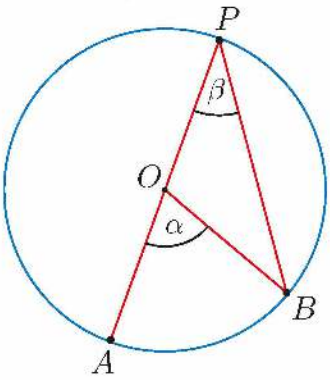
Przeczytaj informację w ramce oraz dowód przypadku I, a następnie przeprowadź dowody przypadków II i III.

Aby udowodnić, że kąt środkowy α w okręgu jest dwukrotnie większy od kąta wpisanego β opartego na tym samym łuku, wystarczy rozpatrzyć trzy przypadki.

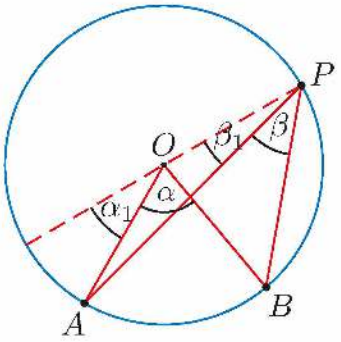
I. Środek okręgu O leży wewnątrz kąta wpisanego.



II. Środek okręgu O leży na ramieniu kąta wpisanego.



III. Środek okręgu O leży poza kątem wpisanym.



Dowód przypadku I

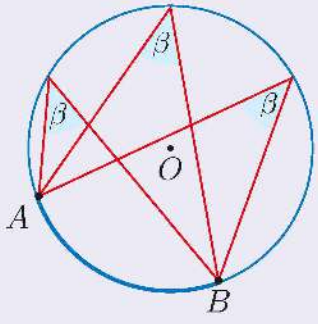
Z punktu P prowadzimy promień PO. Wówczas $\beta = \beta_1 + \beta_2$.
Wyznaczamy miarę kąta środkowego:

$$\alpha = 360^\circ - (180^\circ - 2\beta_1) - (180^\circ - 2\beta_2) = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$$

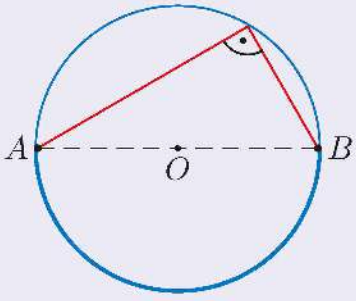
Wskazówka do przypadku III. Rozważ kąty $\alpha + \alpha_1$ i $\beta + \beta_1$.

Poniższe wnioski wynikają z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym.

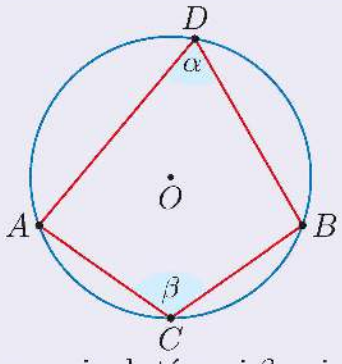
Twierdzenie



Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku powyżej, jest równa 180°.

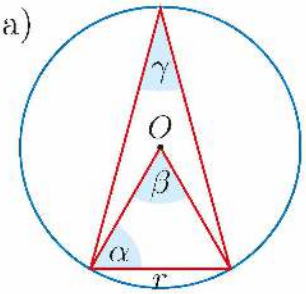
D Ćwiczenie 5

Uzasadnij każdy ze sformułowanych powyżej wniosków.

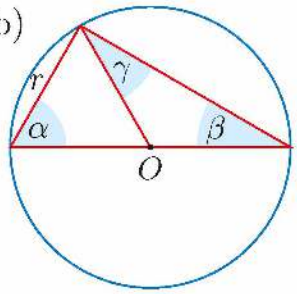
Ćwiczenie 6

Promień okręgu jest równy r. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

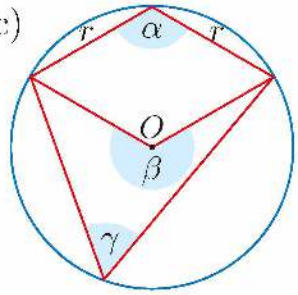
a)



b)



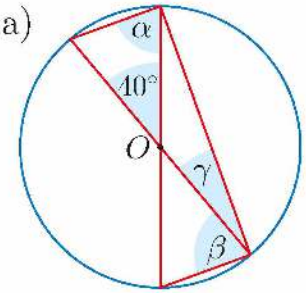
c)



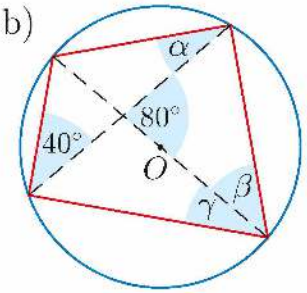
Ćwiczenie 7

Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

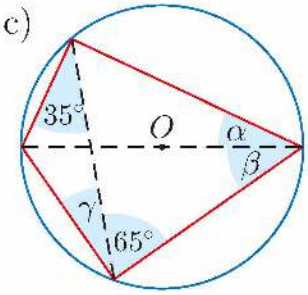
a)



b)

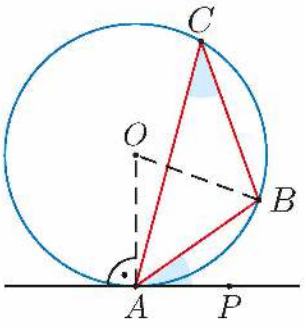


c)



Kąt między styczną a cięciwą okręgu

Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności (zwany kątem dopisanym do okręgu) jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy.



D **Ćwiczenie 8**

Uzasadnij powyższe twierdzenie.

Zadania

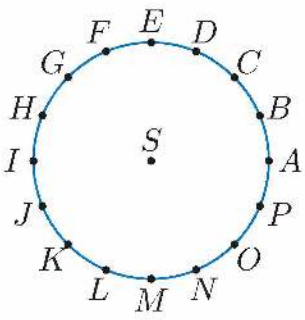
1. Punkty: $A, B, C, \ldots, P$ dzielą okrąg na 16 łuków o równej długości. Punkt A leży na jednym z ramion kąta środkowego β. Który z punktów leży na drugim ramieniu tego kąta?

a) $\beta = 45^\circ$

b) $\beta = 112{,}5^\circ$

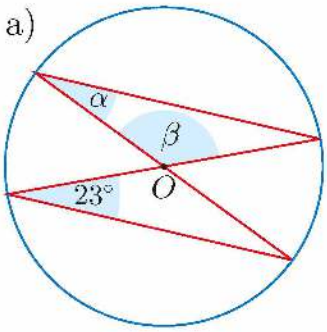
c) $\beta = 225^\circ$

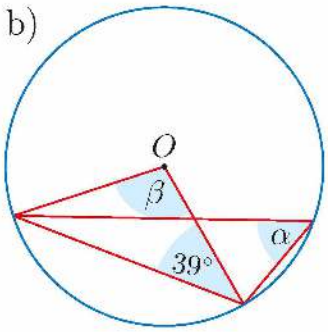
d) $\beta = 315^\circ$

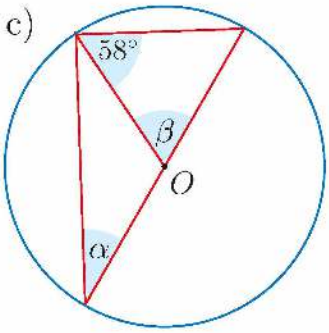


2. Dany jest okrąg o promieniu 6. Podaj miarę kąta wpisanego opartego na łuku tego okręgu, jeśli łuk ten ma długość: a) 2π, b) 3π, c) $\frac{15}{2}\pi$, d) $\frac{\pi}{4}$.

3. Wyznacz miary kątów α i β.

a) 

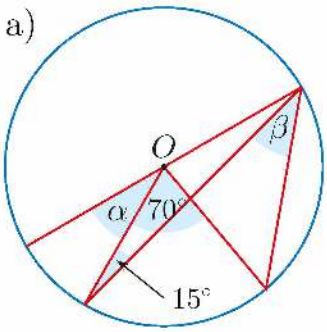
b) 

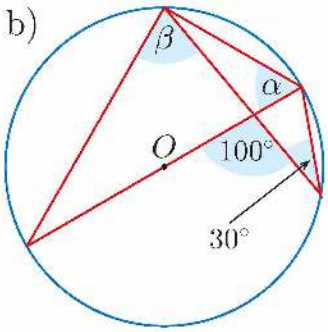
c) 

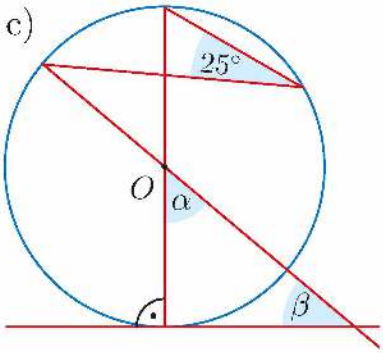
4. Kąt β jest kątem wpisanym w okrąg, opartym na tym samym łuku co kąt środkowy α. Wyznacz miary kątów α i β.

a) $\alpha + \beta = 111°$ b) $\alpha = \beta + 56°30'$ c) $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 48°$

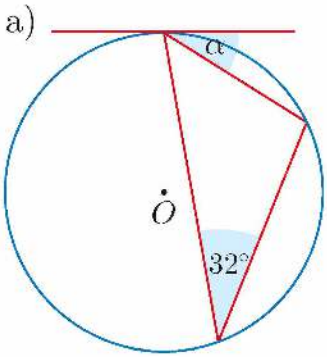
5. Wyznacz miary kątów α i β.

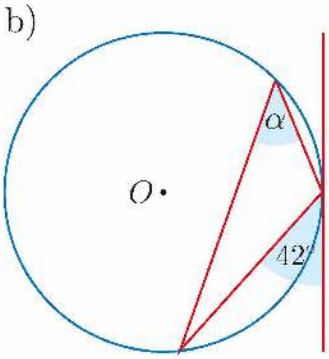
a) 

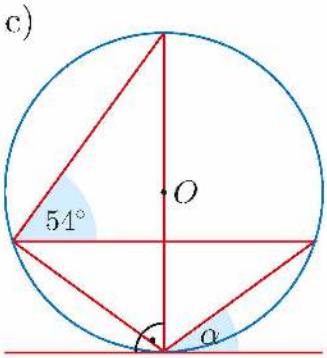
b) 

c) 

6. Wyznacz miarę kąta α.

a) 

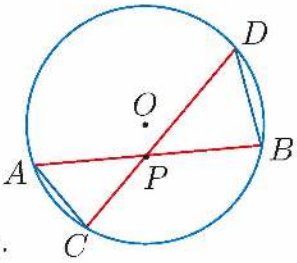
b) 

c) 

7. a) W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB. Jeden z kątów trójkąta AOB ma miarę $96°$. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie A.

b) W okręgu o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę AB. Długość łuku $\overset{\frown}{AB}$ jest równa π cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie B.

D **8.** Udowodnij twierdzenie o cięciwach.

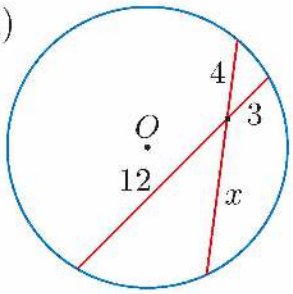


> Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P, to $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

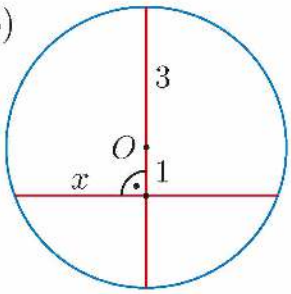
Wskazówka. Uzasadnij najpierw, że trójkąty PAC i PDB są podobne.

9. Oblicz x.

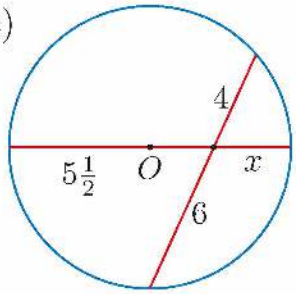
a)



b)



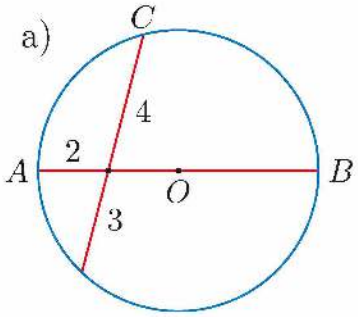
c)



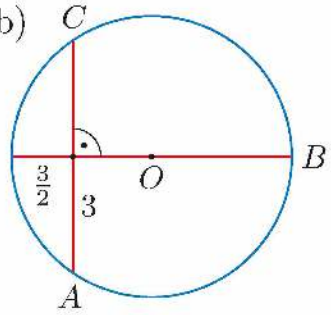
10. Dany jest okrąg o promieniu 11 cm. Przez punkt P, odległy od środka okręgu o 5 cm, poprowadzono cięciwę o długości 20 cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt P dzieli cięciwę.

11. Oblicz promień okręgu oraz pole trójkąta ABC.

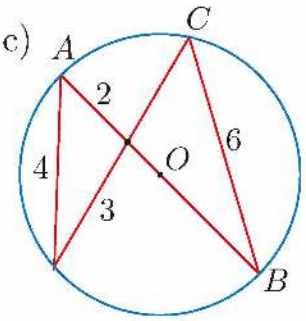
a)



b)



c)

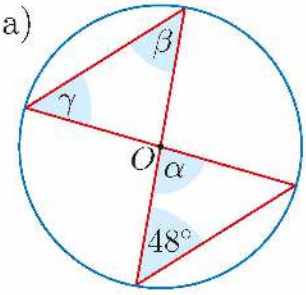


Powtórzenie

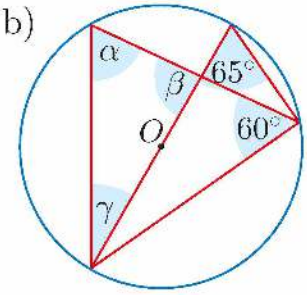
12. Wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB leżą na okręgu. Kąt między bokiem BC a prostą styczną do okręgu w punkcie B ma miarę 40°. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

13. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

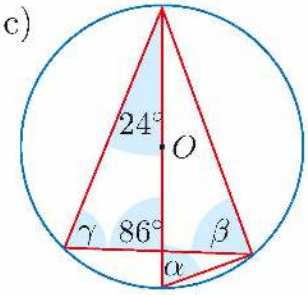
a)



b)



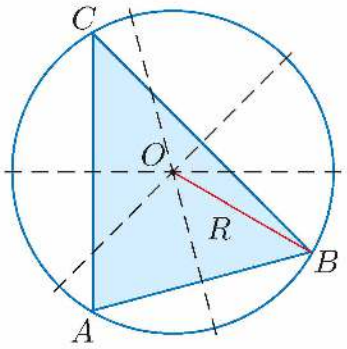
c)



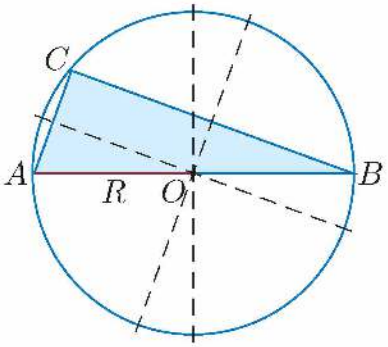
5.5. Okrąg opisany na trójkącie

Okrąg nazywamy opisanym na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest wpisany w okrąg.
Na każdym trójkącie można opisać okrąg mówi o tym poniższe twierdzenie.

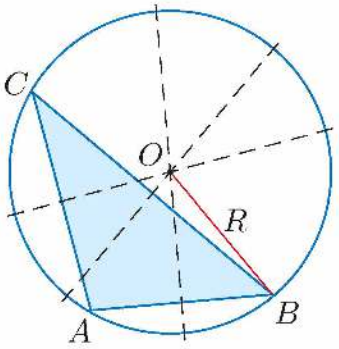
> Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.



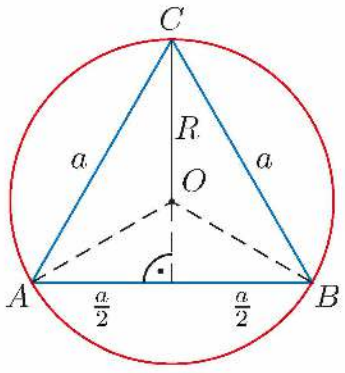
Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży na zewnątrz tego trójkąta.

D Ćwiczenie 1

Udowodnij, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia symetralnych dwóch boków trójkąta od jego wierzchołków.

> Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a wyraża się wzorem:
>
> $$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



D Ćwiczenie 2

Udowodnij powyższe twierdzenie.

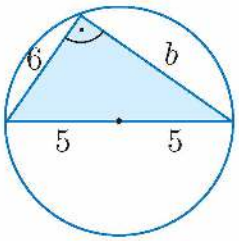
Mówimy, że koło jest opisane na trójkącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 3

a) Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o polu $64\sqrt{3}$ cm^2.
b) Oblicz wysokość oraz pole trójkąta równobocznego, na którym opisano okrąg o promieniu 6 cm.

Przykład 1

Na trójkącie prostokątnym o jednej z przyprostokątnych długości 6 opisano okrąg o promieniu 5. Oblicz pole tego trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej (jest ona średnicą tego okręgu), zatem przeciwprostokątna ma długość $c = 2R = 2 \cdot 5 = 10$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, skąd $b = 8$, więc pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Ćwiczenie 4

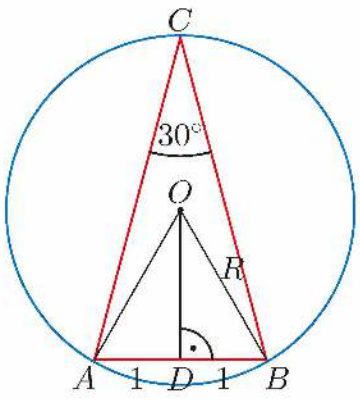
a) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 7 cm i 12 cm.

b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe 18 cm^2. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 4 cm. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

c) Pole trójkąta prostokątnego jest równe $24\sqrt{2}$ cm^2. Wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku $1:2$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Przykład 2

W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 30°, a podstawa ma długość 2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie oraz odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Wówczas kąt AOB jest kątem środkowym, opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB, zatem: $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = 60^\circ$, czyli trójkąt AOB jest równoboczny, więc $R = |OA| = |OB| = |AB| = 2$. Odległość środka okręgu od podstawy trójkąta jest równa $|OD|$, a odcinek OD jest wysokością trójkąta równobocznego:

$$|OD| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Ćwiczenie 5

a) W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 45°, a podstawa ma długość 4 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) W okrąg o promieniu 5 cm wpisany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta (rozpatrz dwa przypadki).

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą długości boków trójkąta, jego pole oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

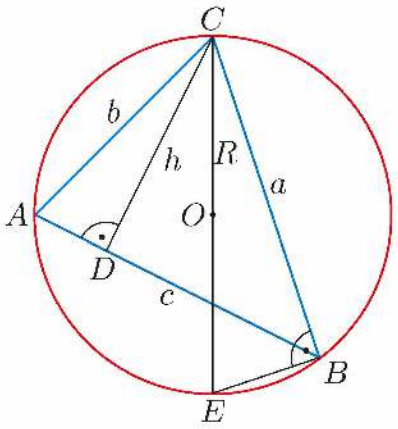
Twierdzenie

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Dowód

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości a, b, c (rysunek obok), wpisany w okrąg o środku O i promieniu R. Odcinek CD jest wysokością trójkąta, a odcinek CE – średnicą okręgu. Kąty CAB i CEB są równe (dlaczego?). Zatem trójkąty ACD i ECB są podobne, czyli:



$$\frac{h}{b} = \frac{a}{2R}, \quad \text{stąd} \quad h = \frac{ab}{2R}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}c \cdot \frac{ab}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Ćwiczenie 6

a) Oblicz pole trójkąta o bokach 4 cm, 13 cm i 15 cm wpisanego w okrąg o promieniu równym $\frac{65}{8}$ cm.

b) Dany jest trójkąt o bokach 13 cm, 14 cm i 15 cm i polu równym 84 cm^2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

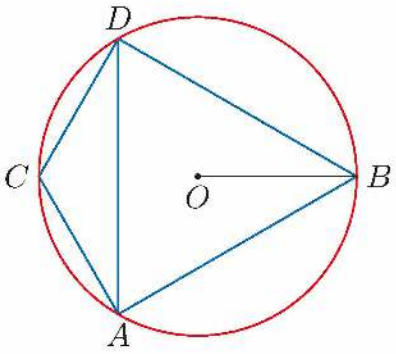
Zadania

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, jeśli:
a) jego pole wynosi 8 cm^2, a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 2 cm,
b) krótsza przyprostokątna ma długość 5 cm, a jeden z kątów ostrych trójkąta jest dwa razy większy od drugiego,
c) jest on równoramienny, a jego obwód wynosi 6 cm.

2. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu 5, jeśli:
a) jest to trójkąt równoramienny,
b) jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej.

3. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, jeśli odległości środka okręgu opisanego na tym trójkącie od jego przyprostokątnych są równe 4 i 6.

4. W okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny ABD i trójkąt równoramienny ACD (rysunek obok). Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

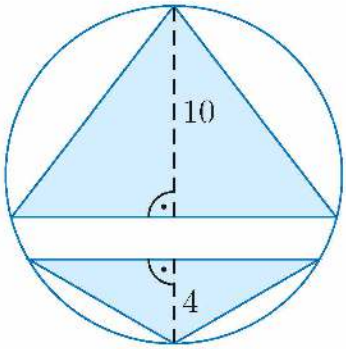


5. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 cm, jeśli:
a) jego ramię ma długość $4\sqrt{5}$ cm,
b) sinus kąta przy tej podstawie jest równy $\frac{3}{5}$.

6. Do podstawy trójkąta równoramiennego poprowadzono wysokość h. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli opisany na nim okrąg ma promień równy 13 cm.
a) $h = 20$ cm b) $h = 6$ cm

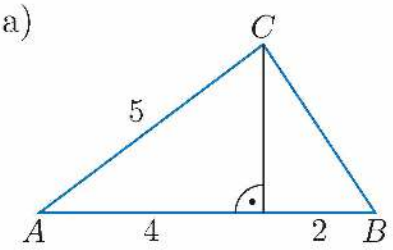
7. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie między ramionami równym 120°, jeśli trójkąt ten jest wpisany w okrąg o promieniu 4.

8. Oblicz stosunek pól przedstawionych na rysunku obok trójkątów równoramiennych wpisanych w okrąg o promieniu 8.

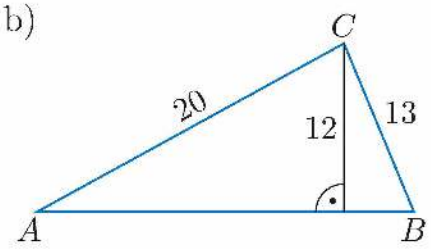


9. Oblicz pole trójkąta ABC oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

a)



b)



Powtórzenie

10. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, jeśli wiadomo, że pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe 25π, a stosunek długości przyprostokątnych wynosi $1:7$.

11. Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o polu równym 45, jeśli wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku $1:4$.

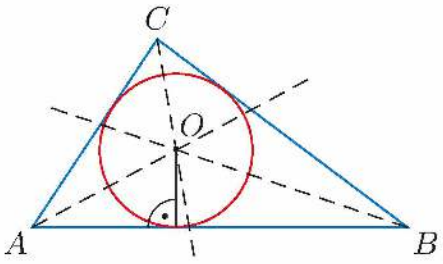
12. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 8 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli wysokość opuszczona na podstawę ma długość: a) 10 cm, b) 3 cm.

5.6. Okrąg wpisany w trójkąt

Okrąg nazywamy wpisanym w trójkąt, jeżeli wszystkie boki trójkąta są styczne do tego okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest opisany na okręgu.
W każdy trójkąt można wpisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



D **Ćwiczenie 1**

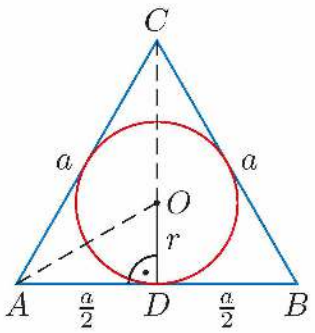
Udowodnij, że dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia dwusiecznych dwóch kątów wewnętrznych trójkąta od jego boków.

Twierdzenie

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



Dowód

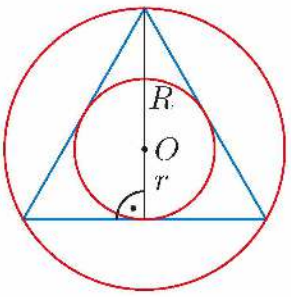
Odcinek AO (rysunek powyżej) jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC, czyli $\sphericalangle OAD = 30^\circ$. Zatem $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \sphericalangle OAD = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ćwiczenie 2

a) Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 18.

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o długości 10π.

Zwróć uwagę na okrąg wpisany w trójkąt równoboczny i okrąg opisany na tym trójkącie mają one wspólny środek (punkt O na rysunku obok). Punkt ten dzieli wysokość trójkąta równobocznego w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.

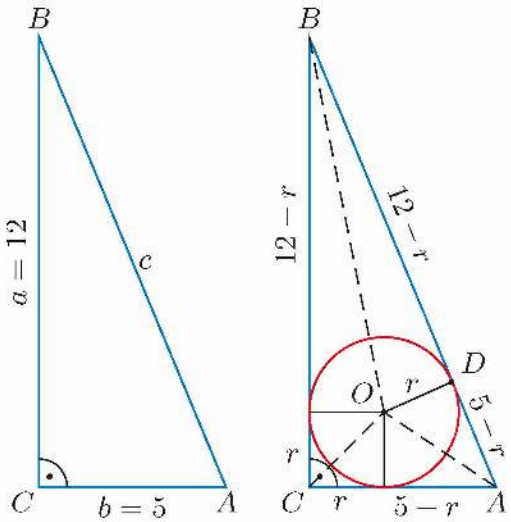


Ćwiczenie 3

Oblicz sumę długości okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o obwodzie równym 36 cm i okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przykład 1

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12.



Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Przy oznaczeniach jak na rysunku obok:

$$|AD| = 5 - r \quad \text{i} \quad |BD| = 12 - r$$

Zatem $(5 - r) + (12 - r) = 13$.
Stąd otrzymujemy $r = 2$.

Ćwiczenie 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości: a) 3 i 4, b) 7 i 24.

Ćwiczenie 5

a) Na okręgu o promieniu 4 cm opisano trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

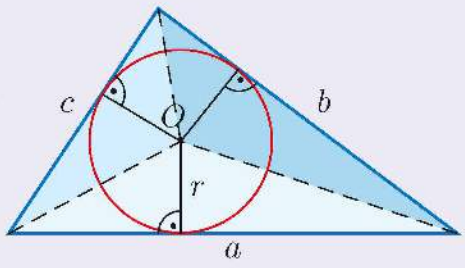
b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą obwód trójkąta, jego pole oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu tego trójkąta i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



Uwaga. Jeśli przez p oznaczymy połowę obwodu trójkąta: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to $P = p \cdot r$.

D **Ćwiczenie 6**

Uzasadnij podany wzór na pole trójkąta, korzystając z powyższego rysunku.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta o bokach 5, 5 i 6 opisanego na okręgu długości 3π.

Przykład 2

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 i 12.

Oznaczmy $a = 9$ i $b = 12$. Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$$

Obwód trójkąta jest równy $a + b + c = 36$, a pole $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. Przekształcamy wzór na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt:

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 54}{36} = \frac{108}{36} = 3$$

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c oraz polu P wyraża się wzorem:

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

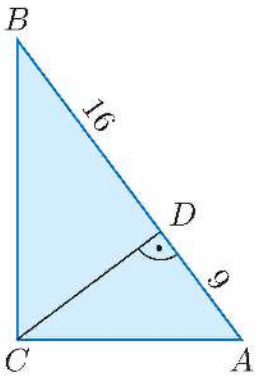
Ćwiczenie 8

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości: a) 12 i 16, b) 1 i 1, c) 10 i 24, d) 2 i $\sqrt{5}$.

Mówimy, że koło jest wpisane w trójkąt, gdy wpisany jest w niego okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 9

Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego trójkąta ABC dzieli jego przeciwprostokątną na odcinki o długościach 9 i 16.



D a) Uzasadnij, że trójkąty ABC, ACD i CBD są podobne.

b) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ABC.

c) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ACD oraz promień i pole koła wpisanego w trójkąt CBD.

Zadania

D **1.** a) Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem $P = \frac{3}{2}ar$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

b) Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym o boku a do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

2. a) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30°. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

b) W trójkącie prostokątnym krótsza przyprostokątna ma długość 6, a jeden z kątów ma miarę 60°. Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.

D **3.** Uzasadnij, że promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b oraz przeciwprostokątnej c wyraża się wzorem:

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

4. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość x, a jego ramię – długość y. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

a) $x = 12$, $y = 10$ b) $x = 10$, $y = 13$

5. a) Na okręgu o promieniu 3 opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120°. Oblicz długości boków tego trójkąta.

b) W trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie równym 30° wpisano okrąg o promieniu 2. Oblicz pole tego trójkąta.

6. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i wysokości 4 cm wpisano koło oraz w trójkąt równoramienny o podstawie długości 8 cm i wysokości 3 cm wpisano koło. Oblicz różnicę pól tych kół.

7. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramieniu długości 6 cm wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz odległości środka okręgu od wierzchołków tego trójkąta.

8. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu 4. Jeden z boków tego trójkąta został podzielony przez punkt styczności okręgu na odcinki o długościach 4 i $4\sqrt{3}$. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Powtórzenie

9. Pierścień kołowy ograniczony okręgiem opisanym na trójkącie równobocznym i okręgiem w niego wpisanym ma pole równe 16π. Oblicz obwód tego trójkąta.

10. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, jeśli:

a) jego przyprostokątne mają długości 7 cm i 1 cm,

b) miara jednego z kątów ostrych wynosi 30°, a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta jest równa 8 cm,

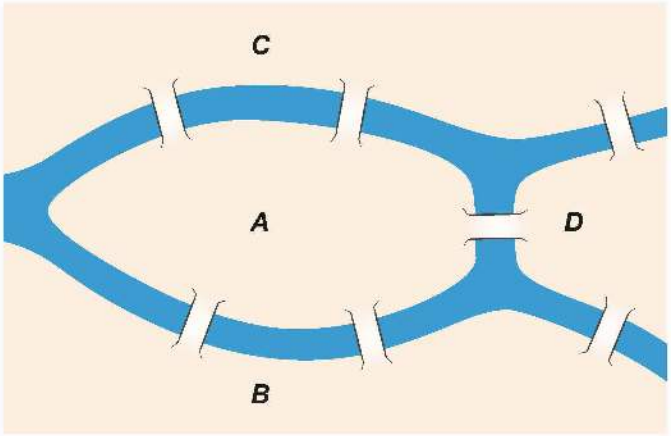
c) środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 5 cm, a stosunek długości przyprostokątnych wynosi $1 : 2$.

11. W trójkąt równoramienny, którego podstawa ma długość 12 cm, a pole jest równe 24 cm^2, wpisano okrąg. Oblicz obwód trójkąta i długość okręgu.

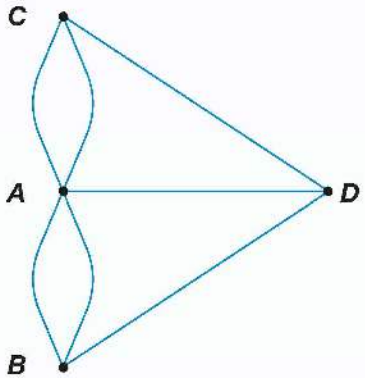
12. W trójkąt równoramienny, którego obwód jest równy $(12 + 6\sqrt{3})$ cm, a kąt przy podstawie ma miarę 30°, wpisano okrąg. Oblicz długość tego okręgu.

Problem mostów królewieckich

W XVIII w. w Królewcu, mieście nad Pregołą, było aż siedem mostów. Czy można było przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, aby każdy z nich przekroczyć tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło? Na to pytanie odpowiedział w 1736 r. Leonhard Euler [czyt. leonard ojler], a zaproponowane przez niego rozwiązanie zapoczątkowało rozwój teorii grafów.



Układ mostów w XVIII-wiecznym Królewcu: jeden most łączy dwie wyspy (oznaczone *A* i *D*), sześć mostów łączy te wyspy z resztą miasta (litery *B* i *C*).



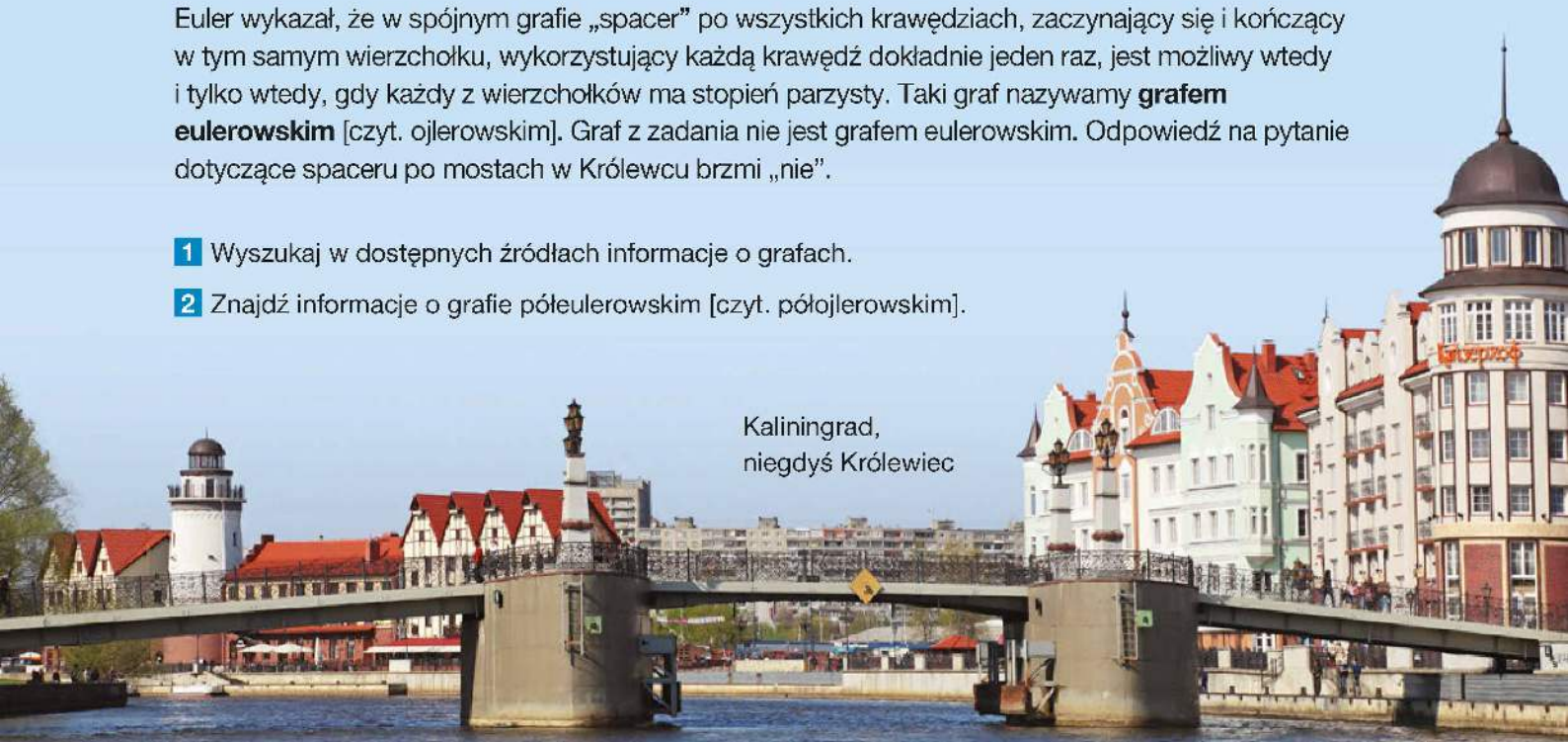
Układ mostów przedstawiony za pomocą grafu. Części miasta oznaczone na mapie jako *A*, *B*, *C* i *D* są wierzchołkami, a mosty – krawędziami grafu.

Stopniem wierzchołka grafu nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. W powyższym grafie stopień wierzchołka *A* jest równy 5, a stopnie wierzchołków *B*, *C* i *D* są równe 3. Jest to przykład **grafu spójnego**, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami wiedzie droga prowadząca po jego krawędziach.

Euler wykazał, że w spójnym grafie „spacer" po wszystkich krawędziach, zaczynający się i kończący w tym samym wierzchołku, wykorzystujący każdą krawędź dokładnie jeden raz, jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z wierzchołków ma stopień parzysty. Taki graf nazywamy **grafem eulerowskim** [czyt. ojlerowskim]. Graf z zadania nie jest grafem eulerowskim. Odpowiedź na pytanie dotyczące spaceru po mostach w Królewcu brzmi „nie".

1 Wyszukaj w dostępnych źródłach informacje o grafach.

2 Znajdź informacje o grafie półeulerowskim [czyt. półojlerowskim].



Kaliningrad, niegdyś Królewiec

5.7. Wielokąty foremne

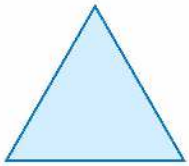
Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, który ma wszystkie boki równe oraz wszystkie kąty równe.

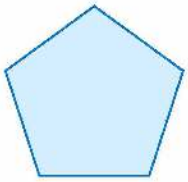
Ćwiczenie 1

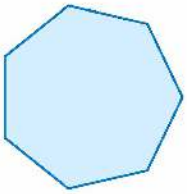
Narysuj czworokąt oraz sześciokąt niebędące wielokątami foremnymi, które mają równe wszystkie: a) boki, b) kąty.

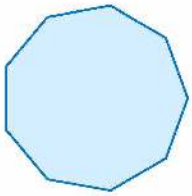
Ćwiczenie 2

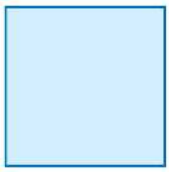
Ile osi symetrii ma przedstawiony wielokąt foremny?

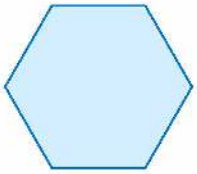
a) trójkąt 

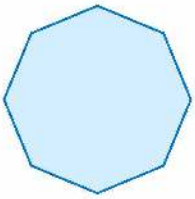
c) pięciokąt 

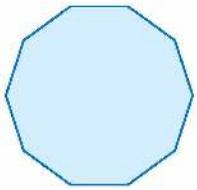
e) siedmiokąt 

g) dziewięciokąt 

b) kwadrat 

d) sześciokąt 

f) ośmiokąt 

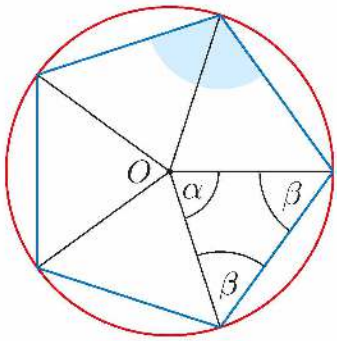
h) dziesięciokąt 

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest opisane na wielokącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na pięciokącie foremnym. Oblicz miarę kąta wewnętrznego tego pięciokąta.



Kąt α ma miarę $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Zatem:

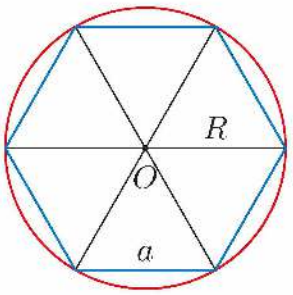
$$\beta = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ$$

czyli kąt wewnętrzny ma miarę równą $2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$.

D **Ćwiczenie 3**

Uzasadnij, że kąt wewnętrzny n-kąta foremnego ma miarę równą $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na sześciokącie foremnym o boku a. Zauważ, że dłuższe przekątne sześciokąta dzielą go na sześć przystających trójkątów równobocznych. Zatem promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym ma długość równą długości boku sześciokąta: $R = a$.



Ćwiczenie 4

a) Oblicz długość okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o polu $150\sqrt{3}$.

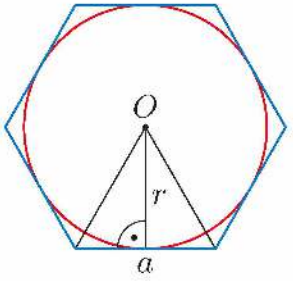
b) Oblicz pole sześciokąta foremnego wpisanego w koło o polu 32π.

W dowolny wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wielokąta.

Mówimy, że koło jest wpisane w wielokąt, gdy wpisany jest w niego okrąg ograniczający to koło.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O wpisany w sześciokąt foremny o boku a. Promień tego okręgu wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Ćwiczenie 5

a) Oblicz pole koła wpisanego w sześciokąt foremny o obwodzie 54 cm.

b) Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o długości 12π cm.

D **Ćwiczenie 6**

Dany jest n-kąt foremny o boku długości a opisany na okręgu o promieniu r. Uzasadnij, że pole tego wielokąta jest równe $\frac{1}{2}n \cdot a \cdot r$.

Zadania

1. Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

a) ośmiokąta foremnego, b) dziesięciokąta foremnego.

2. Ile boków ma wielokąt foremny, którego suma miar kątów wewnętrznych jest równa: a) 720°, b) 900°, c) 1260°, d) 1440°, e) 1620°?

3. Wyznacz różnicę między polem koła opisanego na danym wielokącie oraz polem koła wpisanego w ten wielokąt.

a) kwadrat o boku a b) sześciokąt foremny o boku a

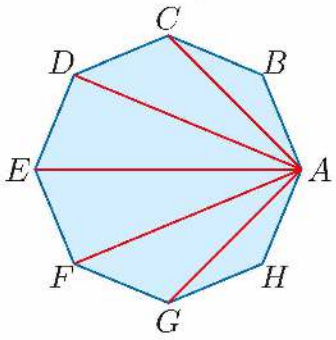
4. Dany jest sześciokąt foremny o boku a i polu P. Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy R, a promień okręgu w niego wpisanego jest równy r. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

a	R	r	P
4 cm	?	?	?
?	6 cm	?	?
?	?	?	16 cm^2
?	?	12 cm	?

5. a) Podaj liczbę przekątnych sześciokąta foremnego.

D b) Uzasadnij, że liczba przekątnych dowolnego n-kąta jest równa $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$.

6. Przekątne ośmiokąta foremnego poprowadzone z jednego wierzchołka podzieliły ten ośmiokąt na sześć trójkątów (rysunek obok). Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



D **7.** Uzasadnij, że pole ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równe $2\sqrt{2}$.

D **8.** Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym o boku a jest równy $\frac{1}{2}a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

D **9.** Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny o boku a jest równy $\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$.

D **10.** Dany jest n-kąt foremny o boku długości 2 cm. Uzasadnij, że różnica między polem koła opisanego na tym wielokącie i polem koła wpisanego w ten wielokąt jest równa π cm^2, niezależnie od liczby boków wielokąta.

Powtórzenie

11. a) Pole sześciokąta foremnego jest równe $12\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz różnicę długości okręgu opisanego na tym sześciokącie i okręgu wpisanego w ten sześciokąt.

b) Promień okręgu wpisanego w sześciokąt foremny jest równy 1 cm. Oblicz obwód i pole tego sześciokąta.

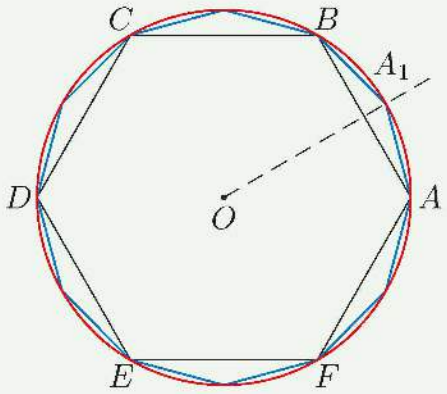
12. Punkty A i B są kolejnymi wierzchołkami n-kąta foremnego. Styczna do okręgu opisanego na tym n-kącie poprowadzona w punkcie A tworzy z bokiem AB kąt α. Wyznacz ten kąt, jeśli: a) $n = 8$, b) $n = 10$, c) $n = 12$.

Warto wiedzieć

Konstrukcje wybranych wielokątów foremnych

Nie wszystkie n-kąty foremne można skonstruować, korzystając tylko z cyrkla i linijki. Carl F. Gauss udowodnił twierdzenie mówiące, dla jakich liczb n jest to możliwe. Na przykład dla $n < 20$ są to: $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17\}$.

Konstrukcja sześciokąta i dwunastokąta foremnego wpisanych w okrąg

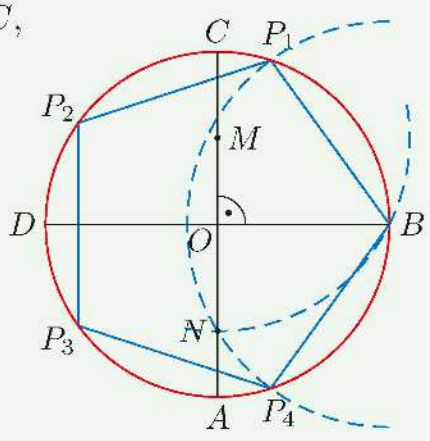


- Na okręgu wybieramy dowolny punkt A i zaczynając od tego punktu, odmierzamy łuki o promieniach równych promieniowi okręgu. Wyznaczone w ten sposób punkty A, B, C, D, E i F są wierzchołkami sześciokąta foremnego.
- Konstruujemy symetralną odcinka AB. Przecina ona okrąg w punkcie A_1. Odcinek AA_1 jest bokiem dwunastokąta foremnego wpisanego w ten okrąg.
- Następnie, zaczynając od punktu A_1, odmierzamy łuki okręgów o promieniu $|AA_1|$. Punkty przecięcia tych łuków z okręgiem są pozostałymi wierzchołkami dwunastokąta.

1. Skonstruuj kwadrat i ośmiokąt foremny wpisane w dany okrąg.

Konstrukcja pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg

- Rysujemy dwie prostopadłe średnice AC i BD.
- Wyznaczamy punkt M środek odcinka OC, gdzie O jest środkiem okręgu.
- Rysujemy łuk okręgu o środku M i promieniu $|BM|$. Łuk ten przecina średnicę AC w punkcie N.
- Odcinek BN ma długość boku szukanego pięciokąta – odkładamy go kolejno na okręgu i otrzymujemy pozostałe wierzchołki pięciokąta: P_1, P_2, P_3 i P_4.



2. Powyżej opisano konstrukcję pięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg. Opisz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować pięciokąt foremny, gdy dany jest bok tego pięciokąta.

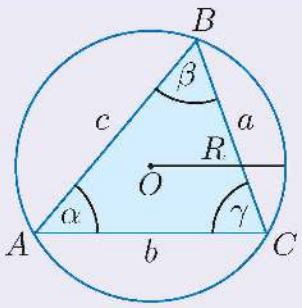
5.8. Twierdzenie sinusów

Przypomnijmy, że **rozwiązaniem trójkąta** nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i miar jego trzech kątów. Jednym z twierdzeń wykorzystywanych do rozwiązywania trójkątów jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie sinusów

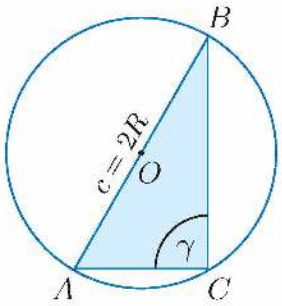
W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

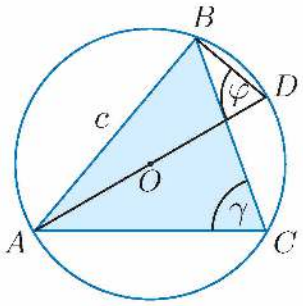


Dowód. Udowodnimy, że $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. (Równości $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ oraz $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ.

1° Kąt γ jest kątem prostym (rysunek po prawej).
Mamy $c = 2R$ oraz $\sin\gamma = 1$, stąd $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.



2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek po lewej).
Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD. Kąt ABD jest kątem prostym, zatem $\frac{c}{2R} = \sin\varphi$.



Kąty γ i φ są oparte na tym samym łuku, czyli są równe, więc $\frac{c}{2R} = \sin\gamma$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

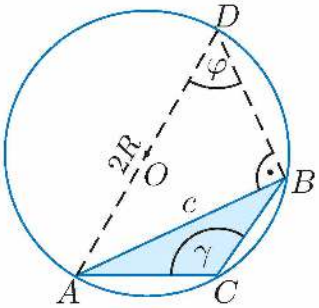
3° Kąt γ jest kątem rozwartym (rysunek poniżej).
Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD.
Kąt ABD jest kątem prostym, zatem:

$$\frac{c}{\sin\varphi} = 2R$$

Suma kątów γ i φ jest równa 180°, stąd:

$$\sin\gamma = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$$

Zatem zachodzi równość $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

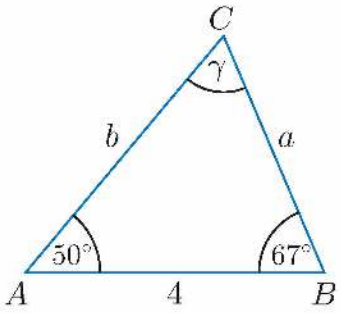


Uwaga. Jeżeli nie zostanie powiedziane, że jest inaczej, będziemy przyjmować, że boki trójkąta: a, b, c leżą odpowiednio naprzeciw kątów: α, β, γ.

Jeśli dane są dwa kąty i bok trójkąta, to do jego rozwiązania możemy skorzystać z twierdzenia sinusów. Tam, gdzie jest to potrzebne, odpowiednie wartości można odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 295).

Przykład 1

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są kąty $\alpha = 50^\circ$ i $\beta = 67^\circ$ oraz bok $c = 4$.



Obliczamy miarę kąta γ:

$\gamma = 180^\circ - (50^\circ + 67^\circ) = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$.

Długości boków a i b obliczamy, korzystając z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \text{ zatem } a = \frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{4\sin 50^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 3{,}44,$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \text{ zatem } b = \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{4\sin 67^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 4{,}13.$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.

a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $c = 6$

b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 105^\circ$, $c = 8$

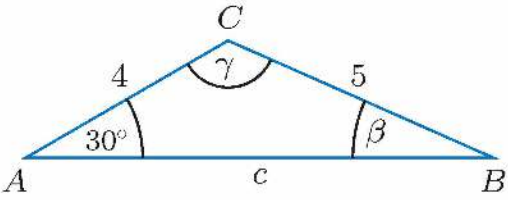
c) $\alpha = 40^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, $b = 10$

d) $\beta = 69^\circ$, $\gamma = 35^\circ$, $a = 5$

Twierdzenie sinusów pozwala również rozwiązać trójkąt, gdy dane są dwa boki i kąt leżący naprzeciw jednego z tych boków.

Przykład 2

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są długości boków $a = 5$ i $b = 4$ oraz kąt $\alpha = 30^\circ$.



Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{4\sin 30^\circ}{5} = 0{,}4$$

Z tablic odczytujemy, że $\beta \approx 24^\circ$,

zatem $\gamma \approx 180^\circ - (30^\circ + 24^\circ) = 126^\circ$.

$\sin\beta = 0{,}4$ również dla $\beta \approx 156^\circ$, ale tę możliwość odrzucamy, gdyż $156^\circ + 30^\circ > 180^\circ$.

Z równości $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ obliczamy długość boku c:

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{5\sin 126^\circ}{\sin 30^\circ} \approx \frac{5\cdot 0{,}81}{0{,}5} = 8{,}1$$

$\sin 126^\circ = \sin(180^\circ - 54^\circ) = \sin 54^\circ \approx 0{,}81$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a = 7$, $b = 6$, $\alpha = 80^\circ$

b) $a = 3$, $b = 6$, $\alpha = 30^\circ$

c) $b = 9$, $c = 10$, $\gamma = 45^\circ$

d) $b = 5$, $c = 4$, $\beta = 60^\circ$

Przykład 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach $a = 3$, $b = 9$ i kącie $\alpha = 30^\circ$.

Załóżmy, że taki trójkąt istnieje. Wówczas na podstawie twierdzenia sinusów prawdziwa jest równość:

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{\sin \beta}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\sin \beta = 9 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{3}{2} > 1$$

Z otrzymanej sprzeczności wynika, że taki trójkąt nie istnieje.

Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt spełniający podane warunki.

a) $a = 3$, $b = 2$, $\beta = 60^\circ$

b) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 45^\circ$

Przykład 4

Rozwiąż trójkąt o bokach $a = 5$ i $b = 8$ oraz kącie $\alpha = 30^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta β:

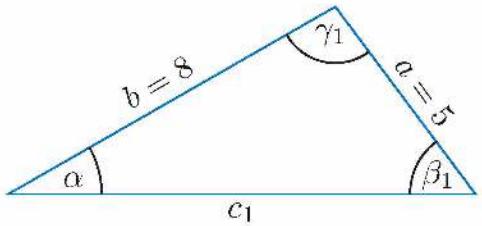
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$ Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{8 \sin 30^\circ}{5} = 0{,}8$$

Z tablic odczytujemy, że $\sin \beta = 0{,}8$ dla kąta ostrego $\beta_1 \approx 53^\circ$. Zauważmy, że $\sin \beta = 0{,}8$ również dla kąta $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 127^\circ$. Kąt β_2 spełnia warunki zadania, gdyż $127^\circ + 30^\circ < 180^\circ$.

Zatem warunki zadania spełniają dwa trójkąty:

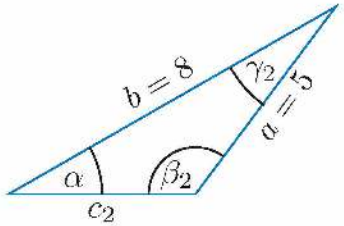
- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ$, $\beta_1 \approx 53^\circ$, $\gamma_1 \approx 180^\circ - (30^\circ + 53^\circ) = 97^\circ$



Z równania $\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy:

$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha} \approx 9{,}9$$

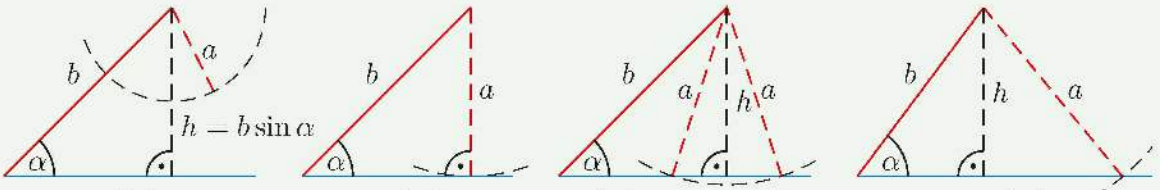
- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ$, $\beta_2 \approx 127^\circ$, $\gamma_2 \approx 180^\circ - (30^\circ + 127^\circ) = 23^\circ$



Z równania $\frac{c_2}{\sin \gamma_2} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy:

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha} \approx 3{,}9$$

Rozpatrzmy dwa odcinki a i b oraz kąt ostry α, z których chcemy zbudować taki trójkąt, że kąt α będzie leżał naprzeciwko boku a. Może wówczas zachodzić jedna z poniższych sytuacji:



$a < b\sin\alpha$	$a = b\sin\alpha$	$b\sin\alpha < a < b$	$a \geqslant b$
Taki trójkąt nie istnieje.	Trójkąt jest prostokątny.	Istnieją dwa takie trójkąty.	Istnieje jeden taki trójkąt.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30^\circ$

b) $a = 8$, $b = 10$, $\alpha = 45^\circ$

c) $a = 9$, $b = 10$, $\alpha = 60^\circ$

d) $a = 1$, $b = 2$, $\beta = 45^\circ$

Zadania

1. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ABC.

a) $|AB| = \sqrt{6}$, $|BC| = 3$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$

b) $|AC| = 3\sqrt{6}$, $|BC| = 9$, $\sphericalangle BAC = 120^\circ$

2. a) Bok trójkąta położony naprzeciw kąta o mierze 120° ma długość 10. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 ma miarę 135°. Oblicz długość boku trójkąta położonego naprzeciw tego kąta.

D c) Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ma miarę 15°. Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy długości podstawy trójkąta.

3. Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a = 4$, $b = 6$, $\alpha = 30^\circ$

b) $a = 9$, $b = 10$, $\alpha = 45^\circ$

c) $b = 11$, $c = 12$, $\beta = 60^\circ$

d) $a = 10$, $c = 20$, $\gamma = 150^\circ$

4. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli:

a) $a = 4$, $\alpha = 135^\circ$,

b) $a = 7$, $\beta = 107^\circ$, $\gamma = 43^\circ$,

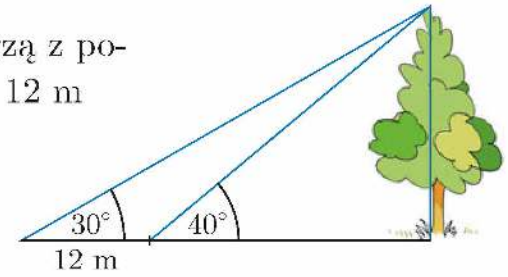
c) $b = 10$, $\beta = 135^\circ$,

d) $a = 7$, $\alpha = 120^\circ$,

e) $a = 3$, $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 4\gamma$,

f) $c = 11$, $\alpha = \beta = 45^\circ$.

5. W momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 30°, cień drzewa jest o 12 m dłuższy niż wtedy, gdy tworzą one kąt 40°. Oblicz wysokość drzewa.



6. Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

a) $b = 10$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 75^\circ$,

b) $b = 6$, $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 75^\circ$,

c) $a = 12$, $b = 16$, $\alpha = 30^\circ$,

d) $b = 6$, $c = 5$, $\beta = 20^\circ$,

e) $a = 5$, $c = 7$, $\gamma = 110^\circ$,

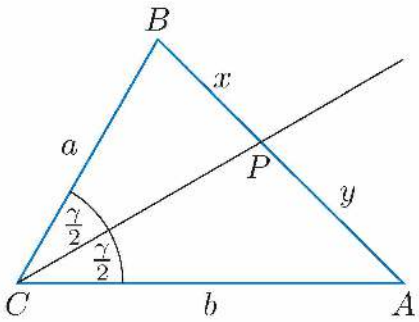
f) $a = 6$, $c = 3$, $\gamma = 40^\circ$.

7. Dane są kąty α i β trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 cm. Oblicz obwód trójkąta, jeśli:

a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 135^\circ$.

D **8.** Półprosta CP jest dwusieczną kąta γ w trójkącie ABC (rysunek obok). Korzystając z twierdzenia sinusów, udowodnij równość:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$



D **9.** Dany jest trójkąt o bokach a, b, c oraz kątach α, β, γ. Wyprowadź wzór:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

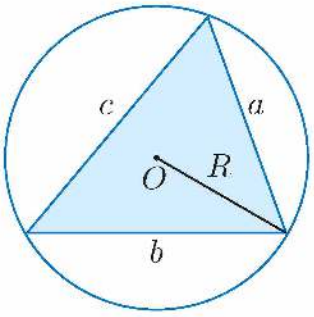
korzystając z tego, że pole dowolnego trójkąta wyraża każda z równości:

$$P = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad P = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta, \quad P = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha$$

D **10.** Uzasadnij, korzystając z twierdzenia sinusów, że pole dowolnego trójkąta o bokach a, b, c wyraża się za pomocą wzoru:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Powtórzenie

11. Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

a) $\beta = 120^\circ$, $b = 6$, $c = 2\sqrt{3}$,

b) $\beta = 120^\circ$, $b = 4\sqrt{3}$, $c = 4\sqrt{2}$,

c) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 12$,

d) $\alpha = 30^\circ$, $a = 5\sqrt{3}$, $b = 7$.

12. Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli:

a) $\beta = 150^\circ$, $b = 4$,

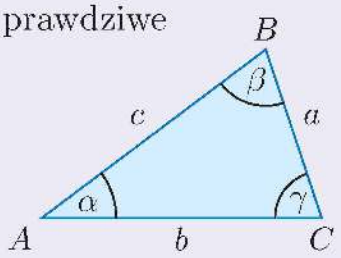
b) $\alpha = \beta = 75^\circ$, $c = 6$.

5.9. Twierdzenie cosinusów (1)

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

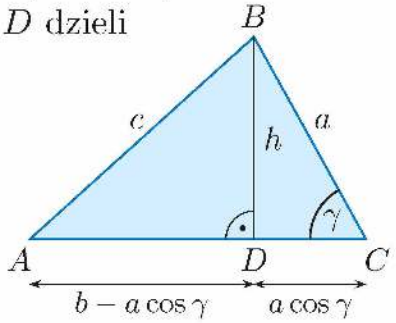


Dowód. Udowodnimy zależność $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. (Pozostałe dwie zależności dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 1.).

1° Kąt γ jest kątem prostym, czyli trójkąt ABC jest prostokątny. Wówczas $\cos\gamma = 0$ i równość przybiera postać $c^2 = a^2 + b^2$ – jest ona prawdziwa na podstawie twierdzenia Pitagorasa.

2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek poniżej).
Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że $\sphericalangle BAC$ jest ostry.
Z wierzchołka B opuszczamy wysokość h. Punkt D dzieli bok AC na dwa odcinki o długościach:

$$|DC| = a\cos\gamma, \quad |AD| = b - a\cos\gamma$$



Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów CBD oraz ABD i otrzymujemy odpowiednio:

$$h^2 = a^2 - (a\cos\gamma)^2$$

oraz:

$$h^2 = c^2 - (b - a\cos\gamma)^2$$

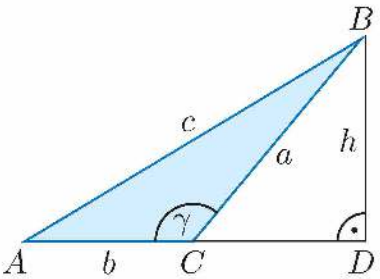
Zatem:

$$c^2 - (b - a\cos\gamma)^2 = a^2 - (a\cos\gamma)^2$$
$$c^2 - b^2 + 2ab\cos\gamma - a^2\cos^2\gamma = a^2 - a^2\cos^2\gamma$$

i ostatecznie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

D Ćwiczenie 1

Udowodnij, że $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ w przypadku, gdy $\gamma > 90°$ (rysunek obok).



Wskazówka. Zauważ, że $|CD| = a\cos(180° - \gamma)$, a następnie wyznacz h^2, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD oraz dla trójkąta BAD.

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że z twierdzenia cosinusów wynika twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Przykład 1

Rozwiąż trójkąt o bokach $a = 2\sqrt{3}$ i $b = 6$ oraz kącie $\gamma = 30^\circ$.

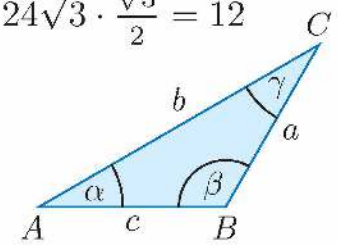
Aby obliczyć długość boku c, korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 12 + 36 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

Stąd $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Zatem jest to trójkąt równoramienny o kątach:
$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.



Ćwiczenie 3

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC, jeśli:

a) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 60^\circ$,

b) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 150^\circ$,

c) $a = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$,

d) $b = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 135^\circ$.

Twierdzenie cosinusów pozwala również wyznaczyć kąty trójkąta, gdy dane są długości wszystkich jego boków.

Przykład 2

Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach: $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{10}$.

Wyznaczamy miarę kąta γ:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$ Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

Stąd:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{36+18-90}{36\sqrt{2}} = -\frac{36}{36\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $\gamma = 135^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta α:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$ Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

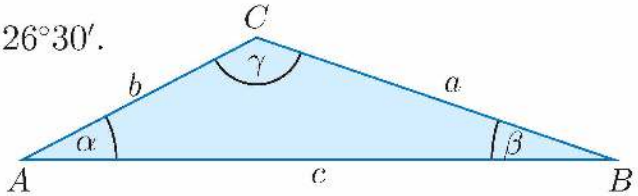
Stąd:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{18+90-36}{18\sqrt{20}} = \frac{72}{36\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}8944$$

Z tablic (str. 295) odczytujemy: $\alpha \approx 26^\circ 30'$.

Wyznaczamy miarę kąta β:

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 18^\circ 30'$



Ćwiczenie 4

Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a = 1,\ b = 1,\ c = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ b) $a = \sqrt{2},\ b = 2,\ c = 1+\sqrt{3}$

Zadania

1. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC.

a) $a = 4,\ b = \sqrt{3},\ \gamma = 30^\circ$ c) $a = 2,\ b = 6,\ \gamma = 120^\circ$

b) $b = 5,\ c = 3\sqrt{2},\ \alpha = 45^\circ$ d) $a = 2\sqrt{3},\ c = 4,\ \beta = 150^\circ$

2. Dane są długości a, b dwóch sąsiednich boków równoległoboku oraz kąt γ zawarty między tymi bokami. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

a) $a = 2,\ b = 4\sqrt{3},\ \gamma = 30^\circ$ c) $a = 5,\ b = 3,\ \gamma = 60^\circ$

b) $a = 4,\ b = 2\sqrt{2},\ \gamma = 45^\circ$ d) $a = 6,\ b = 8,\ \gamma = 120^\circ$

3. Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a = 2\sqrt{3},\ b = 4\sqrt{3},\ c = 6$ b) $a = \sqrt{6},\ b = 2\sqrt{3},\ c = \sqrt{3}+3$

4. Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$ b) $a = 3,\ b = 5,\ c = 7$

5. a) Jeden z boków trójkąta jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 60°. Oblicz długości tych boków, jeśli trzeci bok tego trójkąta ma długość 7.

b) Jeden z boków trójkąta jest czterokrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 120°. Oblicz długości tych boków, jeśli trzeci bok tego trójkąta ma długość 21.

6. Oblicz $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ i pole trójkąta ABC.

a) $a = 3,\ b = \sqrt{2},\ c = \sqrt{5}$ b) $a = 2,\ b = \sqrt{5},\ c = \sqrt{3}$

Powtórzenie

7. Oblicz miarę kąta β trójkąta ABC.

a) $a = 5,\ b = \sqrt{19},\ c = 3$ b) $a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{10},\ c = 2$

8. W trójkącie ABC dane są długości dwóch jego boków $a = 6$ i $b = 10$. Oblicz długość boku c, jeśli wiadomo, że $\sin\gamma = \frac{4}{5}$ oraz kąt γ jest:

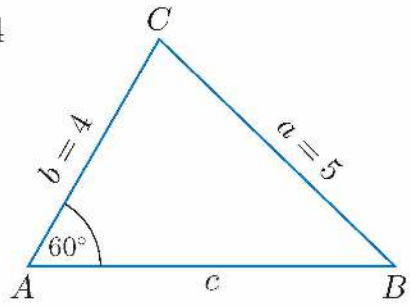
a) ostry, b) rozwarty.

5.10. Twierdzenie cosinusów (2)

Aby rozwiązać trójkąt, gdy mamy dane długości jego dwóch boków i miarę kąta położonego naprzeciwko jednego z nich, możemy skorzystać z twierdzenia sinusów lub postąpić tak, jak w przykładzie poniżej.

Przykład 1

W trójkącie ABC (rysunek obok) dane są $|AC| = 4$ i $|BC| = 5$ oraz $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Oblicz długość boku AB.



Korzystamy ze wzoru $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$:

$$25 = 16 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 60^\circ$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$c^2 - 4c - 9 = 0$$

$$\Delta = 16 + 36 = 52, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{13}$$

Stąd:

$$c = \frac{4-2\sqrt{13}}{2} = 2 - \sqrt{13} < 0 \text{ (sprzeczność)}$$

lub

$$c = \frac{4+2\sqrt{13}}{2} = 2 + \sqrt{13}$$

Zatem bok AB ma długość równą $2 + \sqrt{13}$.

Zauważ, że równanie $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, gdzie nieznany jest bok c, może mieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub nie mieć rozwiązań.

Ćwiczenie 1

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC, jeśli:

a) $|AC| = 8$, $|BC| = 7$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$,

b) $|AC| = 5$, $|AB| = 8$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$.

Ćwiczenie 2

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AC| = 2\sqrt{6}$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$ oraz miara kąta BAC równa 30°. Rozwiąż ten trójkąt.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

a) $b = 6$, $c = 6\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$,

b) $a = 4$, $b = 2 + 2\sqrt{3}$, $\gamma = 30^\circ$,

c) $a = 3 + \sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $\beta = 60^\circ$,

d) $a = 2\sqrt{7}$, $c = 2$, $\alpha = 120^\circ$.

Twierdzenie

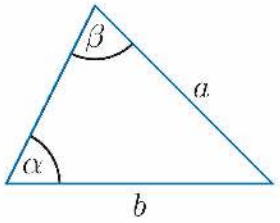
W trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok.

Dowód

Niech α będzie kątem ostrym. Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt β.

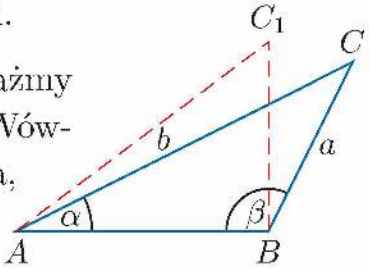
1° Kąt β jest kątem ostrym (rysunek obok). Załóżmy, że $\alpha < \beta$, wówczas $\sin\alpha < \sin\beta$, czyli $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < 1$. Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \text{ zatem } a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < b$$



2° Kąt β jest kątem prostym. Wówczas β jest największym kątem trójkąta, a przeciwprostokątna jest jego najdłuższym bokiem.

3° Kąt β jest kątem rozwartym (rysunek obok). Rozważmy trójkąt prostokątny ABC_1 taki, że $|BC_1| = |BC|$. Wówczas $a < |AC_1|$ oraz z twierdzenia cosinusów wynika, że $|AC_1| < b$ (gdyż $\cos\beta < 0$). Zatem $a < b$.



Ćwiczenie 4

a) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego dwa krótsze boki mają długości 2 cm i $2\sqrt{3}$ cm, a jeden z kątów ma miarę 150°.

b) Suma miar dwóch kątów trójkąta ostrokątnego jest równa 135°, a jego dwa dłuższe boki mają długości $3\sqrt{2}$ cm i $(3+\sqrt{3})$ cm. Oblicz długość trzeciego, najkrótszego boku tego trójkąta.

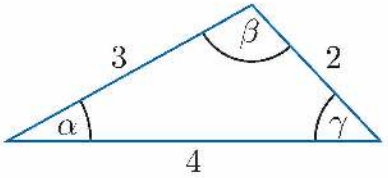
D Przykład 2

Dany jest trójkąt o bokach 2, 3 i 4. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a kąt β – największym. Wykaż, że dla kątów tego trójkąta zachodzą zależności: $\sin\beta = 2\sin\alpha$ oraz $\cos\beta = -\frac{2}{7}\cos\alpha$.

Kąt α leży naprzeciwko najkrótszego boku trójkąta, a kąt β – naprzeciwko najdłuższego. Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin\beta}$$

zatem $\sin\beta = 2\sin\alpha$.



Korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$\cos\alpha = \frac{4^2+3^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\cos\beta = \frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot 3\cdot 2} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Zatem $\cos\beta = -\frac{2}{7}\cos\alpha$.

D Ćwiczenie 5

Dany jest trójkąt o bokach 4, 5 i 6. Wykaż, że $\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha$, gdzie α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a β – największym.

D Przykład 3

a) Wykaż, że trójkąt o bokach długości $a = 4$, $b = 6$ i $c = 9$ jest rozwartokątny.

Bok c jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt γ jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos\gamma$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4^2+6^2-9^2}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{-29}{48}$$

Otrzymaliśmy $\cos\gamma < 0$, więc $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$. Oznacza to, że trójkąt jest rozwartokątny.

b) Wykaż, że trójkąt o bokach długości $a = 9$, $b = 7$ i $c = 6$ jest ostrokątny.

Bok a jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt α jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos\alpha$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{7^2+6^2-9^2}{2\cdot 7\cdot 6} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Otrzymaliśmy $\cos\alpha > 0$, więc $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Największy kąt trójkąta jest kątem ostrym, co oznacza, że trójkąt jest ostrokątny.

Ćwiczenie 6

Oblicz cosinus kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku trójkąta o bokach a, b, c. Czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?

a) $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$

b) $a = 25$, $b = 7$, $c = 24$

c) $a = 10$, $b = 11$, $c = 4$

d) $a = 6$, $b = 20$, $c = 21$

Zadania

1. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o bokach a, b, c. Czy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta?

a) $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$

b) $a = 9$, $b = 6$, $c = 4$

c) $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 1$

d) $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$

2. Boki trójkąta mają długości 5, 6 i 7. Oblicz:

a) cosinus kąta leżącego naprzeciwko najdłuższego boku,

b) długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 6,

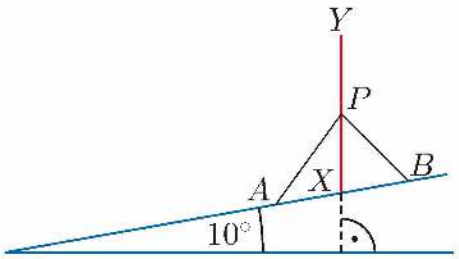
c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3. Dane są dwa boki a i b pewnego trójkąta oraz jego pole P. Oblicz cosinus kąta wyznaczonego przez te boki, a następnie oblicz długość boku c.

a) $a = 4$, $b = 10$, $P = 12$ b) $a = 5$, $b = 6$, $P = 10\sqrt{2}$

4. W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $8\sqrt{3}$, a kąt BAD jest równy 60°. Przekątna AC ma długość 6 i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD. Oblicz obwód tego trapezu.

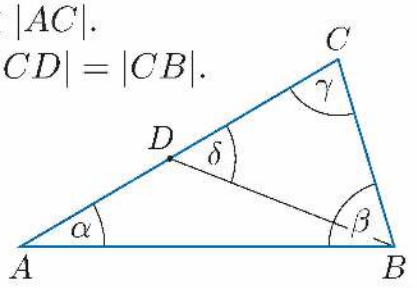
5. Na stoku o kącie nachylenia 10° ustawiono słup XY wysokości 14 m. Jakiej długości są odciągi poprowadzone z punktu P, położonego w środku wysokości słupa, do punktów A i B znajdujących się 6 m od podstawy słupa (rysunek obok)?



D **6.** Przeczytaj podany w ramce szkic dowodu twierdzenia mówiącego, że kąt leżący naprzeciwko dłuższego boku trójkąta jest większy od kąta leżącego naprzeciwko krótszego boku.

Rozpatrzmy trójkąt ABC, w którym $|BC| < |AC|$.
Na boku AC wyznaczamy punkt D taki, że $|CD| = |CB|$.

1. Zauważamy, że $\alpha < \delta$.
2. $\sphericalangle CBD < \beta$ oraz $\delta = \sphericalangle CBD$ (trójkąt BCD jest równoramienny), więc $\alpha < \beta$.



Uzasadnij spostrzeżenie, że w powyższym szkicu dowodu $\alpha < \delta$.

Powtórzenie

7. Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

a) $a = 2\sqrt{13}$, $c = 8$, $\alpha = 60^\circ$, c) $b = \sqrt{5}$, $c = 2\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$,

b) $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, $\beta = 30^\circ$, d) $a = 14$, $c = 2\sqrt{7}$, $\alpha = 120^\circ$.

8. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o bokach:

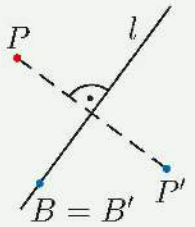
a) $a = 3$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$, b) $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3$, $c = 4$.

9. Kąt rozwarty równoległoboku jest dwukrotnie większy od jego kąta ostrego, a jeden z jego boków jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku, jeżeli jego obwód jest równy 16 cm.

5.11. Zagadnienia uzupełniające

Symetria osiowa

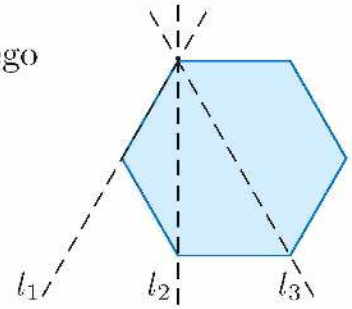
Niech punkt P nie należy do prostej l. Punkt P' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu P **względem prostej** l, jeżeli punkty P i P' leżą na prostej prostopadłej do prostej l i środek odcinka PP' należy do prostej l (prosta l jest symetralną odcinka PP'). Punktem symetrycznym względem prostej l do punktu należącego do tej prostej jest ten sam punkt (patrz punkt B na rysunku obok).



Symetrią osiową względem prostej l (lub symetrią względem prostej l) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej l. Prostą l nazywamy **osią symetrii**.

1. Narysuj w zeszycie sześciokąt foremny, a następnie jego obraz w symetrii względem prostej (rysunek obok):

a) l_1, b) l_2, c) l_3.



2. Dany jest kwadrat K_1 o wierzchołkach: $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$ i $D(0,4)$.

a) K_2 jest obrazem kwadratu K_1 w symetrii względem prostej $y = x + 2$. Oblicz pole części wspólnej $K_1 \cap K_2$.

b) K_3 jest obrazem kwadratu K_1 w symetrii względem prostej $y = x - 3$. Oblicz pole części wspólnej $K_1 \cap K_3$.

Figura jest **osiowosymetryczna**, jeśli istnieje taka prosta l, że figura ta jest swoim własnym obrazem w symetrii względem tej prostej. Prostą l nazywamy wówczas **osią symetrii** tej figury.



Figura osiowosymetryczna, ma jedną oś symetrii.



Figura nie ma osi symetrii.

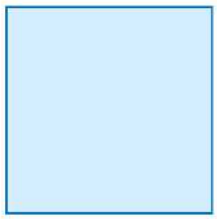
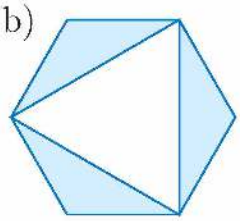
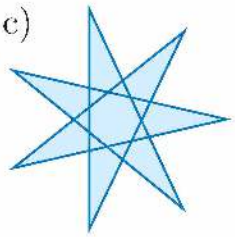
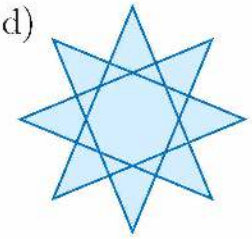


Figura osiowosymetryczna, ma dwie osie symetrii.

3. Ile osi symetrii ma odcinek, prosta, półprosta?

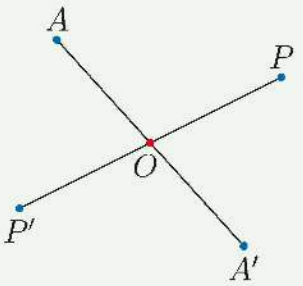
4. Podaj przykład figury, która ma: a) trzy osie symetrii, b) pięć osi symetrii.

5. Podaj, ile osi symetrii ma poniższa figura.

a)  b)  c)  d) 

Symetria środkowa

Punkt P' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu P **względem punktu** O, jeżeli punkt O jest środkiem odcinka łączącego punkty P i P'. Punktem symetrycznym do O jest on sam.
Pary punktów symetrycznych względem punktu O na rysunku obok to P i P' oraz A i A'.

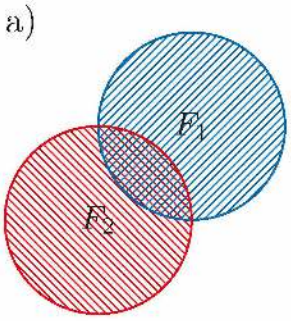


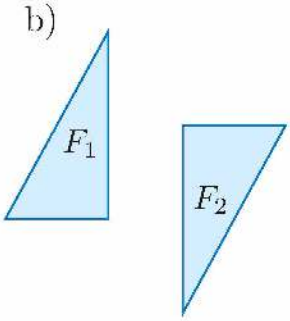
Symetrią środkową względem punktu O (lub symetrią względem punktu O) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O. Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**.

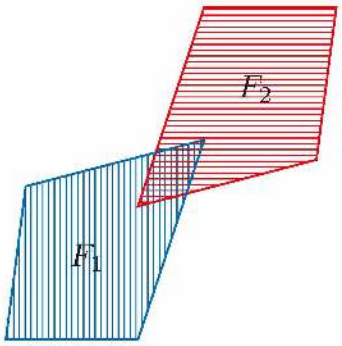
6. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(1,6)$. Narysuj obraz tego trójkąta w symetrii względem punktu O.

a) $O(1,1)$ b) $O(2,2)$ c) $O(2,0)$

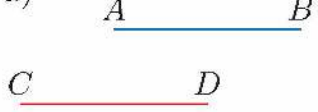
7. Figura F_2 jest obrazem figury F_1 w pewnej symetrii środkowej. W jaki sposób można wyznaczyć środek tej symetrii?

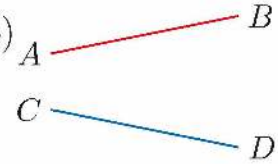
a) 

b) 

c) 

8. Czy odcinek DC jest obrazem odcinka AB w pewnej symetrii środkowej?

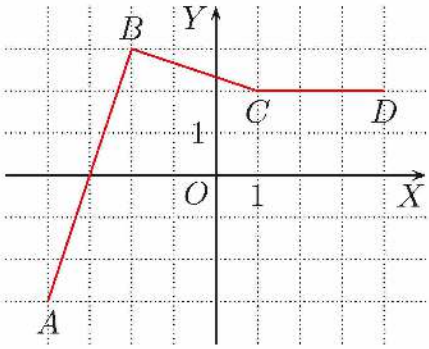
a) 

b) 

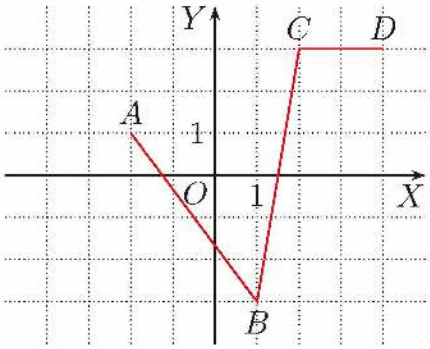
c) 

9. Narysuj w zeszycie obraz łamanej $ABCD$ w symetrii względem początku układu współrzędnych.

a)



b)



10. Narysuj okrąg o środku w punkcie $(3,3)$ i promieniu 2 oraz obraz tego okręgu w symetrii względem punktu: a) $O(0,0)$, b) $A(3,0)$, c) $B(2,2)$.

11. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A(0,2)$, $B(4,-2)$, $C(2,2)$, $D(4,6)$. Narysuj obraz tego czworokąta w symetrii względem punktu:

a) $O(0,0)$, b) $A(0,2)$, c) $B(4,2)$.

Figura jest **środkowosymetryczna**, jeśli istnieje taki punkt O, że figura ta jest swoim własnym obrazem w symetrii względem tego punktu. Punkt O nazywamy wówczas **środkiem symetrii** tej figury.

12. Która z wymienionych figur ma środek symetrii: trójkąt, równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek, półprosta?

13. Czy przedstawiony obok rysunek karty król karo jest osiowosymetryczny czy środkowosymetryczny?



14. Która z poniższych figur przedstawiających litery jest środkowosymetryczna, a która jest osiowosymetryczna?

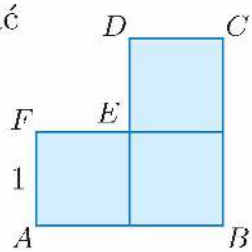
A B C D E F G H I J K L M
N O P R S T U V W X Y Z

15. W jaki sposób należy do sześciokąta $ABCDEF$ dorysować kwadrat o boku 1, aby otrzymać figurę:

a) mającą oś symetrii i środek symetrii,

b) mającą oś symetrii, ale niemającą środka symetrii,

c) mającą środek symetrii, ale niemającą osi symetrii?



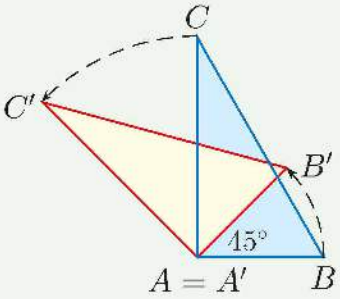
Obrót

Obrotem dookoła punktu O o kąt α (obracamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi P płaszczyzny (różnemu od punktu O) przyporządkowuje punkt P' taki, że:

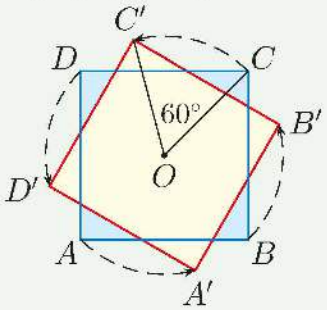
1. kąt POP' ma miarę α,
2. $|OP| = |OP'|$.

Punkt O nazywamy **środkiem obrotu**. Obrazem punktu O jest punkt O.

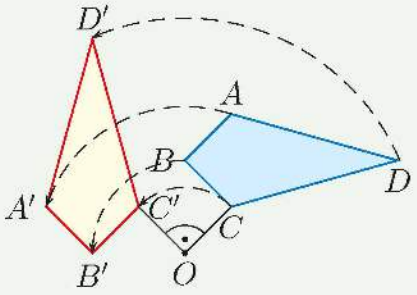
Aby narysować obraz dowolnego wielokąta w obrocie o kąt α dookoła danego punktu, wystarczy znaleźć obrazy wszystkich wierzchołków danego wielokąta, a następnie połączyć je odpowiednimi odcinkami.



Obrót trójkąta ABC dookoła punktu A o kąt 45°.

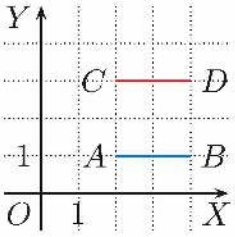


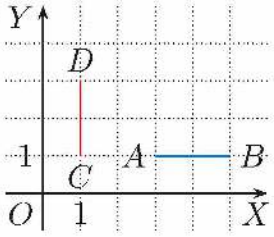
Obrót kwadratu $ABCD$ dookoła punktu O o kąt 60°.

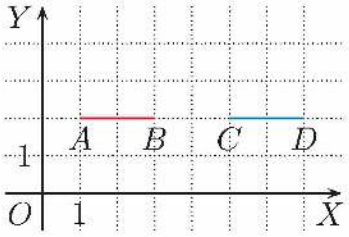


Obrót deltoidu $ABCD$ dookoła punktu O o kąt 90°.

16. Wyznacz współrzędne środka obrotu, jeśli odcinek CD jest obrazem odcinka AB w tym obrocie. W przykładzie b) podaj dwie możliwości.

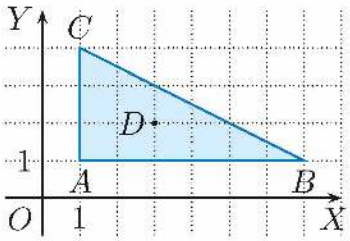
a) 

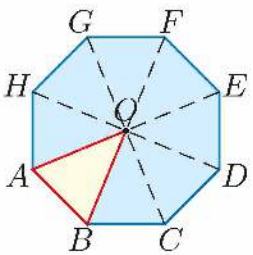
b) 

c) 

17. Na rysunku obok przedstawiono trójkąt ABC. Przerysuj ten trójkąt do zeszytu, a następnie narysuj jego obraz w obrocie dookoła punktu:

a) A o 90°, b) O o 90°, c) D o 180°.





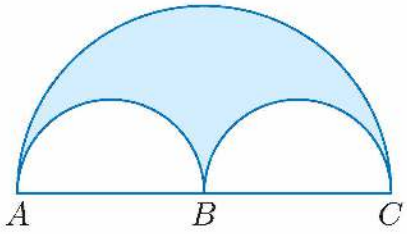
18. Dany jest ośmiokąt foremny $ABCDEFGH$ (rysunek obok). O jaki kąt należy obrócić trójkąt ABO dookoła punktu O, aby otrzymać trójkąt FGO?

Zestawy powtórzeniowe

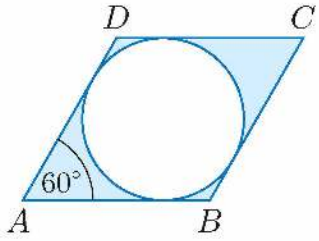
Zestaw I

1. Oblicz pole zacieniowanego obszaru, jeśli $|AB| = 2$ oraz:

a) $|AB| = |BC|$ i łuki są półokręgami,

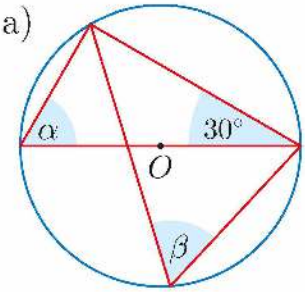


b) figura $ABCD$ jest rombem.

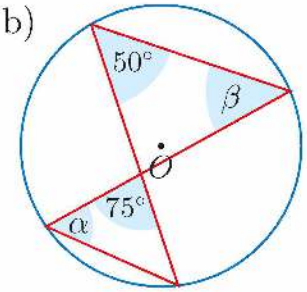


2. Wyznacz miary kątów α i β.

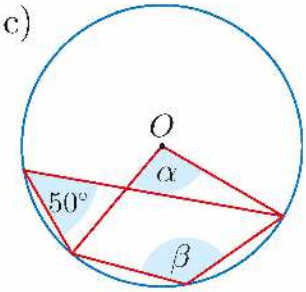
a)



b)



c)

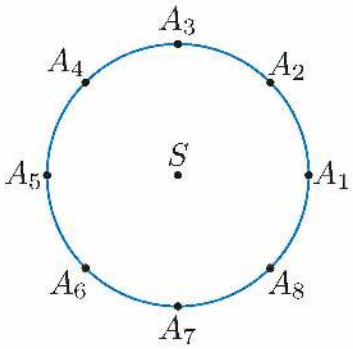


3. Odcinek AC jest średnicą okręgu o promieniu 2. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $2\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie B oraz miarę kąta między cięciwą BC a styczną do okręgu w punkcie C.

4. Punkty: $A_1, A_2, \ldots, A_8$ dzielą okrąg na 8 łuków o równej długości (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta między cięciwą:

a) A_1A_2 a styczną do okręgu w punkcie A_1,

b) A_3A_8 a styczną do okręgu w punkcie A_8.



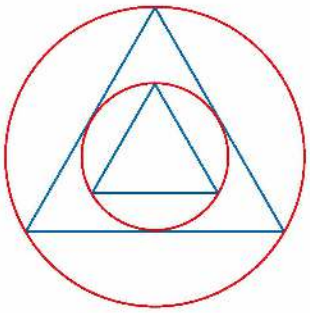
5. Oblicz promień okręgu opisanego na równoramiennym trójkącie prostokątnym, którego obwód jest równy:

a) $4 + 2\sqrt{2}$, b) 4, c) 1.

6. a) Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest równe 27π. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

b) Suma pól koła wpisanego w trójkąt równoboczny i koła na nim opisanego jest równa 60π. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

7. Oblicz sumę obwodów trójkątów równobocznych przedstawionych na rysunku obok, jeśli suma długości okręgów jest równa 12π.

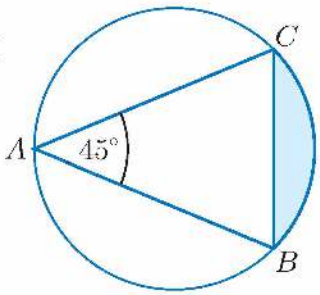


8. Jeden z boków trójkąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą i ma długość 5 cm. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli:

a) stosunek długości jego pozostałych boków jest równy $\frac{1}{3}$,

b) jest on równoramienny.

9. Równoramienny trójkąt ABC o kącie między ramionami 45° jest wpisany w okrąg o promieniu 8 (rysunek obok).



a) Oblicz długości łuków $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{BC}$.

b) Oblicz pole zacieniowanego odcinka koła.

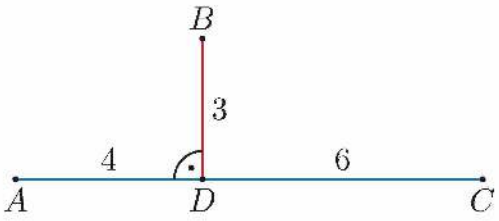
c) Oblicz obwód trójkąta ABC.

Zestaw II

D **1.** Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu na nim opisanego.

2. Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie prostokątnym do pola tego trójkąta, jeśli symetralna przeciwprostokątnej dzieli jedną z przyprostokątnych w stosunku $1:2$.

3. Oblicz promień okręgu przechodzącego przez punkty: A, B, D oraz promień okręgu przechodzącego przez punkty: A, B, C (rysunek obok). Oblicz odległość między środkami tych okręgów.



4. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną podzielił ją na odcinki długości 6 i 9. Oblicz pole tego trójkąta oraz promień wpisanego okręgu.

5. Wyznacz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym:

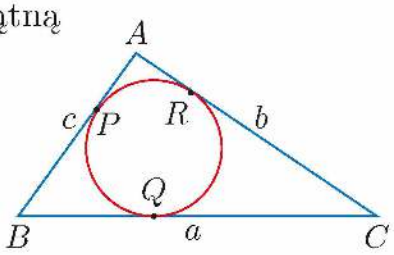
a) o ramieniu b i kącie α przy podstawie,

b) o wysokości h opuszczonej na podstawę i kącie 2α między ramionami.

6. Okrąg o promieniu 1 cm jest wpisany w trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

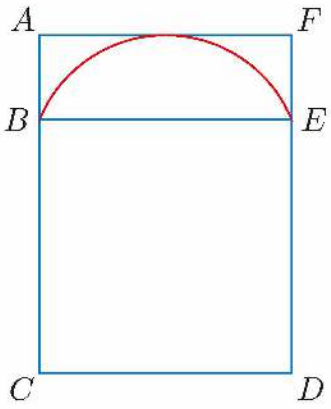
7. Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny, którego wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość 3.

8. W trójkąt o bokach: $a = 16$, $b = 13$ i $c = 9$ wpisano okrąg (rysunek obok). Oblicz długości odcinków: AP, BQ i CR.



9. Dany jest równoległobok o bokach a i $2a$ oraz kącie ostrym $30°$. Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.

10. Bok kwadratu $BCDE$ ma długość 6 (rysunek obok), a przekątna prostokąta $ACDF$ ma długość 10. Oblicz promień okręgu, którego łukiem jest $\overset{\frown}{BE}$.



11. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt, jeśli:

a) dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 8 cm, a miara kąta między nimi wynosi $60°$,

b) boki trójkąta mają długości 3 cm, 5 cm i 6 cm.

D **12.** W trójkąt równoramienny ABC wpisano okrąg o środku O. Punkty D i E są punktami styczności okręgu oraz odpowiednio podstawy AB i ramienia BC. Uzasadnij, że trójkąty BCD i OCE są podobne. Oblicz promień okręgu, jeśli:

a) $|AB| = 4$, $|BC| = 2\sqrt{10}$, b) $|CD| = 3$, $|BE| : |EC| = 1 : 2$.

13. Oblicz pole ośmiokąta foremnego:

a) opisanego na kole o polu równym 4π cm^2,

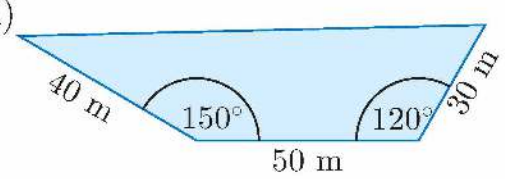
b) którego najkrótsza przekątna ma długość 2 cm.

14. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC, jeśli:

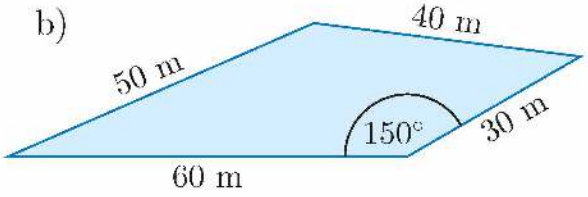
a) $a = 10$, $b = 8$, $\gamma = 60°$, b) $b = 4$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$.

15. Działka budowlana ma kształt nieregularnego czworokąta. Wyniki pomiarów wykonanych przez geodetę są przedstawione na rysunku. Oblicz pole powierzchni tej działki.

a)



b)



Sposób na zadanie

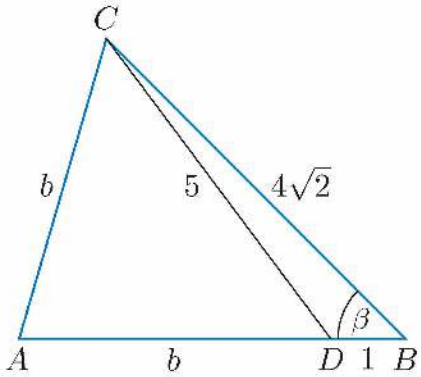
Przykład

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AD| = |AC|$, $|BD| = 1$, $|CD| = 5$ i $|BC| = 4\sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Aby obliczyć $\cos\beta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD:



$$5^2 = (4\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos\beta$$
$$25 = 33 - 8\sqrt{2}\cos\beta$$
$$8\sqrt{2}\cos\beta = 8$$
$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

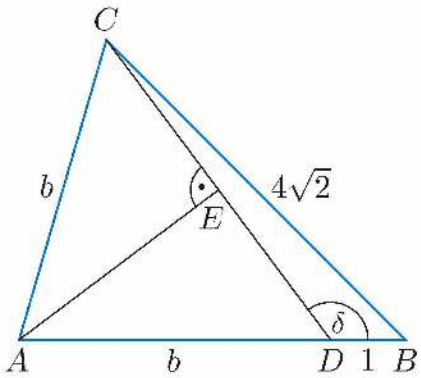
Obliczamy b, korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC:

$$b^2 = (b+1)^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (b+1) \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos\beta$$
$$b^2 = b^2 + 2b + 1 + 32 - 8b - 8$$
$$6b = 25$$
$$b = 4\tfrac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

II sposób

Aby obliczyć $\cos\delta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD:



$$(4\sqrt{2})^2 = 5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \cos\delta$$
$$32 = 26 - 10\cos\delta$$
$$10\cos\delta = -6$$
$$\cos\delta = -\frac{3}{5}$$

Zatem:

$$\cos\sphericalangle ADC = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos\delta = \frac{3}{5}$$

Prowadzimy wysokość AE trójkąta równoramiennego ACD. Trójkąt ADE jest prostokątny oraz $|ED| = \frac{5}{2}$, więc:

$$\cos\sphericalangle ADC = \cos\sphericalangle ADE = \frac{|ED|}{|AD|}$$

Stąd:

$$\frac{3}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{b}, \text{ czyli } b = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = 4\frac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $Ob_{\triangle ADC} = 13\frac{1}{3}$

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Dany jest okrąg o promieniu $a\sqrt{2}$. Pole sześciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg jest równe:

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, **B.** $6a^2$, **C.** $3\sqrt{3}a^2$, **D.** $6\sqrt{3}a^2$.

2. Pole wycinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez kąt 54° jest równe:

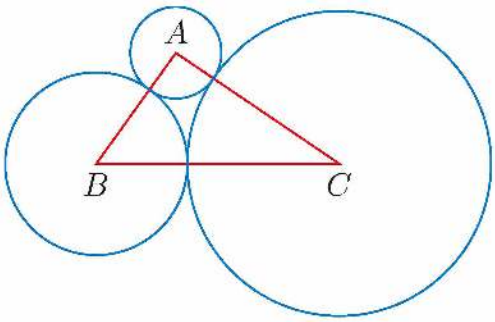
A. $0{,}6\pi$, **B.** $1{,}2\pi$, **C.** $1{,}8\pi$, **D.** $2{,}4\pi$.

3. Kąty trójkąta równoramiennego mają miary: α, α i 4α, a jego ramię ma długość 2. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

A. $2\sqrt{3}-3$, **B.** $2\sqrt{3}-2$, **C.** $3\sqrt{2}-3$, **D.** $3\sqrt{2}-2$.

4. Dane są trzy okręgi o środkach A, B, C parami styczne zewnętrznie (rysunek obok). Promienie tych okręgów są odpowiednio równe 3, 6 i 10. Cosinus największego kąta trójkąta ABC wynosi:

A. $-\frac{1}{6}$, **B.** $-\frac{1}{16}$, **C.** $-\frac{1}{39}$, **D.** 0.



5. W trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120° wpisano okrąg o średnicy 12. Podstawa tego trójkąta ma długość:

A. $6+4\sqrt{3}$, **B.** $12\sqrt{3}$, **C.** $24+12\sqrt{3}$, **D.** $36+24\sqrt{3}$.

6. Sinus kąta przy podstawie trójkąta równoramiennego jest równy 0,6, a jego ramię ma długość 30 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

A. 25 cm, **B.** 28 cm, **C.** 30 cm, **D.** 32 cm.

7. W trójkącie ABC są dane: $\sphericalangle BAC = 120^\circ$, $|AB| = \sqrt{2}-1$ i $|AC| = \sqrt{2}+1$. Wskaż długość boku BC tego trójkąta.

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $\sqrt{7}$ **D.** $2\sqrt{2}$

8. Dany jest trójkąt o bokach: 2, $2\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}+\sqrt{6}$. Suma miar dwóch największych kątów tego trójkąta jest równa:

A. 135°, **B.** 150°, **C.** 155°, **D.** 165°.

9. Boki równoległoboku mają długości 4 i $2+2\sqrt{3}$, a jego kąt rozwarty ma miarę 150°. Jedna z przekątnych tego równoległoboku ma długość:

A. $2+\sqrt{2}$, **B.** $2+\sqrt{3}$, **C.** $2\sqrt{2}$, **D.** $2\sqrt{3}$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

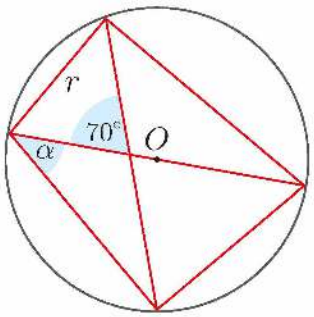
Pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt $\alpha < 180^\circ$ jest równe P. Ile jest równe pole wycinka koła o promieniu $2r$ wyznaczonego przez kąt 2α?

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz różnicę między polem koła opisanego na kwadracie o boku $\sqrt{2}+1$ a polem koła wpisanego w ten kwadrat.

Zadanie 3 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O i promieniu r. Wyznacz kąt α.



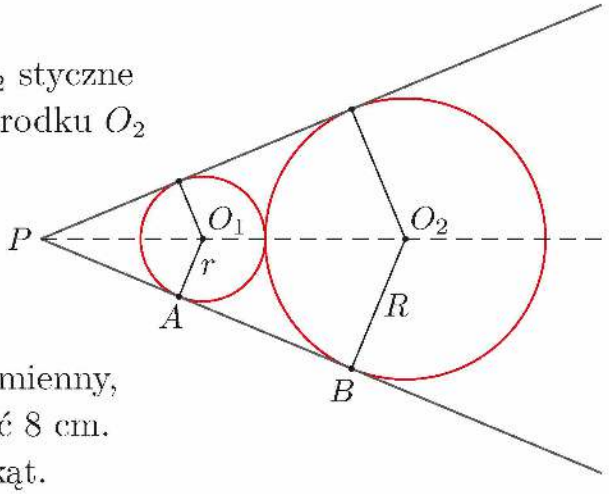
Zadanie 4 (2 pkt)

Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli $\sphericalangle ABC = 150^\circ$ oraz $|AC| = 4$.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (5 pkt)

Dane są dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 styczne zewnętrznie (rysunek obok). Okrąg o środku O_2 ma promień $R = 5$ oraz wiadomo, że $|PB| = 12$. Oblicz sinus kąta O_1PA oraz promień r okręgu o środku O_1.



Zadanie 6 (4 pkt)

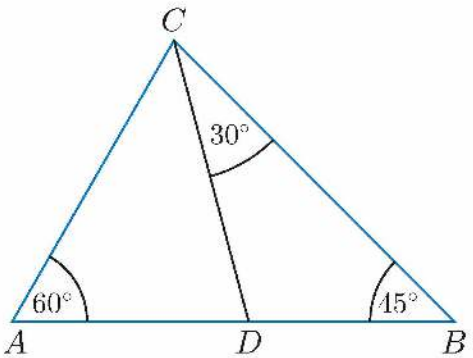
Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego przeciwprostokątna ma długość 8 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 7 (4 pkt)

Wyznacz miary kątów rombu o boku a i jednej z przekątnych długości $a\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Zadanie 8 (5 pkt)

Odcinek DC na rysunku obok ma długość $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC.



Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

1.1. Wykres funkcji kwadratowej – powtórzenie

Ć **2.** a) 8 b) 3 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

4. A, B

5. a) $W(0,1)$, $f(D) = \langle 1; \infty)$
b) $W(0,-2)$, $f(D) = \langle -2; \infty)$
c) $W(0,4)$, $f(D) = (-\infty; 4\rangle$

6. a) $W(3,0)$, malejc w $(-\infty; 3\rangle$, rośnie w $\langle 3; \infty)$
b) $W(-1,0)$, maleje w $(-\infty; -1\rangle$, rośnie w $\langle -1; \infty)$
c) $W(-2,0)$, maleje w $\langle -2; \infty)$, rośnie w $(-\infty; -2\rangle$

Z **1.** a) o 3 jednostki w dół
b) o 8 jednostek w górę
c) o 7 jednostek w lewo
d) o 5 jednostek w prawo

2. a) $W(0,2)$, maleje w $(-\infty; 0\rangle$, rośnie w $\langle 0; \infty)$
b) $W(0,-6)$, malejc w $\langle 0; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 0\rangle$
c) $W(-5,0)$, maleje w $(-\infty; -5\rangle$, rośnie w $\langle -5; \infty)$
d) $W(6,0)$, maleje w $\langle 6; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 6\rangle$
e) $W(\frac{1}{2}, -4)$, malejc w $(-\infty; \frac{1}{2}\rangle$, rośnie w $\langle \frac{1}{2}; \infty)$
f) $W(-\frac{5}{2}, \frac{1}{6})$, maleje w $\langle -\frac{5}{2}; \infty)$, rośnie w $(-\infty; -\frac{5}{2}\rangle$

3. a) $f(D) = \langle -1; \infty)$, $W(-2,-1)$
b) $f(D) = \langle -2; \infty)$, $W(-1,-2)$
c) $f(D) = (-\infty; 2\rangle$, $W(2,2)$
d) $f(D) = (-\infty; 2\rangle$, $W(1,2)$

4. a) $f(D) = \langle 2; \infty)$, f maleje w $(-\infty; 3\rangle$, rośnie w $\langle 3; \infty)$,
$g(D) = \langle -2; \infty)$,
g malejc w $(-\infty; -2\rangle$,
rośnie w $\langle -2; \infty)$
b) $f(x) = (x-3)^2 + 2$,
$g(x) = (x+2)^2 - 2$

5. a) $f(D) = \langle 3; \infty)$, $g(D) = \langle 0; \infty)$
b) $f(D) = (-\infty; -1\rangle$, $g(D) = (-\infty; 0\rangle$
c) $f(D) = (-\infty; 3\rangle$, $g(D) = (-\infty; 0)$

6. a) malejc w $(-\infty; 4\rangle$, rośnic w $\langle 4; \infty)$
b) maleje w $\langle -2; \infty)$, rośnie w $(-\infty; -2\rangle$
c) malejc w $(-\infty; -1\rangle$, rośnic w $\langle -1; \infty)$
d) maleje w $\langle 2; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 2\rangle$

1.2. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej – powtórzenie

Ć **1.** a) $f(x) = 4(x-3)^2 + 2 = 4x^2 - 24x + 38$
b) $f(x) = -3(x+2)^2 + 5 = -3x^2 - 12x - 7$
c) $f(x) = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 6 = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$

2. a) 16 b) -47 c) -7 d) 0 e) 6 f) -1

3. a) $W(1,2)$, $f(x) = (x-1)^2 + 2$
b) $W(2,-2)$, $f(x) = -(x-2)^2 - 2$
c) $W(2,-5)$, $f(x) = 3(x-2)^2 - 5$

Z **1.** a) $f(x) = 2(x-1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$, maleje w $(-\infty; 1\rangle$, rośnie w $\langle 1; \infty)$
b) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 4 = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$, rośnie w $(-\infty; -2\rangle$, maleje w $\langle -2; \infty)$
c) $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4 = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$, maleje w $(-\infty; -3\rangle$, rośnie w $\langle -3; \infty)$

2. a) $f(x) = (x-2)^2 - 3$, $f(D) = \langle -3; \infty)$
b) $f(x) = (x+1)^2 - 4$, $f(D) = \langle -4; \infty)$
c) $f(x) = -(x+3)^2 + 3$, $f(D) = (-\infty; 3\rangle$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4$, $f(D) = (-\infty; 4\rangle$
e) $f(x) = \frac{3}{4}(x-2)^2 - 3$, $f(D) = \langle -3; \infty)$
f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$,
$f(D) = (-\infty; \frac{1}{2}\rangle$

3. a) $b = -12$, $c = 19$ b) $b = 8$, $c = 4$
c) $b = 4$, $c = 5$

4. a) $f(x) = (x-2)^2 + 1$, maleje w $(-\infty; 2\rangle$, rośnie w $\langle 2; \infty)$
b) $f(x) = -(x-3)^2 + 6$, malejc w $\langle 3; \infty)$, rośnic w $(-\infty; 3\rangle$
c) $f(x) = 2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{2}$, malejc w $(-\infty; -\frac{1}{2}\rangle$, rośnic w $\langle -\frac{1}{2}; \infty)$
d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2$, maleje w $\langle -2; \infty)$, rośnie w $(-\infty; -2\rangle$

4. c) $f(x) = 3(x+1)^2 - 3$,
maleje w $(-\infty; -1\rangle$, rośnie w $\langle -1; \infty)$
f) $f(x) = -\frac{2}{3}(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{3}{8}$,
maleje w $\langle \frac{3}{4}; \infty)$, rośnie w $(-\infty; \frac{3}{4}\rangle$

5. a) $W(2,3)$ b) $W(-2,-4)$ c) $W(-\frac{1}{4}, 0)$

Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego

1. a) 4, 12 b) $4\frac{1}{2}$, 13 c) -17, -34

2. a) 5, $2\frac{3}{4}$ b) -5, $-\frac{1}{2}$ c) 3, $-1\frac{1}{8}$

3. a) $g(-2) = -17$, $f(-2) = -15$,
$h(-2) = -7$ b) $g(-2) = -10\frac{1}{2}$,
$h(-2) = -10\frac{1}{2}$, $f(-2) = -8$

4. a) $c = 7$ b) $c = 20$ c) $c = -5\sqrt{2}$

5. A, B, E

6. a) $x = -1$, $W(-1, -\frac{3}{2})$
b) $x = -1$, $W(-1, 4)$

7. a) $x = \frac{1}{2}$, $W(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$
b) $x = \frac{3}{2}$, $W(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$
c) $x = \frac{3}{2}$, $W(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
d) $x = -\frac{1}{2}$, $W(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2})$

1.3. Równania kwadratowe (1)

Ć **1.** Równanie kwadratowe może mieć 2 rozwiązania, 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

2. a) $\{-2, 0\}$ b) $\{0, \frac{7}{3}\}$ c) $\{0, \frac{5}{2}\}$ d) $\{0, 16\}$

3. a) $x = -\frac{5}{4}$, $x = \frac{5}{4}$ b) $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{5}$
c) $x = -\frac{11}{2}$, $x = \frac{11}{2}$ d) $x = -21$, $x = 21$

4. a) $x = -4$ b) $x = \frac{1}{2}$
c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = \frac{3}{2}$
e) $x = 2$ f) $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. a) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ b) sprzeczne
c) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ d) sprzeczne

Z **1.** a) $x = 0$, $x = 6$ b) $x = -\frac{1}{27}$, $x = 0$
c) $x = 0$, $x = \frac{1}{6}$ d) $x = -\frac{1}{9}$, $x = 0$
e) $x = 0$, $x = 2$ f) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = 0$

2. a) $x = -\frac{9}{10}$, $x = \frac{9}{10}$
b) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$
c) $x = -5$ d) $x = 8$
e) $x = 12$ f) $x = -\frac{1}{3}$
g) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
h) $x = 2$ i) $x = 6$

3. a) $(0,0)$, $(4,0)$ b) $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,-12)$
c) $(0,12)$, nie przecina osi OX
d) $(0,0)$, $(-\frac{1}{225}, 0)$
e) $(0,4)$, nie przecina osi OX
f) $(-\frac{1}{15}, 0)$, $(\frac{1}{15}, 0)$, $(0,-4)$

4. a) 2 b) -4 c) 3

5. a) $x = 0$, $x = 1$ b) $x = -3$, $x = 0$
c) $x = \frac{1}{3}$ d) $x = 6$ e) $x = 4$ f) $x = 2$

6. a) 2 b) 0 c) 2

1.4. Równania kwadratowe (2)

Ć **1.** a) $x = \frac{2}{3}$ b) $x = -\frac{4}{5}$ c) $x = \frac{7}{2}$

3. a) $x = -1$, $x = 3$ b) $x = -4$, $x = -2$
c) $x = -3 - \sqrt{2}$, $x = -3 + \sqrt{2}$

4. a) $\Delta = 4 > 0$, 2 rozwiązania
b) $\Delta = -8 < 0$, 0 rozwiązań
c) $\Delta = 35 > 0$, 2 rozwiązania
d) $\Delta = 49 > 0$, 2 rozwiązania
e) $\Delta = 0$, 1 rozwiązanie
f) $\Delta = -12 < 0$, 0 rozwiązań
g) $\Delta = -2 < 0$, 0 rozwiązań
h) $\Delta = \frac{25}{4} - 4\sqrt{2} > 0$, 2 rozwiązania
i) $\Delta = 9 > 0$, 2 rozwiązania

5. a) $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$
b) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{4}$
c) $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$ d) $x_0 = \frac{1}{14}$
e) $x_1 = 3 - \sqrt{10}$, $x_2 = 3 + \sqrt{10}$
f) $x_1 = 2 - \sqrt{6}$, $x_2 = 2 + \sqrt{6}$
g) sprzeczne h) $x_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{6}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{6}$
i) sprzeczne

Z **1.** a) $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 7$ b) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 3$
c) $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ d) sprzeczne
e) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1$ f) $x_0 = -\frac{3}{2}$
g) sprzeczne h) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$
i) $x_0 = \frac{2}{3}$

2. a) $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$
b) $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 2$ c) $x_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$
d) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}$
e) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{11}}{5}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{11}}{5}$
f), g) sprzeczne
h) $x_1 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$
i) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{6}$, $x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{6}$

3. a) $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(\frac{1}{3},0)$
b) $(0,3)$, $(-\frac{\sqrt{3}+3}{2},0)$, $(\frac{\sqrt{3}-3}{2},0)$
c) $(0,3)$, $(1,0)$, $(-\frac{3}{4},0)$
d) $(0,12)$, $(-6,0)$ **c)** $(0,5)$
f) $(0,1)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-2\sqrt{2},0)$

4. a) $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$ **b)** $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{5}$
c) $x_1=5-\sqrt{13}$, $x_2=5+\sqrt{13}$
d) $x_1=6$, $x_2=12$
e) $x_1=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$, $x_2=\frac{7+\sqrt{37}}{2}$
f) sprzeczne

5. a) 2 **b)** 0

6. a) $x_0=2$ **b)** sprzeczne
c) $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ **d)** sprzeczne
e) $x_1=-8$, $x_2=-4$
f) $x_1=-6-2\sqrt{17}$, $x_2=-6+2\sqrt{17}$

7. a) -5, 3 **b)** $-\frac{1}{2}$, 3

8. a) $x_1=-3$, $x_2=0$
b) $x_1=-4-\sqrt{17}$, $x_2=-4+\sqrt{17}$
c) $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=-1$
d) $x_1=\frac{5-\sqrt{105}}{4}$, $x_2=\frac{5+\sqrt{105}}{4}$

1.5. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)

Ć **1.** a) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x+9$
b) $y=4x^2-\frac{10}{3}x+\frac{2}{3}$ **c)** $y=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x$

2. a) $x_1=3$, $x_2=5$ **b)** $x_1=-6$, $x_2=2$
c) $x_1=-8$, $x_2=-4$ **d)** $x_1=0$, $x_2=9$
e) $x_0=2$ **f)** $x_0=-7$

3. a) $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{3}$
b) $x_1=1-\sqrt{3}$, $x_2=-1+\sqrt{2}$

4. a) $y=5x(x-\frac{3}{5})$
b) $y=16(x-\frac{1}{4})(x+\frac{1}{4})$
c) $y=9(x-\frac{2\sqrt{2}}{3})(x+\frac{2\sqrt{2}}{3})$

5. a) $y=(x-3)(x-5)$ **b)** $y=(x+7)(x-4)$
c) $y=3(x-\frac{1}{3})(x-2)$
d) $y=12(x+\frac{2}{3})(x+\frac{1}{4})$
e) $y=-2(x-3)(x+4)$
f) $y=-4(x+\frac{1}{4})(x-1)$
g) nie ma postaci iloczynowej
h) $y=(x+\sqrt{3}-1)(x-\sqrt{3}-1)$
i) $y=2\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Z **1.** a) $x=-10$, $x=20$, $y=x^2-10x-200$
b) $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{2}$, $y=6x^2-5x+1$
c) $x=-3$, $x=\frac{4}{3}$, $y=6x^2+10x-24$
d) $x=\frac{1}{2}$, $x=2$, $y=4x^2-10x+4$
e) $x=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{3}$, $y=6x^2+5x+1$
f) $x=\frac{2}{5}$, $x=\frac{3}{4}$, $y=20x^2-23x+6$
g) $x=-3$, $x=0$, $y=-x^2-3x$
h) $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $y=x^2-\frac{1}{2}x$
i) $x=0$, $x=\frac{7}{3}$, $y=-3x^2+7x$

2. a) $y=(x-3)(x+2)$
b) $y=-(x-3)(x+2)$
c) $y=2(x+\frac{1}{2})(x-2)$
d) $y=-2(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2})(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2})$
e) $y=3(x-1)(x-\frac{4}{3})$
f) $y=-4\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$
g) $y=3(x-4)(x+\frac{2}{3})$
h) $y=\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
i) $y=-\frac{1}{4}(x+2)(x-14)$

3. a) $f(x)=4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$,
$x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$
b) $f(x)=9(x+\frac{4}{3})(x-\frac{4}{3})$,
$x=-\frac{4}{3}$, $x=\frac{4}{3}$
c) $f(x)=\frac{1}{3}x(x+\frac{1}{2})$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$
d) $f(x)=-9x(x-\frac{2}{3})$, $x=0$, $x=\frac{2}{3}$
e) $f(x)=9(x+\frac{1}{3})^2$, $x=-\frac{1}{3}$
f) $f(x)=4(x-\frac{3}{2})^2$, $x=\frac{3}{2}$

5. a) $f(x)=-x(x+4)=-(x+2)^2+4$
b) $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x+5)=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$
c) $f(x)=2x(x+1)=2(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$
d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-2)=-\frac{1}{2}x^2+2$
e) $f(x)=-(x+1)(x+3)=-(x+2)^2+1$
f) $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)(x-4)=\frac{1}{4}(x-\frac{3}{2})^2-\frac{25}{16}$

6. a) $x=-1$, $x=6$, $y=(x-6)(x+1)$
b) $x=1$, $x=3$, $y=2(x-1)(x-3)$
c) $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{1}{3}$, $y=-6(x+\frac{3}{2})(x-\frac{1}{3})$
d) $x=2$, $y=-(x-2)^2$
e) $x=0$, $x=4$, $y=x(x-4)$
f) $x=1$, $x=3$, $y=-2(x-1)(x-3)$

7. a) $y=(x+2\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
b) $y=\sqrt{3}x(x+2\sqrt{3})$
c) nie ma postaci iloczynowej

8. a) $(-6,0)$, $(0,0)$ **b)** $(0,0)$, $(3,0)$
c) $(-2,0)$, $(4,0)$, $(0,-8)$
d) $(-\frac{1}{2},0)$, $(6,0)$, $(0,-3)$
e) $(-2,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(0,12)$
f) $(-\frac{5}{4},0)$, $(\frac{3}{2},0)$, $(0,-15)$

1.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)

Ć **1.** **a)** $b=-8,\ c=15$
b) $b=-1,\ c=-12$
c) $b=7,\ c=10$
d) $b=\frac{3}{2},\ c=-1$
e) $b=0,\ c=-3$

2. **a)** $x=3,\ W(3,-9)$
b) $x=5,\ W(5,25)$
c) $x=-2,\ W(-2,-8)$
d) $x=\frac{1}{2},\ W\left(\frac{1}{2},24\frac{1}{2}\right)$
e) $x=\frac{1}{2},\ W\left(\frac{1}{2},-4\right)$
f) $x=\frac{3}{4},\ W\left(\frac{3}{4},4\right)$

3. **a)** $y=x^2-2x-3$
b) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x$
c) $y=-\frac{2}{5}x^2-\frac{12}{5}x+\frac{32}{5}$
d) $y=\frac{2}{3}x^2-4x$

Z **1.** **a)** $f(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$
b) $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-3)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$
c) $f(x)=-x(x+4)=-x^2-4x$

2. **a)** $y=2(x-1)(x-4)=2x^2-10x+8$
b) $y=\frac{1}{2}(x+6)(x-2)=\frac{1}{2}x^2+2x-6$
c) $y=-(x-2)(x+5)=-x^2-3x+10$
d) $y=-3(x-1)(x-3)=-3x^2+12x-9$

3. **a)** $x=1,\ f(x)=(x-1)(x-5)$,
$f(x)=(x-3)^2-4$
b) $x=0,\ f(x)=-\frac{1}{2}x(x+4)$,
$f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2$
c) $x=5,\ f(x)=\frac{1}{3}(x+1)(x-5)$,
$f(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$

4. **a)** $f(x)=2x^2+8x+6=2(x+2)^2-2$
b) $f(x)=2x^2-4x=2(x-1)^2-2$
c) $f(x)=2x^2-20x+42=2(x-5)^2-8$

5. **a)** $(0,0),\ (-6,0),\ W(-3,9)$
b) $(1,0),\ (5,0),\ (0,5),\ W(3,-4)$
c) $(-3,0),\ (1,0),\ \left(0,\frac{3}{2}\right),\ W(-1,2)$

6. **a)** $y=\frac{2}{3}(x+2)(x-4)=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}=$
$=\frac{2}{3}(x-1)^2-6$
b) $y=-\frac{8}{9}x(x+6)=-\frac{8}{9}x^2-\frac{16}{3}x=$
$=-\frac{8}{9}(x+3)^2+8$
c) $y=-\frac{2}{9}(x-1)(x-7)=$
$=-\frac{2}{9}x^2+\frac{16}{9}x-\frac{14}{9}=$
$=-\frac{2}{9}(x-4)^2+2$

1.7. Nierówności kwadratowe

Ć **1.** **a)** $x\in(-\infty;-\frac{1}{3}\rangle\cup\langle 1;\infty)$
b) $x\in\langle -1;\frac{1}{2}\rangle$
c) $x\in(1-\sqrt{5};1+\sqrt{5})$

2. **a)** $x\in\mathbf{R}$ **b)** $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$
c) sprzeczna

3. **a)** $x\in\mathbf{R}$ **b)** sprzeczna **c)** $x\in\mathbf{R}$

4. **a)** $x\in\langle -\frac{3}{2};1\rangle$
b) $x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\infty\right)$
c) $x\in\mathbf{R}$ **d)** $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$
e) $x\in\left(0;\frac{2}{5}\right)$ **f)** $x\in\langle -\frac{1}{2};3\rangle$

Z **1.** **a)** $x\in(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$
b) $x\in\langle -4;4\rangle$
c) $x\in(-\infty;-\frac{3}{2}\rangle\cup\langle\frac{3}{2};\infty)$
d) $x\in(-\infty;-2\rangle\cup\langle 3;\infty)$
e) $x\in\langle -1;4\rangle$ **f)** $x\in(-1;5)$
g) $x\in\langle -\frac{1}{2};5\rangle$
h) $x\in(-\infty;-3)\cup(\frac{1}{2};\infty)$
i) sprzeczna **j)** $x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\infty\right)$
k) $x\in\langle -2;8\rangle$ **l)** sprzeczna

2. **a)** 13 **b)** nieskończenie wiele **c)** 5 **d)** 2

3. **a)** 1, 2, 3, 4, 5
b) 0, 1, 2
c) −3, −2, −1, 0, 1, 2

4. **a)** $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **b)** $x\in\mathbf{R}$
c) $x\in(-\infty;-5\rangle\cup\left\langle\frac{1}{3};\infty\right)$
d) $x\in\mathbf{R}$ **e)** $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{9}\right\}$
f) $x\in(-\infty;-4\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2};\infty\right)$
g) sprzeczna **h)** $x=\frac{3}{2}$
i) sprzeczna

5. **a)** $f(x)>5$ dla $x\in(-\infty;0)\cup(6;\infty)$
$f(x)<-3$ dla $x\in(2;4)$
b) $x\in(1;2)\cup(6;7)$

6. **a)** $x\in(-2;3)$
b) $x\in\left(-\infty;-6-\sqrt{41}\right\rangle\cup\left\langle-6+\sqrt{41};\infty\right)$
c) $x\in\left(-\infty;9-5\sqrt{3}\right\rangle\cup\left\langle 9+5\sqrt{3};\infty\right)$
d) $x\in\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{-3+\sqrt{17}}{2};\infty\right)$
e) $x\in\mathbf{R}$ **f)** $x\in\left(-1;-\frac{1}{5}\right)$

7. **a)** $(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$
b) $(-\infty;-\frac{3}{2})\cup(1;\infty)$
c) $(-4-\sqrt{10};-4+\sqrt{10})$

8. a) $(-\infty;-2)\cup\langle 2;\infty)$ b) $\langle -2\sqrt{2};2\sqrt{2}\rangle$
c) $\mathbf{R}$ d) $(-\infty;-1\rangle\cup\langle 4;\infty)$
e) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{5}{3};\infty\right)$
f) $\left(-\infty;-4\sqrt{3}\right\rangle\cup\left\langle 2\sqrt{3};\infty\right)$

9. a) $A\cup B=\langle 0;2+\sqrt{3}\rangle$, $A\cap B=\langle 2-\sqrt{3};3\rangle$, $A\setminus B=(3;2+\sqrt{3}\rangle$
b) $A\cup B=\mathbf{R}$, $A\cap B=(1;2)\cup(3;4)$, $A\setminus B=(-\infty;1\rangle\cup\langle 4;\infty)$

10. $f(x)=-4(x+3)(x+1)$,
$f(x)\leqslant 0$ dla $x\in(-\infty;-3\rangle\cup\langle -1;\infty)$

11. a) $x\in\langle -2\sqrt{2};2\sqrt{2}\rangle$
b) $x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$
c) $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 1;\infty)$
d) $x\in\mathbf{R}$ e) $x=2$
f) $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3\}$
g) $x\in(-\infty;-7\rangle\cup\langle 3;\infty)$
h) $x\in(-3;5)$ i) $x\in(-\frac{1}{3};\frac{1}{2})$

12. a) żaden b) wszystkie
c) 1 d) -12, -6, -4, -3, -2, -1, 6, 12
e) -12, -6, -4, -3, 1, 2, 3, 4, 6, 12
f) -12, -6, -4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 6, 12

1.8. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Ć **1.** a) $x=-2$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$
b) $x=-\sqrt{6}$, $x=-1$, $x=1$, $x=\sqrt{6}$
c) $x=-\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$

2. a) $x=-3$, $x=3$
b) $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$
c) $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$
d) $x=-2$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$
e) $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$
f) $x=-3$, $x=-\sqrt{5}$, $x=\sqrt{5}$, $x=3$

3. a) $x=-6$, $x=0$, $x=6$ b) $x=0$
c) $x=-\frac{2}{3}$, $x=0$, $x=\frac{2}{3}$

4. a) 3 b) 1 c) 2 d) 4 e) 0 f) 2

5. a) $x=1$, $x=2$ b) $x=-1$, $x=2$
c) $x=-1$, $x=\sqrt[3]{2}$

Z **1.** a) $x=-3$, $x=-2$, $x=2$, $x=3$
b), c) sprzeczne
d) $x=-2$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $x=2$
e) $x=-\sqrt{3}$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\sqrt{3}$
f) $x=-\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{3}$

2. a) $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$
b) $x=-\sqrt{5}$, $x=\sqrt{5}$
c) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) sprzeczne
e) $x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$
f) $x=-\frac{\sqrt{15}}{3}$, $x=\frac{\sqrt{15}}{3}$

3. b) 2

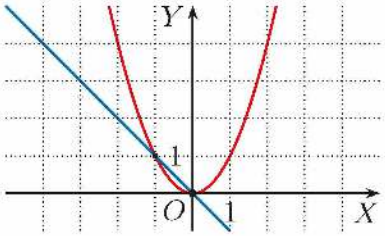
4. a) $x=-4$, $x=4$ b) $x=-2$, $x=2$
c) $x=-6$, $x=6$

5. a) $x=-\sqrt{5}$, $x=-2$, $x=2$, $x=\sqrt{5}$
b) $x=-4$, $x=4$
c) $x=-\sqrt{10}$, $x=\sqrt{10}$
d) $x=-\sqrt{2}$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\sqrt{2}$
e) $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$
f) $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

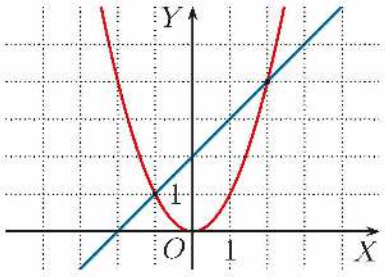
6. a) $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$ b) $x=-1$, $x=1$
c) $x=-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$
d) sprzeczne
e) $x=-5$, $x=5$ f) $x=0$

1.9. Układy równań

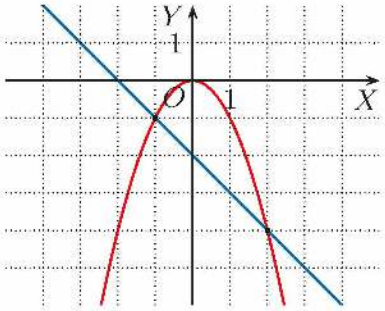
Ć **1.** a) $x=-1$, $y=1$ lub $x=0$, $y=0$



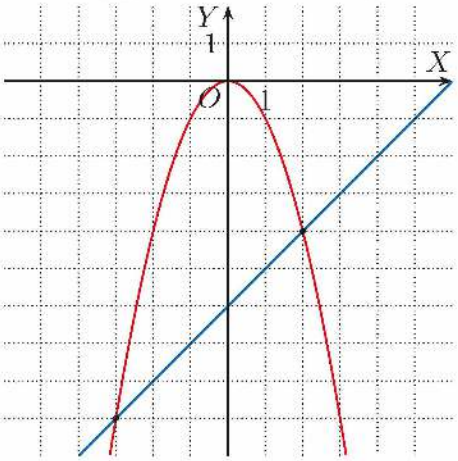
b) $x=-1$, $y=1$ lub $x=2$, $y=4$



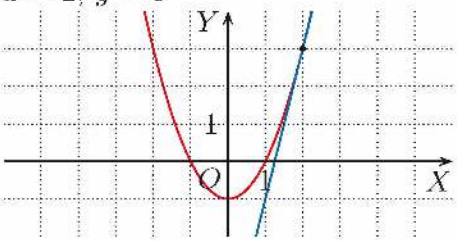
c) $x=-1$, $y=-1$ lub $x=2$, $y=-4$



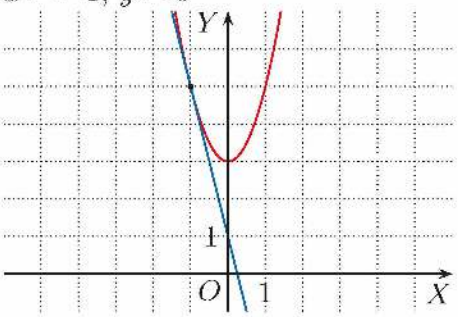
1. d) $x = -3,\ y = -9$ lub $x = 2,\ y = -4$



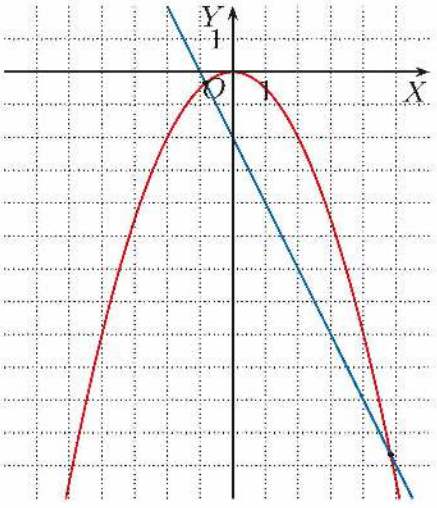
2. a) $x = 2,\ y = 3$



b) $x = -1,\ y = 5$



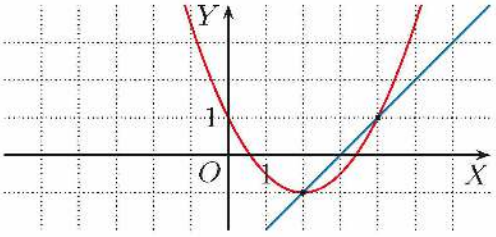
c) $x = 2 - 2\sqrt{2},\ y = 4\sqrt{2} - 6$
lub $x = 2 + 2\sqrt{2},\ y = -4\sqrt{2} - 6$



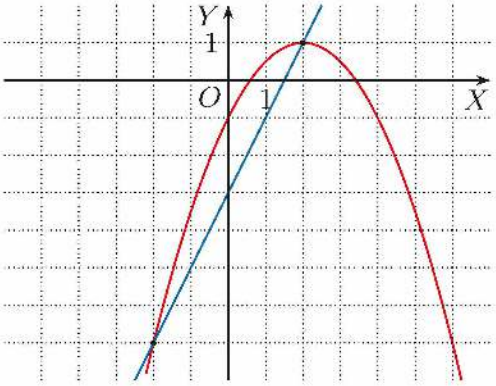
Z **1.** a) $(-2, 0),\ (1, 3)$ b) $(1, 3)$
c) $(-3, -5),\ (1, 3)$

2. a) 2 b) 2 c) 2 d) 1

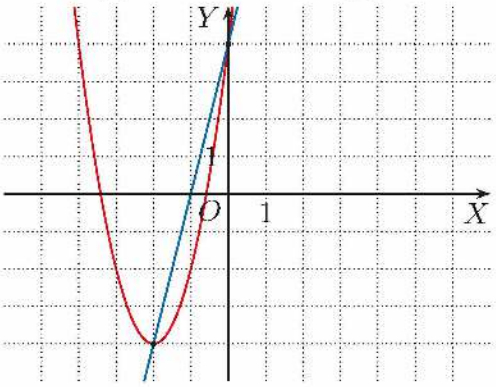
3. a) $x = 2,\ y = -1$ lub $x = 4,\ y = 1$



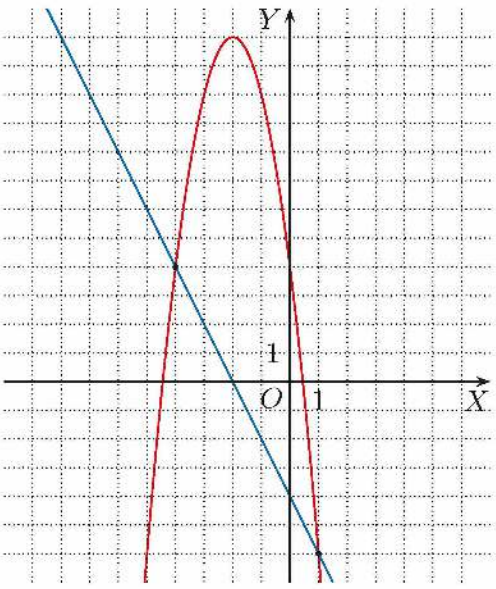
b) $x = -2,\ y = -7$ lub $x = 2,\ y = 1$



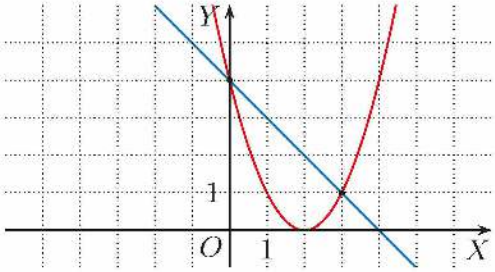
c) $x = -2,\ y = -4$ lub $x = 0,\ y = 4$



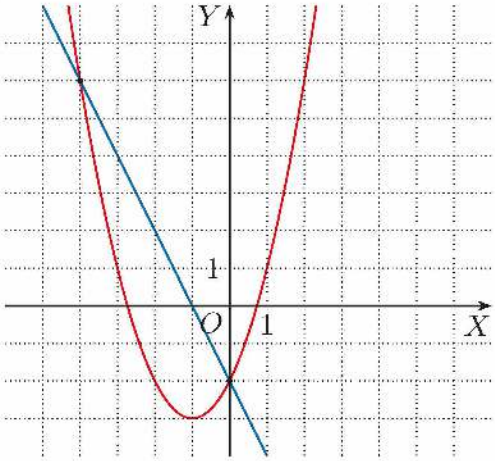
d) $x = -4,\ y = 4$ lub $x = 1,\ y = -6$



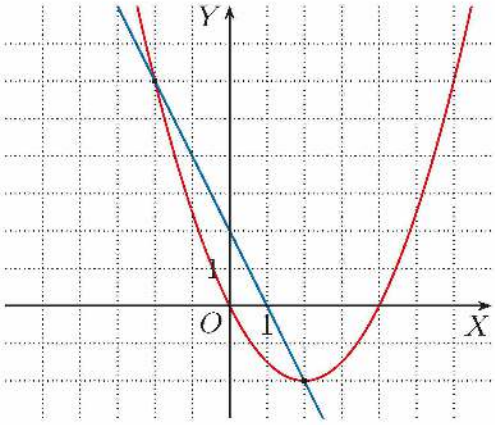
4. a) $x = 0$, $y = 4$ lub $x = 3$, $y = 1$



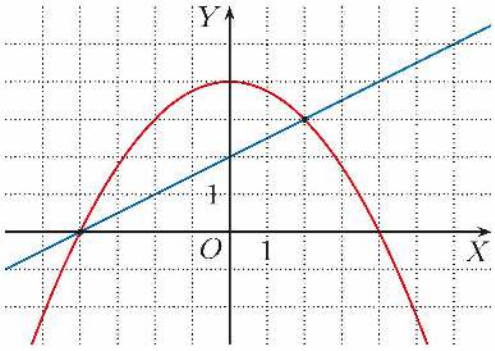
b) $x = -4$, $y = 6$ lub $x = 0$, $y = -2$



c) $x = -2$, $y = 6$ lub $x = 2$, $y = -2$



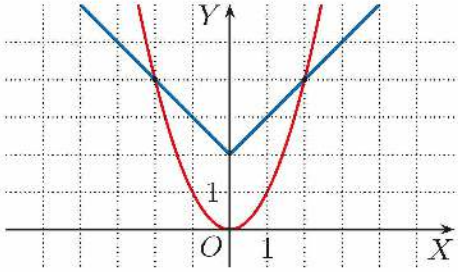
d) $x = -4$, $y = 0$ lub $x = 2$, $y = 3$



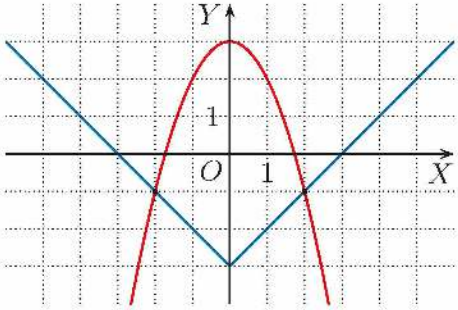
e) $x = -1$, $y = 3$

f) $x = -1 - \sqrt{3}$, $y = -5 - 4\sqrt{3}$
lub $x = -1 + \sqrt{3}$, $y = -5 + 4\sqrt{3}$

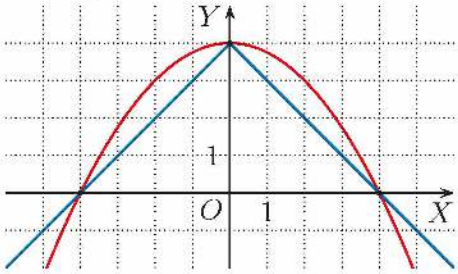
5. a) $x = -2$, $y = 4$ lub $x = 2$, $y = 4$



b) $x = -2$, $y = -1$ lub $x = 2$, $y = -1$



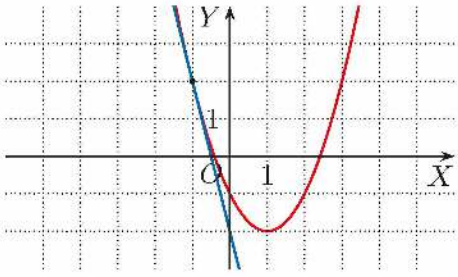
c) $x = -4$, $y = 0$ lub $x = 0$, $y = 4$
lub $x = 4$, $y = 0$



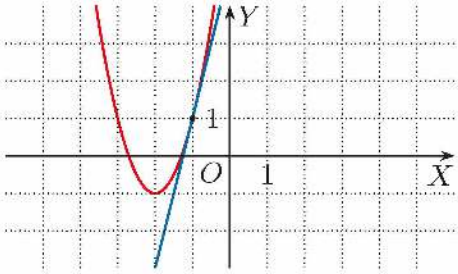
6. a) 1 b) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ c) 8 d) 3

7. a) $x = 6 - 2\sqrt{6}$, $y = -2\sqrt{6}$
lub $x = 6 + 2\sqrt{6}$, $y = 2\sqrt{6}$

b) $x = -1$, $y = 2$



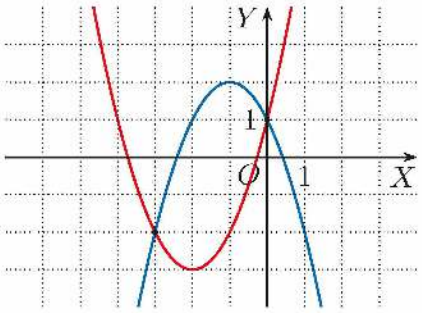
c) $x = -1$, $y = 1$



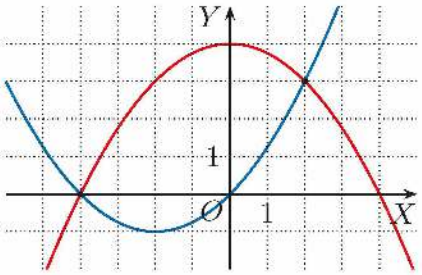
Układy równań kwadratowych

1. **a)** 1 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 2

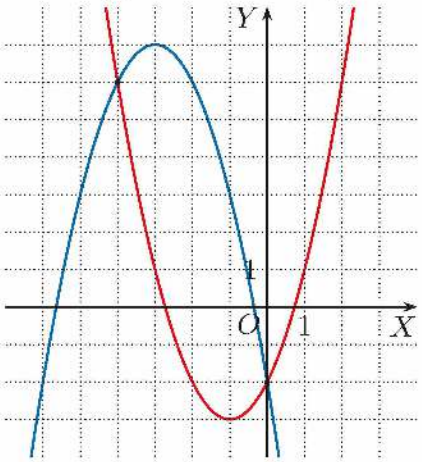
2. **a)** $x = -3$, $y = -2$ lub $x = 0$, $y = 1$



b) $x = -4$, $y = 0$ lub $x = 2$, $y = 3$



c) $x = -4$, $y = 6$ lub $x = 0$, $y = -2$



1.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Ć **1.** **a)** 361 **b)** $\frac{1}{16}$ **c)** $\frac{1}{2}$

2. 162

3. **a)** wartość najmniejsza: 4,
wartość największa: 13
b) wartość najmniejsza: -49,
wartość największa: -1
c) wartość najmniejsza: -11,
wartość największa: -2
d) wartość najmniejsza: $-\frac{7}{2}$,
wartość największa: 1

4. $x = 10$ cm, $P = 800$ cm^2

Z **1.** **a)** f – najmniejsza: -1, największa: 3,
g – najmniejsza: -3, największa: 9
b) f – najmniejsza: -13, największa: -1,
g – najmniejsza: $-\frac{7}{2}$, największa: -3
c) f – najmniejsza: -33, największa: 3,
g – najmniejsza: $-\frac{7}{2}$, największa: 21

2. **a)** 8 **b)** 32

3. 21 m $\times$ 21 m

4. 7 m $\times$ 14 m

5. 3 cm $\times$ 3 cm

6. **a)** $P(x) = -2x^2 + 4x$, $x \in (0; 2)$, 1×2
b) $P(x) = -3x^2 + 24x$, $x \in (0; 8)$, 12×4

7. **a)** najmniejsza: 1, największa: 9
b) najmniejsza: -2, największa: 10

8. 60 m $\times$ 60 m

1.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Ć **1.** **b)** cena lalki: 55 zł, wielkość sprzedaży: 1400 sztuk, zysk: 49 000 zł

2. **a)** $z(x) = -50x^2 + 2250x - 17\,500$,
$x \in \langle 10; 35\rangle$
b) cena misia: 22,5 zł, wielkość sprzedaży: 625 sztuk, zysk: 7812,5 zł

3. o 10 zł

4. 18 zł

5. **a)** 12 m $\times$ 18 m **b)** 9 m $\times$ 24 m

6. 1,5 m

Z **1.** $x = 3$

2. **a)** 10 cm **b)** $\frac{65-20\sqrt{7}}{2} \approx 6$ [cm]

3. w obu przypadkach 1,5 m

4. $x > 2$

5. Jeśli przez x oznaczymy szerokość pokoju w metrach, to $x \in \langle \sqrt{17} - 1; 6\rangle$.

6. 40 cm

7. $x \in \langle 2; 8\rangle$

8. 15

10. **a)** $y = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4 = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$
b) $y = -\frac{1}{9}(x-6)(x+6) = -\frac{1}{9}x^2 + 4$

11. nie

12. 1,5 cm

13. a) $Ob = 30$ m, $P = 30$ m^2
b) $Ob = 56$ m, $P = 84$ m^2

14. 200 m

1.12. Zagadnienia uzupełniające

1. a) 44,1; 29,4; 4,9; $D_h = \langle 0; \sqrt{10}\rangle$, miejsce zerowe: $\sqrt{10}$ b) około 26 m

2. a) $h \approx 9{,}3$ m, około 16,6 m b) $t = 2$

3. a) $x_1 + x_2 = 9$, $x_1x_2 = -7$
b) $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1x_2 = -\frac{7}{2}$
c) $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$, $x_1x_2 = \frac{1}{3}$
d) Równanie nie ma pierwiastków.
e) $x_1 + x_2 = -12$, $x_1x_2 = -\frac{3}{2}$
f) $x_1 + x_2 = -6$, $x_1x_2 = -\frac{1}{2}$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $f(x) = x^2 + 4$
b) $f(x) = -(x+1)^2 + 1$
c) $f(x) = (x+1)^2 - 2$
d) $f(x) = (x-3)^2 - 4$
e) $f(x) = -(x-2)^2 + 1$
f) $f(x) = -(x+3)^2 + 8$

2. a) $f(x) = -\frac{4}{3}(x-2)^2 + \frac{4}{3}$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$

3. a) $x = -7$, $x = 7$ b) $x = -12$, $x = 12$
c) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$ d) $x = -\frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{6}$
e) $x = -\frac{9}{2}$, $x = \frac{9}{2}$ f) $x = -\frac{6}{5}$, $x = \frac{6}{5}$

4. a) $x = -5\sqrt{2}$, $x = 5\sqrt{2}$
b) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{14}$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{14}$
c) $x = -2\sqrt{2}$, $x = 2\sqrt{2}$
d) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
e) $x = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$, $x = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ f) sprzeczne

5. a) $x = 0$, $x = 8$, oś symetrii: $x = 4$
b) $x = -6$, $x = 0$, oś symetrii: $x = -3$
c) $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$, oś symetrii: $x = \frac{3}{4}$
d) $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$, oś symetrii: $x = -\frac{1}{6}$
e) $x = -7$, oś symetrii: $x = -7$
f) $x = -\frac{1}{4}$, oś symetrii: $x = -\frac{1}{4}$

6. a) $x = -7$, $x = 3$ b) $x = -3$, $x = 2$
c) $x = -3$, $x = 4$ d) $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$
e) $x = -\frac{5}{3}$, $x = \frac{1}{2}$ f) $x = \frac{8}{3}$
g) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$, $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$
h) $x = \frac{-5-\sqrt{13}}{6}$, $x = \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$ i) sprzeczne

7. a) $x = -2$, $x = 3$
b) $x = -2$, $x = 3$
c) $x = -1$, $x = \frac{1}{5}$
d) $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$

8. a) $(0,0)$, $(-4,0)$, $W(-2,-4)$
b) $(0,0)$, $(2,0)$, $W(1,1)$
c) $(0,0)$, $(4,0)$, $W(2,-8)$
d) $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $W(0,1)$
e) $(0,8)$, $(-2,0)$, $(4,0)$, $W(1,9)$
f) $(0,8)$, $(-4,0)$, $(-2,0)$, $W(-3,-1)$

9. a) $f(D) = \langle -16; \infty)$,
rosnąca w $\langle 4; \infty)$, malejąca w $(-\infty; 4\rangle$
b) $f(D) = (-\infty; 9\rangle$,
rosnąca w $(-\infty; 3\rangle$, malejąca w $\langle 3; \infty)$
c) $f(D) = \langle -5; \infty)$,
rosnąca w $\langle -1; \infty)$, malejąca w $(-\infty; -1\rangle$
d) $f(D) = (-\infty; 3\rangle$,
rosnąca w $(-\infty; \frac{1}{2}\rangle$, malejąca w $\langle \frac{1}{2}; \infty)$
e) $f(D) = (-\infty; 19\rangle$,
rosnąca w $(-\infty; -3\rangle$, malejąca w $\langle -3; \infty)$
f) $f(D) = \langle -8; \infty)$,
rosnąca w $\langle -6; \infty)$, malejąca w $(-\infty; -6\rangle$

10. a) $x = 2 - 2\sqrt{2}$, $x = 2 + 2\sqrt{2}$
b) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = -1 + \sqrt{2}$
c) $x = 0$, $x = 4$
d) $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $f(x) = 2x(x-3)$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x(x+6)$
c) $f(x) = -(x+5)(x-3)$
d) $f(x) = 2(x+2)(x-1)$
e) $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3)$
f) $f(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2)$

2. a) $x = 7$, $f(x) = -(x-5)^2 + 4$
b) $x = -9$, $f(x) = \frac{1}{6}(x+3)^2 - 6$
c) $x = -2$, $f(x) = -\frac{8}{25}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$
d) $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = -\frac{96}{49}\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 6$

3. a) $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$
b) $x \in (-2; 2)$ c) $x \in (-3; 4)$
d) $x \in (-\infty; -5\rangle \cup \langle 1; \infty)$
e) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$
f) $x \in \left\langle -3\frac{1}{2}; 2\right\rangle$

4. **a)** $x \in \langle -1; 5\rangle$
b) $x \in \left(-\infty; -\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}; \infty\right)$
c) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 5; \infty)$
d) $x = 6$ **e)** $x \in \left(-\frac{1+2\sqrt{2}}{7}; \frac{-1+2\sqrt{2}}{7}\right)$
f) $x \in \left\langle \frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right\rangle$
g) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$
h) $x \in (-4-\sqrt{17}; -4+\sqrt{17})$
i) $x \in \left\langle -\frac{3}{2}; -1\right\rangle$

5. **a)** 10 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 1 **e)** 5 **f)** 1

6. **a)** 7 **b)** 0

7. $X \cup Y = (-\infty; -2-\sqrt{2}\rangle \cup \langle -2; \infty)$,
$X \cap Y = \langle -2+\sqrt{2}; 3\rangle$,
$X \setminus Y = \langle -2; -2+\sqrt{2})$

8. **a)** $x = -2$, $x = 2$
b) $x = -\sqrt{3}$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $x = \sqrt{3}$
c) $x = -1$, $x = 1$ **d)** $x = 0$
e) $x = -4$, $x = 0$, $x = 4$ **f)** sprzeczne

9. **a)** $x = -2$, $x = 2$
b) $x = -2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = 2$
c) sprzeczne
d) $x = -\frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$, $x = \frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$
c) $x = -2\sqrt{2}$, $x = 2\sqrt{2}$
f) $x = -\sqrt{1+\sqrt{6}}$, $x = \sqrt{1+\sqrt{6}}$
g) $x = -2$, $x = 2$ **h)** $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$
i) sprzeczne

10. **a)** $x = -2$, $y = 1$ lub $x = 1$, $y = 4$
b) $x = 1$, $y = -2$ lub $x = 2$, $y = 1$
c) $x = 1$, $y = 0$ lub $x = 3$, $y = 4$
d) $x = -2$, $y = 5$ lub $x = 1$, $y = -4$
e) $x = -1$, $y = -3$ lub $x = 3$, $y = 5$
f) $x = -4$, $y = -4$ lub $x = 2$, $y = -1$

11. **a)** najmniejsza: -2,
największa: 6
b) najmniejsza: -8,
największa: 1
c) najmniejsza: 1,
największa: 9
d) najmniejsza: -12,
największa: $\frac{1}{4}$

12. **a)** $a = b = 2$
b) $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$
c) $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$

13. 62,5 m × 62,5 m

14. **a)** o 100 zł, zysk zwiększy się o 10 000 zł
b) o 280 zł, zysk zwiększy się o 3920 zł

Zadania testowe

1. D **2.** A **3.** B **4.** B **5.** A **6.** C **7.** C
8. C **9.** B **10.** D

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $x = -\sqrt{7}$, $x = \sqrt{7}$

2. $x = 0$, $y = 0$ lub $x = 4$, $y = 8$

3. 12

4. $x = -\sqrt{5}$, $x = -3$, $x = 3$

5. l

7. 96 cm^2

8. **a)** $P(x_0) = -\frac{2}{3}x_0^2 + 4x_0$, $x_0 \in (0; 6)$
b) $A(3, 0)$, $B(3, 2)$, $C(0, 2)$

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Ć **1.** **a)** tak, stopnia 7
b) tak, stopnia 1
c), **d)** nie **e)** tak, stopnia 3

2. **a)** $w(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$,
$\mathrm{st}\,(w) = 5$
b) $w(x) = 2x^6 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - x$,
$\mathrm{st}\,(w) = 6$
c) $w(x) = 2x^8 + x^7 + 3x^4 - x^2 + 6x - 2$,
$\mathrm{st}\,(w) = 8$
d) $w(x) = 2x^{10} - x^6 + 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5$,
$\mathrm{st}\,(w) = 10$

3. **a)** $a_5 = -2$, $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = 1$,
$a_0 = 0$, $\mathrm{st}\,(w) = 5$
b) $a_6 = 1$, $a_5 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 1$, $a_3 = 0$,
$a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$, $\mathrm{st}\,(w) = 6$
c) $a_0 = 2^{10}$, $\mathrm{st}\,(w) = 0$

4. **a)** $w(x) = -3x^4 - 3x^2 - 3$
b) $w(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

5. **a)** $w(0) = -4$, $w(2) = 10$, $w(-2) = -26$
b) $w(0) = 1$, $w(2) = 21$, $w(-2) = 13$
c) $w(0) = -2$, $w(2) = 32$, $w(-2) = -44$
d) $w(0) = 3$, $w(2) = -47$, $w(-2) = -75$

6. **a)** $w\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$, $w\left(\frac{3}{2}\right) = -24$
b) $w\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{2}$, $w\left(\frac{3}{2}\right) = 132\frac{1}{2}$

Z **1.** a) $v(x) = x^3 - 6x^2 + 4$,
$a_3 = 1$, $a_2 = -6$, $a_1 = 0$, $a_0 = 4$
b) $w(x) = -\frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - 1$,
$a_5 = -\frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$,
$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_0 = -1$,
$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -\frac{3}{4}$

3. a) $w(0) = -3$, $w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$,
$w(-2) = -19$, $w(-3) = -69$
b) $w(0) = 2$, $w(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, $w(-2) = 32$,
$w(-3) = 80$
c) $w(0) = -4$, $w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$,
$w(-2) = -34$, $w(-3) = -76$
d) $w(0) = -10$, $w(\frac{1}{2}) = -11\frac{7}{16}$,
$w(-2) = -58$, $w(-3) = -214$

4. $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$, $d = 4$

5. a) Q b) P

6. a) $a = 1$ b) $a = -72$
c) $a = 4$ d) $a = -1$

7. a) $a = 6\frac{2}{3}$, $b = 7\frac{2}{3}$ b) $a = 3$, $b = 1$

8. a) B, C b) A

9. a) $a = 3$ b) $a = 3$

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Ć **1.** a) $u(x) + w(x) = 17x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2x$,
$\mathrm{st}\,(u) = 4$, $\mathrm{st}\,(w) = 3$, $\mathrm{st}\,(u + w) = 4$
b) $u(x) + w(x) = 6x^4 - 13x^3 - 2x^2 + 5$,
$\mathrm{st}\,(u) = 7$, $\mathrm{st}\,(w) = 7$, $\mathrm{st}\,(u + w) = 4$

2. Na przykład:
a) $u(x) = x^4$, $w(x) = x^4 + 1$
b) $u(x) = x^4 + x^3$, $w(x) = -x^4 + 1$
c) $u(x) = x^4 + x^2$, $w(x) = -x^4 - x + 1$
d) $u(x) = x^4 + x + 1$, $w(x) = -x^4 + 1$
e) $u(x) = x^4 + 1$, $w(x) = -x^4 + 1$

3. Współczynniki wielomianu w są liczbami przeciwnymi do odpowiednich współczynników wielomianu u.

4. a) $u(x) - w(x) = 5x^9 + 4x^8 + 10x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $\mathrm{st}\,(u) = 9$,
$\mathrm{st}\,(w) = 8$, $\mathrm{st}\,(u - w) = 9$
b) $u(x) - w(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$,
$\mathrm{st}\,(u) = 6$, $\mathrm{st}\,(w) = 6$, $\mathrm{st}\,(u - w) = 4$

5. a) $h(x) = -10x^6 + 8x^4 + 7$, $h(-1) = 5$
b) $h(x) = -14x^4 - 15x^2 + 4$, $h(-1) = -25$

6. a) tak b) $a = 5$

7. a) $u(x, y) + w(x, y) = 4x^3y^2 + 3x^2y^3 + -9x^2y^2 - 4xy - 1$,
$u(x, y) - w(x, y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^3 + +3x^2y^2 + 8xy + 5$
b) $u(x, y) + w(x, y) = \frac{2}{3}x^4y + \frac{10}{3}x^3y + -\frac{1}{6}xy^2 - x + 5$
$u(x, y) - w(x, y) = \frac{2}{3}x^4y + \frac{8}{3}x^3y + -\frac{5}{6}xy^2 + x - 3$

8. a) $u(x, y, z) + w(x, y, z) = = 5xy^2z^3 - 6x^2y^2z + 6x^2yz^2 + xyz^3$,
$u(x, y, z) - w(x, y, z) = = 3xy^2z^3 - 6x^2y^2z - 6x^2yz^2 - 3xyz^3$
b) $u(x, y, z) + w(x, y, z) = = 8x^2y + 14xz^2 - 4yz^2 + z^3$,
$u(x, y, z) - w(x, y, z) = = 8x^2y - 2xz^2 - 8y^2z + 2yz^2 - z^3$

Z **1.** a) $f(x) + g(x) = x^6 + x^3 + x^2 - 2x + 6$,
$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^6 - 4x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$
b) $f(x) + g(x) = -3x^5 + x^2 - x + 2$,
$f(x) - g(x) = -2x^6 + 3x^5 - 5x^2 + 9x + 2$
c) $f(x) + g(x) = x^5 + 3x^4 + x - 3$,
$f(x) - g(x) = 4x^7 - x^5 + 3x^4 + 7x - 7$

2. a) $w(x) = 2x^5 + 6x^4$, $\mathrm{st}\,(w) = 5$, $S_w = 8$,
$u(x) = -\frac{1}{3}x^5 - x^4$, $\mathrm{st}\,(u) = 5$, $S_u = -\frac{4}{3}$
b) $w(x) = 12x^2 - 18x$, $\mathrm{st}\,(w) = 2$,
$S_w = -6$, $u(x) = -2x^2 + 3x$, $\mathrm{st}\,(u) = 2$,
$S_u = 1$

3. a) $f(5) = 3$, $g(5) = 20$
b) $u(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{7}$, $w(-\frac{1}{2}) = -\frac{31}{7}$

4. a) $\mathrm{st}\,(p + q) = 5$
b) $\mathrm{st}\,(p + q) \leqslant 5$ lub $p + q \equiv 0$
c) Jeśli $m \neq n$, to $\mathrm{st}\,(p+q) = \max(m, n)$.
Jeśli $m = n$, to $\mathrm{st}\,(p+q) \leqslant n$ lub $p+q \equiv 0$.

5. a) $\mathrm{st}\,(u + w) = 6$ dla $a \neq 0$,
$\mathrm{st}\,(u + w) = 4$ dla $a = 0$
b) $\mathrm{st}\,(u + w) = 5$ dla $a \neq -6$,
$\mathrm{st}\,(u + w) = 1$ dla $a = -6$
c) $\mathrm{st}\,(u + w) = 4$ dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$,
$\mathrm{st}\,(u + w) = 3$ dla $a = 1$,
$\mathrm{st}\,(u + w) = 1$ dla $a = -1$

6. **a)** $\operatorname{st}(u+w)=2$ dla $a=1$ i $b=0$,
$\operatorname{st}(u+w)=3$ dla $a=0$ i $b=0$,
$\operatorname{st}(u+w)=5$ dla $a\in\{0,1\}$ i $b=3$
b) $\operatorname{st}(u+w)=1$ dla $a=1$ i $b=3$,
$\operatorname{st}(u+w)=2$ dla $a=1$ i $b=0$,
$\operatorname{st}(u+w)=7$ dla $a=0$ i $b\in\{0,3\}$
c) $\operatorname{st}(u+w)=1$ dla $a=1$ i $b=3$,
$\operatorname{st}(u+w)=4$ w pozostałych przypadkach

7. **a)** $v(x)=2x^2-4x=2(x-1)^2-2$
b) $v(x)=4x$

8. **a)** $u(x,y)+w(x,y)=\frac{3}{2}x^3y-\frac{2}{3}x^2y-2xy^2$,
$u(x,y)-w(x,y)=\frac{1}{2}x^3y+\frac{4}{3}x^2y-4xy^2$,
$(u+w)(-2,3)=-8$, $(u-w)(-2,3)=76$
b) $u(x,y)+w(x,y)=$
$=\frac{5}{12}xy^3-\frac{2}{3}x^2y^2-\frac{1}{2}x^2y$,
$u(x,y)-w(x,y)=\frac{1}{12}xy^3+\frac{4}{3}x^2y^2-\frac{3}{2}x^2y$,
$(u+w)(-2,3)=-52{,}5$,
$(u-w)(-2,3)=25{,}5$

9. $P(x,y)=\frac{5}{2}xy+2y^2$

10. **a)** Q **b)** P **c)** P

11. **a)** $v(x,y,z)=-x^2yz^2+6x^2yz-2xyz^2+$
$-3xyz$
b) $v(x,y,z)=4x^3y^2z-2xy^2z^2-9xyz^2+$
$+5xyz+6yz^2$

12. $P(x,y,z)=4xy+4xz+4yz+10x+$
$+8y+6z+22$

13. **a)** $v(x)=10x^3-x^2+3{,}5$
b) $v(x)=6x^3+5x^2-3{,}5$

14. **a)** $v(x)=-5x^4+5x^2-6x$,
$v(1)=-6$, $v(-1)=6$, $v(-2)=-48$
b) $v(x)=\frac{1}{2}x$,
$v(1)=\frac{1}{2}$, $v(-1)=-\frac{1}{2}$, $v(-2)=-1$

15. **a)** $w(-2,3)=66$
b) $w(2,-4)=60$

2.3. Mnożenie wielomianów

Ć **1.** **a)** $u(x)\cdot w(x)=x^7+2x^5-x^4-x^3$,
$\operatorname{st}(u\cdot w)=7$
b) $u(x)\cdot w(x)=x^7-x^5-x^3+x^2+x-1$,
$\operatorname{st}(u\cdot w)=7$
c) $u(x)\cdot w(x)=x^3-1$, $\operatorname{st}(u\cdot w)=3$
d) $u(x)\cdot w(x)=x^4-3x^3+4x^2+3x-5$,
$\operatorname{st}(u\cdot w)=4$

2. **a)** $V(x)=x^3-x$, $x>1$
b) $V(x)=x^3+6x^2+11x+6$, $x>-1$
c) $V(x)=2x^3+4x^2-\frac{1}{2}x-1$, $x>\frac{1}{2}$
d) $V(x)=x^4+6x^3-54x-81$, $x>3$

3. **a)** $(u\cdot w)(x,y)=$
$=-4x^4+2x^3y-2x^3+6x^2y^2+x^2y-3xy^3$
b) $(u\cdot w)(x,y)=3x^3y^3-2x^3y+$
$+6x^2y^3-3x^2y-3xy^3+4xy-y$
c) $(u\cdot w)(x,y)=4x^4y^3-12x^4y^2+$
$+3x^3y^4-11x^3y^3+10x^3y^2+3x^2y^3-2x^2y^2$

4. **a)** $(u\cdot w)(x,y,z)=2x^3y^2z+2x^3yz^2+$
$-x^2y^2z-x^2yz^2+2xy^2z^2-y^2z^2$
b) $(u\cdot w)(x,y,z)=3x^3y^2z-4x^3yz^2+$
$-2x^2y^3z+4x^2y^2z^2-xy^4z+6xyz^2+$
$-8xz^3+2y^2z^2$
c) $(u\cdot w)(x,y,z)=x^3y^2z^2+2x^3yz^2+$
$-x^3yz+2xy^4z^2+4xy^3z^2-2xy^3z+$
$+3xy^2z^4+6xyz^4-3xyz^3$

Z **1.** **a)** $2x^4-7x^3+17x^2-7x$, $a_4=2$, $a_0=0$
b) $4x^4-3x^3+12x^2-6x+8$, $a_4=4$, $a_0=8$
c) $2x^6-2x^5-x^3+2x^2-x$, $a_6=2$,
$a_0=0$
d) $-2x^6-3x^5+8x^4+16x^3-3x^2-24x+6$,
$a_6=-2$, $a_0=6$
e) $2x^5-2x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{8}x-\frac{1}{4}$,
$a_5=2$, $a_0=-\frac{1}{4}$
f) $-4x^6-x^5-5\sqrt{2}x^4-\sqrt{2}x^3+6x^2+$
$+2x+2\sqrt{2}$, $a_6=-4$, $a_0=2\sqrt{2}$

2. **a)** $\operatorname{st}(w)=3$, $a_3=1$, $a_0=-1$
b) $\operatorname{st}(w)=3$, $a_3=6$, $a_0=-6$
c) $\operatorname{st}(w)=5$, $a_5=-4$, $a_0=1$
d) $\operatorname{st}(w)=3$, $a_3=1$, $a_0=-6$
e) $\operatorname{st}(w)=4$, $a_4=-6$, $a_0=2$
f) $\operatorname{st}(w)=5$, $a_5=12$, $a_0=6$

3. **a)** $v(x)=x^6-8x^5+16x^4+6x^3-24x^2+9$,
$\operatorname{st}(v)=6$
b) $v(x)=2x^4+2\sqrt{2}x^3-7x^2-4\sqrt{2}x+8$,
$\operatorname{st}(v)=4$

4. **a)** $f(x)=x^6-3x^5-21x^4+2x^2$,
$g(x)=12x^3+9x^2-6x+1$
b) $f(x)=-6x^7+2x^6+6x^5-3x^4-6x^3+$
$+3x^2-1$,
$g(x)=x^8-2x^6+3x^4+6x^3-4x^2+2$
c) $f(x)=3x^5-5x^4+6x^3-x+1$,
$g(x)=x^6-2x^5+3x^4-4x^2+4x$

5. a) $P(x) = 10x^2 + 2x - 20$, $x > 2$
b) $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 6x + 4$, $x \in (-2; -1) \cup (1; \infty)$

6. a) $v(x, y) = 4x^4 - 12x^3y^2 - 4x^3y + 7x^2y^2 - 2y^4$
b) $v(x, y) = -4x^4y^4 + x^4y^2 + 6x^3y^3 + 4x^2y^4 + 2xy^4$

7. a) $2x^3y + x^2y^2 - 8x^2y - 3xy^3 - 12xy^2$
b) $-x^3y + x^3 + 2x^2y^2 - x^2y + xy^3 - 2xy^2 - 2y^4$
c) $x^6 + x^5y + x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$
d) $2\sqrt{2}x^3 - 3\sqrt{3}y^3$

8. a) $8x^7 - 12x^4$; -20, 0, -4
b) $-6x^5 + \frac{3}{2}x^4$; $\frac{15}{2}$, 0, $-\frac{9}{2}$
c) $x^3 + 3x^2 - 4x$; 6, 0, 0
d) $2x^6 - 6x^4 - x^3 + 3x$; -6, 0, -2
e) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2$; -15, -2, 1
f) $6x^4 + x^3 - 12x^2 - 20x - 3$; 10, -3, -28

9. a) $5x^3 + 4x^2 - 9x - 8$
b) $x^3 + 2x^2 - 7x - 6$
c) $-6x^3 + 5x^2 - 16x + 16$
d) $x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 8x$

10. a) $-2x^2y + 4xy^2 - 2xz^2 - 2y^2z + 4yz^2 + 4x^2z - 7xyz$
b) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
c) $36x^2y^2 - 16x^2z^2 - 9y^4 + 4y^2z^2$
d) $x^2 + x^2y + x^2yz + x + xy - xy^2z - xy^2z^2$

2.4. Wzory skróconego mnożenia

Ć **2.** a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
d) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
e) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
f) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
g) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$
h) $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$

3. a) $20 + 14\sqrt{2}$ b) $8\sqrt{5} - 16$
c) $54 - 30\sqrt{3}$ d) $50\sqrt{2} - 88$
e) $46\sqrt{5} + 61$ f) $78\sqrt{3} - 135$
g) $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$ h) $21\sqrt{3} - 15\sqrt{6}$

5. a) $x^3 + 8$ b) $x^3 - 1$ c) $x^3 + 1$
d) $x^3 + 216$ e) $x^3 - 512$ f) $8x^6 - 1$

6. a) $x^6 - 1$ b) $-x^6 + 729$
c) $x^6 + 64$ d) $16x^4 - 200x^2 + 625$

8. a) $x^4 - 1$ b) $x^6 - 1$
c) $x^{10} - 1$ d) $x^6 - x^4 - x^2 + 1$

10. a) $x^4 - 81$ b) $x^5 - 32$

Z **1.** a) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
b) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
c) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
e) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
f) $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$
g) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$
h) $x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3}$

2. a) $5\sqrt{2} - 7$ b) $45 + 29\sqrt{2}$
c) $46\sqrt{5} - 61$ d) $12\sqrt{6} + 20\sqrt{2}$

3. a) 14 b) $100\sqrt{2}$ c) -74 d) $22\sqrt{5}$

4. a) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
b) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
c) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
d) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
e) $x^3 + x^2y + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{27}y^3$
f) $x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$
g) $3\sqrt{3}x^3 + 9x^2y + 3\sqrt{3}xy^2 + y^3$
h) $\frac{\sqrt{3}}{9}x^3 - x^2y + \sqrt{3}xy^2 - y^3$

5. a) $16x^3 + 60x^2y + 78xy^2 + 35y^3$
b) $26x^3 + 18x^2y - 18xy^2 - 26y^3$

6. a) $x^4 + 5x^3 + 125x + 625$
b) $x^4 - 5x^3 - 125x + 625$
c) $81x^4 - 27x^3 - 3x + 1$ d) $x^6 - 1$

7. a) 73 b) -1 c) 2 d) 8

8. a) $x = 27$ b) $x = -8$ c) $x = \frac{3}{2}$
d) $x = -2\sqrt[3]{17}$

9. a) $a^2 - 1$ b) $a + 1$

11. a) $2x^3 - 6x^2 + 102x - 98$
b) $19x^3 - 39x^2 + 3x - 2$
c) $2x^3 + \frac{3}{2}x$ d) $72x^2 + 54$

12. a) $2x^6 + 96x^2$ b) $2x^4 + \frac{2}{27}$
c) $16x^6 + 108x^2$ d) $6x^5 + 2x^3$

13. a) $25 - x^4$ b) $1 - x^6$

14. a) $x = -2$ b) $= -\frac{7}{8}$
c) $x = 1$ d) $x = 3$

Trójkąt Pascala

1. **a)** $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+$
$+21a^2b^5+7ab^6+b^7$
b) $a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4+$
$-21a^2b^5+7ab^6-b^7$
c) $a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+$
$+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$
d) $a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4+$
$-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$

2. $(a+b)^9=a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+$
$+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+$
$+9ab^8+b^9$,
$(a+b)^{10}=a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+$
$+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+$
$+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$

3. **a)** $12\sqrt{2}+17$ **b)** $28-16\sqrt{3}$
c) $70\sqrt{2}+99$ **d)** $208-120\sqrt{3}$

2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

Ć **1.** **a)** $w(x)=x^3(x-7)$
b) $w(x)=6x^2(3x+5)$
c) $w(x)=-2x^4(x+4)$
d) $w(x)=6x(x+1)^2$
e) $w(x)=-3x^2(x-2)^2$
f) $w(x)=-3x^4(3x-1)^2$

2. **a)** $w(x)=3x(x^2+4)$,
$x^2+4>0$ dla $x\in\mathbf{R}$
b) $w(x)=\frac{1}{4}x^4(x^2+3)$,
$x^2+3>0$ dla $x\in\mathbf{R}$
c) $w(x)=-6x^3(x^2+7)$,
$x^2+7>0$ dla $x\in\mathbf{R}$
d) $w(x)=-\sqrt{2}x^5(x^2+\sqrt{3})$,
$x^2+\sqrt{3}>0$ dla $x\in\mathbf{R}$
e) $w(x)=x^9(7x^2-5x+1)$,
$\Delta=-3<0$
f) $w(x)=x^4(\frac{1}{4}x^2+x+2)$, $\Delta=-1<0$
g) $w(x)=-x^3(4x^2-3x+7)$,
$\Delta=-103<0$
h) $w(x)=x^3(3\sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{6})$,
$\Delta=12-24\sqrt{3}<0$

3. **a)** $w(x)=x^2(x-3)(x+1)$
b) $w(x)=2x^3(x+\frac{1}{2})(x-1)$
c) $w(x)=-2x(x-\frac{3}{2})(x+2)$
d) $w(x)=20x^3(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{5})$
e) $w(x)=-2x(x-5+2\sqrt{5})(x-5-2\sqrt{5})$
f) $w(x)=x^2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2})$
g) $w(x)=2x^3\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$
h) $w(x)=4x^4(x-\frac{3}{2}+\sqrt{2})(x-\frac{3}{2}-\sqrt{2})$

Z **1.** **a)** $w(x)=4x(x-\frac{1}{6})(x+\frac{1}{6})$
b) $w(x)=16x^3(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$
c) $w(x)=2x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

2. **a)** $w(x)=x^3(x^2-2x+5)$
b) $w(x)=x^2(x-3)(x+2)$
c) $w(x)=2x^4(x-1)^2$
d) $w(x)=6x^2(x-\frac{1}{2})(x+1)$
e) $w(x)=6x(x-\frac{3}{2})(x-1)$
f) $w(x)=\frac{3}{4}x^3(x+\frac{1}{3})(x-2)$

3. **a)** $w(x)=x^2(x-2)(x-3)$
b) $w(x)=2x(x+\frac{1}{2})(x-5)$
c) $w(x)=-6x^3(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})$
d) $w(x)=x^2(x^2+3x+4)$
e) $w(x)=x(x^2+\sqrt{2}x+1)$
f) $w(x)=(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)$
g) $w(x)=(x-4)(x+1)^2(x+4)$
h) $w(x)=4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-3)^2$
i) $w(x)=x^2(x-3)(x-1)(x+2)(x+5)$
j) $w(x)=x^5(x-2)(x+3)(x^2+2x+3)$

4. **a)** $S(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

5. **a)** $w(x)=18x^3(x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3})$
b) $w(x)=4x^3(x-3)(x+2)$
c) $w(x)=4x^3(x-\frac{1}{4})(x+2)$
d) $w(x)=x^2(x+\frac{1}{2})(x-2)$
e) $w(x)=-2x^5\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$
f) $w(x)=x^3(x^2-2x+\sqrt{2})$

6. **a)** $w(x)=x(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$
b) $w(x)=x^4(x-4)^2(x+4)$
c) $w(x)=x^3(x-2)(x+2)^3$
d) $w(x)=x^2(x-2)(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$

2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

Ć **1.** **a)** $w(x)=2x^2(x+1)(x^2-x+1)$
b) $w(x)=-x^3(x+2)(x^2-2x+4)$
c) $w(x)=x(2x-1)(4x^2+2x+1)$
d) $w(x)=x^2(1-0{,}1x)(1+0{,}1x+0{,}01x^2)$
e) $w(x)=x^3(2x-3)(4x^2+6x+9)$
f) $w(x)=2x(0{,}3x+1)(0{,}09x^2-0{,}3x+1)$

2. **a)** $u(x)=(x^2+1)(x+5)$
b) $u(x)=(x-1)(x+1)(x+3)$
c) $u(x)=(x-2)(x+2)(4x+1)$

2. **d)** $u(x) = x(x^2+1)(x+3)$
e) $u(x) = (x-5)(x+5)(x+4)$
f) $u(x) = (x-1)(x+1)(\sqrt{5}x-1)$
g) $u(x) = (2x-1)(4x^2+2x+1)(x^2+2)$
h) $u(x) = x^2(x^2+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})$

Z **1.** **a)** $w(x) = x(x+3)(x^2-3x+9)$
b) $w(x) = x^2(x-2)(x^2+2x+4)$
c) $w(x) = -x(x+4)(x^2-4x+16)$
d) $w(x) = -\frac{1}{8}x^2(x-8)(x^2+8x+64)$
e) $w(x) = 27x^3(x+\frac{2}{3})(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9})$
f) $w(x) = 125x^5(x-\frac{1}{5})(x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{25})$

2. **a)** $w(x) = (x+2)(x-2)(x^2+2x+4)$
b) $w(x) = (2x-1)(7x^2+2)$
c) $w(x) = (x-3)(2x^2+5)$
d) $w(x) = \frac{1}{6}(3x-1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$
e) $w(x) = \frac{1}{3}(2x-9)(x-3)(x+3)$
f) $w(x) = (x-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2})$

3. **a)** $w(x) = (x+1)^3(x-1)^2$
b) $w(x) = 4(x-2)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
c) $w(x) = 3(x+\frac{2}{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\cdot$
$\cdot(x^2+1)$

4. **a)** $w(x) = 20x^2(x-\frac{2}{5})(x-1)(x+6)(x^2+2)$
b) $w(x) = -\frac{1}{4}x^2(x-7)(x-2)(x+2)\cdot$
$\cdot(x+4)^2$
c) $w(x) = 7x^2(x-2)(x-1)^2(x+2)(x+3)\cdot$
$\cdot(x^2+x+1)$
d) $w(x) = 6x^2\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(x-\frac{3}{2})(x^2+2)$

5. **a)** $w(x) = 6x^2(x-1)(x^2+x+1)$
b) $w(x) = 2x^3(x-2)(x^2+2x+4)$
c) $w(x) = x^4(x-4)(x^2+4x+16)$

6. **a)** $w(x) = (x+3)(x^2+6)$
b) $w(x) = (x-2)(3x^2+4)$
c) $w(x) = 9(x-1)(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3})$
d) $w(x) = 5(x+3)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
e) $w(x) = x(x+2)(x-3)(x^2+3x+9)$
f) $w(x) = \frac{1}{8}(x+2)(x-2)^2(x^2+2x+4)$

2.7. Równania wielomianowe

Ć **1.** **a)** $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$
b) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
c) $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$
d) $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$
e) $x = -6$, $x = 0$
f) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$

2. **a)** $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$
b) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 5$
c) $x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$ **d)** $x = 0$
e) $x = -1-\sqrt{5}$, $x = 0$, $x = -1+\sqrt{5}$
f) $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

3. u: $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, wykres C;
v: $x = -3$, $x = 0$, $x = 4$, wykres B;
w: $x = -4$, $x = 0$, $x = 2$, wykres A

4. **a)** $x = 9$ **b)** $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$
c) $x = -5$, $x = 0$
d) $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$, $x = \frac{5}{3}$
e) $x = -2$, $x = 2$ **f)** $x = 3\sqrt{2}$

Z **1.** **a)** $x = 0$, $x = 2$
b) $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$
c) $x = -27$, $x = 0$ **d)** $x = 0$, $x = 2$
e) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
f) $x = -\sqrt{5}$, $x = 0$, $x = \sqrt{5}$

2. **a)** $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$
b) $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$
c) $x = -1$, $x = 0$, $x = 5$
d) $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$
e) $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$
f) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{2}{5}$
g) $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$
h) $x = -6$, $x = 0$, $x = 2$
i) $x = -4$, $x = -1$, $x = 0$
j) $x = 0$, $x = 1$
k) $x = -6$, $x = 0$, $x = 3$ **l)** $x = 0$

3. **a)** $x = 3$ **b)** $x = -\sqrt{3}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$
c) $x = -9$, $x = 1$ **d)** $x = -1$, $x = 1$
e) $x = -1$, $x = 2$ **f)** $x = -4$, $x = 1$
g) $x = -\sqrt{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2}$
h) $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = 2$
i) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. **a)** $x = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x = -1$, $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$
b) $x = -2$, $x = 1$
c) $x = -3$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

5. $(-2,-7)$, $(2,1)$, $(3,3)$

6. **a)** $(-3,-10)$, $(0,2)$, $(3,14)$
b) $(-\sqrt{2}, 1-3\sqrt{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$, $(\sqrt{2}, 1+3\sqrt{2})$
c) $(-1,-7)$, $(1,1)$, $(3,9)$

7. **a)** $(0,-3)$, $(2,-3)$
b) $(-3, \frac{15}{2})$, $(0,-3)$, $(2,-\frac{5}{3})$
c) $(-2,-7)$, $(2,-3)$

10. **a)** $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$
c) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x = 0$
d) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
e) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
f) $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$

11. **a)** $x = -5$, $x = -1$, $x = 0$
b) $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$
c) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = 0$, $x = -1 + \sqrt{2}$
d) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
e) $x = 0$
f) $x = 0$, $x = \sqrt{2}$

12. **a)** $x = -3$, $x = 3$ **b)** $x = \frac{5}{2}$
c) $x = -2\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = 2\sqrt{2}$

2.8. Dzielenie wielomianów

Ć **1.** **a)** $2x - 1$ **b)** $4x - 1$
c) $x - 2$ **d)** $9x + 12$

2. **a)** $x - 7$, reszta 3
b) $2x + 3$, reszta 5
c) $x - 3$, reszta 4
d) $4x + 4$, reszta 5

3. **a)** $x^2 + 3x - 5$, reszta 4
b) $x^2 - x + 1$, reszta 1
c) $2x^3 + x^2 - x$
d) $3x^3 + 3x^2 - 6x - 6$, reszta -2

4. **a)** $w(x) = (x^2 + 1)(x - 2) + 2$
b) $w(x) = (-2x^2 + 9x - 27) \cdot$
$\cdot (x + 3) + 85$
c) $w(x) = (x^3 + 2x^2 - x)(x - 1)$
d) $w(x) = (3x^3 - 6x^2 + 11x - 13)(x + 2) + 25$

Z **1.** **a)**, **c)** podzielny **b)**, **c)**, **d)** niepodzielny

2. **a)** $w(x) = (x^2 - 3x + 12)(x + 3) - 29$
b) $w(x) = (3x^3 + 3x^2 + 2x + 2)(x - 1) + 2$
c) $w(x) = (x^2 + 2x - 1)(x + 6) + 2$
d) $w(x) = (2x^2 + 6x)(x + \frac{1}{2}) - 2$

3. **a)** poprawnie
b), **c)** niepoprawnie

4. **a)** $w(x) = (2x^2 + 3x + \frac{1}{2})(2x + 1) - 9\frac{1}{2}$
b) $w(x) = (2x^2 - x)(3x + 4) - 1$
c) $w(x) = (2x^2 - 4x + 2)(\frac{1}{2}x + 3) - 4$

5. **a)** $x^2 - x - 3$, reszta 2
b) $x^3 - x^2 + 2x - 1$, reszta -4

6. **a)** $w(x) = (x^2 + 5x + 9)(x - 2) + 23$
b) $w(x) = (2x^2 - 2x + 7)(x + 3) - 23$

Dzielenie wielomianu przez trójmian kwadratowy

1. **a)** $w(x) = (-3x - 1)(x^2 - 4) - 9x - 8$
b) $w(x) = (2x^2 - 5x + 5)(x^2 + x) - 10x + 2$
c) $w(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 7$
d) $w(x) = (4x^2 + 4)(x^2 - 1) - 2x + 7$

2.9. Twierdzenie Bézouta

Ć **2.** **a)**, **b)**, **d)** 0 **c)** -1

3. **a)**, **b)** jest **c)**, **d)** nie jest

4. **a)** $w(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)$
b) $w(x) = (x - 1)\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$
c) $w(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 4)$
d) $w(x) = (x + 2)(x - 3)^2$

Z **1.** **a)** 0 **b)** 2 **c)** 0

2. **a)** $w(x) = (x - 7)(x - 1)(x + 2)$
b) $w(x) = 2(x + 2)(x + \frac{3}{2})(x + 1)$
c) $w(x) = (x + 5)(x^2 - 3x + 4)$
d) $w(x) = 2(x + 1)(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
e) $w(x) = (x - 4)(x + \sqrt{5} + 2)(x - \sqrt{5} + 2)$

3. **a)** 2, $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$
b) -1, -3, $\frac{1}{2}$
c) 1, $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$, $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$
d) 2, -2, $\frac{1}{2}$

4. **a)** $m = 7$
b) $m = -\sqrt{5}$, $m = \sqrt{5}$
c) $m = -2$, $m = 3$

5. **a)**, **c)** podzielny
b) niepodzielny

6. **a)** 10 **b)** 6 **c)** 148 **d)** -2

7. **a)** $w(x) = 2(x + 4)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cdot$
$\cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
b) $w(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x^2 + x + 1)$
c) $w(x) = 6(x - 3)(x + \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3})$
d) $w(x) = 4(x + 3)(x - \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2})$
e) $w(x) = 4(x + 2)(x - 1)(x + \frac{1}{4})$

2.10. Pierwiastki całkowite wielomianu

Ć **1.** a) dzielniki: $-1, 1, -3, 3$;
pierwiastek całkowity: 1
b) dzielniki: $-1, 1, -2, 2, -4, 4$;
pierwiastki całkowite: $-4, 1$
c) dzielniki: $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$;
pierwiastki całkowite: $-2, 1, 3$
d) dzielniki: $-1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10$;
brak pierwiastków całkowitych

2. a) $x = 1$, $x = 4$ b) $x = -2$
c) $x = -3$, $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$
d) $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$

3. a) $x = 1$, $x = 3$
b) $x = -3$, $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$
c) $x = -1$, $x = 5$
d) $x = -3$, $x = 1$, $x = 2$ e) $x = 1$
f) $x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $x = -2$,
$x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$, $x = 2$

Z **1.** a) $x = -5$, $x = 1$
b) $x = -2$, $x = -1$, $x = 3$
c) $x = -3$, $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$
d) $x = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$, $x = 1$, $x = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$
e) $x = -4$ f) $x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$
g) $x = 3$
h) $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = 3$

2. a) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$
b) $x = 1$ c) $x = 1$, $x = 2$
d) $x = -1$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$
e) $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x = -2$, $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x = 3$
f) $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$

3. a) $w(x) = 2(x-1)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$
b) $w(x) = (x+2)\left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$
c) $w(x) = (x-3)(x+5)(x^2+x+1)$
d) $w(x) = (x-1)(x-2)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

4. a) $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = 3$
b) $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$, $x = 3$
c) $x = 2$
d) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = 2$
e) $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x = 2$, $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
f) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$, $x = 4$

5. 52

6. pierwiastki:
a) $-2, 1, 2$ b) $1, 2, 3$
c) 1 d) $-2, 1$

7. a) $x = 1$
b) $x = -2 - \sqrt{2}$, $x = -1$, $x = -2 + \sqrt{2}$
c) $x = -5$
d) $x = -3$, $x = -\frac{4}{3}$, $x = 1$

8. a) $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$
b) $x = -1$, $x = 2$
c) $x = -3$, $x = 1$
d) $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$

Pierwiastki wymierne wielomianu

1. a) $-4, -2, 0, 2, 4$
b) $-2, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 2$

2. a) $x = -\frac{1}{2}$
b) $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$, $x = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$, $x = \frac{1}{2}$
d) $x = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$

2.11. Wielomiany – zastosowania

Ć **1.** $x = 2$

2. a) $V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$,
$D = (0; 15)$
b) 5 cm × 20 cm × 30 cm
c) nie jest

3. a) $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, $D = (0; 6)$
b) kolejno uzupełniamy: 128, 108, 64
c) $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup \langle 4; 6)$
d) $x = 4 - 2\sqrt{3}$, $x = 4$

Z **1.** $V(x) = -4x^3 + 28x^2$, $D = (0; 7)$;
280 cm^2 lub $56(1 + \sqrt{11})$ cm^2

2. a) $V(x) = -2x^3 + 6x^2 + 80x$, $D = (0; 5)$
b) $x = 3$

3. $110{,}125\pi$ cm^2

4. a) $V(x) = -2x^3 + 10x^2$, $D = (0; 5)$
b) $x = 3$, $x = 1 + \sqrt{7}$

5. 4 dm × 8 dm × 4 dm

2.12. Zagadnienia uzupełniające

1. **I.** **a)** $-1,\ 0,\ 2$
b) $(-1;0)\cup(2;\infty)$
c) $\langle -1;0\rangle\cup\langle 2;\infty)$
II. **a)** $-1,\ 0,\ 2$
b) $(-\infty;-1)\cup(0;2)$
c) $(-\infty;-1\rangle\cup\langle 0;2\rangle$
III. **a)** $0,\ 2$
b) $(0;2)\cup(2;\infty)$
c) $\langle 0;\infty)$
IV. **a)** $0,\ 2$
b) $(-\infty;0)$
c) $(-\infty;0\rangle\cup\{2\}$
V. **a)** $-1,\ 1$
b) $(1;\infty)$
c) $\{-1\}\cup\langle 1;\infty)$
VI. **a)** $-1,\ 1$
b) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)$
c) $(-\infty;1\rangle$

2. **I.** $f(x)=0$ dla $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$,
$f(x)\geqslant 0$ dla $x\in(-\infty;-2\rangle\cup\langle -1;0\rangle\cup\cup\langle 1;\infty)$
II. $g(x)=0$ dla $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $g(x)\geqslant 0$ dla $x\in\langle -2;-1\rangle\cup\langle 0;1\rangle$
III. $h(x)=0$ dla $x=-2$, $x=0$, $x=1$,
$h(x)\geqslant 0$ dla $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 1;\infty)$
IV. $k(x)=0$ dla $x=-2$, $x=0$, $x=1$,
$k(x)\geqslant 0$ dla $x\in\{-2\}\cup\langle 0;1\rangle$
V. $m(x)=0$ dla $x=0$, $x=2$,
$m(x)\geqslant 0$ dla $x\in\mathbf{R}$
VI. $n(x)=0$ dla $x=0$, $x=2$,
$n(x)\geqslant 0$ dla $x\in\{0,2\}$

3. A h, B f, C g

4. **a)** $w(3)=4$ **b)** $w(2)=21$

6. **a)** $6x^2+15x+35$, reszta 114
b) $2x^2-10$, reszta 11
c) x^3-4x^2-2x-4, reszta -16
d) x^3-2x^2-x+1, reszta -4

Zestaw powtórzeniowy I

1. **a)** $u(x)=-2x^2+3x-1$, $\mathrm{st}\,(u)=2$
b) $u(x)=-2x^5-\frac{1}{2}x^4-2x^3+1$, $\mathrm{st}\,(u)=5$

2. **a)** $x^3+7x^2+16x+12$ **b)** $x^3+x^2+\frac{8}{3}x-\frac{4}{27}$
c) $54x^3+72x$ **d)** $-12x^5-16x^3$

3. **a)** 0 **b)** 63 **c)** -2 **d)** 3

4. **a)** $w(x)=3x^2(x-1)(x+1)$
b) $w(x)=2x(x+1)^2$
c) $w(x)=x^4(x+1)(x+6)$
d) $w(x)=5x(x-1)^2(x+1)^2$
e) $w(x)=-3x(x-\sqrt{5})^2(x+\sqrt{5})^2$
f) $w(x)=32x^2(x-\frac{1}{2})^2(x+\frac{1}{2})^2$

5. **a)** $a=4$, $b=6$ **b)** $a=-2$, $b=-\frac{5}{6}$

6. **a)** $x=0$ **b)** $x=-4$, $x=0$, $x=1$
c) $x=0$, $x=3$, $x=4$
d) $x=-\frac{1}{4}$, $x=0$, $x=\frac{1}{5}$
e) $x=0$, $x=\frac{1}{2}$ **f)** $x=-1$, $x=0$, $x=\frac{1}{2}$

7. **a)** $\{1\}$ **b)** $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

8. **a)** $w(x)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2)$,
pierwiastki: $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2
b) $w(x)=x(x+2)(x+1)(x-2)$,
pierwiastki: -2, -1, 0, 2
c) $w(x)=5(x+\sqrt{3})(x+\frac{1}{5})(x-\sqrt{3})$,
pierwiastki: $-\sqrt{3}$, $-\frac{1}{5}$, $\sqrt{3}$
d) $w(x)=5(x-\frac{3}{5})(25x^2+15x+9)$,
pierwiastek: $\frac{3}{5}$
e) $w(x)=27x(x+\frac{1}{6})(x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{36})$,
pierwiastki: $-\frac{1}{6}$, 0
f) $w(x)=-14x\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
pierwiastki: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. **a)** $x=2$; 0
b) $x=-5$, $x=-1$, $x=1$; 1
c) $x=-2$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=2$; 0
d) $x=-3$, $x=1$, $x=3$; 1
e) $x=-\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{9}$, $x=\frac{1}{3}$; 3
f) $x=-1$, $x=2$; 0
g) $x=-2$, $x=-\frac{1}{8}$; 1
h) $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$; 2

10. **a)** $m=-\frac{5}{8}$ **b)** $m=\frac{11}{3}$
c) $m=-1$, $m=3$

11. **a)** $u(x)=(x-3)(x^2+4)$,
$v(x)=(x-3)(x-2)(x+2)$, 3 pierwiastki
b) $u(x)=(x-2)(x-3)(x+3)$,
$v(x)=(x+1)(x-3)(x+3)$, 4 pierwiastki
c) $u(x)=(x+2)(x-1)(x+1)$,
$v(x)=2(x-\frac{1}{2})(x-2)(x+2)$,
5 pierwiastków

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $x^2+3x+10$, reszta 31
b) $x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{5}{8}$, reszta $\frac{21}{16}$

2. a) $w(x)=(x+2)(x^2-2x+6)-7$
b) $w(x)=(x+2)(x^2+1)-1$
c) $w(x)=(x+2)(4x^3-x)$
d) $w(x)=(x+2)(x^2+x-11)+20$

3. a) $x=3$, $x=4$
b) $x=-1-\sqrt{2}$, $x=-1+\sqrt{2}$
c) nie ma więcej pierwiastków

4. a) $x=1$, $x=2$, $x=3$ **b)** $x=7$
c) $x=-3$ **d)** $x=3$ **e)** $x=5$
f) $x=-1$, $x=-\frac{1}{5}$, $x=\frac{2}{3}$
g) $x=-2$ $x=-\sqrt{2}$, $x=1$, $x=\sqrt{2}$
h) $x=-\sqrt{5}$, $x=-1$, $x=2$, $x=\sqrt{5}$

5. a) $x=2-\sqrt{7}$, $x=2$, $x=2+\sqrt{7}$
b) $x=1$
c) $x=-2-\sqrt{2}$, $x=-2+\sqrt{2}$, $x=1$
d) $x=-3$, $x=1$ **e)** $x=-1$, $x=1$
f) $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=3$

6. a) $a=0$ **b)** $a=-3$, $a=0$, $a=3$

7. a) $a=6$ **b)** $a=-8$

8. $V(x)=x^3+3x^2-4x$, $D=(1;\infty)$,
$V(x)=12$ dla $x=2$

10. ściana o krawędziach: $(2\sqrt{3}-3)$ m, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m;
$P=\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\text{m}^2\approx 0{,}4\text{ m}^2$

11. $(9+3\sqrt{3})$ dm^2

12. a) 6 dm **b)** 14 dm

Zadania testowe

1. A **2.** B **3.** C **4.** D **5.** D **6.** D **7.** D
8. C **9.** B **10.** A

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. 54

2. $a=15$, $b=-21$

3. $x=-1$

4. -2

5. $V(x)=2x^3+4x^2-16x$, $D=(2;\infty)$,
$V(x)=32$ dla $x=2\sqrt{2}$

7. $(0,0)$, $(-3,-3)$, $(3,3)$

9. $(-3,0)$, $(3,0)$, $(3,\frac{13}{2})$, $(-3,\frac{13}{2})$

Proporcjonalność odwrotna

1. $a=18$, $y=\frac{18}{x}$

2. a) $B(2,3)$, $C(3,2)$, $D(4,\frac{3}{2})$, $E(6,1)$
b) kolejno uzupełniamy: 8, 4, $2\frac{2}{3}$, 2, $1\frac{3}{5}$

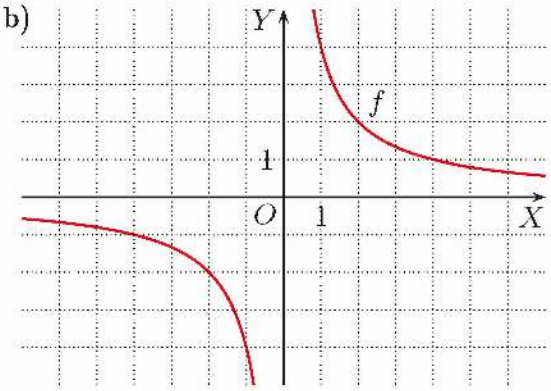
3. a) $y=\frac{18}{x}$ **b)** $y=\frac{4}{x}$
c) $y=\frac{9}{4x}$ **d)** $y=\frac{1}{x}$

4. a) g **b)** f **c)** h **d)** g **e)** g **f)** h

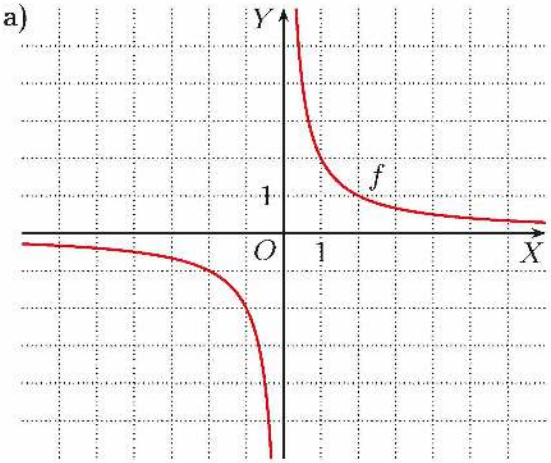
3.1. Wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$

Ć **1.** a) $A(\frac{1}{2},8)$, $B(1,4)$, $C(2,2)$, $D(4,1)$, $E(8,\frac{1}{2})$

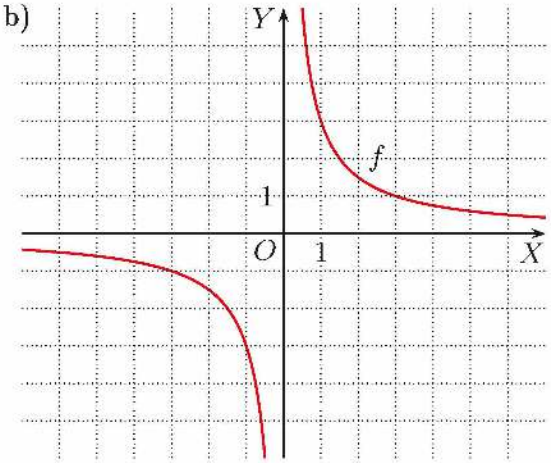
b)



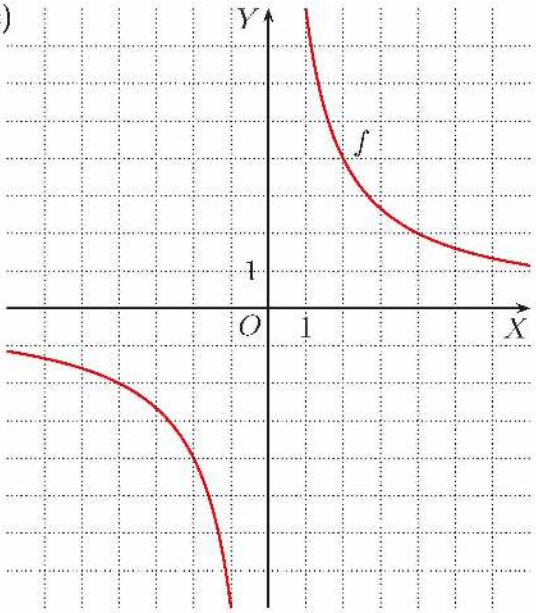
2. a)



b)



2. c)



3. a) $f(1)=\frac{1}{2}$, $g(1)=2$, $h(1)=4$, $k(1)=6$
b) niebieski – f, zielony – g,
czerwony – h, brązowy – k
c) $A \quad k$, $B \quad g$, $C \quad f$, $D \quad g$, $E \quad h$

Z **1.** a) $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ b) $f(D)=(-4;0)$
c) $f(D)=\left\langle\frac{1}{2};2\right\rangle$

2. a) wartość najmniejsza: 3,
wartość największa: 6
b) wartość najmniejsza: -4,
wartość największa: -2
c) wartość najmniejsza: $\frac{1}{4}$,
wartość największa: $\frac{1}{2}$
d) wartość najmniejsza: -5,
wartość największa: $-\frac{5}{2}$

3. a) czerwony – f, zielony – g,
niebieski – h
b) P, Q c) $\langle 2;6\rangle$

4. a) $a=-3$, $P(1,-3)$,
$f(x)>-3$ dla $x\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$
b) $a=-6$, $P(2,-3)$,
$f(x)>-3$ dla $x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$

5. a) $f(x)=\frac{2}{x}$ b) $f(x)=\frac{1}{3x}$
c) $f(x)=-\frac{4}{x}$ d) $f(x)=-\frac{2}{x}$

6. a) $a=-8$ b) $a=-64$
c) $a=-\frac{2}{7}$ d) $a=125$

7. a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$
b) $f(x)=\frac{6}{x}$, $g(x)=-\frac{6}{x}$
c) $f(x)=\frac{1}{2x}$, $g(x)=-\frac{1}{2x}$

3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ wzdłuż osi OY

Ć **1.** a) $g(D)=\mathbf{R}\setminus\{3\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=3$
b) $g(D)=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=-1$
c) $g(D)=\mathbf{R}\setminus\{-3\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=-3$

2. A – h, B – g, C – f

Z **1.** a) $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=-1$
b) $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{-2\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=-2$
c) $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{1\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=1$
d) $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{3\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=3$
e) $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{-3\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=-3$
f) $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{1\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=1$

2. a) $g(x)=\frac{2}{x}+2$, $D_g=\mathbf{R}\setminus\{0\}$,
$g(D_g)=\mathbf{R}\setminus\{2\}$, asymptoty: $x=0$, $y=2$
b) $g(x)=-\frac{4}{x}-2$, $D_g=\mathbf{R}\setminus\{0\}$,
$g(D_g)=\mathbf{R}\setminus\{-2\}$,
asymptoty: $x=0$, $y=-2$

3. a) $a=1$, $(-2,2)$, $(-1,3)$, $(1,-1)$, $(2,0)$
b) $a=2$, $(-2,3)$, $(-1,4)$, $(1,0)$, $(2,1)$
c) $a=-2$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(1,-4)$,
$(2,-3)$

4. a) $q=-1$ b) $q=-\frac{5}{6}$
c) $q=-1\frac{5}{18}$ d) $q=2\sqrt{3}$

5. a) $f(x)=-\frac{1}{x}+5$, $f(D_f)=\mathbf{R}\setminus\{5\}$
b) $f(x)=-\frac{1}{x}-3$, $f(D_f)=\mathbf{R}\setminus\{-3\}$
c) $f(x)=-\frac{1}{x}+3$, $f(D_f)=\mathbf{R}\setminus\{3\}$

6. $a=3$ a) $g(x)=\frac{3}{x}-3$
b) $g(x)=\frac{3}{x}-1$ c) $g(x)=\frac{3}{x}+1$

3.3. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ wzdłuż osi OX

Ć **1.** a) $D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$, malejc w $(-\infty;2)$
i w $(2;\infty)$, asymptoty: $x=2$, $y=0$
b) $D=\mathbf{R}\setminus\{4\}$, maleje w $(-\infty;4)$
i w $(4;\infty)$, asymptoty: $x=4$, $y=0$

1. **c)** $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
rośnie w $(-\infty; 1)$ i w $(1; \infty)$,
asymptoty: $x = 1$, $y = 0$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$,
asymptoty: $x = 2$, $y = 0$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$,
asymptoty: $x = -1$, $y = 0$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
maleje w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty)$,
asymptoty: $x = -2$, $y = 0$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
rośnie w $(-\infty; -3)$ i w $(-3; \infty)$,
asymptoty: $x = -3$, $y = 0$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
maleje w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty)$,
asymptoty: $x = -2$, $y = 0$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$,
rośnie w $(-\infty; -4)$ i w $(-4; \infty)$,
asymptoty: $x = -4$, $y = 0$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$,
maleje w $(-\infty; -4)$ i w $(-4; \infty)$,
asymptoty: $x = -4$, $y = 0$

Z **1.** a) $g(x) = \frac{3}{x+1}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = -1$, $y = 0$
b) $g(x) = \frac{4}{x+3}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = -3$, $y = 0$
c) $g(x) = -\frac{2}{x-3}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
asymptoty: $x = 3$, $y = 0$
d) $g(x) = -\frac{1}{x-2}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
$g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, asymptoty: $x = 2$, $y = 0$

2. a), c) nie należy **b)**, d) należy

3. a) $f(x) = \frac{3}{x-2}$, $f(1\frac{3}{4}) = -12$, $f(-4) = -\frac{1}{2}$
b) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$, $f(1\frac{3}{4}) = 8$, $f(-4) = \frac{1}{3}$

4. a) asymptoty wykresu funkcji f: $x = 2$, $y = 0$, asymptoty wykresu funkcji g: $x = 2$, $y = 1$
b) asymptoty wykresu funkcji f: $x = -1$, $y = 0$, asymptoty wykresu funkcji g: $x = -1$, $y = -2$

5. a) 6 punktów **b)**, d), **f)** 4 punkty
c) 8 punktów **e)** 2 punkty

6. a) $y = \frac{2}{x+1} + 2$ **b)** $y = \frac{3}{2(x-3)} - 1$
c) $y = -\frac{1}{3(x-2)} + 1$ **d)** $y = -\frac{4}{3(x+1)} - 2$

7. a) $g(x) = \frac{3}{x-2}$, maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$, asymptoty: $x = 2$, $y = 0$
b) $g(x) = \frac{3}{x+1}$, maleje w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$, asymptoty: $x = -1$, $y = 0$

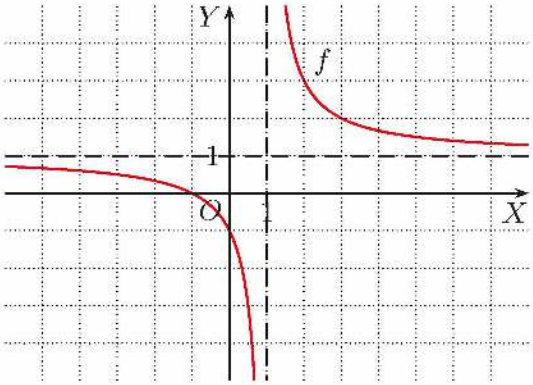
8. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{4\}$,
maleje w $(-\infty; 4)$ i w $(4; \infty)$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
rośnie w $(-\infty; -3)$ i w $(-3; \infty)$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$

9. a) $f(x) = \frac{2}{x-1}$ **b)** $f(x) = \frac{2}{x+3}$
c) $f(x) = \frac{2}{x-\frac{1}{2}}$ **d)** $f(x) = \frac{2}{x+\frac{3}{2}}$

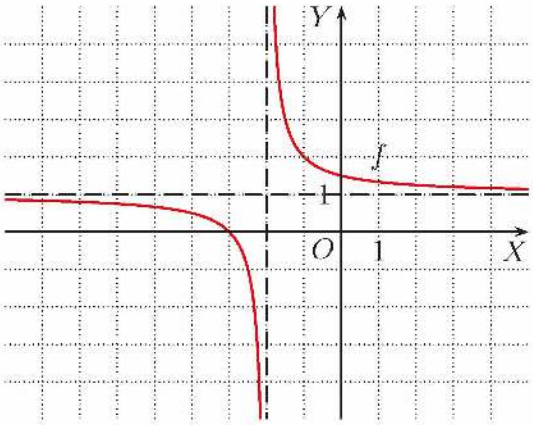
Funkcja homograficzna

1. a) $f(x) = \frac{3x+7}{x+1}$ **b)** $f(x) = \frac{4x-22}{x-6}$
c) $f(x) = \frac{-6x-15}{x+2}$

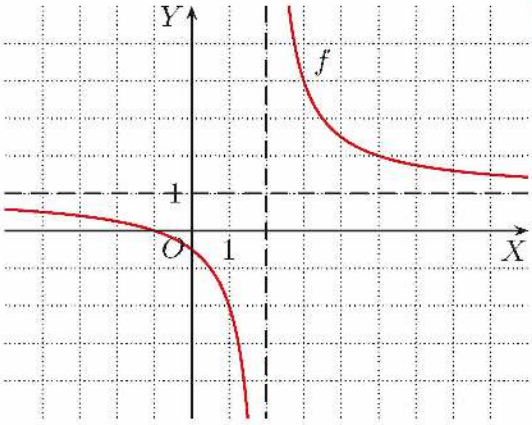
2. a) $f(x) = \frac{2}{x-1} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$



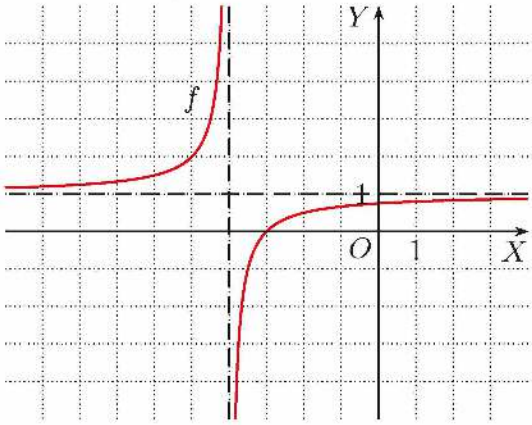
b) $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$



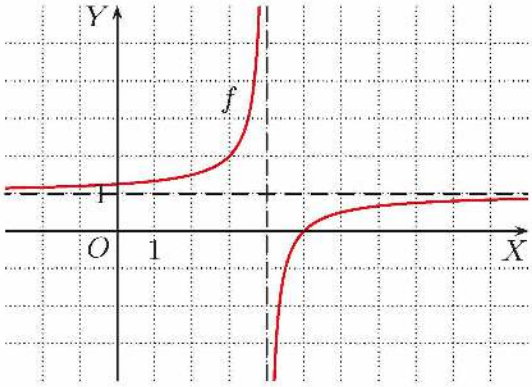
2. c) $f(x) = \frac{3}{x-2} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$



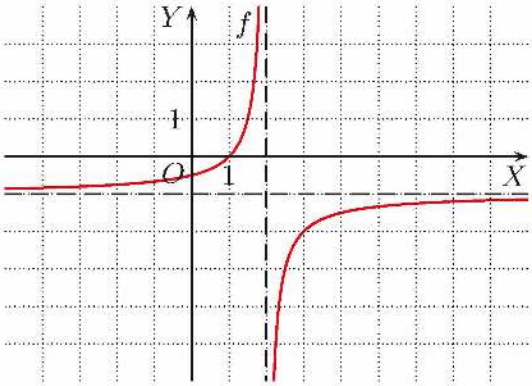
3. a) $f(x) = -\frac{1}{x+4} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$



b) $f(x) = -\frac{1}{x-4} + 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{4\}$



c) $f(x) = -\frac{1}{x-2} - 1$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$



3.4. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne

Ć **1.** a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ b) $D = \mathbf{R} \setminus \{5\}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$ d) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{7}{2}\}$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
dla $x = 1$: 2, dla $x = -1$: 0
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
dla $x = 1$: -3, dla $x = -1$: $-\frac{1}{2}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$,
dla $x = 1$: $-\frac{1}{2}$, dla $x = -1$: $\frac{1}{2}$
d) $D = \mathbf{R}$, dla $x = 1$: 1, dla $x = -1$: $\frac{1}{2}$

3. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $-x - 3$ b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $3x$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$, $\frac{2x}{x-5}$ d) $x \in \mathbf{R}$, x
e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{x+1}{x^3}$
f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $-\frac{x+2}{x}$
g) $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $\frac{x^2}{x-3}$
h) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x+2}{(x-2)(x^2+4)}$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, $f(0) = 2$, $f(-1) = \frac{6}{5}$, $f(1) = 2$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $f(0) = -1$, $f(-1) = f(1) = -\frac{5}{3}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(0) = 1$, $f(-1) = \frac{1}{3}$, $f(1) = 5$

5. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x + 2$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$, $f(x) = x$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x^2 - 4$

6. a) $\langle 8; \infty)$ b) $(-\infty; 3\rangle$ c) $(-\infty; 0\rangle$
d) $(0; \infty)$ e) $(2; \infty)$ f) $(-2; \infty)$
g) $(1; 6\rangle$ h) $\langle -6; 0) \cup (0; 3)$
i) $(-2; 2) \cup (2; 4\rangle$

7. a) $D = (-2; 2) \cup (2; \infty)$, nie ma
b) $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 0\rangle$, $f(0) = 0$
c) $D = (-2; 1\rangle$, $f(1) = 0$
d) $D = (3; \infty)$, nie ma
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, nie ma
f) $D = \{1\}$, $f(1) = 0$

8. a) $D = \mathbf{R}$, $f(-4) = f(4) = 0$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$,
nie ma miejsc zerowych
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $f(0) = 0$

Z **1.** a), d) tak b), c) nie

2. a) $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ c) $\mathbf{R} \setminus \{-3\}$
d) $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$ e) $\mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}$
f) $\mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
g) $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ h) $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$

3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$ b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-9, 0\}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$ f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{3}{4}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$, $\frac{4}{21}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{5}{4}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0\}$, -4
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2\}$, $-\frac{15}{2}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$, $-\frac{1}{3}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, 1
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{5\}$, $-\frac{1}{2}$

5. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(-3) = -8$, $f(1) = 0$, $f(3) = \frac{8}{5}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, $f(-3) = -\frac{9}{5}$, $f(1) = -1$, $f(3) = 0$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $f(-3) = \frac{3}{5}$, $f(1) = -1$, $f(3) = 3$
d) $D = \mathbf{R}$, $f(-3) = -1$, $f(1) = \frac{3}{5}$, $f(3) = 1$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, $f(-3) = 5$, $f(1) = -11$, $f(3) = 5$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $f(-3) = 0$, $f(1) = -\frac{4}{3}$, $f(3) = \frac{54}{5}$

6. a) $\langle 1; \infty)$ b) $(-3; \infty)$
c) $\langle -1; 5)$ d) $(-4; 2\rangle$

7. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4}{x}$,
dla $x = \frac{1}{2}$: 8, dla $x = -\frac{3}{2}$: $-2\frac{2}{3}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{8}{x}$,
dla $x = \frac{1}{2}$: 16, dla $x = -\frac{3}{2}$: $-\frac{16}{3}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, 4,
dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{3}{2}$: 4
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{5\}$, $\frac{1}{2}$,
dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{3}{2}$: $\frac{1}{2}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{x+1}{2}$,
dla $x = \frac{1}{2}$: $\frac{3}{4}$, dla $x = -\frac{3}{2}$: $-\frac{1}{4}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x - \frac{1}{2}$,
dla $x = \frac{1}{2}$: 0, dla $x = -\frac{3}{2}$: -2
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $x + 3$,
dla $x = \frac{1}{2}$: $3\frac{1}{2}$, dla $x = -\frac{3}{2}$: $1\frac{1}{2}$
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{2}{x-3}$,
dla $x = \frac{1}{2}$: $-\frac{4}{5}$, dla $x = -\frac{3}{2}$: $-\frac{4}{9}$

8. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}$, $\frac{x}{x-4}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $\frac{2}{2x+1}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{x-2}{x+2}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $\frac{x+3}{x-3}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $\frac{1}{x-2}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $\frac{2}{x-3}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $\frac{1}{x-1}$ h) $D = \mathbf{R}$, $x - 3$

Działania na liczbach wymiernych

1. a) 1 b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $4\frac{4}{5}$
e) -8 f) 36 g) $-1\frac{1}{4}$ h) $-1\frac{1}{2}$

2. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{25}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{7}{3}$

3. a) 2 b) $4\frac{7}{12}$ c) $\frac{25}{36}$ d) $-\frac{1}{18}$ e) $\frac{59}{75}$ f) $-\frac{1}{60}$

4. a) $m = -\frac{1}{6}$ b) $m = \frac{7}{20}$ c) $m = -\frac{11}{24}$
d) $m = -1$ e) $m = 1\frac{1}{8}$ f) $m = 14\frac{4}{5}$

5. a) 11 b) 11 c) -147 d) 1

6. a) 11 b) 16 c) 0 d) 1 e) 3 f) 4

7. a) $x = \frac{19}{15}$ b) $x = \frac{5}{18}$ c) $x = \frac{17}{10}$
d) $x = \frac{7}{3}$ e) $x = \frac{43}{2}$ f) $x = \frac{1}{2}$

8. $x + y = \frac{5}{4}$, $x - y = \frac{11}{4}$, $xy = -\frac{3}{2}$, $\frac{x}{y} = -\frac{8}{3}$

9. a) 663 i 867 b) 30, 32 i 72

3.5. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

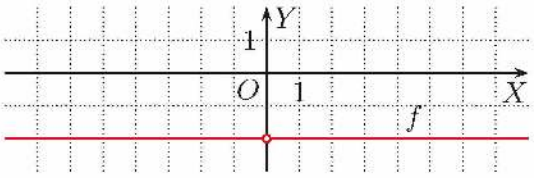
Ć **1.** a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$, 4
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $-\frac{2}{x}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$, $-\frac{(2x\ \ 1)(x\ \ 5)}{x}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$, $-\frac{x\ 3}{6(x-2)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x-2}{(x+2)^2}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}$, $-\frac{x+1}{2(x-1)}$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, 8 b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $-\frac{3}{2}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $\frac{4}{3}$ d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$, 4
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-7\}$, $-\frac{1}{25}$ f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, $\frac{10}{9}$

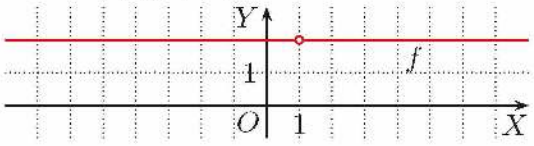
3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $8x$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$, $(x-2)(x-1)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $\frac{x-3}{3x(x+3)}$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 5\}$, $-\frac{x^2+5x+25}{x+1}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $x^2 + 1$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -3, 0\}$, $\frac{x+3}{x}$

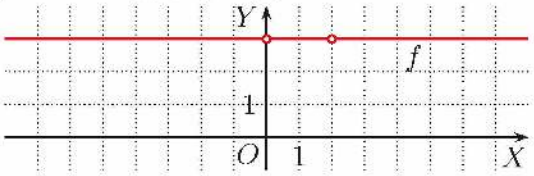
5. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = -2$



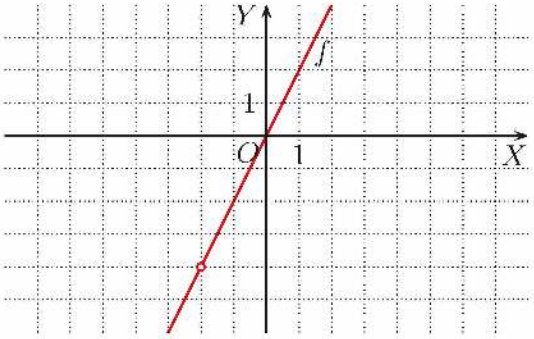
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = 2$



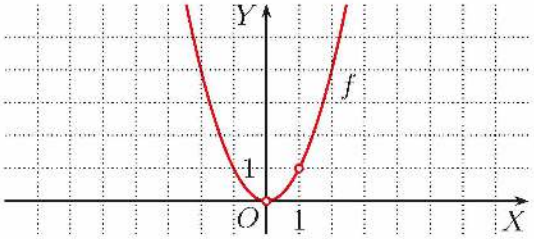
5. c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $f(x) = 3$



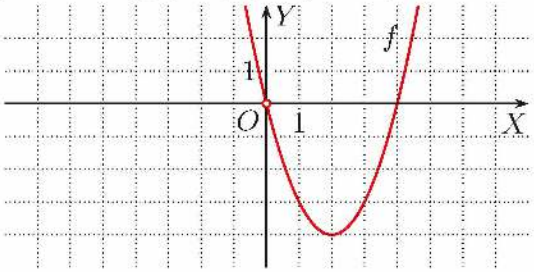
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = 2x$



e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$



f) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = (x-2)^2 - 4$



Z **1.** a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $2x - 4$
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}$, $\frac{8}{x+4}$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $\frac{x}{x+3}$
d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-6, 0\}$, $\frac{2x-12}{x}$
e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $3x + \frac{3}{2}$
f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$, $\frac{4}{3x-2}$

2. a) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{0, 9\}$, $D_B = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$, $D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 9\}$
b) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $D_B = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
c) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $D_B = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
d) $D_A = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$, $D_B = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$, $D_{A \cdot B} = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$

3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $\frac{3}{2x}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 1\}$, -3
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $-\frac{3}{x^2}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$, $\frac{x+1}{2(x-1)}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$, $\frac{(x-2)(x-3)}{x}$
g) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $-\frac{x^2}{3}$
h) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$, $-\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$
i) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $x + 3$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}$, $\frac{x(x+3)}{2(x+2)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -1\}$, $-x^2 + 5x - 4$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{x+2}{x-1}$

5. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{9}{2}\}$, $\frac{16}{7}$ b) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, -12
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, -12 d) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $\frac{4}{3}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{3}{4}x$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{5\}$, $-4x^2$

6. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{9}{2}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$, $-\frac{2(x+2)^2}{(x-3)^2}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, 0\}$, $\frac{2}{x}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}$, $-\frac{2}{x-1}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$, $-\frac{x^2}{4}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$, $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$

7. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -1, 3\}$, $(x+1)(x+3)$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 0, \frac{3}{2}, 4\}$, $-\frac{2(x+4)}{3(x-4)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$, $\frac{(2x+1)(x-2)}{(x+2)(2x-1)}$

8. $\frac{3}{x+2}$

9. kolejno w wierszach: $\frac{1}{x^2+1}$, gdzie $x > -1$; $\frac{6}{x^2+4}$, gdzie $x > -2$; $\frac{x^2+2}{x+3}$, gdzie $x > 3$

10. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, $\frac{x-3}{2x}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, -2, 0\}$, $\frac{x-5}{x+2}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$, $\frac{2x-1}{x^2}$

11. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$, $\frac{x^2-4x-12}{x+3}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-6, -1, 0, 6\}$, $-\frac{x+6}{x+1}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\frac{x^2+1}{x^2-x}$

3.6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Ć **1.** a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{17}{2x}$ b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{7}{12x}$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\frac{6+x}{2x-4}$
d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{x-3}{3x+3}$
e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $\frac{6x-1}{4x-12}$
f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{2-x}{3x+6}$

2. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{6x-6}{x^2-9}$
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$, $\frac{-3x-10}{x(x+2)}$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, $\frac{4x+6}{x(x+3)}$
d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{12-x}{x^2-9}$

3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 1\}$, $\frac{2x^2+2x-19}{(x+4)(x-1)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$, $\frac{2x^2-2x+5}{(x+1)(x-2)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, $\frac{7x+3}{x^2(x+1)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\frac{4}{x^2-1}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\frac{4x}{(x-2)^2}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$, $\frac{6-x}{x(x+2)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\frac{12-3x}{x-2}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -1\}$, $-\frac{4x+1}{(x+4)(x+1)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 4\}$, $-\frac{6x^2}{(x-4)(x+2)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}$, $-\frac{8x+24}{(x-4)(x+4)}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, $-\frac{5x+2}{x(x+1)}$

5. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = 3$,
$f(-1) = f(1) = 3$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$,
$f(-1) = \frac{4}{3}$, $f(1) = 2$

Z **1.** a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$, $\frac{7x-1}{(x-3)(x+2)}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{1, 4\}$, $\frac{x+10}{(x-1)(x-4)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{12x^2-13x-11}{2(x^2-1)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, $\frac{5x^2-7x+4}{2x(x-2)}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, \frac{1}{3}\}$, $\frac{-14x+10}{(x+5)(3x-1)}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-6, 6\}$, $\frac{28x-12}{36-x^2}$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{x^2-3x-12}{x^2-1}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{8}{x^2-4}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $\frac{1-3x}{(x-1)^2}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{-2x^2-3x}{(x+2)^2}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, $\frac{2}{x^2(x+1)}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\frac{2(x^2+1)}{x(x^2-1)}$

3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{2x}{x^2-4}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-6, 0\}$, $\frac{3x^2+3x+2}{2x(x+6)}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$, $\frac{x^2+13x+24}{4x^2-9}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, $\frac{5x^2-7x-5}{(3x-1)^2}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{2(x^2-x-1)}{x(x-1)^2}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$, $\frac{4x+3}{x(4x^2-1)}$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $\frac{x^2+15x-18}{2(x-3)^2}$, -1
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{15x-14}{(x+2)^2}$, 31
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}$, $\frac{x^2+13x-18}{2(x^2-16)}$, $3\frac{3}{7}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $\frac{10x+4}{4x^2-1}$, $-\frac{26}{35}$

5. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{x^2-1}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $-\frac{7}{x^2-3x}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{8x}{(x-1)^2(x+1)}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $\frac{(x+3)^2}{x^3-27}$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{3x^2-4x-5}{x^2-4}$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 0, 5\}$, $\frac{-2x^3+x^2+31x-20}{x(x^2-25)}$

6. $R_2 = \frac{R_1 R_c}{R_1 - R_c}$, $R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

7. a) $l = \frac{P-\pi r^2}{\pi r}$ b) $b = \frac{2P}{h} - a$ c) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$
d) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ e) $R = \frac{mg-F}{m\omega^2}$
f) $m = \frac{F}{g-\omega^2 R}$ g) $m = \frac{WrR}{GM(R-r)}$
h) $r = \frac{RGMm}{WR+GMm}$

9. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{x+8}{4x^2}$
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{15-2x}{10x^2}$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{8x^2-3}{6x}$
d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4x+9}{6x^3}$

10. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, -1\}$, $\frac{x+5}{(x+1)(x+3)}$, $\frac{7}{15}$
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 3\}$, $\frac{x+1}{(x-3)(x-1)}$, -3
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{11x-15}{x(x-1)}$, $\frac{7}{2}$
d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{x-5}{x(x-3)}$, $\frac{3}{2}$

11. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}$, $\frac{-x^2+4x+8}{x^2-16}$
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{11x+27}{x^2-9}$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $-\frac{x^2-3x+5}{x^2-1}$
d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$, $-\frac{3}{2x}$
e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 4\}$, $\frac{2x^2+10}{x(x-4)(x+3)}$
f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, 0

3.7. Równania wymierne (1)

Ć **1.** a) $x = -4$ b) $x = \frac{1}{3}$ c) $x = -\frac{1}{2}$
d) $x = \frac{3}{2}$ e) $x = 2$ f) $x = -2$

2. a) $x = -2$, $x = 0$ b) $x = 0$
c) $x = 1$ d) $x = -\frac{3}{4}$
e) $x = \frac{3}{4}$, $x = 2$
f) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{2}{3}$

3. a) $x = 0$ b) $x = 0$
c) $x = -1$, $x = 0$

4. a) $x = 3$ b) $x = -4$ c) $x = -4$
d) $x = -2$ e) $x = 4$ f) sprzeczne

Z **1.** a) $x = -1$ b) $x = -3$, $x = 1$
c) $x = 0$ d) $x = -\frac{1}{6}$
e) $x = -16$ f) $x = 3$

2. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, $x = 0$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{5}{2}\}$, $x = -3$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, $x = \frac{1}{3}$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$,
brak miejsc zerowych
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $x = -1$, $x = 0$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $x = 0$, $x = 2$

3. a) $x = 0$, $x = 5$ b) $x = -2$, $x = 4$
c) $x = 3$ d) $x = -6$, $x = 0$
e) $x = \frac{9}{4}$ f) $x = -2$, $x = 2$
g) $x = -3$ h) $x = 0$ i) $x = -3$, $x = 0$

4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x = -2$, $x = -1$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0, 3\}$, $x = 4$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 0$

5. a) $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$ b) $x = -\frac{2}{5}$, $x = 4$
c) $x = 1$ d) $x = 0$ e) $x = -4$, $x = 4$
f) sprzeczne

6. a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$
c) sprzeczne

3.8. Równania wymierne (2)

Ć **1.** a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 1$ c) $x = 2$ d) $x = 3$
e) $x = 2$ f) $x = 3$ g) $x = -\frac{7}{5}$ h) $x = 0$

2. Nie ma rozwiązania: I; mają nieskończenie wiele rozwiązań: II, III, IV.

3. a) $x = -2$, $x = 1$ b) $x = -1$
c) $x = -5$, $x = -1$ d) $x = 3$
e) $x = -6$, $x = 1$
f) $x = -4$, $x = -2$
g) $x = -3$, $x = 1$
h) $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$

4. a) $x = -8$ b) $x = -\frac{1}{4}$ c) $x = 4$
d) $x = -3$ e) sprzeczne
f) $x = -9$, $x = 0$

5. a) $(-1, -2)$, $(1, 0)$ b) $(-1, -2)$, $(1, 4)$
c) $(-1, 0)$, $(1, -4)$ d) $(-2, 4)$, $(2, -2)$

Z **1.** a) $x = \frac{5}{4}$ b) $x = \frac{1}{8}$ c) $x = -1$
d) $x = 1$ e) $x = 7$ f) $x = 0{,}7$

2. a) $x = 5$ b) $x = 2{,}4$ c) $x = -1\frac{1}{2}$

3. a) $x = -8$ b) $x = 8$ c) $x = 2$
d) $x = 0$ e) $x = -1$ f) $x = -1$

4. a) $x = -5$, $x = 3$
b) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 3$ c) $x = -3$
d) $x = 3 - \sqrt{7}$, $x = 3 + \sqrt{7}$ c) $x = 1$
f) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{2}$

5. a) $x = -1$, $x = 1$ b) $x = -3$
c) $x = -4$, $x = 4$ d) $x = -1$, $x = 1$
e) $x = -6$ f) $x = -3$, $x = -1$

6. a) $x = -2$, $x = 2$ b) $x = -3$, $x = 2$
c) $x = -2$, $x = 3$ d) $x = -3$, $x = 6$

7. a) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
b) $x = \frac{-3-\sqrt{39}}{10}$, $x = \frac{-3+\sqrt{39}}{10}$
c) sprzeczne d) $x = 0$, $x = 7$ e) $x = 2$
f) $x = \frac{2}{7}$ g) $x = -12$ h) $x = -1$

8. dla $a = 4$: $A(-2, -2)$, $B(2, -2)$, $C(2, 2)$, $D(-2, 2)$, $P = 16$;
dla $a = 3$: $A(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $D(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $P = 12$

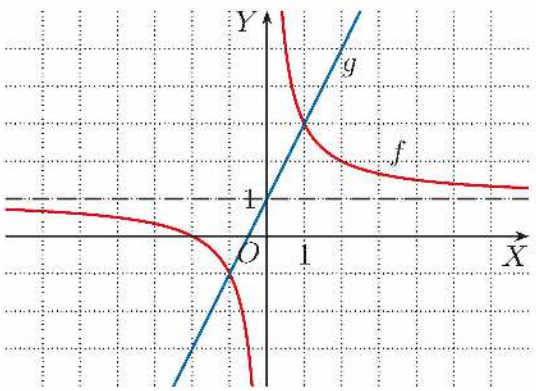
9. a) $f(x) = -3$ dla $x = -1$,
$f(x) = 0$ dla $x = -4$,
$f(x) = 1$ dla $x = -3$
b) $b = -1$

10. a) $x = \frac{5}{4}$ b) $x = -3$, $x = 5$
c) $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$
d) $x = -2 - \sqrt{6}$, $x = -2 + \sqrt{6}$
e) $x = -2$, $x = 4$ f) $x = 0$

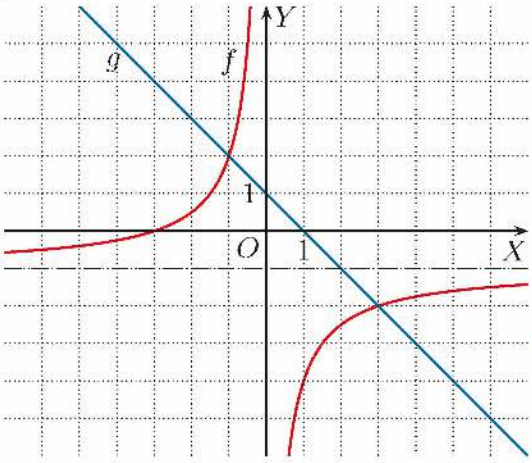
11. a), f), h), i) 1 b), d), e) 2
c) 0 g) nieskończenie wiele

12. a) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$ b) $x = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$
c) $x = -1$, $x = 1$ d) $x = -\frac{3}{2}$

13. a) $x = -1$, $x = 1$



13. b) $x = -1$, $x = 3$



3.9. Równania z wartością bezwzględną

Ć **1.** a) $x = -1$, $x = 5$ b) $x = 0{,}5$, $x = 7{,}5$
c) $x = -8$, $x = -4$ d) $x = -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$
e) $x = 5$, $x = 7$ f) $x = -7$, $x = 1$
g) $x = -\frac{3}{4}$, $x = \frac{1}{4}$
h) $x = -2 - \sqrt{3}$, $x = -2 + \sqrt{3}$

2. a), d) sprzeczne b) $x = 5$ c) $x = -9$

3. a) $x = \frac{1}{5}$, $x = 1$ b) $x = 0$, $x = 1$
c) $x = -1$, $x = -\frac{1}{9}$ d) $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$
e) $x = -15$, $x = 3$ f) $x = 4$, $x = 8$
g) $x = \frac{25}{7}$, $x = 5$ h) $x = -4$, $x = -\frac{8}{3}$

4. a) $x = 0$, $x = 6$ b) $x = -2$, $x = 6$
c) $x = 1$, $x = 3$ d) $x = -1$, $x = 9$

5. a) $x = -5$, $x = 1$ b) $x = \frac{3}{35}$, $x = \frac{1}{5}$
c), d) sprzeczne

Z **1.** a) $x = 4$, $x = 6$ b) $x = -1$, $x = 17$
c) $x = -10$, $x = -2$
d) $x = -11$, $x = -7$
e) $x = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{2}$
f) $x = -\frac{5}{8}$, $x = \frac{1}{8}$
g) $x = 6\frac{1}{2}$, $x = 7\frac{1}{2}$
h) $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$

2. a) $x = -2$, $x = \frac{4}{3}$ b) $x = 1$, $x = 2$
c) $x = -5$, $x = \frac{5}{3}$ d) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{15}{2}$
e) $x = -\frac{5}{4}$ f) $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{10}{3}$
g) $x = -\frac{7}{3}$, $x = -1$ h) $x = -2\sqrt{3}$, $x = 0$

3. a) $x = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = 0$, $x = 6$
c) $x = 5$, $x = 7$ d) $x = -\frac{4}{3}$, $x = 0$

4. a) $x = -\frac{5}{2}$, $x = \frac{9}{2}$ b) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{10}{3}$ d) sprzeczne

5. a) $x = -4$, $x = 10$ b) $x = -8$, $x = 4$
c) $x = 2$, $x = 6$ d) $x = -2$, $x = 1$
e) $x = -4$, $x = 8$ f) $x = -9$, $x = -3$
g) $x = 6$, $x = 14$ h) $x = -\frac{5}{3}$, $x = \frac{7}{3}$

6. a) $x = -3$, $x = 5$ b) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{7}{2}$
c) $x = -7$, $x = 3$ d) $x = -\frac{10}{3}$, $x = 0$

3.10. Nierówności z wartością bezwzględną

Ć **1.** a) $x \in (-2; 4)$ b) $x \in (-4; -2)$
c) $x \in \langle 4; 8\rangle$ d) $x \in \langle -2; 1\rangle$

2. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -7) \cup (1; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 8; \infty)$
d) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 0; \infty)$

3. a) $x \in (-4; 0) \cup (2; 6)$
b) $x \in (-7; -5) \cup (-1; 1)$
c) $x \in \langle -2; 2\rangle \cup \langle 6; 10\rangle$
d) $x \in \left\langle -5; -\frac{5}{2}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{3}{2}; 1\right\rangle$
e) $x \in \langle -1; 2) \cup (4; 7\rangle$
f) $x \in (-8; -7\rangle \cup \langle -3; -2)$

4. a) $x \in (-3; -2)$ b) $x \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right)$
c) $x \in \left\langle -\frac{3}{2}; 1\right\rangle$ d) $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; 1\right\rangle$

5. a) $x \in (-\infty; -4) \cup \left(\frac{4}{3}; \infty\right)$
b) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -8\rangle \cup \langle 4; \infty)$
d) $x \in (-\infty; 2\rangle \cup \langle 6; \infty)$

6. a) $x \in \langle -3; 9\rangle$ b) $x \in (-7; -1)$
c) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$

Z **1.** a) $x \in (4; 10)$ b) $x \in \langle -4; 10\rangle$
c) $x \in (-5; -3)$ d) $x \in \langle -5; 3\rangle$
e) $x \in (-\infty; 3) \cup (5; \infty)$
f) $x \in (-\infty; -7\rangle \cup \langle -1; \infty)$
g) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$
h) $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2\sqrt{7}; \infty)$

2. a) $x \in (-\infty; 4) \cup (6; \infty)$
b) $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 7; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -8\rangle \cup \langle 4; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -6\rangle \cup \langle 0; \infty)$
e) $x \in (-9; 3)$
f) $x \in \langle 2; 16\rangle$
g) $x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$
h) $x \in \left(-\frac{3}{10}; -\frac{1}{10}\right)$

3. **a)** $x \in \langle 1; \frac{7}{3} \rangle$
b) $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ **c)** $x \in (-6; 2)$
d) $x \in \left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$ **e)** $x \in \langle -1; 5 \rangle$
f) $x \in \langle -18; 24 \rangle$ **g)** $x = 4$
h) sprzeczna

4. **a)** $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{5}\right) \cup (1; \infty)$
b) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$
c) $x \in (-\infty; -9\rangle \cup \langle -3; \infty)$
d) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; \infty\right)$
e) $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 12; \infty)$
f) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{24}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; \infty\right)$
g) $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ **h)** $x \in \mathbf{R}$

5. **a)** $x \in (-6; -2) \cup (-2; 2)$
b) $x \in \langle 3; 5) \cup (5; 7\rangle$
c) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -5\rangle \cup \langle -1; \infty)$

6. **a)** $x \in \langle -2; 4)$ **b)** $x \in (2; 4)$
c) $x \in (1; 3)$ **d)** $x \in \langle -11; 7\rangle$
e) $x \in (-\infty; -1) \cup (9; \infty)$
f) $x \in (-\infty; -8\rangle \cup \langle -2; \infty)$
g) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{5}; \infty\right)$
h) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \infty\right)$

7. **a)** $x \in \langle -4; 1)$ **b)** $x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 5; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -\frac{5}{4}) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$ **d)** $x \in (3; 9)$
e) $x \in (-\infty; -6\rangle \cup \langle -2; \infty)$
f) $x \in (-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5})$ **g)** $x = 2$
h) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-11\}$

3.11. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

Ć **1.** **a)** $\frac{10}{15}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** 9 i 12

2. **a)** $165\frac{27}{49}$ cm^2 **b)** 110 cm

3. **a)** Cukierki A kosztują 16 zł/kg.
Cukierki B kosztują 20 zł/kg.
b) 8,50 zł/kg

Z **1.** **a)** mama – 48 lat, tata – 54 lata
b) ciocia – 36 lat, wujek – 40 lat

2. **a)** za 11 lat
b) babcia – 50 lat, dziadek – 58 lat

3. **a)** 48 cm **b)** 72 cm lub 1080 cm

4. 3 h 45 min

5. 24 dni

6. 7 h 12 min

7. **a)** 3 h 45 min **b)** 12:36

8. 20 min

9. **a)** $\frac{13}{7}$ **b)** $\frac{2}{5}$

10. **a)** 48 cm **b)** 40 cm lub 96 cm

11. 2 h 24 min

3.12. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

Ć **1.** **a)** 60 km/h, 80 km/h
b) 90 km/h, 60 km/h

2. **a)** 120 km/h, 90 km/h
b) 90 km/h, 80 km/h

Z **1.** 60 km/h

2. 12 km/h, 18 km/h

3. 32 km/h, 12 km/h

4. 15 km/h, 20 km/h

5. 60 km/h

6. 45 km/h, 60 km/h

7. 48 km/h, 72 km/h

3.13. Zagadnienia uzupełniające

1. **a)** $x \in (0; 2)$
b) $x \in \langle -2; 0)$
c) $x \in \left\langle -\frac{3}{4}; 0\right)$
d) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{8}\right) \cup (0; \infty)$

2. **a)** $f(x) > 2$ dla $x \in (0; 1)$,
$f(x) \geqslant -2$ dla $x \in (-\infty; -1\rangle \cup (0; \infty)$
b) $f(x) > 2$ dla $x \in (-3; 0)$,
$f(x) \geqslant -2$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 3; \infty)$
c) $f(x) > 2$ dla $x \in (5; \infty)$,
$f(x) \geqslant -2$ dla $x \in (-\infty; 4\rangle \cup (5; \infty)$

3. **a)** $x \in (2; 5\rangle$
b) $x \in (4; 19)$
c) $x \in \left(-\infty; 3\frac{1}{3}\right) \cup (4; \infty)$
d) $x \in (-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty)$
e) $x \in \left\langle -\frac{1}{3}; 0\right)$ **f)** $x \in (-\infty; -1)$
g) $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; \infty)$
h) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \langle 5; \infty)$

4. **a)** $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{1}{x-y}$, $\frac{1}{6}$
b) $x \neq y$ i $y \neq 0$, $\frac{x^2}{y}$, -1
c) $x \neq y$, $\frac{x \mid y}{x-y}$, $-\frac{1}{3}$

5. **a)** $a \neq b$ i $a \neq -b$, $a + b$, 1
b) $a \neq b$, $a \neq -b$ i $b \neq 0$, $\frac{a^2+b^2}{b}$, $\frac{5}{2}$

6. a) $x \neq 0$ i $y \neq -3$, $\frac{x}{y+3}$
b) $x \neq 0$ i $y \neq \frac{3}{2}$, $\frac{3x(2y-3)}{2}$
c) $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $x \neq 4y$, $4xy$
d) $x \neq y$, $x \neq -y$ i $x \neq -2y$, $-\frac{1}{4}(x+2y)$
e) $x \neq -y$, $(x-y)^2$
f) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{1}{x-y}$

7. a) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{2x}{x^2-y^2}$
b) $x \neq y$ i $x \neq -y$, $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
c) $x \neq 0$ i $y \neq 0$, $\frac{y^2-x^2}{x^3y^3}$
d) $x \neq 0$ i $y \neq 0$, $\frac{xy+x^2+y^2}{x^2y^2}$
e) $x \neq y$ i $x \neq -y$, 1
f) $y \neq 2x$ i $y \neq -2x$, $\frac{10xy}{4x^2-y^2}$

8. a) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ i $a \neq -b$, $\frac{2}{b(a-b)}$
b) $a \neq 0$, $a \neq 1$ i $b \neq 0$, $-\frac{a}{b}$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $y = \frac{24}{x}$, np. $(1,24)$, $(4,6)$, $(8,3)$
b) $y = \frac{2}{x}$, np. $(1,2)$, $(2,1)$, $(4,\frac{1}{2})$
c) $y = \frac{1}{4x}$, np. $(1,\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4},1)$, $(2,\frac{1}{8})$
d) $y = \frac{3}{x}$, np. $(1,3)$, $(3,1)$, $(6,\frac{1}{2})$

2. a) $f(-4) = \frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = 4$, $f(\frac{2}{3}) = -3$
b) $f(-2) = -\frac{1}{4}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{4}) = 2$
c) $f(-9) = -\frac{2}{15}$, $f(\frac{9}{10}) = 1\frac{1}{3}$, $f(1\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$
d) $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2+\sqrt{2}$, $f(\sqrt{8}) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $f(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}+3$

3. $a = 6$ a) P, Q
b) $x \in (-\infty;-2) \cup (0;\infty)$
c) $x \in (-\infty;0) \cup \langle 1\frac{1}{2};\infty)$

4. a) $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ b) $f(D) = (0;5)$
c) $f(D) = \langle -5;-1\rangle$
d) $f(D) = (-\infty;-5\rangle \cup \langle 5;\infty)$

5. a) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$, $y = 1$
b) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$, $y = -2$
c) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, $x = 4$, $y = 0$
d) $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $x = -2$, $y = 0$

6. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $D_h = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $h(D_h) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$
b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $D_h = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $h(D_h) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $g(D_g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $D_h = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $h(D_h) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$

7. a) 0 b) 0, 2 c) -2, 3 d) -1, 0, 2

8. a) $D = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$, $f(-3) = \frac{3}{5}$, $f(1) = -1$, $f(3) = 3$
b) $D = (-\infty;-\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3};\sqrt{3}) \cup \cup (\sqrt{3};\infty)$, $f(-3) = 5$, $f(1) = -11$, $f(3) = 5$
c) $D = (-\infty;-\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2};\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2};\infty)$, $f(3) = -\frac{1}{14}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{10}$
d) $D = (-\infty;-\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2};\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2};\infty)$, $f(-3) = \frac{5}{3}$, $f(1) = \frac{3}{5}$, $f(3) = \frac{1}{3}$

9. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,0,1\}$, 2
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\}$, $-\frac{2x+3}{2x-1}$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4,3\}$, $\frac{2(x-3)}{x+4}$
d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $x(x+1)$
e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3,-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\}$, $-\frac{1}{2(x+3)}$
f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2,2\}$, $\frac{1}{x-2}$

10. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4,4\}$, $\frac{8(x+1)}{x^2-16}$
b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $\frac{10}{x-3}$
c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3,0\}$, $\frac{4x-9}{x(x+3)}$
d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2,-1\}$, $\frac{2x^2+3x}{(x-1)(x-2)}$
e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$, $-\frac{x^2-x-1}{x^2-1}$
f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0,3\}$, $\frac{2x+6}{x(x-3)}$

11. a) 2 b) 1

12. a) $(3;\infty)$ b) $(-5;-2\rangle$ c) $\langle -3;6)$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $x = -6$ b) $x = 2$ c) $x = 0$
d) sprzeczne e) $x = -2$, $x = 4$ f) $x = 3$

2. a) $x = -3$ b) sprzeczne c) $x = -1$
d) $x = 4$ e) $x = \frac{1}{2}$ f) $x = -\frac{1}{2}$

3. a) $x = -8$ dla $a = 0$, $x = 8$ dla $a = 1$
b) $x = -9$ dla $a = 0$, $x = -3\frac{1}{2}$ dla $a = 1$
c) $x = \frac{1}{2}$ dla $a = 0$, $x = \frac{3}{4}$ dla $a = 1$
d) $x = 2$ dla $a = 0$, $x = 3$ dla $a = 1$

4. a) $x = 2$ b) $x = 1$ c) $x = 1$
d) $x = -3$, $x = 0$ e) $x = 2$, $x = 6$
f) $x = 4$ g) $x = 2-\sqrt{6}$, $x = 2+\sqrt{6}$
h) $x = -\frac{3}{2}$ i) $x = \frac{1}{2}$

5. **a)** $x = \frac{1}{4}$ **b)** $x = -\frac{4}{7}$ **c)** $x = 7$
d) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$
e) $x = 0$ **f)** $x = 0$ **g)** $x = -\frac{11}{2}$
h) $x = -6$ **i)** $x = -8$

6. **a)** $b = \frac{2P}{h} - a$ **b)** $h = \frac{2P}{a+b}$ **c)** $l = \frac{P-\pi r^2}{\pi r}$
d) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$ **e)** $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$ **f)** $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

7. **a)** z prostą $y = 2$: $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$;
z prostą $y = x$: $(1, 1)$, $(-2, -2)$
b) z prostą $y = 2$: $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$;
z prostą $y = x$: brak
c) z prostą $y = 2$: $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$; z prostą $y = x$:
$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$
d) z prostą $y = 2$: $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$;
z prostą $y = x$: brak

8. **a)** II – f, 0; I – g, $\frac{4}{3}$
b) $g(x) = x$ dla $x = 1$, $x = 4$,
$f(x) = -x$ dla $x = -3$, $x = 0$

9. **a)** $x = 1$, $x = 5$ **b)** $x = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$
c) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{11}{2}$ **d)** $x = -\frac{5}{2}$, $x = 2$
e) $x = 1$, $x = 5$ **f)** $x = -\frac{5}{2}$, $x = \frac{3}{2}$

10. **a)** $x \in \langle 0; 8\rangle$ **b)** $x \in (-1; 5)$
c) $x \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$
d) $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle -2; \infty)$
e) $x \in (0; 2)$
f) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; \infty\right)$

Zadania testowe

1. C **2.** D **3.** A **4.** B **5.** C **6.** A **7.** C
8. C

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $a = 1$, $b = -5$

2. $a = -\frac{1}{3}$

3. $x = -2$, $x = 3$

4. **a)** $b = 2$, $f(6) = 2\frac{1}{4}$ **b)** $-\frac{2}{3}$, 6

6. $t = \frac{210}{v}$, $v > 0$, $t = 1$ h 45 min

7. 80 km/h

4.1. Trójkąty prostokątne

Ć **1.** **a)** 50 **b)** 3 **c)** $3\sqrt{2}$ **d)** 4 **e)** 4 **f)** $\frac{\sqrt{17}}{2}$

2. **a)** $x = 5$ **b)** $x = \sqrt{106}$

3. **a)**, **c)**, **d)** jest **b)** nie jest

4. **b)** $12(2 + \sqrt{2})$ cm

5. **b)** $12\sqrt{3}$ cm

Z **1.** **a)** 9 **b)** $\frac{17}{2} + 6\sqrt{2}$

2. **a)** $x = 2\sqrt{2}$, $y = 4$
b) $x = 4(\sqrt{3} - 1)$, $y = 4\sqrt{2}$

3. **a)** $5(3 + 2\sqrt{3})$ cm **b)** $3(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm

4. $24(2\sqrt{3} - 3)$

5. $3(\sqrt{6} + 3\sqrt{2})$

6. **a)** $2(5 + 3\sqrt{5})$ **b)** $2(4 + \sqrt{13})$

7. **a)** $\sqrt{73}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm
b) $3\sqrt{7}$ cm, $3\sqrt{13}$ cm

8. **a)** 5 cm, 12 cm **b)** 4,8 cm

9. 8 cm i 10 cm

10. **a)** $2(\sqrt{2} + 1)$ **b)** $6(\sqrt{2} + 2)$ **c)** $8(\sqrt{2} + 1)$

11. **a)** $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ **b)** $2(\sqrt{3} + 3)$ **c)** $3(\sqrt{3} + 1)$

12. **a)** $2\sqrt{3}$ **b)** $24\sqrt{3}$

13. **a)** $2(3\sqrt{2} + 4)$ **b)** $2(\sqrt{3} + 3)$ **c)** $2\sqrt{3} + 3$

14. $3\sqrt{21}$, $3\sqrt{39}$

Trójki pitagorejskie

1. **a)** 7, 24, 25 **b)** 20, 21, 29
c) 12, 35, 37 **d)** 5, 12, 13

4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Ć **2.** $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

3. **a)** $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{15}{17}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{15}{8}$
c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{3}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = 2\sqrt{2}$

Z **1.** **a)** $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{3}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{7}{25}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{24}{25}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{24}{7}$
c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = 4$

1. **d)** $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{4}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{15}$
e) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$
f) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}$

3. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = 2$

4. **a)** 10, 24
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$

5. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 3$

6. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{9}{10}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{19}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{19}}{9}$

7. **a)** $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{89}}{89}$,
$\cos\alpha = \frac{8\sqrt{89}}{89}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{8}$
b) $\sin\beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$,
$\cos\beta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$

8. **a)** $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 3$
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{7}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{2}{3}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

9. $\sin\sphericalangle BAC = \cos\sphericalangle BCA = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\cos\sphericalangle BAC = \sin\sphericalangle BCA = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg}\sphericalangle BAC = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle BCA = \frac{3}{2}$

4.3. Trygonometria – zastosowania

Ć **1.** **a)** około 8 m **b)** około 9,72 m

2. **a)** około 19,96 m **b)** około 26,43 m

3. **a)** $12\sqrt{6}+6$ **b)** $4\sqrt{15}+4$

4. **a)** $\alpha \approx 24^\circ$ **b)** $\alpha \approx 25^\circ$
c) $\alpha \approx 30^\circ$ **d)** $\alpha \approx 23^\circ$

5. **a)** około 58° **b)** około 77°

Z **1.** około 27,13 m

2. około 29,79 m

3. drzewo: około 37,3 m, cień: około 13,58 m

4. około 18,79 m

5. **a)** około 6° **b)** około 17°
c) około 26,5° **d)** 45°

6. **a)** około 5,2%, spełnia
b) około 7%, spełnia
c) około 8,8%, nie spełnia

7. około 21,42 m

8. **a)** około 50° **b)** około 64°

9. około 41,5°, 41,5°, 97°

10. około 197 m

11. około 34,33 km

12. około 2484,48 m

13. około 91,53 m

14. około 17,17 m lub 64,84 m

15. **a)** około 56° **b)** 45° **c)** około 26,5°

16. około 95 cm

17. **a)** około 12,59 m **b)** około 8,81 m

4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Ć **1.** **a)** $\sqrt{19}$ cm; około 26°, około 64°
b) $\sqrt{194}$ cm; około 21°, około 69°
c) 53°; około 9,03 cm, około 11,98 cm
d) 36°; około 5,81 cm, około 9,89 cm

2. **a)** 3°36′ **b)** 2′24″ **c)** 9′ **d)** 7′12″ **e)** 25′12″

3. **a)** $|CD| \approx 6{,}47$; 27°30′, 35°, 117°30′
b) $|CD| \approx 7{,}05$; 35°, około 126°, około 19°

Z **1.** **a)** $\sphericalangle BCD = 106^\circ 17' 50''$,
$\sphericalangle DBC = 27^\circ 28' 35''$,
$\sphericalangle BDC = 46^\circ 13' 35''$
b) $\sphericalangle PAB = 90^\circ$, $\sphericalangle ABP = 36^\circ 51' 5''$,
$\sphericalangle BPA = 53^\circ 8' 55''$

2. a) $2\sqrt{13}$ cm, około 34°, około 56°
b) $5\sqrt{2}$ cm, około 8°, około 82°
c) $2\sqrt{41}$ cm, około 39°, około 51°

3. a) $\beta = 56^\circ$, $b \approx 8{,}9$, $c \approx 10{,}73$
b) $\alpha = 24^\circ$, $a \approx 4{,}07$, $b \approx 9{,}14$

4. a) $Ob \approx 14{,}39$, $P \approx 7{,}69$
b) $Ob \approx 27{,}43$, $P \approx 35{,}7$

5. a) około $75^\circ 30'$, około $104^\circ 30'$
b) około 53°
c) około 67°, około 113°

6. $|AB| \approx 20{,}88$, $|AD| \approx 8{,}09$, $\sphericalangle DCA \approx 28^\circ$

7. 90°, około 53°, około $108^\circ 30'$, około $108^\circ 30'$

8. około $75^\circ 30'$, około $104^\circ 30'$ lub około 41°, około 139°

9. kąty: 60°, około 14°, około 106°, boki: 12, 3, $3\sqrt{13}$; $|ED| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

10. a) 13, około $22^\circ 30'$, około $67^\circ 30'$
b) 17, około 28°, około 62°
c) 20, około 37°, około 53°

11. a) $2\sqrt{11}$ cm, około $56^\circ 30'$, około $33^\circ 30'$
b) 47°, około 4,77 cm, około 5,12 cm
c) 64°, około 25,63 cm, około 28,51 cm
d) 21°, około 39,08 cm, około 41,85 cm

12. około $70^\circ 30'$, około $109^\circ 30'$

4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

Ć **2.** $\frac{3}{4}$

3. a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$
b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$

4. a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
c) $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$
c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$

6. a) $\cos\alpha = \frac{3}{10}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$
c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$, $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

Z **1.** a) $\sin\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$
b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$
c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$
d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$
e) $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$
f) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$
g) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$
h) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$

2. a) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. a) tak b) nie c) nie d) tak

4. a) $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm
b) $6\sqrt{13}$ cm, $9\sqrt{13}$ cm

5. a) 30 b) $4(\sqrt{5}+3)$
c) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+3$ d) $3(\sqrt{13}+5)$

6. a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$
c) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$
d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$
f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

7. a) $\cos^2\alpha$ b) $\sin^2\alpha$ c) $\sin\alpha$
d) $\cos\alpha$ e) $\cos\alpha$ f) 1

8. a) $\cos\alpha \approx 0{,}41$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 2{,}25$
b) $\sin\alpha \approx 0{,}41$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}45$
c) $\sin\alpha \approx 0{,}48$, $\cos\alpha \approx 0{,}87$
d) $\sin\alpha \approx 0{,}97$, $\cos\alpha \approx 0{,}24$

9. a) nie b) tak c) tak d) nie e) tak f) tak

10. a) 9 cm i 12 cm b) 15 cm i 36 cm

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)

Ć **1.** a) 45°, np. $(1, 1)$ b) 90°, np. $(0, 1)$
c) 135°, np. $(-1, 1)$

2. a) $|OP| = 5$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$
b) $|OP| = 10$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$
c) $|OP| = 2$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$
b) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$

4. a) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$
b) $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$
c) $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$

5. a), c) ujemna b) dodatnia

6. a), b) tak

8. a) $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$
b) $\cos^2\alpha = \frac{5}{9}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
c) $\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

9. a) $\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$
b) $\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$
c) $\sin^2\alpha = \frac{9}{10}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$

Z **1.** a) $\sin\sphericalangle AOP = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\sphericalangle AOP = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle AOP = -4$
b) $\sin\sphericalangle AOQ = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\sphericalangle AOQ = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle AOQ = -\frac{1}{2}$
c) $\sin\sphericalangle AOR = \frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\cos\sphericalangle AOR = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{tg}\sphericalangle AOR = -\frac{5}{4}$

2. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. a) $\frac{3\sqrt{10}-4\sqrt{5}}{10}$ b) $\frac{-3\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$

4. a) $\sin^2\alpha = \frac{15}{16}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{15}$
b) $\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$

5. a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$
b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$
c) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$

6. a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$
b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$
c) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$
d) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$
e) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
g) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
h) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$

4.7. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)

Ć **1.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$,
$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}$

2. a) $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$
b) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Z **2.** a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
e) $3 - 2\sqrt{3}$ f) $-10\sqrt{3}$

3. a) -1 b) -3 c) $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$
d) $2 - \sqrt{2}$ e) -1 f) $\frac{3}{2}(3 + \sqrt{3})$

4. a) 0,9659 b) 0,2588 c) $-0{,}6428$
d) $-0{,}9962$ e) $-0{,}7813$ f) $-0{,}3057$

5. a), b) jest prawdziwa

6. a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$

7. a) $\beta \approx 110^\circ$ b) $\beta \approx 152^\circ$
c) $\beta \approx 164^\circ$ d) $\beta \approx 115^\circ$
e) $\beta \approx 144^\circ$ f) $\beta \approx 109^\circ$

8. $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$

9. a) 69° lub 111°, 0,9336
b) 48° lub 132°, 0,7431
c) 123°, $-0{,}5446$ d) 107°, $-0{,}2924$

10. a) 0,3420 b) 0,9962 c) $-0{,}1736$
d) $-0{,}8387$ e) $-4{,}7046$

Współczynnik kierunkowy prostej

1. a) 30° b) 60° c) 135°

2. a) 75° b) 105°

4.8. Pole trójkąta

Ć **1.** a) $12\sqrt{7}$ cm^2 b) $8\sqrt{21}$ cm^2

2. a) 120 cm^2 b) 120 cm^2 c) $\frac{169}{2}\sqrt{3}$ cm^2

3. a) $3(2 + \sqrt{2})$ cm b) 112,5 cm^2

4. b) $75\sqrt{3}$ cm^2

5. a) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm^2 b) $36\sqrt{3}$ cm

7. a) 15 b) $30\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) 4,5

8. a) 12 cm b) $6\sqrt{2}$ cm c) $4\sqrt{3}$ cm

Z 1. a) $\frac{35\sqrt{3}}{4}$ b) $16\sqrt{2}$ cm^2

2. a) $6\sqrt{3}$ cm^2 b) $\frac{36}{5}\sqrt{3}$ cm^2 c) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$ cm^2

3. a) $6(2\sqrt{2}+\sqrt{10})$ cm
b) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$, $Ob = 4(2\sqrt{3}+3)$ cm

4. $P = 24$ cm^2, $Ob = 4(\sqrt{2}+2\sqrt{5})$ cm

5. a) $6\sqrt{2}$
b) $P_1 = 36(\sqrt{3}-1)$, $P_2 = 36(3-\sqrt{3})$

6. 6, 6, 8

7. $Ob = 5(2+\sqrt{3})$, $P = \frac{25}{4}\sqrt{3}$

8. 90°

10. a) 6, tak b) $4\sqrt{6}$, nie c) 12, tak
d) $3\sqrt{15}$, nie e) 36, tak f) 42, tak

11. $9(\sqrt{3}+1)$

12. $P_{\triangle BAM} = 6\sqrt{3}$, $P_{\triangle NAM} = 3\sqrt{3}$

13. a) o 125% b) o 30%

4.9. Pole czworokąta

Ć 1. $h_1 = 5\sqrt{3}$ cm, $h_2 = 3\sqrt{3}$ cm, $P = 30\sqrt{3}$ cm^2

3. a) $48\sqrt{2}$ b) 48

4. b) 12,5 cm^2

6. a) $P = 120$ cm^2, $h = \frac{120}{13}$ cm
b) $P = 24\sqrt{2}$ cm^2, $h = 4\sqrt{2}$ cm

7. a) $P = 8\sqrt{17}$, $Ob = 2(8+\sqrt{21})$
b) $P = 21\sqrt{5}$, $Ob = 28$
c) $P = 10\sqrt{3}$, $Ob = 2(5\sqrt{3}+4)$
d) $P = 18\sqrt{5}$, $Ob = 6(\sqrt{6}+2)$

Z 1. a) 18 cm^2 b) 1 cm, 2 cm

2. b) $15\sqrt{2}$ cm^2

3. b) $8(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ cm

4. a) 0,96 b) 9 cm

5. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $6(6+\sqrt{2})$ cm

7. $\frac{320}{9}\sqrt{5}$ cm^2

8. a) $7\sqrt{3}$ cm^2 b) 0,8

9. b) 21

10. 161 m siatki, $P_1 = 188$ m^2, $P_2 = 512$ m^2

13. 12,5 cm, $P = 24$ cm^2

14. a) $P = 12$, $Ob = 4(3+\sqrt{2})$
b) $P = 16\sqrt{3}$, $Ob = 24$
c) $P = 32$, $Ob = 26$

15. a) $P = 10\sqrt{3}$, $Ob = 2(7+\sqrt{3})$
b) $P = 14\sqrt{3}$, $Ob = 22$
c) $P = 2(4\sqrt{3}+3)$, $Ob = 7+4\sqrt{3}+\sqrt{73-24\sqrt{3}}$

16. a) $Ob = 48$ cm, $P = 72\sqrt{3}$ cm^2
b) $4\sqrt{3}$ cm^2

4.10. Zagadnienia uzupełniające

2. b) $a = \sqrt{31}+1$, $b = \sqrt{31}-1$

Zestaw powtórzeniowy I

1. $\sqrt{3}$ cm, 2 cm, $2\sqrt{3}$ cm

2. $4{,}5(2+\sqrt{2})$

3. 48

4. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. a) 10, 24, 26 b) $4(\sqrt{2}+2)$ c) $16\sqrt{7}$

6. a) $\sin\beta = \cos\gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\beta = \sin\gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{2}$
b) $\sin\alpha = \cos\gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \sin\gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{2}$
c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$
d) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$

7. a) $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{33}$
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{19}}{9}$
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{35}$
d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$
f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$
g) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$
h) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$

8. a) $\alpha = \beta = 70^\circ$, $a = b \approx 6{,}39$ cm, $c \approx 4{,}37$ cm
b) $a = b = \frac{229}{17}$ cm, $c = \frac{120}{17}$ cm, $\alpha = \beta \approx 75^\circ$, $\gamma \approx 30^\circ$
c) $a = b \approx 4{,}94$ cm, $c \approx 7{,}56$ cm, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 100^\circ$

9. a) około 329,26 m b) około 70°

10. a) około 43,6 m b) około 20 minut

11. około 829 m

Zestaw powtórzeniowy II

1. $6(3+\sqrt{3})$ cm^2

2. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm

3. a) $P = 120$ cm^2, $\sin\alpha = \frac{120}{169}$
b) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$

4. $\sin\sphericalangle BAP = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $\sin\sphericalangle ABP = \frac{1}{2}$

5. $d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 4\sqrt{13}$ cm,
$P = 24\sqrt{3}$ cm^2

6. 8 cm^2

7. a) $Ob = 2(11+3\sqrt{3})$ cm,
$d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{43}$ cm
b) $Ob = 4(8+\sqrt{3})$ cm, $d_1 = 2\sqrt{29}$ cm,
$d_2 = 2\sqrt{41+20\sqrt{3}}$ cm

8. $\sin\sphericalangle PAD = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\sphericalangle PAD = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\operatorname{tg}\sphericalangle PAD = \frac{1}{3}$

9. $21(3-\sqrt{3})$

10. $Ob = 28 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $P = \frac{28\sqrt{3}}{3}$

11. a) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = 4$
b) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -4$
c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$
d) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$

13. a) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ b) 0 c) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) 1 g) $3-\sqrt{3}$ h) $-\frac{8}{3}$

15. około 22651 cm^3, około 17543 cm^3

Zadania testowe

1. A **2.** B **3.** C **4.** D **5.** B **6.** C **7.** D
8. D **9.** B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $\frac{2}{5}$

2. 7,2

3. $|AP| = 5{,}75$, $|BP| = 2{,}25$

4. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. $Ob = 28$, $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = \frac{24}{25}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$

6. $\frac{49}{25}$

7. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

8. około 21,8 m

5.1. Okrąg

Ć **1.** 45°

2. $\frac{3}{2}\pi$ cm, $\frac{9}{2}\pi$ cm, $\frac{15}{2}\pi$ cm, $\frac{21}{2}\pi$ cm

3. 16

Z **1.** $\frac{5}{3}\pi$ cm

2. a) $\frac{5}{2}\pi$ cm b) $\frac{5}{4}\pi$ cm c) $\frac{55}{12}\pi$ cm

3. 36 cm

4. 80°

5. a) $x = -9$, $x = 7$ b) $x = -3$, $x = 1$

6. a) $|O_1O_2| = 1$; 0
b) $|O_1O_2| = 5$; 1
c) $|O_1O_2| = 3$; 1

7. 12, 12, 24

8. a) 27 b) 24

9. 3, 4, 5, 6, 7

10. $2\sqrt{5}\pi$ cm, $6\sqrt{5}\pi$ cm

5.2. Koło

Ć **1.** a) 9π cm^2 b) 3π cm

2. a) $P = 49\pi$ cm^2, $r = 7$ cm
b) $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 9$ cm

3. a) 30π b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{21}{8}\pi$

4. 20°

5. a) $36(\pi-2)$ b) $12(2\pi-3\sqrt{3})$
c) $12(\pi-3)$

Z **2.** $d_1 = \frac{10}{3}\pi$, $d_2 = \frac{20}{3}\pi$, $P_1 = \frac{25}{3}\pi$, $P_2 = \frac{50}{3}\pi$

3. $P_1 = 2\pi - 4\sqrt{2}$, $P_2 = 14\pi + 4\sqrt{2}$

4. a) $1-\frac{\pi}{4}$ b) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{3}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}$

5. a) 2π b) $\frac{9}{4}(\pi-1-\sqrt{3})$

6. a) $l = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$, $P = 4\pi - 3\sqrt{3}$
b) $l = 4+\pi$, $P = 4\pi - 8$
c) $l = 2\sqrt{2}+\pi$, $P = 4\pi - 8\sqrt{2}$

8. a) $\sqrt{6}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\frac{6}{5}\sqrt{15}$

9. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2 b) $\frac{\pi}{6}$ cm^2

5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Ć **2.** a) $2\sqrt{13}$ cm b) 12 cm

3. a) 28 cm b) 5 cm

4. a) 2 b) 3 c) 1 d) 4

5. 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$,
1 dla $m \in \{-2, 6\}$,
2 dla $m \in (-2; 6)$

6. a) $2\sqrt{7}$ b) 5

Z **1.** a) $x = -8$ lub $x = 8$
b) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$
c) $x = -5\sqrt{3}$ lub $x = 5\sqrt{3}$
d) $x = 0$

2. $P(-2, -\sqrt{21})$ lub $P(-2, \sqrt{21})$
lub $P(2, -\sqrt{21})$ lub $P(2, \sqrt{21})$

3. $\frac{20}{9}$

4. $3\sqrt{3}$ cm^2

5. a) 0 dla $r \in (0; 4)$,
1 dla $r = 4$,
2 dla $r \in (4; \infty)$

b) 0 dla $r \in (0; \frac{1}{2})$,
1 dla $r = \frac{1}{2}$,
2 dla $r \in (\frac{1}{2}; \infty)$

c) 0 dla $r \in (0; 1 + \sqrt{2})$,
1 dla $r = 1 + \sqrt{2}$,
2 dla $r \in (1 + \sqrt{2}; \infty)$

6. a) 12 cm^2 b) 168 cm^2

7. $|CO_1| = 3$, $P = 3\sqrt{2}$

5.4. Kąty w okręgu

Ć **1.** a) 60° b) 240° c) 330°

2. a) 30° b) 60°

3. a) 165° b) 67,5° c) 51° d) 315°

6. a) $\alpha = \beta = 60°$, $\gamma = 30°$
b) $\alpha = 60°$, $\beta = \gamma = 30°$
c) $\alpha = 120°$, $\beta = 240°$, $\gamma = 60°$

7. a) $\alpha = \beta = 70°$, $\gamma = 20°$
b) $\alpha = \gamma = 30°$, $\beta = 40°$
c) $\alpha = \gamma = 25°$, $\beta = 35°$

Z **1.** a) C lub O b) F lub L
c) G lub K d) C lub O

2. a) 30° b) 45° c) 112,5° d) 3,75°

3. a) $\alpha = 23°$, $\beta = 134°$
b) $\alpha = 51°$, $\beta = 102°$
c) $\alpha = 32°$, $\beta = 64°$

4. a) $\alpha = 74°$, $\beta = 37°$
b) $\alpha = 113°$, $\beta = 56°30'$
c) $\alpha = 72°$, $\beta = 36°$

5. a) $\alpha = 30°$, $\beta = 35°$
b) $\alpha = 60°$, $\beta = 70°$
c) $\alpha = 50°$, $\beta = 40°$

6. a) $\alpha = 32°$ b) $\alpha = 42°$ c) $\alpha = 36°$

7. a) 48° b) 15°

9. a) $x = 9$ b) $x = 2\sqrt{2}$ c) $x = 3$

10. 8 cm, 12 cm

11. a) $r = 4$, $P = 4\sqrt{15}$
b) $r = 3\frac{3}{4}$, $P = 18$
c) $r = 3\frac{1}{4}$, $P = 7\frac{1}{2}$

12. 40°, 40°, 100°

13. a) $\alpha = 84°$, $\beta = \gamma = 48°$
b) $\alpha = 65°$, $\beta = 85°$, $\gamma = 30°$
c) $\alpha = \gamma = 70°$, $\beta = 66°$

5.5. Okrąg opisany na trójkącie

Ć **3.** a) $\frac{256}{3}\pi$ cm^2
b) $h = 9$ cm, $P = 27\sqrt{3}$ cm^2

4. a) $\frac{\sqrt{193}}{2}$ cm b) 9π cm c) 36π cm^2

5. a) $2\sqrt{2}$ cm b) $3\sqrt{10}$ cm lub $\sqrt{10}$ cm

6. a) 24 cm^2 b) 8,125 cm

Z **1.** a) 4 cm b) 5 cm c) $3(\sqrt{2} - 1)$ cm

2. a) $10(1 + \sqrt{2})$ b) $2(5 + 2\sqrt{10})$

3. 48

4. $48\sqrt{3}$

5. a) 5 cm b) $\frac{25}{6}$ cm

6. a) $4\sqrt{10}(\sqrt{3} + \sqrt{13})$ cm
b) $4\sqrt{3}(\sqrt{13} + \sqrt{10})$ cm

7. $4\sqrt{3}$

8. $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

9. a) $P = 9$, $R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$
b) $P = 126$, $R = \frac{65}{6}$

10. 7

11. 15π

12. a) 5,8 cm b) $\frac{25}{6}$ cm

5.6. Okrąg wpisany w trójkąt

Ć **2.** a) $6\sqrt{3}\pi$ b) $30\sqrt{3}$

3. $12\sqrt{3}\pi$ cm

4. a) 1 b) 3

5. a) 24 cm i 26 cm b) 6 cm i 8 cm

7. 12

8. a) 4 b) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ c) 4 d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

9. b) $r = 5$, $P = 25\pi$
c) $r_1 = 3$, $P_1 = 9\pi$; $r_2 = 4$, $P_2 = 16\pi$

Z **1.** b) 4

2. a) $2(\sqrt{3}-1)$ b) $6\pi(\sqrt{3}-1)$

4. a) 3 b) $3\frac{1}{3}$

5. a) $2(2\sqrt{3}+3)$, $2(2\sqrt{3}+3)$, $6(\sqrt{3}+2)$
b) $\frac{28\sqrt{3}}{3}+16$

6. $\frac{17}{36}\pi$ cm^2

7. $r = \sqrt{2}$ cm, $|OA| = |OB| = \sqrt{6}$ cm, $|OC| = 3\sqrt{2}$ cm

8. $4(\sqrt{3}+3)$, $8(\sqrt{3}+1)$

9. 24

10. a) $\left(4-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ cm b) $4(\sqrt{3}-1)$ cm
c) $(3\sqrt{5}-5)$ cm

11. $Ob = 4(3+\sqrt{13})$ cm, $d = 6(\sqrt{13}-3)\pi$ cm

12. $6(2\sqrt{3}-3)\pi$ cm

5.7. Wielokąty foremne

Ć **2.** a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7 f) 8 g) 9 h) 10

4. a) 20π b) $48\sqrt{3}$

5. a) $\frac{243}{4}\pi$ cm^2 b) 12 cm, $8\sqrt{3}$ cm

Z **1.** a) 135° b) 144°

2. a) 6 b) 7 c) 9 d) 10 e) 11

3. a) $\frac{a^2}{4}\pi$ b) $\frac{a^2}{4}\pi$

4. $R = a$

a	R	r	P
4 cm	4 cm	$2\sqrt{3}$ cm	$24\sqrt{3}$ cm^2
6 cm	6 cm	$3\sqrt{3}$ cm	$54\sqrt{3}$ cm^2
$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{2}{3}\sqrt[4]{108}$ cm	16 cm^2
$8\sqrt{3}$ cm	$8\sqrt{3}$ cm	12 cm	$288\sqrt{3}$ cm^2

5. a) 9

6. $\triangle ABC$ i $\triangle AHG$: 22,5°, 135°, 22,5°
$\triangle ACD$ i $\triangle AFG$: 22,5°, 112,5°, 45°
$\triangle ADE$ i $\triangle AFE$: 22,5°, 90°, 67,5°

11. a) $2(2\sqrt{2}-\sqrt{6})\pi$ cm
b) $P = 2\sqrt{3}$ cm^2, $Ob = 4\sqrt{3}$ cm

12. a) 22,5° b) 18° c) 15°

5.8. Twierdzenie sinusów

Ć **1.** a) $\gamma = 75°$, $a \approx 4{,}39$, $b \approx 5{,}38$
b) $\gamma = 45°$, $a = 4\sqrt{2}$, $b \approx 10{,}93$
c) $\beta = 90°$, $a \approx 6{,}43$, $c \approx 7{,}66$
d) $\alpha = 76°$, $b \approx 4{,}81$, $c \approx 2{,}96$

2. a) $\beta \approx 57{,}5°$, $\gamma \approx 42{,}5°$, $c \approx 4{,}8$
b) $\beta = 90°$, $\gamma = 60°$, $c = 3\sqrt{3}$
c) $\beta \approx 39{,}5°$, $\alpha \approx 95{,}5°$, $a \approx 14{,}08$
d) $\gamma \approx 44°$, $\alpha \approx 76°$, $a \approx 5{,}6$

4. a) $\beta_1 \approx 56{,}5°$, $\beta_2 \approx 123{,}5°$, $\gamma_1 \approx 93{,}5°$, $\gamma_2 \approx 26{,}5°$, $c_1 \approx 6$, $c_2 \approx 2{,}7$
b) $\beta_1 \approx 62°$, $\beta_2 \approx 118°$, $\gamma_1 \approx 73°$, $\gamma_2 \approx 17°$, $c_1 \approx 10{,}8$, $c_2 \approx 3{,}3$
c) $\beta_1 \approx 74°$, $\beta_2 \approx 106°$, $\gamma_1 \approx 46°$, $\gamma_2 \approx 14°$, $c_1 \approx 7{,}5$, $c_2 \approx 2{,}5$
d) $\alpha \approx 21°$, $\gamma \approx 114°$, $c \approx 2{,}6$

Z **1.** a) $\beta = 75°$, $\gamma = 45°$ b) $\beta = 45°$, $\gamma = 15°$

2. a) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ b) $6\sqrt{2}$

3. a) $c \approx 7{,}85$, $\beta \approx 48{,}5°$, $\gamma \approx 101{,}5°$
lub $c \approx 2{,}48$, $\beta \approx 131{,}5°$, $\gamma \approx 18{,}5°$
b) $c \approx 12{,}63$, $\beta \approx 52°$, $\gamma \approx 83°$
lub $c \approx 1{,}55$, $\beta \approx 128°$, $\gamma \approx 7°$
c) $a \approx 9{,}59$, $\alpha \approx 49°$, $\gamma \approx 71°$
lub $a \approx 2{,}42$, $\alpha \approx 11°$, $\gamma \approx 109°$
d) $b \approx 10{,}7$, $\alpha \approx 14{,}5°$, $\beta \approx 15{,}5°$

4. a) $2\sqrt{2}$ b) 7 c) $5\sqrt{2}$ d) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$
e) $\sqrt{3}$ f) 5,5

5. około 22,2 m

6. a) $a \approx 5{,}18$, $c = 10$, $\gamma = 75°$
b) $a \approx 4{,}9$, $c \approx 6{,}7$, $\beta = 60°$
c) $c \approx 22{,}83$, $\beta \approx 42°$, $\gamma \approx 108°$
lub $c \approx 4{,}99$, $\beta \approx 138°$, $\gamma \approx 12°$
d) $a \approx 10{,}35$, $\alpha \approx 143{,}5°$, $\gamma \approx 16{,}5°$
e) $b \approx 3{,}5$, $\alpha \approx 42°$, $\beta \approx 28°$
f) Taki trójkąt nie istnieje.

7. Informacja do zadania:
$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
a) $3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}) \approx 30{,}47$ [cm]
b) $3(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}) \approx 17{,}59$ [cm]

11. **a)** $a = 2\sqrt{3}$, $\alpha = \gamma = 30^\circ$
b) $a \approx 2{,}07$, $\alpha = 15^\circ$, $\gamma = 45^\circ$
c) $b = 12\sqrt{3}$, $c = 24$, $\gamma = 90^\circ$
d) $c \approx 14$, $\beta \approx 24^\circ$, $\gamma \approx 126^\circ$

12. **a)** 8π **b)** 12π

5.9. Twierdzenie cosinusów (1)

Ć **3.** **a)** $c = \sqrt{39}$
b) $c = \sqrt{74+35\sqrt{3}}$
c) $b = \sqrt{5}$ **d)** $a = \sqrt{29}$

4. **a)** $\gamma = 150^\circ$, $\alpha = \beta = 15^\circ$
b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$

Z **1.** **a)** $\sqrt{7}$ **b)** $\sqrt{13}$ **c)** $2\sqrt{13}$ **d)** $2\sqrt{13}$

2. **a)** $d_1 = 2\sqrt{7}$, $d_2 = 2\sqrt{19}$
b) $d_1 = 2\sqrt{2}$, $d_2 = 2\sqrt{10}$
c) $d_1 = \sqrt{19}$, $d_2 = 7$
d) $d_1 = 2\sqrt{13}$, $d_2 = 2\sqrt{37}$

3. **a)** $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$
b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$

4. **a)** $\alpha \approx 29^\circ$, $\beta \approx 46{,}5^\circ$, $\gamma \approx 104{,}5^\circ$
b) $\alpha \approx 22^\circ$, $\beta \approx 38^\circ$, $\gamma = 120^\circ$

5. **a)** $\sqrt{7}$, $3\sqrt{7}$ **b)** $\sqrt{21}$, $4\sqrt{21}$

6. **a)** $\cos\gamma = \sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $P = \frac{3}{2}$
b) $\cos\gamma = \frac{3\sqrt{5}}{10}$, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{55}}{10}$, $P = \frac{\sqrt{11}}{2}$

7. **a)** 60° **b)** 135°

8. **a)** 8 **b)** $4\sqrt{13}$

5.10. Twierdzenie cosinusów (2)

Ć **1.** **a)** $|AB| = 3$ lub $|AB| = 5$
b) Taki trójkąt nie istnieje.

2. $c = 3\sqrt{2}-\sqrt{6}$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 15^\circ$
lub $c = 3\sqrt{2}+\sqrt{6}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$

3. **a)** $a = 6$, $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
b) $c = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 105^\circ$
c) $c = 3-\sqrt{3}$, $\alpha \approx 105^\circ$, $\gamma \approx 15^\circ$
lub $c = 2\sqrt{3}$, $\alpha \approx 75^\circ$, $\gamma \approx 45^\circ$
d) $b = 4$, $\beta \approx 41^\circ$, $\gamma \approx 19^\circ$

4. **a)** $2\sqrt{7}$ cm **b)** $2\sqrt{3}$ cm

6. **a)** $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, ostrokątny
b) $\cos\alpha = 0$, prostokątny
c) $\cos\beta = -\frac{1}{16}$, rozwartokątny
d) $\cos\gamma = -\frac{1}{48}$, rozwartokątny

Z **1.** **a)** $\cos\gamma = \frac{1}{4}$, tak **b)** $\cos\alpha = -\frac{29}{48}$, nie
c) $\cos\beta = -\frac{3}{4}$, nie **d)** $\cos\alpha = 0$, nie

2. **a)** $\frac{1}{5}$ **b)** $2\sqrt{7}$
c) $R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$, $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

3. **a)** $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, $c = 2\sqrt{13}$
lub $\cos\gamma = -\frac{4}{5}$, $c = 6\sqrt{5}$
b) $\cos\gamma = \frac{1}{3}$, $c = \sqrt{41}$
lub $\cos\gamma = -\frac{1}{3}$, $c = 9$

4. $2\sqrt{3}(6+\sqrt{7})$

5. $|PA| \approx 9{,}98$ m, $|PB| \approx 8{,}39$ m

7. **a)** $b = 2$, $\beta \approx 14^\circ$, $\gamma \approx 106^\circ$
lub $b = 6$, $\beta \approx 46^\circ$, $\gamma \approx 74^\circ$
b) $a = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 120^\circ$
lub $a = 2$, $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$
c) $a = 1$, $\alpha \approx 18^\circ 30'$, $\gamma = 116^\circ 30'$
lub $a = 3$, $\alpha \approx 71^\circ 30'$, $\gamma = 63^\circ 30'$
d) $b = 4\sqrt{7}$, $\beta \approx 41^\circ$, $\gamma \approx 19^\circ$

8. **a)** $\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{7}{24}$

9. $2\sqrt{7}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm

5.11. Zagadnienia uzupełniające

2. **a)** 4 **b)** 1

3. odcinek – dwie,
prosta – nieskończenie wiele,
półprosta – jedna

5. **a)** 4 **b)** 3 **c)** 7 **d)** 8

8. **a)** tak **b)** nie **c)** nie

12. równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek

13. środkowosymetryczny

14. środkowosymetryczne: H, I, N, O, S, X, Z;
osiowosymetryczne: A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y

16. **a)** $S(3,2)$ **b)** $S(3,3)$ lub $S(2,0)$ **c)** $S(4,2)$

18. 225°

Zestaw powtórzeniowy I

1. **a)** π **b)** $2\sqrt{3}-\frac{3}{4}\pi$

2. **a)** $\alpha = \beta = 60^\circ$
b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 55^\circ$
c) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 130^\circ$

3. 60°, 30°

4. a) $22{,}5^\circ$ **b)** $67{,}5^\circ$

5. a) $\sqrt{2}$ **b)** $2(\sqrt{2}-1)$ **c)** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

6. a) $\frac{27}{4}\pi$ **b)** $P=36\sqrt{3}$, $Ob=36$

7. $18\sqrt{3}$

8. a) $3{,}75\ \mathrm{cm}^2$ **b)** $6{,}25\ \mathrm{cm}^2$

9. a) 6π, 4π **b)** $16(\pi-2)$
c) $8(\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}+2})$

Zestaw powtórzeniowy II

2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

3. promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, D: 2,5,
promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C: $\frac{5\sqrt{5}}{2}$,
odległość między środkami okręgów: 5

4. $r=3$, $P=54$

5. a) $\frac{b}{2\sin\alpha}$ **b)** $\frac{h}{2\cos^2\alpha}$

6. $3\frac{1}{3}$ cm

7. $6\pi(\sqrt{2}-1)$

8. $|AP|=3$, $|BQ|=6$, $|CR|=10$

9. $a\sqrt{5-2\sqrt{3}}$, $a\sqrt{5+2\sqrt{3}}$

10. $3\frac{1}{4}$

11. a) $2(\sqrt{3}-1)$ cm
b) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$ cm

12. a) $\frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$ **b)** $\frac{3}{4}$

13. a) $32(\sqrt{2}-1)\ \mathrm{cm}^2$
b) $4\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$

14. a) $Ob=2(9+\sqrt{21})$, $P=20\sqrt{3}$
b) $Ob=2(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})$, $P=4(1+\sqrt{3})$

15. a) około $1749\ \mathrm{m}^2$
b) około $926\ \mathrm{m}^2$

Zadania testowe

1. C **2.** D **3.** A **4.** C **5.** C **6.** A **7.** C
8. B **9.** C

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $8P$

2. $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\pi$

3. 40°

4. 8π

5. $\sin\sphericalangle O_1PA=\frac{5}{13}$, $r=2\frac{2}{9}$

6. $16\pi(3-2\sqrt{2})\ \mathrm{cm}^2$

7. 45°, 135°

8. $4+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

Indeks

algorytm Hornera 99
asymptota 109
  pionowa 109
  pozioma 109

cosinus kąta 161
cotangens kąta 161
czworokąt wypukły 188

długość
  łuku okręgu 202
  okręgu 202
dwumian 56
  Newtona 72
dziedzina naturalna funkcji 120

figura
  osiowosymetryczna 243
  środkowosymetryczna 245
funkcja
  homograficzna 117
  wymierna 119
funkcje trygonometryczne
  kąta ostrego 161
  kąta wypukłego 177

hiperbola 109, 117
hiperboloida 135

iloczyn pierwiastków równania
  kwadratowego 48

jednomian
  stopnia n 56
  zerowy 56
jedynka trygonometryczna 171

kąt
  między styczną a cięciwą okręgu 215
  środkowy w okręgu 202, 213
  wpisany w okrąg 213, 214
konstrukcja
  dwunastokąta foremnego wpisanego
    w okrąg 230
  pięciokąta foremnego wpisanego
    w okrąg 230
konstrukcja
  stycznej do okręgu 212
  sześciokąta foremnego wpisanego
    w okrąg 230
  wspólnej stycznej dwóch okręgów
    rozłącznych zewnętrznie 212
krzywa łańcuchowa 29
kwadrat 188

liczba
  π 202
  pierwiastków równania
    kwadratowego 20

najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 41
największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 41
nierówność
  kwadratowa 30
  wymierna 147

obrót dookoła punktu 246
odcinek koła (kołowy) 206
odległość punktu od prostej 208
okręgi
  przecinające się 203, 209
  rozłączne 203, 209
  rozłączne wewnętrznie 203
  rozłączne zewnętrznie 203, 209
  styczne 203, 209
  styczne wewnętrznie 203, 209
  styczne zewnętrznie 203, 209
oś
  symetrii 243
  symetrii paraboli 15

parabola 11, 13, 23
paraboloida obrotowa 67
pierścień kołowy 205
pierwiastek podwójny równania
  kwadratowego 20
pierwiastki
  równania kwadratowego 16, 20
  wielomianu 78, 91, 94
pierwotna trójka pitagorejska 160

podstawowe twierdzenie algebry 73
pole
  koła 205
  rombu 189
  równoległoboku 189
  trapezu 190
  trójkąta 184, 185, 187
  trójkąta opisanego na okręgu 223
  trójkąta równobocznego 184
  trójkąta wpisanego w okrąg 220
  wycinka koła 205
postać
  iloczynowa funkcji kwadratowej 24
  kanoniczna funkcji homograficznej 117
  kanoniczna funkcji kwadratowej 13
  ogólna funkcji homograficznej 117
  ogólna funkcji kwadratowej 13
promień
  okręgu opisanego na trójkącie
    równobocznym 218
  okręgu wpisanego w trójkąt 224
  okręgu wpisanego w trójkąt
    równoboczny 222
  wewnętrzny pierścienia kołowego 205
  zewnętrzny pierścienia kołowego 205
proporcjonalność odwrotna 108
prostokąt 188
punkt styczności 203, 208

ramię
  końcowe kąta 176
  początkowe kąta 176
romb 188, 189
rozkład na czynniki liniowe funkcji
  kwadratowej 24
rozwiązania równania
  kwadratowego 16, 20
rozwiązanie trójkąta 168
równanie
  dwukwadratowe 34
  wielomianowe 78
równoległobok 188, 189
różnica
  n-tych potęg liczb rzeczywistych 70
  sześcianów 69

schemat Hornera 99
sieczna okręgu 208
sieczna paraboli 37
sinus kąta 161
stopień
  iloczynu wielomianów 64
  sumy wielomianów 59
  wielomianu 56
styczna
  do okręgu 208, 209
  do paraboli 37
suma
  pierwiastków równania
    kwadratowego 48
  sześcianów 69
symetria
  osiowa 243
  środkowa 244
szerokość pierścienia kołowego 205
sześcian
  różnicy 68
  sumy 68

środek
  obrotu 246
  okręgu opisanego na trójkącie 218
  okręgu wpisanego w trójkąt 222
  symetrii 244, 245

tangens kąta 161
tożsamość trygonometryczna 171, 173
trapez 188, 190
  równoramienny 188
trójka pitagorejska 160
trójkąt Herona 187
trójkąt Pascala 72
trójmian 56
twierdzenie
  Bézouta 88
  cosinusów 236
  o odcinkach stycznych do okręgu 209
  o pierwiastkach całkowitych
    wielomianu 91
  o pierwiastkach wymiernych
    wielomianu 94
  o reszcie z dzielenia wielomianu
    przez dwumian 87
  odwrotne do twierdzenia
    Pitagorasa 157

twierdzenie
Pitagorasa 156
sinusów 231

układ równań kwadratowych 40

wartość bezwzględna liczby 136
wielkości odwrotnie
proporcjonalne 108
wielokąt
foremny 227
wklęsły 188
wypukły 188
wielomian 56
stopnia n 56
wielu zmiennych 61
zerowy 56

współczynnik
jednomianu 56
kierunkowy prostej 183
proporcjonalności odwrotnej 108
wielomianu 56
współrzędne wierzchołka paraboli 13
wycinek koła (kołowy) 205
wykres wielomianu 97
wyraz wolny wielomianu 56
wyrażenie
wymierne 118
wymierne dwóch zmiennych 148
wyróżnik trójmianu kwadratowego 13
wzory Viète'a 48
wzór dwumianowy Newtona 72
wzór Herona 187

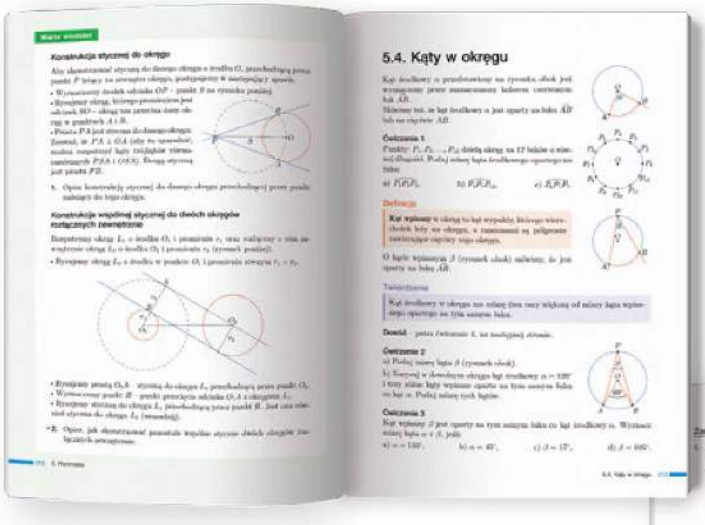
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	–	45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	46°	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	47°	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	48°	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	49°	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	51°	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	52°	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	53°	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	54°	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	55°	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	56°	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	57°	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	58°	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	59°	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	61°	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	62°	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	63°	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	64°	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	65°	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	66°	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	67°	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	68°	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	69°	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	71°	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	72°	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	73°	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	74°	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	75°	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	76°	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	77°	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	78°	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	79°	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	81°	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	82°	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	83°	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	84°	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	85°	0,9962	0,0872	11,430	0,0875
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	86°	0,9976	0,0698	14,301	0,0699
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	87°	0,9986	0,0523	19,081	0,0524
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	88°	0,9994	0,0349	28,636	0,0349
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	89°	0,9998	0,0175	57,290	0,0175

nowa era *Twoje mocne strony*

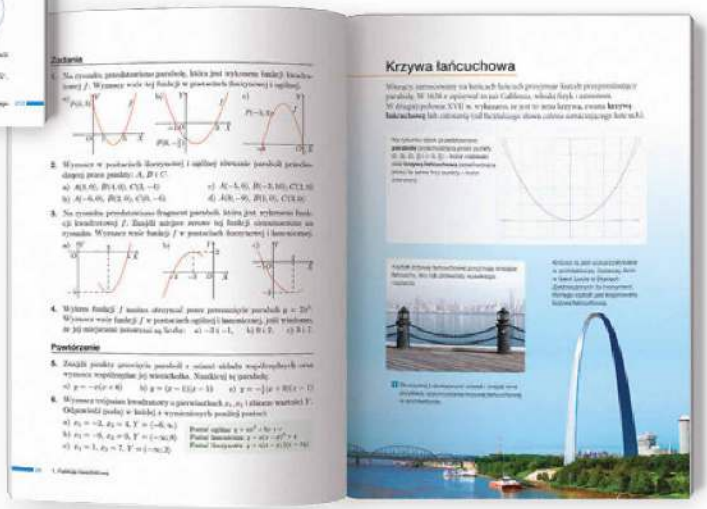
MATeMAtyka

Podręcznik *MATeMAtyka 2* do zakresu podstawowego w spójny i przystępny sposób wprowadza ucznia w zagadnienia matematyczne. Dzięki niemu lekcje w szkole są ciekawe, a jednocześnie pozwala on na efektywną samodzielną naukę w domu.



Czytelny układ

Przejrzyste wprowadzenia nowych treści, przykłady, proste ćwiczenia i ułożone zgodnie ze wzrastającym stopniem trudności zadania tworzą czytelny układ każdego tematu. Ułatwia to pracę na lekcjach i w domu.



Pomocne sekcje

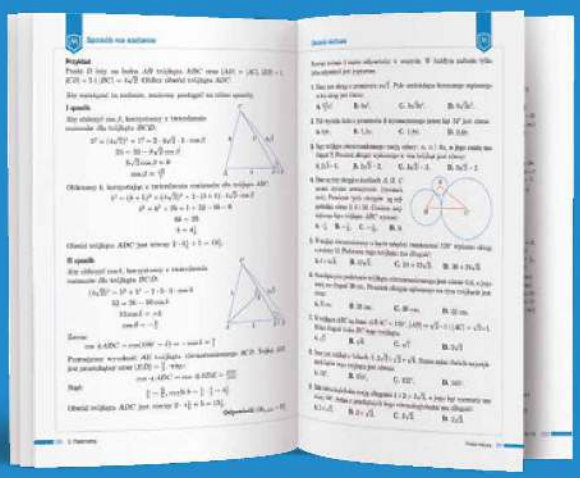
Warto powtórzyć pomagają lepiej przygotować się do kolejnych lekcji. *Warto wiedzieć* uzupełniają i rozszerzają treści z lekcji.

Różnorodne formy przekazu

Ciekawe infografiki i *Zagadnienia uzupełniające* urozmaicają pracę na lekcjach i zachęcają uczniów do samodzielnych poszukiwań.

WIESZ, UMIESZ, ZDASZ

Każdy dział podręcznika *MATeMAtyka 2* kończy się dwoma zestawami powtórzeniowymi, dzięki którym uczniowie mogą utrwalić zdobyte wcześniej wiadomości. Następnie zaczyna się sekcja zadań zamkniętych i otwartych, w której znajdziemy też *Sposoby na zadania* pokazujące różne metody rozwiązywania zadań.



Nowa Era Sp. z o.o.
www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-3899-9