

Matematyka



Zmiana MEN 2024



Oznaczono usunięte
i zmienione treści

2

Podręcznik dla
szkoły branżowej I stopnia

OPERON
Edukacja jest podróżą

Matematyka

Podręcznik dla
szkoły branżowej I stopnia

dla

absolwentów ośmioletniej szkoły podstawowej

2

Adam Konstantynowicz
Anna Konstantynowicz
Małgorzata Pająk

 **OPERON**
Edukacja jest podróżą

2021

Projekt okładki: Paweł Kwacz
Redaktor prowadzący: Zespół
Redakcja językowa: Monika Turata
Redakcja graficzna i skład: Maciej Laska
Korekta techniczna: Eliza Perkowska
Zdjęcia: Shutterstock

OPERON Sp. z o.o. oświadcza, że z należytą starannością podjął wszelkie działania zmierzające do powiadomienia podmiotów majątkowych praw autorskich do utworów słownych i fotograficznych wykorzystanych w podręczniku o zamiarze ich publikacji celem uzyskania od twórców lub ich następców prawnych wymaganej zgody za przysługującym wynagrodzeniem w stosownej wysokości. Osoby, których prawa w sposób niezawiniony przez wydawnictwo zostały naruszone, prosimy o bezpośredni kontakt z wydawcą.

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do matematyki na III etapie edukacyjnym - szkoła branżowa I stopnia dla uczniów będących absolwentami ośmioletniej szkoły podstawowej, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr Marii Borowskiej, mgr. Tadeusza Marczewskiego i prof. dr. hab. Tadeusza Zgółki.

Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: szkoła branżowa I stopnia
Rok dopuszczenia: 2020
Numer dopuszczenia: 1074/2/2020

© Copyright by OPERON Sp. z o.o. & Adam Konstantynowicz, Anna Konstantynowicz, Małgorzata Pająk
Gdynia 2020
Wszelkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody wydawcy zabronione.
N7241

Wydawca:
OPERON Sp. z o.o.
81-541 Gdynia, al. Zwycięstwa 96/98
tel. centrali 58 679 00 00
e-mail: info@operon.pl
www.operon.pl

ISBN 978-83-66365-76-6

Zgodnie z decyzją MEN od września 2024 r. obowiązuje zmieniona, uszczuplona o ok. 20% podstawa programowa. W związku z tym w podręczniku znalazły się stosowne oznaczenia.



Takim symbolem oznaczono treści usunięte z podstawy programowej.



Takim symbolem oznaczono treści, które zostały zmienione. Nauczyciel przedstawi uczniowi zmiany i wyjaśni, czego powinien się nauczyć.

Spis treści

I Układy równań

1.1. Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi	8
1.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania	12
1.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników	16
1.4. Rozwiązywanie układów równań metodą graficzną.....	20
1.5. Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi	24
1.6. Rozwiązywanie zadań tekstowych za pomocą układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi	29
1.7. Zadania utrwalające	32

II Planimetria

2.1. Trójkąty i ich własności	36
2.2. Twierdzenie Pitagorasa	44
2.3. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa	52
2.4. Czworokąty i ich własności	55
2.5. Okrąg i koło	66
2.6. Kąty wpisane i środkowe	71
2.7. Cechy podobieństwa trójkątów	75
2.8. Zadania z zastosowaniem cech podobieństwa trójkątów	80
2.9. Zależność między obwodami figur podobnych.....	85
2.10. Zależność między polami figur podobnych	87
2.11. Okrąg wpisany w trójkąt	90
2.12. Okrąg opisany na trójkącie	94
2.13. Ortocentrum i środek ciężkości trójkąta.....	97
2.14. Wielokąty i okręgi.....	100
2.15. Zadania utrwalające	106

III Trygonometria

3.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.....	112
3.2. Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60°	115
3.3. Tablice wartości funkcji trygonometrycznych.....	118
3.4. Zależności między funkcjami trygonometrycznymi	120
3.5. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.....	125
3.6. Zastosowania funkcji trygonometrycznych	129
3.7. Zadania utrwalające	132
Tablice	134

IV Geometria analityczna

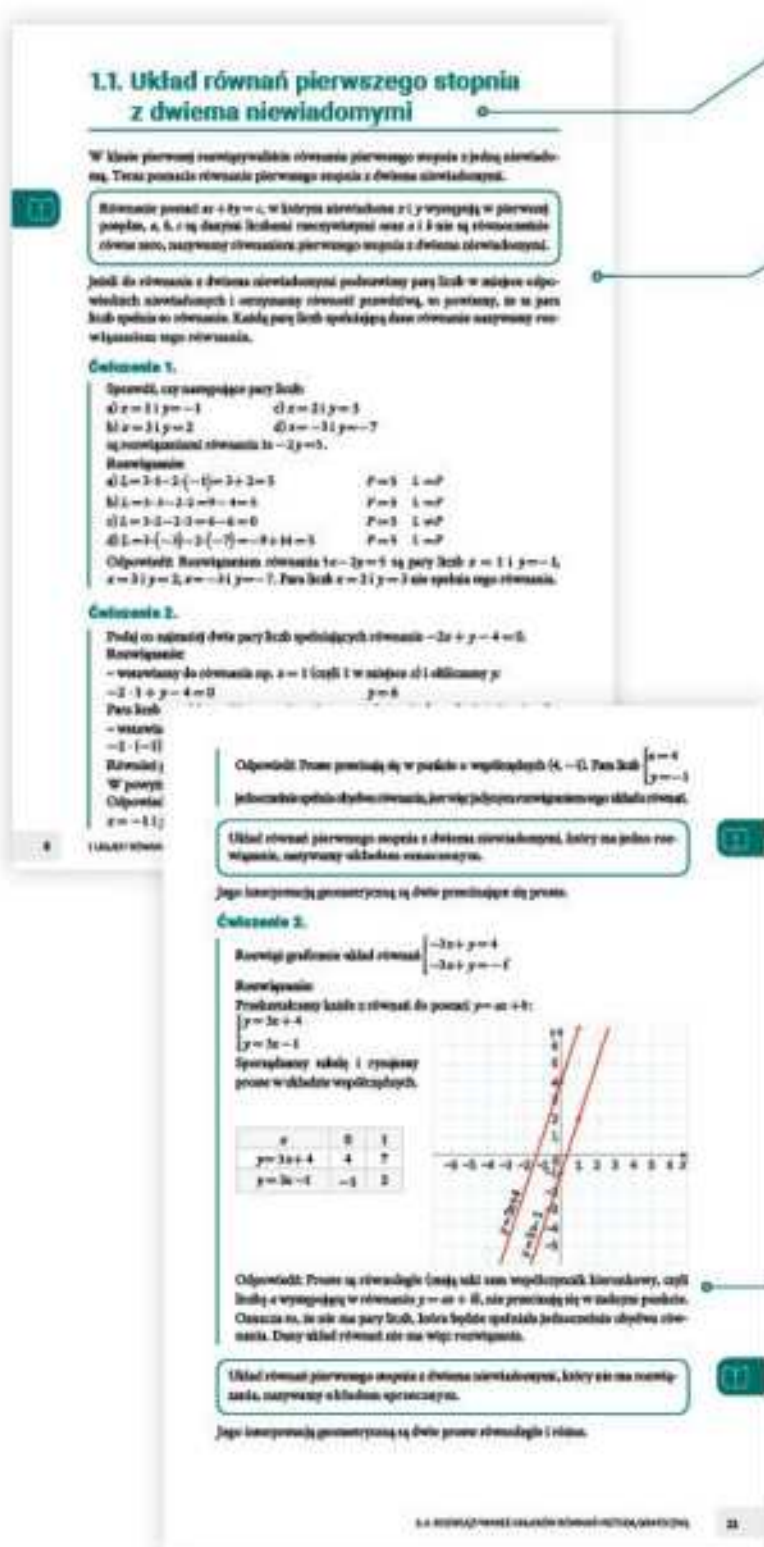
4.1. Równanie prostej w postaci kierunkowej	136
4.2. Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie.....	142
4.3. Punkt wspólny dwóch prostych	146
4.4. Odległość między punktami w układzie współrzędnych.....	149
4.5. Zadania utrwalające	152
Odpowiedzi.....	155

Wstęp

Jak jest zbudowany nasz podręcznik

Podręcznik do matematyki dla szkoły branżowej I stopnia został zaprojektowany z uwzględnieniem potrzeb i stylu nauki uczniów. Pomoże im szybko przyswoić niezbędne informacje, skutecznie powtórzyć wiadomości oraz przygotować się do sprawdzianów i kartkówek.

Przed rozpoczęciem korzystania z podręcznika, zapoznajcie się z jego budową i przyjrzyjcie się wszystkim jego elementom. Zostały one skonstruowane tak, by ułatwić wam naukę i pomóc w błyskawicznym znalezieniu potrzebnych zagadnień.



Podręcznik zawiera tylko niezbędne wiadomości ujęte w jasno i prosto sformułowanych tematach.

Przystępny język publikacji ułatwi wam zrozumienie treści i pozytywnie nastawi was do materiału.

Ikony na marginesach ułatwią wam odnalezienie definicji, najważniejszych treści do zapamiętania oraz zadań:

-  definicja, prawo, zasada
-  zadania sprawdzające
-  zadania do rozwiązania

W tekście pojawiają się **wytłuszczenia**. Dzięki nim łatwo odnajdziecie istotne zagadnienia, pojęcia i nazwy.

1.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Rozwiązać układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi to znaczy wyznaczyć wszystkie jego rozwiązania albo stwierdzić, że rozwiązań nie ma.

Jedną z częściej stosowanych metod rozwiązywania układów równań jest metoda podstawiania. Polega ona na wyznaczeniu z jednego równania układu jednej niewiadomej i podstawieniu jej do drugiego równania układu.

Jeżeli z jednego równania układu wyznaczymy jedną niewiadomą i podstawimy otrzymane wyrażenie do drugiego równania zamiast tej niewiadomej, to układ równań zostanie z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania jest równoważny danemu.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - y = -2 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$ metodą podstawiania.
Rozwiązanie:
- z pierwszego równania wyznaczamy niewiadomą x w zależności od niewiadomej y i podstawiamy do drugiego równania:
 $x = -2 + y$
 $3(-2 + y) + 2y = -4$

Ćwiczenie 3.

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y = -4 \end{cases}$.
Rozwiązanie:
Przekształćmy każde z równań do postaci $y = ax + b$:
 $y = -2x + 1$
 $y = -2x - 4$
Oznaczmy układ dwóch jedynkowych równań. Równanie opisuje tę samą prostą. Rysujemy ją w układzie współrzędnych. Odpowiedź: Układ równań nie ma rozwiązania, więc rozwiązaniem tego układu równań jest zbiór pusty.



Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, który nie ma rozwiązania, nazywamy układem nieliniowym.

Jego interpretację geometryczną możemy prosto pokazać tak:

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

- Rozwiąż graficznie układy równań:
a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 6y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x - 6y = 9 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$
- Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste przechodzące przez podane punkty:
a) $A = (2, -3)$, $B = (4, 1)$ c) $C = (-1, -4)$, $D = (1, 0)$
b) $E = (0, -1)$, $F = (3, -5)$ d) $G = (1, 1)$, $H = (2, 1)$

Śledzenie **rozwiązania przykładów** pomoże wam łatwiej zrozumieć omawiane zagadnienia.

Definicje, prawa i zasady wyróżniono kolorową ramką. Dzięki temu od razu je zauważycie i szybko znajdziecie podczas powtórek.

Zadania do rozwiązywania możecie przećwiczyć w toku lekcji lub wykorzystać do nauki w domu lub przed kartkówką czy sprawdzianem.

Zadania sprawdzające posłużą wam do weryfikacji zdobytych umiejętności.

Zadania o podwyższonym stopniu trudności oznaczono gwiazdką: 4*.

Uwaga: odpowiedzi do zadań wymagających pisemnego rozwiązania należy zapisywać w zeszycie.

Na końcu działu znajdują się **zadania utrwalające**, które pomogą wam w usystematyzowaniu wiedzy.

- Rozwiąż graficznie układy równań, a następnie określ pole trójkątów, które tworzą z X i Y proste opisane równaniami układów:
a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y - 7x = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$
- Rozwiąż graficznie poniższe układy równań w jednym układzie współrzędnych, a następnie określ pole czworokąta ograniczonego prostymi opisanymi równaniami układów:
 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2y = -8 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ jest rysunek



A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

X.

Y.

Z.

- Za 3 kg jabłek i 2 kg drożdży zapłacono 14,50 zł. Wtedy za 4 kg jabłek i 1 kg drożdży zapłacono 20,50 zł. Jeśli pan z naszego sklepu 1 kg jabłek w słodycz, a pan z naszego sklepu 1 kg drożdży w słodycz, to spróbujmy ustalić w tabeli nasze przekształcone układy równań:
A. $\begin{cases} 3x + 2y = 14,5 \\ 4x + y = 20,5 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 3x + 2y = 20,5 \\ 4x + y = 14,5 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + y = 14,5 \\ x + y = 20,5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 3x + 2y = 14,5 \\ 4x + 3y = 20,5 \end{cases}$

1.7. Zadania utrwalające

- Podaj wszystkie pary liczb całkowitych spełniających, które spełniają poniższe równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi:
a) $x + y = 5$ b) $x - y = 5$ c) $2x + y = 5$
- Sprawdź, czy poniższe układy równań mają ten sam zbiór rozwiązań:
a) $\begin{cases} 2x + 1 = 3y - 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ i $\begin{cases} 3(x - y) + 2 = x - 5 \\ 7 - 5(1 - x) + 2y = 4 + 3y \end{cases}$
b) $\begin{cases} 1 - (x + y) = 2x - (1 - 2y) \\ 1 - (2x - y) + 3 = y + 2(1 + 1) \end{cases}$ i $\begin{cases} 0,3x + 0,3y = 0,3 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$
- Rozwiąż układy równań metodą podstawiania i sprawdź rozwiązanie:
a) $\begin{cases} x + 5y = 25 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 7y = 10 \\ 4x + 8y = -16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 8y = -16 \\ 2x - 2y = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 4y = 80 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$
- Rozwiąż układy równań metodą przeciwnych współrzędnych i sprawdź rozwiązanie:
a) $\begin{cases} x + y = 1,3 \\ x - y = 2,5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 3y = -4 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$
- Rozwiąż układy równań:
a) $\begin{cases} 2,5x + 0,5y = -4 \\ 0,5x - 0,5y = 0,5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x - 1) + 2(x - 2) = 0 \\ x - 2y = 1 - 2(x + 2y) \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2(x + 3) - 9 = 1 - y \\ x - 2(y + 1) = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x - 3x) - 3,5 = 0,5y - x \\ 0,15y - 0,15x = -0,05 \end{cases}$
- Rozwiąż układy równań:
a) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ l) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ m) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ n) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ o) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ p) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ q) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ r) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ s) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ t) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ u) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ v) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ w) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ x) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ y) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$ z) $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = 1 \end{cases}$



UKŁADY RÓWNAŃ

1.1. Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

W klasie pierwszej rozwiązywaliście równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Teraz poznacie równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.



Równanie postaci $ax + by = c$, w którym niewiadome x i y występują w pierwszej potęgze, a , b , c są danymi liczbami rzeczywistymi oraz a i b nie są równocześnie równe zero, nazywamy równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Jeżeli do równania z dwiema niewiadomymi podstawimy parę liczb w miejsce odpowiednich niewiadomych i otrzymamy równość prawdziwą, to powiemy, że ta para liczb spełnia to równanie. Każdą parę liczb spełniającą dane równanie nazywamy **rozwiązaniem tego równania**.

Ćwiczenie 1.

Sprawdź, czy następujące pary liczb:

a) $x = 1$ i $y = -1$

c) $x = 2$ i $y = 3$

b) $x = 3$ i $y = 2$

d) $x = -3$ i $y = -7$

są rozwiązaniami równania $3x - 2y = 5$.

Rozwiązanie:

a) $L = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5$

$P = 5 \quad L = P$

b) $L = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5$

$P = 5 \quad L = P$

c) $L = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$

$P = 5 \quad L \neq P$

d) $L = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-7) = -9 + 14 = 5$

$P = 5 \quad L = P$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $3x - 2y = 5$ są pary liczb $x = 1$ i $y = -1$, $x = 3$ i $y = 2$, $x = -3$ i $y = -7$. Para liczb $x = 2$ i $y = 3$ nie spełnia tego równania.

Ćwiczenie 2.

Podaj co najmniej dwie pary liczb spełniających równanie $-2x + y - 4 = 0$.

Rozwiązanie:

– wstawiamy do równania np. $x = 1$ (czyli 1 w miejsce x) i obliczamy y :

$-2 \cdot 1 + y - 4 = 0$

$y = 6$

Para liczb $x = 1$ i $y = 6$ jest rozwiązaniem tego równania, bo $-2 \cdot 1 + 6 - 4 = 0$.

– wstawiamy do równania, np. $x = -1$ i obliczamy y :

$-2 \cdot (-1) + y - 4 = 0$

$y = 2$

Również para liczb $x = -1$ i $y = 2$ spełnia to równanie, bo $-2 \cdot (-1) + 2 - 4 = 0$.

W powyższy sposób możemy wyznaczyć wiele par liczb spełniających to równanie.

Odpowiedź: To równanie spełnia wiele par liczb, między innymi $x = 1$ i $y = 6$ oraz $x = -1$ i $y = 2$.

Ćwiczenie 3.

Znajdź takie dwie liczby x i y , których suma jest równa 5, a różnica 1.

Rozwiązanie:

Jest wiele par liczb, których suma jest równa 5, np. $x = 1$ i $y = 4$, $x = 2$ i $y = 3$, $x = 3$ i $y = 2$.

Jest również wiele par liczb, których różnica wynosi 1, np. $x = 5$ i $y = 4$, $x = 4$ i $y = 3$, $x = 3$ i $y = 2$.

Para liczb $x = 3$ i $y = 2$ spełnia jednocześnie te warunki.

Odpowiedź: Suma liczb 3 i 2 jest równa 5, zaś różnica liczb 3 i 2 wynosi 1.

Do zapisywania i rozwiązywania tych zadań i problemów, w których występuje więcej niż jedna niewiadoma, stosujemy układy równań.

Układem równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x , y nazywamy zestaw dwóch równań: $ax + by = c$ i $dx + ey = f$, gdzie a i b oraz c i d są danymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi dodatkowo warunki: liczby a i b nie są jednocześnie równe zero i liczby c i d nie są jednocześnie równe zero. Taki układ zapisujemy w postaci:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Rozwiązaniem **układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi** x , y jest każda para liczb x i y , która spełnia jednocześnie oba równania. To określenie *pierwszego stopnia* będziemy czasem pomijać.

Równania z dwiema niewiadomymi nazywamy równoważnymi, gdy są spełnione przez te same pary liczb (mają te same rozwiązania) lub gdy nie spełnia ich żadna para liczb (gdy nie mają rozwiązań).

Równanie równoważne do danego równania z dwoma niewiadomymi możemy otrzymać:

- w wyniku przekształcenia którejkolwiek ze stron danego równania poprzez opuszczenie nawiasów lub zredukowanie wyrazów podobnych,
- przenosząc ze znakiem przeciwnym wyraz (lub wyrazy) danego równania na jego drugą stronę,
- mnożąc lub dzieląc obie strony danego równania przez taką samą liczbę różną od zera.

Przekształcając którekolwiek z równań układu równań w równanie równoważne, **otrzymujemy równoważne układy równań**, czyli takie, które są spełnione przez te same pary liczb (mają te same rozwiązania) lub gdy nie spełnia ich żadna para liczb (gdy nie mają rozwiązań).



Ćwiczenie 4.

Sprawdź, czy para liczb $x=2$ i $y=1$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 1,5x + 3y = 6 \end{cases}$

Rozwiązanie:

Podstawiamy do obu równań układu $x=2$ i $y=1$:

$$L_1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \qquad P_1 = 3 \qquad L_1 = P_1$$

$$L_2 = 1,5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 6 \qquad P_2 = 6 \qquad L_2 = P_2$$

Odpowiedź: Para liczb $x=2$ i $y=1$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 1,5x + 3y = 6 \end{cases}$

Ćwiczenie 5.

Sprawdź, czy podane układy równań są równoważne.

$$\begin{cases} 2x + 2y = x + 4 \\ 5(x - 1) = 2x + y \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy każde z równań pierwszego układu $\begin{cases} 2x + 2y = x + 4 \\ 5(x - 1) = 2x + y \end{cases}$ w równanie równoważne.

$$\begin{cases} 2x + 2y = x + 4 \\ 5(x - 1) = 2x + y \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \text{przenosimy wyraz } x \text{ na lewą stronę tego równania} \\ - \text{opuszczamy nawias po lewej stronie tego równania} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = x + 4 \\ 5(x - 1) = 2x + y \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \text{przenosimy wyraz } x \text{ na lewą stronę tego równania} \\ - \text{opuszczamy nawias po lewej stronie tego równania} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - x = 4 \\ 5x - 5 = 2x + y \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \text{redukujemy wyrazy podobne} \\ - \text{przenosimy wyrazy } 2x \text{ i } -5 \text{ odpowiednio na lewą i prawą} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - x = 4 \\ 5x - 5 = 2x + y \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \text{redukujemy wyrazy podobne} \\ - \text{przenosimy wyrazy } 2x \text{ i } -5 \text{ odpowiednio na lewą i prawą} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - 5 = 2x + y \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \text{redukujemy wyrazy podobne} \\ - \text{przenosimy wyrazy } 2x \text{ i } -5 \text{ odpowiednio na lewą i prawą} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - 2x - y = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \text{redukujemy wyrazy podobne} \\ - \text{przenosimy wyrazy } 2x \text{ i } -5 \text{ odpowiednio na lewą i prawą} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \text{redukujemy wyrazy podobne} \\ - \text{przenosimy wyrazy } 2x \text{ i } -5 \text{ odpowiednio na lewą i prawą} \end{array}$$

Odpowiedź: Układy równań $\begin{cases} 2x + 2y = x + 4 \\ 5(x - 1) = 2x + y \end{cases}$ i $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ są równoważne.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

- Podaj dwie pary liczb spełniających dane równanie.
a) $3x + y = 3$ b) $2x - y - 4 = 0$ c) $-0,4x + 0,5y = 2$
- Na podstawie podanych informacji zapisz odpowiednie równania z dwiema niewiadomymi.
a) Suma liczb x i y wynosi 8.
b) Trzecia część liczby y jest o 1 mniejsza od połowy liczby x .
c) Obwód trójkąta równoramiennego o ramieniu o długości a i podstawie o długości b jest równy 15.

3. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych, które spełniają poniższe równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
 a) $x + y = 6$ b) $-x + 3 = y$ c) $x + 4y = 8$
4. Sprawdź, czy następujące pary liczb:
 a) $x = 3$ i $y = 4$ c) $x = -3$ i $y = 10$
 b) $x = 1$ i $y = 16$ d) $x = -9$ i $y = 16$
 są rozwiązaniami układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2y - 3x = 29 \end{cases}$.
5. Sprawdź, czy para liczb $x = 9$ i $y = 4$ jest rozwiązaniem układu równań:
 $\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 5(x - 2) \\ 2(x + 5) - (y - 3) - 2 = 25 \end{cases}$
6. Zapisz odpowiednie układy równań.
 a) Liczba x jest 5 razy większa od liczby y , a różnica liczb x i y wynosi 8.
 b) 25% liczby y wynosi tyle, ile 50% liczby x . Suma 20% liczby x i 60% liczby y wynosi 10.
 c) Obwód prostokąta o bokach o długości a i b jest równy 20 cm, a różnica długości jego boków wynosi 4 cm.
7. Sprawdź, czy para liczb $x = 2$ i $y = -1$ spełnia układy równań:
 $\begin{cases} 4 - 2(y - x) = 5(1 - y) - x + 1 \\ 5(x + y) = 3(1 + 7x) \end{cases}$ i $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE



1. Równanie $2x + y = 8$ spełnia para liczb
 A. $x = -4$ i $y = 8$ C. $x = 8$ i $y = 8$
 B. $x = -8$ i $y = 16$ D. $x = 8$ i $y = -8$
2. Para liczb $x = 1$ i $y = -1$ jest rozwiązaniem układu równań
 A. $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} -5x + 2y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -5x + 2y = -7 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$
3. Która para liczb jest rozwiązaniem układu równań: $\begin{cases} 11x - 3y = 43 \\ 5x + y = 29 \end{cases}$?
- A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -7 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$
4. Dane jest równanie $y = -2(2 + x)$. Które równanie należy dołączyć do danego, aby para liczb $x = -2$ i $y = 0$ była rozwiązaniem tak utworzonego układu?
- A. $2x - 4y = 4$ C. $y - 4 = x$
 B. $y = 2(2 + x)$ D. $y + 2x = 4$

1.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Rozwiązać układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi to znaczy wyznaczyć wszystkie jego rozwiązania albo stwierdzić, że rozwiązań nie ma.

Jedną z częściej stosowanych metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**. Polega ona na wyznaczeniu z któregoś równania układu jednej niewiadomej i podstawieniu jej do drugiego równania układu.



Jeżeli z jednego równania układu wyznaczymy jedną niewiadomą i podstawimy otrzymane wyrażenie do drugiego równania zamiast tej niewiadomej, to układ równań złożony z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania jest równoważny danemu.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - y = -7 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązanie:

– z pierwszego równania wyznaczamy niewiadomą x w zależności od niewiadomej y i wstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{cases} x = -7 + y \\ 3(-7 + y) + 2y = -6 \end{cases}$$

– pierwsze równanie przepisujemy, a drugie równanie rozwiązujemy:

$$\begin{cases} x = -7 + y \\ -21 + 3y + 2y = -6 \end{cases}$$

– pierwsze równanie przepisujemy, a z drugiego równania wyznaczamy niewiadomą y :

$$\begin{cases} x = -7 + y \\ 5y = 15 \\ x = -7 + y \\ y = 3 \end{cases}$$

– wyznaczoną wartość niewiadomej y wstawiamy do pierwszego równania:

$$\begin{cases} x = -7 + 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

– wyznaczamy x z pierwszego równania:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{– podajemy parę liczb będącą rozwiązaniem układu równań.}$$

Sprawdzenie:

Sprawdzamy poprawność rozwiązywania przez nas podanego układu równań i w tym celu sprawdzimy, czy wyznaczona para liczb $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$ spełnia każde z równań układu.

I równanie: $L = -4 - 3 = -7, P = -7, L = P$

II równanie: $L = 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 = 6, P = 6, L = P$

Odpowiedź: Para liczb $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$ spełnia dany układ równań. Jest to jedyne rozwiązanie układu równań liniowych.

Przy rozwiązywaniu układu równań metodą podstawiania można sobie pozwolić na uproszczenie zapisu. Gdy otrzymamy równanie z jedną niewiadomą, możemy je rozwiązać oddzielnie, nie przepisując za każdym razem całego układu dwóch równań.

Ćwiczenie 2.

Ustal, ile rozwiązań ma dany układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 6y = 12 \\ 5x + 2y = 17 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 3 - 2y = -x \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 24y = 8x - 16 \\ 3y - x = 4 \end{cases} \end{array}$$

Rozwiązanie:

$$\text{a)} \begin{cases} x = 6 - 3y \\ 5(6 - 3y) + 2y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - 3y \\ 30 - 15y + 2y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - 3y \\ -13y = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Odpowiedź: Układ równań $\begin{cases} 2x + 6y = 12 \\ 5x + 2y = 17 \end{cases}$ ma jedno rozwiązanie.

$$\text{b)} \begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(2y - 3) + 4y = 6 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ -4y + 6 + 4y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ -4y + 6 + 4y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot y = 0 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \end{cases}$$

Równanie $0 \cdot y = 0$ jest równoważne równaniu $0 \cdot y + 0 \cdot x = 0$, więc rozwiązaniem tego równania jest dowolna para liczb rzeczywistych. Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Równanie $x = 2y - 3$ ma zatem również nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: Układ równań $\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

$$c) \begin{cases} 24y = 8x - 16 \\ x = 3y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24y = 8x - 16 \quad |:8 \\ x = 3y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 3y - 4 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 4 \end{cases}$$

Odpowiedź: Układ równań $\begin{cases} 24y = 8x - 16 \\ 3y - x = 4 \end{cases}$ nie ma rozwiązania.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Rozwiąż układy równań.

$$a) \begin{cases} x = y \\ 3x + y = 8 \end{cases} \quad b) \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 5x + y = 11 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 4x - y = 2 \\ y = 18 - x \end{cases}$$

2. Wyznacz z równania każdą z niewiadomych.

$$a) 2x + y = 7 \quad c) \frac{1}{6}y = x + 2 \quad e) \frac{4}{5}x = \frac{2}{3}y$$

$$b) x - y = 3 \quad d) 4(x - y) = 3x \quad f) 8x + 4y = 12$$

W którym przypadku wyznaczenie niewiadomej było łatwiejsze?

3. Rozwiąż układy równań metodą podstawiania i sprawdź rozwiązania.

$$a) \begin{cases} x - 2y = 8 \\ x + 6y = 16 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2(y - 7) = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y - 3 = x \\ x + 9 = -2y \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + 2 = y - 1 \\ 3(1 - x) = 3(y - 4) \end{cases} \quad f) \begin{cases} 8x + 16y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

4. Rozwiąż układy równań metodą podstawiania.

$$a) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 5x + y = 4 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad e) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 7y = 42 \\ -x + 4y = 39 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x - y = 11 \\ 3x + 2y = 27 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

5. Zapisz i rozwiąż układy równań metodą podstawiania.
- a) Suma liczb a i b jest równa 30, a liczba o 5 mniejsza od liczby a jest równa liczbie o 7 większej od liczby b .
- b) Różnica dwóch liczb k i m wynosi 4, a liczba k jest dwukrotnie większa od liczby m .
6. Rozwiąż układy równań metodą podstawiania.
- a)
$$\begin{cases} 0,2x + 0,3y = 1,8 \\ x + y = 7 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} -0,2x + 0,1y = 0,6 \\ 0,3x - 0,2y = -0,9 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} 0,01x - 0,02y = -0,14 \\ x - 0,5y = -5 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} 0,2x + 0,15y = 0,7 \\ 0,01x + 0,3y = 0,23 \end{cases}$$
7. Rozwiąż układy równań metodą podstawiania.
- a)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 3 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \\ -\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -2 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \\ x + \frac{y}{2} = 5 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} \frac{x}{10} - \frac{y}{5} = -1 \\ \frac{y}{12} - \frac{x}{6} = \frac{1}{4} \end{cases}$$
8. Sprawdź, ile rozwiązań ma każdy z danych układów równań.
- a)
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = 2 \\ 3x - 4y = 24 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 3(x + y) = 5y \\ y - x = 0,5 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} \frac{2x - 3y}{4} = -1 \\ x + 4 = 1,5y \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} 0,6x - 0,7y = 4 \\ 0,5y - 0,2x = -0,8 \end{cases}$$
9. Ustal, który z podanych układów równań ma jedno rozwiązanie, który nieskończenie wiele, a który nie ma rozwiązań.
- a)
$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -3x - 21 = 6y \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ y - x = 8 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 1 \\ 2x + 1 = 9 - 3(y - 2) \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x - 2,5y = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$
10. Rozwiąż układy równań metodą podstawiania.
- a)
$$\begin{cases} 2(x + 2) + 2,5(x - y) = 8,5 \\ 3(y + 2) + 2(x + y) = 13 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} \frac{x+5}{2} + \frac{2y-1}{3} = 4 \\ \frac{3x+1}{2} + \frac{5y+2}{4} = 5 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} 3(x - y) - 2(x + y) = -4 \\ 5(x + y) - 7(x - y) = 15 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} \frac{x+5}{5} - \frac{y-2}{2} = 4,4 \\ \frac{x-3}{3} - \frac{2+y}{6} = -2 \end{cases}$$



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Zdanie „Podwojona suma liczb x i y wynosi 12, a ich różnica jest równa 1” można zapisać w postaci układu równań

A. $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2(x + y) = 12 \\ x + y = 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2(x + y) = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 24 \\ x - y = 1 \end{cases}$

2. Układ równań $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 11 \end{cases}$ jest równoważny układowi

A. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x = 11 + y \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 4 + 2x \\ x + y = 11 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + y \\ x + y = 11 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ y = 11 - x \end{cases}$

3. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 6 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 0 \end{cases}$ jest para liczb

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$

4. Dany układ równań $\begin{cases} 4x - 6y = 10 \\ 3y - 2x = 5 \end{cases}$

A. nie ma rozwiązań
B. ma dwa rozwiązania

C. ma nieskończenie wiele rozwiązań
D. ma jedno rozwiązanie

1.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Bardzo dogodną metodą rozwiązywania układów równań jest metoda przeciwnych współczynników. Polega ona na dodawaniu równań stronami, gdy przy tej samej niewiadomej w dwóch równaniach mamy przeciwne współczynniki.

Czasami zanim dodamy równania stronami, musimy najpierw pomnożyć obie strony jednego równania (lub obu równań) przez taką liczbę (lub liczby), aby współczynniki przy tej samej niewiadomej w obu równaniach były liczbami przeciwnymi.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie:

– pierwsze równanie mnożymy obustronnie przez 2 (wtedy w obu równaniach przy zmiennej y będą przeciwne współczynniki):

$$\begin{cases} x + y = 7 \end{cases} \cdot 2$$
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 2y = 14 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

– dodajemy równania stronami:

$$2x + x + 2y - 2y = 14 + 4$$

– wyrazy z niewiadomą y się zredukują:

$$3x = 18 \quad |:3$$

– obliczamy niewiadomą x :

$$x = 6$$

– podstawiamy obliczoną wartość w miejsce niewiadomej x do dowolnego równania podanego układu równań i obliczamy niewiadomą y :

$$6 + y = 7 \text{ – z pierwszego równania układu}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Sprawdzenie:

Sprawdzamy poprawność rozwiązywania podanego przez nas układu równań i w tym celu sprawdzimy, czy wyznaczona para liczb $\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$ spełnia każde z równań układu.

$$\text{I równanie: } L = 6 + 1 = 7, \quad P = 7, \quad L = P$$

$$\text{II równanie: } L = 6 - 2 \cdot 1 = 4, \quad P = 4, \quad L = P$$

Odpowiedź: Para liczb $\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$ spełnia dany układ równań. Jest to jedyne rozwiązanie tego układu równań.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Rozwiąż układy równań metodą przeciwnych współczynników i sprawdź otrzymane rozwiązania.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -7x + 2y = 4 \\ 7x - 4y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 12x - 8y = 20 \\ -12x + 6y = -24 \end{cases}$

2. Rozwiąż układy równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 7y = 8 \\ -3x - 3y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10x - 8y = 4 \\ 2,5x + 8y = 21 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -0,1x + 0,1y = 0,5 \\ 0,1x + 0,1y = 0,5 \end{cases}$

3. Rozwiąż podane układy równań metodą podstawiania oraz metodą przeciwnych współczynników. Rozstrzygnij za każdym razem, która metoda jest dla Ciebie wygodniejsza.

a) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y + 2x = 5 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 6 = -5y \\ 2x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$

4. Ustal, który z podanych układów równań ma jedno rozwiązanie, który nieskończenie wiele, a który nie ma rozwiązań.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 25 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 5 - 2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x + 2y = 14 \\ -5x - 6y = -23 \end{cases}$

5. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 8y = 14 \\ -9x + 2y = 12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x + y = 29 \\ -3x + 7y = 23 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ 5x + 10y = 35 \end{cases}$

6. Rozwiąż układy równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 2x + 3y + 6 = 4y + 2 + x \\ -x + 2y + 3 = 1 - 3x - 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} -y + 2 - 3x = 3 - 4x - 2y \\ 3x + 7y - 4 = 2x - 5 + 8y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 4y - 11 = -7x - 18 \\ 5x + 2y - 21 = -4x - 4y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + 2 = 11 - x - 4y \\ 12x - 15y + 17 = 9x - 9y + 12 \end{cases}$

7. Rozwiąż układy równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 4y - 3(x + 2) = 3y - x - 7 \\ 4 - (x + y) = 2(x - y) + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7 - (x - y) = 2x + 3(y + 3) \\ 2(x + 5) + y = 3(y + 10) - 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x + 1) - (y - 1) = 4 \\ 3(y - x + 2) = 2(y - x) + 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4(2x - 1) - 12 = 28 - 5(3y - 2) \\ 7(x + y) + 5y = 12 - 8(y - 5) - (x - 7) \end{cases}$

8. Rozwiąż układy równań.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{5x}{9} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x-2}{5} - \frac{y-2}{5} = 0 \\ \frac{x}{12} + \frac{y}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x-1}{2} = 1 - \frac{y-1}{3} \\ \frac{y-1}{2} = 1 - \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

9. Znajdź liczby x i y , wiedząc, że:

- a) różnica liczb x i y wynosi 12, a ich suma jest o 5 większa od ich różnicy;
- b) podwojona liczba y jest o 5 większa od podwojonej liczby x , a połowa liczby x jest równa trzeciej części liczby y .

10. Ułóż i rozwiąż odpowiednie układy równań.

- a) Liczba x jest o 8 mniejsza od liczby y , a suma liczb x i y wynosi 20.
- b) 20% liczby x wynosi tyle, ile 40% liczby y . Różnica 30% liczby x i 10% liczby y wynosi 5.
- c) Obwód trójkąta równoramiennego o podstawie a i ramieniu b jest równy 24. Ramię tego trójkąta jest o 6 dłuższe od podstawy.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE



1. Po dodaniu stronami równań $2x - 5y = 3$ oraz $3y + 2x = -2$ otrzymamy równanie
A. $5x - 3y = 1$ B. $3x - 2y = -1$ C. $4x - 2y = 1$ D. $6x - 10y = -6$

2. Dany jest układ równań
$$\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ -6x + 4y = 5 \end{cases}$$

Aby rozwiązać ten układ równań metodą przeciwnych współczynników, przed dodaniem równań stronami należy

- A. pomnożyć pierwsze równanie przez 3.
- B. pomnożyć pierwsze równanie przez -3 .
- C. pomnożyć drugie równanie przez 3.
- D. pomnożyć drugie równanie przez -3 .

3. Dany jest układ równań
$$\begin{cases} -3x + 4y = 2 \\ 4x - 5y = -10 \end{cases}$$

Gdy pomnożymy obie strony pierwszego równania przez 4 i drugiego przez 3 oraz uzyskane równania dodamy stronami, to otrzymamy

- A. $-12x + 16y - 12x + 15y = -8 + 30$ C. $12x + 16y - 12x + 15y = 8 - 30$
- B. $12x - 16y + 12x - 15y = 8 - 30$ D. $-12x + 16y + 12x - 15y = 8 - 30$

4. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases}$ jest para liczb

A. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

1.4. Rozwiązywanie układów równań metodą graficzną

Z pierwszej klasy wiemy, że wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest linia prosta opisana równaniem $y = ax + b$, czyli równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y . Zatem każde równanie z układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi opisuje prostą, którą możemy zaznaczyć w układzie współrzędnych.

Wykreślenie w prostokątnym układzie współrzędnych prostych opisanych równaniami układu równań i odczytanie współrzędnych punktów wspólnych obu prostych nazywamy **metodą graficzną rozwiązywania układu równań**. Samo wykreślenie tych prostych nazywamy interpretacją geometryczną układu równań.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = 5 \end{cases}$.

Rozwiązanie:

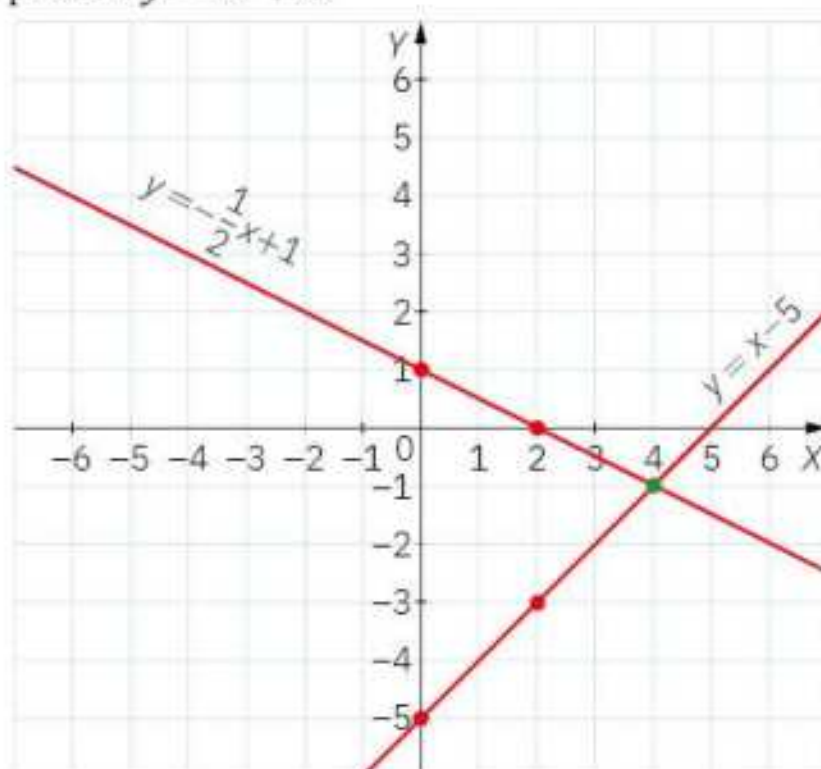
Przekształcamy każde z równań do postaci $y = ax + b$:

$$\begin{cases} 2y = -x + 2 \quad | :2 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

Dwa różne punkty wyznaczają dokładnie jedną prostą, zatem aby narysować proste opisane równaniami układu równań należy w miejsce x wstawić dowolną liczbę i obliczyć y . Przedstawiamy to w postaci tabeli.

x	0	2
$y = -\frac{1}{2}x + 1$	1	0
$y = x - 5$	-5	-3



Odpowiedź: Proste przecinają się w punkcie o współrzędnych $(4, -1)$. Para liczb $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ jednocześnie spełnia obydwa równania, jest więc jedynym rozwiązaniem tego układu równań.

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, który ma jedno rozwiązanie, nazywamy **układem oznaczonym**.

Jego interpretacją geometryczną są dwie przecinające się proste.

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} -3x + y = 4 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$.

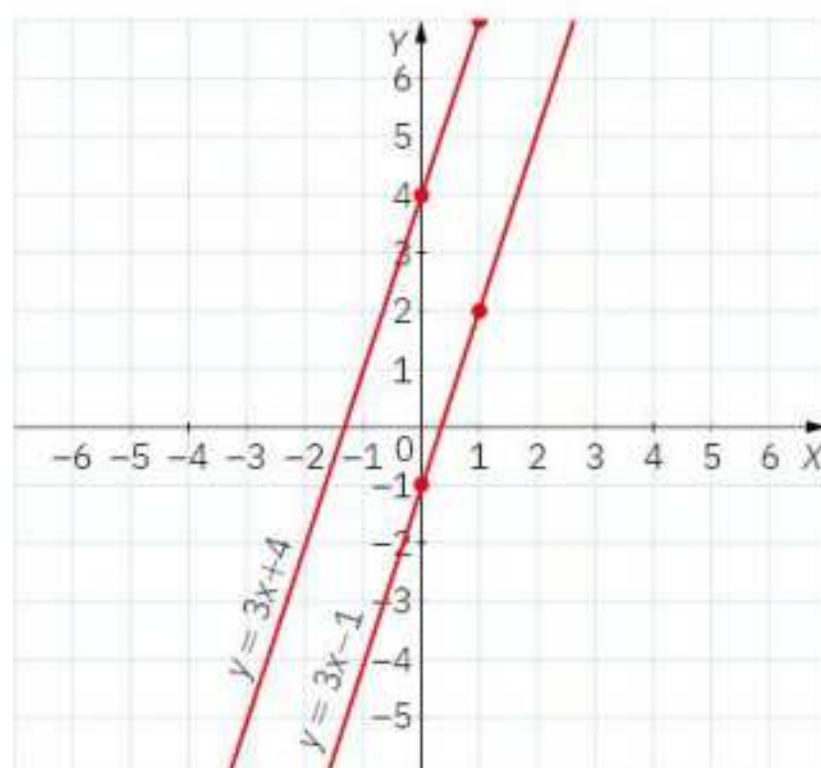
Rozwiązanie:

Przekształcamy każde z równań do postaci $y = ax + b$:

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

Sporządzamy tabelę i rysujemy proste w układzie współrzędnych.

x	0	1
$y = 3x + 4$	4	7
$y = 3x - 1$	-1	2



Odpowiedź: Proste są równoległe (mają taki sam współczynnik kierunkowy, czyli liczbę a występującą w równaniu $y = ax + b$), nie przecinają się w żadnym punkcie. Oznacza to, że nie ma pary liczb, która będzie spełniała jednocześnie obydwa równania. Dany układ równań nie ma więc rozwiązania.

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, który nie ma rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.

Jego interpretacją geometryczną są dwie proste równoległe i różne.

Ćwiczenie 3.

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y = -1 \end{cases}$

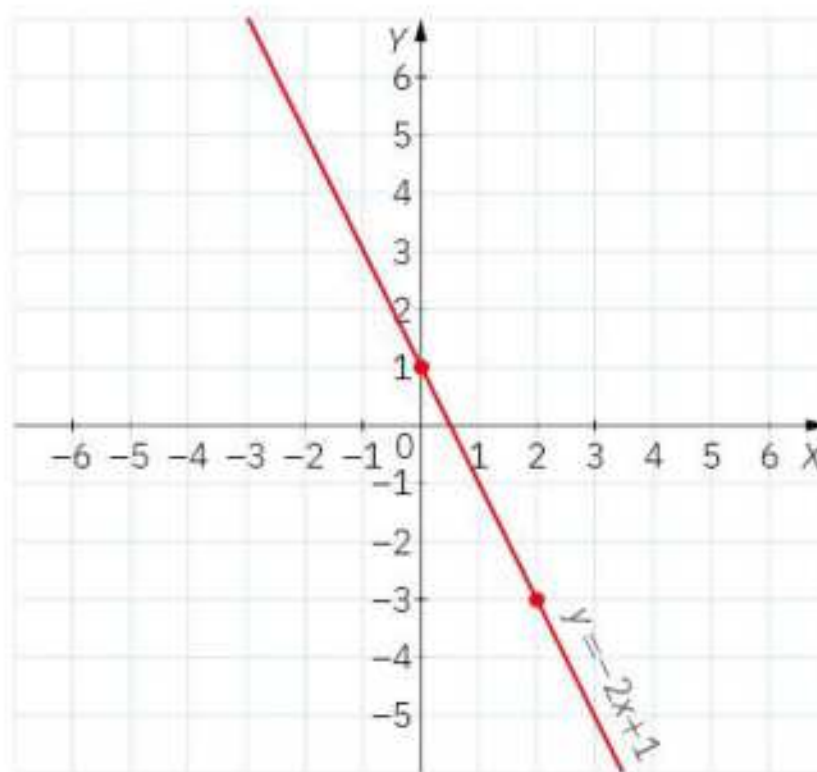
Rozwiązanie:

Przekształcamy każde z równań do postaci $y = ax + b$:

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ dwóch jednakowych równań. Równania opisują tę samą prostą. Rysujemy ją w układzie współrzędnych.

Odpowiedź: Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (ma nieskończenie wiele punktów wspólnych). Współrzędne każdego punktu leżącego na prostej, na rysunku obok, są rozwiązaniem tego układu równań.



Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Jego interpretację geometryczną stanowią proste pokrywające się.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Rozwiąż graficznie układy równań.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x = 12 + 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 1,5x + y = 2,5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 0,5y = 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0,1x - 0,2y = 0,3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

2. Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste przechodzące przez podane punkty.

a) $A = (0, -3)$, $B = (4, 1)$

c) $C = (-3, -6)$, $D = (11, 8)$

b) $E = (1, -1)$, $F = (3, -5)$

d) $G = (1, 1,5)$, $H = (2, 3)$

3. Rozwiąż graficznie układy równań, a następnie oblicz pola trójkątów, które tworzą oś X , i proste opisane równaniami układu.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = -4 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y - 7x = 0 \\ x - y = 5 \end{cases}$

4. Rozwiąż graficznie poniższe układy równań w jednym układzie współrzędnych, a następnie oblicz pole czworokąta ograniczonego prostymi opisanymi równaniami układu.

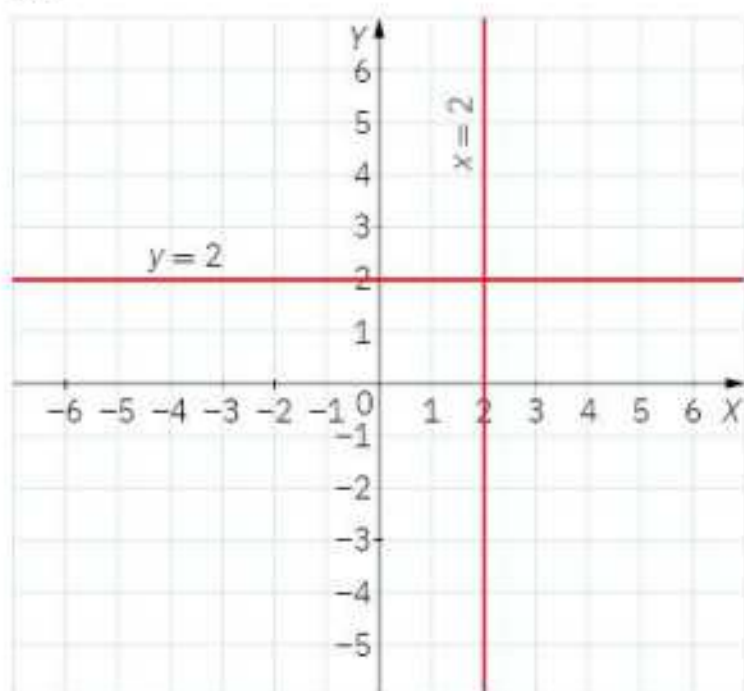
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -8 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

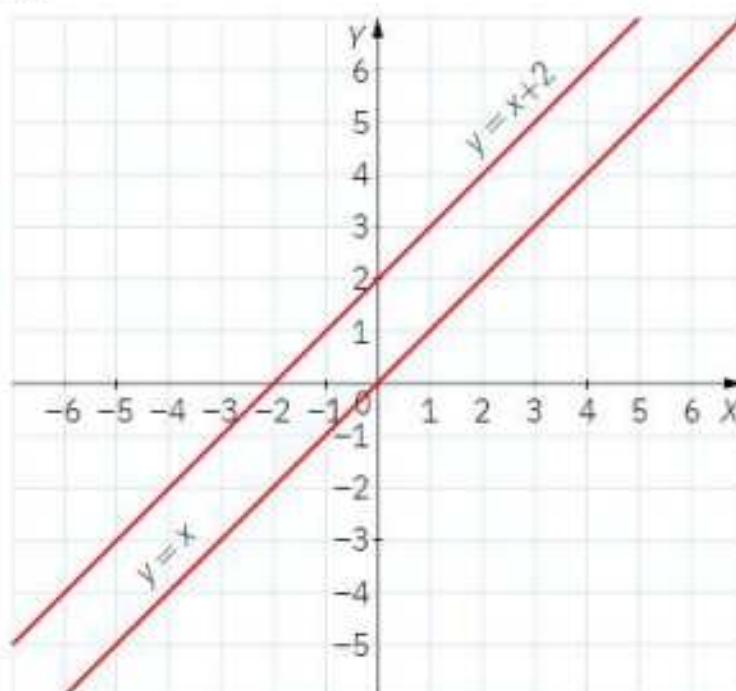
ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Interpretacją geometryczną układu równań $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ jest rysunek

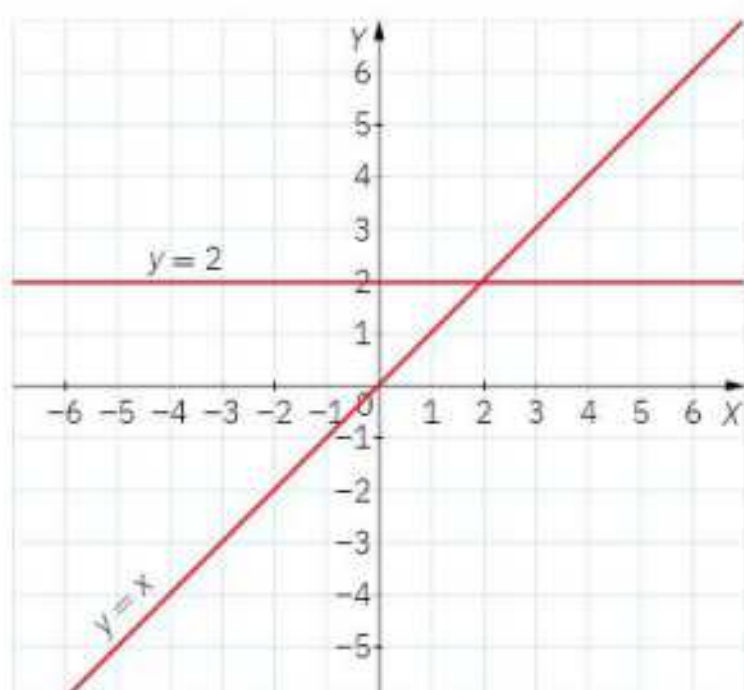
A.



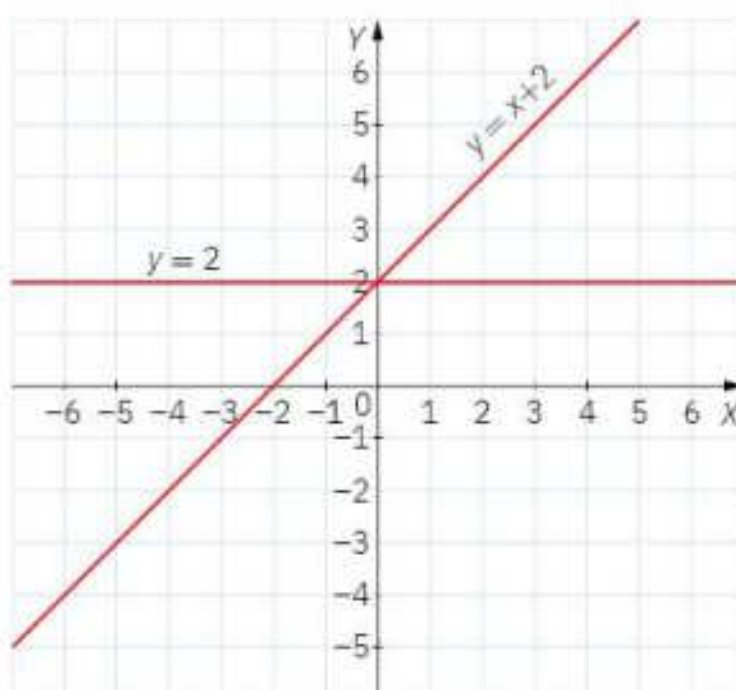
C.



B.

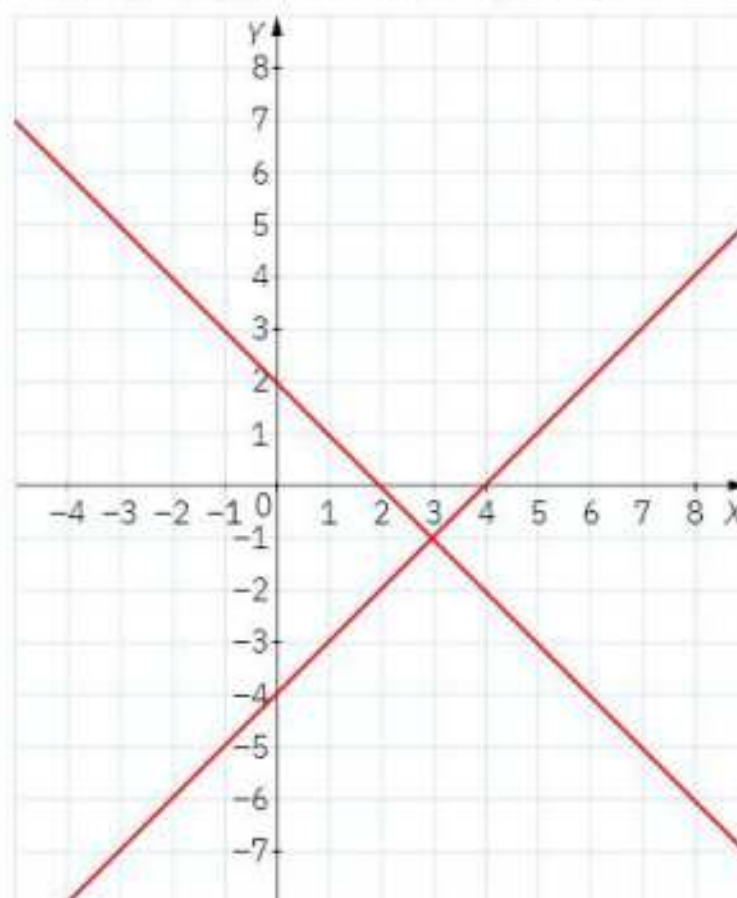


D.



2. Układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawia wykres, to

- A. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$
B. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = -4 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$
D. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$



1.5. Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Metody rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi poznaliśmy w poprzednich tematach. Zaliczamy do nich dwie metody algebraiczne – metodę podstawiania i metodę przeciwnych współczynników – oraz metodę graficzną.

Przy rozwiązywaniu układu równań metodą podstawiania można uprościć zapis. Gdy otrzymamy równanie z jedną niewiadomą, możemy je rozwiązać oddzielnie, nie przepisując za każdym razem całego układu dwóch równań.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ metodą podstawiania i metodą przeciwnych współczynników oraz narysuj proste opisane równaniami układu.

Rozwiązanie:

Metoda podstawiania:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \quad | \cdot 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x - 2(3 - 2x) = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x - 6 + 4x = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 5x = 10 \quad | : 5 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 3 - 2 \cdot 2 \\ x = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Metoda przeciwnych współczynników:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \quad | \cdot 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x + y = 3 \quad | \cdot 2 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

– dodajemy równania stronami

$$4x + 2y + x - 2y = 6 + 4$$

– wyrazy z niewiadomą y się redukują

$$5x = 10$$

– obliczamy niewiadomą x

$$x = 2$$

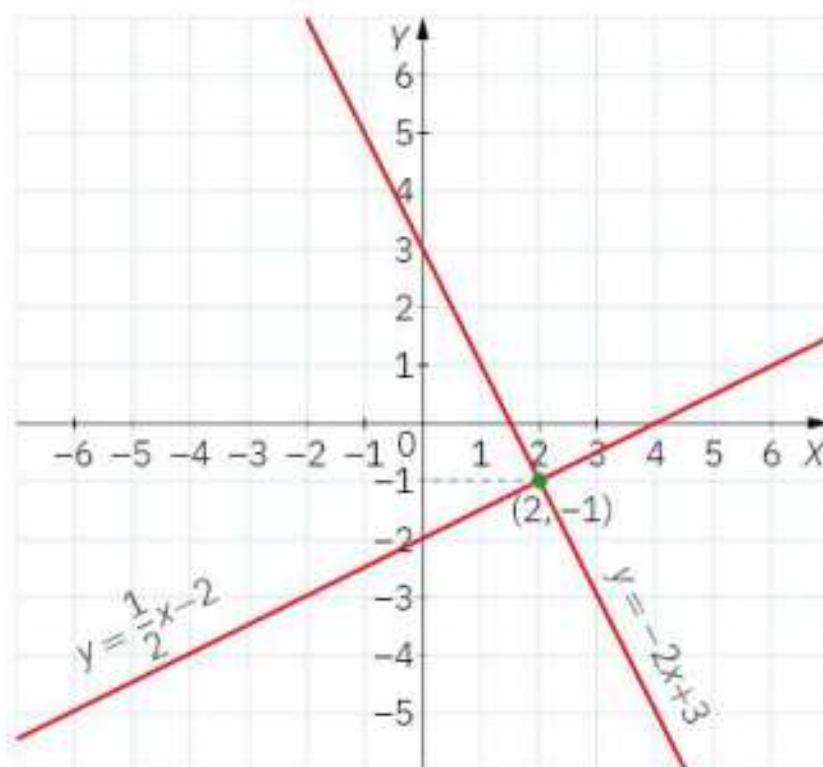
– podstawiamy obliczoną wartość w miejsce niewiadomej x dowolnego równania i obliczamy niewiadomą y

$$2 - 2y = 4$$

$$y = -1$$

Metoda graficzna:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \quad | \cdot 3 \\ x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \\ y = -2x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + 2y = -1 \\ x - y = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x + 4y = 5 \\ -3x + y = -\frac{1}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3y = 1\frac{1}{4} \\ 3x - y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$

2. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 9x + 7y = 22 \\ -2x + y = -10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y = 17 \\ -3x + 5y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ 7x - 11y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -5x + 8y = -14 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 9x - 9y = 36 \\ 5x + 5y = 30 \end{cases}$

3. Rozwiąż układy równań. Literę odpowiadającą rozwiązaniu wpisz do przerysowanej do zeszytu tabeli, a otrzymasz nazwisko greckiego matematyka żyjącego w III wieku w Aleksandrii, który był autorem prac z arytmetyki i algebry.

a) $\begin{cases} 2d - 3 = 3f - 2 \\ d(2f + 5) - 2f(d + 3) = 2d + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{o+n}{3} + \frac{n}{5} = -2 \\ \frac{2o-n}{3} - \frac{3o}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{i-1}{s-6} = \frac{i+15}{s+2} \\ \frac{i}{s-1} = \frac{i-3}{s-4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{a-2}{5} + \frac{3t-2}{4} = 2 \\ \frac{3a+1}{5} - \frac{3t+2}{4} = 0 \end{cases}$

1	9	2	$\frac{1}{3}$	4	-5	2,8	2	10

4. Do każdego z równań dołącz drugie tak, aby otrzymać układ:

1. oznaczony, 2. nieoznaczony, 3. sprzeczny.

a) $2x + y = 1$ b) $y - x = 5$ c) $0,5x + 0,2y - 0,7 = 0$

5. Rozwiąż układy równań.

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3(x-1) = 4y+1 \\ 5(y-1) = x+1 \end{cases}$$

6. Rozwiąż układy równań.

a)
$$\begin{cases} 2(x-1) + 3(y-2) = 5 \\ 3(x+y) - 2(x+2) = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

7. Który układ równań spełnia para liczb $\begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$?

a)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} + 2 = -\frac{y}{5} \\ \frac{2x-y}{3} = \frac{3x}{4} + 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{y-2}{3} = 2 \\ \frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4 \end{cases}$$

8. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań $\begin{cases} 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 4\sqrt{3} \\ 0,5x + 0,25y = 1 \end{cases}$.

9. Rozwiąż układy równań.

a)
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + 2y = 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 5 \\ \frac{3x}{4} - \frac{2y}{5} = 11 \end{cases}$$

10. Poniższe układy równań rozwiąż dowolną metodą.

a)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3x}{2} + 2y = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} (x-1)^2 - (y-3)^2 = (x-y)(x+y) \\ \frac{x+2}{2} - \frac{y+4}{3} = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+15} = \frac{y+6}{y+2} \\ \frac{x-3}{x} = \frac{y-4}{y-1} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = x(x-2)(x+2) + 2(y-x)(y+x) \\ x-3(y+1) = y-4x \end{cases}$$

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Wśród układów równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 3y - 15 = 0 \\ y = 3 - 1\frac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{2(x-1)}{3} + y = 1 \\ 3(y-1) + 2(x+1) = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x-y}{3} - 2(x+y) = x \\ 4(x+y) - 3(x-y) = 3 - 7x \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x+1 = 5(y+2) \\ 3(2x-5) - 4(3y+4) = 5 \end{cases}$$

nieskończenie wiele rozwiązań ma układ

A. a

B. b

C. c

D. d

2. Para liczb będąca rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 6x - 7y = 2 \end{cases}$ to

$$\text{A. } \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = 7 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

3. Para liczb będąca rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - 3y = -21 \\ y - x = 5 \end{cases}$ jest również rozwiązaniem układu

$$\text{A. } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} 2x - y = -2 \\ x + 2y = 19 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

4. Układem sprzecznym jest układ równań

$$\text{A. } \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} 4x + 6y = 21 \\ \frac{2}{3}x + y = 2\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} y - x = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

1.6. Rozwiązywanie zadań tekstowych za pomocą układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi możemy zastosować do rozwiązywania zadań z treścią.

Po przeczytaniu treści przeprowadzamy analizę zadania polegającą na ustaleniu i oznaczeniu niewiadomych, zapisaniu zależności między nimi wynikających z treści zadania, a następnie ułożeniu układu równań. Po rozwiązaniu układu sprawdzamy, czy rozwiązanie spełnia warunki zadania, a następnie piszemy odpowiedź.

Ćwiczenie 1.

Miara jednego z kątów w trójkącie wynosi 50° , a różnica miar dwóch pozostałych jest równa 70° .

Jaki to trójkąt?

Rozwiązanie:

Określamy niewiadome:

x – miara drugiego kąta trójkąta

y – miara trzeciego kąta trójkąta

Ustalamy zależności występujące w zadaniu:

50° – miara pierwszego kąta trójkąta

70° – różnica miar kątów drugiego i trzeciego

180° – suma miar kątów w trójkącie

Układamy pierwsze równanie:

$$x - y = 70^\circ$$

Układamy drugie równanie:

$$50^\circ + x + y = 180^\circ.$$

Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} x - y = 70^\circ \\ x + y + 50^\circ = 180^\circ \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ metodą podstawiania lub przeciwnych współczynników.

Rozwiązaniem układu jest para liczb $\begin{cases} x = 100^\circ \\ y = 30^\circ \end{cases}$.

Sprawdzamy, czy rozwiązanie układu spełnia warunki zadania, a więc czy suma miar kątów wynosi 180° :

$$50^\circ + 100^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

Odpowiedź: Ten trójkąt jest rozwartokątny.

Ćwiczenie 2.

Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 9. Jeżeli przestawimy cyfry w tej liczbie, to otrzymamy liczbę o 45 mniejszą od szukanej. Co to za liczba?

Rozwiązanie:

Określamy niewiadome:

x – cyfra dziesiątek

y – cyfra jedności

Ustalamy zależności występujące w zadaniu:

$10x + y$ – liczba dwucyfrowa

$10y + x$ – liczba dwucyfrowa z przestawionymi cyframi

Układamy pierwsze równanie:

$$x + y = 9$$

Układamy drugie równanie:

$$10y + x = 10x + y - 45$$

Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10y + x = 10x + y - 45 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ metodą podstawiania lub przeciwnych współczynników.

Rozwiązaniem układu jest para liczb $\begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$. Sprawdzamy, czy otrzymana para liczb spełnia warunki zadania.

$$7 + 2 = 9 \quad 72 - 27 = 45$$

Odpowiedź: Szukana liczba to 72.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Kasia miała 44 zł w monetach pięciozłotowych i dwuzłotowych. Liczba wszystkich monet wynosiła 16. Ile Kasia miała monet dwuzłotowych, a ile pięciozłotowych?
2. Komputer z drukarką kosztuje 2870 zł. Oblicz koszt dwóch komputerów i drukarki, jeśli:
 - a) cena komputera jest cztery razy większa od ceny drukarki,
 - b) cena drukarki jest o 1900 zł niższa od ceny komputera.
3. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 8. Znajdź tę liczbę, jeśli różnica tej liczby i liczby utworzonej w wyniku przestawienia jej cyfr daje 18.
4. W klasach 1a i 1b jest łącznie 62 uczniów. W szkolnej wycieczce wzięło udział 75% uczniów klasy 1a i 90% uczniów klasy 1b, w sumie 51 osób. Ilu uczniów z klasy 1a i ilu z 1b wzięło udział w wycieczce?

5. Za dwie książki zapłacono 72 zł, przy czym 30% ceny pierwszej książki jest równe 24% ceny drugiej. Ile kosztuje każda z książek?
6. Antykwariusz kupił dwie książki za 140 zł, a sprzedał je łącznie za 170 zł. Ile zapłacił za każdą z książek, jeśli pierwszą sprzedał z 30-procentowym zyskiem, a drugą z 10-procentową stratą?
7. Michał ulokował 10 000 zł na dwóch rocznych lokatach. Oprocentowanie pierwszej z nich wynosiło 3,2%, a drugiej 2,7%. Jaką kwotę wpłacił Michał na każdą z lokat, jeśli po roku otrzymał 305 zł odsetek?
8. Obwód prostokąta wynosi 6 dm. Jeżeli długość krótszego boku zwiększymy o 5 cm, a długość dłuższego boku zmniejszymy o 7 cm, to otrzymamy kwadrat. Oblicz pole tego prostokąta.
9. Suma długości przekątnych rombu jest równa 35 cm, a stosunek ich długości wynosi 3:4. Oblicz pole tego rombu.
10. Jeśli w trójkącie prostokątnym jedną przyprostokątną wydłużymy o 3 cm, a drugą o 2 cm, to pole trójkąta zwiększy się o 30 cm^2 . Jeśli obie przyprostokątne skrócimy o 2 cm, to pole trójkąta zmniejszy się o 22 cm^2 . Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE



1. Suma dwóch liczb wynosi 175. Iloraz większej z nich przez mniejszą wynosi 4 i reszta 10. Jeśli przez x oznaczymy większą liczbę, a przez y mniejszą, to sytuację przedstawioną w zadaniu opisuje układ równań
 A. $\begin{cases} x + y = 175 \\ x = 10y + 4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - y = 175 \\ x = 4y + 10 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + y = 175 \\ x = 4y + 10 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 175 \\ x + 4y = 10 \end{cases}$
2. Różnica miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi 20° . Przyjmijmy, że x oznacza miarę większego kąta, a y miarę mniejszego kąta. Sytuację przedstawioną w zadaniu opisuje układ równań
 A. $\begin{cases} x - y = 20^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y = 180^\circ \\ x - y = 20^\circ \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + y = 180^\circ \\ x + y = 20^\circ \end{cases}$ D. $\begin{cases} x - y = 20^\circ \\ x - y = 90^\circ \end{cases}$
3. Za 30 biletów do kina zapłacono 376 zł. Cena biletu normalnego wynosiła 20 zł, a bilet ulgowy był o 40% tańszy. Przyjmijmy, że x oznacza liczbę biletów normalnych, a y liczbę biletów ulgowych. Który układ równań opisuje sytuację z zadania?
 A. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 12x + 20y = 376 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 20x + 40\%y = 376 \end{cases}$
 B. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 20x + 12y = 376 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 20x + 28y = 376 \end{cases}$

4. Za 3 kg jabłek i 2 kg śliwek zapłacono 14,50 zł. Wiemy także, że 4 kg jabłek i 3 kg śliwek kosztują 20,50 zł. Jeśli przez x oznaczymy cenę 1 kg jabłek w złotych, a przez y cenę 1 kg śliwek w złotych, to sytuację opisaną w zadaniu można przedstawić za pomocą układu równań

$$\text{A. } \begin{cases} 2x + 3y = 14,5 \\ 3x + 4y = 20,5 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} 3x + 2y = 20,5 \\ 4x + 3y = 14,5 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x + y = 14,5 \\ x + y = 20,5 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} 3x + 2y = 14,5 \\ 4x + 3y = 20,5 \end{cases}$$

1.7. Zadania utrwalające

1. Podaj wszystkie pary liczb całkowitych ujemnych, które spełniają poniższe równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

$$\text{a) } x + y = -3 \quad \text{b) } x = -2y - 5 \quad \text{c) } 3y + x = -9$$

2. Sprawdź, czy podane układy równań mają ten sam zbiór rozwiązań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 1 = 3y - 6 \\ 5x - y = 2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} 3(x - y) + 2 = x - 5 \\ 7 - 5(1 - x) + 2y = 4 + 3y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 1 - (x + y) = 2x - (1 - 2y) \\ -(3x - y) + 2 = y + 2(x + 1) \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} 0,3x + 0,3y = 0,2 \\ x - 5 = 0 \end{cases}$$

3. Rozwiąż układy równań metodą podstawiania i sprawdź rozwiązania.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 6y = 15 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 6x - 7y = 10 \\ -2x + y = -6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 4x + 8y = -16 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 5x - 4y = 80 \\ 6x + 3y = 18 \end{cases}$$

4. Rozwiąż układy równań metodą przeciwnych współczynników i sprawdź rozwiązania.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1,2 \\ x - y = 2,8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - y = 7 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 4x + 3y = -4 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$$

5. Rozwiąż układy równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2,5x + 0,5y = -4 \\ 0,1x - 0,2y = 0,5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3(y - 3) + 2(x - 2) = 6 \\ x - 2y = 1 - 2(x + 2y) \end{cases}$$

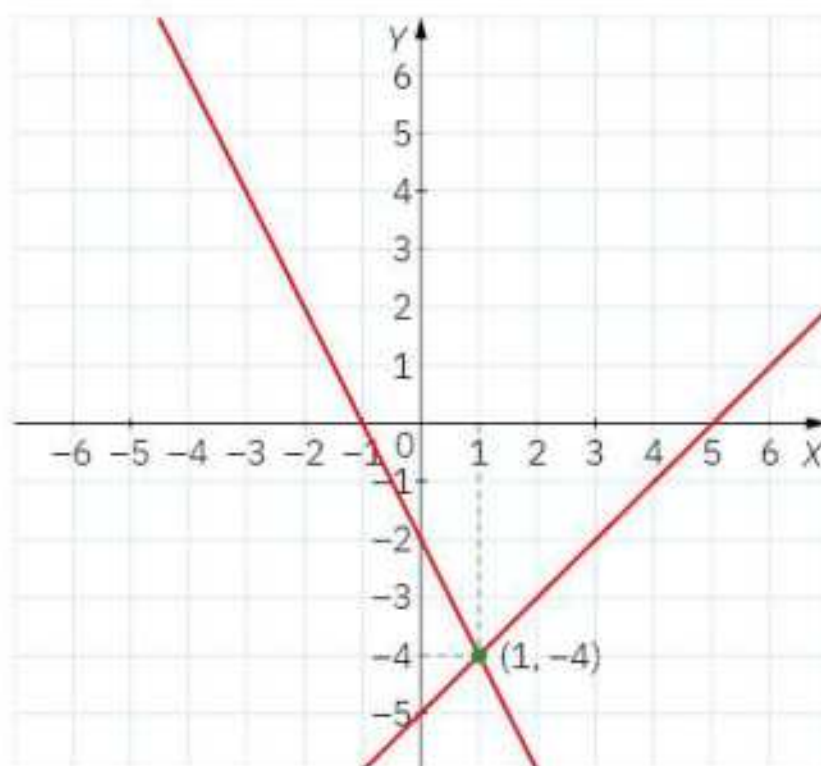
$$\text{b) } \begin{cases} 2(x + 3) - 9 = 1 - y \\ x - 2(y + 1) = 5 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2(y - 3x) - 3,5 = 0,5y - x \\ 0,25y - 0,2x = -0,05 \end{cases}$$

6. Rozwiąż układy równań.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{x-3}{2} - (y+5) = -3 \\ 2(x-4) - 3(y+4) = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = -\frac{1}{5} \\ -\frac{x}{5} + \frac{3y}{10} = \frac{11}{100} \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{2x+y}{2} = 10 \\ x = -2y \end{cases}$$

7. Czy para liczb $x = 3$ i $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań
- $$\begin{cases} 4(2x-1) + 5(3y-2) = 40 \\ \frac{3x+1}{5} - \frac{3y+2}{4} = 0 \end{cases} \quad ?$$
8. Sprawdź, który z danych układów równań ma jedno rozwiązanie, który – nieskończenie wiele rozwiązań, a który nie ma rozwiązań.
- a) $\begin{cases} y - 2x = -5 \\ 2y - 11 = 4x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0,5x = 7,5 - 0,5y \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,4x - 0,2 = 0,1y \\ \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = x \end{cases}$
9. Ustal, który z podanych układów równań jest oznaczony, który nieoznaczony, a który sprzeczny.
- a) $\begin{cases} 0,1x + 0,1y = 4,7 \\ x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0,8x = 2 + y \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 7y = 15 \\ -3x + 21y = -5 \end{cases}$
10. Ułóż i rozwiąż odpowiednie układy równań.
- a) Suma dwóch liczb x i y wynosi 33. Jeżeli liczbę x zwiększymy o 2, a liczbę y zmniejszymy czterokrotnie, to ich suma wyniesie 23.
- b) Średnia arytmetyczna dwóch liczb m i n wynosi 52, a liczba m jest o 60% większa od liczby n .
11. Rozwiąż graficznie układy równań.
- a) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x-1) + 2(2-y) = -5 - y \\ x + y = 2 \end{cases}$
12. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawia rysunek.



13. Rozwiąż metodą podstawiania.

$$\text{a)} \begin{cases} x + y = 1 \\ x = y + 5 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

14. Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników.

$$\text{a)} \begin{cases} \frac{2x-1}{5} + \frac{3y-2}{4} = 2 \\ \frac{3x+1}{5} - \frac{3y+2}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 6(7x-3y) = 10(5x-y) - 15(x+y) \\ 3(x-1) = 5(y+1) \end{cases}$$

15. Rozwiąż układy równań.

$$\text{a)} \begin{cases} \frac{0,2x+0,1y}{2} - \frac{4x-y}{10} = \frac{3x+0,5y}{30} + \frac{x-y}{5} \\ \frac{3x+2y-1}{8} = 3 - \frac{0,8x-5y}{41} \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} (x-3)^2 - (y-5)^2 = (x-y)(x+y) \\ \frac{x+5}{2} - \frac{y+5}{3} = 0 \end{cases}$$

16. Suma dwóch liczb wynosi 720. Oblicz te liczby, wiedząc, że 25% jednej jest równe 12,5% drugiej.

17. Statek wycieczkowy płynął z prądem rzeki 3 godziny, a pod prąd 4 godziny i razem przeplynał 248 kilometrów. Następnego dnia płynął z prądem 4 godziny, a pod prąd 3 godziny i razem przeplynał 256 kilometrów. Ile wynosi prędkość własna statku, a ile prędkość prądu rzeki? Zakładamy, że prędkość własna statku była taka sama każdego dnia oraz rzeka płynie ze stałą prędkością.

18. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 14. Jeżeli przestawimy cyfry tej liczby, to otrzymamy liczbę o 36 większą od danej. Jaka to liczba?

19. W trójkącie jeden z kątów ma 96° , a drugi stanowi $\frac{4}{3}$ trzeciego. Podaj miary kątów tego trójkąta.

20. Znajdź dwie liczby, których suma wynosi 40, a różnica kwadratów 480.



PLANIMETRIA

2.1. Trójkąty i ich własności

Wielokątem o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt.

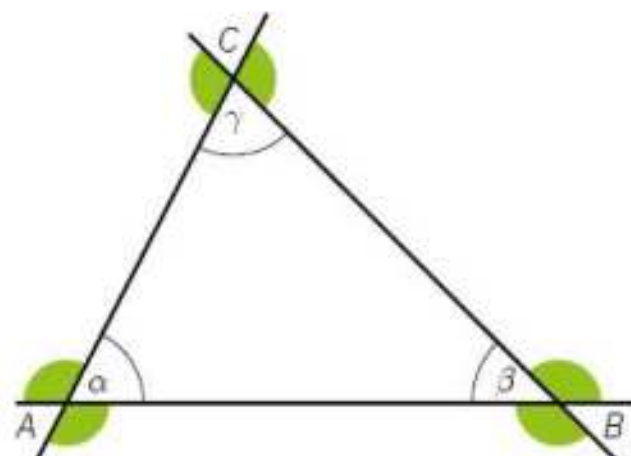
Kąt zewnętrzny trójkąta to kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta.

A, B, C – wierzchołki trójkąta ABC

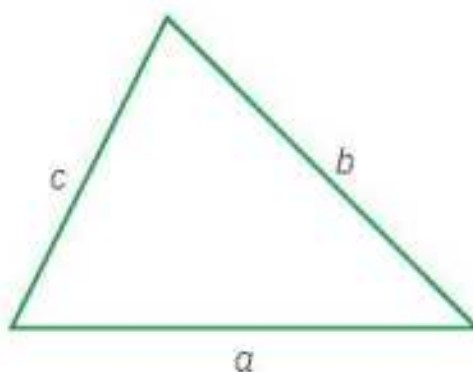
AB, BC, CA – boki trójkąta ABC

kąty α, β i γ – kąty wewnętrzne trójkąta ABC

 – sześć kątów zewnętrznych



Z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeśli suma długości każdego dwóch odcinków jest większa od długości trzeciego odcinka.



$$a + b > c \text{ i } a + c > b \text{ i } b + c > a$$

Przedstawione powyżej zależności nazywamy **nierównościami trójkąta**.

Ćwiczenie 1.

Czy odcinki o podanych długościach $a = 3 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$ mogą być jednocześnie bokami pewnego trójkąta?

Rozwiązanie:

$$3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 8 \text{ cm} - \text{obliczamy } a + b$$

$$8 \text{ cm} > 6 \text{ cm} - \text{porównujemy } a + b \text{ z } c$$

$$3 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 9 \text{ cm} - \text{obliczamy } a + c$$

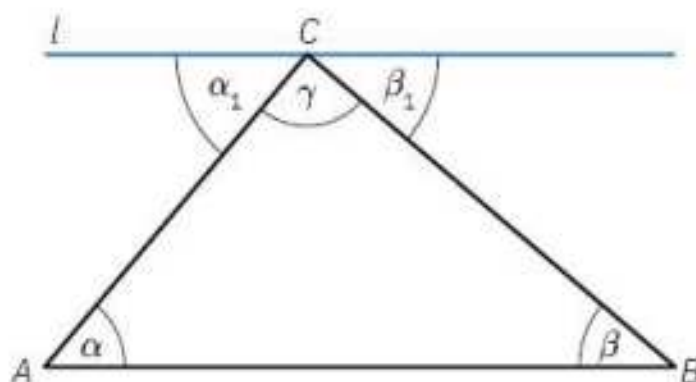
$$9 \text{ cm} > 5 \text{ cm} - \text{porównujemy } a + c \text{ z } b$$

$$5 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 11 \text{ cm} - \text{obliczamy } b + c$$

$$11 \text{ cm} > 3 \text{ cm} - \text{porównujemy } b + c \text{ z } a$$

Odpowiedź: Odcinki o długościach 3 cm, 5 cm i 6 cm mogą być bokami trójkąta.

Na rysunku prosta l przechodząca przez wierzchołek C i równoległa do boku AB wyznacza kąty α_1 i β_1 naprzemianległe do odpowiednich kątów wewnętrznych α i β trójkąta ABC .



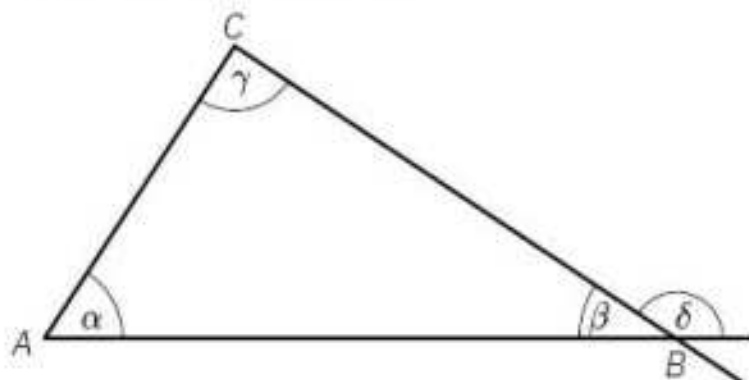
Ponieważ $\alpha_1 = \alpha$ i $\beta_1 = \beta$ oraz $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 180^\circ$, więc $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ i } \beta + \delta = 180^\circ,$$

$$\text{zatem } \alpha + \beta + \gamma = \beta + \delta,$$

$$\text{czyli } \alpha + \gamma = \delta.$$



Miara kąta zewnętrznego trójkąta jest równa sumie miar kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.

Kiedy używamy zwrotu *kąty trójkąta*, mamy na myśli jego kąty wewnętrzne.

Ćwiczenie 2.

Ustal, czy dane kąty mogą być jednocześnie kątami pewnego trójkąta: $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 87^\circ$, $\gamma = 50^\circ$.

Rozwiązanie:

$$43^\circ + 87^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

Odpowiedź: Kąty o miarach 43° , 87° , 50° są kątami pewnego trójkąta.

Ćwiczenie 3.

Dany jest trójkąt ABC . Oblicz miary kątów α , β i γ , korzystając z danych na rysunku.

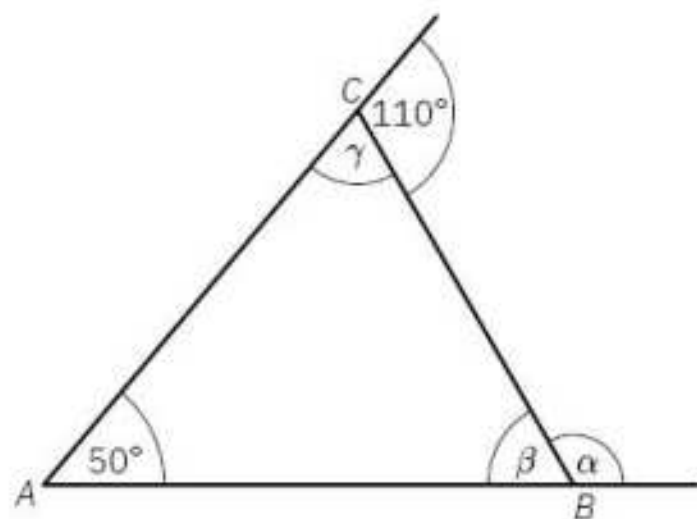
Rozwiązanie:

$\gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ – kąty o miarach 110° i γ są kątami przyległymi

$\beta = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$ – kąty o miarach 50° , β , γ są kątami wewnętrznymi trójkąta

$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ – kąty o miarach α i β są kątami przyległymi

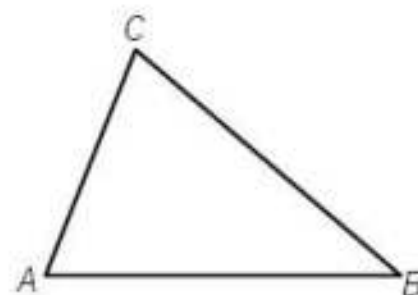
Odpowiedź: Kąt α ma miarę 120° , kąt $\beta = 60^\circ$, a kąt $\gamma = 70^\circ$.



Ze względu na długości boków trójkąty możemy podzielić na **różnoboczne** i **nieróżnoboczne** (równoramienne i równoboczne).

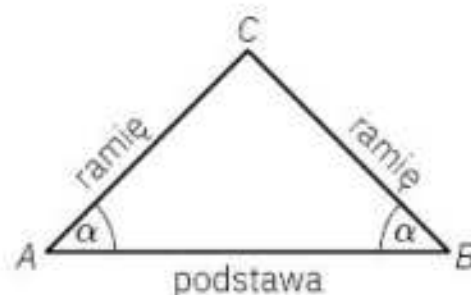
Trójkątem różnobocznym nazywamy trójkąt, który ma wszystkie boki innej długości.

$$AB \neq BC \neq AC$$



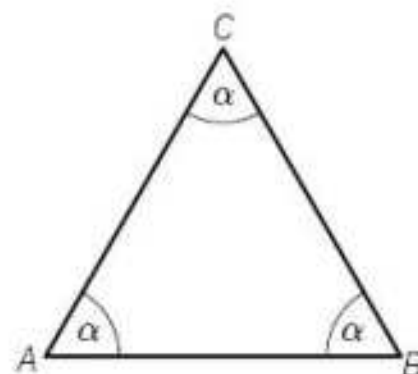
Trójkątem równoramiennym jest trójkąt, którego co najmniej dwa boki mają tę samą długość. W trójkącie **równoramiennym** kąty przy podstawie mają **równe miary**.

$$AC = BC, \angle BAC = \angle ABC$$



Trójkątem równobocznym nazywamy trójkąt, którego wszystkie boki mają tę samą długość. W trójkącie **równobocznym** miary kątów są równe.

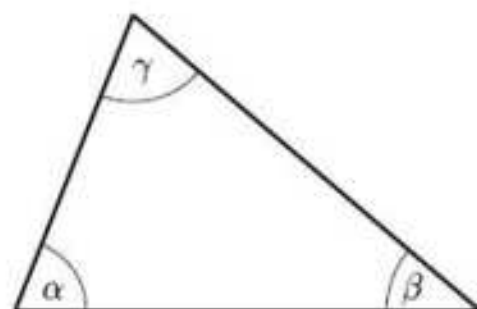
$$AB = BC = AC, \angle BAC = \angle ABC = \angle BCA = 60^\circ$$



Ze względu na miary kątów wewnętrznych trójkąty możemy podzielić na **ostrokątne**, **prostokątne** i **rozwartokątne**.

Trójkąt ostrokątny to taki trójkąt, którego wszystkie kąty są ostre.

$$\alpha < 90^\circ \text{ i } \beta < 90^\circ \text{ i } \gamma < 90^\circ$$



Trójkątem prostokątnym nazywamy trójkąt, którego jeden z kątów jest prosty. Suma miar jego kątów ostrych wynosi 90° .

Boki leżące przy kącie prostym nazywamy **przyprostokątnymi**, a bok leżący naprzeciw kąta prostego – **przeciwprostokątną**.

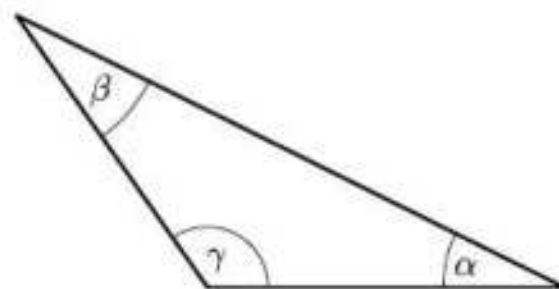
$$\gamma = 90^\circ \text{ i } \alpha < 90^\circ \text{ i } \beta < 90^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



Trójkąt rozwartokątny to trójkąt, którego jeden z kątów jest rozwarty.

$$\gamma > 90^\circ \text{ i } \alpha < 90^\circ \text{ i } \beta < 90^\circ$$

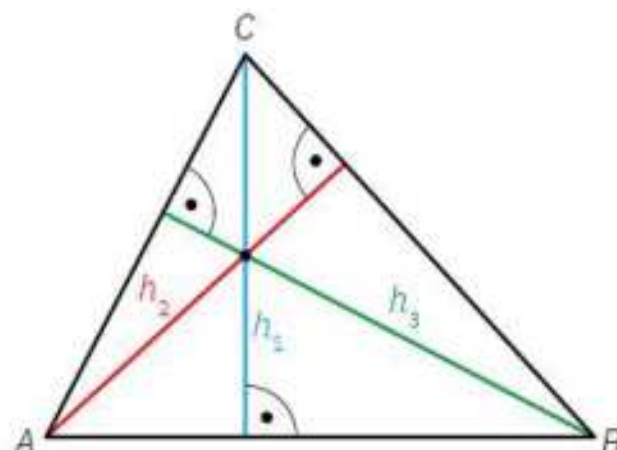
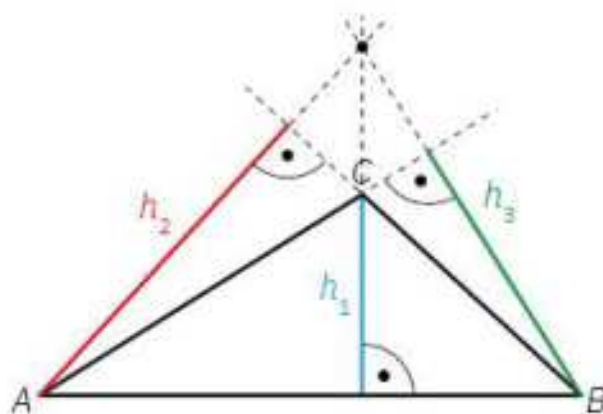
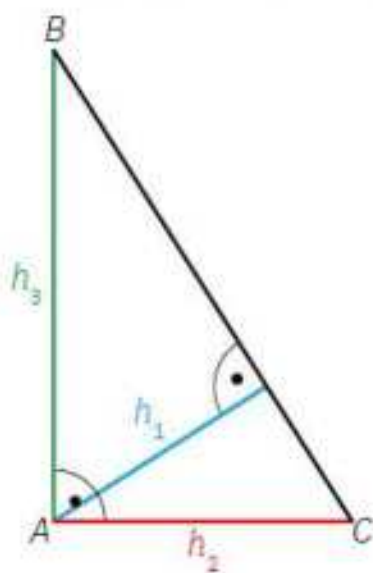


Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą przeciwległy bok trójkąta i prostopadły do tej prostej. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

Wysokości w trójkącie ostrokątnym przecinają się w jednym punkcie leżącym wewnątrz tego trójkąta.

W trójkącie prostokątnym jego wysokości przecinają się w wierzchołku kąta prostego. Dwie z nich pokrywają się z przyprostokątnymi.

W trójkącie rozwartokątnym wysokości poprowadzone z wierzchołków kątów ostrych leżą na zewnątrz trójkąta. Przedłużenia wysokości przecinają się w punkcie leżącym poza tym trójkątem.



Zależności między jednostkami pola powierzchni:

$$1 \text{ a, czyli } 1 \text{ ar} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha, czyli } 1 \text{ hektar} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha} = 1\,000\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$0,01 \text{ m}^2 = 1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$$

$$0,01 \text{ dm}^2 = 0,0001 \text{ m}^2 = 1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

Ćwiczenie 4.

Zamień jednostki.

a) $23 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$

$$23 \text{ m}^2 = 23 \cdot 10\,000 \text{ cm}^2 = 230\,000 \text{ cm}^2$$

b) $250 \text{ mm}^2 = \dots \text{ cm}^2$

$$250 \text{ mm}^2 = 250 \cdot 0,01 \text{ cm}^2 = 2,5 \text{ cm}^2$$

c) $3,5 \text{ ha} = \dots \text{ m}^2$

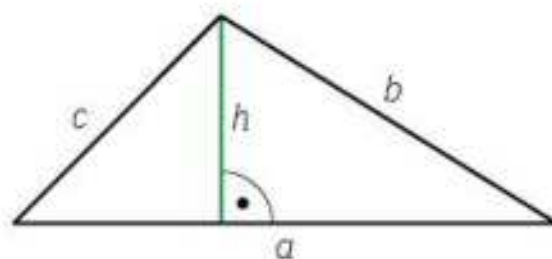
$$3,5 \text{ ha} = 3,5 \cdot 100 \text{ a} = 350 \text{ a} = 350 \cdot 100 \text{ m}^2 = 35\,000 \text{ m}^2$$

Pola i obwody trójkątów

Trójkąt różnoboczny

obwód: $S = a + b + c$

pole: $P = \frac{ah}{2}$

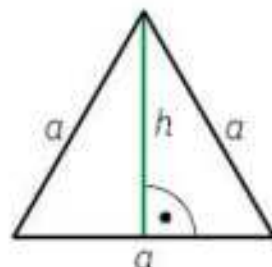


Trójkąt równoboczny

obwód: $S = 3a$

pole: $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

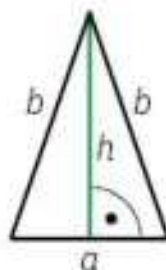
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – wysokość trójkąta równobocznego



Trójkąt równoramienny

obwód: $S = a + 2b$

pole: $P = \frac{ah}{2}$



Ćwiczenie 5.

Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 15 cm. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta, jeśli jego ramię ma długość 45 mm?

Rozwiązanie:

obwód: $S = 15 \text{ cm}$, $b = 45 \text{ mm} = 4,5 \text{ cm}$ – wypisujemy dane

$S = a + 2b$ – podstawiamy dane do wzoru na obwód trójkąta równoramiennego

$15 = a + 2 \cdot 4,5$ – obliczamy długość podstawy

$a = 15 - 9$, więc $a = 6 \text{ cm}$

Odpowiedź: Długość podstawy trójkąta wynosi 6 cm.

Trójkąty są przystającymi, jeżeli odpowiednie boki są równej długości oraz odpowiednie kąty mają takie same miary.

Trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są przystające.

$$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$$

1. Pierwsza cecha przystawiania trójkątów – trójkąty o odpowiednich bokach równej długości są przystające. Cechę tę oznaczamy w skrócie jako *bbb* (bok, bok, bok).

Jeżeli $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$,
to $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

2. Druga cecha przystawiania trójkątów – trójkąty, których dwa boki są równej długości i kąty między nimi zawarte mają równe miary, są przystające.

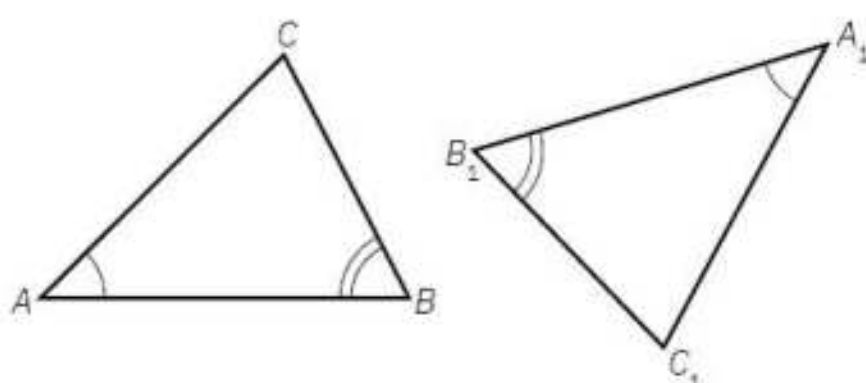
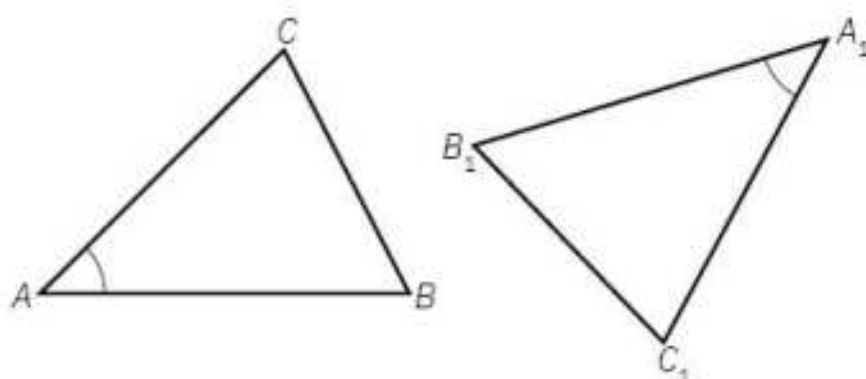
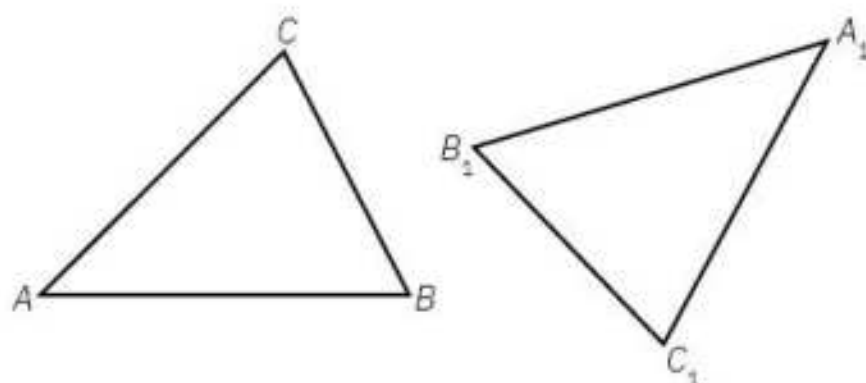
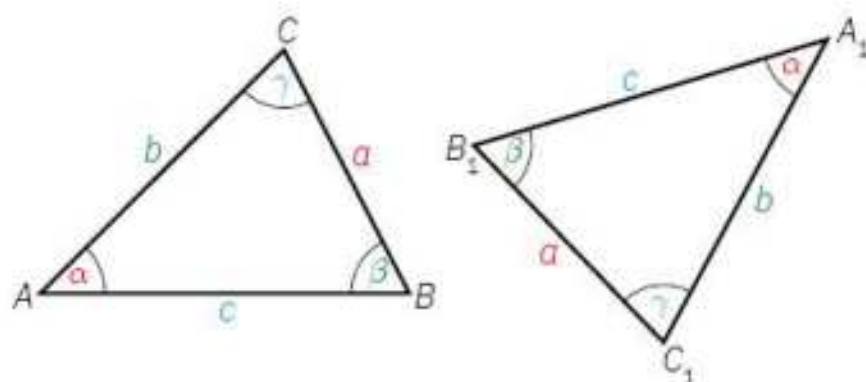
Oznaczamy ją w skrócie *bkb* (bok, kąt, bok).

Jeżeli $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$,
 $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle BAC$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

3. Trzecia cecha przystawiania trójkątów – trójkąty mające jeden bok równej długości i dwa kąty leżące przy tym boku odpowiednio równej miary są przystające.

Oznaczamy ją w skrócie *kbk* (kąt, bok, kąt).

Jeżeli $A_1B_1 = AB$, $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle BAC$,
 $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle ABC$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.



Ćwiczenie 6.

W prostokącie $ABCD$ poprowadzono przekątną AC . Uzasadnij, że powstałe w ten sposób trójkąty są przystające.

Rozwiązanie:

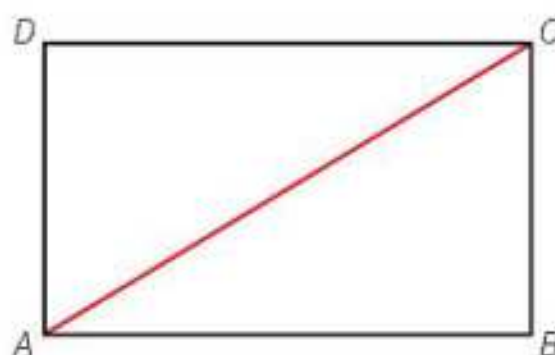
W trójkątach ABC i ADC :

$AB = CD$ – boki równoległe prostokąta

$BC = AD$ – boki równoległe prostokąta

AC – przekątna prostokąta

Na podstawie pierwszej cechy przystawiania trójkątów $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Czy podane wartości mogą być jednocześnie miarami kątów pewnego trójkąta?
a) $45^\circ, 55^\circ, 90^\circ$ b) $2,5^\circ, 0,5^\circ, 177^\circ$ c) $80^\circ, 80^\circ, 80^\circ$

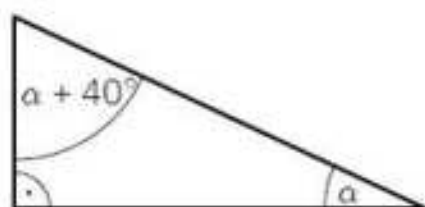
2. Dane są miary dwóch kątów trójkąta. Oblicz miarę trzeciego kąta.

a) $27^\circ, 53^\circ$ b) $29^\circ, 85^\circ$ c) $42,5^\circ, 47,5^\circ$

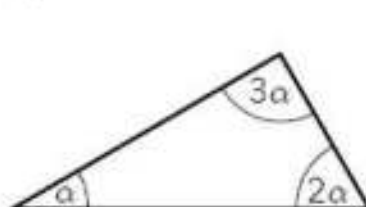
Jaki to jest trójkąt – ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny?

3. Oblicz miary kątów wewnętrznych narysowanych trójkątów.

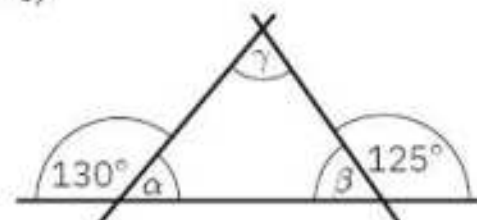
a)



b)



c)



4. Czy trójkąt może być równoramienny, jeśli dwa jego kąty mają miary:

a) $75^\circ, 30^\circ$ b) $35^\circ, 110^\circ$ c) $60^\circ, 55^\circ$

5. Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę 80° . Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta. Rozważ dwa przypadki.

6. Odcinek AB jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego ABC . Wyznacz miary kątów tego trójkąta, jeżeli:

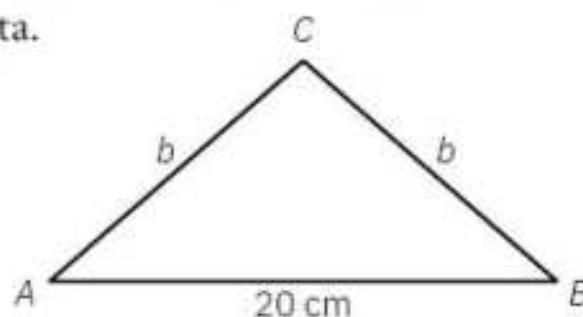
a) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$

b) $\sphericalangle BCA = 5 \sphericalangle BAC$

c) $2 \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$

7. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 5 cm, a ramię jest o 2 cm dłuższe od podstawy. Oblicz obwód tego trójkąta.

8. Obwód trójkąta ABC wynosi 4,5 dm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.



9. Zamień jednostki.

a) $52\,000\text{ m}^2 = \dots\text{ km}^2$

d) $35\,000\text{ cm}^2 = \dots\text{ m}^2$

g) $4000\text{ m}^2 = \dots\text{ ha}$

b) $200\text{ a} = \dots\text{ ha}$

e) $1,5\text{ km}^2 = \dots\text{ ha}$

h) $0,4\text{ cm}^2 = \dots\text{ mm}^2$

c) $0,25\text{ km}^2 = \dots\text{ m}^2$

f) $6\text{ mln m}^2 = \dots\text{ a}$

i) $500\text{ m}^2 = \dots\text{ ha}$

10. Oblicz pole trójkąta, którego podstawa ma długość 6 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę – 5 cm.

11. W trójkącie prostokątnym dane są przyprostokątne o długościach 3 cm i 4 cm. Oblicz długość wysokości tego trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną.

12. Trójkąt równoboczny ma pole równe $12\sqrt{3}\text{ cm}^2$. Jaki jest obwód tego trójkąta?

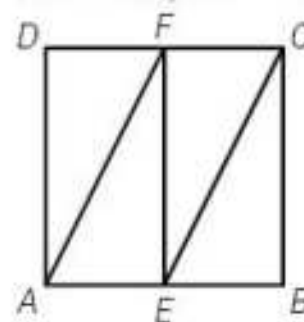
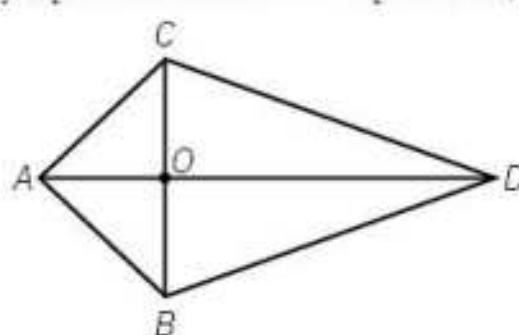
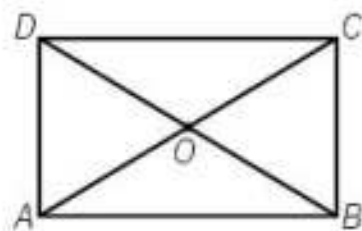
13. Wysokość trójkąta równobocznego jest o 4 cm krótsza od boku tego trójkąta. Oblicz pole tego trójkąta.

14. Które trójkąty na poniższych rysunkach są przystające?

a) prostokąt

b) deltoid (czworokąt, w którym dwie pary sąsiednich boków są równe)

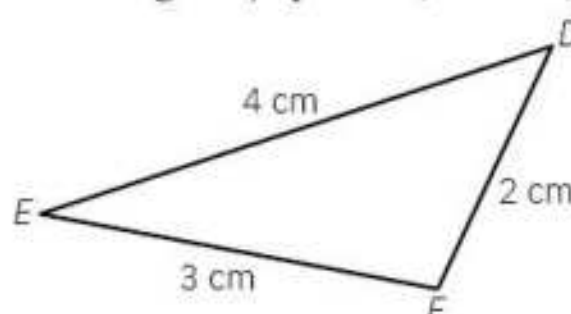
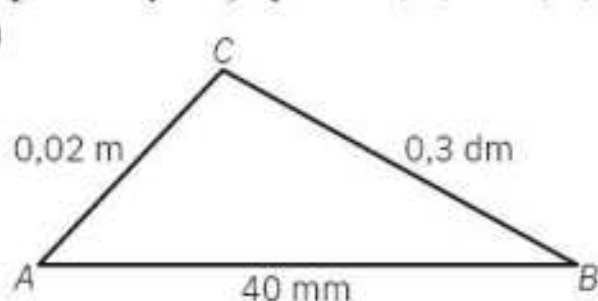
c) kwadrat, $AE = EB, DF = FC$



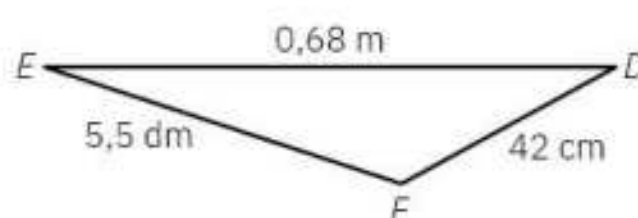
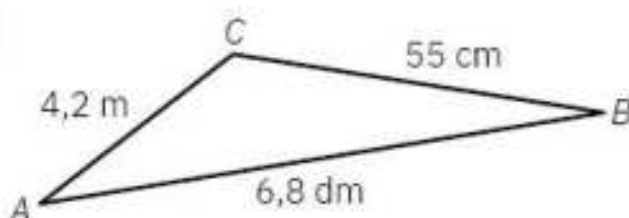
15. Które z par trójkątów o podanych długościach boków są przystające?

a) pierwszy trójkąt: 3 cm, 0,5 dm, 0,04 m i drugi trójkąt: 4 cm, 50 mm, 0,3 dm

b)



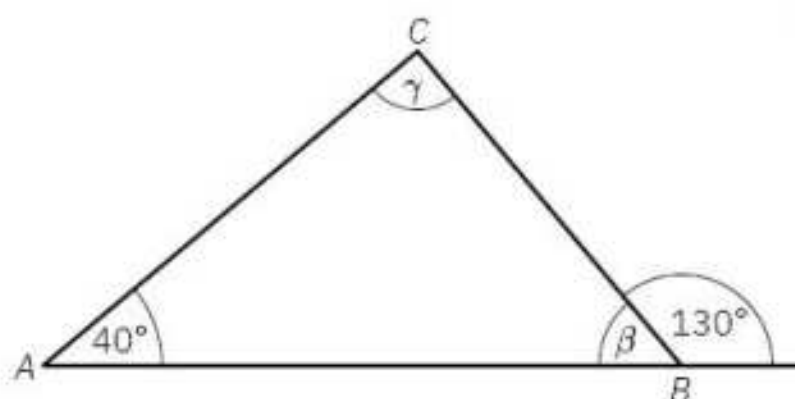
c)



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Miary pozostałych kątów wewnętrznych trójkąta ABC na rysunku obok wynoszą

- A. $\beta = 50^\circ, \gamma = 90^\circ$
- B. $\beta = 40^\circ, \gamma = 90^\circ$
- C. $\beta = 60^\circ, \gamma = 80^\circ$
- D. $\beta = 30^\circ, \gamma = 110^\circ$



2. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 5 razy większą od drugiego kąta. Zatem miary kątów tego trójkąta są równe

- A. $90^\circ, 18^\circ, 72^\circ$
- B. $90^\circ, 20^\circ, 70^\circ$
- C. $90^\circ, 15^\circ, 75^\circ$
- D. $90^\circ, 16^\circ, 74^\circ$

3. Obwód trójkąta równobocznego o wysokości $\sqrt{3}$ wynosi

- A. 3
- B. $3\sqrt{2}$
- C. $3\sqrt{3}$
- D. 6

4. Boki trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm, 8 cm, 10 cm. Długość wysokości opuszczonej na najdłuższy bok wynosi

- A. 3,2 cm
- B. 5,6 cm
- C. 4,8 cm
- D. 2,4 cm

2.2. Twierdzenie Pitagorasa

Jedno z najsłynniejszych i najstarszych twierdzeń geometrii, dotyczące trójkąta prostokątnego, wiąże się z postacią Pitagorasa – greckiego matematyka pochodzącego z wyspy Samos, żyjącego w latach ok. 572 r. p.n.e. – ok. 497 r. p.n.e. Twierdzenie to było znane już w starożytnym Babilonie, Chinach i Egipcie, ale pierwsze dowody przeprowadził dopiero Pitagoras wraz ze swoimi uczniami. Sposobów udowodnienia twierdzenia jest wiele – zarówno geometrycznych (za pomocą rysunku), jak i algebraicznych (czyli rachunkowych).



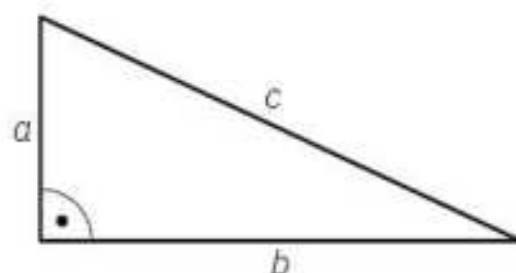
Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości jego przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

a, b – długości przyprostokątnych

c – długość przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2$$



W matematyce często formułujemy zdania wyrażające prawdy matematyczne. Są to twierdzenia. Każde twierdzenie jest zbudowane z dwóch części: założenia i tezy.

Założenie opisuje warunki, w jakich zachodzi teza.

Teza podaje prawdę matematyczną, która zachodzi, gdy spełnione jest założenie.

Wiemy, że twierdzenie Pitagorasa dotyczy trójkątów prostokątnych – tę informację nazywamy założeniem twierdzenia. Należy ją wykorzystać do uzasadnienia tezy twierdzenia, która mówi, że suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

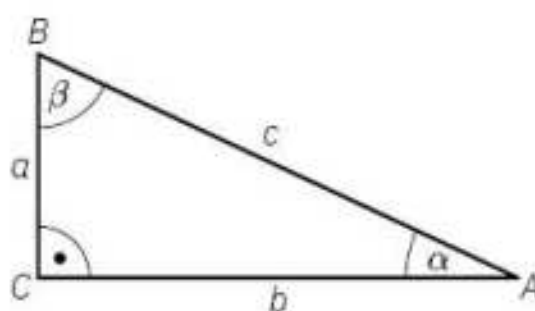
Powyższe informacje możemy zapisać krócej:

Z: $\triangle ABC$ jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych o długościach a i b oraz przeciwprostokątnej o długości c .

T: $a^2 + b^2 = c^2$

Poniżej przedstawiamy jeden z kilkudziesięciu możliwych dowodów twierdzenia Pitagorasa.

Dowód



Z czterech trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych a i b budujemy kwadrat o boku $a + b$.

Jak łatwo zauważyć, czworokąt w środku jest kwadratem o boku c .

Obliczamy pole kwadratu o boku $a + b$ na dwa sposoby.

$$P = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{oraz } P = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = c^2 + 2ab,$$

$$\text{czyli } c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

Po redukcji wyrażenia $2ab$ otrzymujemy:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

co należało udowodnić.

Twierdzenie Pitagorasa możemy sformułować także inaczej, w wersji wykorzystującej pole kwadratu.

Dany jest trójkąt prostokątny. Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej równa się sumie pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych.

$$a = 4 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$$

$$P_1 = a^2$$

$$P_1 = 4^2 = 16$$

$$P_2 = b^2$$

$$P_2 = 3^2 = 9$$

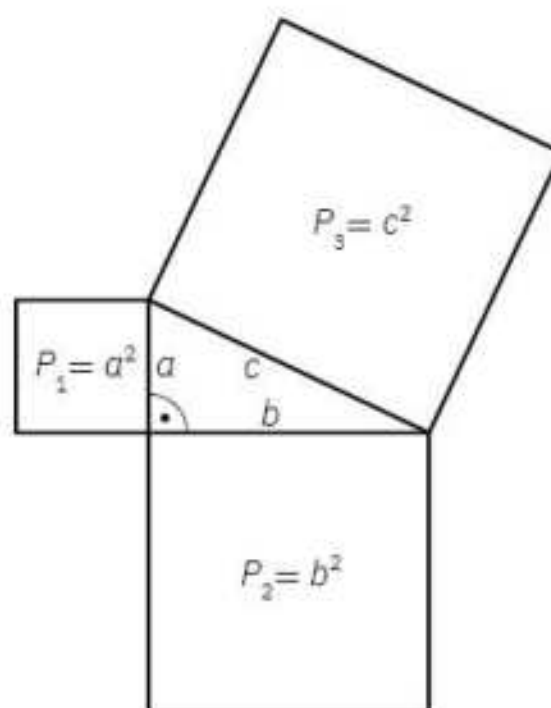
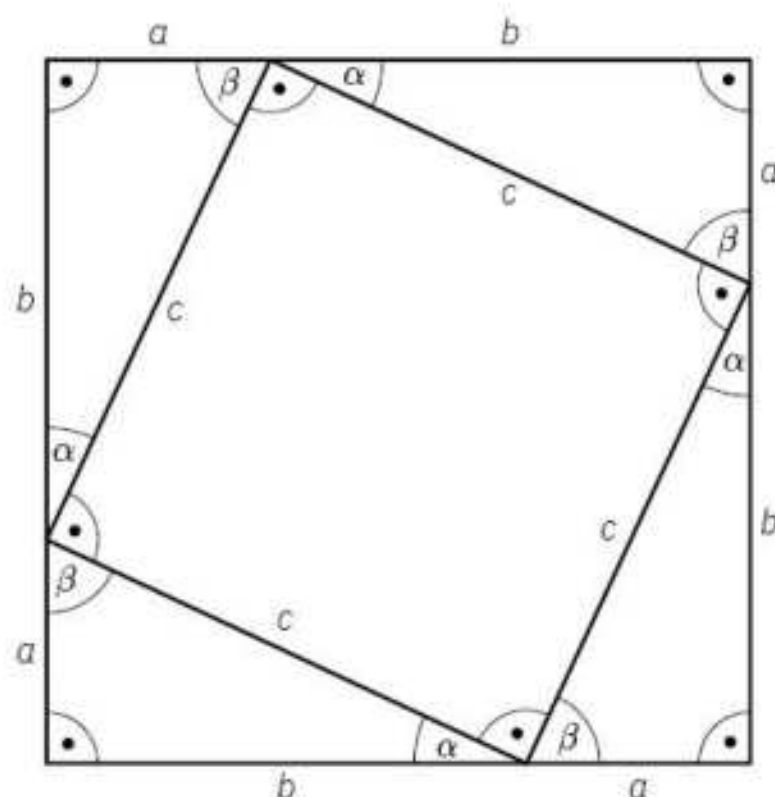
$$P_3 = c^2$$

$$P_3 = 5^2 = 25$$

$$25 = 16 + 9$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

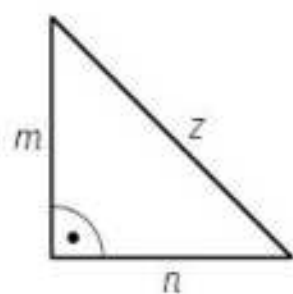
$$P_3 = P_1 + P_2$$



Ćwiczenie 1.

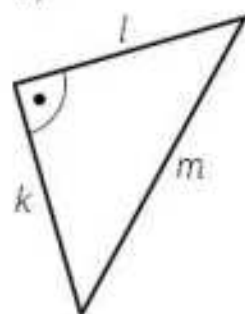
Zapisz związek zachodzący pomiędzy długościami boków w trójkącie prostokątnym.

a)



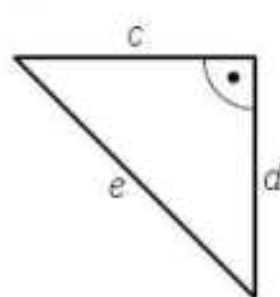
$$z^2 = m^2 + n^2$$

b)



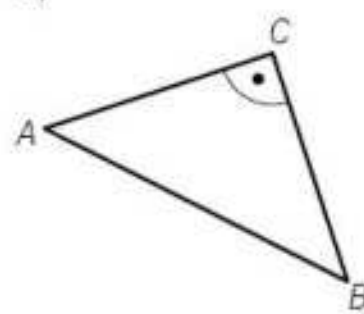
$$m^2 = k^2 + l^2$$

c)



$$e^2 = c^2 + d^2$$

d)



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Ćwiczenie 2.

W trójkącie prostokątnym dane są długości dwóch przyprostokątnych: $a = \sqrt{5}$, $b = 3$. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie:

c – długość przeciwprostokątnej

$c^2 = a^2 + b^2$ – korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$c^2 = (\sqrt{5})^2 + 3^2$$

$$c^2 = 5 + 9$$

$$c^2 = 14$$

$$c = \sqrt{14}$$

Odpowiedź: Długość przeciwprostokątnej wynosi $\sqrt{14}$.

Ćwiczenie 3.

Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość $8\sqrt{3}$ cm, a przeciwprostokątna 16 cm. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

Rozwiązanie:

$$a = 8\sqrt{3} \text{ cm}, c = 16 \text{ cm}$$

$c^2 = a^2 + b^2$ – korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$16^2 = a^2 + (8\sqrt{3})^2$$

$$a^2 = 256 - 192$$

$$a^2 = 64$$

$$a = 8$$

Odpowiedź: Długość drugiej przyprostokątnej wynosi 8 cm.

Ćwiczenie 4.

Oblicz długość drabiny, korzystając z danych zawartych na rysunku.

Rozwiązanie:

Długość drabiny oznaczmy przez x .

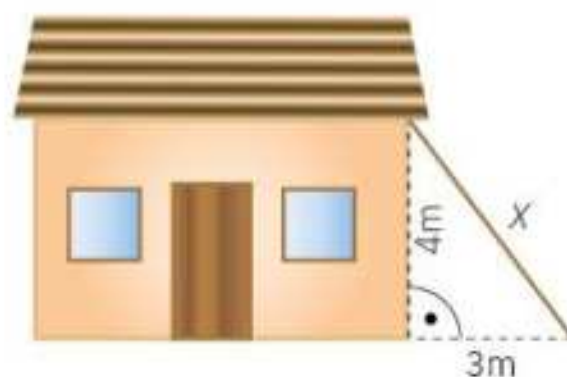
$x^2 = 4^2 + 3^2$ – stosujemy twierdzenie Pitagorasa

$$x^2 = 16 + 9$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

Odpowiedź: Długość drabiny wynosi 5 metrów.



Z twierdzenia Pitagorasa korzystamy przy obliczaniu długości przekątnej kwadratu o boku o długości a .

Przekątna kwadratu dzieli kwadrat na dwa trójkąty prostokątne.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$a^2 + a^2 = d^2$$

$$d^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2a^2}$$

$$d = a\sqrt{2} \text{ – wzór na długość przekątnej kwadratu o boku o długości } a$$

Twierdzenie Pitagorasa wykorzystujemy także do obliczenia długości przekątnej prostokąta o bokach o długości a i b .

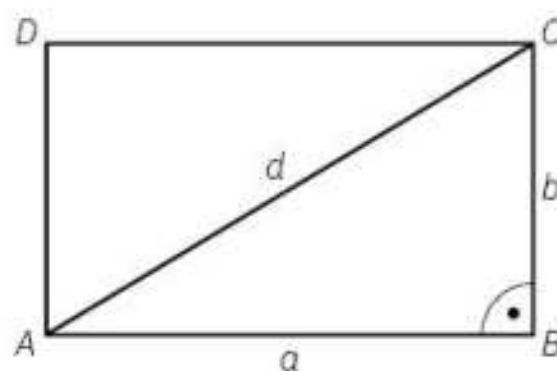
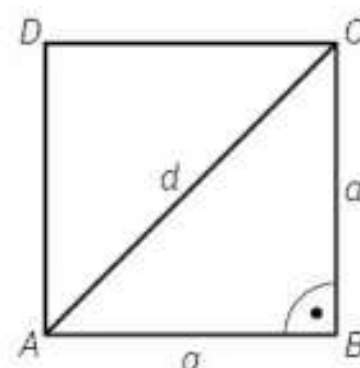
Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty prostokątne.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać następującą zależność

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ – wzór na długość przekątnej prostokąta o bokach o długościach } a \text{ i } b$$



Ćwiczenie 5.

Oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna ma długość 10 cm.

Rozwiązanie:

$d = a\sqrt{2}$ – korzystamy ze wzoru na długość przekątnej kwadratu

$$10 = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \text{ – usuwamy niewymierność z mianownika}$$

$$a = \frac{10\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 5\sqrt{2}$$

Odpowiedź: Długość boku kwadratu wynosi $5\sqrt{2}$ cm.

Aby wyprowadzić wzór na długość wysokości w trójkącie równobocznym o boku o długości a , również korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

Wysokość w trójkącie równobocznym dzieli podstawę na dwie równe części.

Po zapisaniu twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ADC otrzymujemy zależność:

$$AD^2 + DC^2 = AC^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{a^2}{4} + h^2 = a^2$$

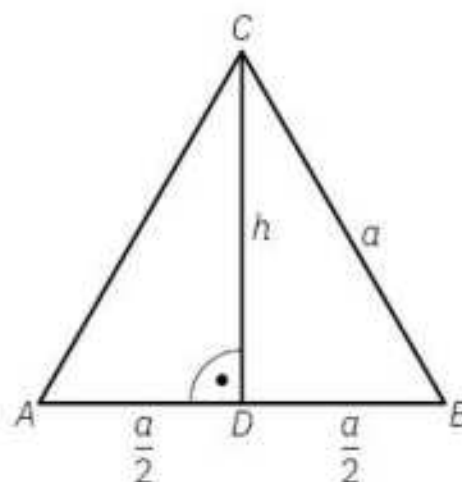
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

– wzór na długość wysokości trójkąta równobocznego o boku o długości a



Ćwiczenie 6.

Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego wysokość wynosi $3\sqrt{3}$ cm.

Rozwiązanie:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

– korzystamy ze wzoru na długość wysokości trójkąta równobocznego o boku o długości a

$$3\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2$$

$$6\sqrt{3} = a\sqrt{3} \quad | : \sqrt{3}$$

$$a = 6$$

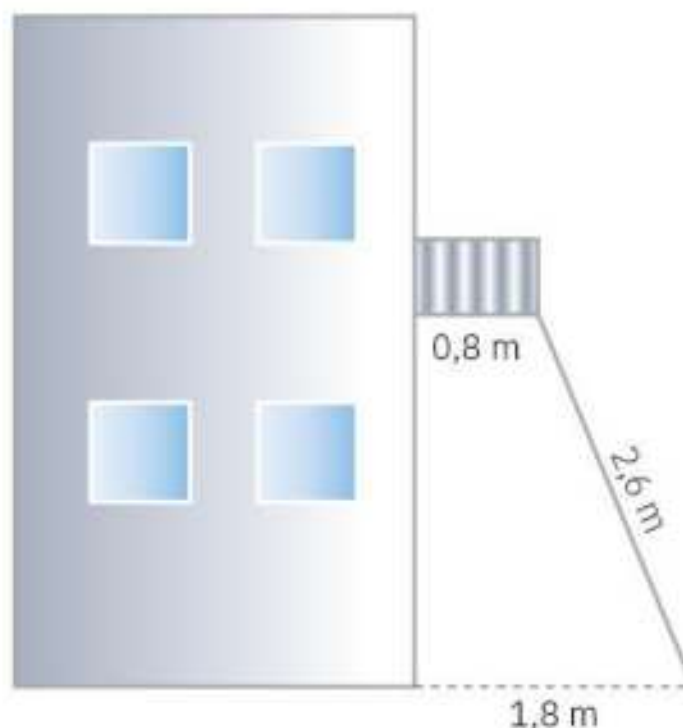
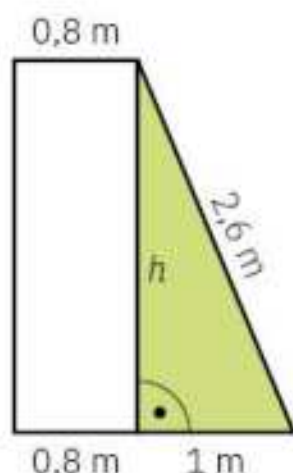
Odpowiedź: Długość boku trójkąta równobocznego wynosi 6 cm.

Ćwiczenie 7.

Na jakiej wysokości znajduje się balkon?

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla zamalowanego trójkąta:

$$1^2 + h^2 = 2,6^2$$

$$h^2 = 6,76 - 1$$

$$h^2 = 5,76$$

$$h = \sqrt{5,76}$$

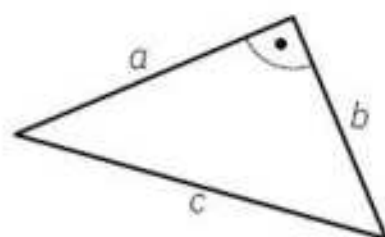
$$h = 2,4$$

Odpowiedź: Balkon znajduje się na wysokości 2,4 m.

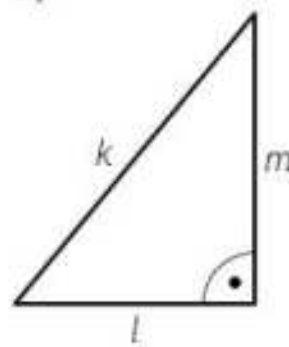
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Zapisz związek wynikający z twierdzenia Pitagorasa, który zachodzi pomiędzy długościami boków w trójkącie prostokątnym.

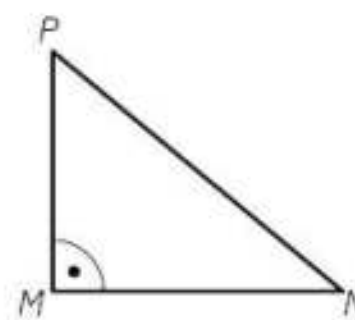
a)



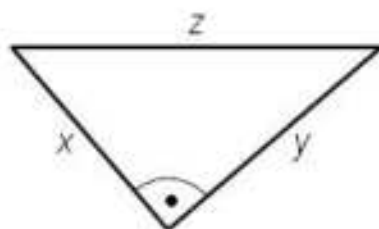
b)



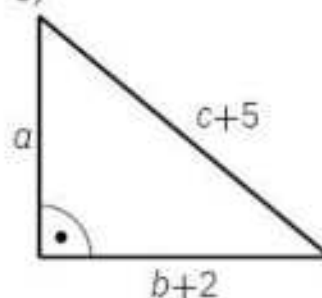
c)



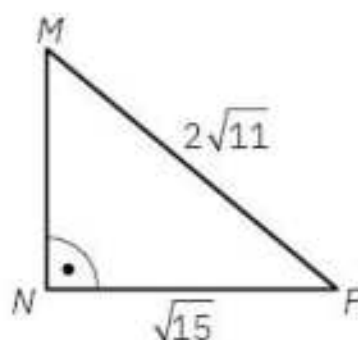
d)



e)

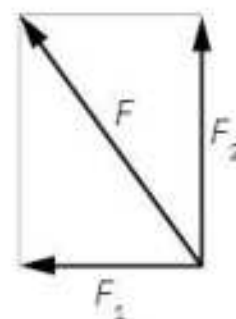


2. W trójkącie prostokątnym dane są długości dwóch przyprostokątnych. Oblicz długość przeciwprostokątnej.
- a) $a = 1 \text{ cm}$, $b = \sqrt{2} \text{ cm}$ b) $a = 6 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ c) $a = 24 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$
3. Przyjmijmy, że m i n oznaczają długości przyprostokątnych, a p jest długością przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym. Oblicz długość trzeciego z boków, jeśli wiadomo, że:
- a) $m = 5\sqrt{3}$, $n = 10$ b) $p = 13$, $m = 10$ c) $n = 9$, $p = 41$
4. Oblicz długość boku MN trójkąta MNP .

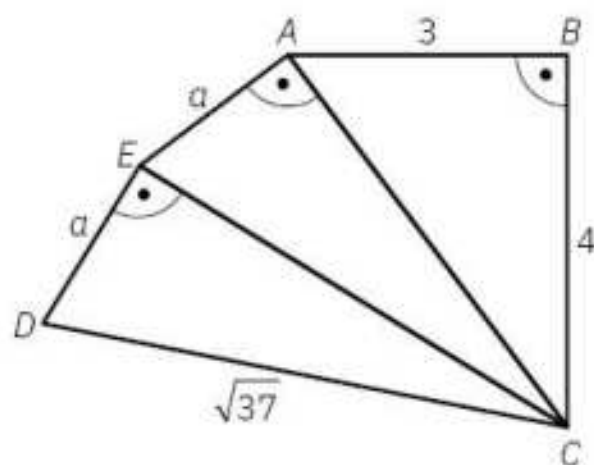


5. Długość przekątnej prostokąta wynosi $5\sqrt{3}$, a długość jednego z boków 5. Wyznacz obwód tego prostokąta.
- 6*. Oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna jest o 2 cm dłuższa od jego boku.
7. Podaj długość podstawy trójkąta równoramiennego, jeżeli wiadomo, że wysokość trójkąta jest równa $8\sqrt{2} \text{ cm}$, a długość ramienia wynosi 12 cm.
8. Oblicz pole i wysokość rombu, którego bok ma długość 25 cm, a jedna z przekątnych 14 cm.
9. Dany jest okrąg o środku S i promieniu $r = 5 \text{ cm}$. Cięciwa AB w tym okręgu ma długość 8 cm. Oblicz odległość środka S od tej cięciwy.
10. Oblicz wielkość wypadkowej dwóch sił $F_1 = 30 \text{ N}$ i $F_2 = 40 \text{ N}$ zaczepionych w jednym punkcie i wzajemnie prostopadłych.

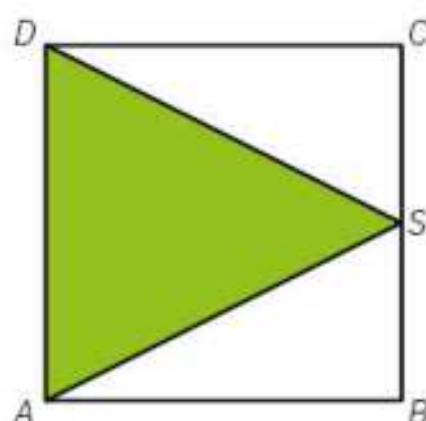
N (niuton) – jednostka siły w fizyce



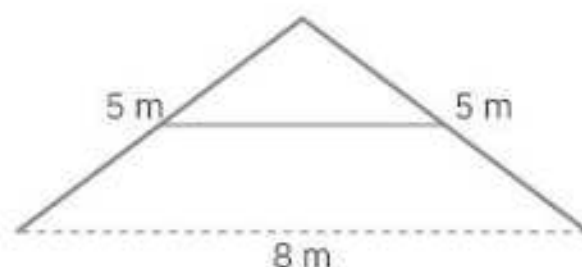
11. Oblicz obwód wielokąta $ABCDE$.



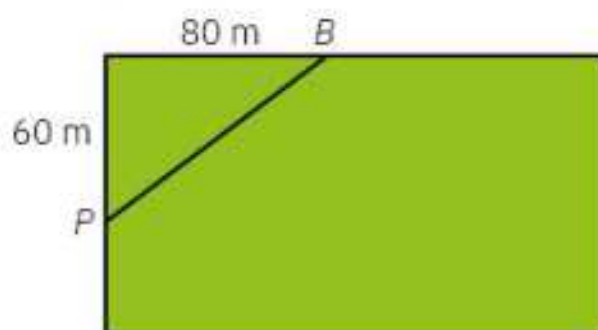
12. Rysunek przedstawia kwadrat $ABCD$. Wyznacz pole zamalowanej figury, jeśli wiadomo, że: $AB = BC$, $BS = CS$, $AS = 10$ cm.



13. Murarz rozstawił na szerokość 8 m drabinę o długości ramienia 5 m. Okazało się, że w takim ustawieniu drabina nie sięga do 4 m wysokości. O ile metrów musi murarz zmniejszyć rozstawienie tej drabiny, żeby sięgnęła żądanej wysokości?



14. Chcąc skrócić mieszkańcom bloku B drogę do przystanku P, ułożono chodnik biegnący przez prostokątny trawnik. O ile metrów skrócono drogę?



15. Oblicz długość wysokości trapezu równoramiennego, którego podstawy mają długości 5 cm i 2 cm, a długość ramienia jest równa 2,5 cm (definicja trapezu równoramiennego patrz s. 60, zadanie 6).



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 7 dm, a jedna z przyprostokątnych 3 dm. Długość drugiej przyprostokątnej wynosi
A. $4\sqrt{10}$ dm B. $10\sqrt{2}$ dm C. $2\sqrt{10}$ dm D. 4 dm
2. Długość wysokości trójkąta równobocznego o boku, którego długość wynosi $3\sqrt{3}$, jest równa
A. 4,5 B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $4,5\sqrt{3}$
3. Długość boku kwadratu o przekątnej o długości $7\sqrt{2}$ cm ma
A. 14 cm B. 7 cm C. 2 cm D. $\sqrt{14}$ cm
4. Długości boków trójkąta wynoszą 9 cm, 12 cm, 13 cm. Długość którego boku należy zwiększyć o 2 cm, aby powstał trójkąt prostokątny?
A. żadnego z boków C. boku 9-centymetrowego
B. boku 12-centymetrowego D. boku 13-centymetrowego

2.3. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli znamy długości dwóch boków w trójkącie prostokątnym, to korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy obliczyć długość trzeciego boku. Jeśli bez mierzenia kątów chcemy stwierdzić, czy trójkąt o podanych bokach jest prostokątny, korzystamy z **twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa**.



Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch krótszych boków jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku, to trójkąt jest prostokątny.

Ćwiczenie 1.

Zbadaj, który z trójkątów o podanych długościach boków jest prostokątny.

a) 3 m, 4 m, 5 m

b) 15 m, 12 m, 10 m

Rozwiązanie:

Korzystamy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. Sprawdzamy, czy kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków.

a) $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 5$ m

$$a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$c^2 = 5^2 = 25$$

Dla podanych długości boków tego trójkąta zachodzi związek $a^2 + b^2 = c^2$, więc ten trójkąt jest prostokątny.

Trójkąt o bokach o długości 3, 4, 5 nazywamy trójkątem egipskim.

b) $a = 10$ m, $b = 12$ m, $c = 15$ m

$$a^2 + b^2 = 10^2 + 12^2 = 100 + 144 = 244$$

$$c^2 = 15^2 = 225$$

$$a^2 + b^2 \neq c^2$$

Trójkąt o bokach 10 m, 12 m, 15 m nie jest trójkątem prostokątnym.

Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch krótszych boków jest większa od kwadratu długości najdłuższego boku, to trójkąt jest ostrokątny.



Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch krótszych boków jest mniejsza od kwadratu długości najdłuższego boku, to trójkąt jest rozwartokątny.



Ćwiczenie 2.

Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, czy rozwartokątny.

a) 2 cm, 3 cm, 4 cm

Rozwiązanie:

$a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm

$$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$c^2 = 4^2 = 16$$

$$13 < 16$$

Dla podanych długości boków tego trójkąta zachodzi związek $a^2 + b^2 < c^2$, więc ten trójkąt jest trójkątem rozwartokątnym.

b) 5 cm, 6 cm, 7 cm

Rozwiązanie:

$a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm

$$a^2 + b^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$$

$$c^2 = 7^2 = 49$$

$$61 > 49$$

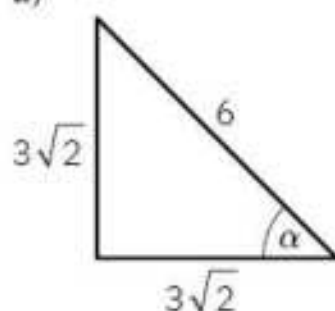
Dla podanych długości boków tego trójkąta zachodzi związek $a^2 + b^2 > c^2$, więc ten trójkąt jest trójkątem ostrokątnym.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

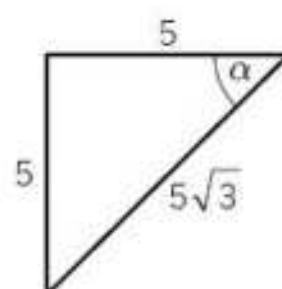
1. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny.
a) 10, 7, 5, 12, 5 b) $\sqrt{11}$, 5, 6 c) 21, 28, 35 d) 7, 24, 26
2. Sprawdź, czy odcinki o długościach a , b , c mogą być bokami trójkąta prostokątnego. Pamiętaj o zamianie jednostek.
a) $a = 0,5$ dm, $b = 12$ cm, $c = 0,13$ m
b) $a = 6\frac{3}{4}$ dm, $b = 30$ cm, $c = 1$ m
c) $a = 8$ cm, $b = 1,2$ dm, $c = \frac{1}{2}$ m
d) $a = 0,6$ m, $b = 100$ cm, $c = 8$ dm

3. Czy kąt α ma miarę 45° ?

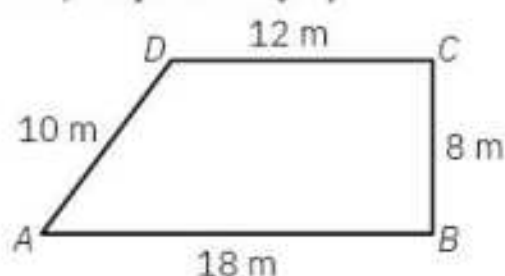
a)



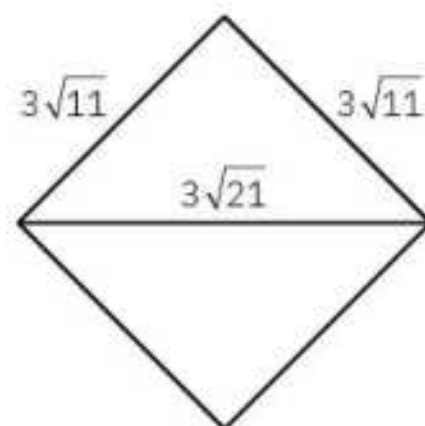
b)



4. Które z liczb całkowitych będących rozwiązaniem nierówności $2x + 1 \leq 11$ mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego?
5. Czy trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (3, -2)$, $B = (-2, -5)$, $C = (3, -5)$ jest prostokątny?
6. Długości boków trójkąta ABC są równe 7 cm, 24 cm, 25 cm, trójkąta $A_1B_1C_1$: 6 cm, 10 cm, 13 cm, a trójkąta $A_2B_2C_2$: 8 cm, 9 cm, 12 cm. Który z tych trójkątów jest ostrokątny, który prostokątny, a który rozwartokątny?
7. Sprawdź, czy równoległobok o danych bokach i jednej z przekątnych jest prostokątem.
a) długości boków: 4 cm, 5 cm, długość przekątnej: 6 cm
b) długości boków: $2\sqrt{5}$ dm, $\sqrt{7}$ dm, długość przekątnej: $3\sqrt{3}$ dm
8. Uzasadnij, że równoległobok, w którym przekątne mają długości 10 cm i 24 cm oraz jeden z boków ma długość 13 cm, jest rombem (definicja rombu patrz s. 63).
9. Uzasadnij, że trapez $ABCD$ jest prostokątny.



- Trójkątem prostokątnym nie jest trójkąt o bokach
 A. 0,3, 0,4, 0,5 B. $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 1$ C. 8, 10, 12 D. 2, 3, $\sqrt{13}$
- Ile różnych trójkątów prostokątnych można zbudować z odcinków o długości 2, 3, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, 4, 5, 6?
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- W trójkącie ABC o długościach boków: $\sqrt{3}$ cm, 3 cm, $2\sqrt{3}$ cm jeden z kątów ma miarę 60° . Jeden z pozostałych kątów tego trójkąta ma miarę
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°
- Czy przedstawiony na rysunku romb jest kwadratem?
 A. nie da się tego stwierdzić
 B. tak, bo ma wszystkie boki równe
 C. tak, bo przekątna i dwa boki wyznaczają trójkąt równoramienny
 D. nie, bo przekątna i dwa boki nie wyznaczają trójkąta prostokątnego



2.4. Czworokąty i ich własności

Wielokąt o czterech bokach nazywamy czworokątami.

Punkty A, B, C, D to wierzchołki czworokąta $ABCD$.

Odcinki AB, BC, CD, AD są bokami czworokąta $ABCD$.

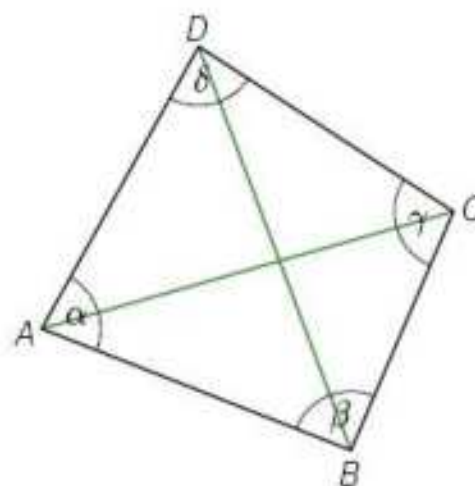
Boki czworokąta, które nie mają wspólnego wierzchołka, czyli boki AB i CD oraz boki BC i AD , nazywamy bokami przeciwległymi.

Odcinki AC i BD to przekątne tego czworokąta.

Każdy czworokąt ma dwie przekątne.

Kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ to kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$.

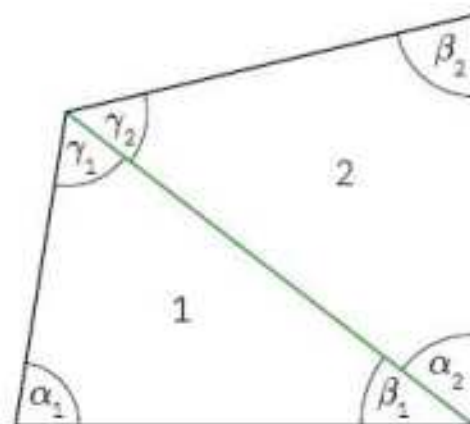
Kąty czworokąta, które nie mają wspólnego ramienia, czyli kąty α i γ oraz kąty β i δ , nazywamy kątami przeciwległymi.



Gdy w dowolnym czworokącie poprowadzimy przekątną, to podzieli ona ten czworokąt na dwa trójkąty. Suma miar kątów wewnętrznych każdego z tych trójkątów wynosi 180° , a zatem w trójkącie 1: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180^\circ$, a trójkącie 2: $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 180^\circ$.

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

W czworokącie suma miar kątów wewnętrznych wynosi 360° .



Ćwiczenie 1.

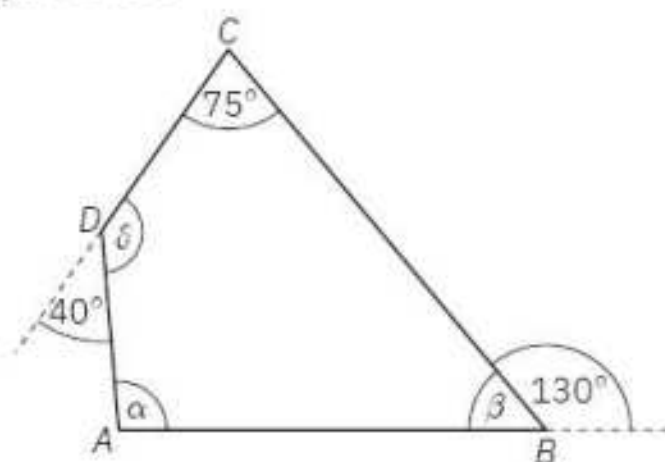
Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$.

Rozwiązanie:

$\beta = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ – kąty o miarach β i 130° są przyległe

$\delta = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ – kąty o miarach δ i 40° są przyległe

$\alpha = 360^\circ - (50^\circ + 140^\circ + 75^\circ) = 95^\circ$ – suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360°



Odpowiedź: Miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ wynoszą 95° , 50° , 75° , 140° .

Ćwiczenie 2.

Przekątna podzieliła czworokąt na dwa trójkąty, których obwody wynoszą 30 cm i 42 cm. Oblicz długość tej przekątnej, jeśli wiesz, że obwód czworokąta wynosi 48 cm.

Rozwiązanie:

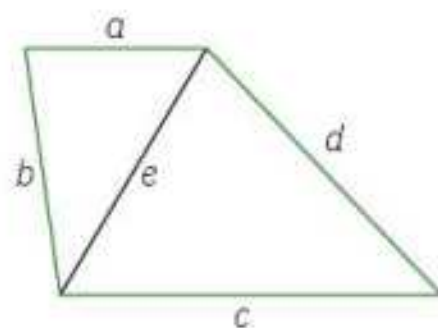
Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$a + b + c + d = 48$ (cm) – obwód czworokąta

$a + b + e + c + d + e = 30 + 42 = 72$ (cm) – obliczamy sumę obwodów trójkątów

$e = (72 - 48) : 2 = 12$ (cm) – obliczamy długość przekątnej e

Odpowiedź: Przekątna tego czworokąta ma długość 12 cm.



Czworokąty, których wszystkie kąty wewnętrzne są proste, nazywamy **prostokątami**.

W prostokącie przeciwległe boki są równoległe, a ich długości są równe. Przekątne prostokąta mają taką samą długość i dzielą się na połowy.

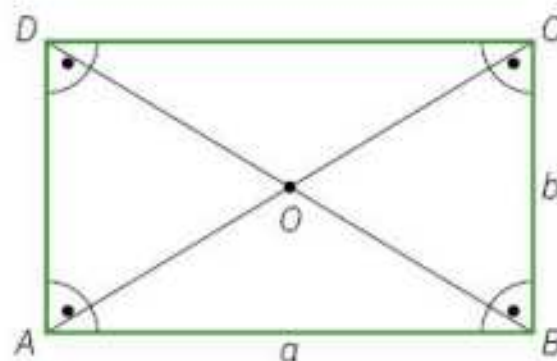
W prostokącie $ABCD$:

$AB = CD$ i $BC = AD$ oraz $AB \parallel CD$ i $BC \parallel AD$

$AC = BD$ oraz $AO = OC$ i $BO = OD$

$S = 2a + 2b$ – obwód prostokąta

$P = a \cdot b$



Szczególnym przypadkiem prostokąta jest kwadrat.

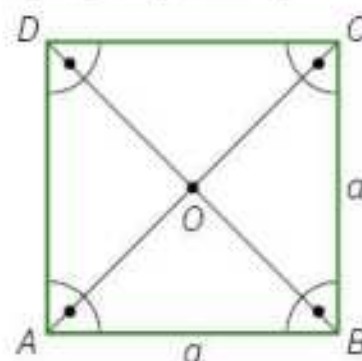
Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równej długości. W kwadracie przekątne są równej długości, przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.

W kwadracie $ABCD$:

$AC = BD$ oraz $AO = OC$ i $BO = OD$

$S = 4a$ – obwód kwadratu

$P = a^2$ – pole kwadratu



Ćwiczenie 3.

Pan Nowacki i pan Pawlicki kupili tyle samo metrów bieżących siatki na ogrodzenie swoich działek. Działka pana Nowackiego ma kształt prostokąta o wymiarach 0,062 km i 34 m, a działka pana Pawlickiego jest kwadratem. Podaj wymiary działki pana Pawlickiego.

Rozwiązanie:

$a = 0,062 \text{ km} = 62 \text{ m}$, $b = 34 \text{ m}$ – wymiary działki pana Nowackiego

$S = 2 \cdot 62 + 2 \cdot 34 = 124 + 68 = 192 \text{ (m)}$ – obliczamy obwód działki pana Nowackiego

$a_1 = 192 : 4 = 48 \text{ (m)}$ – obliczamy długość boku działki pana Pawlickiego

Odpowiedź: Działka pana Pawlickiego ma wymiary 48 m x 48 m.

Ćwiczenie 4.

Pole prostokąta wynosi 154 cm^2 . Oblicz obwód tego prostokąta, jeżeli jego szerokość jest równa 11 cm.

Rozwiązanie:

Sporządzamy rysunek pomocniczy i obliczamy długość boku a prostokąta (korzystamy ze wzoru na pole prostokąta):

$$154 = a \cdot 11$$

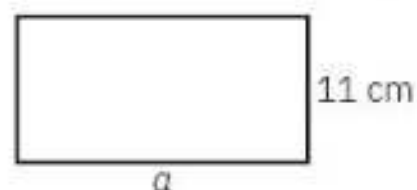
$$a = 154 : 11 = 14 \text{ (cm)}$$

Obliczamy obwód prostokąta:

$$S = 2 \cdot 11 + 2 \cdot 14 = 50 \text{ (cm)}$$

$$S = 2 \cdot 11 + 2 \cdot 14$$

Odpowiedź: Obwód tego prostokąta wynosi 50 cm.



Ćwiczenie 5.

Prostokątna podłoga łazienki o wysokości 2,5 m ma wymiary 4 m x 3 m. Drzwi tej łazienki mają 70 cm szerokości i 2 m wysokości. Ile kwadratowych płytek o boku o długości 20 cm potrzeba na wyłożenie ścian tej łazienki?

Rozwiązanie:

$4 \cdot 2,5 = 10 \text{ (m}^2\text{)}$ – obliczamy powierzchnię ściany o wymiarach 4 m x 2,5 m

$3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ (m}^2\text{)}$ – obliczamy powierzchnię ściany o wymiarach 3 m x 2,5 m

$2 \cdot 10 + 2 \cdot 7,5 = 35 \text{ (m}^2\text{)}$ – obliczamy powierzchnię wszystkich ścian łazienki

$0,7 \cdot 2 = 1,4 \text{ (m}^2\text{)}$ – obliczamy powierzchnię drzwi

$35 - 1,4 = 33,6 \text{ (m}^2\text{)}$ – obliczamy powierzchnię, którą chcemy wyłożyć płytkami

$20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ – wyrażamy długość boku płytki w metrach

$0,2^2 = 0,04 \text{ (m}^2\text{)}$ – obliczamy pole kwadratowej płytki

$33,6 : 0,04 = 840$ – obliczamy liczbę płytek

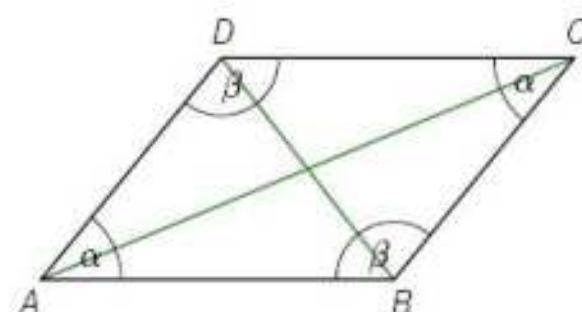
Odpowiedź: Na wyłożenie ścian łazienki potrzeba 840 płytek.

Równoległobok jest to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych. W równoległoboku boki równoległe są sobie równe, a przekątne przecinają się w połowie.

W równoległoboku $ABCD$:

$AB = CD$ i $BC = AD$ oraz $AB \parallel CD$ i $BC \parallel AD$

$AO = OC$ i $BO = OD$

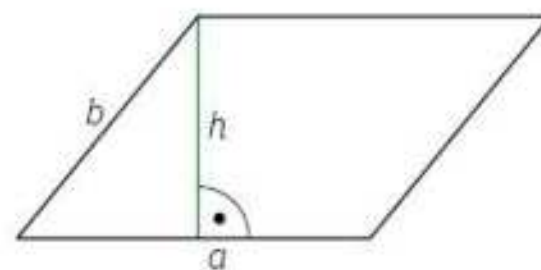


W równoległoboku przeciwległe kąty są równe, a suma miar dwóch kolejnych kątów wynosi 180° .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$S = 2a + 2b$ – obwód równoległoboku

$P = a \cdot h$ – pole równoległoboku



Ćwiczenie 6.

Boki równoległoboku mają długości 5,6 cm i 2,4 cm. Wysokość opuszczona na dłuższy bok wynosi 1,5 cm. Oblicz długość wysokości opuszczonej na krótszy bok.

Rozwiązanie:

Ustalamy wielkości dane w zadaniu.

$$a = 5,6 \text{ cm}, b = 2,4 \text{ cm}, h_a = 1,5 \text{ cm}$$

$$P = 5,6 \cdot 1,5 = 8,4 (\text{cm}^2) - \text{obliczamy pole równoległoboku}$$

$$8,4 = 2,4 \cdot h_b - \text{korzystamy ze wzoru na pole równoległoboku}$$

$$h_b = 8,4 : 2,4 = 3,5 (\text{cm})$$

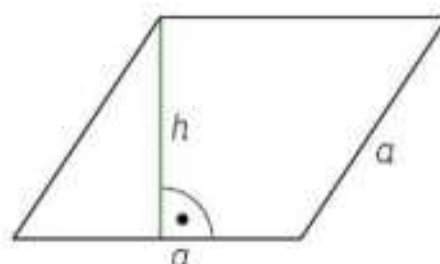
Odpowiedź: Wysokość opuszczona na krótszy bok ma długość 3,5 cm.

Szczególnym przypadkiem równoległoboku jest romb.

Romb jest równoległobokiem, którego wszystkie boki są równej długości.

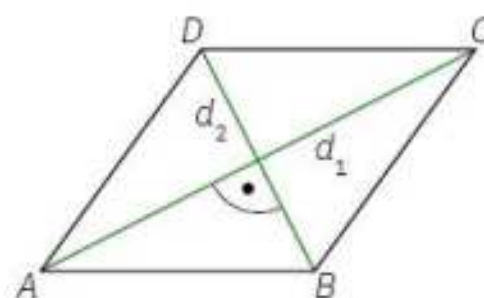
$$S = 4a - \text{obwód rombu}$$

$$P = a \cdot h - \text{pole rombu}$$



W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.

Pole rombu o przekątnych o długości d_1 i d_2 można wyrazić wzorem $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.



Ćwiczenie 7.

Wysokość rombu o boku o długości 5 cm jest równa 4,8 cm. Oblicz długość jednej z przekątnych tego rombu, jeżeli druga przekątna ma długość 6 cm.

Rozwiązanie:

$$a = 5 \text{ cm}, h = 4,8 \text{ cm}, d_1 = 6 \text{ cm} - \text{ustalamy wielkości dane w zadaniu}$$

$$P = 5 \cdot 4,8 = 24 (\text{cm}^2) - \text{obliczamy pole rombu, korzystając ze wzoru } P = a \cdot h$$

$$24 = \frac{6 \cdot d_2}{2} - \text{obliczamy przekątną rombu, korzystając ze wzoru } P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$d_2 = 8 \text{ cm}$$

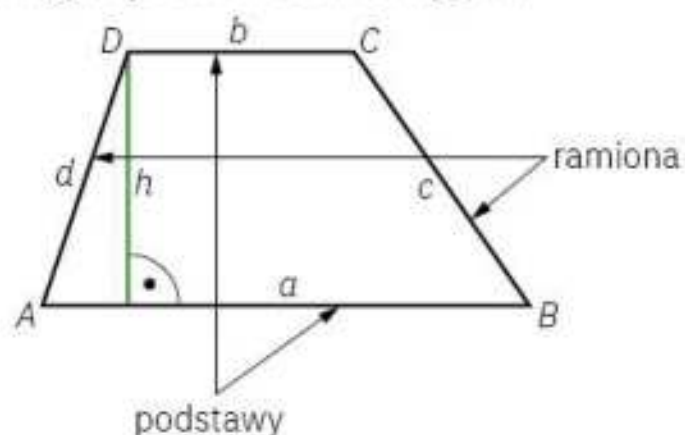
Odpowiedź: Druga przekątna rombu ma długość 8 cm.

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

$S = a + b + c + d$ – obwód trapezu

$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$ – pole trapezu

W trapezie $ABCD$: $AB \parallel CD$

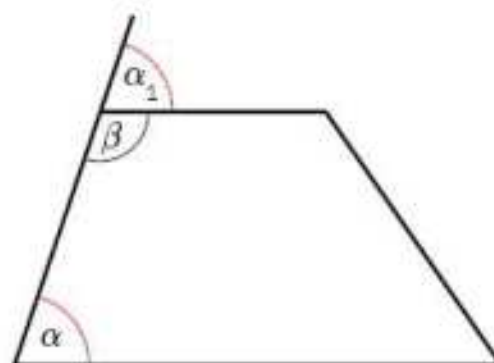


Suma miar kątów leżących przy jednym ramieniu trapezu jest równa 180° .

$\alpha_1 + \beta = 180^\circ$, bo kąty α_1 i β są kątami przyległymi

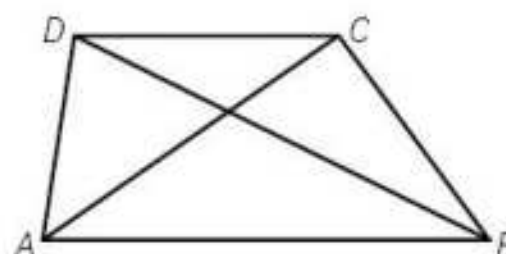
$\alpha = \alpha_1$, bo kąty α i α_1 są kątami odpowiadającymi

Zatem: $\alpha + \beta = 180^\circ$.



Wśród trapezów wyróżniamy trapezy różnoramiennie, równoramiennie i prostokątne.

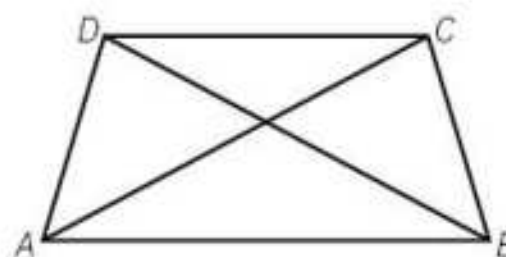
Trapez różnoramienny to trapez, którego ramiona mają różne długości.



Przekątne w takim trapezie są różnej długości.

$AD \neq BC$ i $AC \neq BD$

Trapez równoramienny to trapez, w którym miary kątów przy podstawie są równe.

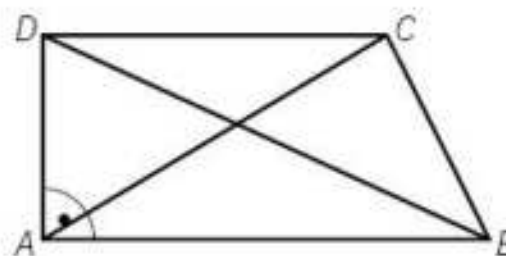


Przekątne w takim trapezie równoramiennym są takiej samej długości.

$AC = BD$ i $AD = BC$

Trapez prostokątny to trapez, w którym przynajmniej jeden kąt wewnętrzny jest kątem prostym.

$\sphericalangle BAD = 90^\circ$

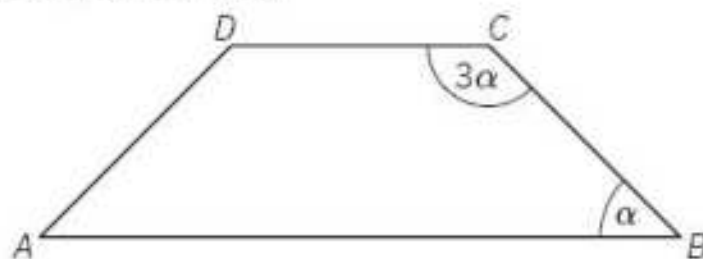


Ćwiczenie 8.

Miara kąta rozwartego trapezu równoramiennego jest 3 razy większa od miary kąta ostrego. Ile wynoszą miary kątów tego trapezu?

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



$180^\circ : 4 = 45^\circ$ – obliczamy miarę kąta ostrego

$3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$ – obliczamy miarę kąta rozwartego

Odpowiedź: Miary kątów tego trapezu wynoszą: $45^\circ, 135^\circ, 135^\circ, 45^\circ$.

Ćwiczenie 9.

Pole trapezu wynosi 60 cm^2 . Oblicz długość dłuższej podstawy, jeżeli wysokość trapezu wynosi 6 cm, a krótsza podstawa ma długość 4 cm.

Rozwiązanie:

$P = 60 \text{ cm}^2$, $h = 6 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ – ustalamy wielkości podane w zadaniu

$60 = \frac{(a+4) \cdot 6}{2}$ – obliczamy pole trapezu

$a = 16 \text{ cm}$

Odpowiedź: Dłuższa podstawa trapezu ma długość 16 cm.

Umiejętność obliczania obwodów i pól wielokątów oraz znajomość ich własności pozwoli rozwiązać wiele problemów w codziennych sytuacjach. Warto nauczyć się zauważać kształty figur w otaczającej nas rzeczywistości.

Ćwiczenie 10.

Oblicz pole zamalowanego wielokąta wyciętego z kwadratu o boku długości 6 cm.

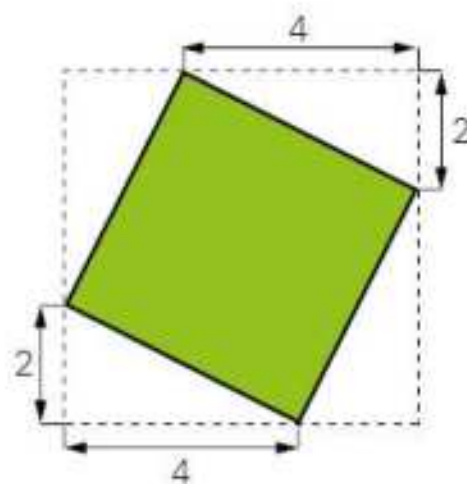
Rozwiązanie:

$6^2 = 36 (\text{cm}^2)$ – obliczamy pole kwadratu

$\frac{4 \cdot 2}{2} = 4 (\text{cm}^2)$ – obliczamy pole trójkąta

$36 - 4 \cdot 4 = 20 (\text{cm}^2)$ – obliczamy pole wielokąta

Odpowiedź: Pole zamalowanego wielokąta jest równe 20 cm^2 .

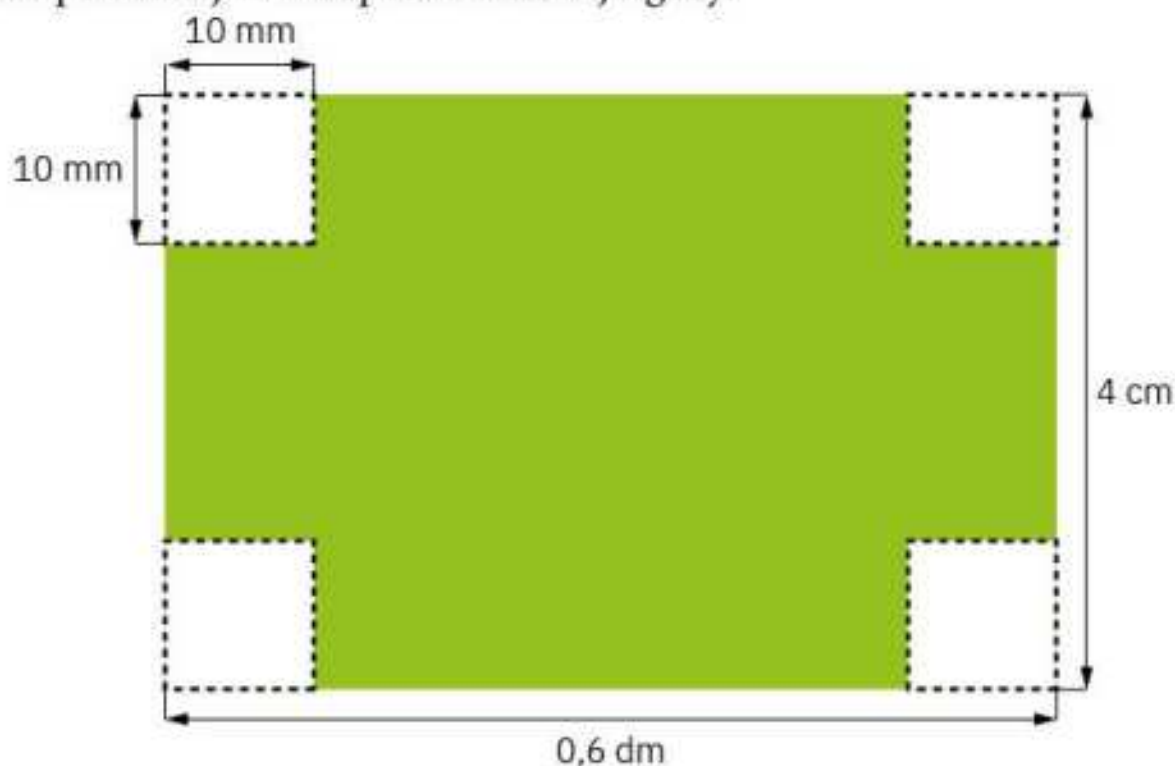


ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Sprawdź, czy istnieje czworokąt, którego kąty wewnętrzne wynoszą:
 a) $38^\circ, 125^\circ, 86^\circ, 111^\circ$; c) $40^\circ, 60^\circ, 100^\circ, 180^\circ$;
 b) $54^\circ, 112^\circ, 66^\circ, 132^\circ$; d) $84^\circ, 112^\circ, 53^\circ, 111^\circ$.
2. Jakie są długości boków czworokąta, którego obwód wynosi 28 cm, a każdy kolejny bok tego czworokąta jest o 2 cm krótszy od poprzedniego?
3. Wśród podanych zdań wskaż zdania fałszywe.
 a) Przekątne w kwadracie są równej długości, przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.
 b) Kwadrat jest to czworokąt, który ma wszystkie boki równej długości i wszystkie kąty proste.
 c) Przekątne kwadratu są dwa razy dłuższe od jego boków.
 d) Każdy kwadrat jest prostokątem.
 e) Przekątna kwadratu dzieli go na dwa trójkąty równoboczne.
4. Ile rolek papierowej taśmy, przedstawionej na rysunku, trzeba kupić, aby okleić brzegi sufitu o wymiarach 4,70 m x 3,20 m?



5. Z prostokąta wycięto w rogach kwadraty tak, jak pokazano na rysunku. Oblicz obwód powstałej w ten sposób zielonej figury.



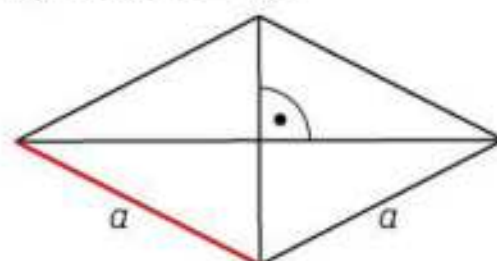
6. Wskaż zdania prawdziwe.
- W równoległoboku przeciwległe kąty mają równe miary.
 - Suma miar dwóch kolejnych kątów w równoległoboku wynosi 180° .
 - Przekątne równoległoboku mają różną długość i przecinają się pod kątem prostym.
 - Romb jest to czworokąt o dwóch bokach równej długości.

7. Oblicz długości wyróżnionych odcinków równoległoboku i rombu.

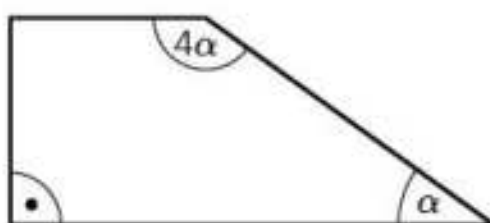
a) Obwód = 42



b) Obwód = 2,4

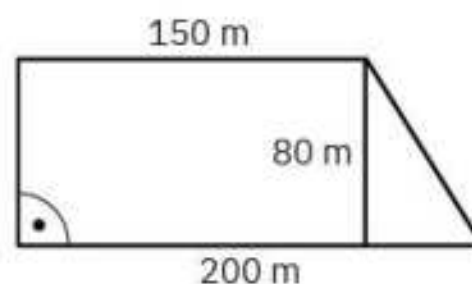


8. Wyznacz miary kątów trapezu przedstawionego na rysunku.



9. Działka przedstawiona na rysunku ma kształt trapezu.

- Oblicz pole tej działki. Wynik podaj w arach.
- Pole tej działki narysowanej na planie w skali 1 : 5000 wynosi $5,5 \text{ cm}^2$. Prawda czy fałsz?



10. Przez wierzchołek kwadratu o obwodzie 16 cm poprowadzono prostą, która podzieliła kwadrat na trójkąt i trapez, w którym jedna podstawa jest o 3 cm krótsza od drugiej. Oblicz obwód trapezu.
11. Pani Maria postanowiła kupić rolety kasetowe do dwóch okien w salonie. Każde z okien ma kształt prostokąta. Ile zapłaci za takie rolety, jeżeli jedno okno ma wymiary 170 cm x 130 cm, a cena rolety to 64 zł za 1 m^2 ?
12. Powierzchnia działki państwa Błędowskich wynosi 8 arów. Na działce wybudowano altanę na planie prostokąta o wymiarach 5 m x 4 m. Do altanki prowadzi prostokątna ścieżka, której długość wynosi 20 m, a szerokość 2 m. Pozostała część działki została obsadzona kwiatami i drzewami. Oblicz, jaką część działki państwo Błędowscy przeznaczyci na rośliny.
13. Przekątne rombu mają długości 6 cm i 0,8 dm. Jaka jest wysokość tego rombu?

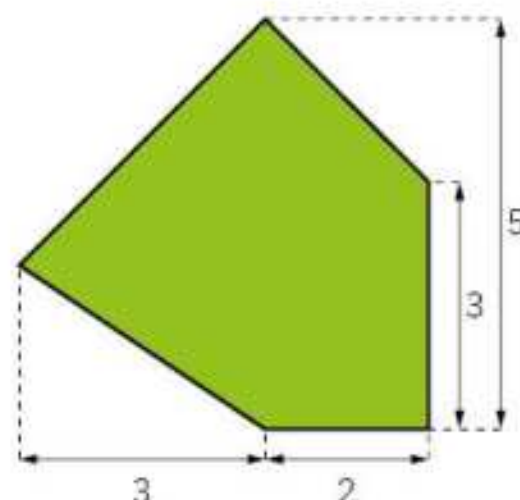
14. Na rysunku przedstawiono plan ulic na osiedlu Słonecznym. Długość ogrodzenia Miejskiego Ośrodka Sportu, zaznaczonego na rysunku kolorem zielonym, wynosi 500 m. Oblicz, ile metrów tego ogrodzenia przylega do ulicy Relaksowej.



15. Pole trapezu jest równe 60 cm^2 . Jedna z podstaw ma długość 2 cm , a druga jest od niej cztery razy dłuższa. Oblicz długość wysokości tego trapezu.
16. Aby zamontować parapet pod oknem, z prostokątnego arkusza plastiku odcięto dwa trójkąty (spójrz na rysunek). Ile wynosi pole powierzchni zamontowanego parapetu?

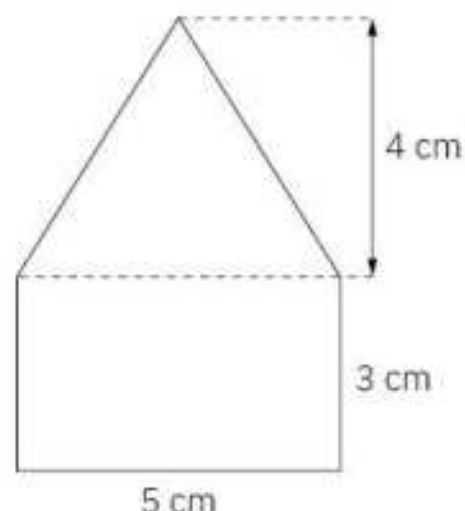


17. Plac, na którym znajduje się parking, ma kształt trapezu o podstawach o długościach 20 m i 60 m oraz wysokości 30 m . Na zaparkowanie jednego samochodu potrzebna jest powierzchnia 20 m^2 . Ile najwięcej samochodów można jednocześnie zaparkować na tym parkingu, jeśli droga dojazdowa zajmuje powierzchnię 200 m^2 ?
18. Działka budowlana ma kształt trapezu prostokątnego. Na planie sporządzonym w skali $1 : 1000$ wysokość trapezu ma długość 4 cm , a podstawy – 8 cm i 7 cm . Oblicz, ile trzeba zapłacić za tę działkę, jeżeli 1 m^2 kosztuje 250 zł .
19. Obwody dwóch działek budowlanych, z których jedna ma kształt kwadratu, a druga kształt prostokąta, są jednakowe i wynoszą po 200 m . Długość działki prostokątnej stanowi 150% jej szerokości. Oblicz pole każdej działki. Wynik podaj w arach. Która z działek ma większe pole?



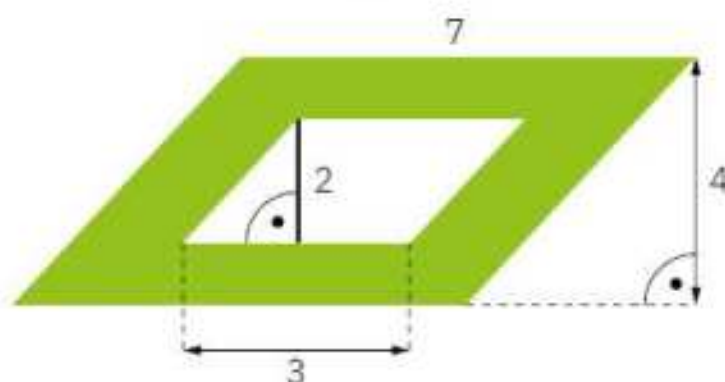
20. Oblicz pole narysowanego wielokąta.

21. Dwie kostki brukowe mają różny kształt, ale jednakową powierzchnię. Pierwsza z nich jest trapezem równoramiennym o podstawach 24 cm i 8 cm oraz wysokości 18 cm, a druga jest prostokątem, którego jeden z boków ma taką samą długość, jak dłuższa podstawa trapezu. Podaj wymiary prostokątnej płytki.
22. Uczeń zamierza wyciąć z kolorowego brystolu wielokąt o jednakowym polu, ale o różnych kształtach. Narysował już pięciokąt o wymiarach podanych na rysunku i chce jeszcze narysować kwadrat. Jakiej długości musi być bok tego kwadratu?



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Miary kątów narysowanego czworokąta wynoszą
 A. $90^\circ, 18^\circ, 72^\circ, 90^\circ$
 B. $90^\circ, 90^\circ, 15^\circ, 75^\circ$
 C. $90^\circ, 90^\circ, 50^\circ, 100^\circ$
 D. $90^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
2. Przekątna podzieliła czworokąt na dwa trójkąty, których obwody wynoszą 22 cm i 36 cm. Jeśli długość tej przekątnej wynosi 12 cm, to ten czworokąt ma obwód
 A. 34 cm B. 24 cm C. 58 cm D. 60 cm
3. Podłoga w pokoju Ani ma kształt prostokąta o wymiarach 4 m x 6 m. Ile puszek lakieru potrzeba do dwukrotnego pomalowania tej podłogi, jeżeli jedna puszka wystarcza na pomalowanie $2,5 \text{ m}^2$?
 A. 19 B. 9 C. 20 D. 10
4. Na rysunku zaznaczono dwa równoległoboki.



Ile wynosi pole zamalowanej figury?

- A. 28 B. 22 C. 11 D. 34



2.5. Okrąg i koło

Koło o środku w punkcie O i promieniu r jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza od długości promienia r lub równa tej długości.

Długość okręgu o promieniu r obliczamy ze wzoru: $l = 2\pi r$.

Cięciwa – każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu.

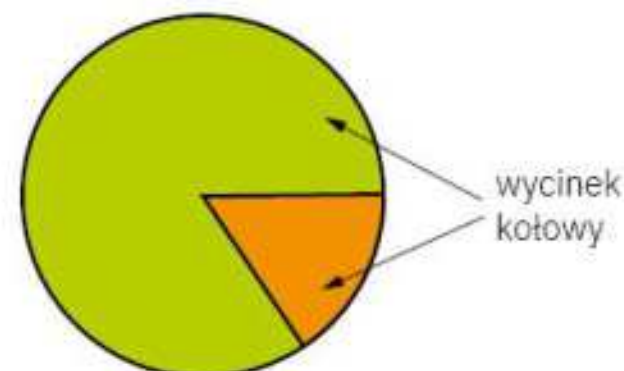
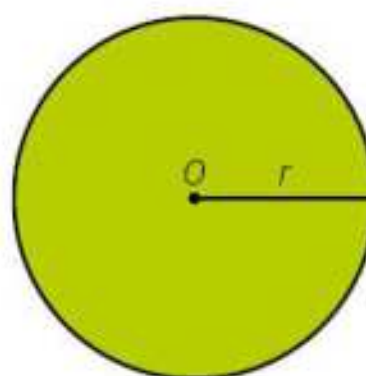
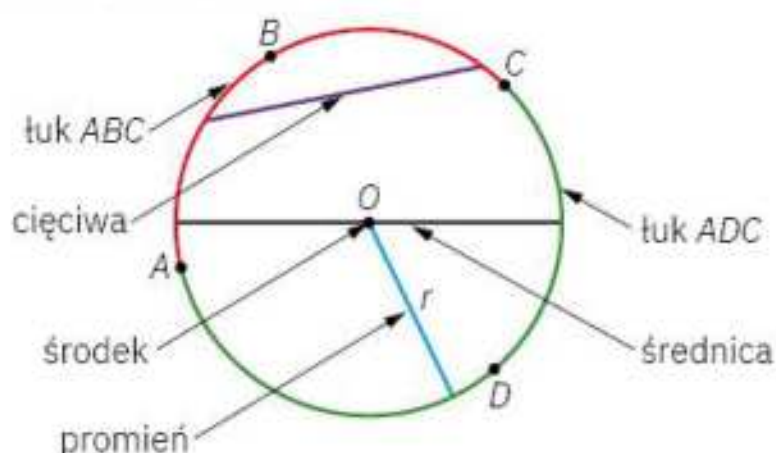
Średnica – najdłuższa cięciwa przechodząca przez środek okręgu (długość średnicy jest dwa razy większa od długości promienia).

Łuk – część okręgu zawarta między dwoma różnymi punktami okręgu wraz z tymi punktami.

Okrąg o środku w punkcie O i promieniu r to figura złożona z wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa długości promienia r .

Część koła zawarta między dwoma promieniami wraz z tymi promieniami nosi nazwę **wycinka kołowego**.

Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem: $P = \pi r^2$.



Ćwiczenie 1.

Oblicz obwód i pole koła o promieniu długości r . Wyniki podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

a) $r = 3$ cm

Rozwiązanie:

$$l = 2\pi r$$

$$P = \pi r^2$$

$$l = 2\pi \cdot 3$$

$$P = \pi \cdot 3^2$$

$$l = 6\pi \text{ cm } (\pi \approx 3,14)$$

$$P = 9\pi (\text{cm}^2)$$

$$l \approx 18,84 \text{ cm}$$

$$P \approx 28,26 \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: Obwód tego koła wynosi 18,84 cm, a jego pole 28,26 cm².

| b) $r = 5$ dm

Liczba π jest liczbą niewymierną. Jej rozwinięcie dziesiętne do dziesiątej cyfry po przecinku wynosi: $\pi = 3,1415926535\dots$

Ćwiczenie 2.

Oblicz długość łuku oraz pole zamalowanego wycinka kołowego, jeśli $\alpha = 30^\circ$ oraz $r = 5$ cm.

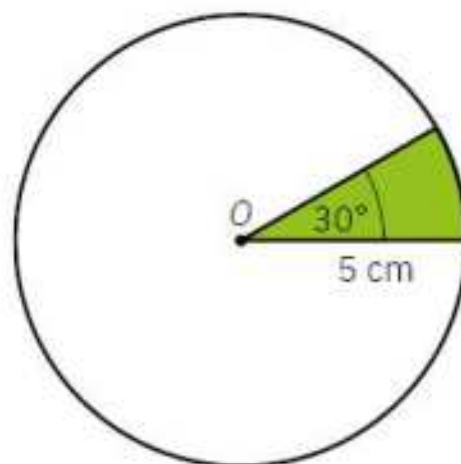
Rozwiązanie:

$\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$ – obliczamy, jaką częścią kąta pełnego jest kąt 30°

$l = \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 5 = \frac{5}{6}\pi(\text{cm})$ – obliczamy długość łuku

$P_w = \frac{1}{12} \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{12}\pi(\text{cm}^2)$ – obliczamy pole wycinka

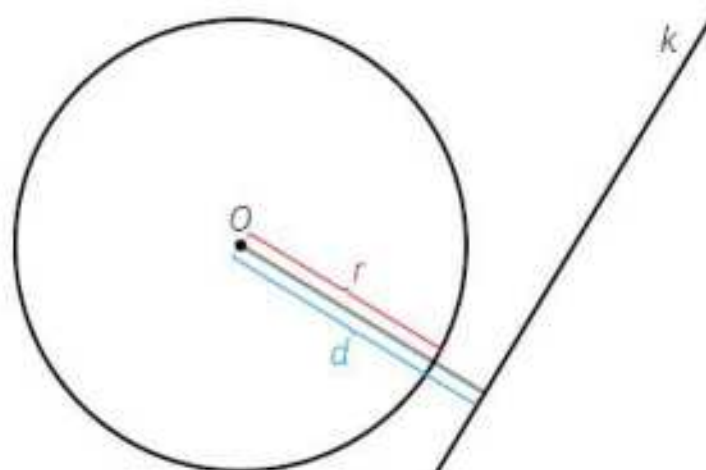
Odpowiedź: Łuk ma długość $\frac{5}{6}\pi$ cm. Pole wycinka koła wynosi $\frac{25}{12}\pi \text{ cm}^2$.



Jeśli prosta i okrąg są położone na tej samej płaszczyźnie, to te figury mogą nie mieć punktów wspólnych, mogą mieć jeden punkt wspólny albo mogą mieć dwa punkty wspólne.

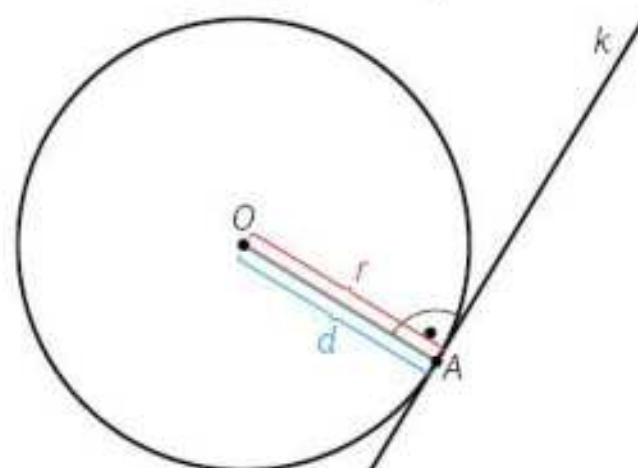
Prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

Odległość środka okręgu od prostej jest większa od długości promienia tego okręgu: $d > r$.



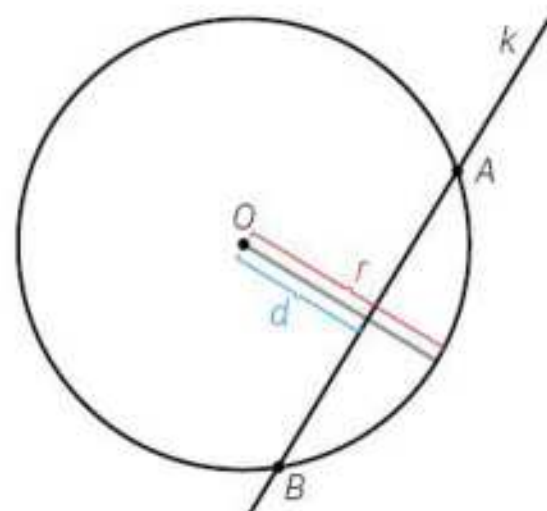
Prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny.

Odległość środka okręgu od prostej jest równa długości promienia tego okręgu: $d = r$. Prosta k nazywamy wtedy **styczną** okręgu. **Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia o końcu w punkcie styczności.**



Prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne. Odległość środka okręgu od prostej jest mniejsza od długości promienia tego okręgu: $d < r$.

Prostą k nazywamy wtedy **sieczną** okręgu.



Ćwiczenie 3.

Określ wzajemne położenie prostej k i okręgu o środku w punkcie O i promieniu długości r , gdy:

a) $r = 60 \text{ mm}$

Rozwiązanie:

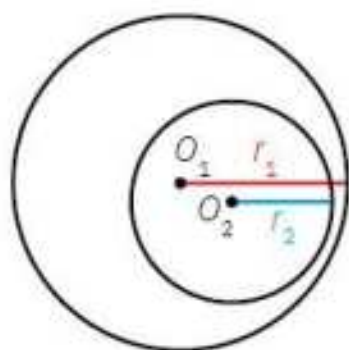
$r = 60 \text{ mm} = 6 \text{ cm}$, $4 \text{ cm} < 6 \text{ cm}$

Odpowiedź: Prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne. Prosta k jest sieczną okręgu.

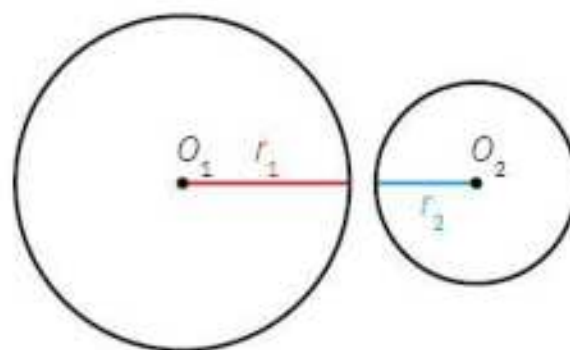
b) $r = 2 \text{ cm}$

c) $r = 0,4 \text{ dm}$

Dwa okręgi także mogą być względem siebie położone w różny sposób. Okręgi są **rozłączne**. Nie mają punktów wspólnych.

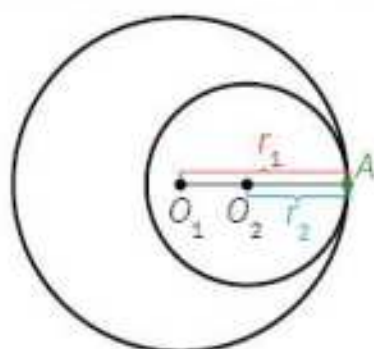


$$O_1O_2 > r_1 + r_2$$

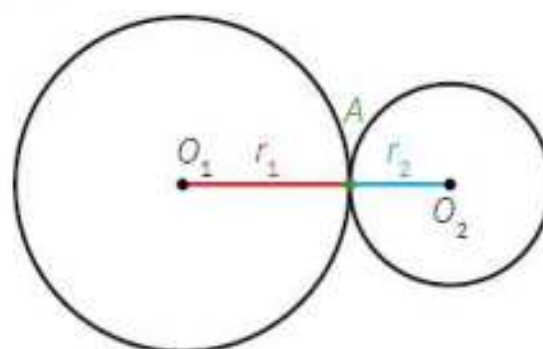


$$O_1O_2 < |r_1 - r_2|$$

Okręgi są styczne. Mają jeden punkt wspólny.

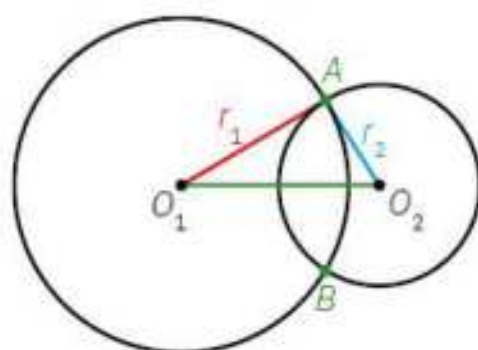


$$O_1O_2 = r_1 + r_2$$



$$O_1O_2 = |r_1 - r_2|$$

Okręgi się **przecinają**. Mają dwa punkty wspólne.

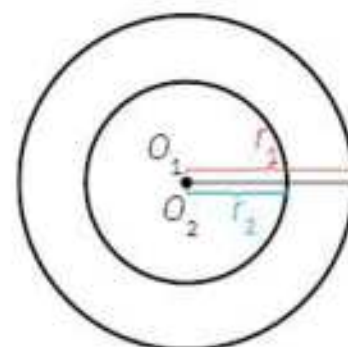


$$|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$$

Okręgi **współśrodkowe**. Mają wspólny środek.

$$O_1 = O_2$$

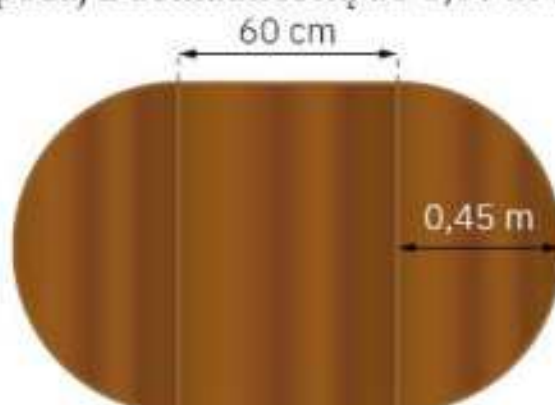
Jeżeli okręgi współśrodkowe mają równe promienie, to znaczy, że pokrywają się ze sobą. Mają wówczas nieskończenie wiele punktów wspólnych.



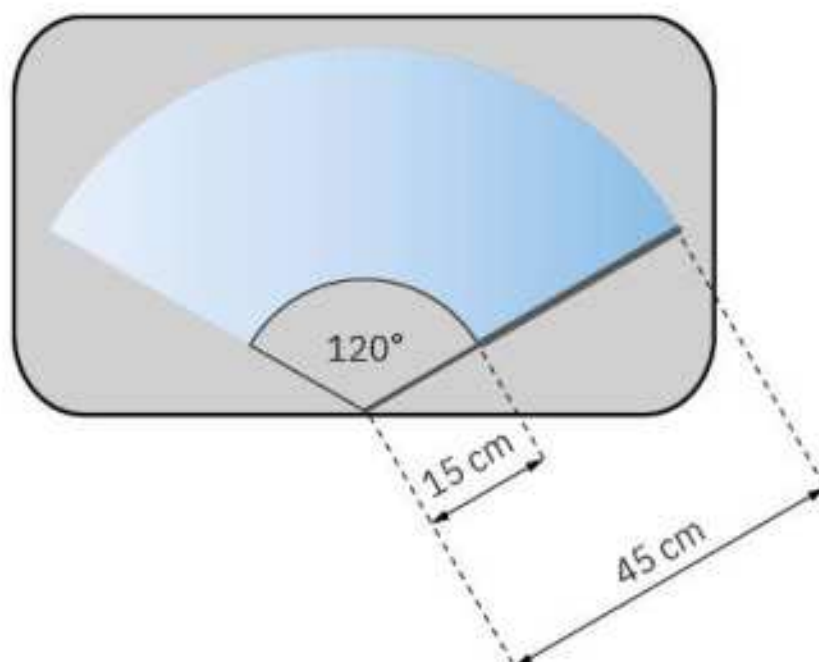
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



- Narysuj koło, a w nim cztery cięciwy tak, aby podzieliły one koło na:
a) 5 części b) 7 części c) 9 części d) 11 części
- Oblicz, ile metrów lamówki trzeba zużyć na obszycie obrusa, który położony na blat stołu o średnicy 0,9 m zwisałby równomiernie z tego blatu na długość 25 cm. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 m.
- Stwierdź – prawda czy fałsz.
a) Z drutu o długości 40 cm można wykonać pierścień w kształcie okręgu o średnicy długości 13 cm.
b) Wieżę latarni o średnicy 7 m musi objąć co najmniej 15 dorosłych osób o rozpiętości ramion po 1,5 m u każdego.
c) Walec drogowy o promieniu 6 dm obróci się 130 razy, utwardzając drogę o długości 500 m.
- Blat stołu ma kształt koła o promieniu długości 0,45 m. Wkładamy deskę o szerokości 60 cm, powiększając blat (jak na rysunku). Jaka jest powierzchnia stołu po powiększeniu? Wyniki podaj z dokładnością do 0,01 m².

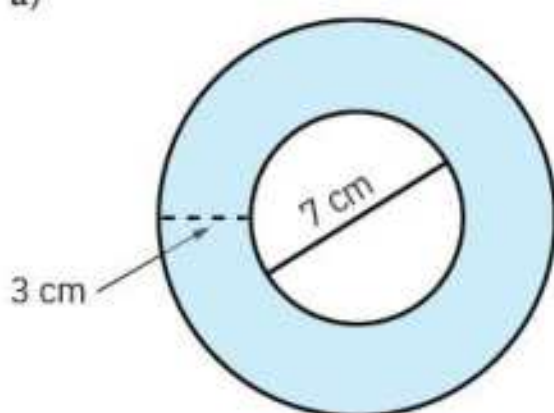


5. Kąt zakreślany przez ramię tylnej wycieraczki samochodowej o długości 45 cm ma miarę 120° . Oblicz pole obszaru czyszczonego przez wycieraczkę, korzystając z danych na rysunku. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm^2 .

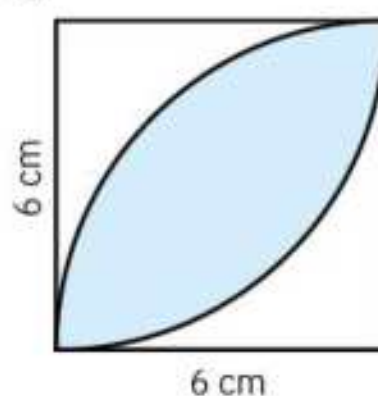


6. Oblicz obwody i pola zamalowanych figur.

a)



b)



7. Okrąg ma promień równy 4 cm. W jakiej odległości od środka okręgu powinna przechodzić prosta k , aby:
- była styczna do okręgu,
 - nie miała punktów wspólnych z okręgiem,
 - miała dwa punkty wspólne z okręgiem?
8. Dno pojemnika jest prostokątem o wymiarach 6 cm na 12 cm. Czy do tego pojemnika można wstawić dwa słoiki takie jak na rysunku, o obwodach 18 cm w najszerszym miejscu?

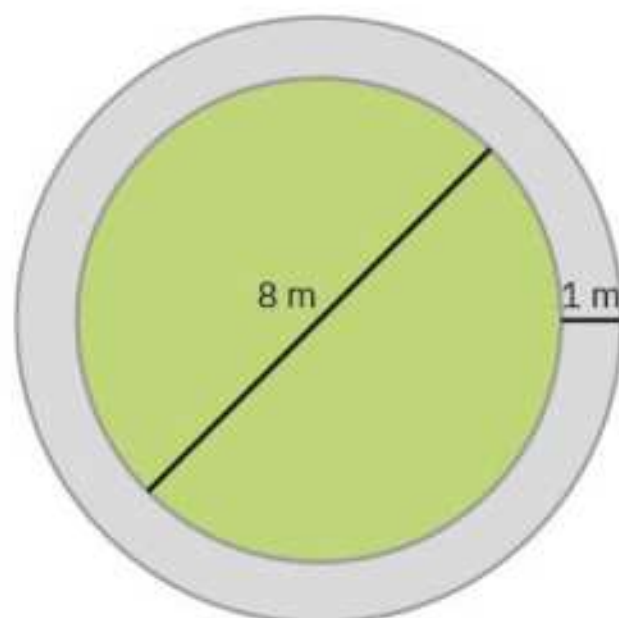


ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Wskaż informację fałszywą.
W okręgu
 - średnica jest najdłuższą cięciwą
 - promień jest dwa razy krótszy od średnicy
 - nie każdy promień ma tę samą długość
 - każda z cięciw ma długość nie większą niż średnica
- Różnica długości okręgów, których promienie są równe 2,8 dm i 25 cm, wynosi

A. $3\pi \text{ cm}$	B. $6\pi \text{ cm}$	C. $3\pi \text{ dm}$	D. $6\pi \text{ dm}$
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

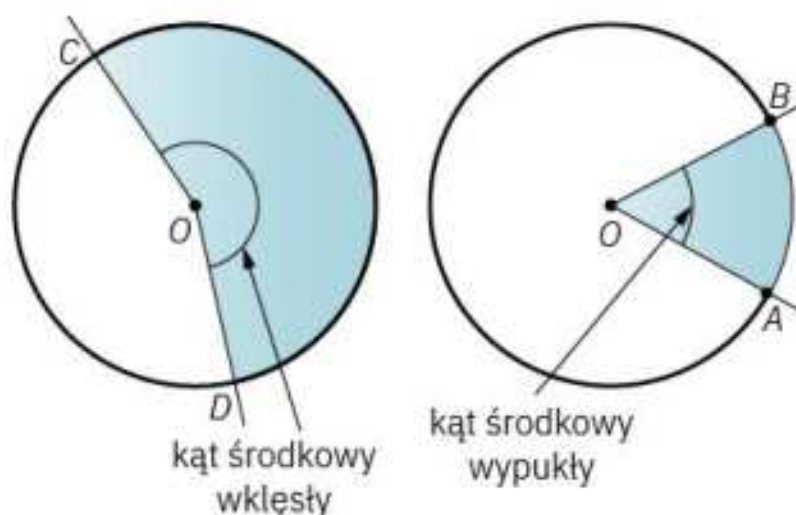
3. Wokół brzegu klombu w kształcie koła o średnicy 8 m biegnie ścieżka o szerokości 1 m (patrz rysunek). Ile co najmniej metrów kwadratowych klinkieru należy kupić, aby wyłożyć nim ścieżkę?
- A. 28
B. 28,2
C. 28,25
D. 28,3
4. Jeśli odległość między środkami dwóch okręgów o promieniach 8 cm i 6 cm wynosi 14 cm, to te okręgi
- A. są styczne zewnętrznie
B. mają dwa punkty wspólne
C. są styczne wewnętrznie
D. nie mają punktów wspólnych



2.6. Kąty wpisane i środkowe

Kąt, którego wierzchołkiem jest środek koła, a ramiona zawierają promienie, nazywamy **kątem środkowym**.

Miara kąta środkowego stanowi taką część miary kąta pełnego, jaką częścią okręgu jest łuk, na którym kąt ten jest oparty.



Ćwiczenie 1.

Oblicz miarę kąta środkowego opartego na półokręgu.

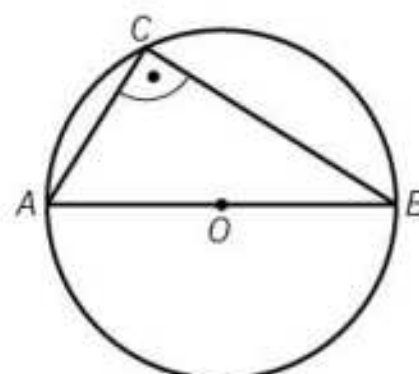
Rozwiązanie:

$$\frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ - \text{półokrąg to } \frac{1}{2} \text{ okręgu}$$

Kąt wypukły, którego wierzchołkiem jest punkt okręgu danego koła, a ramiona zawierają cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym w koło**.

Miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

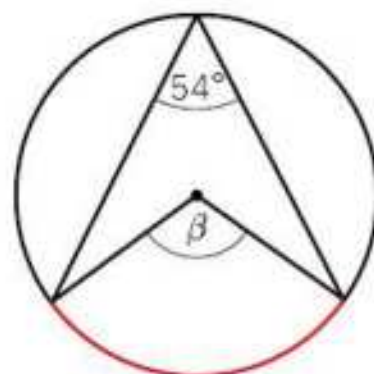


Ćwiczenie 2.

Oblicz miarę kąta środkowego β opartego na tym samym łuku, co kąt wpisany o mierze 54° .

Rozwiązanie:

$$\beta = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$$

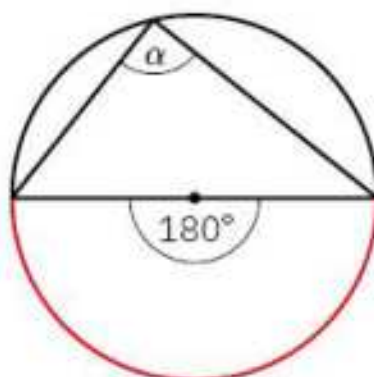


Ćwiczenie 3.

Oblicz miarę kąta wpisanego α opartego na tym samym łuku, co kąt środkowy o mierze 180° .

Rozwiązanie:

$$\alpha = 180^\circ : 2 = 90^\circ$$



Na danym łuku można oprzeć nieskończenie wiele kątów wpisanych.

Kąty wpisane, oparte na tym samym łuku, są równej miary.

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$



Ćwiczenie 4.

Oblicz sumę miar trzech kątów wpisanych opartych na tym samym łuku, co kąt środkowy o mierze 130° .

Rozwiązanie:

$$130^\circ : 2 = 65^\circ - \text{obliczamy miarę kąta wpisanego}$$

$$3 \cdot 65^\circ = 195^\circ - \text{obliczamy sumę miar trzech kątów wpisanych; mają równe miary}$$

Odpowiedź: Suma miar tych kątów wynosi 195° .

Ćwiczenie 5.

Oblicz miary kątów wpisanego α i środkowego β opartych na tym samym łuku. Przyjmij, że suma miar tych kątów wynosi 210° .

Rozwiązanie:

$$\alpha + \beta = 210^\circ \text{ oraz } \beta = 2 \cdot \alpha$$

$$\alpha = 210^\circ : 3 = 70^\circ - \text{obliczamy miarę kąta wpisanego}$$

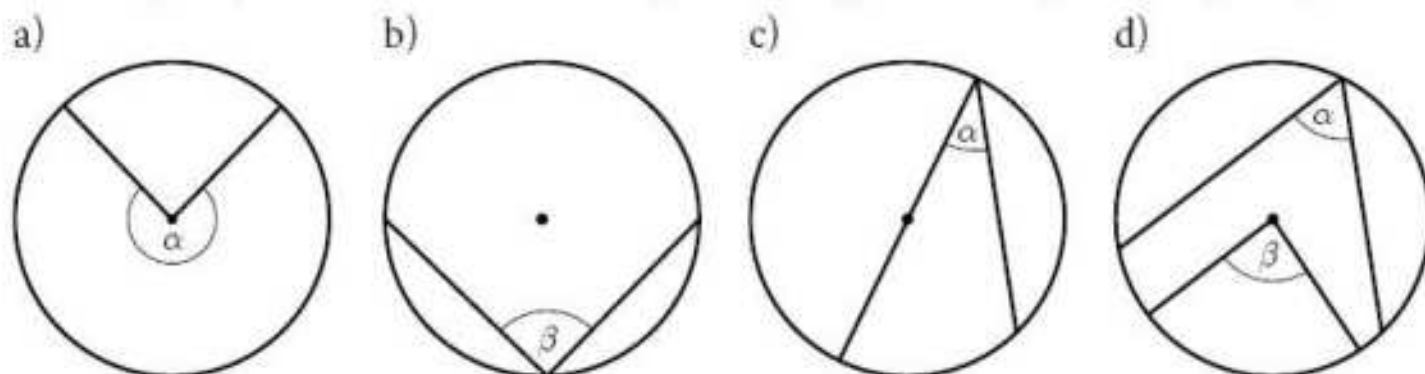
$$\beta = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ - \text{obliczamy miarę kąta środkowego}$$

Odpowiedź: Kąt wpisany ma miarę 70° , a kąt środkowy 140° .

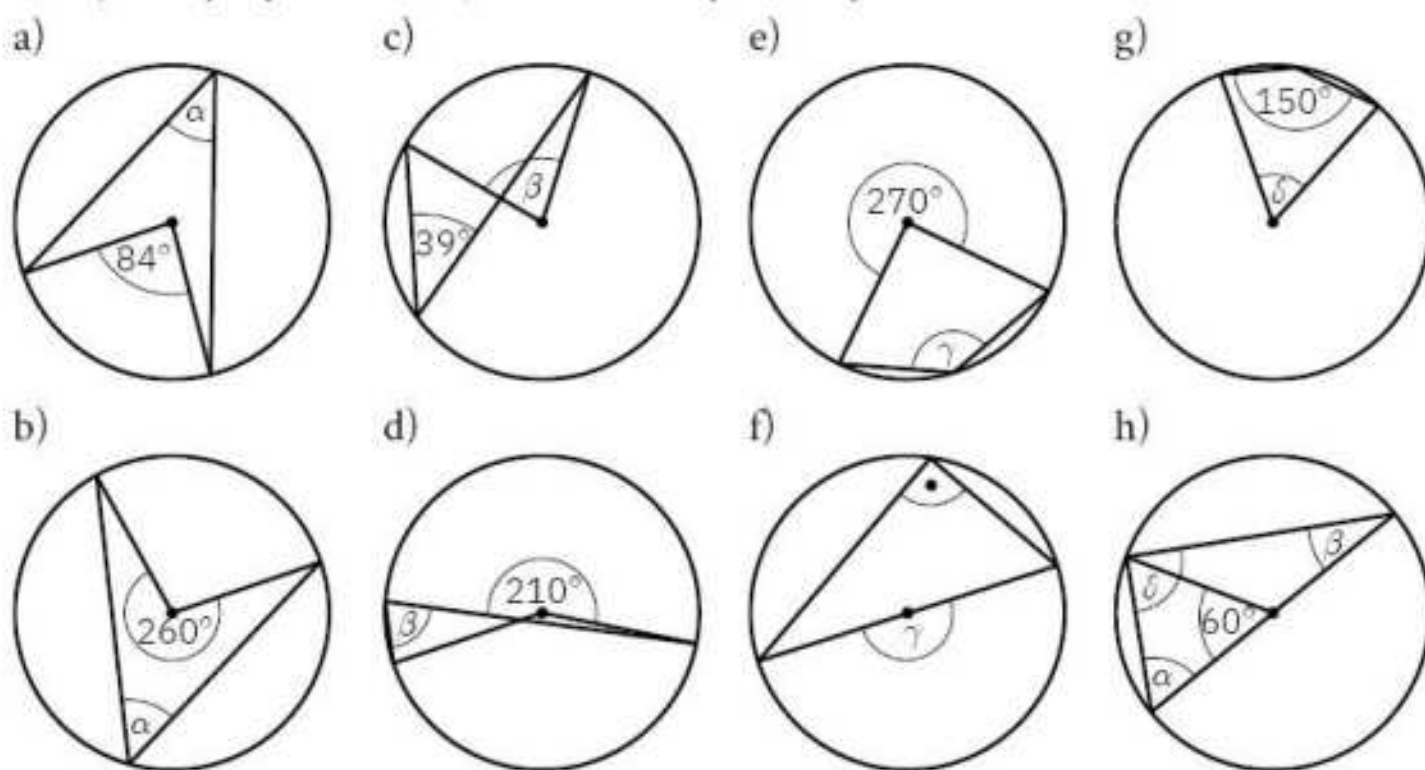
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Na których rysunkach zaznaczono kąt środkowy, a na których kąt wpisany?



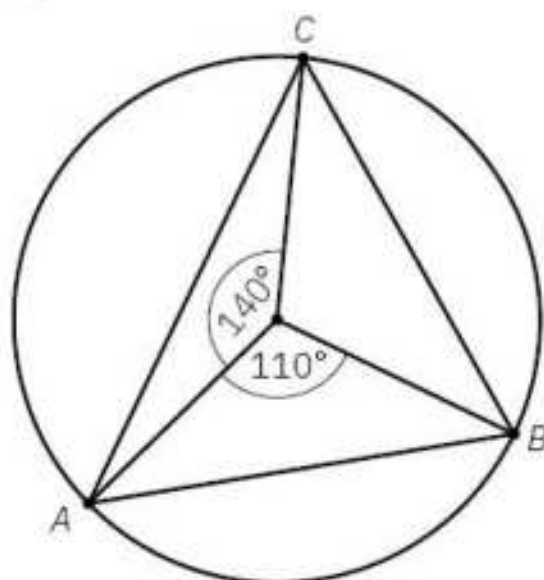
2. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{12}, \frac{5}{36}$ okręgu.
 3. Jaką miarę ma kąt środkowy utworzony przez wskazówki zegara o godzinie 12.30?
 4. Podaj miary kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zaznaczonych na rysunkach.



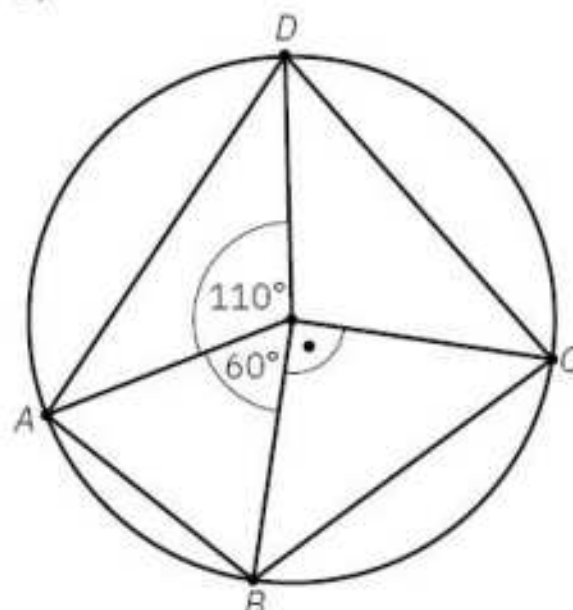
5. Ile wynosi miara kąta środkowego opartego na tym samym łuku, co kąt wpisany o mierze 38° ?
 6. Oblicz miary kątów wpisanych opartych na $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{11}{12}, \frac{15}{36}$ okręgu.
 7. Kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku. Wiemy, że kąt środkowy jest o 63° większy od kąta wpisanego. Podaj miary tych kątów.

8. Oblicz miary kątów wewnętrznych narysowanych niżej wielokątów.

a)



b)



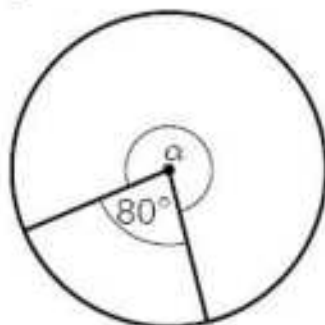
9. Suma miar kątów wpisanego i środkowego, opartych na tym samym łuku, stanowi 75% miary kąta pełnego. Podaj miary tych kątów.
10. Kąt środkowy ma miarę 210° . Oblicz sumę miar trzech kątów wpisanych opartych na tym samym łuku, co kąt środkowy.
11. Z metalowego dysku w kształcie koła o obwodzie 12π dm wycięto fragment o kształcie kąta środkowego o mierze 60° . Oblicz pole tego fragmentu.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Miarę którego z kątów środkowych podano błędnie?

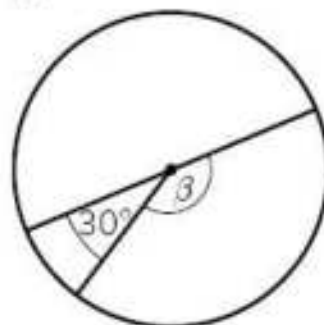
I



$$\alpha = 280^\circ$$

A. I

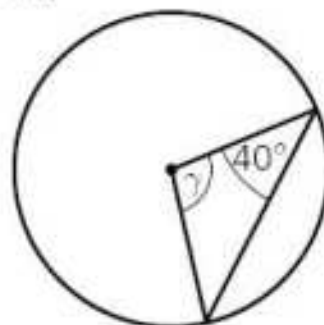
II



$$\beta = 150^\circ$$

B. II

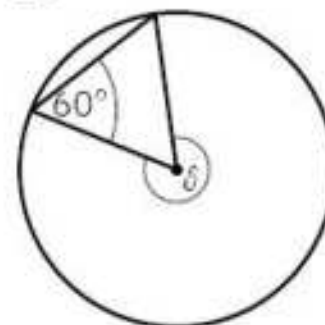
III



$$\gamma = 100^\circ$$

C. III

IV



$$\delta = 240^\circ$$

D. IV

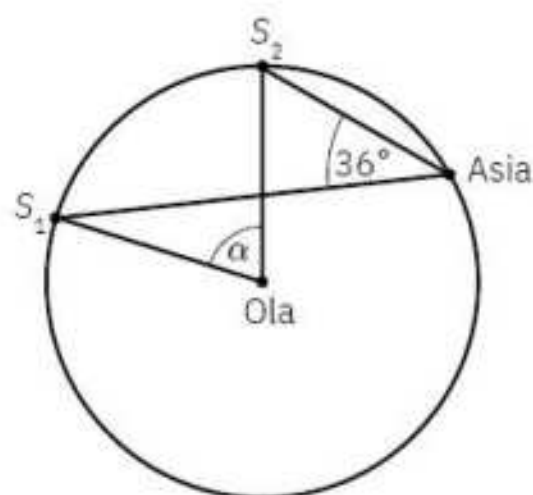
2. Na brzegu okrągłego trawnika rosną dwie wysokie sosny: S_1 i S_2 . Asia, która stoi na brzegu trawnika, widzi ich wierzchołki pod kątem 36° . Pod jakim kątem widzi te drzewa Ola, która siedzi na ławce znajdującej się pośrodku trawnika?

A. 36°

C. 18°

B. 72°

D. 30°



3. Suma miar trzech kątów wpisanych opartych na tym samym łuku jest równa 330° . Jaką miarę ma każdy z tych kątów?
- A. $110^\circ, 110^\circ, 110^\circ$ C. $55^\circ, 110^\circ, 220^\circ$
 B. $55^\circ, 55^\circ, 220^\circ$ D. $30^\circ, 150^\circ, 150^\circ$
4. Kąty wpisany i środkowy są oparte na tym samym łuku. Która z wypowiedzi jest fałszywa?
- A. Jeśli kąt wpisany ma 30° , to miara kąta środkowego wynosi 60° .
 B. Jeśli kąt środkowy ma 110° , to miara kąta wpisanego wynosi 220° .
 C. Jeśli kąt wpisany jest o 40° mniejszy od kąta półpełnego, to miara kąta środkowego wynosi 280° .
 D. Jeśli kąt środkowy jest trzy razy większy od kąta prostego, to miara kąta wpisanego wynosi 135° .

2.7. Cechy podobieństwa trójkątów

Trójkąty są podobne, jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, a kąty jednego trójkąta mają takie same miary, jak odpowiednie kąty drugiego trójkąta.

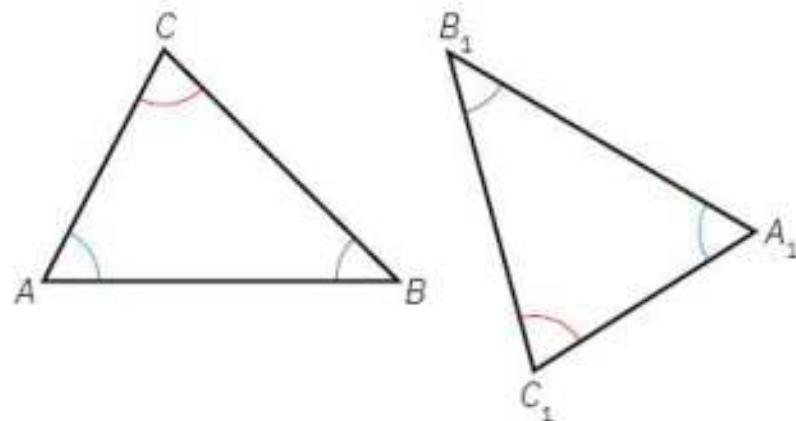
Liczbę k równą stosunkowi długości odpowiednich boków nazywamy skalą podobieństwa.

Do rozpoznawania trójkątów podobnych służą **cechy podobieństwa**.

Pierwsza cecha podobieństwa – jeżeli kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe kątom drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne: *kkk* (kąt, kąt, kąt).

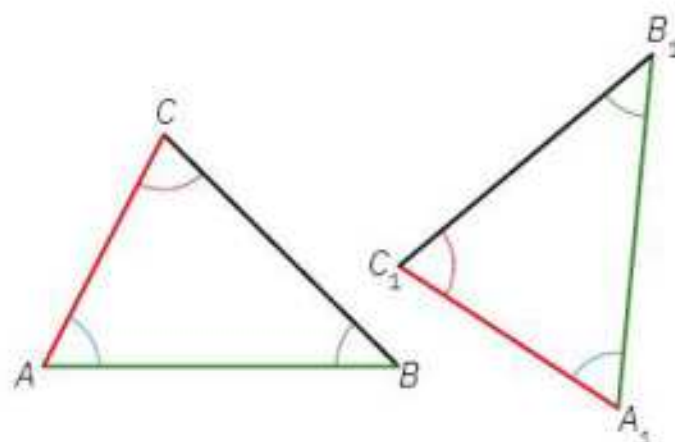
Jeżeli $\angle C_1A_1B_1 = \angle CAB$ i $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$

i $\angle B_1C_1A_1 = \angle BCA$, to $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.



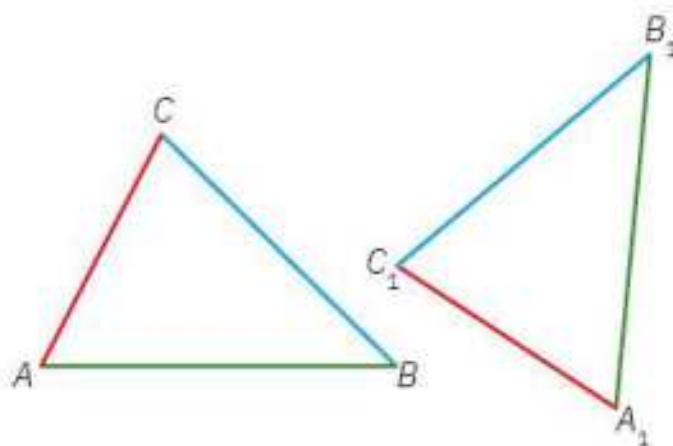
Druga cecha podobieństwa – jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta, a zawarte między tymi bokami kąty są równe, to trójkąty są podobne: *bkb* (bok, kąt, bok).

Jeżeli $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ i $\angle C_1A_1B_1 = \angle CAB$, to $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.



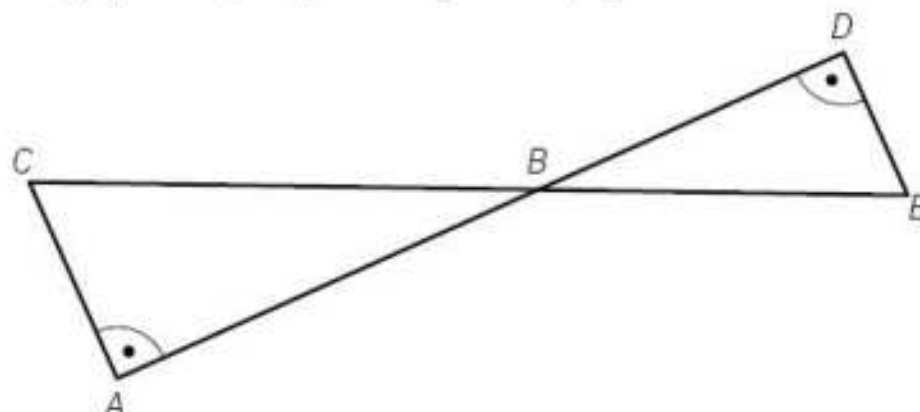
Trzecia cecha podobieństwa – jeżeli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne: *bbb* (bok, bok, bok).

Jeżeli $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$, to
 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.



Ćwiczenie 1.

Uzasadnij, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta BDE .



Rozwiązanie:

$\triangle ABC$ i $\triangle BDE$ są prostokątne, więc $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDE = 90^\circ$.

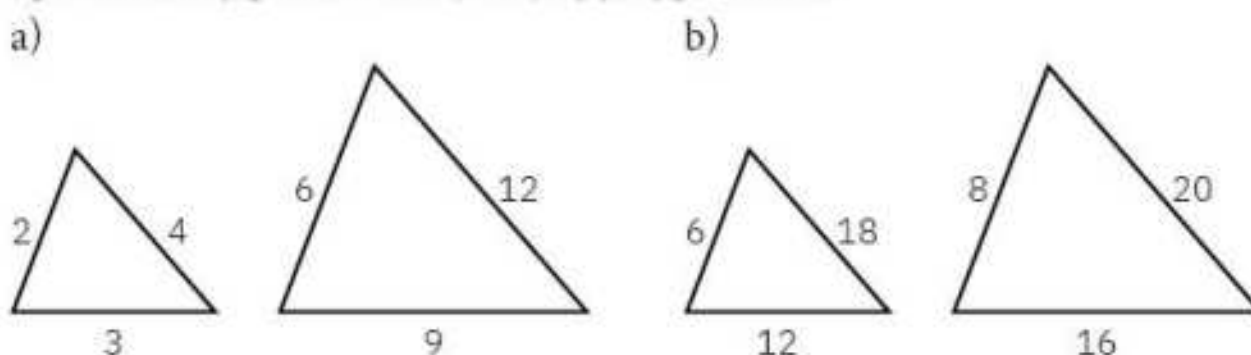
Kąty ABC i DBE są wierzchołkowe, więc $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBE$. Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° , więc $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BED$.

Odpowiedź: Z pierwszej cechy podobieństwa trójkątów wynika, że $\triangle ABC \sim \triangle BDE$.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

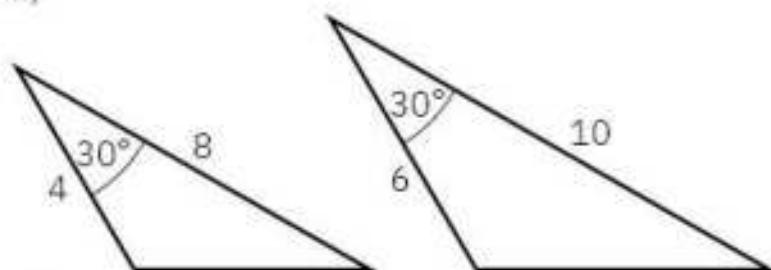
- W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę 60° . W trójkącie prostokątnym DEF kąt przy wierzchołku F ma miarę 30° . Czy te trójkąty są podobne?
- Sprawdź, czy podane niżej trójkąty są podobne.



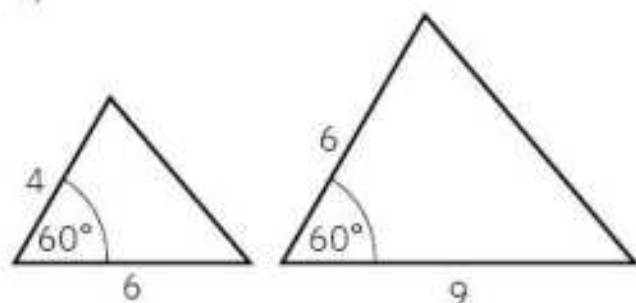
3. Trójkąt o bokach 4, 10, 12 jest podobny do trójkąta, którego najkrótszy bok ma długość 16. Wyznacz pozostałe boki tego trójkąta.

4. Sprawdź, czy podane niżej trójkąty są podobne.

a)

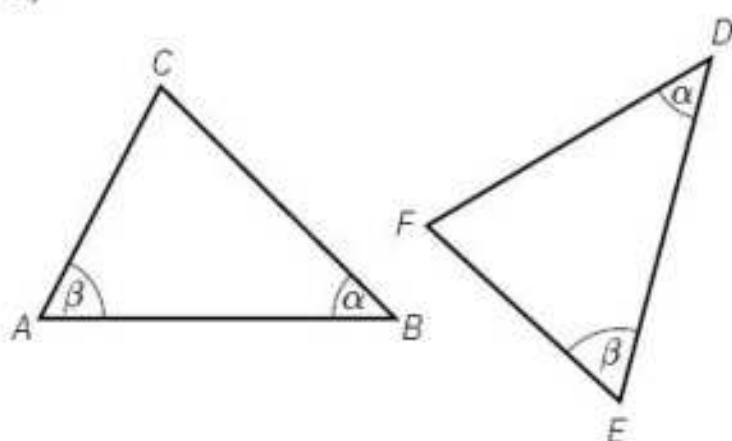


b)

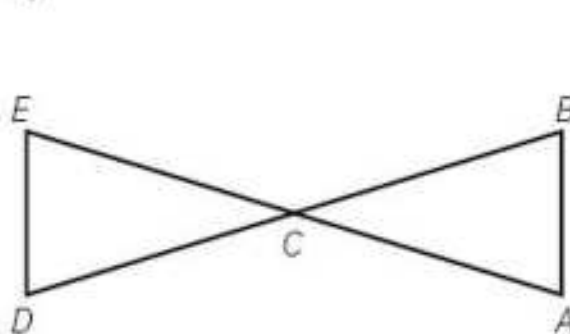


5. Na rysunku przedstawiono pary trójkątów podobnych. Zapisz równość stosunków odpowiednich boków.

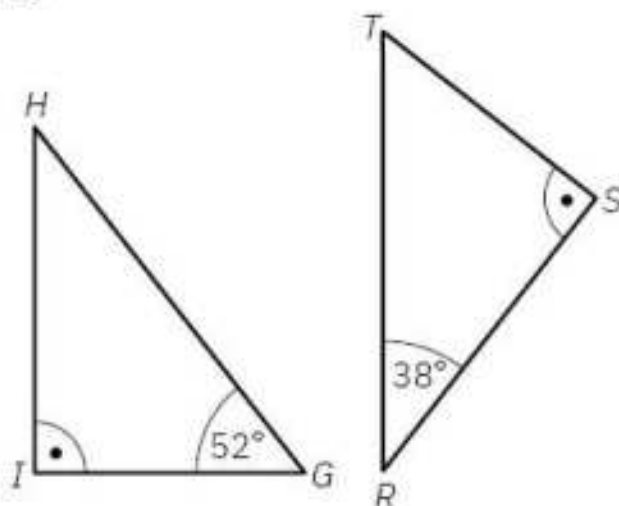
a)



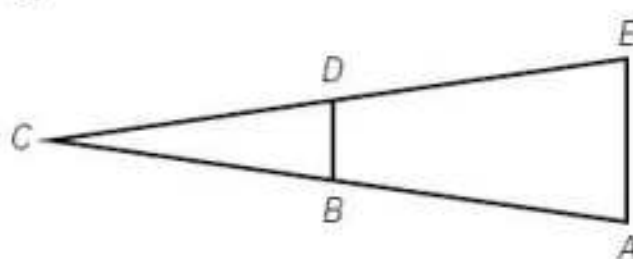
c)



b)

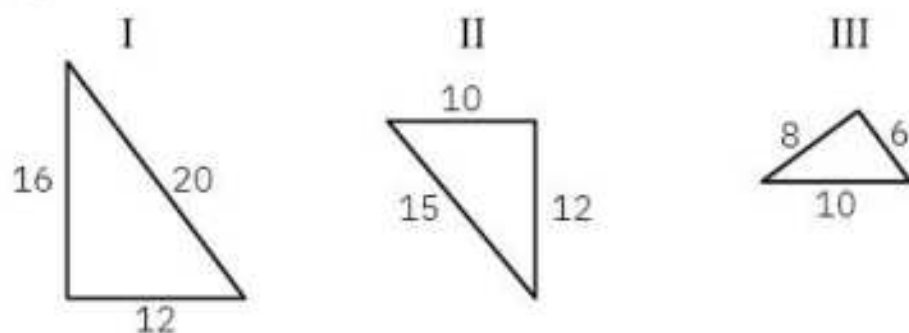


d)

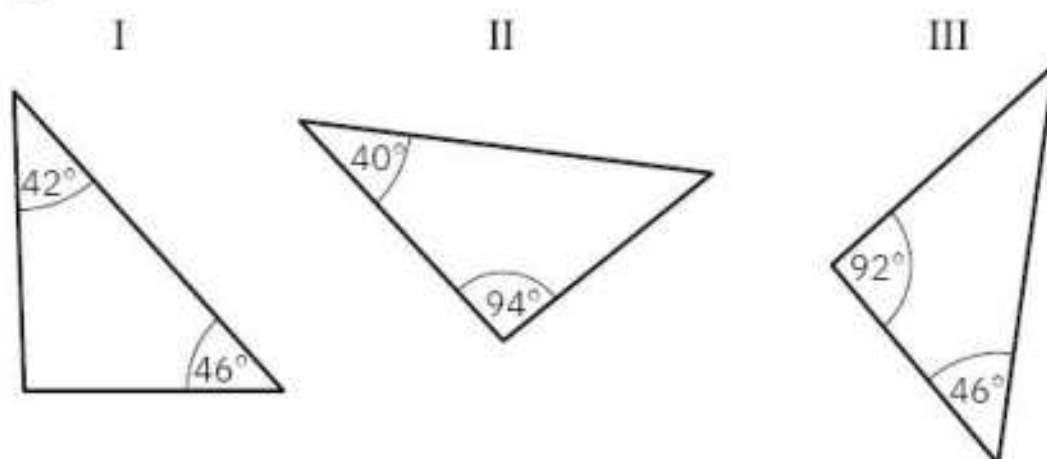


6. Pośród każdego z trzech trójkątów znajdź dwa podobne. Odpowiedź uzasadnij.

a)

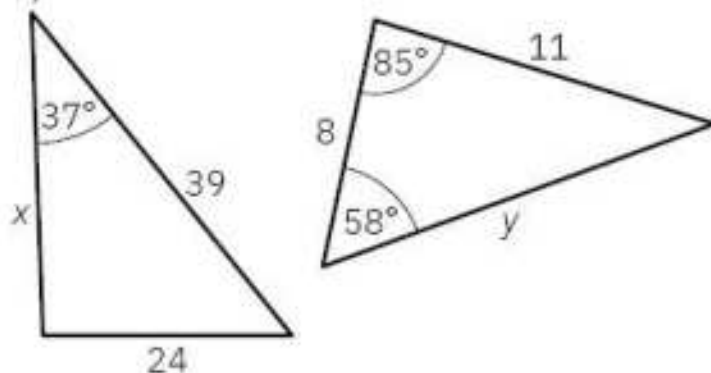


b)

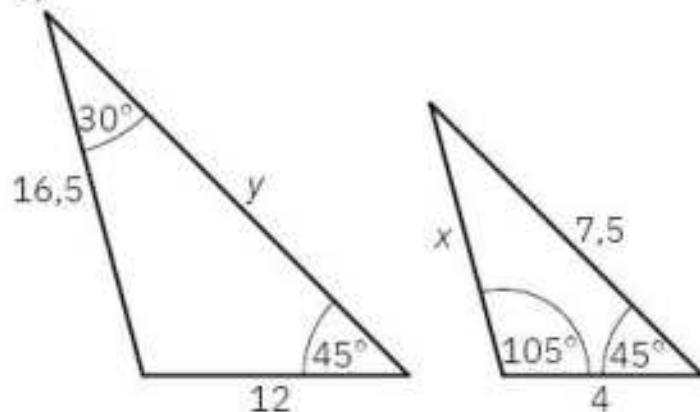


7. Wiedząc, że przedstawione na rysunkach trójkąty są podobne, oblicz długości zaznaczonych odcinków.

a)



b)



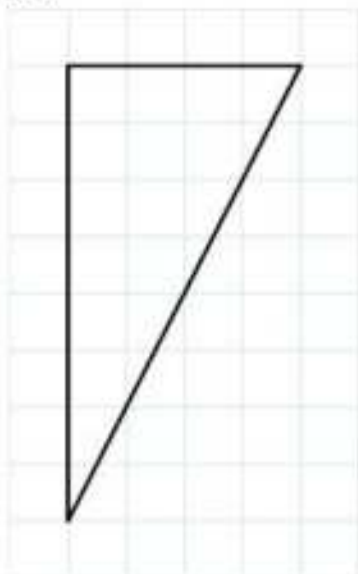
8. W trójkącie prostokątnym ABC (kąt ACB jest prosty) poprowadzono wysokość CD . Uzasadnij, że trójkąty ABC , ADC , DCB są podobne.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

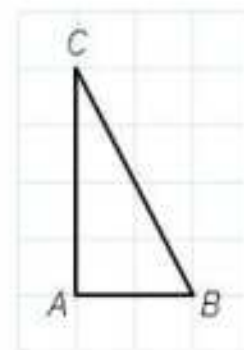
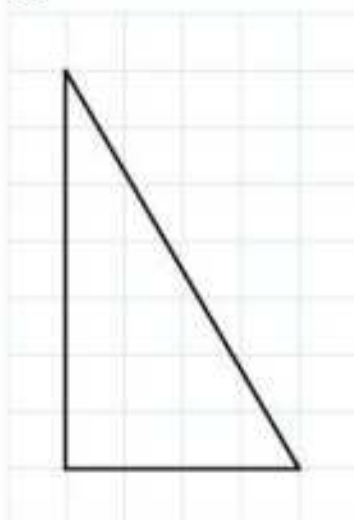


1. Który z narysowanych trójkątów jest podobny do trójkąta ABC ?

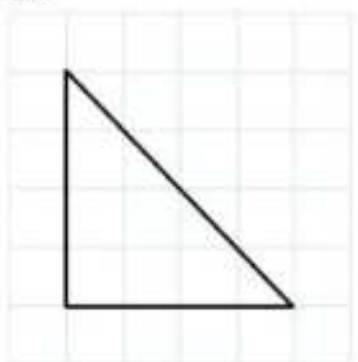
A.



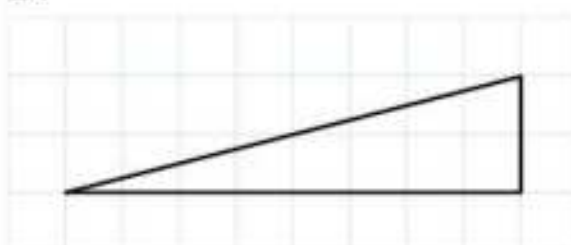
C.



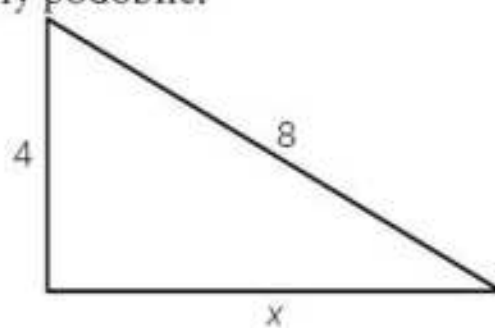
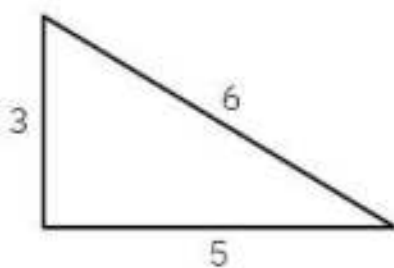
B.



D.



2. Jaką liczbą musi być x , aby trójkąty były podobne?



A. 3,5

B. 7

C. $3\frac{3}{4}$

D. $6\frac{2}{3}$

3. Dwa trójkąty są podobne. Miary dwóch kątów wewnętrznych jednego z nich są równe odpowiednio 42° i 56° . Miary kątów wewnętrznych drugiego trójkąta są równe

A. $24^\circ, 65^\circ, 91^\circ$

C. $82^\circ, 65^\circ, 33^\circ$

B. $56^\circ, 42^\circ, 82^\circ$

D. $42^\circ, 28^\circ, 110^\circ$

4. Trójkąty ABC i KLM są podobne. Pary boków odpowiednich to: AB i KL , BC i LM , CA i MK . Para kątów przystających to

A. $\angle ACB$ i $\angle KLM$

C. $\angle ABC$ i $\angle KLM$

B. $\angle CAB$ i $\angle MLK$

D. $\angle CAB$ i $\angle LMK$

2.8. Zadania z zastosowaniem cech podobieństwa trójkątów

Cechy podobieństwa trójkątów stosujemy w rozwiązywaniu zadań związanych z wyznaczaniem długości odcinków w trójkątach.

Ćwiczenie 1.

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. Ponadto wiadomo, że: $AB = 7,5$ cm, $BC = 10$ cm, $A'B' = 30$ cm, $A'C' = 20$ cm. Oblicz skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta $A'B'C'$ oraz długości odcinków AC i $B'C'$.

Rozwiązanie:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$k = \frac{AB}{A'B'}$$

$$k = \frac{7,5 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = \frac{1}{4} - \text{obliczamy skalę podobieństwa}$$

$$k = \frac{BC}{B'C'} - \text{obliczamy długość odcinka } B'C'$$

$$\frac{10}{B'C'} = \frac{1}{4}$$

$$B'C' = 40 \text{ (cm)}$$

$$k = \frac{AC}{A'C'} - \text{obliczamy długość odcinka } AC$$

$$\frac{AC}{20} = \frac{1}{4}$$

$$AC = 5 \text{ (cm)}$$

Odpowiedź: Skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta $A'B'C'$ wynosi $\frac{1}{4}$. Długość odcinka $B'C'$ jest równa 40 cm, a długość odcinka AC to 5 cm.

Ćwiczenie 2.

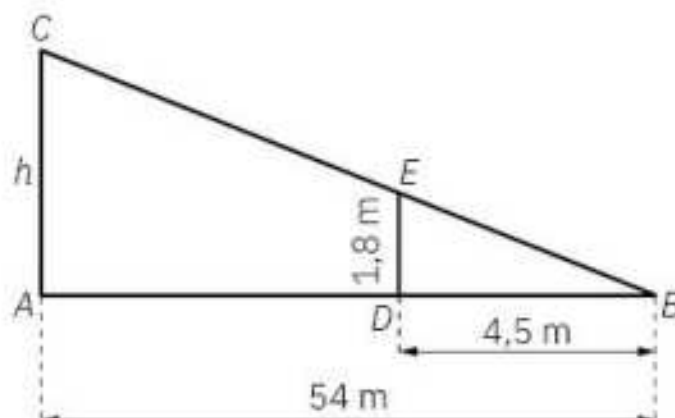
Drzewo o wysokości h rzuca cień o długości 54 m. W tym samym czasie wbity pionowo w ziemię pręt o długości 1,8 m rzuca cień równy 4,5 m. Oblicz wysokość drzewa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Trójkąty ABC i DBE są podobne (na mocy cechy kkk).

$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB}$ – zapisujemy stosunek długości odcinków i wyznaczamy wysokość drzewa



$$\frac{h}{1,8} = \frac{54}{4,5}$$

$$h = 21,6 \text{ (m)}$$

$$h = 21,6 \text{ (m)}$$

Odpowiedź: Wysokość tego drzewa jest równa 21,6 m.

Ćwiczenie 3.

Oblicz szerokość rzeki, korzystając z danych przedstawionych na rysunku.

Rozwiązanie:

Trójkąty ABC i CDE są podobne (na mocy cechy kkk).

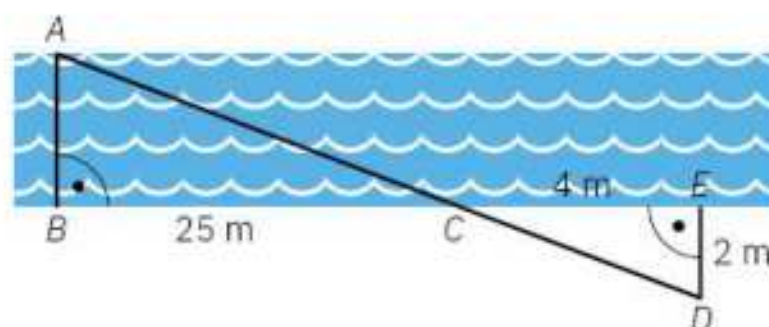
$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CE}$ – zapisujemy stosunek długości odcinków i wyznaczamy szerokość rzeki

$$\frac{AB}{2} = \frac{25}{4}$$

$$\frac{AB}{2} = \frac{25}{4}$$

$$AB = 12,5 \text{ (m)}$$

Odpowiedź: Szerokość rzeki wynosi 12,5 metra.



Mówiliśmy o podobieństwie trójkątów, ale można również mówić o **podobieństwie innych figur**, np. odcinków, okręgów, kół, wielokątów foremnych czy też innych wielokątów.

I tak każde dwa odcinki są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa ilorazowi długości tych odcinków. Również każde dwa okręgi są podobne oraz każde dwa koła są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa stosunkowi długości promieni tych figur.

W odniesieniu do wielokątów foremnych możemy powiedzieć, że każde dwa trójkąty równoboczne są podobne, każde dwa kwadraty są podobne, każde dwa sześciokąty foremne są podobne itd., a skala ich podobieństwa jest równa stosunkowi długości boków tych figur.

Natomiast nie każde dwa wielokąty o takiej samej liczbie boków są do siebie podobne. Aby stwierdzić, czy dwa wielokąty są podobne, sprawdzamy, czy boki jednego wielokąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego wielokąta oraz czy odpowiednie kąty mają jednakowe miary.

Ćwiczenie 4.

Sprawdź, czy prostokąt $ABCD$ jest podobny do prostokąta $KLMN$, jeśli

a) $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$, $KL = 5 \text{ cm}$, $LM = 6 \text{ cm}$

Rozwiązanie:

$\frac{AB}{KL} = \frac{2}{5}$ – obliczamy iloraz długości krótszego boku prostokąta $ABCD$ do długości

krótszego boku prostokąta $KLMN$

$\frac{BC}{LM} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ – obliczamy iloraz długości dłuższego boku prostokąta $ABCD$ do długości dłuższego boku prostokąta $KLMN$

$\frac{AB}{KL} \neq \frac{BC}{LM}$ – porównujemy obliczone ilorazy

Odpowiedź: Prostokąt $ABCD$ nie jest podobny do prostokąta $KLMN$.

b) $AB = 12$ cm, $BC = 15$ cm, $KL = 5$ cm, $LM = 4$ cm

Rozwiązanie:

$\frac{AB}{LM} = \frac{12}{4} = 3$ – obliczamy iloraz długości krótszego boku prostokąta $ABCD$ do długości krótszego boku prostokąta $KLMN$

$\frac{BC}{KL} = \frac{15}{5} = 3$ – obliczamy iloraz długości dłuższego boku prostokąta $ABCD$ do długości dłuższego boku prostokąta $KLMN$

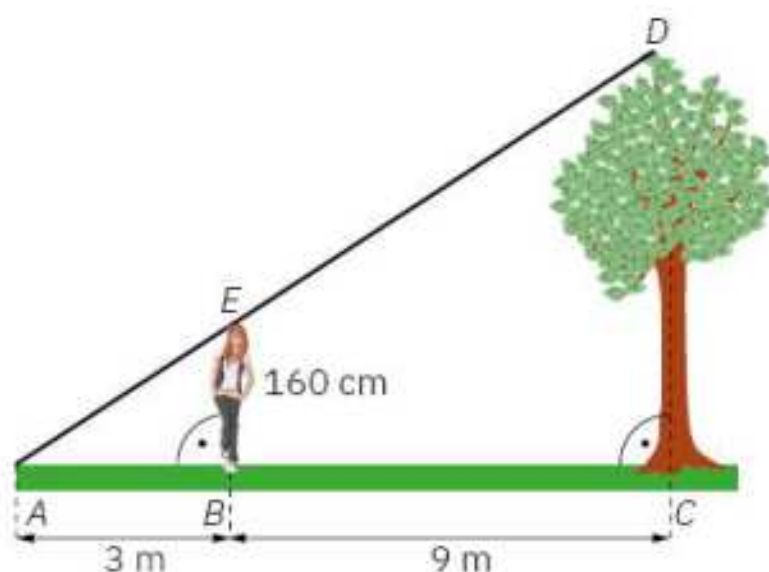
$\frac{AB}{LM} = \frac{BC}{KL}$ – porównujemy obliczone ilorazy

Odpowiedź: Prostokąt $ABCD$ jest podobny do prostokąta $KLMN$.

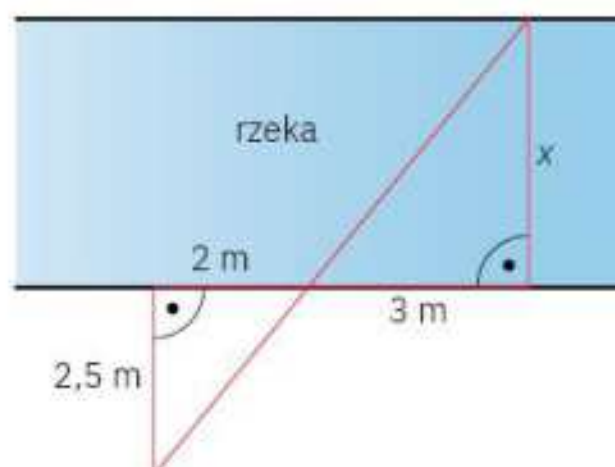


ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

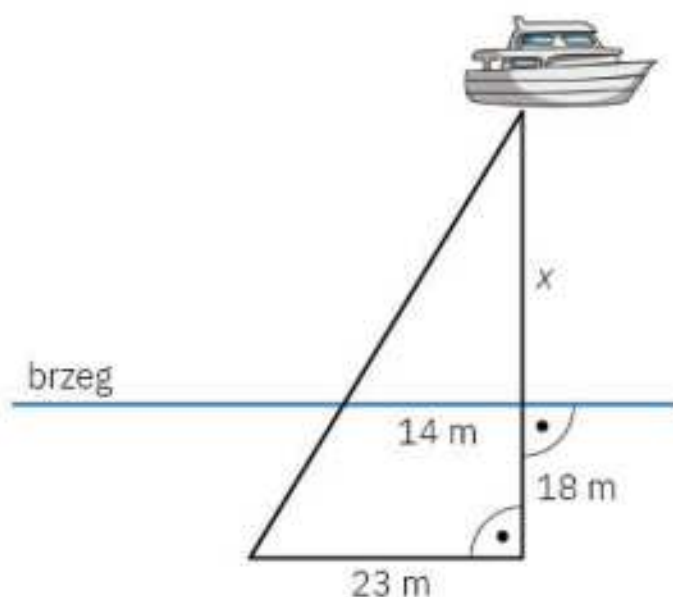
- Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = 1\frac{1}{3}$. Oblicz długości odcinków $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, jeżeli:
 - $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 15$ cm
 - $AB = 18$ cm, $BC = 3,6$ dm, $AC = 4,8$ dm
- Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. Oblicz skalę podobieństwa i długości pozostałych odcinków w obu trójkątach, jeżeli:
 - $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $AC = 6$ cm, $A'C' = 4$ cm
 - $AB = 4$ cm, $AC = 7$ cm, $A'B' = 10$ cm, $B'C' = 20$ cm
- Oblicz wysokość drzewa, korzystając z danych przedstawionych na rysunku.



4. Rysunek przedstawia sposób pomiaru szerokości rzeki. Oblicz długość odcinka x . Odpowiednie dane odczytaj z rysunku.

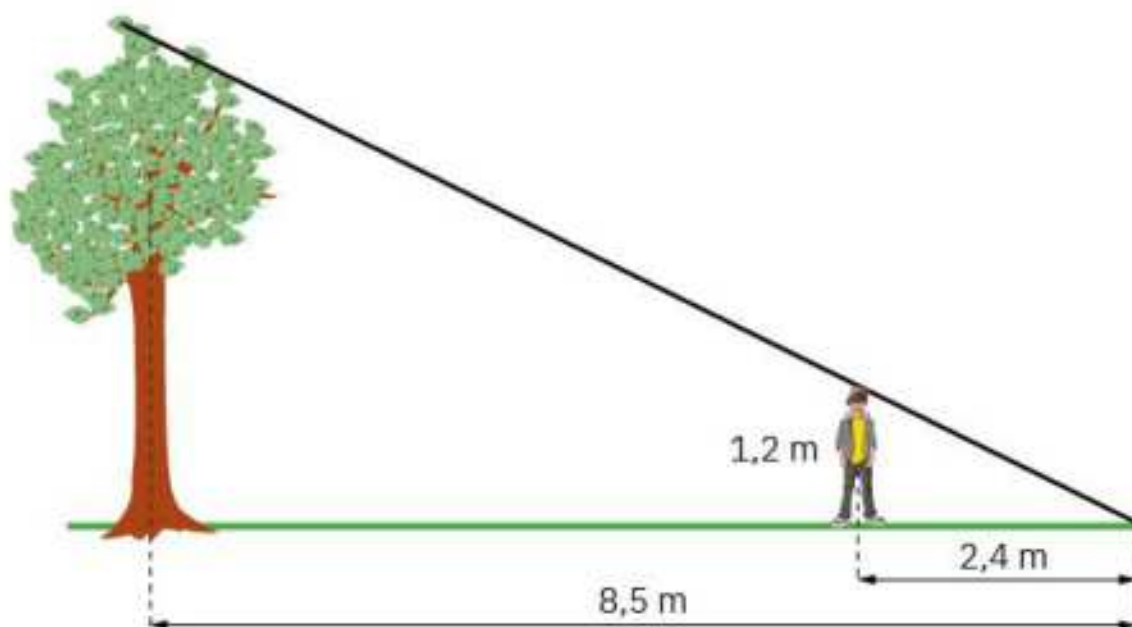


5. W trójkącie ABC przez środek D boku AC poprowadzono prostą równoległą do boku AB i przecinającą bok BC w punkcie E . Oblicz stosunek $\frac{BC}{BE}$.
6. Długość boku AB trójkąta ABC jest równa 9 cm, a wysokość poprowadzona na ten bok ma 6 cm. Odcinek DE jest równoległy do odcinka AB , a punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AC i BC . Ponadto wiadomo, że odległość pomiędzy odcinkami AB i DE wynosi 2 cm. Oblicz długość odcinka DE .
7. W trapezie $ABCD$, w którym $AB = 6$ cm, $CD = 4$ cm, $AD = 3$ cm, przedłużono ramiona AD i BC do przecięcia w punkcie S . Oblicz długość odcinka AS .
8. Prostokąt $A'B'C'D'$ jest podobny do prostokąta $ABCD$ w skali 1,5. Oblicz długości boków prostokąta $ABCD$, jeśli wiadomo, że $A'B' = 6$ cm i $B'C' = 9$ cm.
9. Długość przekątnej kwadratu $ABCD$ wynosi $5\sqrt{2}$ cm. Ile jest równy obwód kwadratu $KLMN$ podobnego do $ABCD$ w skali $\frac{3}{5}$?
10. Oblicz, w jakiej odległości od brzegu morza znajduje się statek.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Drzewo rzuca cień o długości 8,5 m, a tym samym czasie dziecko o wysokości 1,2 m rzuca cień równy 2,4 m. Wysokość drzewa wynosi
- A. 17 m B. 4,25 m C. 11,8 m D. 5,45 cm



2. Skala podobieństwa trójkątów prostokątnych wynosi 1,5. Przyprostokątne tych trójkątów mogą mieć długości
- A. I trójkąt: 3 cm, 4 cm i II trójkąt: 2 cm, 6 cm
 B. I trójkąt: 3 cm, 4 cm i II trójkąt: 4,5 cm, $2\frac{2}{3}$ cm
 C. I trójkąt: 3 cm, 4 cm i II trójkąt: 4,5 cm, 6 cm
 D. I trójkąt: 3 cm, 4 cm i II trójkąt: 6 cm, 8 cm
3. Trójkąt równoboczny o boku o długości 6 cm jest podobny do trójkąta równobocznego o boku o długości 4 cm w skali
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{3}{2}$
4. Na bokach AB i AC trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty D i E tak, że odcinek DE jest równoległy do boku BC oraz $AD = 3$ cm, $DE = 4$ cm, $BC = 7$ cm. Odcinek DB ma długość
- A. $2\frac{1}{4}$ cm B. $6\frac{1}{3}$ cm C. $5\frac{1}{4}$ cm D. $9\frac{1}{3}$ cm
5. Koło o środku O i promieniu 3 cm jest podobne w skali $k = \frac{2}{3}$ do koła o środku S . Średnica koła o środku S jest równa
- A. 2 cm B. 4 cm C. 4,5 cm D. 9 cm

2.9. Zależność między obwodami figur podobnych

Ćwiczenie 1.

Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC , a długości boków tych trójkątów wynoszą: $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $A'B' = 9$ cm, $B'C' = 15$ cm, $A'C' = 12$ cm. Oblicz skalę podobieństwa trójkąta $A'B'C'$ do trójkąta ABC oraz stosunek obwodu trójkąta $A'B'C'$ do obwodu trójkąta ABC .

Rozwiązanie:

$k = \frac{A'B'}{AB}$ – obliczamy skalę podobieństwa trójkątów

$$k = \frac{9}{3} = 3$$

$S_{\triangle ABC} = 3$ cm + 5 cm + 4 cm = 12 cm – obliczamy obwody trójkątów

$S_{\triangle A'B'C'} = 9$ cm + 15 cm + 12 cm = 36 cm

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{36}{12} = 3 \text{ – obliczamy stosunek obwodów trójkątów}$$

Odpowiedź: Skala podobieństwa trójkąta $A'B'C'$ do trójkąta ABC wynosi 3 . Stosunek obwodu trójkąta $A'B'C'$ do obwodu trójkąta ABC także jest równy 3 .

Stosunek obwodów dwóch trójkątów podobnych jest równy skali podobieństwa tych trójkątów.



Jeśli mówimy o podobieństwie innych figur, dla których można obliczyć obwód, np. wielokątów, kół, to również stosunek obwodów dwóch takich figur podobnych jest równy skali podobieństwa tych figur.

Ćwiczenie 2.

Trójkąty KLM i $K'L'M'$ są równoboczne, a stosunek obwodu trójkąta $K'L'M'$ do obwodu trójkąta KLM wynosi $\frac{1}{2}$. Oblicz długość boku trójkąta $K'L'M'$, jeśli $KL = 7$ cm.

Rozwiązanie:

Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne, a ich skala podobieństwa jest równa stosunkowi obwodów.

$$\frac{S_{\triangle K'L'M'}}{S_{\triangle KLM}} = \frac{1}{2} = k \text{ – obliczamy skalę podobieństwa trójkątów}$$

$$\frac{K'L'}{KL} = k \text{ – obliczamy długość boku trójkąta } K'L'M'$$

$$\frac{K'L'}{7} = \frac{1}{2}$$

$$K'L' = 3,5 \text{ (cm)}$$

Odpowiedź: Długość boku trójkąta $K'L'M'$ wynosi 3,5 cm.

Ćwiczenie 3.

Stosunek obwodu kwadratu $ABCD$ do obwodu kwadratu $KLMN$ wynosi $\frac{2}{3}$. Oblicz długość przekątnej kwadratu $KLMN$, jeśli $AB = 9$ cm.

Rozwiązanie:

$$\frac{S_{\square ABCD}}{S_{\square KLMN}} = \frac{2}{3} = k - \text{obliczamy skalę podobieństwa kwadratów}$$

$$\frac{AB}{KL} = k - \text{obliczamy długość boku kwadratu } KLMN$$

$$\frac{9}{KL} = \frac{2}{3}$$

$$KL = 13,5 \text{ (cm)}$$

$$d = a\sqrt{2} - \text{obliczamy długość przekątnej kwadratu } KLMN$$

$$d = 13,5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Odpowiedź: Długość przekątnej kwadratu $KLMN$ wynosi $13,5\sqrt{2}$ cm.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC , a jego obwód stanowi $\frac{3}{5}$ obwodu trójkąta ABC . Oblicz skalę podobieństwa tych trójkątów.
2. Oblicz długości boków trójkąta $A'B'C'$ o obwodzie 40 cm, jeśli jest on podobny do trójkąta ABC o bokach o długości $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm i $AC = 7$ cm.
3. W trójkącie równoramiennym ABC mamy dane długości odcinków: $AB = 8$ cm, $AC = BC = 5$ cm. Oblicz obwód trójkąta $A'B'C'$ podobnego do trójkąta ABC w skali $1\frac{1}{3}$.
4. Prostokąt $A'B'C'D'$ o obwodzie 24 cm jest podobny do prostokąta o bokach o długości 2,5 cm i 3,5 cm. Oblicz długość krótszego boku prostokąta $A'B'C'D'$.
5. Stosunek obwodu kwadratu $ABCD$ do obwodu kwadratu $KLMN$ jest równy 1,5. Ile wynosi skala podobieństwa kwadratu $KLMN$ do kwadratu $ABCD$?
6. Stosunek obwodów dwóch prostokątów podobnych wynosi 3,5. Jeden z prostokątów ma wymiary 7 cm i 10,5 cm. Jakie wymiary może mieć drugi prostokąt?

7. Obwód koła wynosi 15π cm. Jaką średnicę ma koło podobne do niego w skali 0,2?
8. Trójkąt KLM jest podobny do trójkąta ABC . Obwód trójkąta KLM jest równy 24 cm i stanowi 80% obwodu trójkąta ABC . Oblicz, w jakiej skali trójkąt KLM jest podobny do trójkąta ABC .

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE



1. Skala podobieństwa trójkątów wynosi 2,5. Obwody tych trójkątów mogą być równe
 A. 30 cm i 70 cm C. 16 cm i 6,4 cm
 B. 12 cm i 4 cm D. 5 cm i 75 cm
2. Prostokąt $ABCD$, w którym $AB = 8$ cm i $CD = 5$ cm, jest podobny do prostokąta $A'B'C'D'$, w którym $A'B' = 6$ cm. Obwód prostokąta $A'B'C'D'$ wynosi
 A. 3,75 cm B. 9,75 cm C. 19,5 cm D. 39 cm
3. Stosunek obwodów dwóch trójkątów równobocznych wynosi $\frac{3}{4}$, a długość boku większego trójkąta jest równa 12 cm. Mniejszy trójkąt ma bok o długości
 A. 27 cm B. 48 cm C. 16 cm D. 9 cm
4. Kwadrat $A'B'C'D'$ o polu 64 cm^2 jest podobny do kwadratu $ABCD$ w skali $\frac{2}{3}$. Obwód kwadratu $ABCD$ jest równy
 A. 48 cm B. 12 cm C. 24 cm D. 96 cm

2.10. Zależność między polami figur podobnych

Ćwiczenie 1.

Boki trójkąta prostokątnego ABC mają długości 5 cm, 12 cm i 13 cm. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{1}{2}$. Oblicz stosunek pola trójkąta $A'B'C'$ do pola trójkąta ABC .

Rozwiązanie:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \text{ w skali } k = \frac{1}{2}$$

$$a = 5 \text{ cm}, \quad b = 12 \text{ cm} - \text{oznaczmy przyprostokątne trójkąta } ABC$$

$$a' = ?, \quad b' = ? - \text{oznaczmy przyprostokątne trójkąta } A'B'C'$$

$$\frac{a'}{5} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b'}{12} = \frac{1}{2} - \text{obliczamy długości przyprostokątnych trójkąta } A'B'C'$$

$$a' = \frac{5}{2} \text{ (cm)}, \quad b' = 6 \text{ (cm)}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ (cm}^2\text{)} - \text{obliczamy pole trójkąta } ABC$$

$$P_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 6 = 7,5 \text{ (cm}^2\text{)} - \text{obliczamy pole trójkąta } A'B'C'$$

$$\frac{P_{\triangle A'B'C'}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{7,5}{30} = \frac{1}{4} - \text{obliczamy stosunek pola trójkąta } A'B'C' \text{ do pola trójkąta } ABC$$

Odpowiedź: Stosunek pola trójkąta $A'B'C'$ do pola trójkąta ABC wynosi $\frac{1}{4}$.



Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych figur.

Ćwiczenie 2.

Trójkąt $K'L'M'$ jest podobny do trójkąta KLM , a pole trójkąta $K'L'M'$ jest 9 razy większe od pola trójkąta KLM . Podaj skalę podobieństwa tych trójkątów.

Rozwiązanie:

$$P_{\triangle K'L'M'} = 9P_{\triangle KLM} - \text{zapisujemy zależność między polami trójkątów}$$

$$\frac{P_{\triangle K'L'M'}}{P_{\triangle KLM}} = 9$$

$$k^2 = 9 - \text{obliczamy skalę podobieństwa tych trójkątów}$$

$$k = 3$$

$$k = 3$$

Odpowiedź: Trójkąt $K'L'M'$ jest podobny do trójkąta KLM w skali 3.

Ćwiczenie 3.

Prostokąt $ABCD$, którego pole wynosi 10 cm^2 jest podobny do prostokąta $KLMN$ w skali $\frac{1}{5}$. Oblicz sumę pól tych prostokątów.

Rozwiązanie:

$$\square ABCD \sim \square KLMN \text{ w skali } k = \frac{1}{5}$$

$$\frac{P_{\square ABCD}}{P_{\square KLMN}} = k^2 - \text{obliczamy iloraz pola prostokąta } ABCD \text{ do pola prostokąta } KLMN$$

$$\frac{P_{\square ABCD}}{P_{\square KLMN}} = \frac{1}{25}$$

$$P_{\square KLMN} = 25P_{\square ABCD} - \text{obliczamy pole prostokąta } KLMN$$

$$P_{\square KLMN} = 25 \cdot 10 = 250 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$P_{\square KLMN} + P_{\square ABCD} = 250 + 10 = 260 \text{ (cm}^2\text{)} - \text{obliczamy sumę pól prostokątów}$$

Odpowiedź: Suma pól tych prostokątów wynosi 260 cm^2 .

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

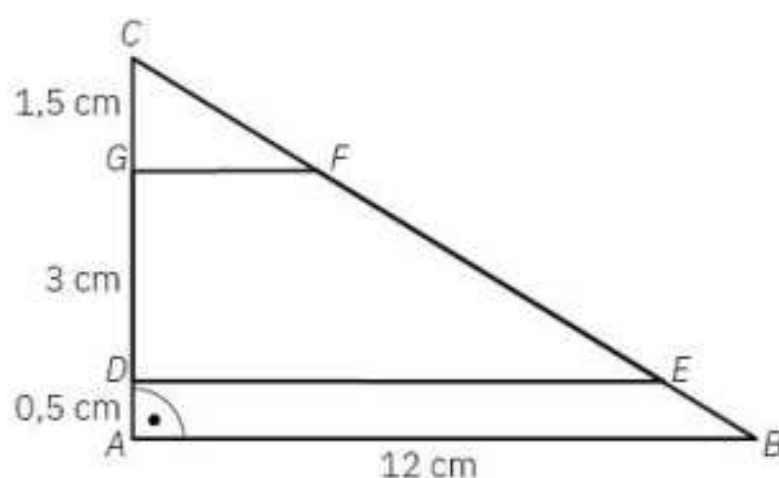


1. Z trzech odcinków o łącznej długości 15 cm zbudowano trójkąt KLM podobny do trójkąta ABC , którego długości boków są równe 18 cm, 20 cm i 22 cm. Ile wynosi stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC ?
2. Pole trójkąta ABC jest równe 75 cm^2 . Oblicz pole trójkąta $A'B'C'$ podobnego do danego w skali $\frac{1}{5}$.
3. Pole trójkąta KLM jest 5 razy większe od pola trójkąta ABC . Ile razy obwód trójkąta KLM jest większy od obwodu trójkąta ABC ?
4. Pole kwadratu $ABCD$ wynosi 12 cm^2 , a pole kwadratu $KLMN$ jest równe 27 cm^2 . Oblicz skalę podobieństwa kwadratu $KLMN$ do kwadratu $ABCD$.

5. W trójkącie prostokątnym ABC narysowano odcinki DE i GF , które są równoległe do boku AB (patrz rysunek).

Oblicz:

- a) skalę podobieństwa trójkąta GFC do trójkąta ABC ,
- b) stosunek pól trójkątów DEC do GFC ,
- c*) obwód trapezu $DEFG$.



6. Podłoga pokoju o kształcie prostokąta ma wymiary 4 m na 5 m. Oblicz pole prostokąta przedstawiającego ten pokój na planie w skali 1 : 200.
7. Rynek o kształcie kwadratu ma pole równe 225 arów. Pole powierzchni kwadratu przedstawiającego ten rynek na planie wynosi 9 cm^2 . W jakiej skali jest sporządzony ten plan?
8. Dwa trójkąty są podobne. Pierwszy trójkąt ma obwód równy 12 cm i pole równe 6 cm^2 , natomiast obwód drugiego trójkąta jest równy 24 cm. Oblicz pole drugiego trójkąta.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE



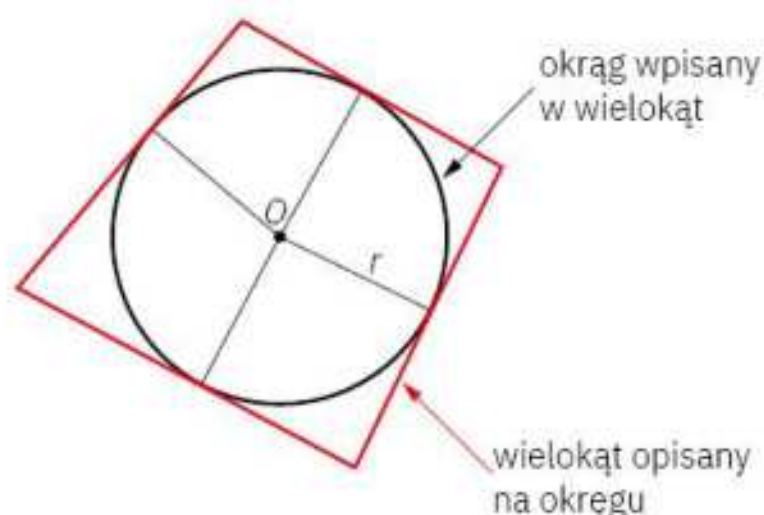
1. Stosunek obwodów dwóch kwadratów jest równy $\frac{2}{3}$, a pole jednego z nich jest o 5 cm^2 większe od pola drugiego kwadratu. Pole mniejszego kwadratu jest równe
A. 2 cm^2 B. 4 cm^2 C. 9 cm^2 D. 10 cm^2
2. Trójkąt prostokątny $A'B'C'$ o polu 6 cm^2 jest podobny do trójkąta ABC o bokach o długościach 6 cm, 8 cm i 10 cm. Długość przeciwprostokątnej trójkąta $A'B'C'$ jest równa
A. 4 cm B. 10 cm C. 8 cm D. 5 cm

3. Powierzchnia mieszkania na planie w skali 1 : 100 jest mniejsza od rzeczywistej powierzchni tego mieszkania
 A. 100 razy B. 10 000 razy C. 1000 razy D. 100 000 razy
4. Suma pól dwóch trójkątów podobnych w skali 2 jest równa 60 cm^2 . Pole mniejszego z tych trójkątów jest równe
 A. 12 cm^2 B. 20 cm^2 C. 48 cm^2 D. 40 cm^2

2.11. Okrąg wpisany w trójkąt

Wielokąt, którego wszystkie boki są styczne do okręgu, nazywamy wielokątem opisanym na okręgu. O takim okręgu mówimy natomiast, że jest wpisany w wielokąt.

Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest punktem znajdującym się w jednakowej odległości od wszystkich boków tego wielokąta.



Jeśli uznamy, że dwa sąsiednie boki wielokąta leżą na ramionach kąta, to zauważymy, że punkt jednakowo od nich odległy znajduje się na dwusiecznej tego kąta. Wynika z tego, że środek okręgu wpisanego w wielokąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych jego kątów.

Dwusieczna kąta jest to półprosta o początku w wierzchołku kąta, która dzieli ten kąt na dwa kąty przystające. Dla kąta wypukłego dwusieczna kąta jest zbiorem punktów należących do tego kąta i równo odległych od jego ramion.

Ćwiczenie 1.

Wpisz okrąg w trójkąt ABC .

Rozwiązanie:

Kreślimy dwusieczną jednego z kątów trójkąta, np. kąta BAC .

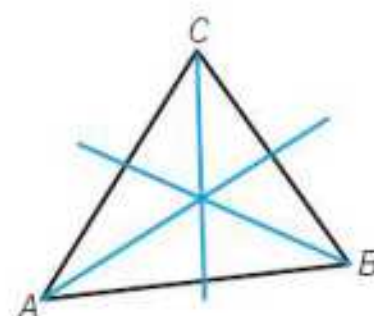
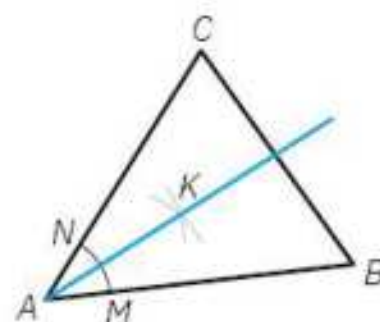
Z punktu A kreślimy łuk dowolnym promieniem.

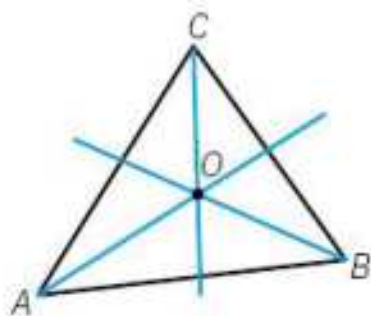
Na ramionach kąta BAC otrzymujemy punkty M i N .

Z otrzymanych punktów kreślimy łuki, zataczając okręgi o jednakowym promieniu; otrzymujemy punkt K .

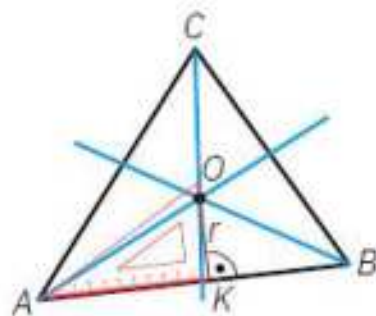
Kreślimy półprostą AK , która jest dwusieczną kąta BAC .

Wyznaczamy dwusieczne pozostałych kątów.

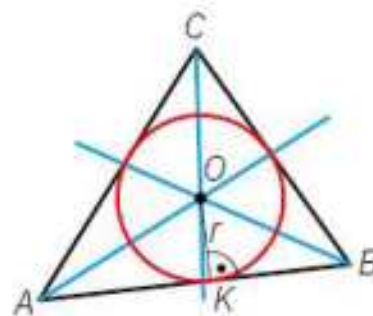




Oznaczamy punkt przecięcia dwusiecznych literą O .



Prowadzimy odcinek OK prostopadły do jednego z boków.



Kreślimy okrąg o środku O i promieniu OK .

Okrąg można wpisać w każdy trójkąt.

Ćwiczenie 2.

Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach o długości: 5 cm, 12 cm i 13 cm.

Rozwiązanie:

Trójkąty BDO i BFO są przystające, ponieważ:

$$\angle OBD = \angle OBF = \alpha$$

$$\angle DOB = \angle FOB = 90^\circ - \alpha$$

oraz odcinek OB leży w każdym w tych trójkątów.

Trójkąty ADO i AEO są przystające, ponieważ:

$$\angle OAD = \angle OAE = \beta$$

$$\angle DOA = \angle EOA = 90^\circ - \beta$$

oraz odcinek OA leży w każdym z tych trójkątów.

Z przystawania trójkątów BDO i BFO wynika, że równe są odcinki:

$$BD = BF = a - r$$

Z przystawania trójkątów ADO i AEO wiemy,

że równe są odcinki:

$$AD = AE = b - r$$

Długość przeciwprostokątnej:

$$c = (a - r) + (b - r)$$

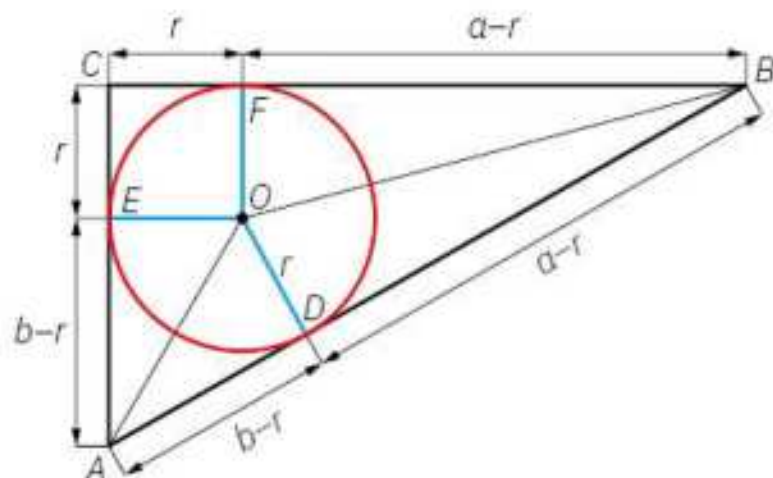
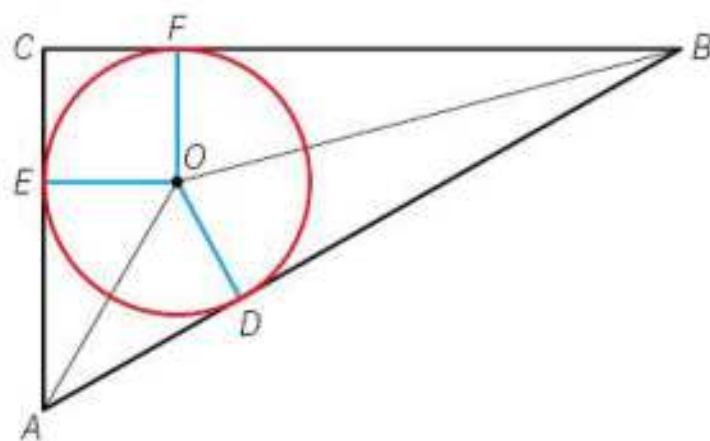
Wyznaczamy promień okręgu wpisanego w dowolny trójkąt prostokątny:

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Dla trójkąta określonego w ćwiczeniu mamy przyprostokątne a i b o długościach 5 cm i 12 cm oraz przeciwprostokątną c (najdłuższy z odcinków) o długości 13 cm.

$$\text{Stąd: } r = \frac{5 + 12 - 13}{2} = 2 \text{ (cm).}$$

Odpowiedź: Promień okręgu wpisanego w dany trójkąt jest równy 2 cm.



Ćwiczenie 3.

Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku o długości 12 cm.

Rozwiązanie:

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny

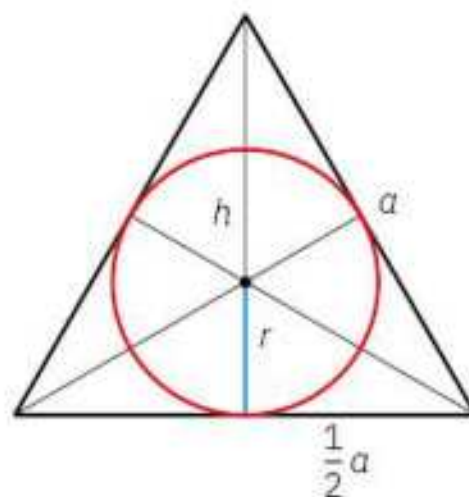
jest równy $r = \frac{1}{3}h$.

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – wyznaczamy wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

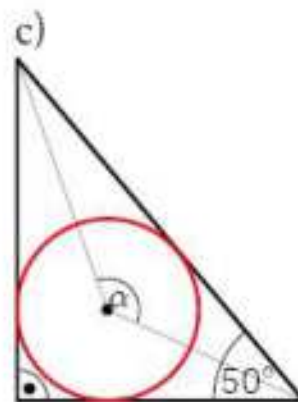
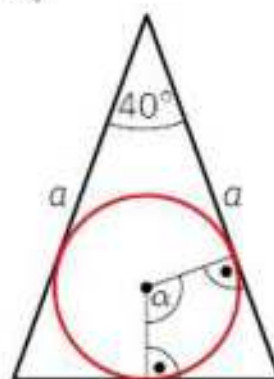
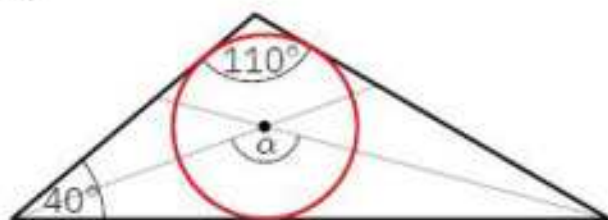
$r = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$ – wyznaczamy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt

Odpowiedź: Długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt równoboczny wynosi $2\sqrt{3}$ cm.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Wpisz okrąg w trójkąt:
a) ostrokątny b) rozwartokątny c) prostokątny
2. Każdy z trójkątów jest opisany na okręgu. Oblicz miarę kąta α .
a) b) c)



3. Oblicz długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach o długościach:
a) 3 cm, 4 cm, 5 cm b) 6 dm, 8 dm, 10 dm c) 1 cm, 2 cm, $\sqrt{5}$ cm
4. Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 12 cm.
5. Oblicz średnicę największego kółka, jakie można wyciąć z materiału w kształcie trójkąta prostokątnego o bokach o długościach: 5 dm, 4 dm i 3 dm.

6. Na rabatce w kształcie trójkąta równobocznego o boku 3 m wydzielono klomb w kształcie koła. Ile wynosi pole powierzchni tego klombu, jeśli ma on maksymalne możliwe do wykonania wymiary? Wynik podaj z dokładnością do 1 dm. Do obliczeń przyjmij, że $\pi = 3$.
7. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość 2 cm. Ile wynosi długość boku tego trójkąta?
- 8*. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny jest równy 5 cm. Oblicz długość przyprostokątnych tego trójkąta.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE



1. Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży w punkcie przecięcia

A. symetralnych boków	C. dwusiecznych kątów
B. wysokości	D. środkowych trójkąta

 Uwaga: Symetralna odcinka jest to prosta prostopadła do danego odcinka i przechodząca przez jego środek.
2. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach o długościach 9 cm, 40 cm i 41 cm jest równy

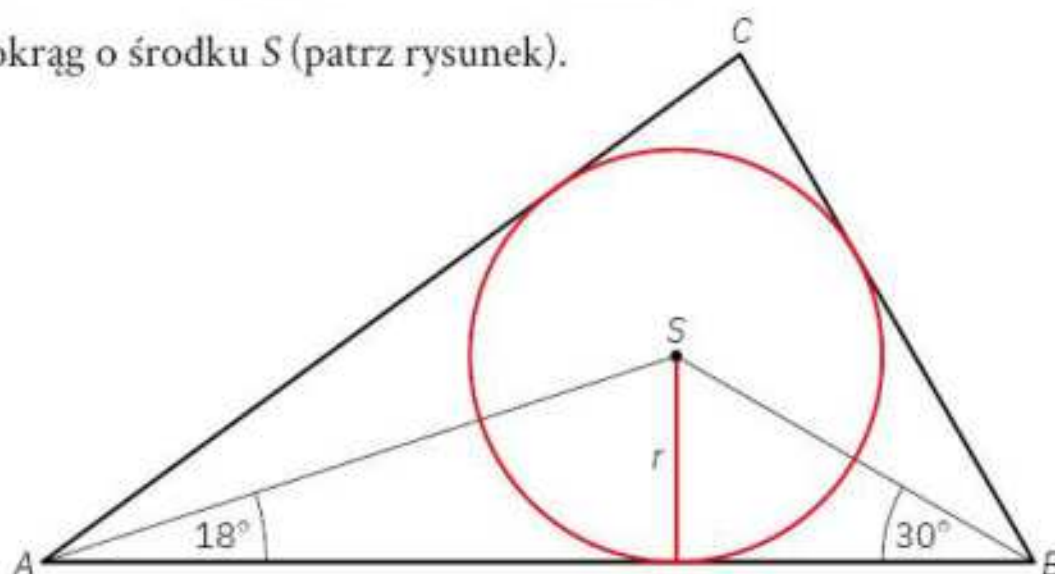
A. 4 cm	B. 10 cm	C. 8 cm	D. 5 cm
---------	----------	---------	---------
3. Okrąg jest wpisany w trójkąt równoboczny o boku równym 6 cm. Pole koła ograniczonego tym okręgiem jest równe

A. $3\pi \text{ cm}^2$	B. $\pi\sqrt{3} \text{ cm}^2$	C. $12\pi \text{ cm}^2$	D. $2\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$
------------------------	-------------------------------	-------------------------	--------------------------------
4. Okrąg o promieniu $2\sqrt{3}$ cm jest wpisany w trójkąt równoboczny, którego wysokość jest równa

A. 6 cm	B. $9\sqrt{3}$ cm	C. 9 cm	D. $6\sqrt{3}$ cm
---------	-------------------	---------	-------------------
5. Kąt rozwarty między dwusiecznymi kątów ostrych w trójkącie prostokątnym ma miarę

A. 135°	B. 120°	C. 145°	D. 150°
----------------	----------------	----------------	----------------
6. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku S (patrz rysunek). Miara kąta ACB wynosi

A. 48°	B. 84°	C. 96°	D. 132°
---------------	---------------	---------------	----------------

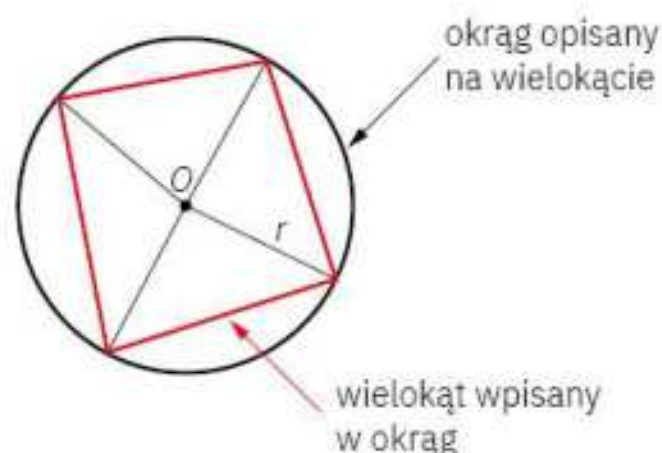


2.12. Okrąg opisany na trójkącie

Wielokąt, którego wszystkie wierzchołki leżą na okręgu, nazywamy wielokątem wpisanym w okrąg. O takim okręgu mówimy natomiast, że jest opisany na wielokącie.

Środek okręgu opisanego na wielokącie jest punktem znajdującym się w jednakowej odległości od wszystkich wierzchołków tego wielokąta.

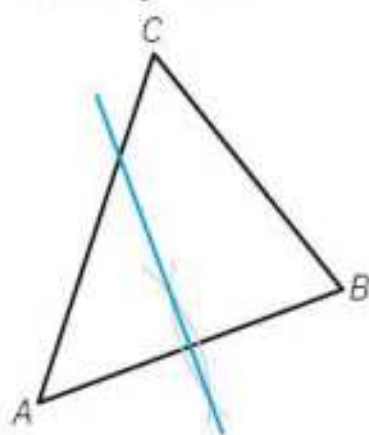
Punkt jednakowo odległy od końców odcinka leży na symetralnej tego odcinka. Wynika z tego, że środek okręgu opisanego na wielokącie jest punktem przecięcia się symetralnych jego boków.



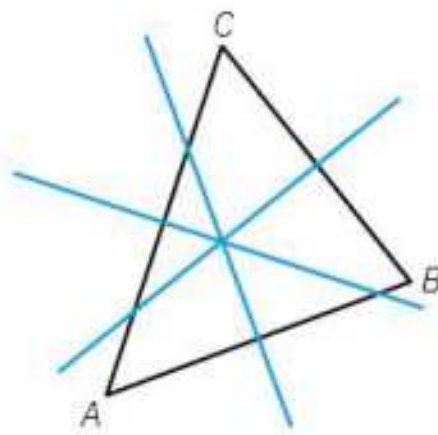
Ćwiczenie 1.

Opisz okrąg na trójkącie ABC .

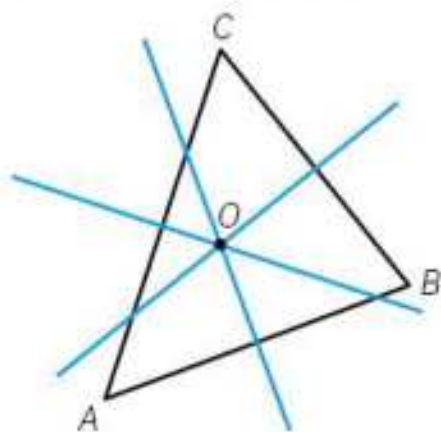
Rozwiązanie:



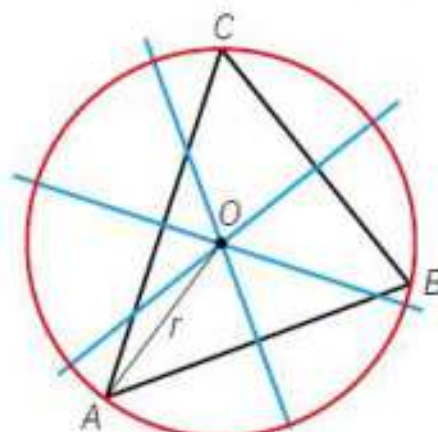
Kreślimy symetralną, np. boku AB trójkąta.



Kreślimy symetralną drugiego i trzeciego boku trójkąta.



Oznaczamy punkt przecięcia symetralnych literą O .



Rysujemy okrąg o środku O i promieniu OA .

Aby opisać okrąg na trójkącie, wystarczy wykreślić symetralne tylko dwóch boków trójkąta. Okrąg można opisać na każdym trójkącie.

Ćwiczenie 2.

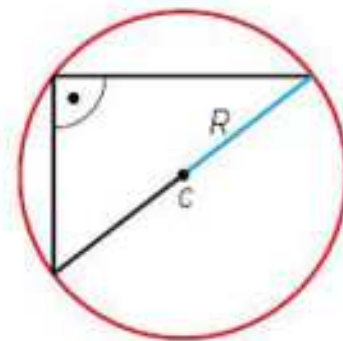
Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątna c ma długość 13 cm.

Rozwiązanie:

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.

$$R = \frac{1}{2}c, \text{ czyli } R = \frac{1}{2} \cdot 13 \text{ cm} = 6,5 \text{ (cm)}$$

Odpowiedź: Promień okręgu opisanego na danym trójkącie jest równy 6,5 cm.



Ćwiczenie 3.

Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku o długości 4 cm.

Rozwiązanie:

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym wynosi $R = \frac{2}{3}h$.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \text{wyznaczamy wysokość trójkąta równobocznego}$$

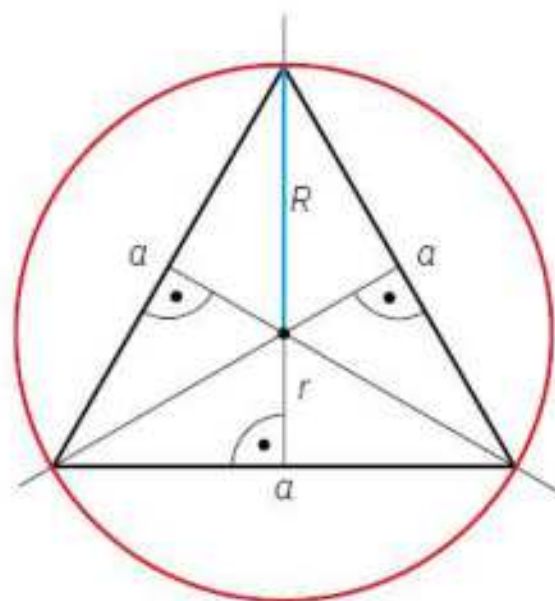
$$h = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)} - \text{wyznaczamy długość promienia}$$

okręgu opisanego na trójkącie równobocznym

Odpowiedź: Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie

równobocznym wynosi $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.



W trójkącie równobocznym środek okręgu opisanego na trójkącie i środek okręgu wpisanego w trójkąt pokrywają się.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

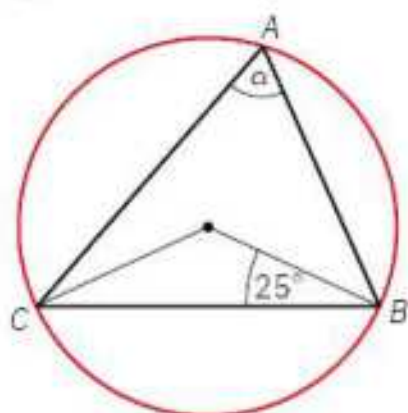
1. Narysuj trójkąty: ostrokątny, prostokątny i rozwartokątny. Na każdym z nich opisz okrąg.
2. Podaj długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o bokach o długościach:
a) 3 cm, 4 cm, 5 cm b) 6 dm, 8 dm, 10 dm c) 1 cm, 2 cm, $\sqrt{5}$ cm
3. Wierzchołki trójkąta należą do okręgu, przy czym jeden z boków trójkąta jest średnicą tego okręgu. Różnica miar największego i najmniejszego kąta tego trójkąta wynosi 70° . Oblicz miary kątów tego trójkąta.



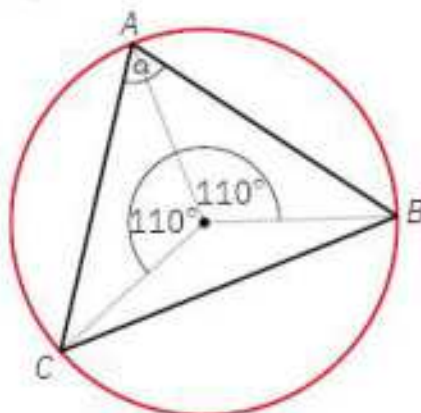
4. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnej o długości 5 cm, a kąt ostry tego trójkąta leżący naprzeciw tej przyprostokątnej wynosi 30° . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

5. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg. Oblicz miarę kąta α .

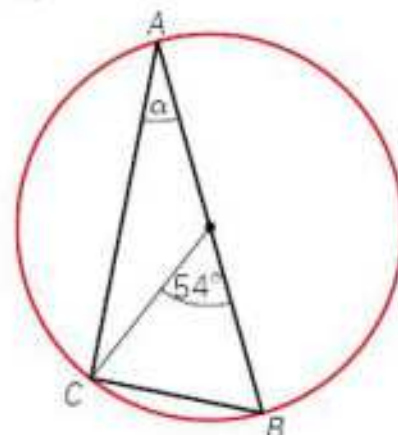
a)



b)



c)



6. Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych o długości 7 cm i 24 cm.
7. Na trójkącie prostokątnym równoramiennym o przyprostokątnej o długości $3\sqrt{2}$ cm opisano okrąg. Oblicz pole koła ograniczonego tym okręgiem.
8. Na trójkącie prostokątnym o bokach o długościach 5 cm, 12 cm i 13 cm opisano okrąg i wpisano weń okrąg. Oblicz różnicę długości promieni tych okręgów.
9. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku o długości 12 cm.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Środek okręgu opisanego na trójkącie leży w punkcie przecięcia

A. symetralnych boków	C. dwusiecznych kątów
B. wysokości	D. środkowych trójkąta

 (definicja środkowych trójkąta patrz s. 97)
- Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o bokach o długościach 9 cm, 40 cm i 41 cm jest równa

A. 4,5 cm	B. 20 cm	C. 20,5 cm	D. 24,5 cm
-----------	----------	------------	------------
- Okrąg o długości 12π cm jest opisany na trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątna jest równa

A. 6 cm	B. 24 cm	C. 8 cm	D. 12 cm
---------	----------	---------	----------
- Okrąg o promieniu $3\sqrt{3}$ cm jest opisany na trójkącie równobocznym o boku o długości

A. 3 cm	B. $9\sqrt{3}$ cm	C. 9 cm	D. 18 cm
---------	-------------------	---------	----------

2.13. Ortocentrum i środek ciężkości trójkąta

Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywa się ortocentrum trójkąta.

Ćwiczenie 1.

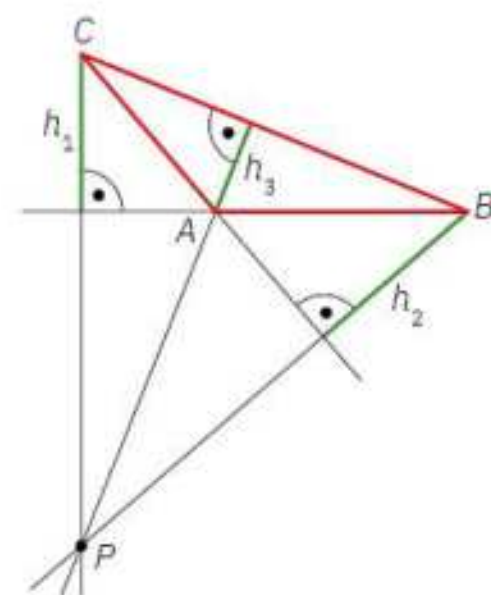
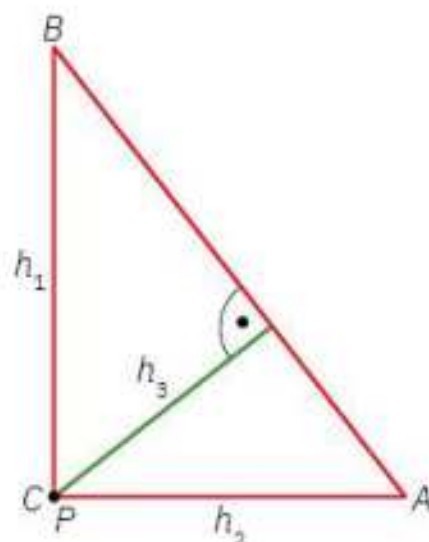
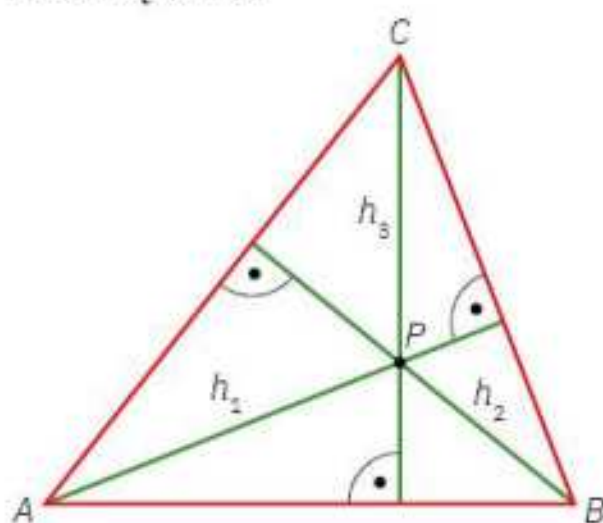
Wyznacz ortocentrum w trójkącie

a) ostrokątnym

b) prostokątnym

c) rozwartokątnym

Rozwiązanie:



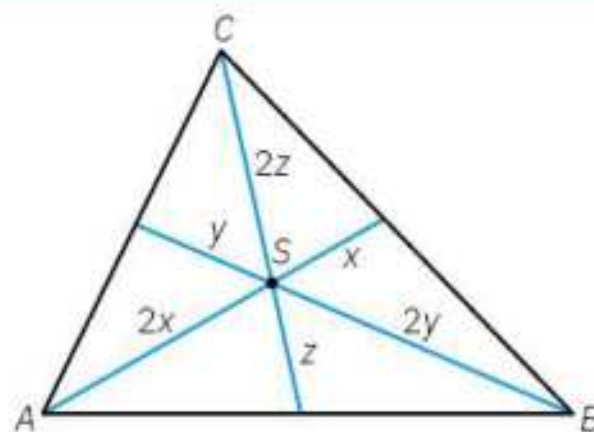
W trójkącie ostrokątnym ortocentrum położone jest wewnątrz trójkąta, a w trójkącie rozwartokątnym – na zewnątrz trójkąta. Natomiast w trójkącie prostokątnym ortocentrum tego trójkąta jest w wierzchołku kąta prostego.

Środkową trójkąta jest odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Dla środków prawdziwe jest następujące twierdzenie:

W dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka trójkąta.

Punkt przecięcia środków nazywany jest środkiem ciężkości trójkąta.



Ćwiczenie 2.

W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD , której długość jest równa połowie długości boku AB . Oblicz miarę kąta ACB .

Rozwiązanie:

Trójkąt ADC jest równoramienny, ponieważ odcinki AD i DC są równe. Oznaczamy kąty przy podstawie AC jako α .

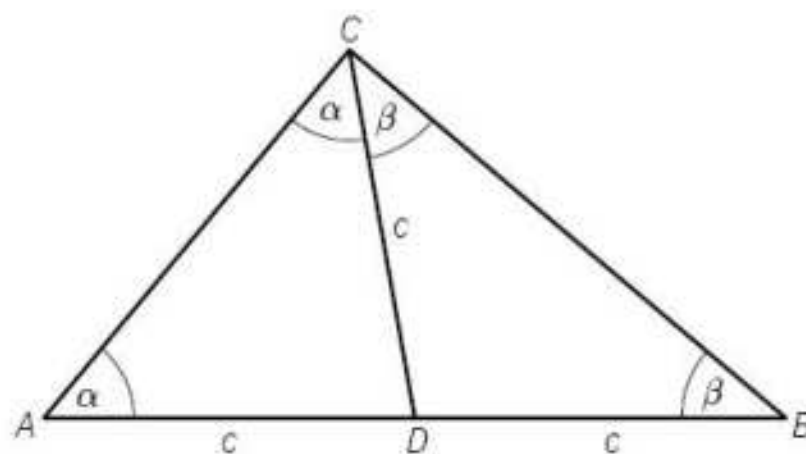
Trójkąt BDC jest równoramienny, ponieważ odcinki BD i DC są równe. Oznaczamy kąty przy podstawie BC jako β .

$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$ – zapisujemy sumę kątów trójkąta ABC

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ : 2$ – wyznaczamy miarę kąta ACB

$\alpha + \beta = 90^\circ$

Odpowiedź: Miara kąta ACB wynosi 90° .



Ćwiczenie 3.

Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 8 cm, a odpowiadająca jej wysokość jest równa 9 cm. Oblicz długości środkowych tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Wysokość CF jest też środkową, gdyż trójkąt ABC jest równoramienny.

$OF = \frac{1}{3}CF$ – wyznaczamy długość odcinka OF

$OF = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3 \text{ (cm)}$

$AO^2 = AF^2 + OF^2$ – wyznaczamy długość odcinka AO

$AO^2 = 4^2 + 3^2$

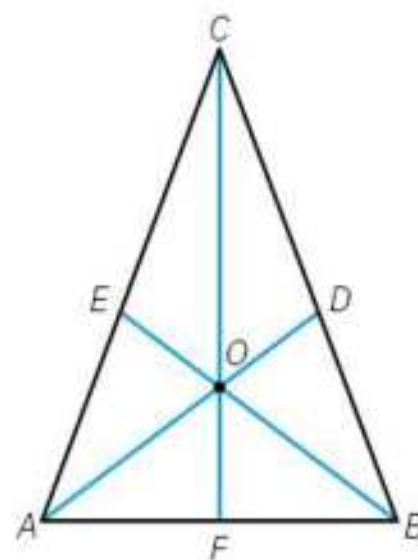
$AO = 5 \text{ (cm)}$

$AD = \frac{3}{2}AO$ – wyznaczamy długość środkowej AO

$AD = \frac{3}{2} \cdot 5 = 7,5 \text{ (cm)}$

$BE = AO = 7,5 \text{ cm}$ – środkowe poprowadzone na ramiona trójkąta równoramiennego są równe

Odpowiedź: Środkowe tego trójkąta mają długości 9 cm, 7,5 cm i 7,5 cm.



Ćwiczenie 4.

Bok trójkąta równobocznego ma długość 6 cm. Oblicz odległości ortocentrum tego trójkąta od jego boków.

Rozwiązanie:

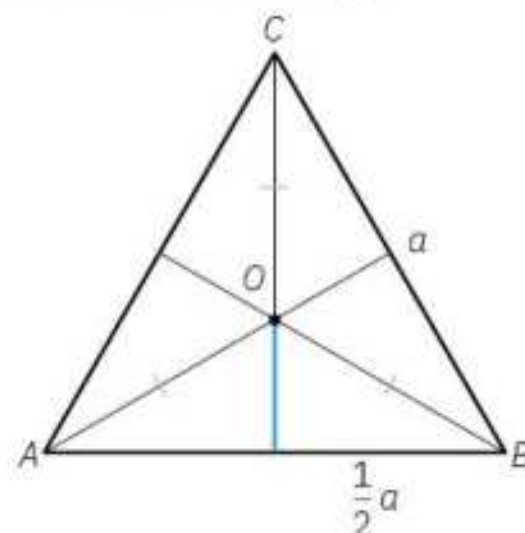
Odległość ortocentrum trójkąta równobocznego od jego boków jest równa $\frac{1}{3}h$, gdzie h jest wysokością tego trójkąta.

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – wyznaczamy wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ (cm)} - \text{wyznaczamy odległość ortocentrum od boków trójkąta}$$

Odpowiedź: Odległość ortocentrum od boków tego trójkąta równobocznego wynosi $\sqrt{3}$ cm.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. W trójkącie prostokątnym równoramiennym środkowa poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość $3\sqrt{2}$ cm. Oblicz długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta ostrego tego trójkąta.
2. W trójkącie równoramiennym o obwodzie 16 cm wysokość poprowadzona na podstawę jest równa 4 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.
3. Oblicz miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego ABC , w którym środkowa i wysokość poprowadzone z wierzchołka kąta prostego dzielą ten kąt na trzy równe części.
4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 5 cm i 12 cm. Oblicz odległość ortocentrum tego trójkąta od przeciwprostokątnej.
5. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 72 cm, a środek ciężkości tego trójkąta znajduje się w odległości 10 cm od wierzchołka kąta prostego. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
6. Obwód trójkąta równoramiennego ABC , w którym boki AC i BC są równe, wynosi 20 cm. W trójkącie tym poprowadzono środkowe AD i BE . Obwód trójkąta ABE jest o 2 cm większy od obwodu ADC . Oblicz długości boków trójkąta ABC .
7. Bok trójkąta równobocznego ma długość 12 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od jego boków.
8. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 18 cm i 24 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Ortocentrum jest to punkt przecięcia

A. symetralnych boków trójkąta	C. dwusiecznych kątów trójkąta
B. środkowych	D. wysokości trójkąta
2. Odległość ortocentrum trójkąta równobocznego od jego boków jest równa $2\sqrt{3}$ cm. Wybierz zdanie fałszywe spośród podanych.

A. Wysokość tego trójkąta jest równa $6\sqrt{3}$ cm.	B. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $4\sqrt{3}$ cm.
C. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $2\sqrt{3}$ cm.	D. Bok tego trójkąta jest równy 6 cm.
3. Odległość środka ciężkości trójkąta równobocznego od jego wierzchołków wynosi 4 cm. Długość środkowych tego trójkąta jest równa

A. 6 cm	B. 4 cm	C. 8 cm	D. 2 cm
---------	---------	---------	---------
4. W trójkącie prostokątnym ABC wierzchołkiem kąta prostego jest punkt C . Wybierz zdanie prawdziwe spośród podanych.

A. Punkt C jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.	B. Punkt C jest ortocentrum tego trójkąta.
C. Punkt C jest środkiem ciężkości tego trójkąta.	D. Punkt C jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

2.14. Wielokąty i okręgi

Ćwiczenie 1.

Opisz okrąg:

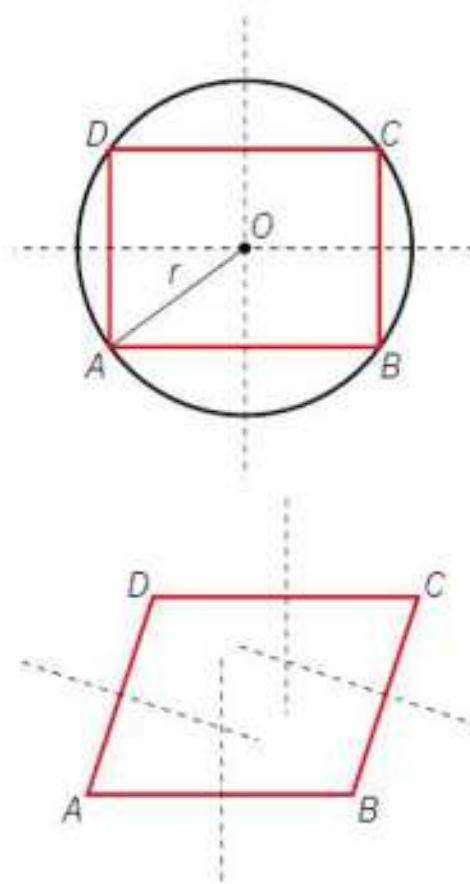
a) na prostokącie

Kreślimy symetralne boków prostokąta. Symetralne boków AB i DC pokrywają się, podobnie jak symetralne boków AD i BC . Punkt przecięcia symetralnych oznaczamy literą O . Rysujemy okrąg o środku O i promieniu OA .

b) na równoległoboku, który nie jest prostokątem

Kreślimy symetralne boków równoległoboku. Symetralne boków AB i DC są równoległe, a więc nie przeczną się. Podobnie symetralne boków AD i BC , jako równoległe, nie mają punktów wspólnych.

Symetralne boków równoległoboku nie przecinają się w jednym punkcie. Na równoległoboku, który nie jest prostokątem, nie da się opisać okręgu.

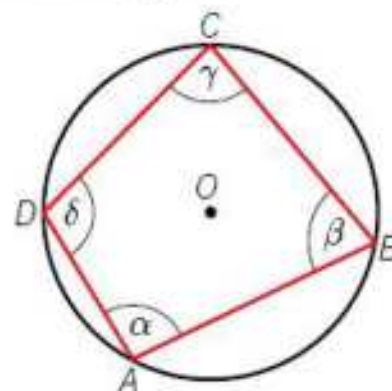


Okrąg można opisać na prostokącie. Środek okręgu opisanego na prostokącie pokrywa się z punktem przecięcia przekątnych tego prostokąta.

Na równoległoboku, który nie jest prostokątem, nie można opisać okręgu.

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



Ćwiczenie 2.

Sprawdź, czy można opisać okrąg na czworokącie, którego kolejne kąty mają miary:

a) $30^\circ, 59^\circ, 150^\circ, 121^\circ$

Rozwiązanie:

$$30^\circ + 150^\circ = 180^\circ \text{ oraz } 59^\circ + 121^\circ = 180^\circ$$

Odpowiedź: Na tym czworokącie można opisać okrąg.

b) $115^\circ, 65^\circ, 143^\circ, 37^\circ$

Rozwiązanie:

$$115^\circ + 143^\circ = 258^\circ \neq 180^\circ$$

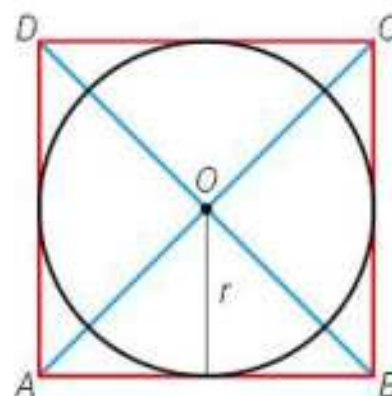
Odpowiedź: Na tym czworokącie nie można opisać okręgu.

Ćwiczenie 3.

Wpisz okrąg:

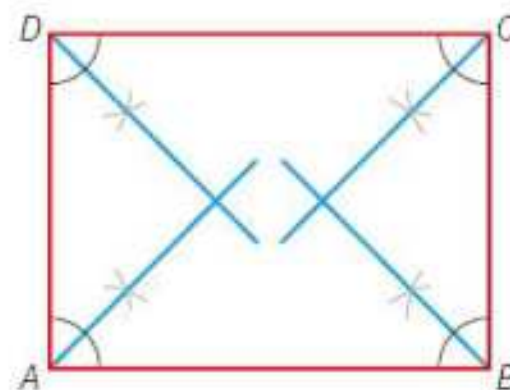
a) w kwadrat

1. Kreślimy dwusieczne kątów kwadratu. Punkt przecięcia dwusiecznych oznaczamy literą O .
2. Rysujemy promień okręgu – odcinek prostopadły do boku AB .
3. Rysujemy okrąg o środku O i promieniu r .



b) w prostokąt, który nie jest kwadratem

1. Kreślimy dwusieczne kątów prostokąta.
2. Dwusieczne kątów nie przecinają się w jednym punkcie. W prostokąt, który nie jest kwadratem, nie da się wpisać okręgu.

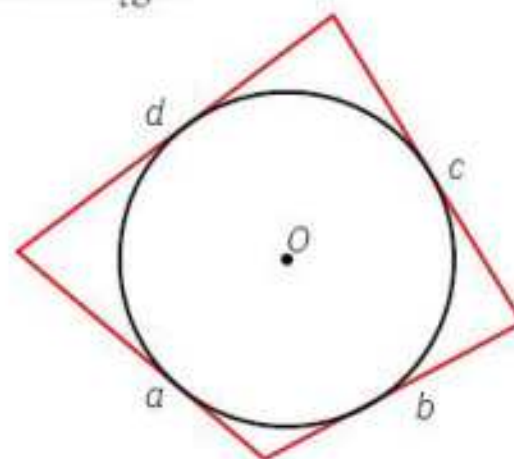


W kwadrat można wpisać okrąg. Środek okręgu wpisanego w kwadrat pokrywa się z punktem przecięcia przekątnych kwadratu.

W prostokąt, który nie jest kwadratem, nie można wpisać okręgu.

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$



Ćwiczenie 4.

Sprawdź, czy można wpisać okrąg w czworokąt wypukły, którego kolejne boki mają długości:

a) 6, 11, 16, 10

Rozwiązanie:

$$6 + 16 = 22 \text{ oraz } 11 + 10 = 21, 22 \neq 21$$

Odpowiedź: W ten czworokąt nie można wpisać okręgu.

b) 18, 30, 18, 6

Rozwiązanie:

$$18 + 18 = 36 \text{ oraz } 30 + 6 = 36, 36 = 36$$

Odpowiedź: W ten czworokąt można wpisać okrąg.

Wielokąty, które mają wszystkie boki tej samej długości i wszystkie kąty wewnętrzne jednakowej miary, nazywamy **wielokątami foremnymi**.

Trójkąt foremny to trójkąt równoboczny, a czworokąt foremny to kwadrat.

Ćwiczenie 5.

Oblicz miarę kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego.

Rozwiązanie:

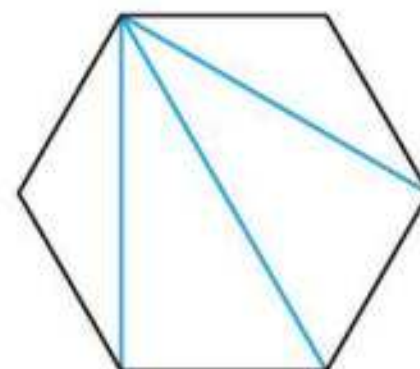
Dzielimy sześciokąt na cztery trójkąty i obliczamy sumę miar kątów wewnętrznych sześciokąta.

$$4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

Wyznaczamy miarę kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego.

$$720^\circ : 6 = 120^\circ$$

Odpowiedź: Miara kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego wynosi 120° .



Środek okręgu opisanego na wielokącie foremnym i okręgu wpisanego w ten wielokąt leżą w tym samym punkcie.

Ćwiczenie 6.

Opisz okrąg na kwadracie o boku 4 cm. W ten sam kwadrat wpisz okrąg. Wyznacz długości promieni tych okręgów.

Rozwiązanie:

Środek okręgu opisanego na kwadracie jest więc punktem przecięcia przekątnych tego kwadratu.

Promień okręgu opisanego na kwadracie jest równy połowie długości przekątnej kwadratu: $R = \frac{1}{2}d$, gdzie $d = a\sqrt{2}$ to długość przekątnej kwadratu.

Wzór na promień okręgu opisanego na kwadracie:

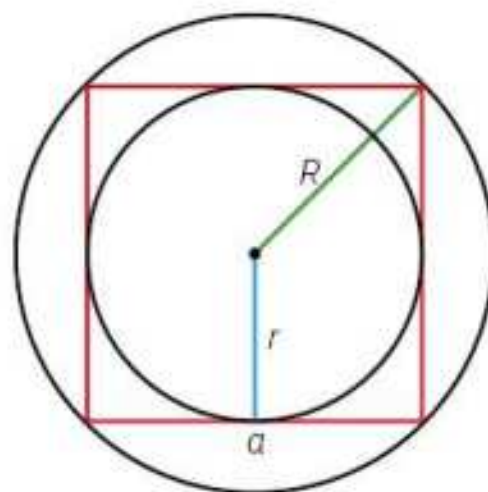
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Długość średnicy okręgu wpisanego w kwadrat jest równa długości boku kwadratu. Promień okręgu wpisanego w kwadrat jest więc równy połowie długości boku:

$$r = \frac{1}{2}a.$$

Dla kwadratu o długości boku 4 cm otrzymujemy długości promieni odpowiednio:

$$R = \frac{4\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 2\sqrt{2} \text{ cm} \text{ oraz } r = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}.$$



Ćwiczenie 7.

Opisz okrąg na sześciokącie foremnym o boku 5 cm. Następnie w ten sam sześciokąt wpisz okrąg.

Rozwiązanie:

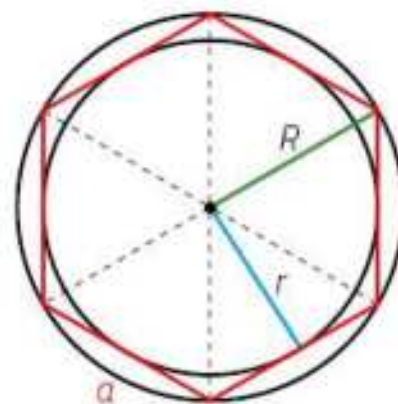
Przekątne dzielą sześciokąt foremny na sześć trójkątów równobocznych. Długość promienia okręgu opisanego na sześciokącie foremnym jest równa długości boku trójkąta równobocznego $R = a$.

Długość promienia okręgu wpisanego w sześciokąt foremny jest równa wysokości trójkąta równobocznego:

$$r = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Dla sześciokąta o boku 5 cm otrzymujemy odpowiednio: $R = 5 \text{ cm}$ oraz

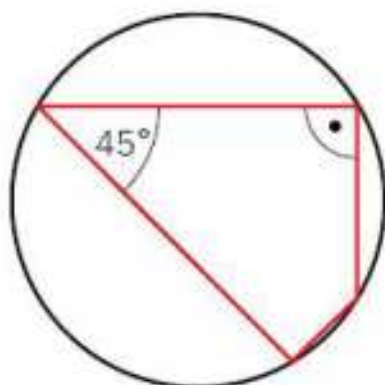
$$r = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$$



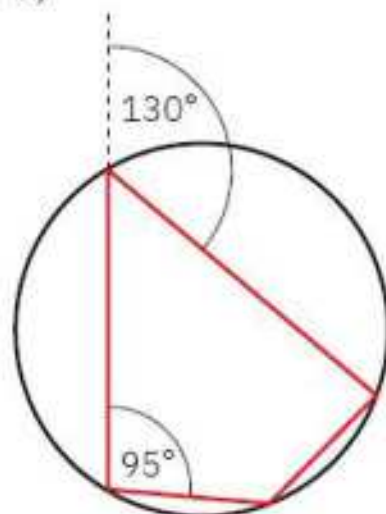
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Podaj miary kątów narysowanych czworokątów.

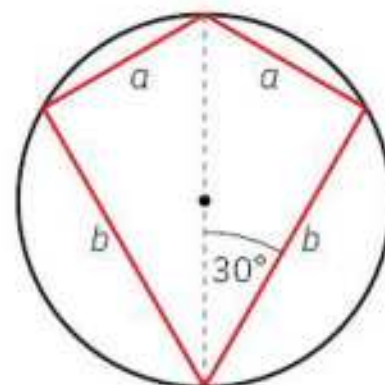
a)



b)

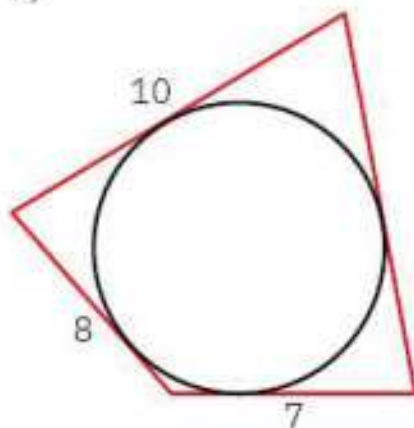


c)

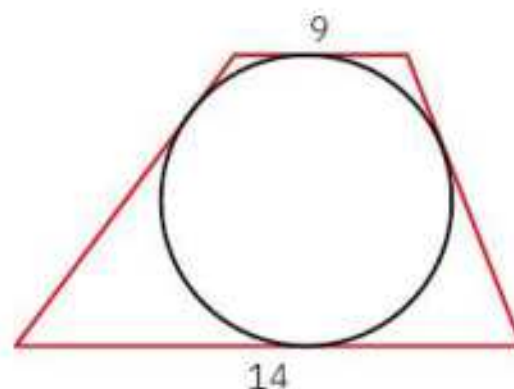


2. Wyznacz obwody narysowanych czworokątów.

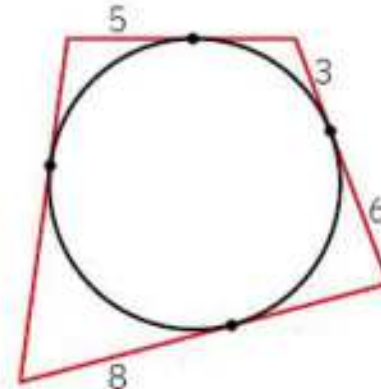
a)



b)

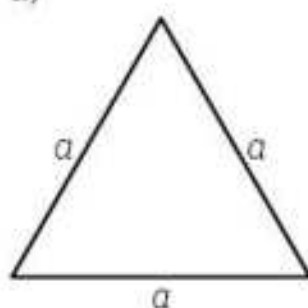


c)

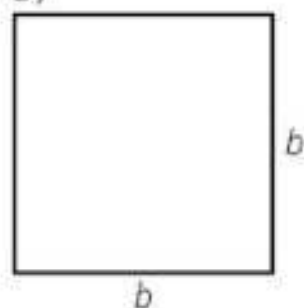


3. Oblicz długości boków wielokątów foremnych, z których każdy ma obwód równy 15 cm.

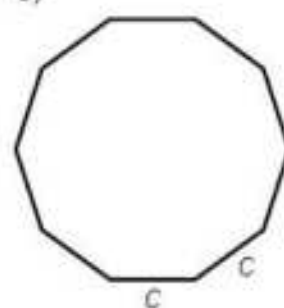
a)



b)



c)



4. Wyznacz sumę miar kątów wewnętrznych:

- a) pięciokąta foremnego,
- b) sześciokąta foremnego,
- c) ośmiokąta foremnego,

- d) dziesięciokąta foremnego,
- e*) stukąta foremnego,
- f*) n -kąta foremnego.

5. Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

- a) ośmiokąta foremnego,
- b) dziesięciokąta foremnego,
- c) dwunastokąta foremnego,

- d) dwudziestokąta foremnego,
- e*) stukąta foremnego,
- f*) n -kąta foremnego.

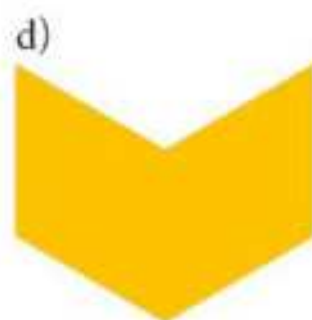
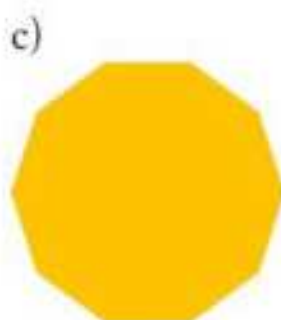
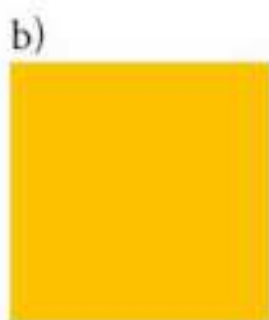
6. Podaj nazwę wielokąta foremnego, którego suma miar kątów wewnętrznych wynosi 1440° .
7. Obwód wielokąta foremnego wynosi 12 cm, a suma miar jego kątów wewnętrznych jest równa 540° . Jaka jest długość boku tego wielokąta?
- 8*. Podaj nazwę wielokąta foremnego, w którym miara kąta wewnętrznego jest równa 144° .
9. Oblicz różnicę między promieniami okręgu opisanego na kwadracie o boku o długości 8 cm i wpisanego w ten kwadrat.
10. Wyznacz różnicę między długością okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o boku o długości 6 cm i okręgu wpisanego w ten sześciokąt.
11. Oblicz pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu $5\sqrt{2}$ cm.
12. Z kwadratowego kawałka materiału o powierzchni $1,96 \text{ m}^2$ wycięto największe z możliwych kółek. Uszyto z niego obrus na okrągły stół. Oblicz średnicę tego stołu, wiedząc, że rozłożony na nim obrus wisi 20 cm z każdej strony.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE



1. Czworokąt, na którym nie można opisać okręgu, to:
 - A. prostokąt o bokach o długości 3 cm i 4 cm
 - B. trapez równoramienny, którego miara kąta ostrego wynosi 45°
 - C. kwadrat o przekątnej o długości $4\sqrt{2}$ dm
 - D. romb, którego miara kąta ostrego wynosi 70°
2. Czworokąt, w który można wpisać okrąg, to:
 - A. trapez równoramienny o podstawach o długościach 5 cm i 2 cm oraz ramieniu o długości 3 cm
 - B. romb o boku o długości 7 dm
 - C. prostokąt o bokach o długości 11 cm i 3 cm
 - D. równoległobok, którego krótszy bok ma długości 6 cm, a długość dłuższego boku jest o 3 dm większa

3. Wśród wielokątów:



wielokąt foremny przedstawiono na rysunkach:

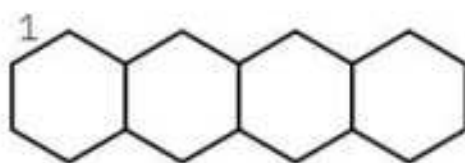
A. d

B. a

C. d i a

D. b i c

4. Ile wynosi obwód figury zbudowanej z czterech sześciokątów foremnych przedstawionych na rysunku?



A. 22

B. 33

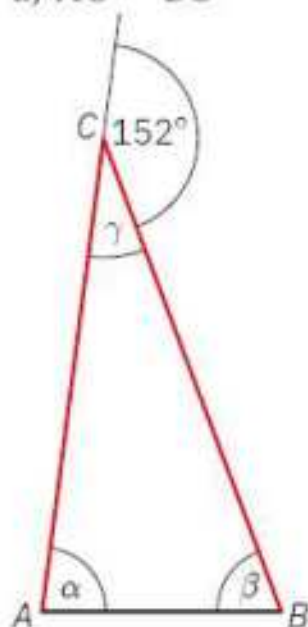
C. 18

D. 36

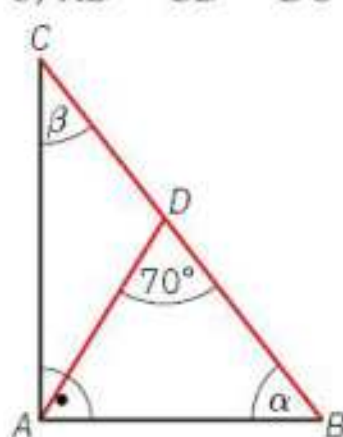
2.15. Zadania utrwalające

1. Wyznacz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC :

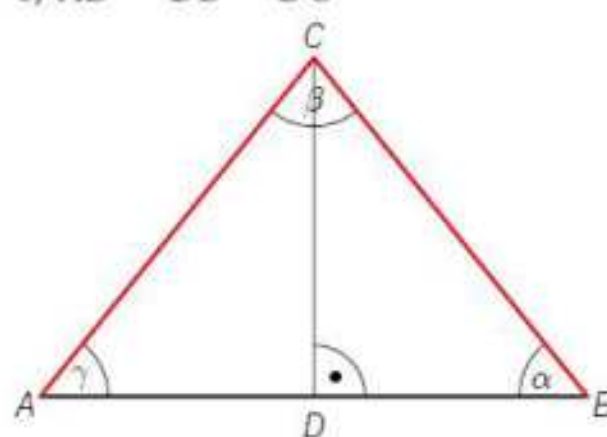
a) $AC = BC$



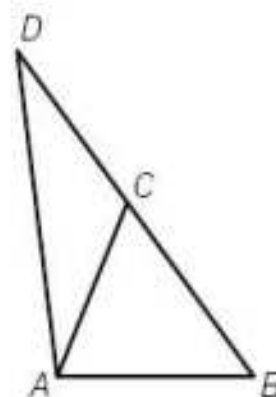
b) $AD = BD = DC$



c) $AD = DB = DC$

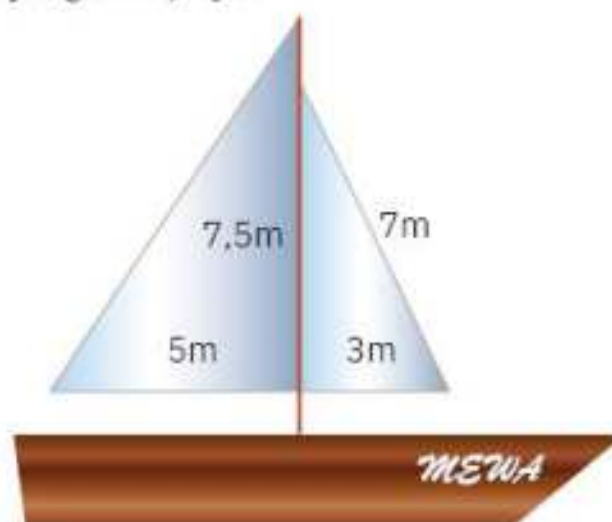


2. W trójkącie ABC : $\angle CAB = 68^\circ$, $\angle ABC = 54^\circ$. Na przedłużeniu odcinka BC odłożono odcinek CD o długości równej długości odcinka AC (patrz rysunek). Oblicz miary kątów trójkątów ACD i ABD .



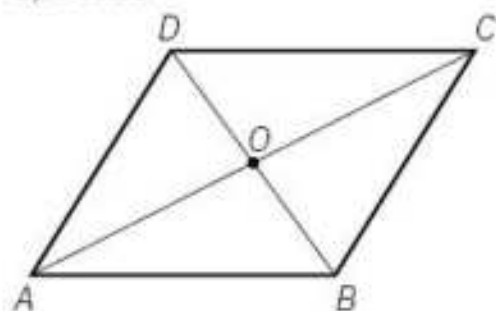
3. Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 16 cm. Ramię trójkąta jest o 1 cm krótsze od jego podstawy, a wysokość opuszczona na podstawę ma długość 4 cm. Oblicz:
- długości boków tego trójkąta,
 - pole trójkąta,
 - długość wysokości poprowadzonej na ramię tego trójkąta.

4. Ile metrów kwadratowych płótna żaglowego potrzeba, aby wyposażyć żaglówkę „Mewa” w dwa żagle? Dolicz 15% powierzchni materiału na zakładki. Wynik zaokrąglij do 1 m^2 .

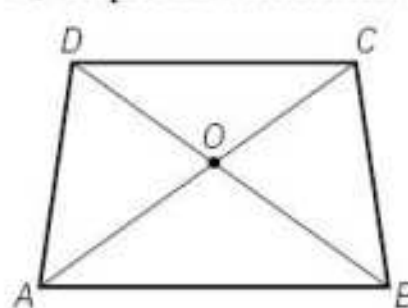


5. Wskaż trójkąty przystające.

a) romb



b) trapez równoramienny



6. W trójkącie prostokątnym dane są długości dwóch przyprostokątnych. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

a) $a = \sqrt{3}$ cm, $b = \sqrt{2}$ cm

b) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm

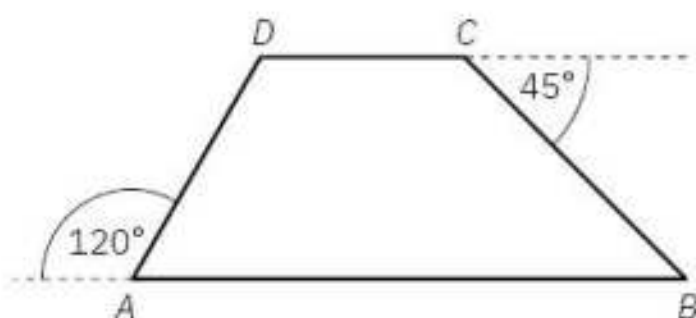
c) $a = 2$ cm, $b = \sqrt{5}$ cm

7. Oblicz długość ramienia trójkąta równoramiennego, jeżeli wysokość trójkąta jest równa $2\sqrt{3}$ cm, a podstawa ma długość 4 cm.

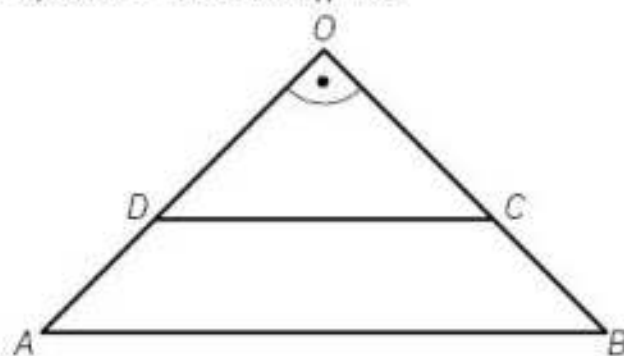
8. W okręgu o środku S i promieniu $r = 5$ cm poprowadzono cięciwę AB odległą od środka o 3 cm. Oblicz długość tej cięciwy.

9. Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$.

a) $AB \parallel DC$



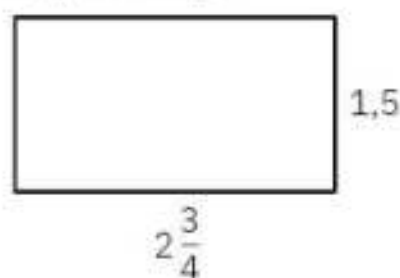
b) $AO = BO$ i $AB \parallel DC$



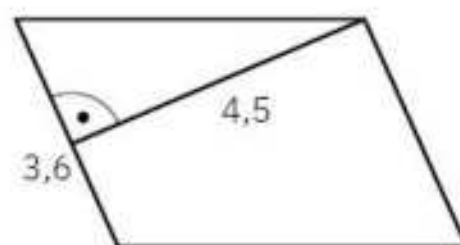
10. Oblicz długość boku rombu, którego obwód jest równy obwodowi trapezu równoramiennego o podstawach o długościach 10 cm i 5 cm. Długość ramienia trapezu jest równa długości jego krótszej podstawy.

11. Wyznacz pola figur przedstawionych na rysunkach (wymiaru podano w centymetrach).

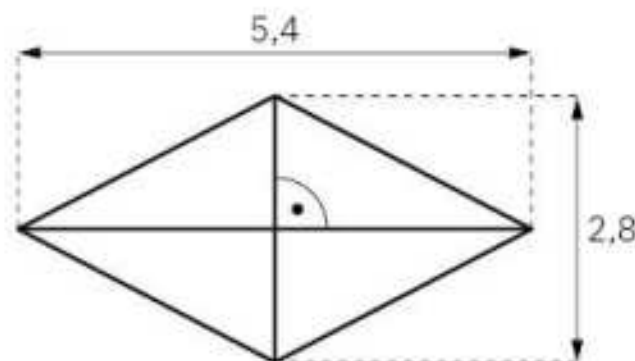
a) prostokąt



b) równoległobok

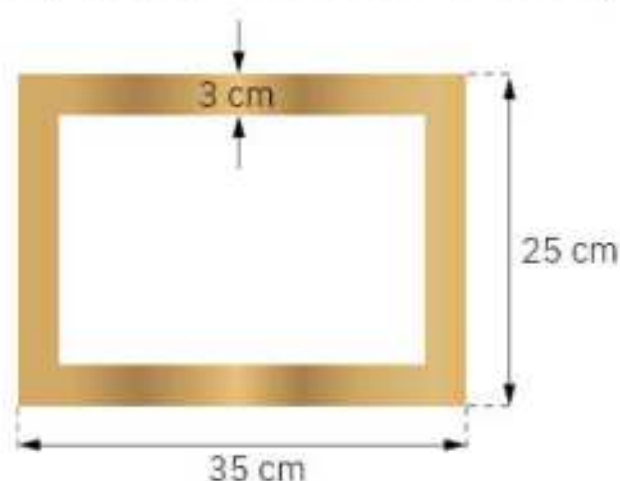


c) romb

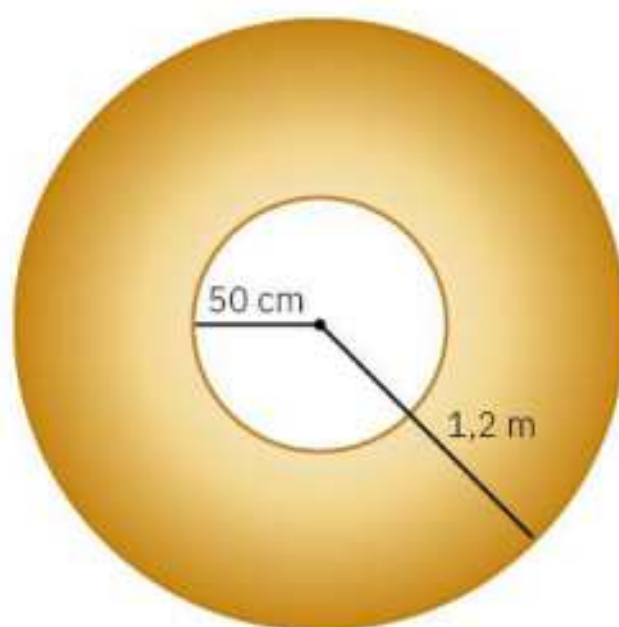


12. Wskazówka minutowa zegara jest dwa razy dłuższa od wskazówki godzinowej. Ile razy dłuższą drogę przebędzie w ciągu doby koniec wskazówki minutowej w porównaniu ze wskazówką godzinową?

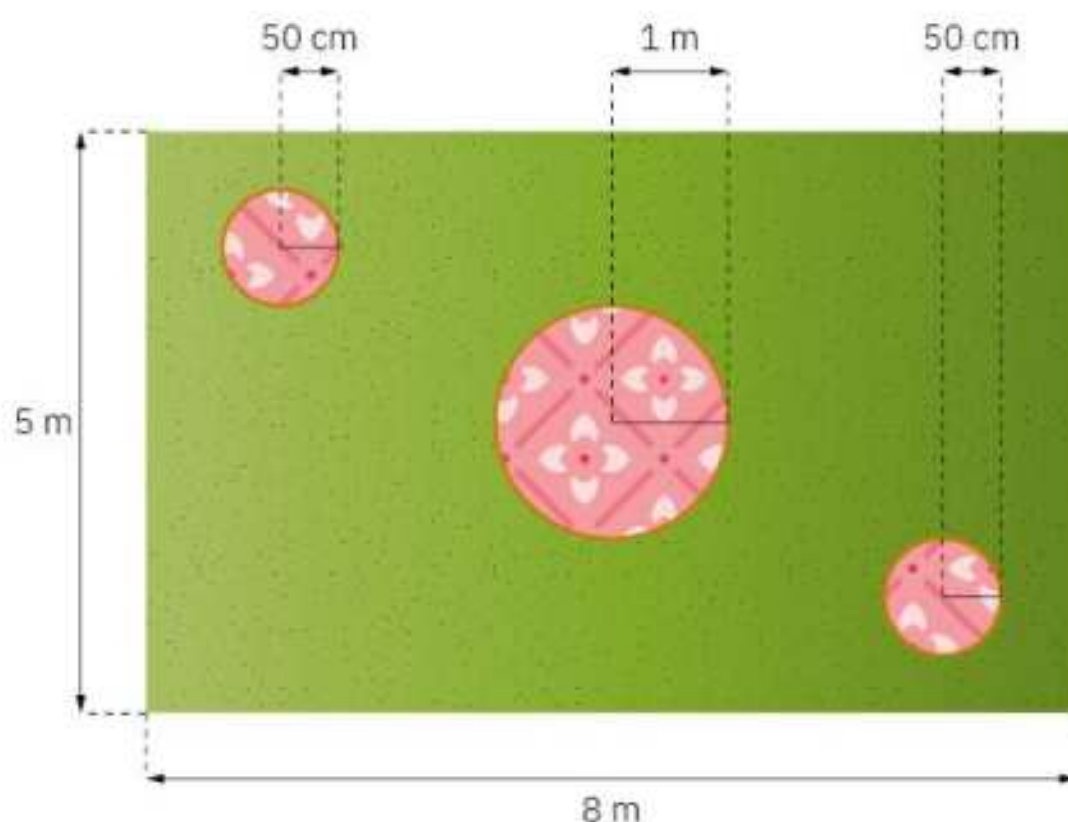
13. Ramkę należy pomalować dwukrotnie lakierem do drewna. Czy wystarczy kupić 1 puszkę lakieru? Wydajność farby przy jednokrotnym malowaniu: do 4 m^2 .



14. Czy na dwukrotne pomalowanie obu stron pierścienia kołowego wyciętego z blachy wystarczy puszka farby o pojemności 0,75 l? Wydajność farby przy jednokrotnym malowaniu to około $16 \frac{\text{m}^2}{\text{l}}$.



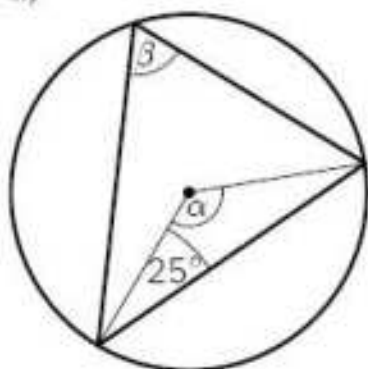
15. Na prostokątnym trawniku na trzech klombach zaplanowano posadzić kwiaty. Oblicz pole powierzchni obszaru obsianego trawą. Wynik zaokrąglij do $0,01 \text{ m}^2$.



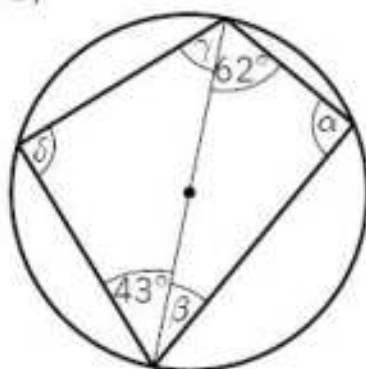
16. Różnica miar kątów środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku okręgu wynosi 42° . Podaj miary tych kątów.

17. Oblicz miary kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

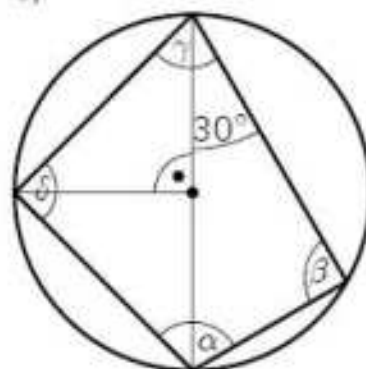
a)



b)



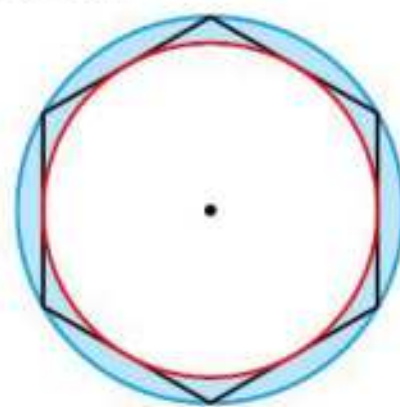
c)



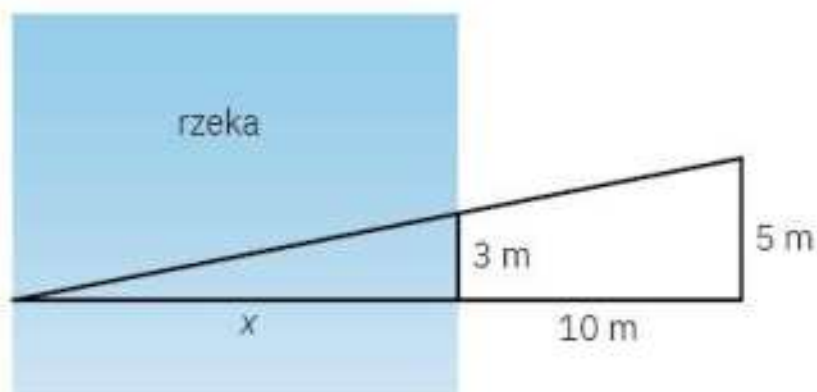
18. Obwód wielokąta foremnego wynosi 2,4 dm, a suma miar jego kątów wewnętrznych jest równa 1080° . Wyznacz długość boku tego wielokąta.

19. Oblicz obwód kwadratu opisanego na okręgu o długości 12π cm.

20. Na sześciokącie foremnym o boku o długości 6 dm opisano okrąg, jak na rysunku. Następnie w ten sam sześciokąt wpisano okrąg. Wyznacz pole otrzymanego pierścienia kołowego.



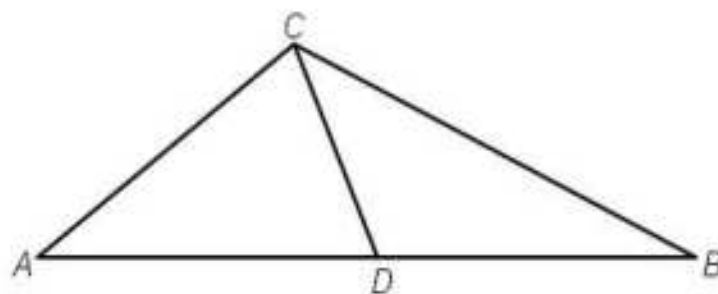
21. Oblicz szerokość rzeki, korzystając z danych przedstawionych na rysunku.



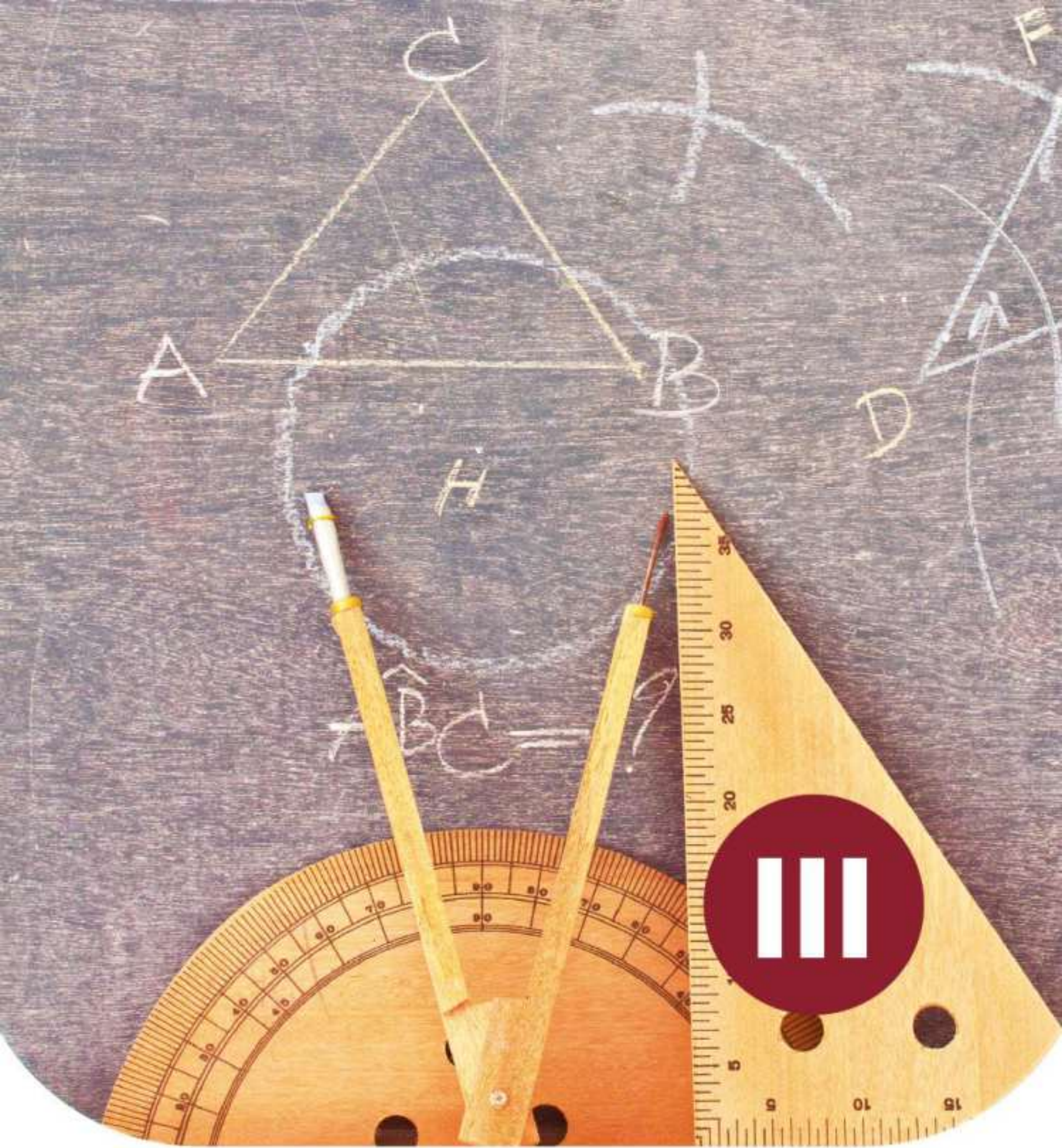
22. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne oraz $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 7$ cm. Oblicz obwód trójkąta $A'B'C'$, jeśli najkrótszy bok tego trójkąta ma 9 cm.

23. W trapezie równoramiennym $ABCD$ przedłużono ramiona AD i BC do przecięcia w punkcie E . Oblicz obwód trójkąta ABE , jeśli $AB = 8$ cm, $DC = 6$ cm i $CB = 4$ cm.

24. Trójkąty ABC i CBD przedstawione na rysunku są podobne oraz $CD = 2$ cm, $DB = 3$ cm i $BC = 4$ cm. Oblicz długości boków AB i AC .



25. Czy trójkąt o przyprostokątnych o długości 6 cm i 8 cm jest podobny do trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej o długości 4 cm i przeciwprostokątnej o 1 cm dłuższej? Jeśli tak, to podaj skalę podobieństwa tych trójkątów.
26. Dwa trójkąty są podobne w skali $\frac{2}{3}$. Oblicz obwód mniejszego z trójkątów, jeśli wiadomo, że obwód większego jest równy 45 cm.
27. Uzasadnij, że skala podobieństwa okręgu opisanego na trójkącie równobocznym do okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 2.
28. Dwa trójkąty podobne są w skali $\frac{1}{3}$, a pole mniejszego z nich wynosi 12 cm^2 . Oblicz pole większego trójkąta.
29. W trójkącie ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , dzielącą bok AC na dwa równe odcinki. Prosta ta dzieli trójkąt ABC na trójkąt i trapez. Oblicz stosunek pól tych figur.
30. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg o średnicy 8 cm. Punkt styczności okręgu z najdłuższym bokiem trójkąta dzieli ten bok na odcinki o długości 8 cm i 12 cm. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.
31. Na trójkącie równobocznym o boku o długości 4 dm opisano okrąg i wpisano weń okrąg. Oblicz, ile wynosi różnica pól kół ograniczonych przez te okręgi.
32. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych o długości 7 cm i $7\sqrt{3}$ cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
33. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki mające długości 1 cm i 9 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
34. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 15 cm i 20 cm wpisano okrąg i opisało na nim okrąg. Oblicz sumę promieni tych okręgów.
35. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 24 cm. Środek ciężkości tego trójkąta znajduje się w odległości $1\frac{2}{3}$ cm od podstawy. Oblicz obwód tego trójkąta.
36. W trójkącie prostokątnym miara jednego z kątów ostrych jest równa 30° . Z wierzchołka kąta prostego tego trójkąta poprowadzono na przeciwprostokątną wysokość i środkową. Oblicz miarę kąta wyznaczonego przez tę wysokość i środkową.
37. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 16 cm, a wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa 18 cm. Oblicz długość środkowej poprowadzonej na ramię tego trójkąta.

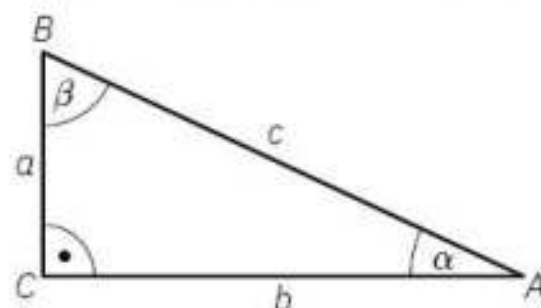


TRYGONOMETRIA

3.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Związki między bokami i kątami w trójkącie prostokątnym są bardzo istotne w planimetrii, więc otrzymały własne nazwy. Opisują one stosunki między przyprostokątnymi i przeciwprostokątną w zależności od jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC . Przyjmijmy oznaczenia: a – długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw wierzchołka A , b – długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw wierzchołka B , c – długość przeciwprostokątnej, α – miara kąta przy wierzchołku A , β – miara kąta przy wierzchołku B .



Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin \beta = \frac{b}{c}$$

Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos \beta = \frac{a}{c}$$

Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej.

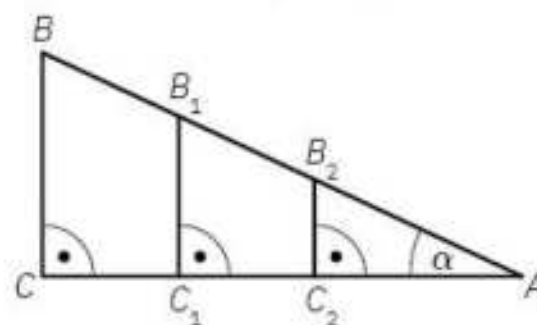
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

Stosunki te nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kątów ostrych w trójkącie prostokątnym. Nie zależą one od wielkości trójkąta prostokątnego, a jedynie od wartości kąta ostrego.

Te kąty ostre (a właściwie ich miary) są argumentami tych funkcji, a więc tworzą dziedziny tych trzech funkcji.

Podane stosunki pozwalają wyznaczać wartość tych funkcji dla każdego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym. Wartości te należą do zbioru liczb rzeczywistych.

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} \\ \cos \alpha &= \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} \end{aligned}$$



Z definicji funkcji trygonometrycznych z łatwością zauważamy, że

$$\sin \alpha = \cos \beta \qquad \cos \alpha = \sin \beta \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Skoro w trójkącie prostokątnym suma miar kątów ostrych wynosi 90° , zatem $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Wynika stąd, że

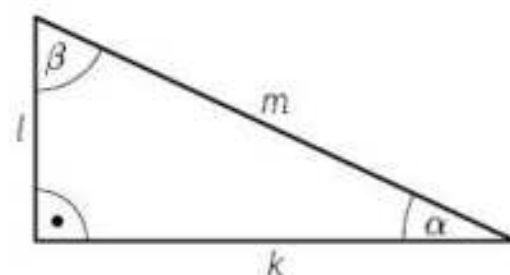
$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \qquad \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}.$$

Ćwiczenie 1.

Zapisz wzory wszystkich funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, korzystając z oznaczeń na rysunku.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{l}{m} & \sin \beta &= \frac{k}{m} \\ \cos \alpha &= \frac{k}{m} & \cos \beta &= \frac{l}{m} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{l}{k} & \operatorname{tg} \beta &= \frac{k}{l} \end{aligned}$$



Ćwiczenie 2.

Wyznacz długość przyprostokątnej a . Podaj wartość funkcji trygonometrycznych kąta α , korzystając z danych na rysunku.

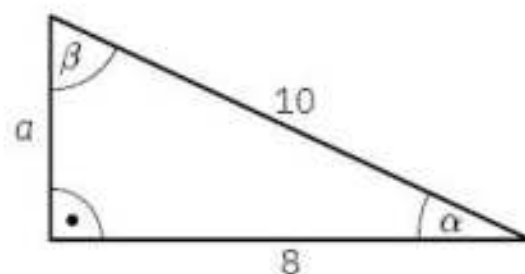
Rozwiązanie:

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość boku a .

$$\begin{aligned} a^2 + 8^2 &= 10^2 & a^2 &= 100 - 64 \\ a^2 &= 36 & a &= 6 \end{aligned}$$

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

$$\sin \alpha = \frac{6}{10} = 0,6 \qquad \cos \alpha = \frac{8}{10} = 0,8 \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8} = 0,75$$



Ćwiczenie 3.

Długość przeciwprostokątnej w pewnym trójkącie prostokątnym jest równa 6 cm.

Oblicz długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta, którego sinus jest równy $\frac{2}{5}$.

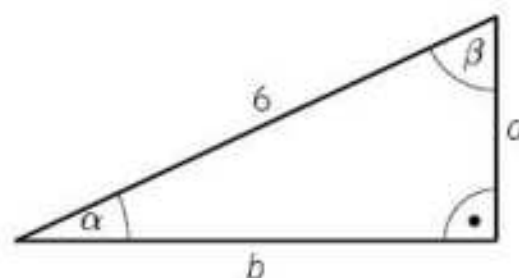
Rozwiązanie:

Rysujemy trójkąt prostokątny.

Korzystamy z definicji funkcji sinus:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{6} \\ \frac{a}{6} &= \frac{2}{5} & 5a &= 12 & a &= 2,4 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Długość przyprostokątnej wynosi 2,4.



Ćwiczenie 4.

Wiedząc, że $\sin 18^\circ = 0,3090$, oblicz wartość $\cos 72^\circ$.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że $18^\circ + 72^\circ = 90^\circ$.

Korzystamy ze związku $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ i otrzymujemy:

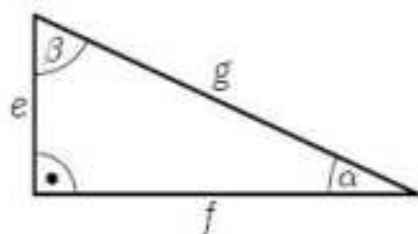
$$\sin 18^\circ = \cos(90^\circ - 18^\circ) = \cos 72^\circ = 0,3090$$



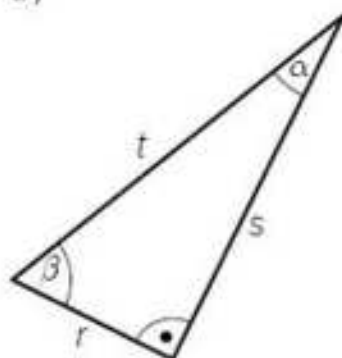
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Korzystając z rysunku, oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

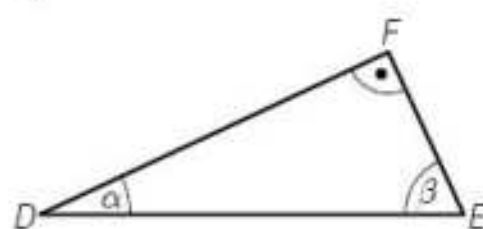
a)



b)



c)



2. Długość przeciwprostokątnej w trójkącie wynosi 2 cm. Oblicz długość przyprostokątnej leżącej przy kącie, którego cosinus jest równy $\frac{2}{3}$.
3. Oblicz wartość funkcji tangens obu kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym długości przyprostokątnych wynoszą $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ i 4.
4. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach o długościach 7, 24, 25.
5. Jaką wysokość ma budynek, którego cień ma długość 15 m w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią Ziemi kąt, którego tangens jest równy 0,75.
6. Oblicz wartość $\sin 68^\circ$ oraz $\operatorname{tg} 54^\circ$, wiedząc, że $\cos 22^\circ = 0,9272$, a $\operatorname{tg} 36^\circ = 0,7265$.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

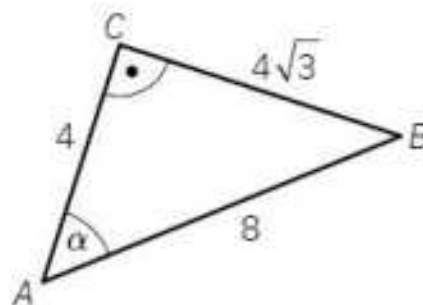
1. Cosinus kąta α wynosi

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\sqrt{3}$



2. Patyk o długości 50 cm wbity prostopadle do powierzchni Ziemi rzuca cień o długości 1,2 m. Cosinus kąta padania promieni słonecznych wynosi
- A. $\frac{0,5}{1,2}$ B. $\frac{1,2}{0,5}$ C. $\frac{0,5}{1,3}$ D. $\frac{1,2}{1,3}$
3. Wartość funkcji $\sin 49^\circ$ jest równa wartości funkcji
- A. $\cos 41^\circ$ B. $\sin 41^\circ$ C. $\operatorname{tg} 49^\circ$ D. $\operatorname{tg} 41^\circ$

3.2. Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60°

Wartości funkcji trygonometrycznych niektórych kątów możemy obliczyć, wykorzystując figury geometryczne, w których możemy dostrzec kąty o miarach 30° , 45° czy 60° . Takimi figurami są na przykład trójkąt równoboczny lub kwadrat.

Przekątna dzieli kwadrat na dwa trójkąty prostokątne, równoramienne o kątach ostrych 45° . Wysokość w trójkącie równobocznym dzieli go na dwa trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej dwa razy dłuższej niż jedna z przyprostokątnych i o kątach ostrych 30° i 60° .

Ćwiczenie 1.

Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, wyznacz wartości tych funkcji dla kąta o mierze 45° .

Rozwiązanie:

Rysujemy trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych o długości a .

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przeciwprostokątnej:

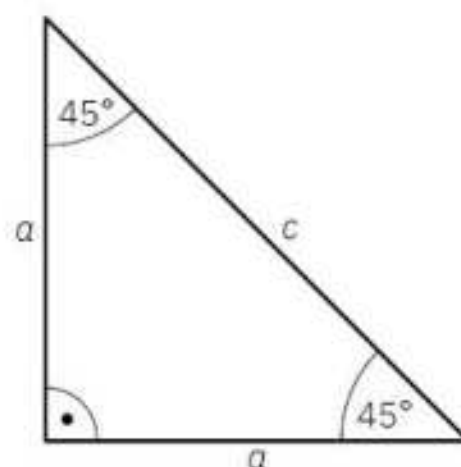
$$c^2 = a^2 + a^2 \qquad c^2 = 2a^2 \qquad c = a\sqrt{2}$$

Z definicji odpowiednich funkcji trygonometrycznych obliczamy:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$



Ćwiczenie 2.

Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, wyznacz wartości tych funkcji dla kątów o miarach 60° i 30° .

Rozwiązanie:

Rysujemy trójkąt równoboczny o boku a .

Wysokość h podzieliła trójkąt na dwa przystające trójkąty prostokątne o kątach ostrych 30° i 60° .

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \quad h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Z definicji funkcji trygonometrycznych obliczamy:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$$

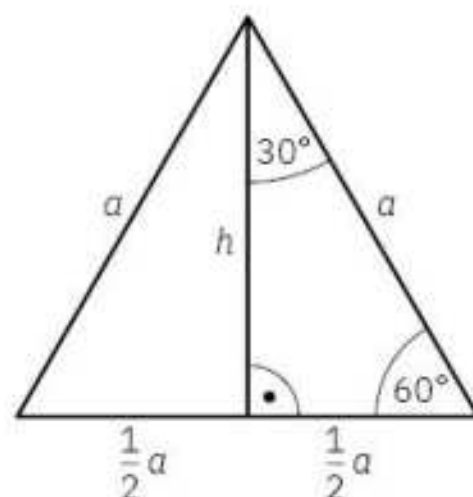
$$\cos 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{h} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$$



Obliczone wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60° zapisujemy w tabelce.

Kąt α	30°	45°	60°
Funkcja			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ćwiczenie 3.

Oblicz, korzystając z danych w tabeli na stronie 116.

a) $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \sin 30^\circ$ b) $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$ c) $\sin^2 45^\circ \cdot \cos^2 30^\circ$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{b) } \cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \sin^2 45^\circ \cdot \cos^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Oblicz wartości liczbowe poniższych wyrażeń.

a) $\sin 30^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ$

b) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$

c) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$

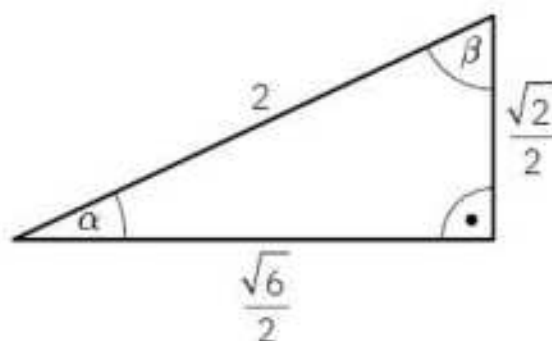
2. Oblicz wartości liczbowe następujących wyrażeń.

a) $\operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ$

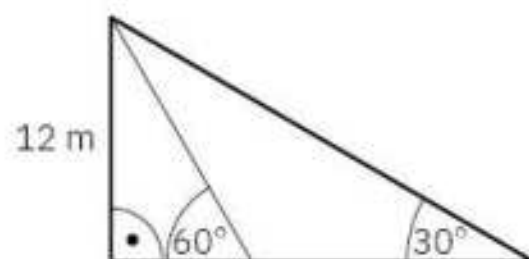
b) $(\sin 60^\circ + \cos 30^\circ)^2$

c) $\frac{\cos 60^\circ + \sin^2 45^\circ}{-2 + \operatorname{tg} 45^\circ}$

3. Dla kąta ostrego α w trójkącie przedstawionym na rysunku wartość jednej z funkcji trygonometrycznych wynosi $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ile wynosi wartość tej samej funkcji dla kąta ostrego β ?

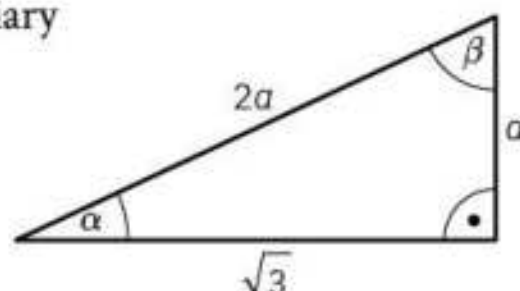


4. Drabina strażacka o długości 20 metrów jest nachylona pod kątem 60° do ziemi. Na jaką wysokość sięga drabina? Do obliczeń przyjmij $\sqrt{3} = 1,73$.
5. Stok góry jest nachylony do poziomu pod kątem 30° . Jaką najmniejszą długość mogłyby mieć tory, aby można było po nich zwieźć kłody drzewa z wysokości 500 m?
6. Do ściany o wysokości 12 metrów przymocowane są dwie liny jak na rysunku. Oblicz, o ile metrów dłuższa jest lina przymocowana pod mniejszym kątem od liny przymocowanej pod większym kątem. Przyjmij $\sqrt{3} = 1,7$.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Wartość wyrażenia $\frac{4}{\sin 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}$ wynosi
 A. 3 B. $2\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $4\frac{1}{2}$
2. Iloczyn $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$ jest równy
 A. 0 B. 1 C. 3 D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
3. Kąty trójkąta przedstawionego na rysunku mają miary
 A. $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$
 B. $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ$
 C. $\alpha = 15^\circ, \beta = 75^\circ$
 D. $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$
4. Dany jest kąt ostry α , taki że $\sin \alpha = \cos 30^\circ$. Kąt α wynosi
 A. 60° B. 30° C. 25° D. 50°



3.3. Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

Przy obliczaniu wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym dla dowolnego kąta ostrego różnego od $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ wygodnie jest korzystać z tablic przybliżonych wartości tych funkcji. W pierwszej kolumnie podane są wartości kątów, a w kolejnych kolumnach – odpowiednie wartości funkcji $\sin$, $\cos$ i tg , np. $\sin 40^\circ \approx 0,6428$, $\operatorname{tg} 57^\circ \approx 1,5399$.

Ćwiczenie 1.

Oblicz, korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (s. 134).

- a) $\sin 48^\circ \approx 0,743$ b) $\cos 16^\circ \approx 0,961$ c) $\operatorname{tg} 85^\circ \approx 11,43$

Ćwiczenie 2.

Wyznacz przybliżoną wartość kąta ostrego, jeżeli:

- a) $\sin \alpha = 0,156$ $\alpha = 9^\circ$
 b) $\cos \alpha = 0,358$ $\alpha = 69^\circ$
 c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,428$ $\alpha = 55^\circ$

Ćwiczenie 3.

Przekątne w rombie mają długości 6 cm i 8 cm. Oblicz miary kątów tego rombu.

Rozwiązanie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\alpha \approx 37^\circ$$

$$\beta \approx 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

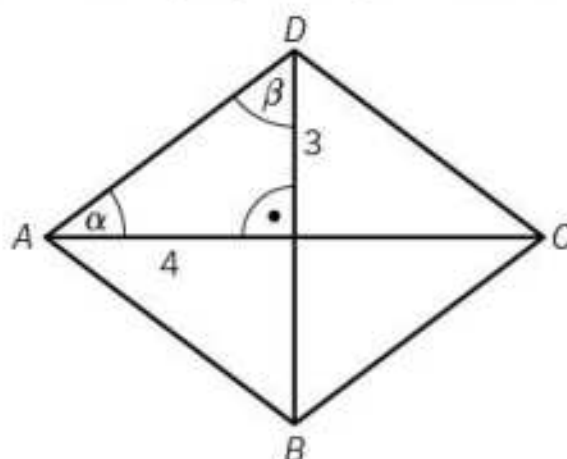
$$\sphericalangle DAB \approx 2 \cdot 37^\circ$$

$$\sphericalangle DAB \approx 74^\circ$$

$$\sphericalangle ADC \approx 2 \cdot 53^\circ$$

$$\sphericalangle ADC \approx 106^\circ$$

Odpowiedź: Kąty w rombie mają w przybliżeniu miary 74° i 106° .



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

- Odczytaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (s.134), ile wynoszą:
a) $\sin 35^\circ$, b) $\cos 58^\circ$, c) $\operatorname{tg} 62^\circ$, d) $\operatorname{tg} 86^\circ$.
- Odczytaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (s. 134) miarę kąta ostrego α , jeśli wiadomo, że:
a) $\sin \alpha \approx 0,995$, b) $\cos \alpha \approx 0,485$, c) $\operatorname{tg} \alpha \approx 0,601$, d) $\sin \alpha \approx 0,070$.
- Wyznacz miarę kąta ostrego, gdy:
a) $\sin \alpha \approx 0,9848$, b) $\cos \alpha \approx 0,8660$, c) $\operatorname{tg} \alpha \approx 1,4281$, d) $\cos \alpha \approx 0,966$.
- Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia z dokładnością do 0,01.
a) $\sin 32^\circ + \cos 50^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$ c) $(\sin 52^\circ - \cos 25^\circ) - (\operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{tg} 82^\circ)$
b) $\cos 78^\circ - (\sin 25^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ)$ d) $\operatorname{tg} 75^\circ \cdot \operatorname{tg} 24^\circ + \sin 49^\circ$
- Jaka jest wysokość budynku, który w momencie, gdy promienie słoneczne padają na Ziemię pod kątem 36° , rzuca cień o długości 15 m?
- W prostokącie ABCD długości boków wynoszą 6 cm i 4 cm. Wyznacz miarę kąta rozwartego, pod jakim przecinają się przekątne tego prostokąta.
- W równoległoboku KLMN przekątna KM o długości 16 cm jest prostopadła do boku LM o długości 20 cm. Oblicz miarę kąta KLM.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Sinus kąta 57° wynosi
A. 1,6003 B. 0,8387 C. 1,5399 D. 0,8387
- Jeśli $\operatorname{tg} \alpha = 0,532$, wówczas kąt α ma miarę
A. 62° B. 87° C. 58° D. 28°



3. Przybliżona wartość wyrażenia $\operatorname{tg} 70^\circ - (\cos 40^\circ + \sin 20^\circ)$ wynosi
 A. 0,6395 B. 1,4876 C. 1,6395 D. 0,8953
4. Kij o długości 1,62 m ustawiony prostopadle do powierzchni Ziemi rzuca cień o długości 2 m. Kąt padania promieni słonecznych wynosi wtedy
 A. 38° B. 39° C. 51° D. 53°

3.4. Zależności między funkcjami trygonometrycznymi

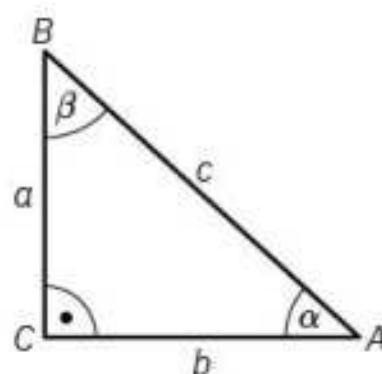
Omówimy teraz związki, jakie zachodzą między sinusem, cosinusem i tangensem tego samego kąta ostrego.

$c^2 = a^2 + b^2$ – z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ABC

$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$ – dzielimy obie strony związku $c^2 = a^2 + b^2$ przez c^2

$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$ – korzystamy z definicji funkcji sinus i cosinus kąta ostrego α

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$



Dla dowolnego kąta ostrego suma kwadratów sinusa i cosinusa tego kąta jest równa 1.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Powyższą równość nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Ćwiczenie 1.

Wiedząc, że sinus kąta ostrego α wynosi $\frac{1}{2}$, oblicz $\cos \alpha$.

Rozwiązanie:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ – korzystamy z jedynki trygonometrycznej

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ – podstawiamy wartość funkcji $\sin \alpha$

$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4}$ – wyznaczamy wartość funkcji $\cos \alpha$

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Na podstawie oznaczeń z powyższego rysunku zapisujemy zależność:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} - \text{dzielimy licznik i mianownik ułamka przez } c$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \text{korzystamy z definicji funkcji sinus i cosinus}$$

Dla dowolnego kąta ostrego stosunek sinusa do cosinusa tego samego kąta jest równy tangensowi tego kąta.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Ćwiczenie 2.

Wiedząc, że $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, oblicz $\operatorname{tg} 60^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli $\sin \alpha = 0,6$.

Rozwiązanie:

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i wyznaczamy wartość funkcji cosinus.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - (0,6)^2$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 0,36$$

$$\cos^2 \alpha = 0,64$$

$$\cos \alpha = \sqrt{0,64}$$

$$\cos \alpha = 0,8$$



Korzystamy ze związku pomiędzy sinusem, cosinusem i tangensem tego samego kąta ostrego.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{0,8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$$

Ćwiczenie 4.

Wiemy, że α jest miarą kąta ostrego oraz że $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Rozwiązanie:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ czyli } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$$

Ponieważ w tym równaniu mamy dwie niewiadome: $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, dlatego korzystamy także z innej zależności między nimi – jedynki trygonometrycznej.

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ (2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ 5 \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$5 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \begin{array}{l} \text{-- usuwamy niewymierność z mianownika, mnożąc licznik i mianownik przez } \sqrt{5} \end{array}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Ćwiczenie 5.

Wiedząc, że kąt α jest ostry, uprość wyrażenie: $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$.

Rozwiązanie:

z jedynki trygonometrycznej

z definicji funkcji $\operatorname{tg} \alpha$

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cancel{\sin \alpha}^1 \cdot \sin \alpha}{\cancel{\sin \alpha}_1 \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Ćwiczenie 6.

Uzasadnij, że równość $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$ jest tożsamością.

Rozwiązanie:

$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$ – przekształcając lewą stronę równości, korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia

$L = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$ – redukujemy wyrazy podobne

$L = 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$ – wyłączmy wspólny czynnik przed nawias

$L = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$ – korzystamy z jedynki trygonometrycznej

$$L = 2 \cdot 1$$

$$L = 2$$

$$P = 2$$

$$L = P$$

Wykazaliśmy, że lewa strona równości jest identyczna z prawą, czyli sprawdziliśmy, że podana równość jest tożsamością, opierając się na poznanych zależnościach między funkcjami trygonometrycznymi.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



- Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:
a) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, b) $\sin \alpha = 0,6$, c) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, d) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.
- Kąty α i β są kątami ostrymi. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$, jeżeli $\sin \alpha = 0,8$ i $\sin \beta = \frac{12}{13}$.
- Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.
a) $1 - \sin^2 \alpha$ c) $1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ e) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
b) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$ d) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ f) $\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$
- Oblicz wartość wyrażenia.
a) $\frac{1}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$ b) $1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:
- a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$.
6. Wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, oblicz:
- a) $3 \cos \alpha + 4 \operatorname{tg} \alpha$; b) $4 \operatorname{tg} \alpha - 18 \cos^2 \alpha$; c) $3 \cdot (8 \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$.
7. Tangens kąta ostrego α wynosi $\frac{7}{24}$. Oblicz wartości wyrażeń.
- a) $\sin \alpha + \cos \alpha$ b) $\sin \alpha - \cos \alpha$ c) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$
8. Sprawdź, czy istnieje kąt ostry α taki, że:
- a) $\sin \alpha = 0,8$ i $\cos \alpha = 0,6$; c) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$;
b) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
9. Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{12}{13}$. Oblicz wartość wyrażenia:
- a) $(1 - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)$; b) $\frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$.
10. Wiedząc, że kąt α jest ostry, sprawdź, czy podana równość jest tożsamością.
- a) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 1 = 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$
b) $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha = 0$
c) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1$



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Jeśli kąt α jest kątem ostrym i $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, to wartość funkcji $\cos \alpha$ wynosi
- A. $\frac{8}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{13}{8}$ D. $\frac{144}{169}$
2. Jeśli kąt α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, wartość wyrażenia $\sin \alpha - \cos \alpha$ jest równa
- A. 0,1 B. 0,3 C. 0,2 D. 0,4
3. Jeśli kąt α jest ostry, to upraszczając wyrażenie $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$ do najprostszej postaci, otrzymujemy
- A. $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ B. $\operatorname{tg} \alpha$ C. $\operatorname{tg}^2 \alpha$ D. $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$
4. Jeśli kąt α jest ostry, to upraszczając wyrażenie $\sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$, otrzymamy
- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

3.5. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego wykorzystuje się do obliczania długości odcinków i miar kątów w dowolnych wielokątach. Obliczanie długości boków oraz miar kątów w trójkącie nazywamy rozwiązywaniem trójkąta.

Trójkąt prostokątny możemy rozwiązać, jeżeli mamy dane:

- 1) przeciwprostokątną i kąt ostry,
- 2) jedną z przyprostokątnych i kąt ostry,
- 3) przeciwprostokątną i jedną z przyprostokątnych,
- 4) obie przyprostokątne.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeżeli dana jest przeciwprostokątna $c = 10$ i $\alpha = 60^\circ$.

Rozwiązanie:

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ – z wzoru dla funkcji sinus kąta ostrego wyznaczamy długość przyprostokątnej a

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$a = 10 \cdot \sin 60^\circ$$

$$a = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = 5\sqrt{3} \text{ – długość przyprostokątnej } a$$

$\cos \alpha = \frac{b}{c}$ – z wzoru dla funkcji cosinus kąta ostrego wyznaczamy długość przyprostokątnej b

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

$$b = 10 \cdot \cos 60^\circ$$

$$b = 10 \cdot \frac{1}{2}$$

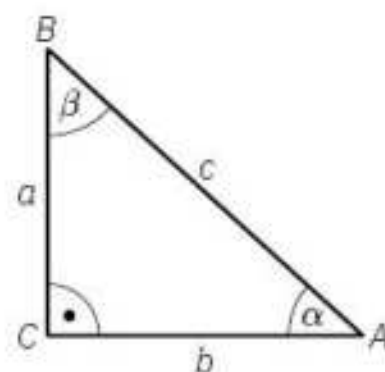
$$b = 5 \text{ – długość przyprostokątnej } b$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\beta = 90^\circ - 60^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

Odpowiedź: Przyprostokątne w tym trójkącie wynoszą $a = 5\sqrt{3}$ i $b = 5$, a miara kąta β to 30° .



Ćwiczenie 2.

Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeżeli dana jest przeciwprostokątna $c = 12$ i przyprostokątna $a = 8$.

Rozwiązanie:

$a^2 + b^2 = c^2$ – korzystamy z twierdzenia Pitagorasa do obliczenia przyprostokątnej b

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 12^2 - 8^2$$

$$b = \sqrt{12^2 - 8^2}$$

$$b = 4\sqrt{5}$$

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ – korzystamy z definicji funkcji sinus kąta ostrego

$$\sin \alpha = \frac{8}{12}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}$$

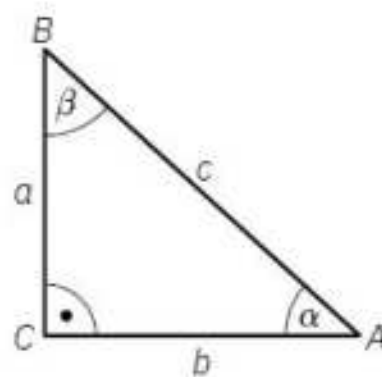
$\sin \alpha \approx 0,6667$ – korzystamy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (s. 134) i odczytujemy miarę kąta α

$$\alpha \approx 42^\circ$$

$$\beta \approx 90^\circ - 42^\circ$$

$$\beta \approx 48^\circ$$

Odpowiedź: Przyprostokątna b ma długość $4\sqrt{5}$, a miary kątów w tym trójkącie wynoszą $\alpha \approx 42^\circ$ i $\beta \approx 48^\circ$.



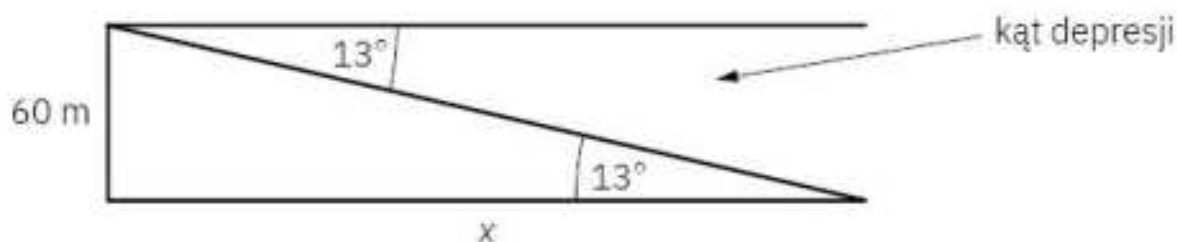
Ćwiczenie 3.

Z okna latarni morskiej znajdującego się na wysokości 60 m nad poziomem morza latarnik zauważył statek pod kątem depresji 13. W jakiej odległości od latarni znajduje się ten statek? Wynik zaokrąglij do całości.



Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



$\frac{60}{x} = \operatorname{tg} 13^\circ$ – z definicji funkcji tangens kąta ostrego obliczamy odległość statku od latarni oznaczoną x

$$x = \frac{60}{\operatorname{tg} 13^\circ}$$

$$x = \frac{60}{0,2308}$$

$$x \approx 259,965$$

$$x \approx 260$$

Odpowiedź: Statek znajduje się ok. 260 m od latarni.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



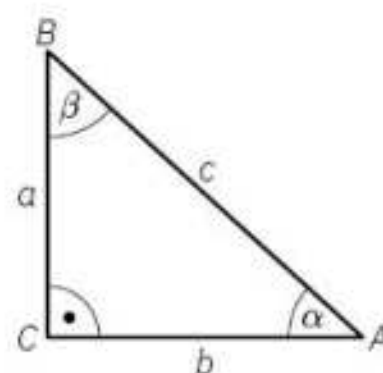
1. Rozwiąż trójkąt prostokątny, mając dane długości jego przyprostokątnych 5 cm i $5\sqrt{3}$ cm.

2. Dany jest trójkąt prostokątny ABC . Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta, jeśli:

a) $a = 3$, $\sin \alpha = 0,6$,

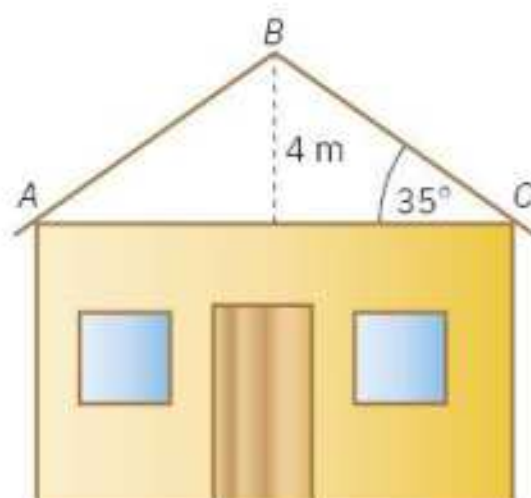
b) $b = 6$, $\cos \alpha = \frac{3}{4}$,

c) $a = 9$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$.



3. Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeśli długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta o mierze 60° jest równa 8 cm.
4. Przeciwprostokątna AB trójkąta prostokątnego ABC ma długość 12 cm, a cosinus kąta CAB jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.
5. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Rozwiąż ten trójkąt, jeśli:
- a) $\sphericalangle ABC = 35^\circ$, $AC = 8$; b) $\sphericalangle CAB = 56^\circ$, $AB = 12$.
6. Droga wznosi się pod kątem 18° . O ile metrów wyżej znajdzie się turysta po przebyciu 3 km tej drogi?
7. Pracownik huty, który stoi w odległości 0,5 km od komina i patrzy w górę pod kątem 8° , widzi wierzchołek tego komina. Jaka jest wysokość komina w metrach? Wynik zaokrąglaj do całości.
8. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 10 cm, a miara kąta ACB wynosi 120° . Oblicz wysokość poprowadzoną z wierzchołka C tego trójkąta.

9. Krawędź dwuspadowego dachu domu na rysunku obok tworzą razem odcinki AB i BC . Kąt nachylenia dachu z obu stron jest jednakowy. Wypuszki mają długość po 1 m z każdej strony. Oblicz długość krawędzi tego dachu.

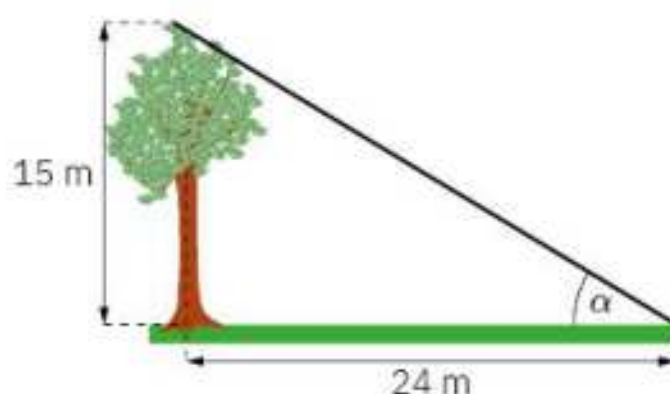


10. Długość przekątnej prostokąta $KLMN$ wynosi 10 cm, a jeden z kątów między przekątnymi ma miarę 30° . Wyznacz długości boków tego prostokąta.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm i 8 cm. Sinus kąta ostrego, jaki tworzy dłuższa przyprostokątna z przeciwprostokątną tego trójkąta, jest równy
 A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{5}$
- Jaką odległość musisz pokonać, jeżeli chcesz się znaleźć 200 m wyżej, a idziesz drogą wznoszącą się pod kątem 15° ?
 A. około 773 m B. około 793 m C. 77,3 m D. 80 m
- Drzewo mające 15 m wysokości rzuca cień o długości 24 m. W tej sytuacji kąt padania promieni słonecznych wynosi około
 A. 31° B. 32° C. 33° D. 30°



- Przekątna prostokąta o długości 8 cm tworzy z jednym z boków kąt o mierze 30° . Różnica długości boków tego prostokąta wynosi
 A. $4(\sqrt{3} + 1)$ cm B. $(4 - \sqrt{3})$ cm C. $4(\sqrt{3} - 1)$ cm D. $(\sqrt{3} - 4)$ cm

3.6. Zastosowania funkcji trygonometrycznych

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego nie zależą od wielkości trójkąta prostokątnego, a jedynie od wielkości odpowiedniego kąta. Fakt ten wykorzystuje się do obliczeń w planimetrii oraz w sytuacjach praktycznych.

Ćwiczenie 1.

Oblicz, ile metrów siatki potrzeba na ogrodzenie prostokątnej działki, jeśli ścieżka łącząca dwa przeciwległe wierzchołki działki ma długość 8 m i tworzy z jednym z boków działki kąt 30° .

Rozwiązanie:

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ – z definicji funkcji sinus kąta ostrego ob-

liczamy długość przyprostokątnej a

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$a = 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a = 4$$

$\cos \alpha = \frac{b}{c}$ – z definicji funkcji cosinus kąta ostrego obliczamy długość przyprostokątnej b

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

$$b = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = 4\sqrt{3}$$

$S = 2(a + b)$ – ze wzoru na obwód prostokąta obliczamy długość siatki

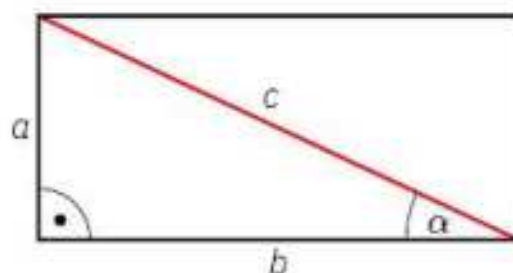
$$S = 2(4 + 4\sqrt{3})$$

$$S \approx 2(4 + 4 \cdot 1,73)$$

$$S \approx 21,86$$

$$S \approx 22 \text{ m}$$

Odpowiedź: Na ogrodzenie działki potrzeba około 22 m siatki.

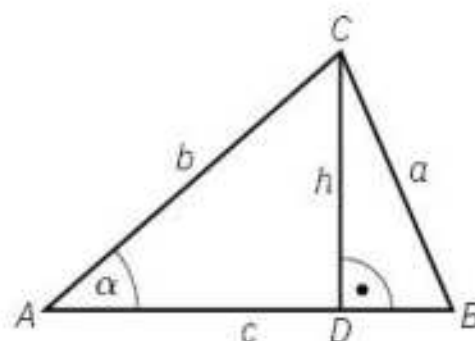


Ćwiczenie 2.

Wyznacz wzór na pole trójkąta ABC , w którym $AB = c$, $AC = b$ oraz $\angle BAC = \alpha$.

Rozwiązanie:

$$P = \frac{c \cdot h}{2} \text{ – korzystamy ze wzoru na pole dowolnego trójkąta}$$



$\frac{h}{b} = \sin \alpha$ – trójkąt ADC jest prostokątny

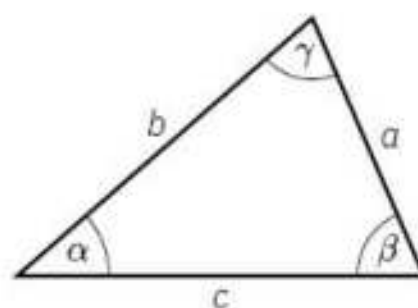
$$h = b \cdot \sin \alpha$$

$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \alpha$ – wzór na pole trójkąta o bokach długości b , c i kącie ostrym α między nimi

$$P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$$

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$



Ćwiczenie 3.

Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku.

Rozwiązanie:

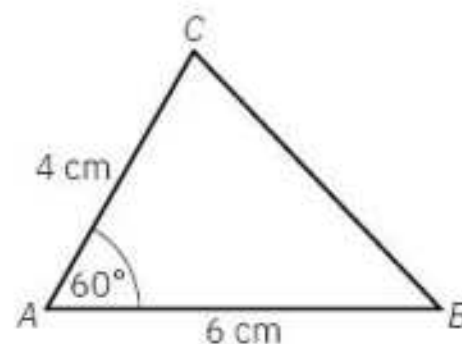
$P = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \angle BAC$ – korzystamy ze wzoru na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

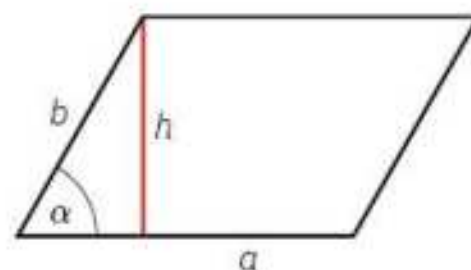
$$P = 6\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Pole trójkąta wynosi $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$.



W podobny sposób możemy wyznaczyć wzór na pole równoległoboku, jeśli dane są długości dwóch kolejnych boków i miara kąta ostrego zawartego między nimi.

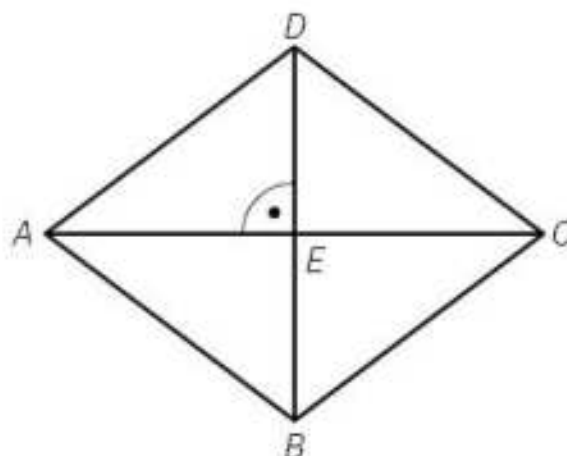
$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej o długości 18 cm i jednym kącie ostrym o mierze 45° .
2. Pole prostokąta wynosi $3\sqrt{3} \text{ cm}^2$, a jeden z kątów wyznaczonych przez przekątną ma miarę 60° . Oblicz obwód tego prostokąta.
3. Oblicz pole i obwód trapezu równoramienne, w którym przekątna o długości $5\sqrt{3} \text{ dm}$ jest prostopadła do ramienia i tworzy z dłuższą podstawą kąt o mierze 30° .

4. Dwa boki trójkąta mają długości 12 cm i 16 cm, a miara kąta między nimi wynosi 60° . Oblicz pole tego trójkąta.
5. Oblicz pole rombu o boku o długości 4 cm i mierze kąta ostrego 75° . Wynik zaokrąglij do części dziesiętnych.
6. Romb $ABCD$ ma bok o długości 12 cm. Tangens kąta DAE wynosi $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Wyznacz miary kątów tego rombu i oblicz jego pole.
7. Jedna z przekątnych rombu o polu $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ jest równa 6 cm. Oblicz miarę kąta ostrego tej figury.
8. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego, którego pole wynosi $100\sqrt{3} \text{ cm}^2$, a jeden z kątów ostrych ma miarę 60° .
9. Krótsza przekątna o długości $4\sqrt{2} \text{ cm}$ dzieli równoległobok o kącie ostrym 45° na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz obwód i pole równoległoboku.
10. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 7 cm i 3 cm, a kąt ostry tego trapezu ma miarę 45° . Oblicz pole i obwód tej figury.
11. W trapezie krótsza podstawa ma długość 4 cm, a kąty nachylenia ramion do dłuższej podstawy wynoszą 30° i 60° . Oblicz pole i obwód tego trapezu, jeśli jego wysokość jest równa $4\sqrt{3} \text{ cm}$.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

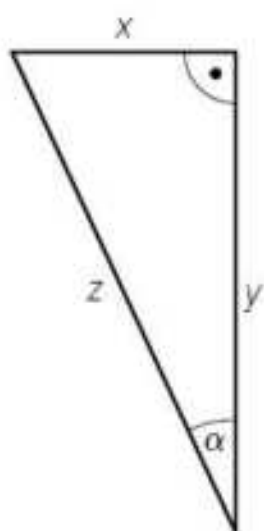
1. Przekątna prostokąta ma długość 10 cm i jest nachylona do jednego z boków pod kątem 30° . Zatem pole tego prostokąta wynosi
 A. $5\sqrt{3} \text{ cm}^2$ B. $25\sqrt{2} \text{ cm}^2$ C. $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$ D. $5\sqrt{2} \text{ cm}^2$
2. Bok rombu ma długość 8 cm, a jego pole wynosi 32 cm^2 , więc miara kąta ostrego tego rombu jest równa
 A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°
3. Przekątna trapezu równoramiennego o długości $6\sqrt{2} \text{ cm}$ tworzy z podstawami tego trapezu kąt 45° . Suma długości podstaw tego trapezu wynosi
 A. 6 cm B. 4 cm C. 8 cm D. 12 cm
4. Miara kąta ostrego równoległoboku wynosi 60° , a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli bok na odcinki o długościach 3 cm i 7 cm. Długość krótszego boku równoległoboku jest równa
 A. 6 cm B. 4 cm C. 8 cm D. 2 cm



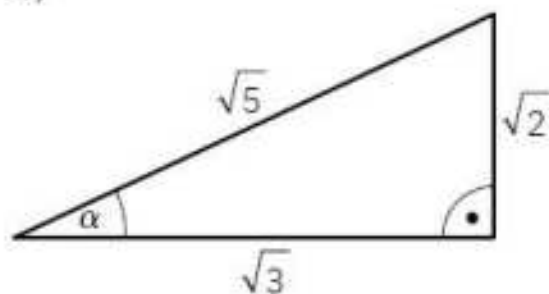
3.7. Zadania utrwalające

1. Zapisz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α dla podanych trójkątów.

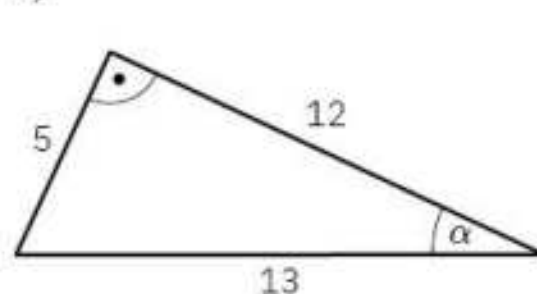
a)



b)



c)



2. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ$;

c) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ$;

b) $5(\sin 30^\circ - \cos 60^\circ)$;

d) $\frac{\operatorname{tg}^2 60^\circ + 2\operatorname{tg}^2 45^\circ}{20 \cdot \sin 30^\circ}$.

3. Wiedząc, że kąt α jest ostry, doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha}$

b) $\frac{(1 - \sin^2 \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$

4. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:

a) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$; b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$; d) $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$.

5. Wiedząc, że cosinus kąta ostrego α wynosi $\frac{1}{4}$, oblicz:

a) $2 \sin \alpha + 5 \operatorname{tg} \alpha$;

b) $\operatorname{tg} \alpha - 16 \sin^2 \alpha$;

c) $3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha$.

6. Wiedząc, że kąt α jest ostry, sprawdź, czy podana równość jest tożsamością.

a) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

b) $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$

c) $\frac{1}{1 - \cos \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$

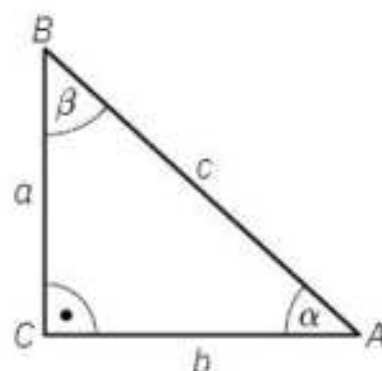
7. Rozwiąż trójkąt prostokątny, jeżeli dana jest:

a) przeciwprostokątna $c = 5$ cm i kąt $\alpha = 60^\circ$;

b) przyprostokątna $a = 10$ cm i kąt $\alpha = 30^\circ$;

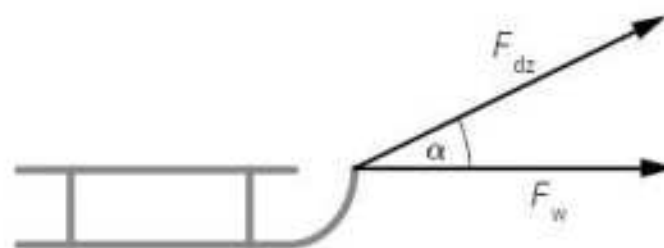
c) przyprostokątna $a = 5\sqrt{2}$ cm i przeciwprostokątna $c = 10$ cm.

8. Tyczkarz oparł 5-metrową tyczkę o ścianę w odległości 3,3 m od niej. Oblicz, pod jakim kątem została oparta tyczka.



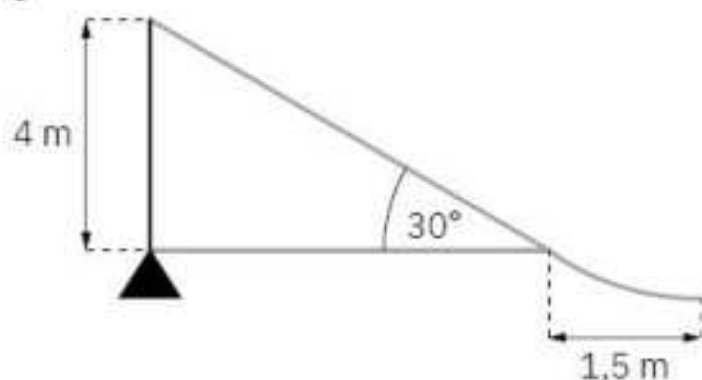
9. Lina o długości 12 m podtrzymuje maszt. Kąt nachylenia liny do podłoża ma miarę 53° . Na jakiej wysokości od podłoża jest zamocowana ta lina?

10. Marek ciągnie sanki, na których siedzi Marysia. Wartość siły wprowadzającej sanki w ruch wynosi 78 N (N – niuton, jednostka siły). Jaka jest wartość siły działania, jeżeli kąt α jest równy 32° ?

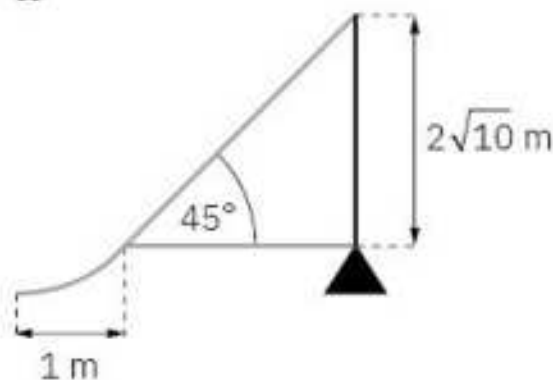


11. Na placu zabaw znajdują się dwie zjeżdżalnie. Która z nich jest dłuższa?

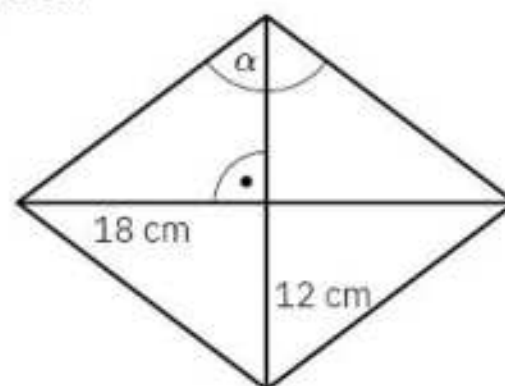
I



II



12. Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę 120° , a jego ramię – długość 8 cm . Oblicz pole tego trójkąta.
13. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 60° , a krótsza podstawa i ramię są długości a . Wyznacz długość przekątnej tego trapezu.
14. Wyznacz miarę kąta rozwartego rombu widocznego na rysunku.
15. Bok rombu ma długość 5 cm , a miara kąta ostrego wynosi 60° . Oblicz pole tego rombu.



16. W rombie o boku 8 cm kąt rozwarty jest dwa razy większy od kąta ostrego. Wyznacz długości przekątnych tej figury.
17. Kąt ostry równoległoboku o bokach o długości 6 cm i 5 cm ma miarę 30° . Oblicz pole tego równoległoboku.
18. Oblicz pole równoległoboku i długość krótszej przekątnej, jeżeli miara kąta ostrego wynosi 30° , a boki mają długości 8 cm i $2\sqrt{3}\text{ cm}$.
19. W trapezie równoramiennym przekątna o długości 8 cm tworzy z dłuższą podstawą kąt 30° . Oblicz pole trapezu.
20. Przez wierzchołek prostokąta, w którym jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego, poprowadzono prostą, która przecina dłuższy bok w takim punkcie, że dzieli prostokąt na trójkąt o polu 8 cm^2 i trapez o polu 24 cm^2 . Oblicz miarę kąta nachylenia poprowadzonej prostej do krótszego boku prostokąta.

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
1°	0,0175	0,9998	0,0175	31°	0,5150	0,8572	0,6009	61°	0,8746	0,5774	1,8040
2°	0,0349	0,9994	0,0349	32°	0,5299	0,8480	0,6249	62°	0,8829	0,4695	1,8807
3°	0,0523	0,9986	0,0524	33°	0,5446	0,8387	0,6494	63°	0,8910	0,4540	1,9626
4°	0,0698	0,9976	0,0699	34°	0,5592	0,8290	0,6745	64°	0,8988	0,4384	2,0503
5°	0,0872	0,9962	0,0875	35°	0,5736	0,8192	0,7002	65°	0,9063	0,4226	2,1445
6°	0,1045	0,9945	0,1051	36°	0,5878	0,8090	0,7265	66°	0,9135	0,4067	2,2460
7°	0,1219	0,9925	0,1228	37°	0,6018	0,7986	0,7536	67°	0,9205	0,3907	2,3559
8°	0,1392	0,9903	0,1405	38°	0,6157	0,7880	0,7813	68°	0,9272	0,3746	2,4751
9°	0,1564	0,9877	0,1584	39°	0,6293	0,7771	0,8098	69°	0,9336	0,3584	2,6051
10°	0,1736	0,9848	0,1763	40°	0,6428	0,7660	0,8391	70°	0,9397	0,3420	2,7475
11°	0,1908	0,9816	0,1944	41°	0,6561	0,7547	0,8692	71°	0,9455	0,3256	2,9042
12°	0,2079	0,9781	0,2126	42°	0,6691	0,7431	0,9004	72°	0,9511	0,3090	3,0777
13°	0,2250	0,9744	0,2309	43°	0,6820	0,7314	0,9325	73°	0,9563	0,2924	3,2709
14°	0,2419	0,9703	0,2493	44°	0,6947	0,7193	0,9657	74°	0,9613	0,2756	3,4874
15°	0,2588	0,9659	0,2679	45°	0,7071	0,7071	1,0000	75°	0,9659	0,2588	3,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	46°	0,7193	0,6947	1,0355	76°	0,9703	0,2419	4,0108
17°	0,2924	0,9563	0,3057	47°	0,7314	0,6820	1,0724	77°	0,9744	0,2250	4,3315
18°	0,3090	0,9511	0,3249	48°	0,7431	0,6691	1,1106	78°	0,9781	0,2079	4,7046
19°	0,3256	0,9455	0,3443	49°	0,7547	0,6561	1,1504	79°	0,9816	0,1908	5,1446
20°	0,3420	0,9397	0,3640	50°	0,7660	0,6428	1,1918	80°	0,9848	0,1736	5,6713
21°	0,3584	0,9336	0,3839	51°	0,7771	0,6293	1,2349	81°	0,9877	0,1564	6,3138
22°	0,3746	0,9272	0,4040	52°	0,7880	0,6157	1,2799	82°	0,9903	0,1392	7,1154
23°	0,3907	0,9205	0,4245	53°	0,7986	0,6018	1,3270	83°	0,9925	0,1219	8,1443
24°	0,4067	0,9135	0,4452	54°	0,8090	0,5878	1,3764	84°	0,9945	0,1045	9,5144
25°	0,4226	0,9063	0,4663	55°	0,8192	0,5736	1,4281	85°	0,9962	0,0872	11,4301
26°	0,4384	0,8988	0,4877	56°	0,8290	0,5592	1,4826	86°	0,9976	0,0698	14,3007
27°	0,4540	0,8910	0,5095	57°	0,8387	0,5446	1,5399	87°	0,9986	0,0523	19,0811
28°	0,4695	0,8829	0,5317	58°	0,8480	0,5299	1,6003	88°	0,9994	0,0349	28,6363
29°	0,4848	0,8746	0,5543	59°	0,8572	0,5150	1,6643	89°	0,9998	0,0175	57,2900
30°	0,5000	0,8660	0,5774	60°	0,8660	0,5000	1,7321				



GEOMETRIA ANALITYCZNA

4.1. Równanie prostej w postaci kierunkowej

Wśród funkcji liczbowych, które poznaliście w klasie pierwszej, możemy wymienić funkcję liniową. Wykresem tej funkcji jest prosta określona równaniem: $y = ax + b$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Równanie to nazywane jest równaniem kierunkowym prostej, zaś współczynnik a nazywany jest współczynnikiem kierunkowym tej prostej.

Jednak nie wszystkie proste, które można narysować w układzie współrzędnych, opisujemy za pomocą równania kierunkowego.

Ćwiczenie 1.

Narysuj prostą o równaniu:

a) $y = 2x - 4$;

b) $y = -3$;

c) $x = 2$.

Rozwiązanie:

a) $y = 2x - 4$

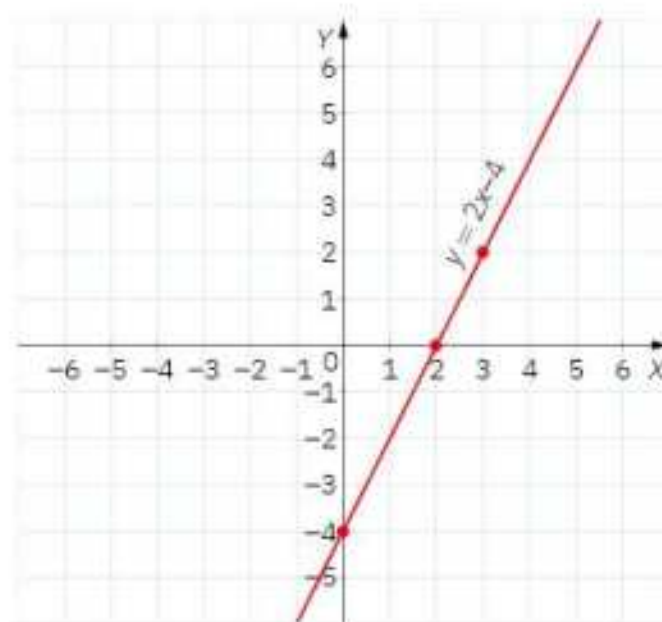
Wyznaczamy współrzędne co najmniej dwóch różnych punktów, które należą do prostej.

$$x = 0, y = 2 \cdot 0 - 4 = -4 \quad (0, -4)$$

$$x = 2, y = 2 \cdot 2 - 4 = 0 \quad (2, 0)$$

$$x = 3, y = 2 \cdot 3 - 4 = 2 \quad (3, 2)$$

Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty o wyznaczonych współrzędnych i rysujemy prostą, do której należą te punkty.



b) $y = -3$

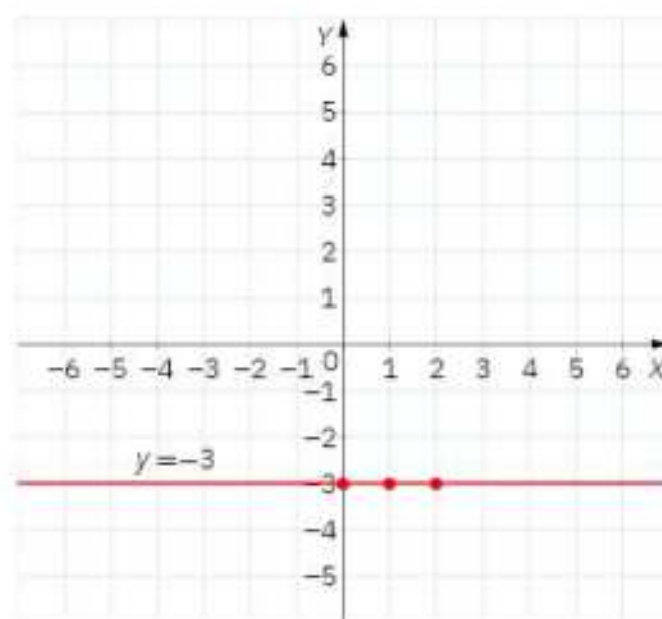
Wyznaczamy współrzędne co najmniej dwóch różnych punktów, które należą do prostej.

$$x = 0, y = -3 \quad (0, -3)$$

$$x = 1, y = -3 \quad (1, -3)$$

$$x = 2, y = -3 \quad (2, -3)$$

Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty o wyznaczonych współrzędnych i rysujemy prostą, do której należą te punkty.



c) $x = 2$

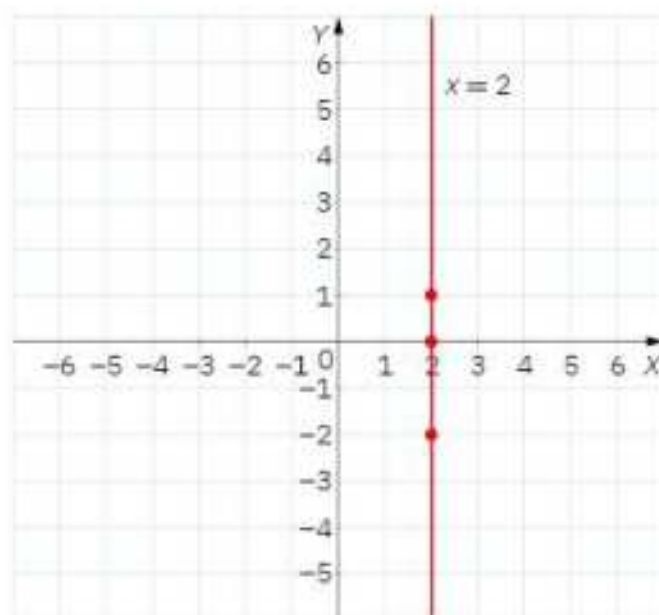
Wyznaczamy współrzędne co najmniej dwóch różnych punktów, które należą do prostej.

$$x = 2, y = -2 \quad (2, -2)$$

$$x = 2, y = 0 \quad (2, 0)$$

$$x = 2, y = 1 \quad (2, 1)$$

Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty o wyznaczonych współrzędnych i rysujemy prostą, do której należą te punkty.



Równanie kierunkowe prostej $y = ax + b$ dla $a = 0$ i $b \neq 0$ przyjmuje postać: $y = b$. Prosta opisana tym równaniem jest równoległa do osi X .

Równanie kierunkowe prostej $y = ax + b$ dla $a = 0$ i $b = 0$ przyjmuje postać: $y = 0$, a prosta opisana tym równaniem pokrywa się z osią X .

Prosta opisana równaniem $x = k$, dla $k \in \mathbb{R}$ jest równoległa do osi Y .

Ćwiczenie 2.

Wśród prostych określonych równaniami: $2x - y + 2 = 0$, $y = 8$, $y = \frac{1}{3}x + 1$ oraz $y + 0,5 = 0$ wskaż te, które są równoległe do osi X .

Rozwiązanie:

Wśród prostych określonych podanymi równaniami szukamy tych, których równanie można zapisać w postaci $y = b$ (b jest dowolną liczbą rzeczywistą).

Podane w zadaniu równania prostych: $2x - y + 2 = 0$, $y = 8$, $y = \frac{1}{3}x + 1$, $y + 0,5 = 0$ zapiszemy następująco: $y = 2x + 2$, $y = 8$, $y = \frac{1}{3}x + 1$ oraz $y = -0,5$. Proste o rów-

naniach $y = 8$ i $y = -0,5$ są zapisane w postaci $y = b$. Stąd wynika, że proste równoległe do osi X to $y = 8$ oraz $y + 0,5 = 0$.

Ćwiczenie 3.

Zapisz poniższe równania prostych w postaci kierunkowej i podaj wartości współczynnika kierunkowego każdej z tych prostych.

a) $x + 2y + 6 = 0$

b) $y + 5 = 0$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy y z każdego z równań i odczytujemy współczynnik kierunkowy prostej.

a) $y = -\frac{1}{2}x - 3$, $a = -\frac{1}{2}$

b) $y = -5$, $a = 0$

Ćwiczenie 4.

Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym a i przechodzącej przez punkt A , jeśli:

a) $a = 3$ i $A = (1, 2)$;

b) $a = -\frac{1}{2}$ i $A = (-2, 4)$.

Rozwiązanie:

a) $y = 3x + b$ – podstawiamy do równania prostej $y = ax + b$ liczbę $a = 3$

$2 = 3 \cdot 1 + b$ – podstawiamy współrzędne punktu A do równania prostej

$b = -1$ – wyznaczamy współczynnik b

$$y = 3x - 1$$

Odpowiedź: Prosta o równaniu $y = 3x - 1$ ma współczynnik kierunkowy równy 3 i przechodzi przez punkt A o współrzędnych $(1, 2)$.

b) $y = -\frac{1}{2}x + b$ – podstawiamy do równania prostej $y = ax + b$ liczbę $a = -\frac{1}{2}$

$4 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + b$ – podstawiamy współrzędne punktu A do równania prostej

$b = 3$ – wyznaczamy współczynnik b

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Odpowiedź: Prosta o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ma współczynnik kierunkowy równy $-\frac{1}{2}$ i przechodzi przez punkt A o współrzędnych $(-2, 4)$.

Ćwiczenie 5.

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B , jeśli

a) $A = (-1, 2)$ i $B = (2, -4)$

Rozwiązanie:

a) $2 = a \cdot (-1) + b$ – podstawiamy współrzędne punktu A do równania prostej

$$y = ax + b$$

$-4 = a \cdot 2 + b$ – podstawiamy współrzędne punktu B do równania prostej $y = ax + b$

$$\begin{cases} 2 = -a + b \\ -4 = 2a + b \end{cases} \quad \text{– rozwiązujemy układ równań z niewiadomymi } a \text{ i } b$$
$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B to $y = -2x$.

b) $A = (-2, 5)$ i $B = (1, 5)$

Rozwiązanie:

I sposób

$5 = a \cdot (-2) + b$ – podstawiamy współrzędne punktu A do równania prostej $y = ax + b$

$5 = a \cdot 1 + b$ – podstawiamy współrzędne punktu B do równania prostej $y = ax + b$

$$\begin{cases} 5 = -2a + b \\ 5 = a + b \end{cases} \quad \text{– rozwiązujemy układ równań z niewiadomymi } a \text{ i } b$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \end{cases}$$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B to $y = 5$.

II sposób

Punkty $A = (-2, 5)$ i $B = (1, 5)$ mają jednakowe rzędne (drugie współrzędne). Prosta przechodząca przez te punkty jest równoległa do osi X . Jej równanie to $y = 5$.

Ćwiczenie 6.

Podaj współrzędne punktów przecięcia prostej o danym równaniu z osiami układu współrzędnych.

a) $y = -2x + 3$

Rozwiązanie:

Oś Y : pierwsza współrzędna (x) punktu przecięcia prostej z osią Y jest równa 0

$y = -2 \cdot 0 + 3$ – do równania prostej $y = -2x + 3$ w miejsce x podstawiamy wartość 0
 $y = 3$

Współrzędne punktu przecięcia prostej z osią Y to $(0, 3)$

Oś X : druga współrzędna (y) punktu przecięcia prostej z osią X jest równa 0

$0 = -2x + 3$ – do równania prostej $y = ax + b$ w miejsce y podstawiamy wartość 0
 $x = 1\frac{1}{2}$

Współrzędne punktu przecięcia prostej z osią X to $(1\frac{1}{2}, 0)$.

b) $y = -6$

Rozwiązanie:

Prosta $y = -6$ jest prostopadła do osi Y , współrzędne punktu przecięcia prostej z osią Y to $(0, -6)$.

Prosta $y = -6$ jest też równoległa do osi X , nie pokrywa się z nią, a więc nie przecina tej osi.

Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$ przecina oś X w punkcie o współrzędnych $(-\frac{b}{a}, 0)$, a oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, b)$.





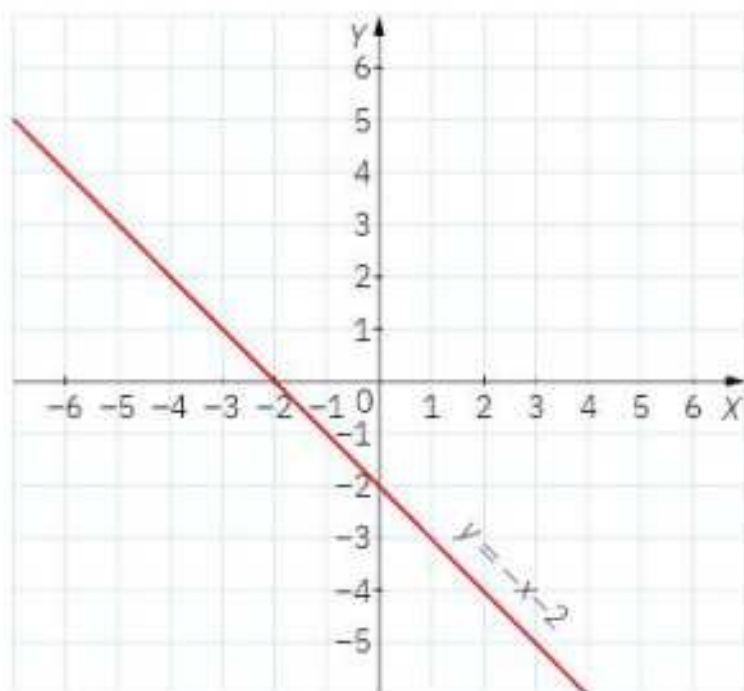
- 1.** Narysuj prostą o równaniu
a) $y = -3x + 2$; b) $y = 4$.
- 2.** Spośród prostych o równaniach $y = -1 + 2x$, $y = -4$, $x = -5$, $y = 2,5$, $x = 1\frac{1}{3}$, $y = x - 7$ wskaż te, które są prostopadłe do osi Y.
- 3.** Sprawdź rachunkowo i graficznie, który spośród punktów: $A = (-1, 3)$, $B = (-3, 7)$, $C = \left(2\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}\right)$ należy do prostej o równaniu $y = -x + 4$.
- 4.** Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (3, -2)$ i równoległej do osi X.
- 5.** Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym a i przechodzącej przez punkt A, jeśli:
a) $a = -2$ i $A = (-1, 4)$; b) $a = 1\frac{1}{2}$ i $A = (-2, 0)$.
- 6.** Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B, jeśli:
a) $A = (0, -4)$ i $B = (5, 1)$; b) $A = (-1, 3)$ i $B = (2, 3)$.
- 7.** Spośród prostych o równaniach $y = 6 - 2x$, $y = -2$, $y = 0$, $y = \frac{1}{3}x - 2$ wybierz te, do których należy punkt o współrzędnych
a) $(0, -2)$; b) $(6, 0)$.
- 8.** Podaj współrzędne punktów przecięcia prostej o podanym równaniu z osiami układu współrzędnych.
a) $y = 1 + 2x$; c) $y = \frac{3}{4}$;
b) $y = -1$; d) $y = -5x - 5$.
- 9.** Oblicz wartość współczynnika b w równaniu $y = -2x + b$, opisującym prostą, do której należy punkt $A = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- 10.** Oblicz wartość współczynnika kierunkowego prostej opisanej równaniem $y = ax + 3$, do której należy punkt $A = (-1, 4)$.
- 11.** Dane są punkty $A = (-9, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 4)$. Wykaż, że punkty te są współliniowe.
- 12.** Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ przecina oś X w punkcie o współrzędnych $(1, 0)$, a oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, -2)$. Wyznacz wartości współczynników a i b .

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

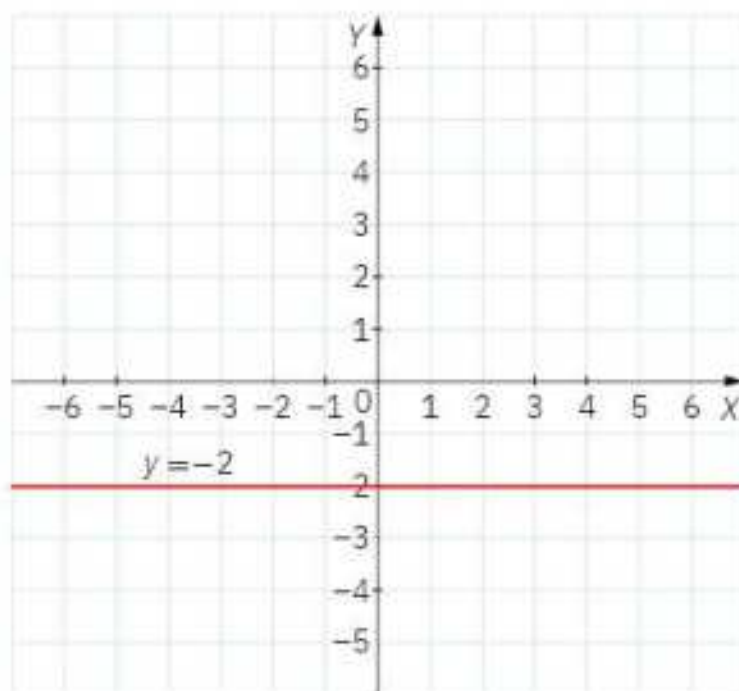


- Do prostej określonej równaniem $y = -2x - 2$ nie należy punkt o współrzędnych
 A. $(0, -2)$ B. $(-1, 0)$ C. $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$ D. $(-\frac{1}{2}, 3)$
- Do prostej o równaniu $y = x + b$ należy punkt o współrzędnych $(1, -2)$. Współczynnik b tej prostej jest równy
 A. 1 B. -3 C. -2 D. -1
- Prostą o równaniu $y = -x - 2$ przedstawiono na rysunku

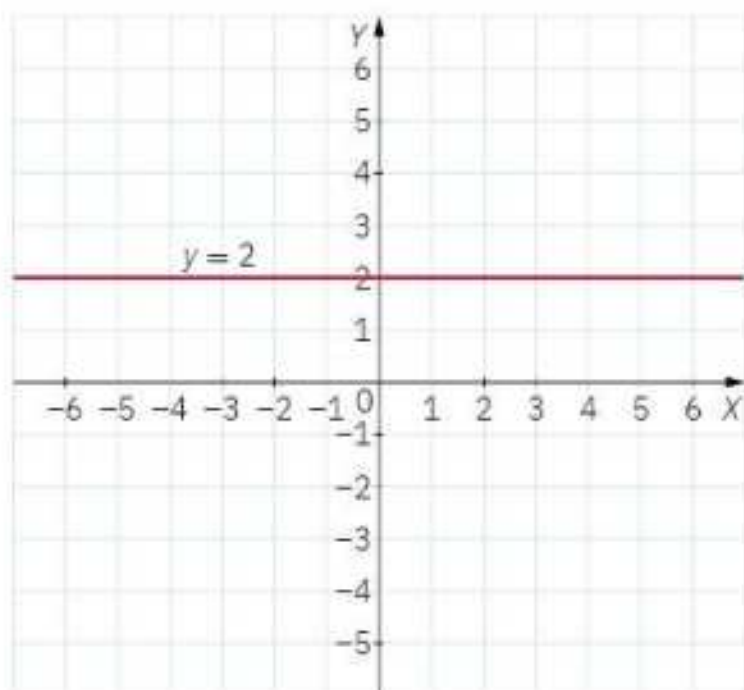
A.



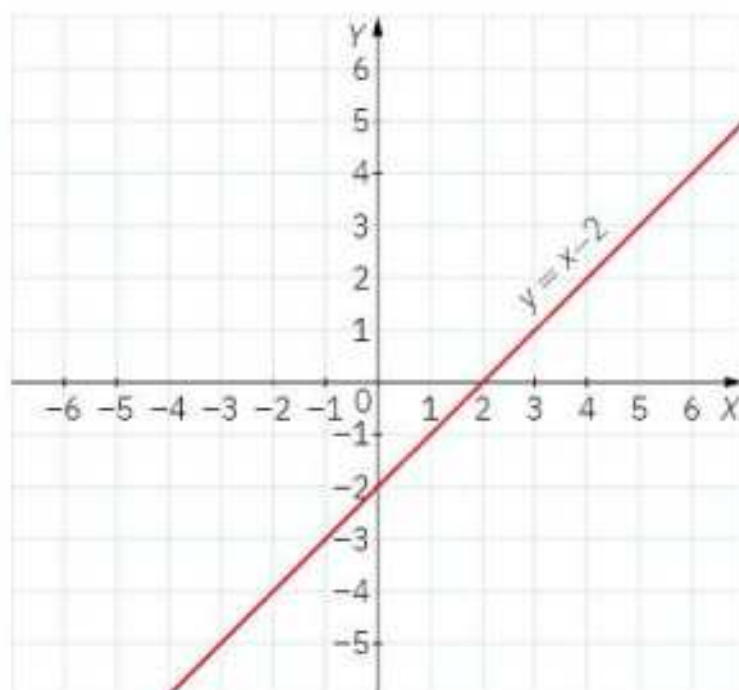
C.



B.



D.



- Prostą, która przechodzi przez punkty $A = (1, 6)$ oraz $B = (4, 0)$, jest
 A. $y = -2x + 8$ B. $y = 8x - 2$ C. $y = 2x + 8$ D. $y = -2x - 8$

4.2. Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie

Proste na płaszczyźnie mogą być równoległe lub mogą się przecinać. Te, które przecinają się pod kątem 90° , to proste prostopadłe.

Ćwiczenie 1.

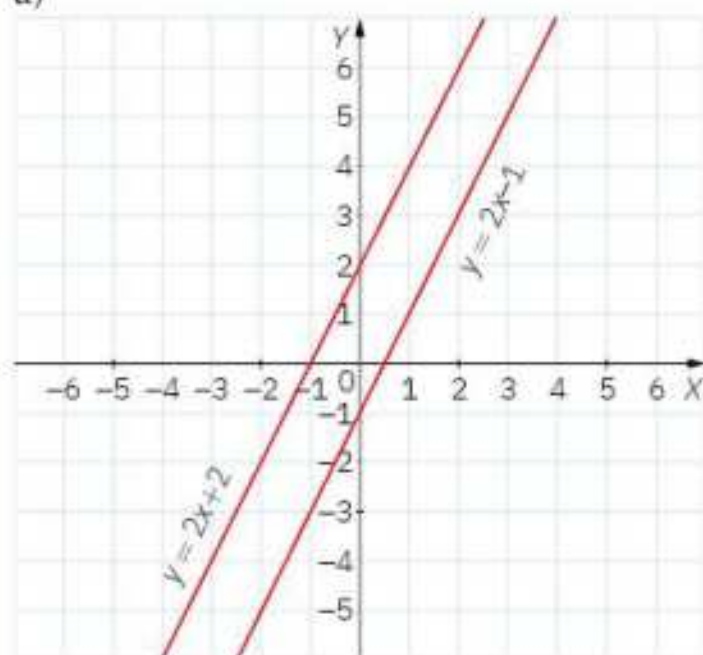
Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste o podanych równaniach i określ ich wzajemne położenie.

a) $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 1$

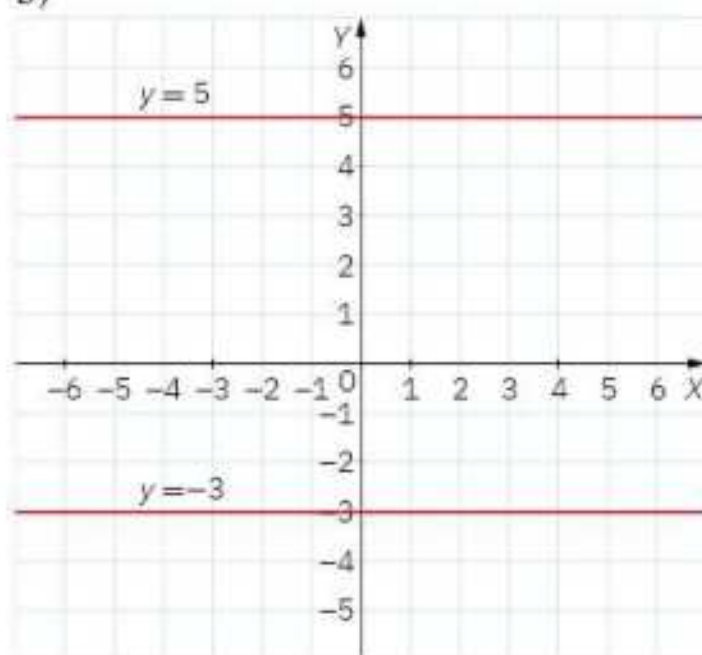
b) $y = 5$ i $y = -3$

Rozwiązanie:

a)



b)



Proste $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 1$ są równoległe oraz proste $y = 5$ i $y = -3$ są równoległe. Dla pierwszej pary prostych równoległych współczynnik kierunkowy każdej z nich jest równy 2, a dla drugiej pary prostych równoległych wynosi 0.

Proste, które się pokrywają, to także proste równoległe. Takie proste mają identyczne równania w postaci kierunkowej.



Proste zapisane w postaci kierunkowej $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wówczas, gdy mają jednakowe współczynniki kierunkowe ($a_1 = a_2$).

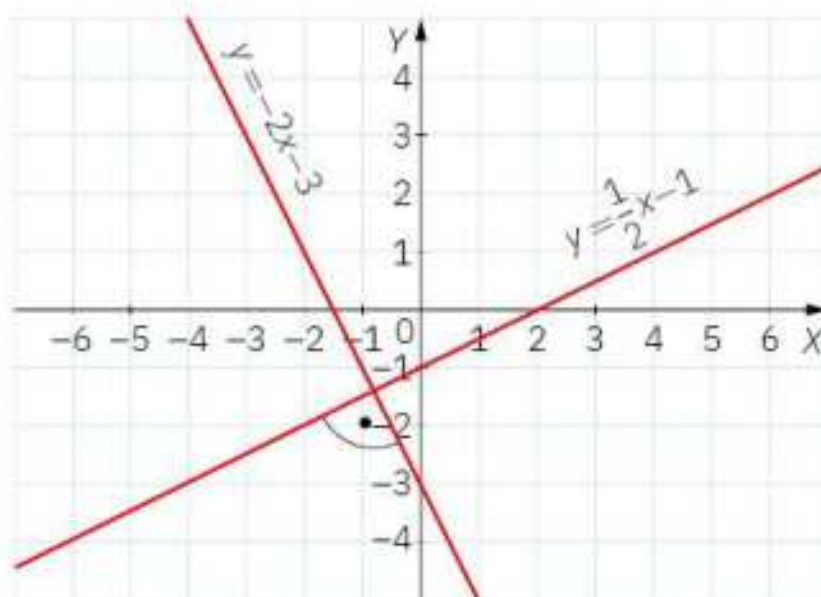


Proste o postaci kierunkowej $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wówczas, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek: $a_1 \cdot a_2 = -1$ (inaczej: $a_1 = -\frac{1}{a_2}$).

Ćwiczenie 2.

Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste o podanych równaniach $y = -2x - 3$ i $y = \frac{1}{2}x - 1$ oraz określ ich wzajemne położenie.

Rozwiązanie:

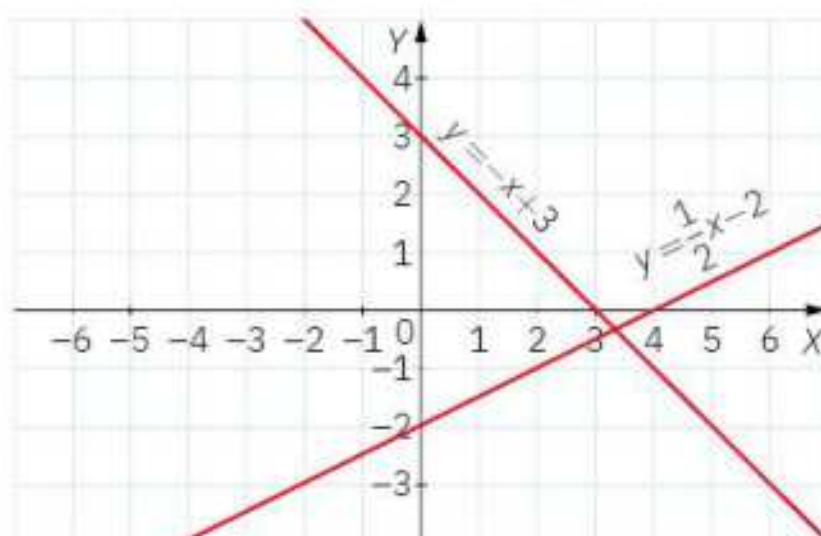


Proste $y = -2x - 3$ i $y = \frac{1}{2}x - 1$ są prostopadłe. Współczynniki kierunkowe tych prostych spełniają warunek $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

Ćwiczenie 3.

Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste o równaniach $y = -x + 3$ i $y = \frac{1}{2}x - 2$ i określ ich wzajemne położenie.

Rozwiązanie:



Proste przecinają się pod innym kątem niż 90° .

Ćwiczenie 4.

Napisz równanie prostej równoległej do prostej opisanej równaniem $y = -\frac{1}{4}x + 4$ i przechodzącej przez punkt $A = (2, -6)$.

Rozwiązanie:

$a_2 = a_1 = -\frac{1}{4}$ – określamy wartość współczynnika kierunkowego prostej

$y = -\frac{1}{4}x + b$ – określamy równaniem proste równoległej do prostej o równaniu

$$y = -\frac{1}{4}x + 4$$

$-6 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b$ – wyznaczamy wartość współczynnika b ; wiemy, że prosta równoległa do podanej przechodzi przez punkt A o współrzędnych $x = 2$ i $y = -6$

$b = -5\frac{1}{2}$ – obliczamy wartość współczynnika b

Odpowiedź: Prosta o równaniu $y = -\frac{1}{4}x - 5\frac{1}{2}$ jest równoległa do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{4}x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (2, -6)$.

Ćwiczenie 5.

Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej opisanej równaniem $y = -\frac{2}{3}x + 4$ i przechodzącej przez punkt $A = (4, 1)$.

Rozwiązanie:

$a_1 = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ – obliczamy wartość współczynnika kierunkowego prostej

prostopadłej

$1 = \frac{3}{2} \cdot 4 + b$ – wyznaczamy wartość współczynnika b ; wiemy, że prosta prostopadła do podanej przechodzi przez punkt A o współrzędnych $x = 4$ i $y = 1$

$b = -5$ – obliczamy wartość współczynnika b

Odpowiedź: Prosta o równaniu $y = \frac{3}{2}x - 5$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{2}{3}x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (4, 1)$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Wśród prostych o równaniach $y=3$, $y=-2x+3$, $y=-2x-2$, $y=-2$ wskaż proste równoległe.
2. Wśród prostych o równaniach $y=-4x+1$, $y=4x+3$, $y=-2$, $y=\frac{1}{4}x-2$, $y=-\frac{1}{2}$ wskaż proste prostopadłe.
3. Zapisz równanie prostej, która przechodzi przez dany punkt A i jest równoległa do prostej określonej wskazanym równaniem:
a) $y=2-3x$, $A=(1, 4)$; b) $y=-8$, $A=(-2, 2)$.
4. Podaj równanie prostej, do której należy dany punkt $A=(2, -1)$ i która jest prostopadła do prostej określonej równaniem: $y=-2x+\sqrt{3}$.
5. W układzie współrzędnych dane są punkty $A=(-1, -2)$, $B=(3, 2)$, $C=(-2, 3)$, które są wierzchołkami trójkąta ABC .
a) Napisz równanie prostej, w której zawiera się podstawa AB .
b) Napisz równanie prostej, w której zawiera się wysokość poprowadzona z wierzchołka C na podstawę AB .
6. Dane są proste o równaniach $y=-\frac{1}{5}x+1$, $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ oraz $y=-\frac{1}{15}x$. Wskaż wśród nich prostą, która jest:
a) równoległa do prostej o równaniu $y=\frac{x}{3}-6$;
b) prostopadła do prostej o równaniu $y=5x+1$.
7. Napisz równanie prostej k przechodzącej przez punkty A i B oraz prostej l przechodzącej przez punkty C i D . Określ wzajemne położenie tych prostych, gdy:
a) $A=(0, 3)$, $B=(3, 0)$, $C=(-2, 2)$, $D=(1, -1)$;
b) $A=(5, -5)$, $B=(-2, -5)$, $C=(-3, 2)$, $D=(0, 2)$.
8. Wyznacz liczbę m , jeśli proste o równaniach $y=-9x+3$ i $y=m^2x+5$ są prostopadłe.
9. Wyznacz liczbę m , jeśli proste o równaniach $y=5x-2$ i $y=(3-m)x-7$ są równoległe.
10. Napisz równanie prostej równoległej do prostej $y=4x-5$ przechodzącej przez punkt $A=(2, 0)$ oraz równanie prostej prostopadłej do tych prostych przechodzącej przez punkt $B=(0, -2)$.
- 11*. Napisz równanie symetralnej odcinka AB , jeśli $A=(0, -2)$, $B=(4, 0)$.

Wskazówka. Środek odcinka o końcach w punktach $A=(x_A, y_A)$ i $B=(x_B, y_B)$ ma współrzędne $S=\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Parą prostych równoległych są proste o równaniach

A. $y = 4 - 5x$ i $y = 4x - 5$	C. $y = 8$ i $y = -7x + 8$
B. $y = \frac{7}{8}x - 1$ i $y = \frac{7}{8}x$	D. $y = -0,2x$ i $y = -0,2$
- Parą prostych prostopadłych są proste o równaniach

A. $y = 0,5x - 5$ i $y = -0,5x + 5$	C. $y = 0,3x + 0,3$ i $y = -3\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$
B. $y = \frac{2}{3}x$ i $y = 1,5x + 2$	D. $y = 5$ i $y = -\frac{1}{5}x$
- Prostą, do której należy punkt $A = (-3, -4)$ i która jest równoległa do prostej $y = 2$, opisuje równanie

A. $y = 2x + 2$	B. $y = -4$	C. $y = -\frac{1}{2}x$	D. $y = 2x$
-----------------	-------------	------------------------	-------------
- Prostą, do której należy punkt $A = (2, 5)$ i która jest prostopadła do prostej $y = -x$, opisuje równanie

A. $y = 5x + 2$	B. $y = -x + 5$	C. $y = 2$	D. $y = x + 3$
-----------------	-----------------	------------	----------------

4.3. Punkt wspólny dwóch prostych

Ćwiczenie 1.

Znajdź punkt należący do obu prostych o równaniach $y = x - 4$ i $y = -x + 6$.

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 6 \\ -x + 6 = x - 4 \\ y = -x + 6 \\ x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Odpowiedź: Wspólny punkt tych prostych ma współrzędne $x = 5$ i $y = 1$.

Ćwiczenie 2.

Określ, ile punktów wspólnych mają proste o równaniach $y = -x + 3$ i $y = -x - 3$.

Rozwiązanie:

I sposób

Zauważamy, że proste mają jednakowy współczynnik kierunkowy $a = -1$ i różne współczynniki b . Proste te są więc równoległe i nie mają punktów wspólnych.

II sposób

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x - 3 \\ -x - 3 = -x + 3 \\ y = -x - 3 \\ 0 = 6 \text{ - równanie sprzeczne} \\ y = -x - 3 \end{cases}$$

Odpowiedź: Te proste nie mają punktu wspólnego.

Ćwiczenie 3.

Spośród prostych k , l , m danych równaniami $x + y = 2$, $y = -x$ oraz $y = -x + 2$ wybierz te, które mają nieskończenie wiele punktów wspólnych.

Rozwiązanie:

Równanie prostej k : $x + y = 2$ zapisujemy w postaci kierunkowej $y = -x + 2$. Zauważamy, że równanie kierunkowe tej prostej jest takie samo, jak równanie kierunkowe prostej m : $y = -x + 2$. Stąd wnioskujemy, że proste o równaniach $x + y = 2$ i $y = -x + 2$ pokrywają się, a więc mają nieskończenie wiele punktów wspólnych.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Narysuj w jednym układzie współrzędnych proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -x + 3$. Wyznacz współrzędne punktu należącego do obu tych prostych.
2. Sprawdź, czy punkt o współrzędnych $(3, 2)$ jest punktem przecięcia prostych o równaniach:
a) $y = x - 1$ i $y = 5x - 13$; b) $y = -2x + 5$ i $y = 3x - 3$.
3. Wyznacz punkt wspólny prostych o równaniach $y = 3x - 2$ i $y = 6$.
4. W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (1, 0)$, $B = (-1, -6)$, $C = (-3, -2)$, $D = (-6, -1)$. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia prostych AB i CD .



5. Prosta o równaniu $y = 2$ przecina proste o równaniach $y = -\frac{1}{2}x - 1$ i $y = -2x - 2$ odpowiednio w punktach A i B . Wyznacz współrzędne punktów A i B .
6. W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-2, 0)$ i $B = (1, 3)$. Prosta k jest prostopadła do prostej AB i przechodzi przez punkt $C = (0, -4)$. Wyznacz punkt przecięcia prostej AB i prostej k .
7. Wyznacz współrzędne punktu A , który jest punktem przecięcia prostych o równaniach $y = 1\frac{1}{2}x - 8\frac{1}{2}$ i $y = -2x + 2$. Następnie napisz równanie prostej, która przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do osi Y .
8. Punkty $A = (-4, -1)$, $B = (2, -1)$, $C = (4, 3)$, $D = (-2, 3)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu S , który jest punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Punktem wspólnym prostych o równaniach $y = -x + 5$ i $y = 3x + 1$ jest punkt o współrzędnych
 A. $(-1, 4)$ B. $(1, -4)$ C. $(4, 1)$ D. $(1, 4)$
2. Punkt o współrzędnych $(1, 2)$ jest punktem przecięcia prostych o równaniach
 A. $y = 1$ i $y = 2$ C. $y = 2$ i $y = x + 1$
 B. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i $y = 1$ D. $y = -2x$ i $y = 2x$
3. Dane są punkty $A = (0, 5)$ i $B = (1, 3)$. Współrzędne punktu przecięcia prostej AB z osią X to
 A. $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(2\frac{1}{2}, 0\right)$ C. $\left(-2\frac{1}{2}, 0\right)$ D. $\left(0, -2\frac{1}{2}\right)$
4. Ile punktów wspólnych mają proste o równaniach $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ i $x = 3y + 1$?
 A. nieskończenie wiele C. 1
 B. 0 D. 2

4.4. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB .

Ćwiczenie 1.

Oblicz odległość między punktami $A = (-2, 1)$ i $B = (2, 4)$.

Rozwiązanie:

Rysujemy odcinek AB w układzie współrzędnych. Do odcinka AB dorysowujemy dwa odcinki: AC i CB równoległe do odpowiednich osi układu współrzędnych.

Odczytujemy długość odcinków AC i CB :

$$AC = 4 \text{ i } CB = 3$$

Zapisujemy równość z twierdzenia Pitagorasa dla narysowanego trójkąta prostokątnego:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa:

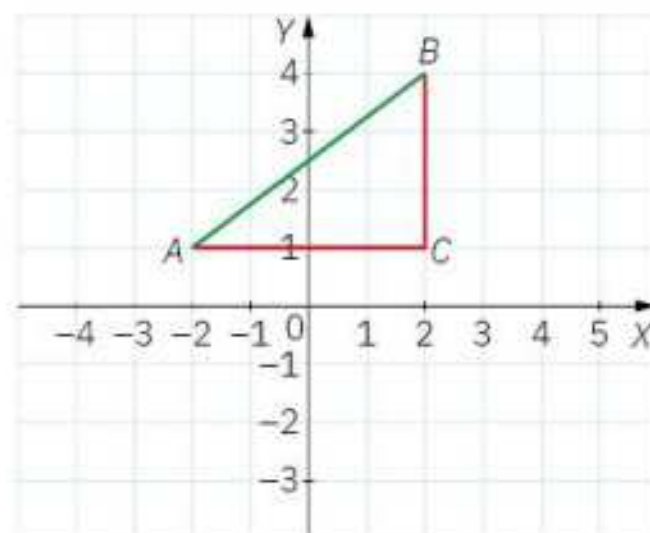
$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AB^2 = 16 + 9$$

$$AB^2 = 25$$

$$AB = 5$$

Odpowiedź: Odległość między punktami A i B wynosi 5.



Ćwiczenie 2.

Oblicz odległość między punktami $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$.

Rozwiązanie:

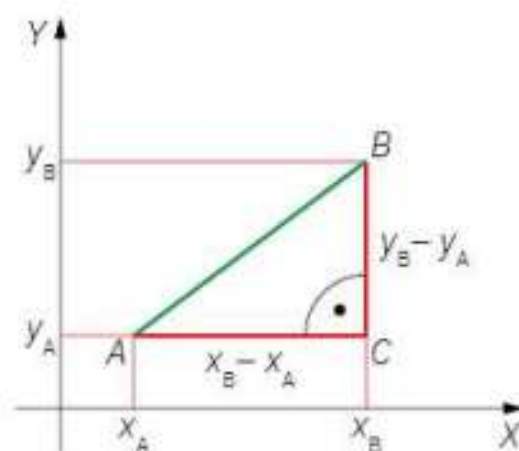
Rysujemy odcinek AB w układzie współrzędnych. Do odcinka AB dorysowujemy odcinki: AC i CB równoległe do odpowiednich osi układu współrzędnych.

Odczytujemy długości odcinków AC i CB . Zapisujemy

równość z twierdzenia Pitagorasa dla narysowanego trójkąta prostokątnego:

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Wyznaczamy odległość między punktami A i B : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



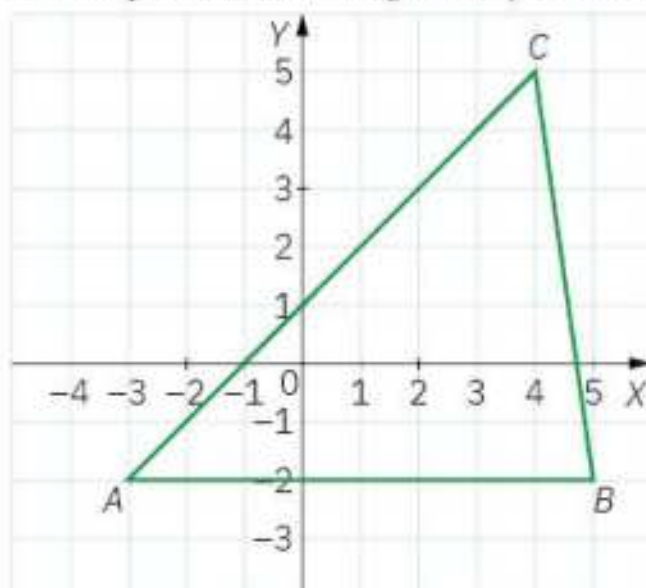


Odległość między punktami $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ w układzie współrzędnych wyraża się za pomocą wzoru:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz obwód trójkąta ABC przedstawionego na rysunku.



Rozwiązanie:

Odczytujemy współrzędne punktów A, B, C :

$$A = (-3, -2), B = (5, -2), C = (4, 5)$$

Obliczamy długość odcinka AB :

$$AB = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{64 + 0} = 8$$

Obliczamy długość odcinka BC :

$$BC = \sqrt{(4 - 5)^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Obliczamy długość odcinka AC :

$$AC = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

Obliczamy obwód trójkąta ABC : $8 + 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8 + 12\sqrt{2}$

Odpowiedź: Obwód trójkąta ABC wynosi $8 + 12\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 4.

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny:

$$A = (1, -2), B = (4, 1), C = (-1, 3)$$

Rozwiązanie:

Obliczamy długości odcinków AB, BC, AC :

$$AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Porównujemy długości odcinków: $BC = AC$

Odpowiedź: Trójkąt ABC jest równoramienny.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



- Oblicz odległość między punktami A i B .
 a) $A = (2, 3), B = (8, 11)$ c) $A = (-4, -6), B = (0, 2)$
 b) $A = (-1, 3), B = (1, -2)$ d) $A = (3, -2), A = (-8, -4)$
- Dany jest punkt $A = (-4, 1)$. Oblicz długość odcinka AB , jeśli jego środkiem jest punkt $S = (-1, 4)$.
- Oblicz odległość punktu A od środka odcinka KL , gdzie $A = (-1, 3), K = (-2, -8), L = (4, 6)$.
- Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A = (-2, 1), B = (1, -3), C = (2, 4)$. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.
- Punkty $A = (-3, 2), B = (5, -2), C = (3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.
- Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny.
 a) $A = (1, 2), B = (5, 1), C = (3, 4)$ b) $A = (-1, 1), B = (6, -3), C = (2, 3)$
- Punkty A i B są kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz pole i obwód tego kwadratu, jeżeli:
 a) $A = (-5, -1), B = (0, 11)$; b) $A = (-9, 5), B = (1, -5)$.
- Punkty $A = (5, -6), C = (17, 10)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz pole i obwód kwadratu.
- Punkty $A = (0, 1), B = (2, -2), C = (4, 1), D = (2, 4)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że ten czworokąt jest rombem. Oblicz jego pole.
- Wierzchołek C trójkąta ABC jest punktem przecięcia się prostych o równaniach $y = x + 2$ i $y = -3x + 6$, a wierzchołki A i B są punktami przecięcia się tych prostych z osią X . Oblicz obwód trójkąta ABC .

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

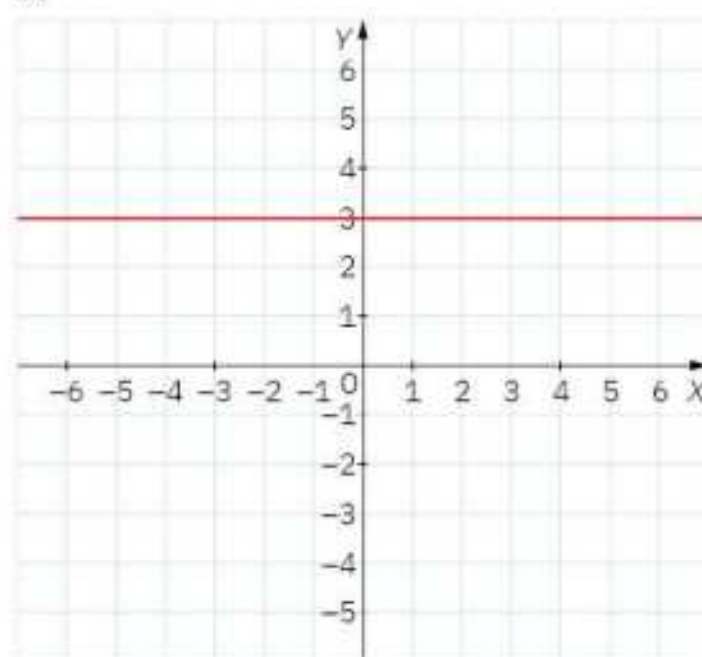
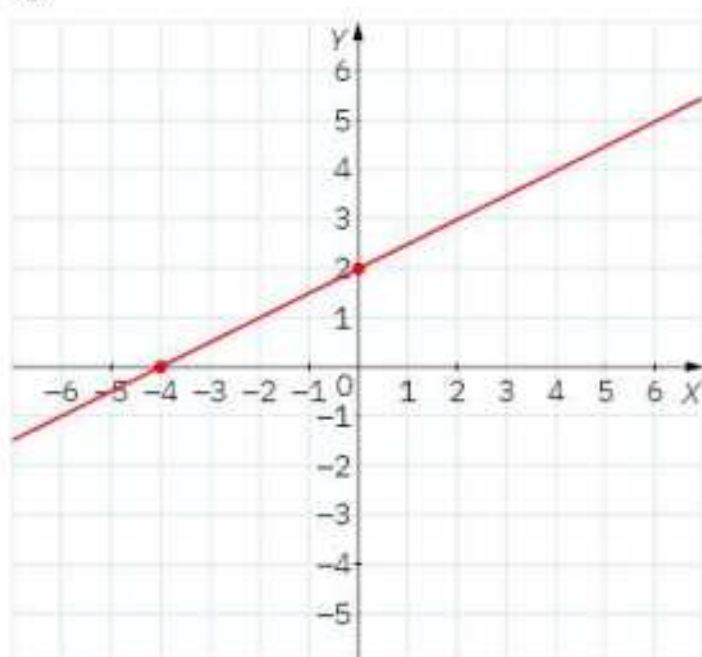


- Końcami odcinka AB są punkty $A = (-3, -1), B = (2, 4)$. Odcinek ten ma długość
 A. $2\sqrt{3}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{2}$

2. Punkty $A = (-3, 1)$ i $B = (1, -3)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Jedną z wysokości tego trójkąta ma długość
 A. $2\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{6}$
3. Wierzchołkami prostokąta $ABCD$ są punkty $A = (-1, -3)$, $B = (4, -3)$, $C = (4, 3)$. Obwód tego prostokąta wynosi
 A. 22 B. 20 C. $22\sqrt{2}$ D. $20\sqrt{2}$
4. Pole trójkąta prostokątnego ABC o wierzchołkach w punktach $A = (0, -2)$, $B = (3, 1)$, $C = (1, 3)$ jest równe
 A. 6 B. $2\sqrt{10}$ C. 8 D. $8\sqrt{2}$

4.5. Zadania utrwalające

1. Narysuj prostą o równaniu:
 a) $y = \frac{1}{3}x + 2$; b) $y = 2,5$.
2. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-4, 3)$ i prostopadłej do osi Y .
3. Oblicz wartość współczynnika b prostej opisanej równaniem $y = \frac{2}{3}x + b$, do której należy punkt $A = \left(-1\frac{1}{2}, 0\right)$.
4. Oblicz wartość współczynnika a prostej opisanej równaniem $y = ax - 2$, która przechodzi przez punkt $A = (1, 3)$.
5. Na rysunkach przedstawiono pewne proste. Napisz równania tych prostych.



- 16.** Wierzchołkami czworokąta $ABCD$ są punkty $A = (-1, -2)$, $B = (1, -5)$, $C = (3, -2)$, $D = (1, 1)$.
- Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest rombem.
 - Oblicz pole czworokąta $ABCD$.
- 17.** Punkty $A = (-4, 0)$ i $C = (1, -5)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz długość promienia koła opisanego na tym kwadracie.
- 18.** Punkty $A = (1, -2)$ i $B = (4, 1)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Oblicz obwód i pole tego trójkąta.
- 19.** Dane są punkty $A = (-1, 2)$, $B = (3, 0)$ i $C = (2, 3)$.
- Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoramienny i prostokątny.
 - Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.
 - Wyznacz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- 20*.** Punkty $A = (-4, 4)$, $B = (5, -5)$, $C = (4, -1)$, $D = (0, 3)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że ten czworokąt jest trapezem równoramiennym.

ODPOWIEDZI

1. UKŁADY RÓWNAŃ

1.1. Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

1. a) np. $x = 1$ i $y = 0$, $x = 2$ i $y = -3$, b) np. $x = 4$ i $y = 4$, $x = -1$ i $y = -6$, c) np. $x = 5$ i $y = 8$, $x = 0$ i $y = 4$; 2. a) $x + y = 8$, b) $\frac{1}{3}y = \frac{1}{2}x - 1$, c) $2a + b = 15$; 3. a) $x = 0$ i $y = 6$, $x = 1$ i $y = 5$, $x = 2$ i $y = 4$, $x = 3$ i $y = 3$, $x = 4$ i $y = 2$, $x = 5$ i $y = 1$, $x = 6$ i $y = 0$, b) $x = 0$ i $y = 3$, $x = 1$ i $y = 2$, $x = 2$ i $y = 1$, $x = 3$ i $y = 0$, c) $x = 0$ i $y = 2$, $x = 4$ i $y = 1$, $x = 8$ i $y = 0$; 4. a) nie, b) nie, c) tak, d) nie; 5. tak; 6. a) $\begin{cases} x = 5y \\ x - y = 8 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 25\%y = 50\%x \\ 20\%x + 60\%y = 10 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 2a + 2b = 20 \\ a - b = 4 \end{cases}$; 7. para liczb $x = 2$ i $y = -1$ nie spełnia obu układów równań.

Z.S.: 1. D; 2. A; 3. B; 4. B.

1.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

1. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 14 \end{cases}$; 2. a) $x = 3,5 - \frac{1}{2}y$, $y = 7 - 2x$, b) $x = 3 + y$, $y = x - 3$, c) $x = \frac{1}{6}y - 2$, $y = 6x + 12$, d) $x = 4y$, $y = \frac{1}{4}x$, e) $x = \frac{5}{6}y$, $y = \frac{6}{5}x$, f) $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y$, $y = 3 - 2x$; 3. a) $\begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, e) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 10 \end{cases}$, f) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$; 4. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = -7 \\ y = 8 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$, e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, f) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$; 5. a) $\begin{cases} a + b = 30 \\ a - 5 = b + 7 \end{cases}$, $a = 21$, $b = 9$; b) $\begin{cases} k - m = 4 \\ k = 2m \end{cases}$, $m = 4$, $k = 8$; 6. a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$; 7. a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = -6 \\ y = 15 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = 1\frac{1}{3} \\ y = 5\frac{2}{3} \end{cases}$; 8. a) nieskończenie wiele rozwiązań, b) jedno rozwiązanie: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1,5 \end{cases}$, c) nie ma rozwiązań, d) jedno rozwiązanie: $\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$; 9. a) nie ma rozwiązań, b) jedno rozwiązanie, c) jedno rozwiązanie, d) nieskończenie wiele rozwiązań; 10. a) $\begin{cases} x = \frac{16}{11} \\ y = \frac{9}{11} \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = 13,5 \\ y = 3,5 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = -5,5 \\ y = -7 \end{cases}$. Z.S.: 1. C; 2. D; 3. C; 4. A.

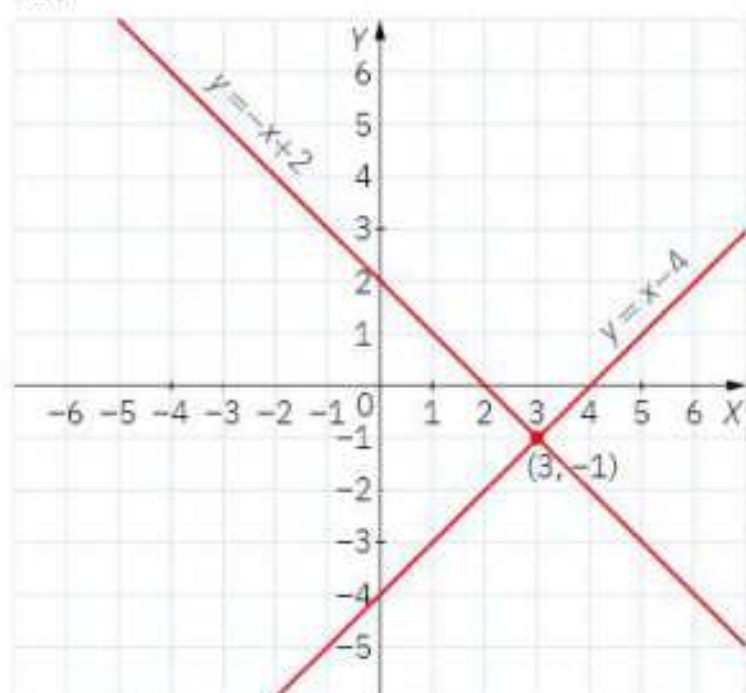
1.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

1. a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$; 2. a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$, e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$, f) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$; 3. a) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = -0,5 \\ y = 1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$; 4. a) jedno rozwiązanie, b) nie ma rozwiązań, c) nieskończenie wiele rozwiązań, d) jedno rozwiązanie; 5. a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$.

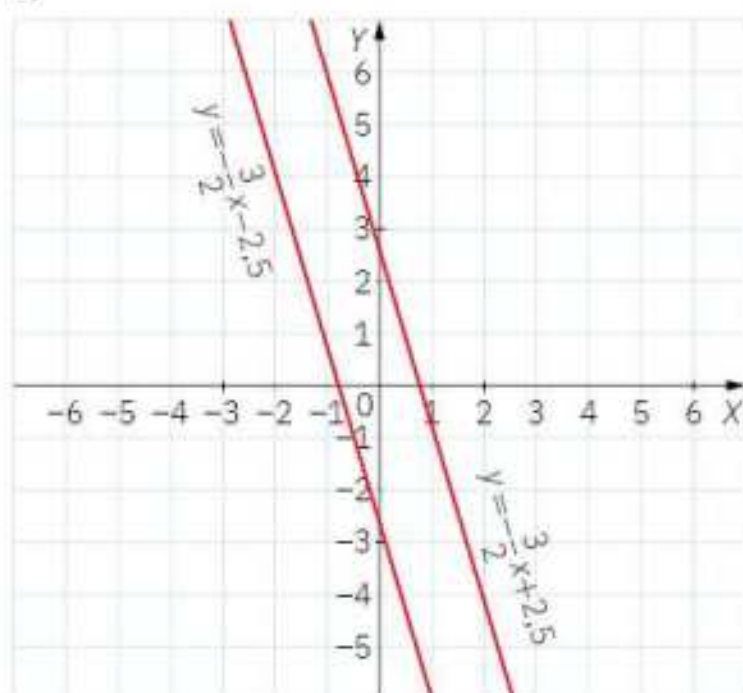
e) $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$, f) $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$; 6. a) $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x=-3 \\ y=8 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x=2\frac{1}{3} \\ y=2 \end{cases}$; 7. a) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$,
d) $\begin{cases} x=4\frac{7}{8} \\ y=1 \end{cases}$; 8. a) $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x=2,2 \\ y=2,2 \end{cases}$; 9. a) $\begin{cases} x-y=12 \\ x+y=x-y+5 \end{cases}$, $\begin{cases} x=14,5 \\ y=2,5 \end{cases}$,
b) $\begin{cases} 2y=2x+5 \\ \frac{1}{2}x=\frac{1}{3}y \end{cases}$, $\begin{cases} x=5 \\ y=7,5 \end{cases}$; 10. a) $\begin{cases} x=y-8 \\ x+y=20 \end{cases}$, $\begin{cases} x=6 \\ y=14 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 20\%x=40\%y \\ 30\%x-10\%y=5 \end{cases}$, $\begin{cases} x=20 \\ y=10 \end{cases}$, c) $\begin{cases} a+2b=24 \\ b=a+6 \end{cases}$,
 $\begin{cases} a=4 \\ b=10 \end{cases}$. Z.S.: 1. C; 2. A; 3. D; 4. B.

1.4. Rozwiązanie układów równań metodą graficzną

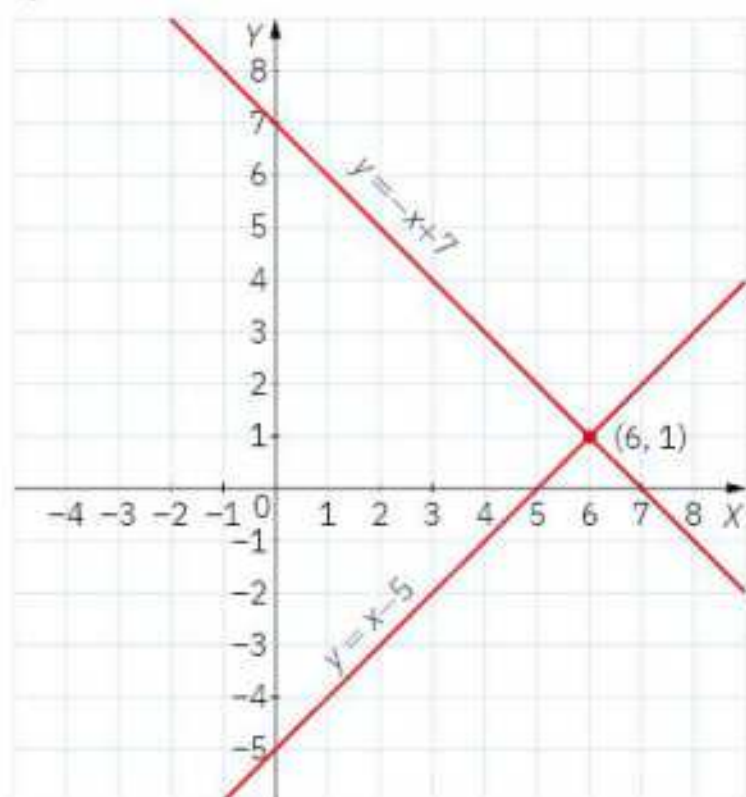
1. a)



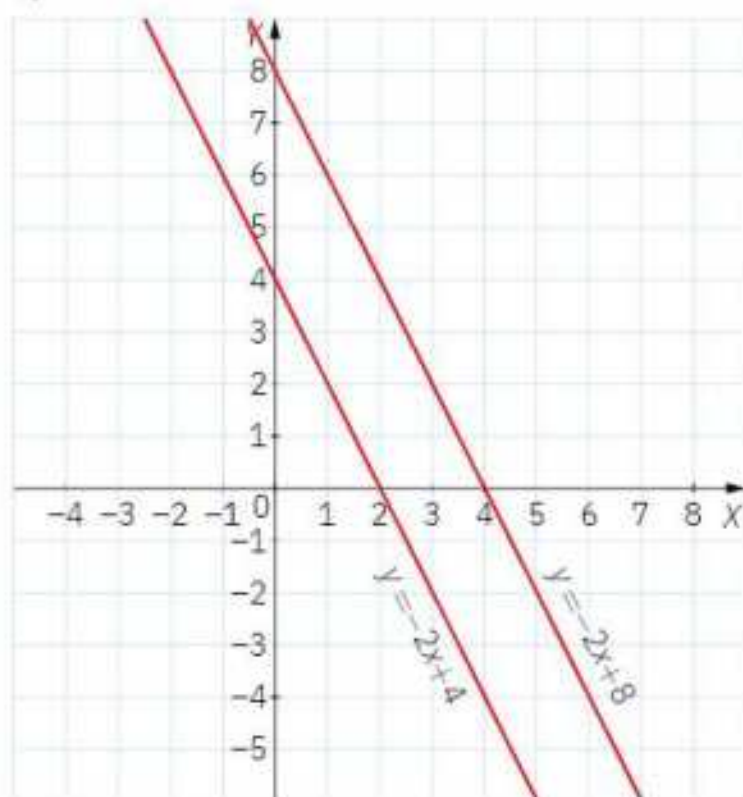
b)



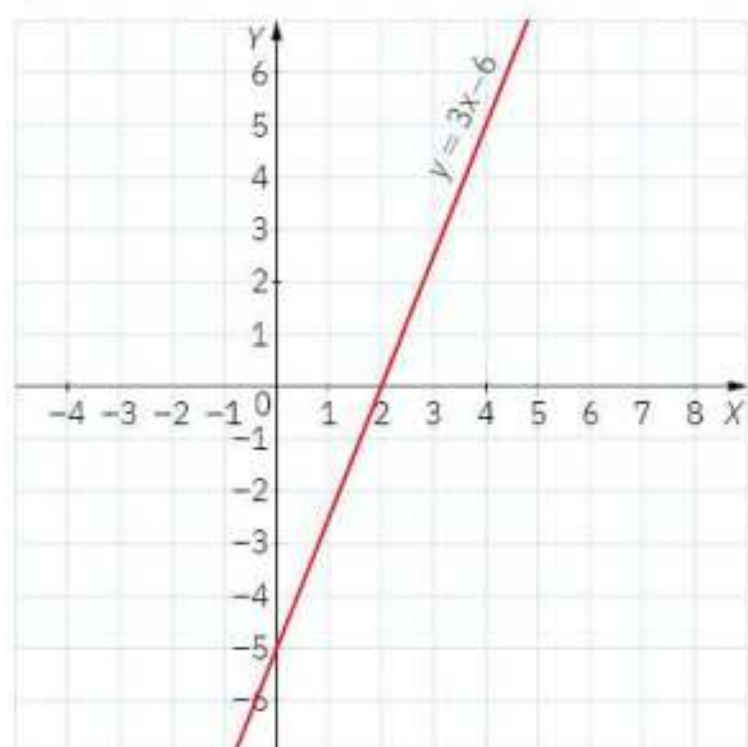
c)



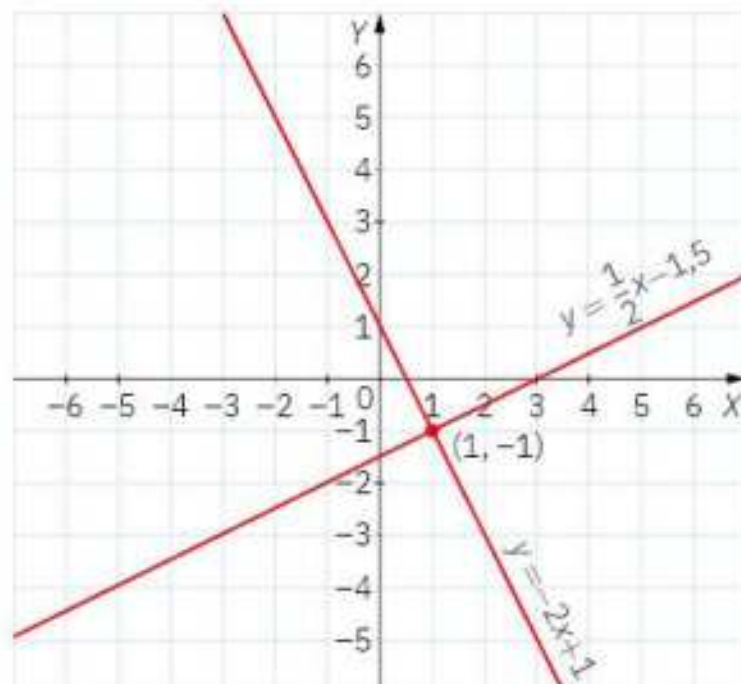
d)



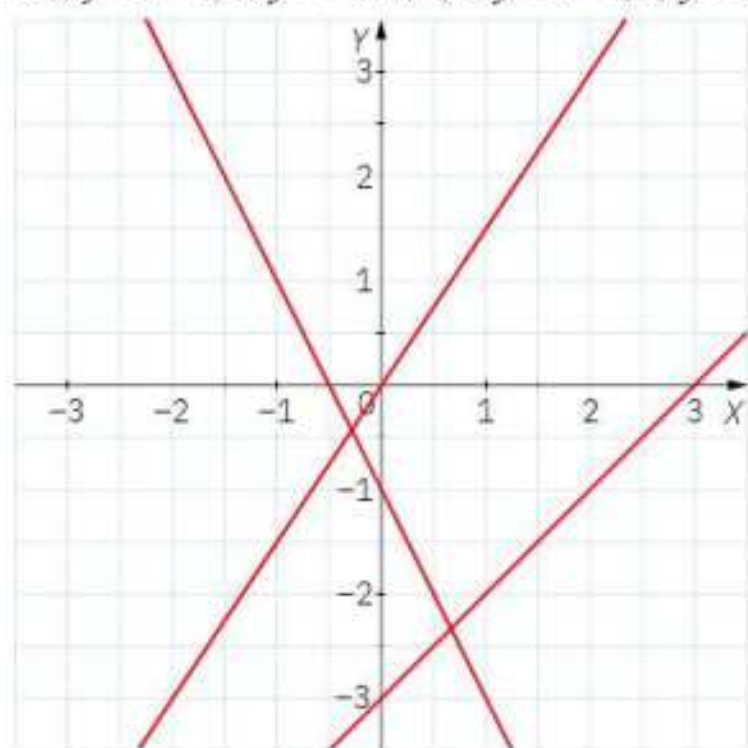
e)



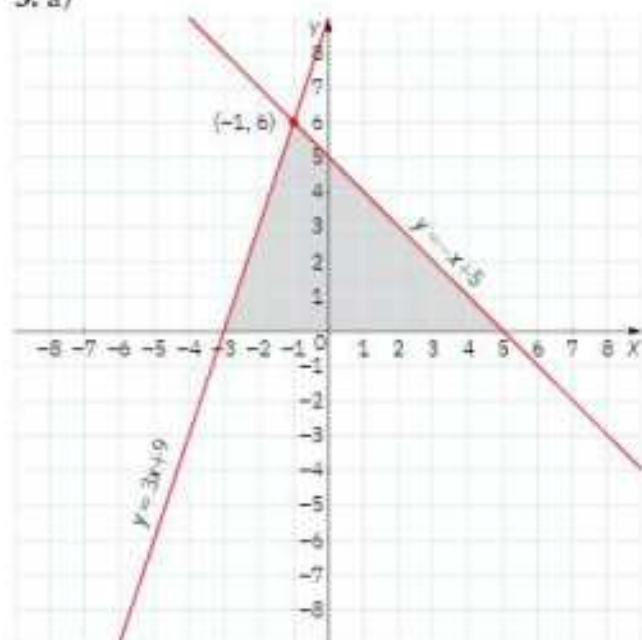
f)



2. a) $y = x - 3$, b) $y = -2x + 1$, c) $y = x - 3$, d) $y = 1.5x$, proste a) i c);

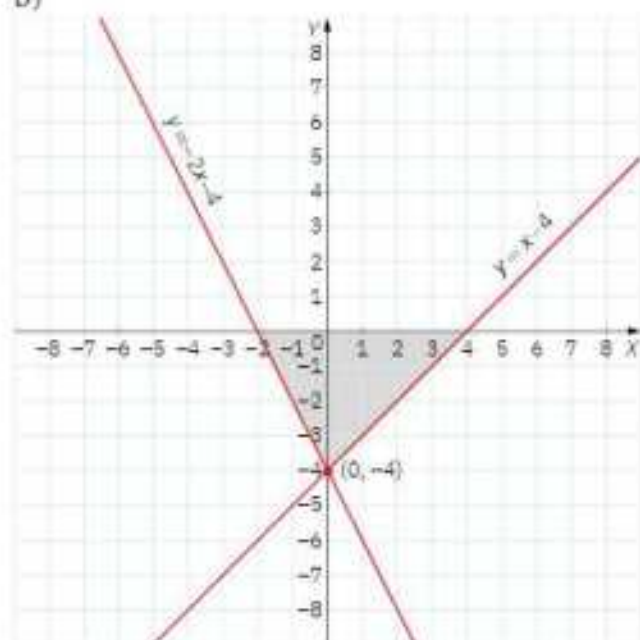


3. a)



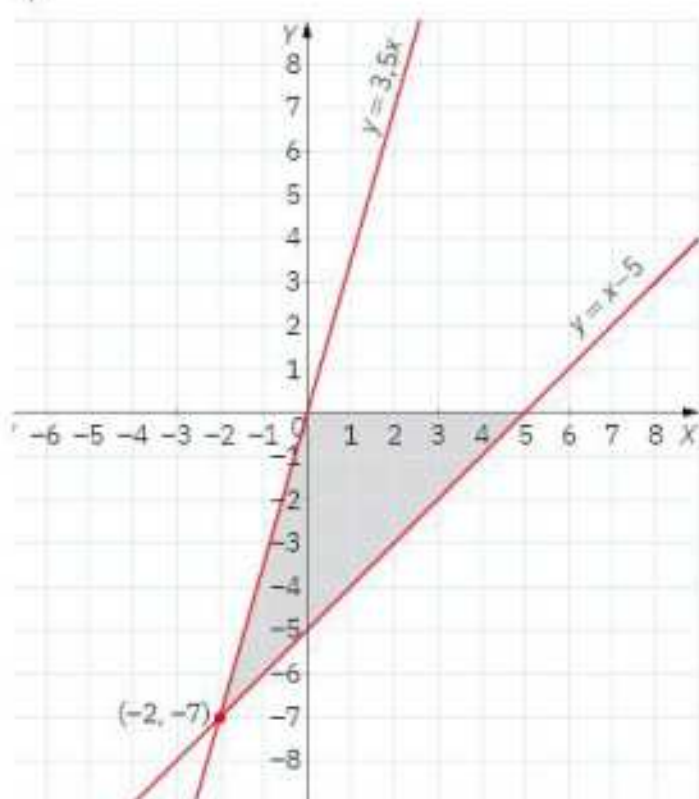
$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

b)



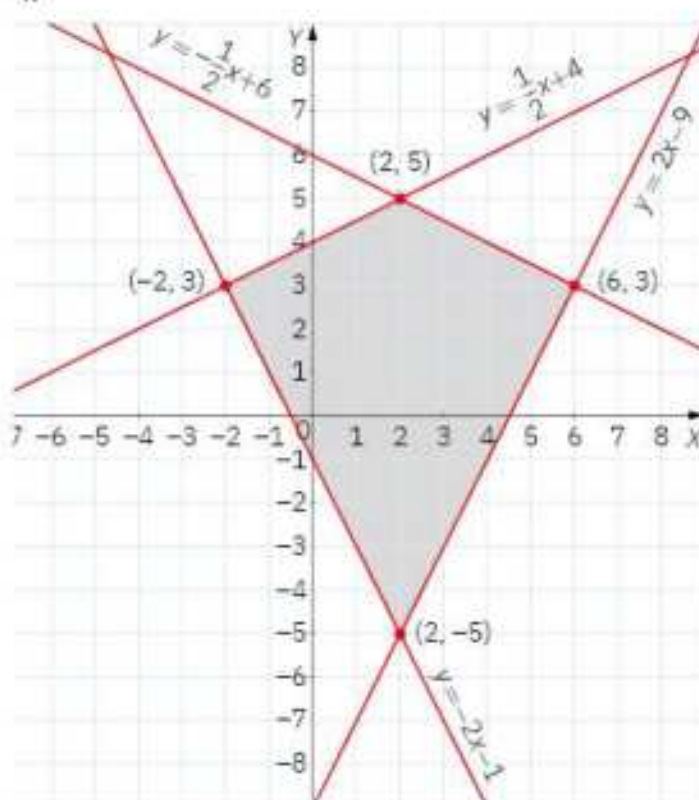
$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

c)



$$P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 = 17\frac{1}{2}$$

4.



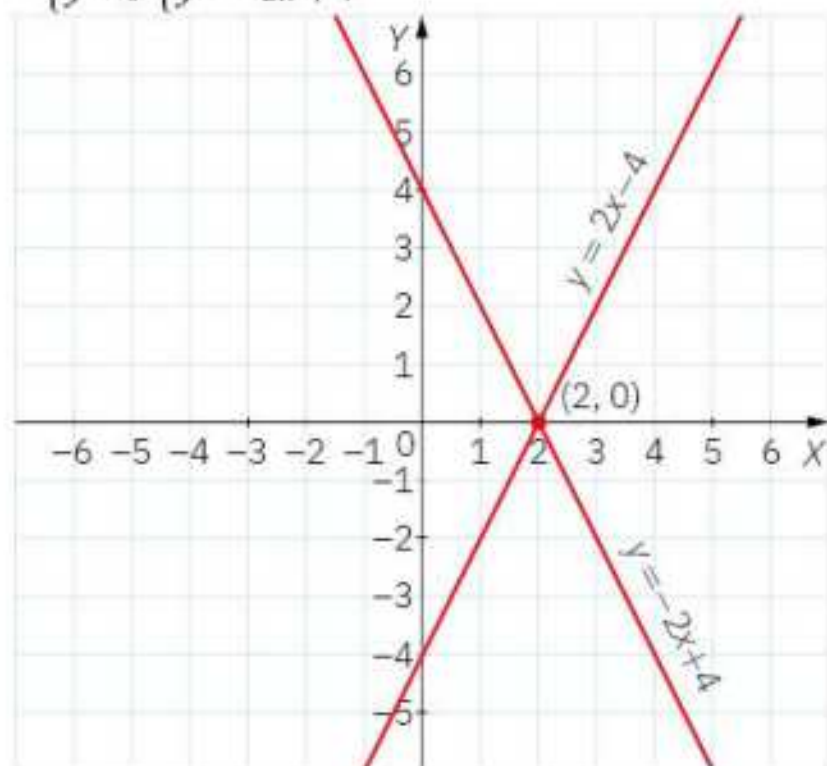
$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 40$$

Z.S.: 1. C; 2. A.

1.5. Rozwiązanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

1. a) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$, e) $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{3}{4} \end{cases}$, f) $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$; 2. a) $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$,
d) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$, e) $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$, f) $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$; 3. Diofantos; 4. a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=5 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y-x=5 \\ y+x=7 \end{cases}$,
 $\begin{cases} y-x=5 \\ x-y=-5 \end{cases}$, $\begin{cases} y-x=5 \\ x-y=7 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 0,5x+0,2y-0,7=0 \\ 10x+2y=5 \end{cases}$, $\begin{cases} 0,5x+0,2y-0,7=0 \\ 5x+2y=7 \end{cases}$, $\begin{cases} 0,5x+0,2y-0,7=0 \\ 5x+2y=0 \end{cases}$;
5. a) $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$; 6. a) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases}$; 7. b);

$$8. \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} y=2x-4 \\ y=-2x+4 \end{cases};$$



$$9. a) \begin{cases} x = -1\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}, b) \begin{cases} x = 33\frac{1}{3} \\ y = 35 \end{cases}; 10. a) \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}, b) \begin{cases} x = -5,4 \\ y = -4,4 \end{cases}, c) \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}, d) \text{ sprzeczny; Z.S.: 1. B; 2. B; 3. C; 4. C.}$$

1.6. Rozwiązywanie zadań tekstowych za pomocą układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

1. 12 dwuzłotówek, 4 pięciozłotówki; 2. a) komputer 2296 zł, drukarka 574 zł, b) komputer 2385 zł, drukarka 485 zł; 3. 53; 4. Ia – 32, Ib – 30; 5. 32 zł, 40 zł; 6. 110 zł, 30 zł; 7. pierwsza 7000 zł, druga 3000 zł; 8. 189 cm²; 9. 150 cm²; 10. 6 cm, 18 cm. Z.S.: 1. C; 2. A; 3. B; 4. D.

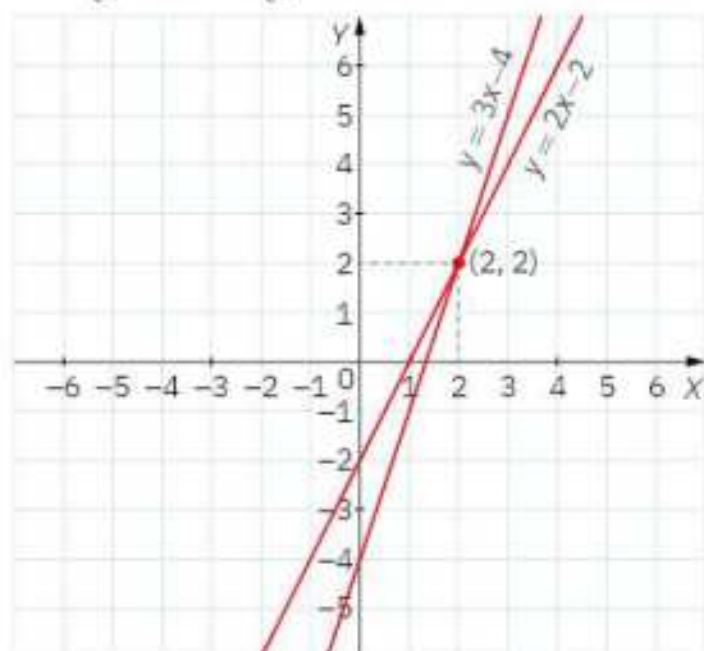
1.7. Zadania utrwalające

1. a) $x = -1$ i $y = -2$, $x = -2$ i $y = -1$, b) $x = -1$ i $y = -2$, $x = -3$ i $y = -1$, c) $x = -3$ i $y = -2$, $x = -6$ i $y = -1$; 2. a) tak, b) nie; 3. a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = 8 \\ y = -10 \end{cases}$; 4. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -0,8 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -10 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = -7 \\ y = -3 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$; 5. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = -7 \\ y = 11 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$; 6. a) $\begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = -3,25 \\ y = -1,8 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = -40 \\ y = 20 \end{cases}$; 7. tak; 8. a) nie ma rozwiązań, b) jedno rozwiązanie: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases}$, c) nieskończenie

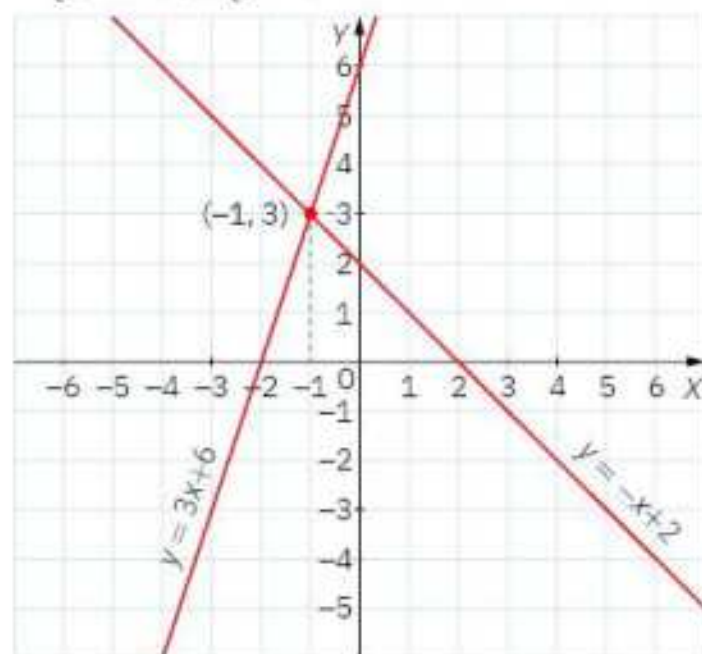
wiele rozwiązań; 9. a) oznaczony: $\begin{cases} x = 25 \\ y = 22 \end{cases}$, b) nieoznaczony, c) sprzeczny; 10. a) $\begin{cases} x + y = 33 \\ x + 2 + \frac{1}{4}y = 23 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 17 \\ y = 16 \end{cases}$

$$b) \begin{cases} \frac{m+n}{2} = 52 \\ m = n + 60\%n \end{cases}, \begin{cases} m = 64 \\ n = 40 \end{cases}$$

$$11. a) \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 3x - 4 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$



$$b) \begin{cases} y = 3x + 6 \\ y = -x + 2 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$



$$12. \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = -2 \end{cases}; 13. a) \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}, b) \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}, c) \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}; 14. a) \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}, b) \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}; 15. a) \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}, b) \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases};$$

$$16. 240 \text{ i } 480; 17. 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}, 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}; 18. 59; 19. 36^\circ, 48^\circ, 96^\circ; 20. 14 \text{ i } 26.$$

2. PLANIMETRIA

2.1. Trójkąty i ich własności

1. a) nie, b) tak, c) nie; 2. a) 100° , rozwartokątny, b) 66° , ostrokątny, c) 90° , prostokątny; 3. a) $25^\circ, 65^\circ, 90^\circ$, b) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, c) $50^\circ, 55^\circ, 75^\circ$; 4. a) tak, b) tak, c) nie; 5. $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$ lub $80^\circ, 50^\circ, 50^\circ$; 6. a) $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$, b) $90^\circ, 18^\circ, 72^\circ$, c) $90^\circ, 30^\circ, 60^\circ$; 7. 19 cm; 8. 12,5 cm; 9. a) 0,052, b) 2, c) 250 000, d) 3,5, e) 150, f) 60 000, g) 0,4, h) 40, i) 0,05; 10. 15 cm^2 ; 11. 2,4 cm; 12. $12\sqrt{3} \text{ cm}$; 13. $16(7\sqrt{3} + 12) \text{ cm}^2$; 14. a) $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$, $\triangle ABO \equiv \triangle DOC$, b) $\triangle AOB \equiv \triangle AOC$, $\triangle BOD \equiv \triangle COD$, c) $\triangle ADF \equiv \triangle AEF \equiv \triangle EFC \equiv \triangle EBC$; 15. a) są przystające, b) są przystające, c) nie są przystające. Z.S.: 1. A; 2. C; 3. D; 4. C.

2.2. Twierdzenie Pitagorasa

1. a) $c^2 = a^2 + b^2$, b) $k^2 = l^2 + m^2$, c) $NP^2 = MN^2 + MP^2$, d) $z^2 = x^2 + y^2$, e) $(c+5)^2 = a^2 + (b+2)^2$; 2. a) $c = \sqrt{3}$, b) $c = 10$, c) $c = 25$; 3. a) $p = 5\sqrt{7}$, b) $n = \sqrt{69}$, c) $m = 40$; 4. $MN = \sqrt{29}$; 5. $10(1 + \sqrt{2})$; 6. a) $a = 2(1 + \sqrt{2}) \text{ cm}$; 7. $a = 8 \text{ cm}$; 8. $P = 336 \text{ cm}^2$, $h = 13,44 \text{ cm}$; 9. 3 cm; 10. $F = 50 \text{ N}$; 11. $S = 7 + 2\sqrt{6} + \sqrt{37}$; 12. $P = 40 \text{ cm}^2$; 13. o 2 m; 14. o 40 m; 15. $h = 2 \text{ cm}$. Z.S.: 1. C; 2. A; 3. B; 4. D.

2.3. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

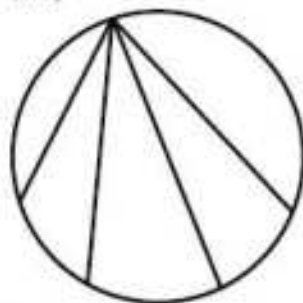
1. a) tak, b) tak, c) tak, d) nie; 2. a) tak, b) nie, c) nie, d) tak; 3. a) tak, b) nie; 4. 3, 4, 5; 5. tak; 6. a) trójkąt prostokątny, b) trójkąt rozwartokątny, c) trójkąt ostrokątny; 7. a) nie, b) tak; 8. uzasadniamy, że przekątne rombu są prostopadłe i dzielą się na połowy. Z.S.: 1. C; 2. C; 3. A; 4. D.

2.4. Czworokąty i ich własności

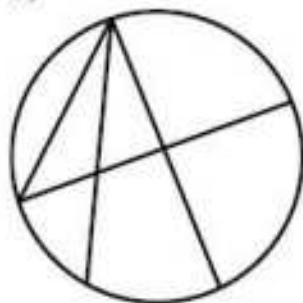
1. a) tak, b) nie, c) nie, d) tak; 2. 10 cm, 8 cm, 6 cm, 4 cm; 3. c, e; 4. 4; 5. 2 dm; 6. a, b; 7. a) 4,2, b) 0,6; 8. $90^\circ, 36^\circ, 144^\circ, 90^\circ$; 9. a) 140 a, b) fałsz; 10. 14 cm; 11. 282,88 zł; 12. $\frac{3}{40}$; 13. 4,8 cm; 14. 100 m; 15. 12 cm; 16. $0,74 \text{ m}^2$; 17. 50; 18. 750 000 zł; 19. 25 a, 24 a, kwadratowa; 20. $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (3+5) \cdot 2 = 7,5 + 8 = 15,5$; 21. 12 cm; 22. 5 cm. Z.S.: 1. D; 2. A; 3. C; 4. B.

2.5. Okrąg i koło

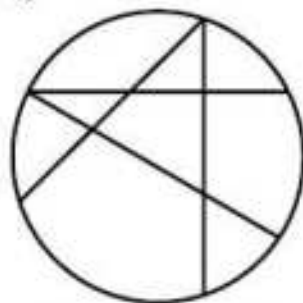
1. a)



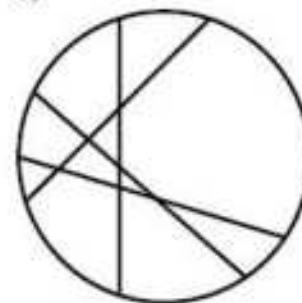
b)



c)



d)



2. 4,4 m; 3. a) fałsz, b) prawda, c) fałsz; 4. 1,18 m²; 5. 1884 cm²; 6. a) 20π cm, 30π cm², b) 6π cm, $18(\pi - 2)$ cm²; 7. a) 4 cm, b) większej niż 4 cm, c) mniejszej niż 4 cm; 8. tak. Z.S.: 1. C; 2. B; 3. D; 4. A.

2.6. Kąty wpisane i środkowe

1. kąt środkowy: a, d , kąt wpisany: b, c, d ; 2. $270^\circ, 144^\circ, 210^\circ, 50^\circ$; 3. 165° ; 4. a) 42° , b) 50° , c) 78° , d) 75° , e) 135° , f) 180° , g) 60° , h) $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, \delta = 90^\circ$; 5. 76° ; 6. $45^\circ, 108^\circ, 165^\circ, 75^\circ$; 7. $126^\circ, 63^\circ$; 8. a) $55^\circ, 70^\circ, 55^\circ$, b) $95^\circ, 105^\circ, 85^\circ, 75^\circ$; 9. $90^\circ, 180^\circ$; 10. 315° ; 11. 6π cm. Z.S.: 1. D; 2. C; 3. A; 4. B.

2.7. Cechy podobieństwa trójkątów

1. są podobne; 2. a) są podobne, b) nie są podobne; 3. 40, 48; 4. a) nie są podobne, b) są podobne; 5. a) $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{AC} = \frac{DF}{BC}$, b) $\frac{ST}{GI} = \frac{SR}{IH} = \frac{RT}{GH}$, c) $\frac{DE}{AB} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$, d) $\frac{AE}{BD} = \frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$; 6. a) trójkąty podobne: I i III, cecha bbb , b) trójkąty podobne: I i III, cecha kkk ; 7. a) $x = 33, y = 13$, b) $x = 5,5, y = 22,5$; 8. $\triangle ABC \sim \triangle ADC \sim \triangle DCB$, cecha kkk . Z.S.: 1. A; 2. D; 3. B; 4. C.

2.8. Zadania z zastosowaniem cech podobieństwa trójkątów

1. a) $AB' = 12$ cm, $B'C' = 16$ cm, $A'C' = 20$ cm, b) $AB' = 24$ cm, $B'C' = 48$ cm, $A'C' = 64$ cm; 2. a) $k = \frac{3}{2}$, $B'C' = 6\frac{2}{3}$ cm, $AB' = 5\frac{1}{3}$ cm, b) $k = \frac{2}{5}$, $A'C' = 17,5$ cm, $BC = 8$ cm; 3. 6,4 m; 4. 3,75 m; 5. 2; 6. 6 cm; 7. 9 cm; 8. $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm; 9. 12 cm; 10. 28 m. Z.S.: 1. B; 2. C; 3. D; 4. A; 5. D.

2.9. Zależność między obwodami figur podobnych

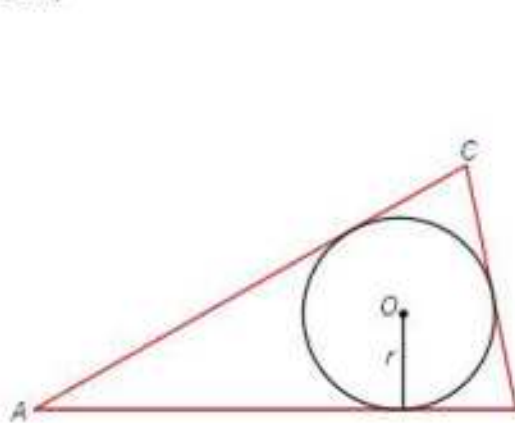
1. $\frac{3}{5}$; 2. $AB' = 10$ cm, $B'C' = 12,5$ cm, $A'C' = 17,5$ cm; 3. 24 cm; 4. 5 cm; 5. $\frac{2}{3}$; 6. I przypadek: $24\frac{1}{2}$ cm, $36\frac{3}{4}$ cm; II przypadek: 2 cm, 3 cm; 7. 3 cm; 8. $\frac{4}{5}$. Z.S.: 1. C; 2. C; 3. D; 4. A.

2.10. Zależność między polami figur podobnych

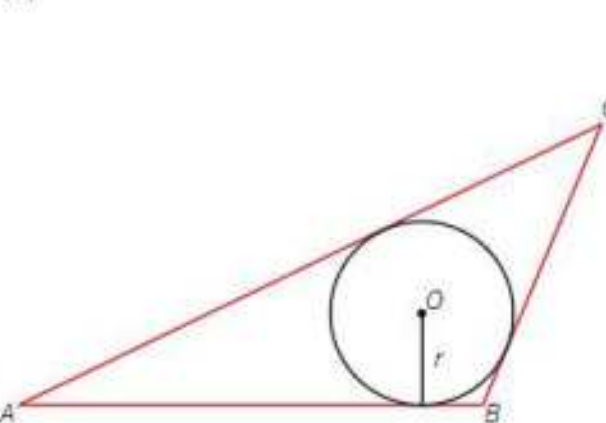
1. $\frac{1}{16}$; 2. 3 cm²; 3. $\sqrt{5}$; 4. $\frac{3}{2}$; 5. a) $\frac{3}{10}$, b) 9, c) 25,2 cm; 6. 5 cm²; 7. 1 : 5000; 8. 24 cm². Z.S.: 1. B; 2. D; 3. B; 4. A.

2.11. Okrąg wpisany w trójkąt

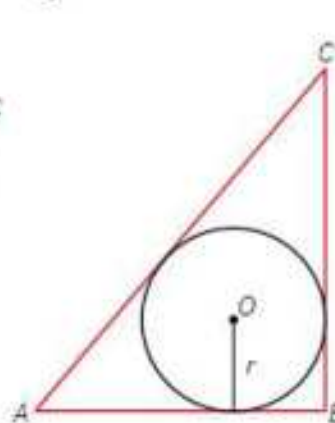
1. a)



b)



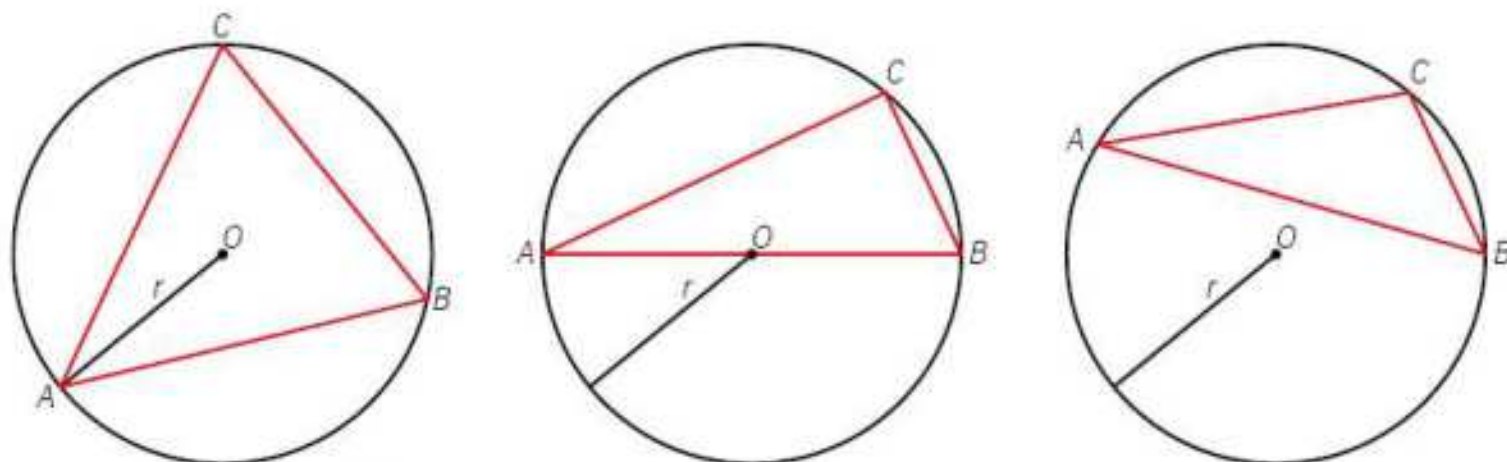
c)



2. a) 145° , b) 110° , c) 135° ; 3. a) 1 cm, b) 2 dm, c) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ cm; 4. $2\sqrt{3}$ cm; 5. 2 dm; 6. 225 dm^2 ; 7. $4\sqrt{3}$ cm; 8^* . $5(2+\sqrt{2})$ cm. Z.S.: 1. C; 2. A; 3. A; 4. D; 5. A; 6. B.

2.12. Okrąg opisany na trójkącie

1.



2. a) 2,5 cm, b) 5 cm, c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm; 3. $90^\circ, 70^\circ, 20^\circ$; 4. 5 cm; 5. a) 65° , b) 70° , c) 27° ; 6. 25π cm; 7. 3 cm; 8. 4,5 cm; 9. $4\sqrt{3}$ cm. Z.S.: 1. A; 2. C; 3. D; 4. C.

2.13. Ortocentrum i środek ciężkości trójkąta

1. $3\sqrt{5}$ cm; 2. 5 cm, 5 cm, 6 cm; 3. $30^\circ, 60^\circ$; 4. $4\frac{8}{13}$ cm; 5. 6 cm; 6. 8 cm, 6 cm, 6 cm; 7. $2\sqrt{3}$ cm; 8. 10 cm. Z.S.: 1. D; 2. D; 3. A; 4. B.

2.14. Wielokąty i okręgi

1. a) $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 90^\circ$, b) $95^\circ, 130^\circ, 85^\circ, 50^\circ$, c) $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 90^\circ$; 2. a) 34, b) 46, c) 44; 3. a) 5 cm, b) 3,75 cm, c) 1,5 cm; 4. a) 540° , b) 720° , c) 1080° , d) 1440° , e) $17\ 640^\circ$, f) $(n-2) \cdot 180^\circ$; 5. a) 135° , b) 144° , c) 150° , d) 162° , e) $176,4^\circ$, f) $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$; 6. dziesięciokąt foremny; 7. 2,4 cm; 8^* . dziesięciokąt foremny; 9. $4(\sqrt{2}-1)$ cm; 10. $6\pi(2-\sqrt{3})$ cm; 11. 100 cm^2 ; 12. 1 m. Z.S.: 1. D; 2. B; 3. D; 4. C.

2.15. Zadania utrwalające

1. a) $76^\circ, 76^\circ, 28^\circ$, b) $90^\circ, 55^\circ, 35^\circ$, c) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$; 2. trójkąt ACD: $29^\circ, 122^\circ, 29^\circ$, trójkąt ABD: $97^\circ, 54^\circ, 29^\circ$; 3. a) 6 cm, 5 cm, 5 cm, b) 12 cm^2 , c) 4,8 cm; 4. 32 m^2 ; 5. a) $\triangle ABO \equiv \triangle CDO \equiv \triangle AOD \equiv \triangle BOC$, $\triangle ABD \equiv \triangle BDC$, $\triangle ABC \equiv \triangle ACD$, b) $\triangle AOD \equiv \triangle BCO$; 6. a) $\sqrt{5}$ cm, b) 13 cm, c) 3 cm; 7. 4 cm; 8. 8 cm; 9. a) $60^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 120^\circ$, b) $45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 135^\circ$; 10. 6,25 cm; 11. a) 4,125, b) 16,2, c) 7,56; 12. 24; 13. tak; 14. nie; 15. $35,29 \text{ cm}^2$; 16. $84^\circ, 42^\circ$; 17. a) $\alpha = 130^\circ, \beta = 65^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ, \beta = 28^\circ, \gamma = 47^\circ, \delta = 90^\circ$, c) $\alpha = 105^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 75^\circ, \delta = 90^\circ$; 18. 0,3 dm; 19. 48 cm; 20. $9\pi \text{ dm}^2$; 21. 15 m; 22. 31,5 cm; 23. 40 cm; 24. $AB = 5\frac{1}{3}$ cm, $AC = 2\frac{2}{3}$ cm; 25. tak, 2; 26. 30 cm; 27. długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest równa $\frac{2}{3}h$, a długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt to $\frac{1}{3}h$, stąd wynika, że stosunek długości promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 2; 28. 108 cm^2 ; 29. $\frac{1}{3}$; 30. 16 cm, 12 cm; 31. $4\pi \text{ dm}^2$; 32. 7 cm; 33. 5 cm; 34. 17,5 cm; 35. 50 cm; 36. 30° ; 37. 15 cm.

3. TRYGONOMETRIA

3.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

1. a) $\sin \alpha = \frac{e}{g}$, $\cos \alpha = \frac{f}{g}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{f}$; b) $\sin \alpha = \frac{r}{t}$, $\cos \alpha = \frac{s}{t}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{s}$; c) $\sin \alpha = \frac{EF}{DE}$, $\cos \alpha = \frac{DF}{DE}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{DF}$;
2. $1\frac{1}{3}$ cm; 3. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}$; 4. $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\cos \alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$, $\sin \beta = \frac{24}{25}$, $\cos \alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = 3\frac{3}{7}$;
5. 11,25 m; 6. $\sin 68^\circ = \cos(90^\circ - 68^\circ) = \cos 22^\circ \approx 0,9272$, $\operatorname{tg} 54^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - 54^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{tg} 36^\circ} \approx \frac{1}{0,7265} = \frac{2000}{1453}$.
Z.S.: 1. C; 2. D; 3. A.

3.2. Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60°

1. a) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$, b) $\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$, c) 2; 2. a) $\sqrt{3}$, b) 3, c) -1; 3. $\sqrt{3}$; 4. 17,3 m; 5. 1000 m; 6. 10,4 m. Z.S.: 1. B; 2. B; 3. D; 4. A.

3.3. Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

1. a) 0,5736, b) 0,5299, c) 1,8807, d) 14,3007; 2. a) 84° , b) 61° , c) 31° , d) 4° ; 3. a) 80° , b) 30° , c) 55° , d) 15° ;
4. a) 0,17, b) -1,05, c) 6,82, d) 2,42; 5. ok. 10,9 m; 6. ok. 112° ; 7. ok. 39° . Z.S.: 1. B; 2. D; 3. C; 4. B.

3.4. Zależności między funkcjami trygonometrycznymi

1. a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$, b) $\cos \alpha = 0,8$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$;
2. $\frac{56}{65}$; 3. a) $\cos^2 \alpha$, b) $\operatorname{tg}^2 \alpha$, c) $2\sin^2 \alpha$, d) $\sin \alpha$, e) $\operatorname{tg} \alpha$, f) 1; 4. a) 1, b) 0; 5. a) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
b) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$; 6. a) $3\sqrt{2}$, b) $\sqrt{2} - 16$, c) $5\frac{2}{3}$; 7. a) $1\frac{6}{25}$, b) $-\frac{17}{25}$, c) $\frac{168}{625}$; 8. a) istnieje, b) nie istnieje, c) istnieje, d) nie istnieje; 9. a) $1\frac{31}{169}$, b) $\frac{5}{8}$; 10. a) tak, b) tak, c) nie. Z.S.: 1. B; 2. C; 3. D; 4. B.

3.5. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

1. 10 cm, 30° , 60° ; 2. a) $b = 4$, $c = 5$, b) $a = 2\sqrt{7}$, $c = 8$, c) $b = 9$, $c = 9\sqrt{2}$; 3. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm, $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm, 30° ; 4. 8 cm, $4\sqrt{5}$ cm; 5. a) $AB \approx 13,9$, $BC \approx 11,5$, $\angle CAB = 55^\circ$, b) $BC \approx 10$, $CA \approx 6,6$, $\angle CBA = 34^\circ$; 6. ok. 0,9 km; 7. 70 m;
8. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm; 9. ok. 8 m; 10. $KL \approx 9,7$ cm, $LM \approx 2,6$ cm. Z.S.: 1. D; 2. A; 3. B; 4. C.

3.6. Zastosowania funkcji trygonometrycznych

1. 81 cm^2 ; 2. $(6 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}$; 3. $\frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2$, 25 dm; 4. $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 5. $15,5 \text{ cm}^2$; 6. 60° , 120° , 60° , 120° , $72\sqrt{3} \text{ cm}^2$;
7. 60° ; 8. $10\sqrt{2} \text{ cm}$, $10\sqrt{6} \text{ cm}$, $20\sqrt{2} \text{ cm}$; 9. $(16 + 8\sqrt{2}) \text{ cm}$, 32 cm^2 ; 10. 10 cm^2 , $(10 + 4\sqrt{2}) \text{ cm}$; 11. $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$,
 $(32 + 8\sqrt{3}) \text{ cm}$. Z.S.: 1. C; 2. A; 3. D; 4. A.

3.7. Zadania utrwalające

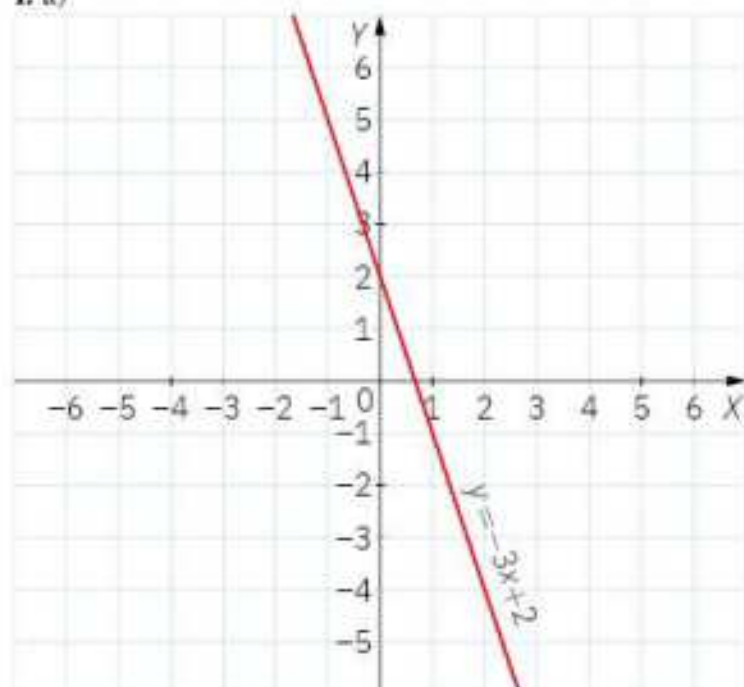
1. a) $\sin \alpha = \frac{x}{z}$, $\cos \alpha = \frac{y}{z}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y}$, b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, c) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$; 2. a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, b) 0, c) $1\frac{1}{4}$, d) $\frac{1}{2}$; 3. a) $-\sin \alpha$, b) $\sin \alpha$; 4. a) $\cos \alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$, b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, d) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$; 5. a) $\frac{11\sqrt{15}}{2}$, b) $\sqrt{15} - 15$, c) 43,125;
6. a) tak, b) tak, c) tak; 7. a) $a = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$, $b = 2,5 \text{ cm}$, $\beta = 30^\circ$, b) $b = 10\sqrt{3} \text{ cm}$, $c = 20 \text{ cm}$, $\beta = 60^\circ$,
c) $b = 5\sqrt{2}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$; 8. ok. 49° ; 9. ok. 9,6 m; 10. ok. 92 N; 11. II; 12. $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 13. $a\sqrt{3}$; 14. ok. 112° ;

15. $\frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$; 16. 8 cm, $8\sqrt{3} \text{ cm}$; 17. 15 cm^2 ; 18. $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $2\sqrt{7} \text{ cm}$; 19. $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 20. 45° .

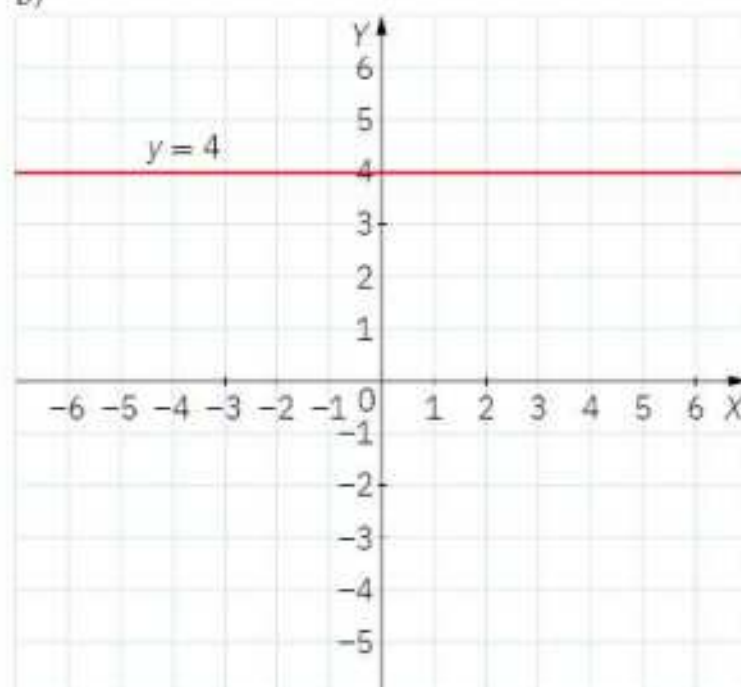
4. GEOMETRIA ANALITYCZNA

4.1. Równanie prostej w postaci kierunkowej

1. a)

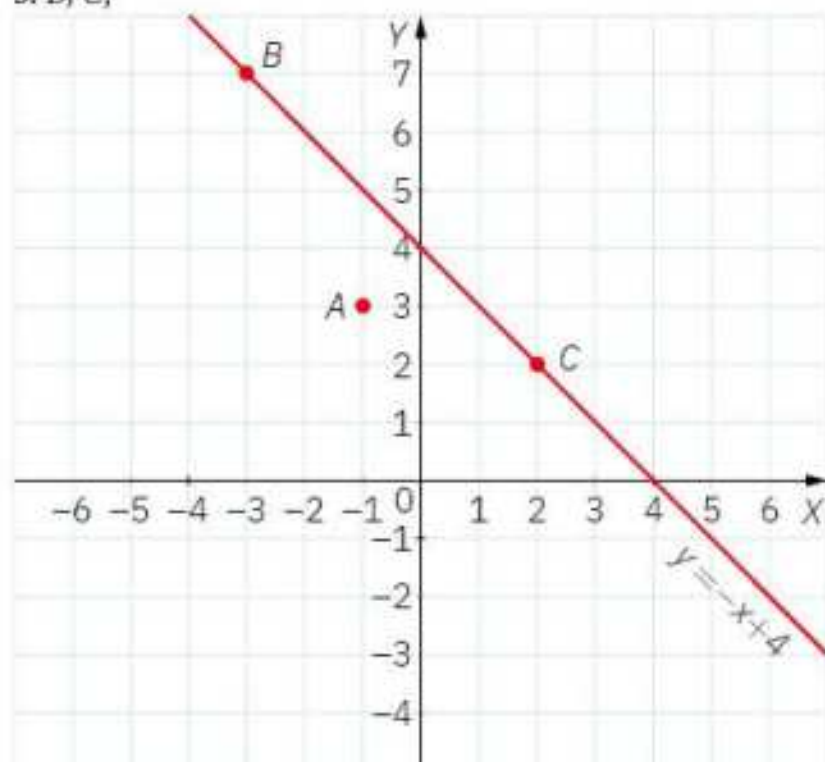


b)



2. $y = -4$, $y = 2,5$;

3. B, C;



4. $y = -2$; 5. a) $y = -2x + 2$, b) $y = \frac{1}{2}x + 3$; 6. a) $y = x - 4$, b) $y = 3$; 7. a) $y = -2$, $y = \frac{1}{3}x - 2$, b) $y = 0$, $y = \frac{1}{3}x - 2$; 8. a) $X: \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $Y: (0, 1)$, b) $X: \text{brak}$, $Y: (0, -1)$, c) $X: \text{brak}$, $Y: \left(0, \frac{3}{4}\right)$, d) $X: (-1, 0)$, $Y: (0, -5)$; 9. 1; 10. -1; 11. należą do prostej $y = \frac{1}{3}x + 3$; 12. $a = 2$, $b = -2$. Z.S.: 1. D; 2. B; 3. A; 4. A.

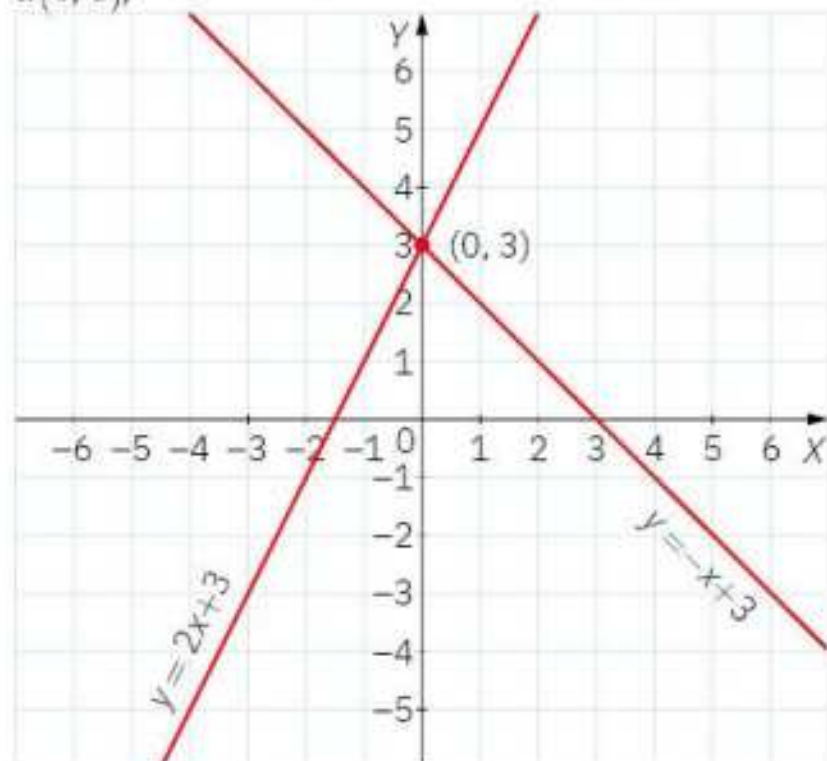
4.2. Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie

1. $y = -2x + 3$ i $y = -2x - 2$ oraz $y = 3$ i $y = -2$; 2. $y = -4x + 1$ i $y = \frac{1}{4}x - 2$; 3. a) $y = -3x + 7$, b) $y = 2$; 4. $y = \frac{1}{2}x - 2$; 5. a) $y = x - 1$, b) $y = -x + 1$; 6. a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, b) $y = -\frac{1}{5}x + 1$; 7. a) $y = -x + 3$, $y = -x$,

są równoległe, b) $y = -5$, $y = 2$, są równoległe; 8. $m = -\frac{1}{3}$ lub $m = \frac{1}{3}$; 9. $m = -2$; 10. $y = 4x - 8$,
 $y = -\frac{1}{4}x - 2$; 11*. $y = -2x + 3$. Z.S.: 1. B; 2. C; 3. B; 4. D.

4.3. Punkt wspólny dwóch prostych

1. $(0, 3)$;



2. a) tak, b) nie; 3. $(2\frac{2}{3}, 6)$; 4. $(0, -3)$; 5. $A = (-6, 2)$, $B = (-2, 2)$; 6. $(-3, -1)$; 7. $(3, -4)$, $y = -4$;
 8. $S = (0, 1)$. Z.S.: 1. D; 2. C; 3. B; 4. B.

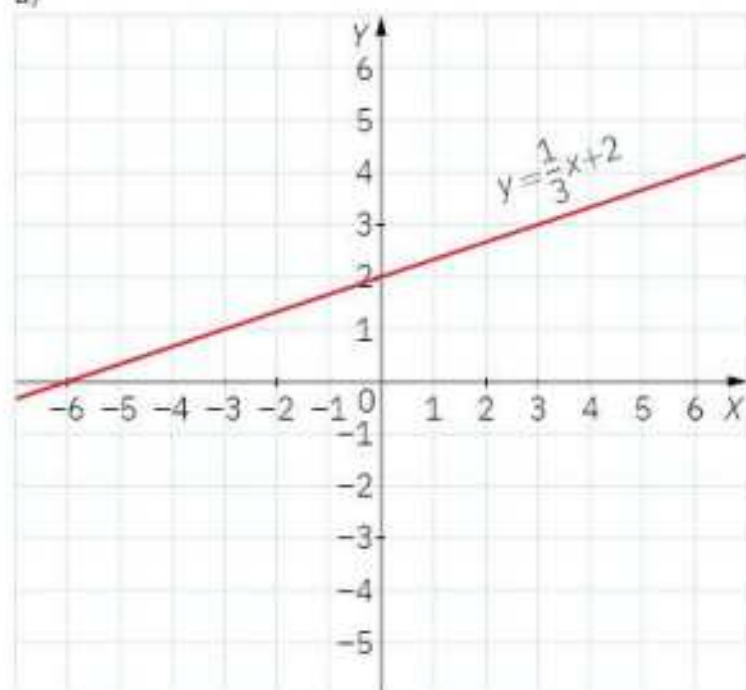
4.4. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

1. a) 10, b) $\sqrt{29}$, c) $4\sqrt{5}$, d) $5\sqrt{5}$; 2. $6\sqrt{2}$; 3. $2\sqrt{5}$; 4. $AB = AC = 5$; 5. $AB = 4\sqrt{5}$; 6. a) nie jest prostokątny,
 b) jest prostokątny, $AB^2 = AC^2 + BC^2$; 7. a) $P = 169$, $S = 52$, b) $P = 200$, $S = 40\sqrt{2}$; 8. $P = 200$, $S = 40\sqrt{2}$;
 9. $AB = BC = CD = DA = \sqrt{13}$, $P = 12$; 10. $4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Z.S.: 1. B; 2. D; 3. A; 4. A.

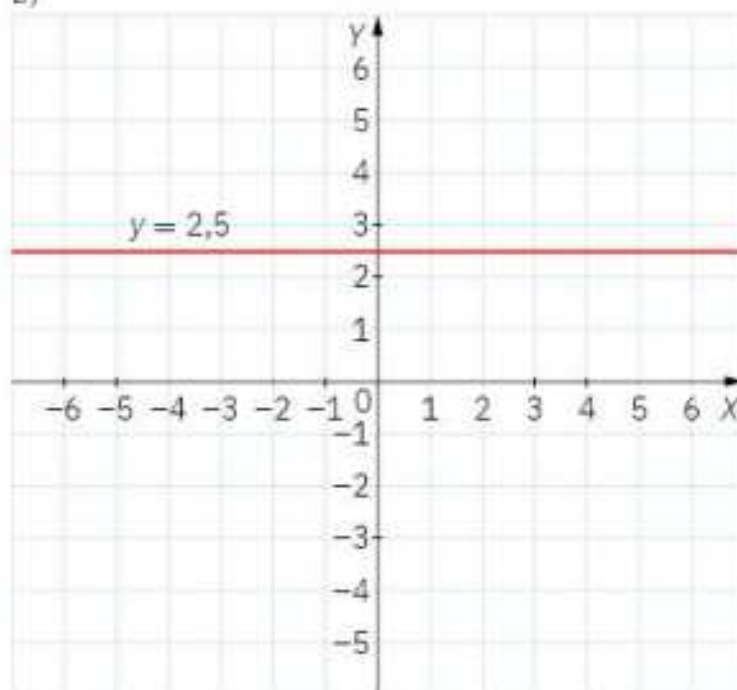
4.5. Zadania utrwalające

1.

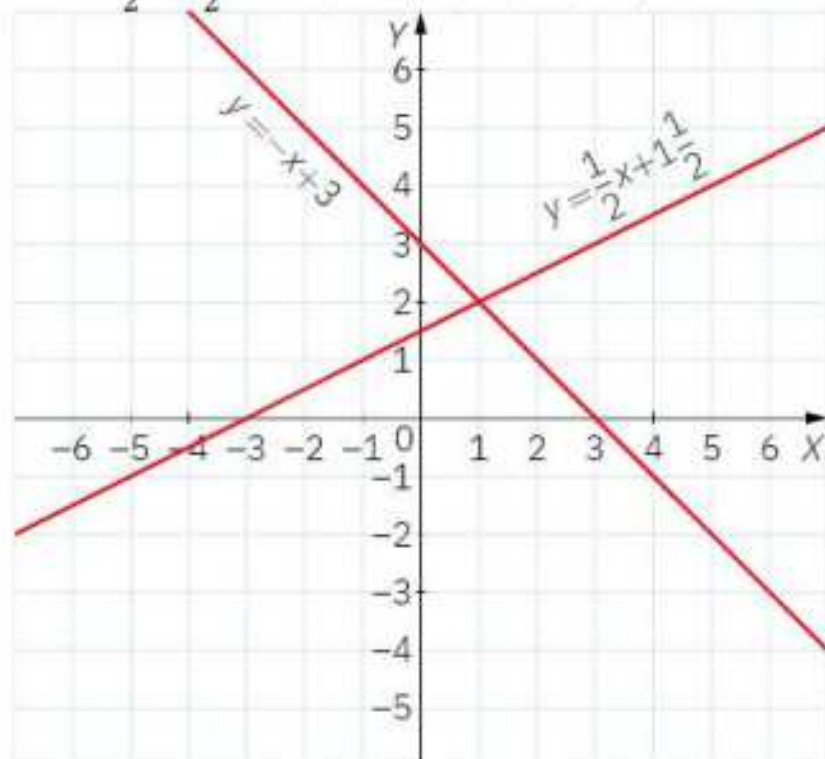
a)



b)



2. $y=3$; 3. $b=1$; 4. $a=5$; 5. a) $y=\frac{1}{2}x+2$, b) $y=3$; 6. $y=\frac{2x-2}{3}$; 7. a) $y=-\frac{3}{4}x-2$, b) $y=\frac{4}{3}x-2$;
 8. a) $y=-2x+3$, b) $(2, -1)$; 9. a) $AB: y=-2$, $CD: y=4$, $AD: y=2x+6$, $BC: y=2x-6$, b) $(2, -2)$;
 10. $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$; 11. a) $(-3, 0), (3, 0)$, b) $(1, 2)$;



12. a) $A = \left(1\frac{1}{3}, -3\right)$, b) $C = (4, 1)$; 13. $A = \left(1\frac{1}{2}, 0\right)$, $y=0$; 14*. $y=-\frac{3}{2}x-2$; 15. 16;

16. a) $AB=BC=CD=DA=\sqrt{13}$, b) 12; 17. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 18. $S=9\sqrt{2}$, $P=\frac{9\sqrt{3}}{2}$; 19. a) równoramienny, bo $AC=BC=\sqrt{10}$, prostokątny, bo $AC^2+BC^2=AB^2$, b) $\sqrt{5}$, c) $\sqrt{10}-\sqrt{5}$; 20*. czworokąt jest trapezem, bo $AB \parallel CD$, równoramienny, bo $BC=AD$.