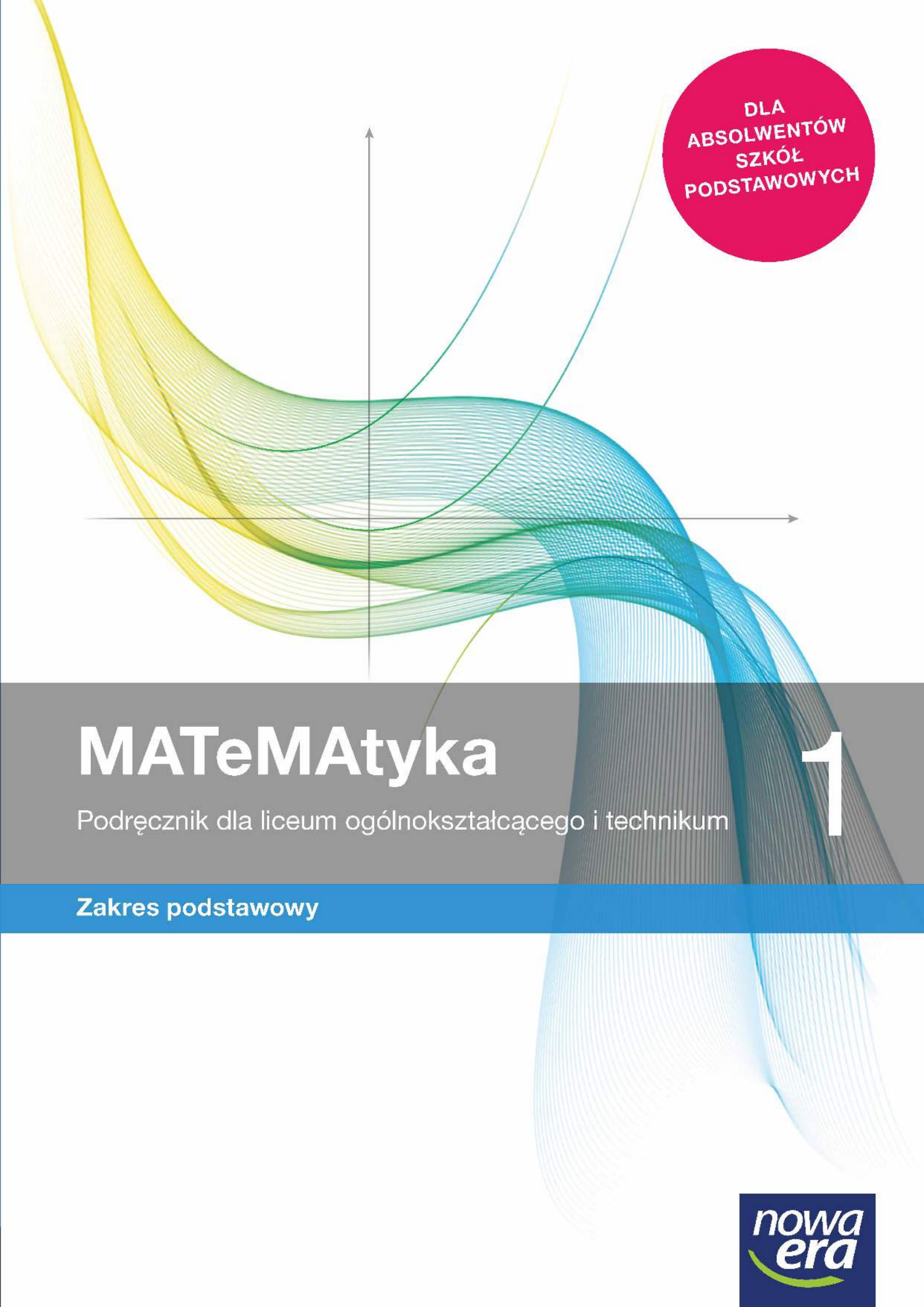




DLA
ABSOLWENTÓW
SZKÓŁ
PODSTAWOWYCH

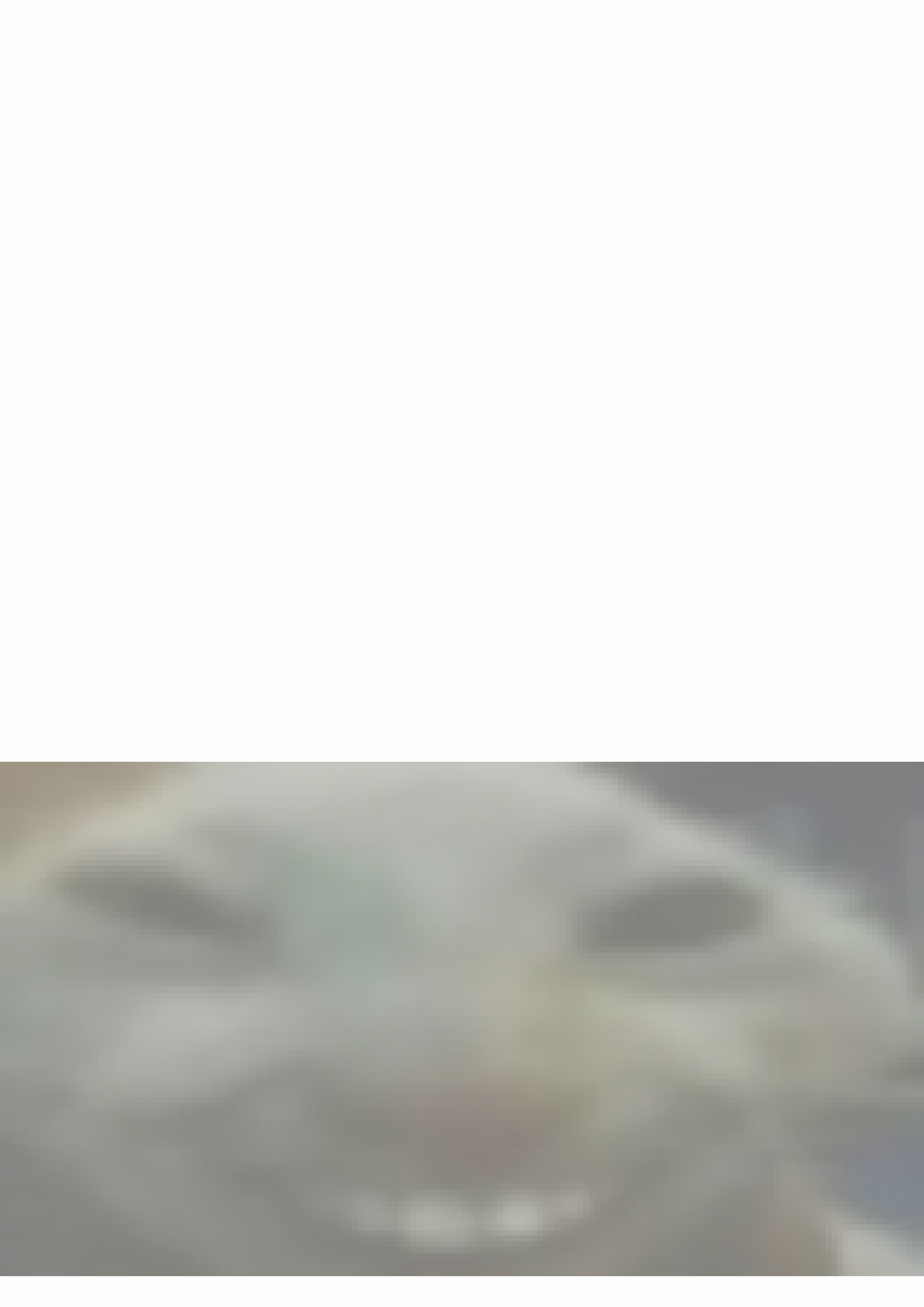
MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

1

Zakres podstawowy

nowa
era



Wojciech Babiański

Lech Chańko

Karolina Wej

MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

1

Zakres podstawowy



Twoje mocne strony

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2019

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/1/2019

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Ta publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2019

ISBN 978-83-267-3485-4

Wydanie drugie

Warszawa 2020

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Katarzyna Radzimińska

Współpraca redakcyjna: Jan Baranowski, Urszula Cielniak, Marcin Minda

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejevska

Redakcja językowa: Dorota Rzeszewska

Korekta językowa: Anna Wesołowska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Ilustracje: Krzysztof Mrawiński

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:

MATeMATyka kl. 1 ZP autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Doroty Ponczek oraz

Matematyka na czasie kl. 2 i 3 autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Karoliny Wej, Ewy Szmytkiewicz, Jerzego Janowicza

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Walstead Central Europe

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:

Fotografia na okładce: Shutterstock/Natinka.

Fotografie: Archiwum NE s. 39 (Merkury, Ziemia, Jowisz), s. 58; BE&W: Alamy Stock Photo – Alvey & Towers Picture Library s. 125, Bruce Leighty – Sports Images s. 134; Getty Images: E+/BraunS s. 133, iStock/Getty Images Plus – buzbuzz s. 55, ventdusud s. 261; Shutterstock: Africa Studio s. 160, Alex-505 s. 119 (10 centów), Amanda Carden s. 39 (Słońce), Bojan Pavlukovic s. 15, ch123 s. 250, Delpixel s. 122 (łódź na rzece), Inger Eriksen s. 203, Jonathan Larsen s. 276 (radioteleskopy), Kurt Kleemann s. 276 (reflektor), Mwiklik s. 185, Nadiia Korol s. 124, Potapov Alexander s. 86, Repina Valeriya s. 223, rsooll s. 119 (5 centów), Tongsai s. 122 (kuter), Tony Baggett s. 119 (25 centów); Lech Chańko s. 9, 21, 101, 175, 249.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Spis treści

1. Liczby rzeczywiste

1.1. Liczby naturalne	10
Cechy podzielności liczb – warto powtórzyć	14
1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne	15
1.3. Liczby niewymierne	18
1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej	21
Długość okręgu. Liczba π – warto wiedzieć	25
1.5. Pierwiastek kwadratowy	26
1.6. Pierwiastek sześcienny	29
1.7. Potęga o wykładniku całkowitym	33
1.8. Potęga o wykładniku wymiernym	36
1.9. Logarytm i jego własności	40
Skala logarytmiczna – warto wiedzieć	43
1.10. Procenty	44
1.11. Zagadnienia uzupełniające	47
Zestawy powtórzeniowe	49
Sposób na zadanie	52
Zadania testowe	53
Przed obowiązkową maturą z matematyki	54

2. Język matematyki

2.1. Zbiory	56
2.2. Działania na zbiorach	59
2.3. Przedziały	63
2.4. Działania na przedziałach	67
Rozwiązywanie równań – warto powtórzyć	69
2.5. Rozwiązywanie nierówności	70
Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian – warto powtórzyć	74
2.6. Wylączanie jednomianu przed nawias	75
2.7. Mnożenie sum algebraicznych	78
2.8. Wzory skróconego mnożenia	83
2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych	87
Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach – warto wiedzieć	90
2.10. Wartość bezwzględna	91
Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach – warto wiedzieć	94
2.11. Zagadnienia uzupełniające	95
Zestawy powtórzeniowe	96

Sposób na zadanie	98
Zadania testowe	99
Przed obowiązkową maturą z matematyki	100

3. Układy równań

3.1. Co to jest układ równań	102
3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania	105
3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników	111
3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)	117
3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)	121
3.6. Zagadnienia uzupełniające	126
Zestawy powtórzeniowe	128
Sposób na zadanie	130
Zadania testowe	131
Przed obowiązkową maturą z matematyki	132

4. Funkcje

4.1. Pojęcie funkcji	134
Układ współrzędnych – warto powtórzyć	139
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)	140
4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)	145
Inne przykłady wykresów funkcji – warto wiedzieć	148
4.4. Monotoniczność funkcji	149
4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)	153
4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)	157
4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY	161
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX	163
4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX	167
4.10. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY	170
4.11. Proporcjonalność odwrotna	172
4.12. Zagadnienia uzupełniające	175
Zestawy powtórzeniowe	179
Sposób na zadanie	182
Zadania testowe	183
Przed obowiązkową maturą z matematyki	184

5. Funkcja liniowa

5.1. Wykres funkcji liniowej (1)	186
5.2. Wykres funkcji liniowej (2)	190
5.3. Własności funkcji liniowej	193

5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie	197
5.5. Współczynnik kierunkowy prostej	200
5.6. Warunek prostokątności prostych	204
5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych	208
5.8. Funkcja liniowa – zastosowania	212
5.9. Zagadnienia uzupełniające	215
Zestawy powtórzeniowe	218
Sposób na zadanie	220
Zadania testowe	221
Przed obowiązkową maturą z matematyki	222

6. Planimetria

6.1. Miary kątów w trójkącie	224
Punkty specjalne w trójkącie – warto wiedzieć	227
6.2. Trójkąty przystające	228
6.3. Twierdzenie Talesa	233
6.4. Wielokąty podobne	237
6.5. Trójkąty podobne	241
Proste i odcinki pomocnicze – warto wiedzieć	245
6.6. Pola wielokątów podobnych	246
6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie	251
6.8. Zagadnienia uzupełniające	253
Zestawy powtórzeniowe	256
Sposób na zadanie	258
Zadania testowe	259
Przed obowiązkową maturą z matematyki	260

7. Wstęp do funkcji kwadratowej

7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$	262
7.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY	265
7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)	268
7.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)	272
7.5. Zagadnienia uzupełniające	275
Zestaw powtórzeniowy	277
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	278
Indeks	310

 Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

 Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Liczby rzeczywiste

Podstawowe dane statku pilotowego przedstawionego na zdjęciu: długość 15 m, szerokość 5 m, zanurzenie 2,3 m, prędkość maksymalna 10 węzłów.

Prędkość statków morskich podaje się w węzłach, czyli w milach morskich na godzinę. Jedna mila morska (Mm) to długość łuku południka wyznaczonego przez 1 minutę kątową (1/60 stopnia). Zatem:

$$1 \text{ Mm} = \frac{40\,000 \text{ km}}{360 \cdot 60} \approx 1,851852 \text{ km}$$

Otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych metrów, czyli przyjmuje się, że $1 \text{ Mm} = 1852 \text{ m}$.

1.1. Liczby naturalne



Liczb naturalnych: $0, 1, 2, 3, \dots$ jest nieskończenie wiele. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n+1$ jest następna (większa o 1), i tak po milionie następuje milion jeden, potem milion dwa, milion trzy, a po trylionie (liczba zapisywana jako jedynka z 18 zerami) trylion jeden itd.

Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą **N**.

Definicja

Niech $m \neq 0$ i n będą liczbami naturalnymi. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n , gdy istnieje taka liczba naturalna k , że $n = m \cdot k$.

Jeśli liczba m jest dzielnikiem liczby n , to mówimy, że liczba n jest **podzielna** przez liczbę m lub że liczba n jest **wielokrotnością** liczby m .

Zauważ, że:

- liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
- liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
- każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

Przykład 1

Wymień dzielniki liczby 54.

Liczba 54 ma następujące dzielniki: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

Ćwiczenie 1

Wymień dzielniki liczby:

- a) 12, b) 28, c) 36, d) 48.

Podzielność liczb naturalnych zapisujemy w następujący sposób:

- zapis $3 \mid n$ czytamy: 3 dzieli n lub inaczej: liczba n jest podzielna przez 3,
- zapis $7 \nmid n$ czytamy: 7 nie dzieli n lub inaczej: liczba n nie jest podzielna przez 7.

Niech n będzie liczbą naturalną.

Jeśli $2 \mid n$, to liczbę n nazywamy **parzystą**.

Jeśli $2 \nmid n$, to liczbę n nazywamy **nieparzystą**.

Liczbę parzystą możemy zapisać w postaci $2k$, a liczbę nieparzystą – w postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Ćwiczenie 2

Czy prawdziwe jest stwierdzenie?

- a) $3 \mid 323232$ b) $11 \mid 111$ c) $15 \nmid 2345$ d) $7 \nmid 4949$

Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy powiedzieć, że liczba 45 dzieli się przez 3 **bez reszty**. $45 : 3 = 15$ reszta 0

Dzieląc 47 przez 3, otrzymujemy 15 i resztę 2. $47 : 3 = 15$ reszta 2

Oznacza to, że liczbę 47 można przedstawić w postaci: $47 = 3 \cdot 15 + 2$.

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci: $3k$, $3k + 1$ lub $3k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 26 b) 76 c) 108 d) 127 e) 713

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w postaci: $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ lub $4k + 3$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 3 b) 49 c) 79 d) 126 e) 492

Definicja

Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**.

Liczbami pierwszymi są na przykład liczby 7 i 37.

Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**. Zwróć uwagę na to, że liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do złożonych (jakie są dzielniki liczby 1, a jakie liczby 0?).

Grecki matematyk Euklides (żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e.) udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Ćwiczenie 5

Podaj wszystkie liczby pierwsze:

- a) parzyste,
b) mniejsze od 20,
c) większe od 20 i mniejsze od 50,
d) większe od 50 i mniejsze od 100.

Liczby pierwsze między 100 a 1000:

101	179	263	353	443	547	641	739	839	947
103	181	269	359	449	557	643	743	853	953
107	191	271	367	457	563	647	751	857	967
109	193	277	373	461	569	653	757	859	971
113	197	281	379	463	571	659	761	863	977
127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
139	227	311	401	491	599	683	797	887	
149	229	313	409	499	601	691	809	907	
151	233	317	419	503	607	701	811	911	
157	239	331	421	509	613	709	821	919	
163	241	337	431	521	617	719	823	929	
167	251	347	433	523	619	727	827	937	
173	257	349	439	541	631	733	829	941	

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Na przykład liczbę 52 można rozłożyć na czynniki następująco:

$$52 = 2 \cdot 26, \quad 52 = 4 \cdot 13, \quad 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$$

Ostatni z tych rozkładów jest **rozkładem na czynniki pierwsze**.

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki będące liczbami pierwszymi. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 3 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 6

Podaj rozkłady na czynniki pierwsze liczb: 99, 720, 770, 1024, 1323.

Praktycznym zastosowaniem rozkładu na czynniki pierwsze jest wyznaczanie **najmniejszej wspólnej wielokrotności** dwóch liczb – NWW oraz **największego wspólnego dzielnika** – NWD.

Przykład 2

Korzystając z podanych obok rozkładów na czynniki pierwsze liczb 120 i 54, otrzymujemy:

$$\text{NWW}(120, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$$

$$\text{NWD}(120, 54) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 7

Oblicz $\text{NWD}(x, y)$ oraz $\text{NWW}(x, y)$.

a) $x = 18, y = 30$

c) $x = 24, y = 72$

e) $x = 84, y = 105$

b) $x = 15, y = 50$

d) $x = 144, y = 192$

f) $x = 196, y = 420$

Ćwiczenie 8

Ile wynosi $\text{NWD}(x, y)$ i $\text{NWW}(x, y)$, jeśli żaden czynnik występujący w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby x nie występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby y ?

Zadania

1. Które spośród liczb: 2, 3, 4, 6, 9, 12, są dzielnikami podanej liczby?
a) 256 b) 294 c) 405 d) 588 e) 648
2. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 201 i podzielnych przez:
a) 5, b) 8, c) 9, d) 11?
3. Przedstaw liczbę n w postaci $5k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, natomiast r jest jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4.
a) $n = 39$ b) $n = 62$ c) $n = 156$ d) $n = 275$
4. Czy liczbę n można przedstawić w postaci $6k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, a r jest jedną z liczb: 1, 2, 3?
a) $n = 46$ b) $n = 74$ c) $n = 147$ d) $n = 276$
5. Podaj sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwszą jest:
a) $2n + 1$, b) $2n - 1$, c) $2n - 5$, d) $4n + 3$.
- D** 6. Uzasadnij, że suma:
a) trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9,
b) czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8,
c) pięciu kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 10.
- D** 7. Uzasadnij, że iloczyn:
a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,
b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48,
c) czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

Powtórzenie

8. Ile dzielników ma liczba n ?
a) $n = 12$ b) $n = 27$ c) $n = 29$ d) $n = 36$ e) $n = 60$
9. Wykonaj dzielenie z resztą.
a) $75 : 8$ b) $75 : 3$ c) $109 : 6$ d) $738 : 4$ e) $3241 : 6$
10. Oblicz $\text{NWD}(x, y)$ oraz $\text{NWW}(x, y)$.
a) $x = 24, y = 40$ c) $x = 48, y = 72$ e) $x = 112, y = 144$
b) $x = 36, y = 45$ d) $x = 54, y = 96$ f) $x = 105, y = 150$

Cechy podzielności liczb

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

1. Przez które z liczb: 2, 3, 5, 9 jest podzielna liczba:
 - a) 653 925, b) 574 038, c) 946 030, d) 749 298?
2. Podaj cechy podzielności liczby naturalnej przez 4 oraz przez 8. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 4? Czy jest podzielna przez 8?
 - a) $x = 713\,592$ b) $x = 639\,044$ c) $x = 480\,658$ d) $x = 817\,296$
3. Przez którą z liczb: 6, 12, 15 jest podzielna liczba:
 - a) 775 584, b) 868 470, c) 894 665, d) 501 474?
4. Dana jest liczba siedmiocyfrowa $3\,150\,57a$, gdzie a oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez:
 - a) 9, b) 6, c) 4, d) 8.
5. Nie wykonując dzielenia, podaj, które spośród liczb: 15, 45, 75, są dzielnikami danej liczby.
 - a) 1155 b) 9825 c) 5165 d) 8235

Czy wiesz, że...

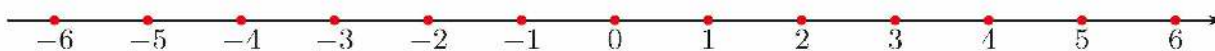
Dana jest liczba naturalna x . Niech s_n oznacza sumę cyfr tej liczby znajdujących się w jej zapisie na miejscach nieparzystych, a s_p – na miejscach parzystych. Liczba x jest podzielna przez 11, gdy liczba $s_n - s_p$ jest podzielna przez 11. Na przykład dla liczby $x = 6\,291\,978$ mamy:

$$s_n = 6 + 9 + 9 + 8 = 32, \quad s_p = 2 + 1 + 7 = 10$$

Liczba $s_n - s_p = 22$ jest podzielna przez 11, więc liczba x też jest podzielna przez 11.

6. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 11. Skorzystaj z podanej cechy podzielności.
 - a) $x = 9\,191\,809$ b) $x = 13\,602\,479$ c) $x = 8\,354\,311$

1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne



Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \dots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \dots$ oraz liczba 0 . Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą **Z**.

Każda liczba całkowita jest albo parzysta, albo nieparzysta.

Zera oraz liczb ujemnych używano w Indiach w drugiej połowie I tysiąclecia n.e. W Europie przyjęły się dopiero kilkaset lat później. Współcześnie oś liczbową z zerem i liczbami ujemnymi widzimy w zwykłym termometrze, a reguły rachunkowe dotyczące liczb ujemnych są przedmiotem ćwiczeń w szkole podstawowej.



Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci. Wynik zapisz w zeszycie.

- a) $42 - 78$ c) $-240 \cdot (-3)$ e) $7 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$
b) $-47 - (-63)$ d) $-342 + (-139)$ f) $(-16) \cdot (-2) - (-54) : (-9)$

Działania występujące w powyższym ćwiczeniu: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie są zawsze wykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Inaczej jest w przypadku dzielenia, gdyż same liczby całkowite już nie wystarczają. Na przykład w wyniku dzielenia $(-3) : (-2) = \frac{3}{2}$ otrzymujemy ułamek.

Definicja

Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi ($n \neq 0$), nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **Q**.

Zwróć uwagę, że każda liczba całkowita jest liczbą wymierną (dlaczego?).

Ułamki zazwyczaj przedstawiamy w możliwie najprostszej postaci, a więc w postaci **nieskracalnej**, np.:

$$\frac{180}{480} = \frac{18 \cdot \cancel{10}^1}{48 \cdot \cancel{10}^1} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot \cancel{6}^1}{8 \cdot \cancel{6}^1} = \frac{3}{8} \quad \text{Ułamek } \frac{3}{8} \text{ jest nieskracalny.}$$

Po doprowadzeniu ułamka do postaci nieskracalnej licznik i mianownik to liczby **względnie pierwsze** (nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb 1 i -1).

Uwaga. Określenia **dzielnik** używamy również w odniesieniu do liczb całkowitych, np. liczba -6 ma następujące dzielniki: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy ułamki x i y są równe.

a) $x = \frac{27}{72}, y = \frac{36}{96}$

b) $x = \frac{60}{108}, y = \frac{75}{135}$

c) $x = \frac{84}{156}, y = \frac{126}{246}$

Czasami trzeba ułamek **rozszerzyć**, na przykład wtedy, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach.

Ćwiczenie 3

Oblicz różnicę ułamków $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$, biorąc jako wspólny mianownik:

a) iloczyn liczb 12 i 18, b) NWW(12, 18).

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $1\frac{5}{12} - \frac{9}{8} - 2\frac{5}{6}$

c) $2\frac{2}{9} - 3\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3}$

b) $6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$

d) $2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $-2\frac{1}{3} \cdot (-\frac{27}{28})$

c) $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$

b) $-3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{16}$

d) $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : (-2\frac{1}{9})$

Działania na liczbach wymiernych

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

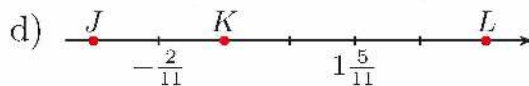
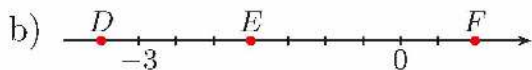
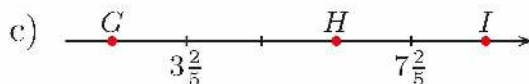
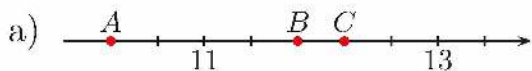
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Zadania

1. Jakim liczbom odpowiadają punkty zaznaczone na osi?



2. Oblicz.

a) $1\frac{3}{5} - 2\frac{1}{6}$

d) $\frac{7}{6} + (-\frac{5}{4} - \frac{4}{3})$

g) $1\frac{5}{8} - (-2\frac{2}{3} + 0,25)$

b) $3\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6}$

e) $-(-2\frac{2}{3}) + \frac{7}{15}$

h) $1\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8} - 0,125$

c) $\frac{1}{2} - (-\frac{1}{6} - \frac{1}{3})$

f) $-1\frac{9}{16} + \frac{11}{12}$

i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5})$

3. Oblicz.

a) $-1\frac{2}{25} \cdot (-2\frac{1}{12})$

b) $4\frac{1}{7} - 4\frac{1}{2} : (-5\frac{1}{4})$

c) $-2\frac{1}{9} \cdot 1\frac{16}{19} : \frac{7}{5}$

4. Oblicz.

a) $\frac{2\frac{1}{6}}{1\frac{4}{9}}$

c) $\frac{1\frac{5}{12}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$

e) $\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}}$

g) $\frac{2\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}}$

b) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$

d) $\frac{2 - \frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{2}}$

f) $\frac{\frac{1}{2} - 1\frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5}}$

h) $\frac{3\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{3}{4}}{2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2}$

5. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = 1\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = -\frac{3}{8}$.

a) $\frac{x-y}{y-z}$

b) $\frac{x+y-z}{y+z}$

c) $\frac{x-y+2z}{x+y+3z}$

6. Uporządkuj liczby: a , b , c w kolejności rosnącej.

$$a = \frac{1 - 0,125 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8} - \frac{3}{4}}, \quad b = 1\frac{1}{2} \cdot 4\frac{6}{11} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right), \quad c = \frac{2}{11} \cdot 1,5 \cdot 2,75 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$$

D 7. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości x , y i z .

a) $x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)$, $y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$, $z = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2$

b) $x = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}$, $y = \frac{2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}$, $z = \frac{1\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}$

8. Ułamki postaci $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią, nazywamy **ułamkami egipskimi**. Przeczytaj informację obok i przedstaw ułamek jako sumę różnych ułamków egipskich.

a) $\frac{2}{11}$

b) $\frac{2}{17}$

c) $\frac{2}{31}$

Czy wiesz, że...

Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, można przedstawić jako sumę:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

dla:

$$a = \frac{n+1}{2}, \quad b = \frac{n(n+1)}{2}$$

Powtórzenie

9. Podaj liczbę odwrotną do liczby x .

a) $x = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

c) $x = \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$

e) $x = \frac{1}{2} + 13 - \frac{1}{4}$

b) $x = \frac{3}{4} - \frac{3}{8}$

d) $x = \frac{8}{15} - \frac{4}{9}$

f) $x = \frac{2}{3} - 34 + \frac{1}{6}$

10. Oblicz.

a) $\left(1\frac{4}{5} - 3\frac{2}{7}\right) \cdot 5\frac{5}{13}$

c) $\left(0,4 + 1\frac{2}{3}\right) \cdot (-2)^2$

e) $\left(2\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2$

b) $1\frac{4}{5} - 3\frac{2}{7} \cdot 5\frac{5}{13}$

d) $\left(2\frac{3}{4} - 3,5\right) \cdot (-2^2)$

f) $\left(0,75 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^2$

11. Oblicz.

a) $\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{5} - \frac{1}{10}}$

b) $\frac{\frac{9}{5} : \frac{3}{7} - 3\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{5\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7}}$

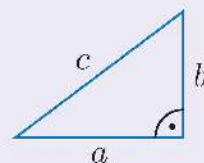
c) $\frac{1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot 1,5}{0,25 \cdot (-2)^2 - 3\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{11}}$

1.3. Liczby niewymierne

W VI wieku p.n.e. Grecy sformułowali twierdzenie znane obecnie jako **twierdzenie Pitagorasa**.

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

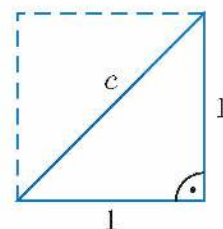
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie to miało istotny wpływ na rozwój pojęcia liczby. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1.

Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, czyli $c = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$).

Można udowodnić, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną. Liczby, które nie są wymierne, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.



Stwierdzenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, oznacza, że liczba ta nie jest równa żadnemu ułamkowi $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Tam, gdzie jest to potrzebne, korzysta się z odpowiednio dokładnych przybliżeń.

Innymi przykładami liczb niewymiernych są: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$.

Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą naturalną (np. $\sqrt{81} = 9$), albo liczbą niewymierną (np. $\sqrt{82}$). Analogicznie jest dla pierwiastka sześciennego (np. $\sqrt[3]{8} = 2$, a $\sqrt[3]{9}$ jest liczbą niewymierną).

Ćwiczenie 1

Wśród poniższych liczb wskaż liczby niewymierne.

a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{144}$

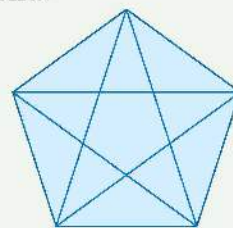
b) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{27}$

Inne przykłady liczb niewymiernych otrzymamy, jeżeli zauważymy, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Podobnie iloczyn liczby wymiernej różnej od zera i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną. Dlatego na przykład liczby:

$$3 + \sqrt{7}, \quad \frac{1}{5}\sqrt{13}, \quad \frac{1}{2} - 2\sqrt{17}, \quad 2\sqrt{3} - \frac{7}{3}$$

są liczbami niewymiernymi.

Przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jest to liczba niewymierna.



Ćwiczenie 2

Czy liczba x jest niewymierna?

a) $x = 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}$

c) $x = \sqrt{16} + 2\sqrt{14}$

e) $x = \sqrt[3]{9} - 1$

b) $x = 10 + \frac{2}{3}\sqrt{9}$

d) $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \sqrt{121}$

f) $x = 15 + 6\sqrt[3]{27}$

Ćwiczenie 3

Podaj przykład dwóch różnych liczb niewymiernych, których:

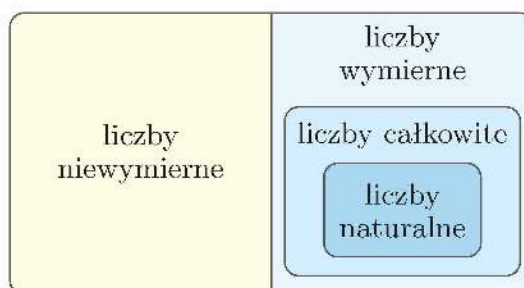
a) suma jest liczbą wymierną,

b) iloczyn jest liczbą wymierną.

Uwaga. Oprócz liczb niewymiernych, które są pierwiastkami kwadratowymi lub sześciennymi, istnieją inne liczby niewymierne, np. znana z geometrii liczba π .

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych** i oznaczamy literą **R**.

Zbiór liczb niewymiernych bywa oznaczany literami **IQ**.



Zadania

1. Wśród poniższych trzech liczb wskaż liczbę niewymierną.

a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{164}$

c) $\sqrt{25}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{225}$

e) $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{64}$

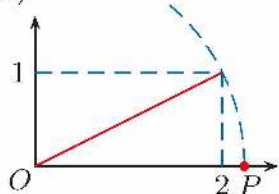
b) $\sqrt{9}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{49}$

d) $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{286}$

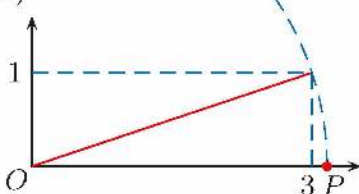
f) $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{216}$

2. Jakiej liczbie odpowiada punkt P zaznaczony na osi liczbowej? Czy jest to liczba wymierna?

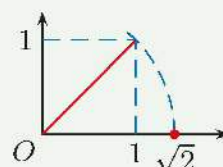
a)



b)



Konstrukcyjne wyznaczenie na osi liczbowej punktu odpowiadającego liczbie $\sqrt{2}$



3. Dany jest prostokąt o bokach x i y . Czy długość przekątnej tego prostokąta wyraża się liczbą wymierną?

a) $x = 2$, $y = 4$

c) $x = 6$, $y = 8$

e) $x = 5$, $y = 12$

b) $x = 3$, $y = 4$

d) $x = 8$, $y = 10$

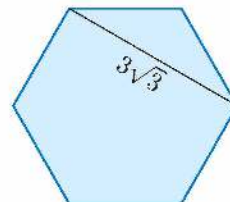
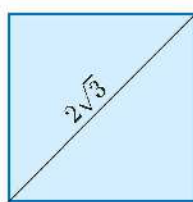
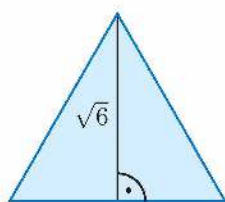
f) $x = 7$, $y = 24$

4. Korzystając z podanych przybliżeń, sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa (nie używaj kalkulatora).

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$ c) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 5$ c) $4 - 2\sqrt{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} > 4$ d) $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$

$\sqrt{2} \approx 1,414$
 $\sqrt{3} \approx 1,732$
 $\sqrt{5} \approx 2,236$

5. Podaj największą liczbę naturalną n spełniającą nierówność ($\pi \approx 3,14$):
 a) $n < 2\pi + 5$, b) $n < \pi^2 - 1$, c) $n^2 < 10\pi - 7$.
6. Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Obwód którego z tych wielokątów wyraża się liczbą wymierną?

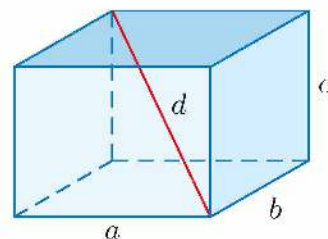


7. Dane są liczby niewymierne: p, q, r, s .

$p = 3 - 2\sqrt{3}$ $q = 2\sqrt{3}$ $r = 2\sqrt{3} - 7$ $s = 7\sqrt{3}$

Wybierz dwie spośród tych liczb tak, aby:

- a) ich suma była liczbą wymierną, c) ich iloczyn był liczbą wymierną,
 b) ich różnica była liczbą wymierną, d) ich iloraz był liczbą wymierną.
8. Długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach a, b, c wyraża się wzorem: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Czy długość przekątnej prostopadłościanu o podanych krawędziach jest liczbą niewymierną?
- a) $a = 6, b = 8, c = 10$ b) $a = 3, b = 4, c = 12$



Powtórzenie

9. Wśród poniższych liczb wskaż liczby:

a) naturalne, b) całkowite, c) wymierne, d) niewymierne.
 $-3, \quad 0,1, \quad 0, \quad \sqrt{4}, \quad -\frac{12}{3}, \quad \sqrt[3]{125}, \quad -\sqrt{3}, \quad 121\frac{1}{3}, \quad 2 - \sqrt{2}$

10. Podaj liczbę naturalną n spełniającą nierówności:

a) $n < \sqrt{35} < n + 1$, b) $n < 2\sqrt{3} < n + 1$, c) $n - 1 < 5\sqrt{5} < n$.

11. Czy długość przekątnej prostokąta o bokach a, b jest liczbą wymierną?

a) $a = 5, b = 12$ b) $a = 6, b = 10$ c) $a = 7, b = 24$

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ułamki o mianownikach: 10, 100, 1000, ... (czyli mianownikach będących potęgami liczby 10) nazywamy **uławkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby: $\frac{15}{100} = 0,15$; $\frac{37}{1000} = 0,037$; $5\frac{7}{10} = 5,7$.

Zapis po prawej stronie nazywamy **postacią dziesiętną** lub **rozwinięciem dziesiętnym** liczby. Aby uzyskać postać dziesiętną liczby wymiernej, wykonujemy dzielenie. Na przykład dla liczby $\frac{13}{4}$ otrzymamy:

$$\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3,25.$$

Dla liczby $\frac{1}{6}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{1}{6} = 0,166666666\dots$$

Takie rozwinięcie zapisujemy w następujący sposób:

$$\frac{1}{6} = 0,1(6).$$

Dla liczby $\frac{4}{7}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{4}{7} = 0,571428\,571428\,571428\dots$$

co zapiszemy $\frac{4}{7} = 0,(571428)$.



Przy obliczeniach na liczbach podanych w postaci dziesiętnej wygodnie jest korzystać z kalkulatora.

W rozwinięciu dziesiętnym nawias oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem**. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy **długością okresu**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{7}{20}$

c) $\frac{52}{25}$

e) $\frac{4}{125}$

b) $\frac{11}{25}$

d) $\frac{143}{50}$

f) $\frac{17}{250}$

Przedstaw liczbę $\frac{6}{25}$ w postaci dziesiętnej.

$$\frac{6}{25} = \frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{24}{100} = 0,24$$

Ćwiczenie 2

Jaka cyfra znajduje się na dziesiątym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

a) $0,(1234)$

b) $5,(732)$

c) $2,6(435)$

d) $0,32(1410)$

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie i podaj długości okresów nieskończonych rozwinięć dziesiętnych liczb: $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{27}$.

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej lub okresowej.

Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.

Uwaga. Rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe przedstawiają liczby niewymierne, np. 0,101001000100001...

Ćwiczenie 4

Które z podanych liczb wymiernych mają rozwinięcie skończone, a które nieskończone: $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$?

Ćwiczenie 5

Które z podanych niżej liczb mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe?

a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$

b) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$

W 2002 roku Yasumasa Kanada wyznaczył za pomocą komputera liczbę π z dokładnością do ponad biliona cyfr po przecinku. W praktyce wystarczają znacznie mniej dokładne przybliżenia.

3,141592653589793238462643383279502884
19716939937510582097494459230781640628
62089986280348253421170679821480865132
82306647093844609550582231725359408128
48111745028410270193852110555964462294
89549303819644288109756659334461284756
48233786783165271201909145648566923460
34861045432664821339360726024914127372

■ Reguła zaokrąglania

Do przybliżenia liczby w postaci dziesiętnej zwykle stosujemy **regułę zaokrąglania**, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby i zastąpieniu ich zerami:

- gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian;
- gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

Przykład 1

Zaokrągleniem liczby 6,9874 do trzech miejsc po przecinku jest liczba 6,987, do dwóch miejsc po przecinku – liczba 6,99, a do liczby całkowitej – liczba 7.

Ćwiczenie 6

Zaokrąglaj do liczby całkowitej.

- a) 20,9813 b) 19,901 c) 0,401 d) 1,099 e) 2,49957

Gdy przybliżenie liczby jest od niej mniejsze, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast gdy przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

Ćwiczenie 7

Podaj przybliżoną wartość π z dokładnością do n miejsc po przecinku. Czy jest to zaokrąglenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

- a) $n = 6$ b) $n = 5$ c) $n = 4$ d) $n = 3$ e) $n = 2$

Błąd przybliżenia jest równy różnicy liczby i jej przybliżenia.

Ćwiczenie 8

Zaokrąglaj liczbę do dwóch miejsc po przecinku. Podaj błąd przybliżenia.

- a) 6,7824 b) 8,4653 c) 7,8951 d) 9,9962 e) 5,9039

Zadania

1. Znajdź postać dziesiętną liczby (nie korzystaj z kalkulatora):

- a) $\frac{5}{4}$, b) $-\frac{27}{4}$, c) $-\frac{1}{8}$, d) $\frac{3}{8}$, e) $\frac{5}{8}$, f) $\frac{11}{8}$, g) $\frac{3}{80}$, h) $\frac{7}{80}$.

2. Na podstawie podanych obok informacji znajdź rozwinięcie dziesiętne liczby:

- a) $\frac{7}{9}$, c) $\frac{1}{300}$, e) $\frac{11}{30}$,
b) $\frac{1}{60}$, d) $\frac{5}{900}$, f) $\frac{17}{90}$.

$$\frac{1}{3} = 0,33333333 \dots$$

$$\frac{1}{6} = 0,16666666 \dots$$

$$\frac{1}{9} = 0,11111111 \dots$$

3. Jaka cyfra znajduje się na dwunastym, a jaka na dwudziestym piątym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby? Zaokrąglaj tę liczbę do trzech miejsc po przecinku.

- a) 1,(046) b) 0,3(25) c) 7,0(037) d) 9,(3486) e) 2,86(345)

4. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym czwartym, a jaka na setnym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby: a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{5}{7}$?

5. Znajdź cyfry a i b liczby o rozwinięciu okresowym $7,19(1ab693)$, jeśli w tej liczbie na jedenastym miejscu po przecinku występuje cyfra 3, a na dwudziestym drugim cyfra 6.

6. Wyznacz cyfry x i y liczby o rozwinięciu okresowym $0,(1x2y3)$, jeśli cyfra znajdująca się na miejscu dwudziestym trzecim po przecinku jest dwukrotnie większa od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym drugim i trzykrotnie mniejsza od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym czwartym.

7. Na podstawie podanego obok twierdzenia odpowiedz, czy rozwinięcie ułamka jest skończone czy okresowe.

a) $\frac{633}{320}$ b) $\frac{137}{480}$ c) $\frac{6561}{22\,400}$ d) $\frac{11\,111}{51\,200}$

Ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy liczbę n można zapisać w postaci $2^k \cdot 5^l$.

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przedstaw liczbę $0,(12)$ w postaci ułamka zwykłego.

$$x = 0,121212\dots$$

$$100x = 12,121212\dots$$

Obie strony równania mnożymy przez 100, aby przecinek znalazł się za pierwszym wystąpieniem okresu.

$$100x = 12 + x$$

$$99x = 12$$

$$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

a) $0,(36)$ b) $3,(72)$ c) $-6,(24)$ d) $0,(9)$ e) $41,7(9)$ f) $2,1(52)$

9. Liczby $x = 0,(6)$ i $y = 4,(36)$ przedstaw w postaci ułamka zwykłego, a następnie oblicz: $x + y$, $x^2 - y$, $x + \frac{1}{y}$.

Powtórzenie

10. Przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej (nie korzystaj z kalkulatora).

a) $\frac{19}{4}$ c) $\frac{15}{400}$ e) $\frac{25}{8}$ g) $\frac{7}{3}$ i) $\frac{2}{9}$
 b) $\frac{7}{40}$ d) $-\frac{59}{8}$ f) $\frac{26}{3}$ h) $-\frac{58}{9}$ j) $\frac{5}{80}$

11. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby (nie korzystaj z kalkulatora)?

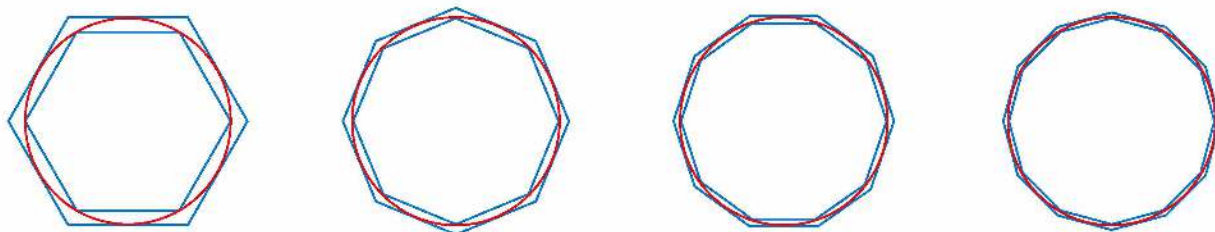
a) $\frac{5}{11}$ b) $\frac{8}{13}$ c) $\frac{11}{30}$ d) $\frac{19}{60}$ e) $\frac{7}{27}$

12. Podaj przybliżoną wartość $\sqrt{5}$ z dokładnością do n miejsc po przecinku dla: a) $n = 7$, b) $n = 5$, c) $n = 1$.

$$\sqrt{5} \approx 2,23606798$$

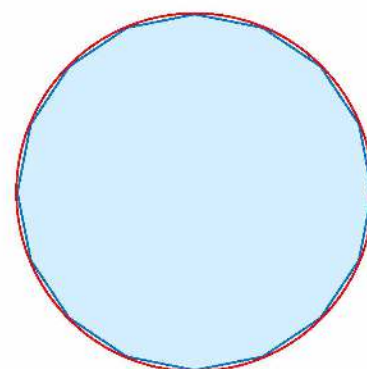
Długość okręgu. Liczba π

Już Archimedes wiedział, że długość okręgu można wyznaczyć z dowolną dokładnością, rozpatrując wielokąty foremne wpisane w okrąg oraz na nim opisane. Wraz ze wzrostem liczby boków wielokątów foremnych ich obwody dają coraz dokładniejsze przybliżenia długości okręgu.



1. W tabeli podano długości boków wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1. Dla każdego wielokąta podaj długość jego boku oraz połowę obwodu z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Dla którego z tych wielokątów długość połowy obwodu różni się od liczby π o mniej niż 0,01?

Wielokąt foremny	Długość boku
kwadrat	$\sqrt{2}$
8-kąt	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
16-kąt	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
32-kąt	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$
64-kąt	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$



Istnieje wiele wzorów, za pomocą których można otrzymać przybliżenie liczby π . Oto dwa z nich:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots$$

wzór Wallisa

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \dots$$

wzór Leibniza

Powyższe wzory są jednak mało praktyczne – np. aby otrzymać cztery cyfry po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π , korzystając ze wzoru Leibniza, należy zsumować ponad 100 000 składników.

2. Znajdź informacje na temat innych wzorów pozwalających otrzymać przybliżenie liczby π .

1.5. Pierwiastek kwadratowy

Przypomnijmy definicję pierwiastka kwadratowego.

Definicja

Pierwiastkiem kwadratowym (drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , której kwadrat jest równy a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

Przykład 1

$$\sqrt{36} = 6, \text{ bo } 6^2 = 36$$

$$\sqrt{0,16} = 0,4, \text{ bo } (0,4)^2 = 0,16$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ bo } 0^2 = 0$$

Zwróć uwagę na to, że $\sqrt{36}$ nie jest równy -6 , chociaż $(-6)^2 = 36$, ponieważ w definicji założyliśmy, że pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\sqrt{144}$

d) $\sqrt{625}$

g) $\sqrt{1,21}$

b) $\sqrt{225}$

e) $\sqrt{2500}$

h) $\sqrt{3,61}$

c) $\sqrt{324}$

f) $\sqrt{8100}$

i) $\sqrt{4,41}$

Prawdziwa jest następująca własność:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{gdy } a \geq 0 \\ -a & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

Stąd $\sqrt{5^2} = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\sqrt{3^2}$

b) $\sqrt{(-3)^2}$

c) $\sqrt{(-9)^2}$

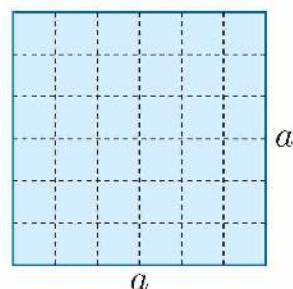
d) $\sqrt{(-1,2)^2}$

e) $\sqrt{(-\sqrt{3})^2}$

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole ($P = a^2$, więc $a = \sqrt{P}$).

Ćwiczenie 3

Oblicz obwód kwadratu o polu: a) $3,24 \text{ cm}^2$, b) 1024 cm^2 .



Przy odpowiednich założeniach (jakich?) prawdziwe są podane obok wzory.

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Przykład 2

$$a) \sqrt{49 \cdot 144} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} = 7 \cdot 12 = 84$$

$$b) \sqrt{12,5 \cdot 2} = \sqrt{12,5 \cdot 2} = \sqrt{25} = 5$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

$$a) \sqrt{4 \cdot 81}, \sqrt{25 \cdot 0,36}, \sqrt{0,09 \cdot 361}$$

$$c) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}, \sqrt{6} \cdot \sqrt{1,5}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$$

$$b) \sqrt{\frac{121}{144}}, \sqrt{\frac{361}{400}}, \sqrt{\frac{576}{625}}$$

$$d) \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{35}}$$

Zadania

1. Oblicz.

$$a) \sqrt{121} + \sqrt{49} - \sqrt{225}$$

$$d) \sqrt{3,61} - \sqrt{1,21} - \sqrt{0,09}$$

$$b) \sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{144}$$

$$e) \sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{64}{25}}$$

$$c) \sqrt{0,25} + \sqrt{1,44} + \sqrt{6,25}$$

$$f) \sqrt{3\frac{6}{25}} - \sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}}$$

D 2. Uzasadnij, że:

$$a) \sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}, \quad b) \sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}, \quad c) \sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}.$$

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne leżące między podanymi liczbami.

$$a) \sqrt{2} \text{ i } \sqrt{33}$$

$$b) \sqrt{10} \text{ i } \sqrt{140}$$

$$c) \sqrt{80} \text{ i } \sqrt{300}$$

4. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

$$a) \sqrt{18}$$

$$c) \sqrt{48}$$

$$e) \sqrt{108}$$

$$g) \sqrt{392}$$

$$b) \sqrt{24}$$

$$d) \sqrt{96}$$

$$f) \sqrt{252}$$

$$h) \sqrt{450}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{80} &= \sqrt{16 \cdot 5} = \\ &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

5. Doprowadź do postaci $a\sqrt{b}$.

$$a) 4\sqrt{2} + \sqrt{8}$$

$$c) \sqrt{18} + \sqrt{98}$$

$$e) \sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{242}$$

$$b) \sqrt{32} - 3\sqrt{2}$$

$$d) \sqrt{200} - \sqrt{50}$$

$$f) \sqrt{800} + \sqrt{242} - \sqrt{162}$$

6. Doprowadź do postaci $a\sqrt{b}$.

$$a) 7\sqrt{5} + \sqrt{20}$$

$$c) \sqrt{12} + \sqrt{75}$$

$$e) 0,2\sqrt{50} + 0,8\sqrt{72} - 0,3\sqrt{32}$$

$$b) \sqrt{48} - \sqrt{27}$$

$$d) \sqrt{45} - \sqrt{125}$$

$$f) 3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$$

7. Usuń niewymierność z mianownika, postępując tak, jak w przykładzie.

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{3\sqrt{10}}$
 b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3}{5\sqrt{15}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

8. Usuń niewymierność z mianownika. Podaj przybliżoną wartość wyrażenia (przyjmij $\sqrt{2} \approx 1,4$).

- a) $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

- a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ e) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ g) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{480}$
 b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ f) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$ h) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{180}$

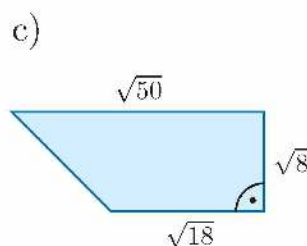
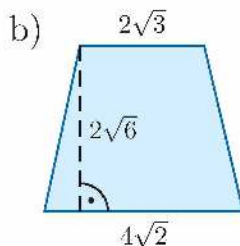
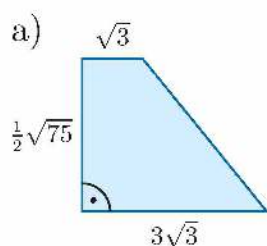
10. Oblicz.

- a) $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$ b) $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}}$ c) $\frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{363}}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{130}}$ d) $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{162}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{135}}$

11. Wykonaj działania.

- a) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$ b) $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

12. Oblicz pole trapezu.



Powtórzenie

13. Oblicz.

- a) $\sqrt{81} + \sqrt{25}$ b) $\sqrt{0,49} + \sqrt{0,64}$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{16}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{100}}$

14. Figurę przedstawioną na rysunku obok można rozciąć na dwa kwadraty o polach 6,25 i 4,41. Oblicz obwód tej figury.



15. Włącz czynnik pod pierwiastek.

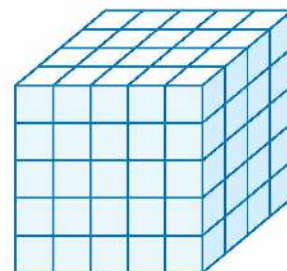
- a) $5\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $9\sqrt{2}$ d) $13\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$

16. Prostokąt o polu P można rozciąć na dwa kwadraty. Oblicz obwód tego prostokąta.

- a) $P = 98 \text{ cm}^2$ b) $P = 6,48 \text{ cm}^2$ c) $P = \frac{1}{8} \text{ m}^2$ d) $P = \frac{1}{72} \text{ m}^2$

1.6. Pierwiastek sześcienny

Rozpatrzmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu o danej objętości V . Na przykład długość krawędzi sześcianu o objętości $V = 125 \text{ cm}^3$ jest równa 5 cm. Zapisujemy to następująco $\sqrt[3]{125} = 5$. Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby 125.



Definicja

Pierwiastkiem sześciennym (trzeciego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Przykład 1

Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$

c) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, bo $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$

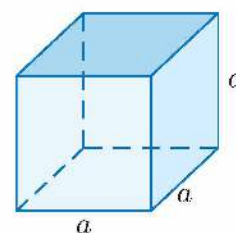
b) $\sqrt[3]{0} = 0$, bo $0^3 = 0$

d) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, bo $0,6^3 = 0,216$

Przykład 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości 27.

Objętość V sześcianu o krawędzi długości a jest równa a^3 , więc $a = \sqrt[3]{V}$, czyli $a = \sqrt[3]{27} = 3$.



Ćwiczenie 1

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości V .

a) $V = 1$

b) $V = 64$

c) $V = 216$

d) $V = 8000$

Ćwiczenie 2

Oblicz, korzystając z informacji podanych obok.

a) $\sqrt[3]{512}$

c) $\sqrt[3]{1331}$

e) $\sqrt[3]{1,331}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}}$

$$8^3 = 512$$

$$9^3 = 729$$

$$11^3 = 1331$$

Obliczanie pierwiastka trzeciego stopnia jest działaniem odwrotnym do podnoszenia do trzeciej potęgi.

Na przykład $\sqrt[3]{(11)^3} = 11$ oraz $(\sqrt[3]{9})^3 = 9$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^3} &= a \\ (\sqrt[3]{a})^3 &= a\end{aligned}$$

W obliczeniach wykorzystujemy podane poniżej wzory na pierwiastek sześcienny iloczynu i pierwiastek sześcienny ilorazu. Są one analogiczne do wzorów dla pierwiastka kwadratowego.

Przykład 3

a) $\sqrt[3]{0,001 \cdot 343} = \sqrt[3]{0,001} \cdot \sqrt[3]{343} = 0,1 \cdot 7 = 0,7$

b) $\frac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{686}{2}} = \sqrt[3]{343} = 7$

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \sqrt[3]{\frac{125}{216}}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ d) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

Ćwiczenie 4

Przeanalizuj podany przykład. Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

■ Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby rzeczywistej

W przeciwieństwie do definicji pierwiastka kwadratowego, definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne.

Na przykład: $\sqrt[3]{-1} = -1$, bo $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$.

Definicja

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-27}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ e) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$

Ogólnie dla pierwiastka n -tego stopnia mamy następujące definicje:

Jeśli n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby nieujemnej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

- a) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[4]{0,0016}$ e) $\sqrt[6]{729}$ g) $\sqrt[8]{256}$ i) $\sqrt[10]{1024}$
 b) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[5]{-0,000\,01}$ f) $\sqrt[7]{-1}$ h) $\sqrt[7]{-128}$ j) $\sqrt[9]{-512}$

Zadania

1. Podaj wartość pierwiastka.

- a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$
 b) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$ h) $\sqrt[3]{12\frac{19}{27}}$

2. Oblicz.

- a) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt[3]{0,125} + \sqrt[3]{0,001}$
 b) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[3]{0,027} + \sqrt[3]{0,008}$

3. Wylącz czynnik przed pierwiastek.

- a) $\sqrt[3]{32}$ b) $\sqrt[3]{250}$ c) $\sqrt[3]{135}$ d) $\sqrt[3]{375}$ e) $\sqrt[3]{108}$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $6\sqrt[3]{2}$ d) $4\sqrt[3]{10}$ e) $6\sqrt[3]{5}$

5. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość.

- a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2,25}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{0,08}$ c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. Która z podanych liczb jest większa: x czy y ?

- a) $x = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}, y = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ c) $x = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{729}}, y = \sqrt[3]{\frac{135}{320}}$
 b) $x = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{27}}, y = \sqrt[3]{\frac{3000}{81}}$ d) $x = \frac{\sqrt[3]{0,064}}{\sqrt[3]{0,125}}, y = \frac{\sqrt[3]{0,081}}{\sqrt[3]{0,192}}$

7. Porównaj liczby.

- a) $4\sqrt[3]{2}$ i $2\sqrt[3]{4}$ b) $3\sqrt[3]{5}$ i $2\sqrt[3]{15}$ c) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ i $\frac{4}{5}\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$

8. Objętość prostopadłościanu o wymiarach $x \text{ cm} \times y \text{ cm} \times z \text{ cm}$ jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

a) $x = 4, y = 4, z = 32$

b) $x = 16, y = 20, z = 25$

9. Z trzech sześciennych klocków zbudowano wieżę. Oblicz wysokość wieży, jeśli jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu o wymiarach:

a) $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$,

b) $6,25 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$.

10. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $3\sqrt[4]{2}$

b) $5\sqrt[4]{4}$

c) $4\sqrt[5]{2}$

d) $10\sqrt[6]{0,01}$

e) $2\sqrt[10]{5}$

11. Oblicz.

a) $\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{256} + \sqrt[4]{625}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{81}{16}} - 3\sqrt[4]{\frac{256}{625}}$

b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{10\,000}$

c) $6\sqrt[4]{0,0625} - 3\sqrt[4]{0,0081}$

c) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} - \frac{\sqrt[6]{1000}}{\sqrt[6]{0,001}} - \sqrt[5]{32}$

f) $\sqrt[6]{64} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

12. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-8000}$

b) $\sqrt[3]{-0,001}$

c) $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$

d) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

13. Oblicz.

a) $2\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}} - \sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{5\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{-72}}{\sqrt[3]{-9}}$

b) $-\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} + \sqrt[3]{-0,125}$

d) $\frac{\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{-3}} - \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}} + \frac{\sqrt[7]{-128}}{\sqrt[7]{-1}}$

D 14. Uzasadnij, że iloczyn xyz równa się zero.

a) $x = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{16}, y = \sqrt[7]{1} - 2\sqrt[6]{1}, z = \sqrt[10]{1024} + 2\sqrt[9]{-1}$

b) $x = \sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{81}, y = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{81}, z = \sqrt[5]{-1} + \sqrt[4]{1}$

Powtórzenie

15. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8}$

c) $\sqrt[3]{-0,216} + \sqrt[3]{0,064}$

e) $\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{0,0001}$

b) $-\sqrt[3]{343} + \sqrt[3]{216}$

d) $\sqrt[3]{0,001} - \sqrt[3]{-0,008}$

f) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{0,0016}$

16. Która spośród liczb: a, b, c, d , jest najmniejsza, a która – największa?

a) $a = \sqrt{8} \cdot \sqrt{18}, b = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}, c = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81}, d = \sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[3]{-27}$

b) $a = \sqrt{\frac{27}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}, b = \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}, c = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}, d = \sqrt[3]{-\frac{5}{4}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{25}{2}}$

1.7. Potęga o wykładniku całkowitym

Przykład 1

Założmy, że mamy parę królików oraz że liczba królików podwaja się co pół roku. Ile królików będziemy mieli po 5 latach?

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ półrocznych okresów}} = 2^{11} = 2048$$

Przypomnijmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a :

$$\begin{array}{c} \text{wykładnik potęgi} \\ \swarrow \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}} \\ \uparrow \\ \text{podstawa potęgi} \end{array}$$

Przyjmujemy również, że: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

Uwaga. Nie definiujemy wartości 0^0 .

Przykład 2

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

c) $(-3)^1 = -3$

d) $345^0 = 1$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $9^2, 9^3, 9^4$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3, \left(\frac{3}{4}\right)^4$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2, \left(-\frac{2}{5}\right)^3, \left(-\frac{2}{5}\right)^4$

Ćwiczenie 2

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^0, (-2)^4, (-2)^9, (-3)^4, (-3)^9$$

Przydatna jest umiejętność rozpoznawania niektórych potęg liczb: 2, 3, 4, 5.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

Możemy również określić potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład 3

a) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) 4^{-2}

c) $(-3)^{-2}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

i) $0,2^{-2}$

b) 4^{-3}

d) $(-3)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$

j) $(-0,2)^{-3}$

Ćwiczenie 4

Czy podane liczby są równe?

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}, \left(\frac{7}{5}\right)^3$

b) $\left(-\frac{4}{9}\right)^6, \left(\frac{9}{4}\right)^{-6}$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5}, \left(\frac{5}{3}\right)^5$

Przy obliczaniu wartości wyrażeń, w których występują potęgi, możemy wykorzystywać prawa działań na potęgach.

Twierdzenie

Dla liczb całkowitych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b :

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $3^9 \cdot 3^{-6}$

c) $(2^5)^{-2}$

e) $5^{-9} : 5^{-11}$

g) $6^5 : 3^5$

i) $6^3 \cdot 2^{-5}$

b) $0,5^3 \cdot 0,5^7$

d) $(0,25^{-1})^{-4}$

f) $4 : 4^{-4}$

h) $10^{10} : 5^{10}$

j) $10^4 \cdot 5^{-2}$

Ćwiczenie 6

Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.

a) $(x^2 \cdot x^6) : x^4$

b) $(x^7 : x^2) : x^{-1}$

c) $(x^2 y)^{-1} \cdot x^3$

d) $(x^{-2} y^3)^{-2} : y^{-3}$

Zadania

1. Oblicz.

a) $(-2)^5$, $(-2)^{-5}$, 2^{-5} c) $(\sqrt{3})^4$, $(\sqrt{3})^{-2}$, $(\sqrt{3})^{-6}$
b) $(\frac{1}{3})^{-2}$, $(-\frac{1}{3})^{-3}$, $(-\frac{1}{3})^{-4}$ d) $(\sqrt{2})^6$, $(\sqrt{2})^7$, $(\sqrt{2})^{-8}$

2. Zapisz liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^3 \cdot 4^6$ b) $4^{-5} \cdot 8^2$ c) $64^2 : 32^{-3}$ d) $(16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$

3. Zapisz podane liczby w postaci potęg o tej samej podstawie.

a) 16 , $\frac{1}{64}$, 8^3 , $(\sqrt{2})^4$, 1024^2 c) $0,001$, 100^5 , $(\frac{1}{100})^{-4}$, $(\frac{1}{0,1})^{-6}$
b) $\frac{1}{81}$, 27 , 9^{-2} , $(\sqrt{3})^6$, 81^{-5} d) 25^{-3} , $(\frac{1}{5})^{-2}$, $(\frac{1}{125})^4$, 625^{-5}

4. Oblicz.

a) $(-2\sqrt{3})^{-3}$ b) $(\frac{3}{\sqrt{2}})^4$ c) $(-\frac{\sqrt{5}}{10})^3$ d) $((-3\sqrt{2})^{-1})^{-2}$

5. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.

a) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^{-6}$ c) $(a^4 : a^{-1}) \cdot a^{-3}$ e) $(a^{-1} \cdot a^6)^{-2} \cdot (a^{-3})^2$
b) $(a^8 \cdot a^{-3}) : a^2$ d) $(a^7 : a^{-2}) : a^{-4}$ f) $(a^5 : a^{-4})^2 : (a^{-4})^{-1}$

6. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = 2^4 \cdot 4^{-2}$, $y = 4^{-4} : 8^{-2}$ b) $x = (2^{-4} : 2^{-6})^{-1}$, $y = (2^{-4} \cdot 2^{-3})^{-1}$

7. Oblicz.

a) $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot (\frac{1}{9})^2$ c) $\frac{6^0 + 0^6}{6^{-1}} + (4^6 - 16^3)$ e) $(0,5 \cdot 8^6 - 2 \cdot 16^4) : 7^3$
b) $\left((\frac{2}{3})^{-2}\right)^{-2}$ d) $\left((\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})^{-5}\right) : 6^{-2}$ f) $\left((\frac{5}{2})^3 : (\frac{2}{5})^2\right) \cdot (\frac{5}{2})^{-4}$

Powtórzenie

8. Oblicz.

a) 8^{-2} , $(-8)^2$, -8^{-2} , $-(-\frac{1}{8})^2$ c) $(\frac{1}{3})^{-4}$, $(-\frac{1}{3})^4$, $-(-\frac{1}{3})^{-4}$
b) 4^3 , $(-4)^{-3}$, -4^{-3} , $-(-\frac{1}{4})^{-3}$ d) $(\sqrt{2})^{-6}$, $(-\sqrt{2})^6$, $-(-\sqrt{2})^{-6}$

9. Oblicz.

a) $6^{-3} \cdot 6^5$ d) $(\frac{2}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^{-5}$ g) $(\frac{3}{4})^{-5} : (\frac{3}{4})^{-3}$ j) $(6^{-2})^5 \cdot 6^8$
b) $4^{-8} \cdot 4^6$ e) $5^7 : 5^{10}$ h) $(\frac{3}{8})^7 : (\frac{3}{8})^8$ k) $(4^{-3})^4 : 4^9$
c) $0,5^{-4} \cdot 0,5^{-1}$ f) $7^{-4} : 7^{-6}$ i) $(3^6)^{-2} \cdot 3^{10}$ l) $(8^4)^{-2} : 8^{-10}$

1.8. Potęga o wykładniku wymiernym

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$

b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

c) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $4^{\frac{1}{2}}$

b) $16^{\frac{1}{2}}$

c) $81^{\frac{1}{2}}$

d) $8^{\frac{1}{3}}$

e) $27^{\frac{1}{3}}$

f) $81^{\frac{1}{4}}$

Potęga o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$ definiujemy następująco:

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$

b) $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

c) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $4^{\frac{3}{2}}$

c) $8^{\frac{4}{3}}$

e) $81^{1,5}$

g) $125^{-\frac{2}{3}}$

i) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2,5}$

b) $27^{\frac{2}{3}}$

d) $32^{\frac{3}{5}}$

f) $4^{2,5}$

h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$

j) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m zachodzi równość $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $(\sqrt{10})^6$

c) $\sqrt[3]{125^2}$

e) $(\sqrt[8]{625})^2$

g) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$

i) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{49}}\right)^3$

b) $\sqrt{4^{10}}$

d) $\sqrt[5]{32^3}$

f) $\sqrt{\sqrt{81}}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{4^3}}$

j) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16^6}}$

Prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładniku całkowitym.

Przykład 3

Oblicz.

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

b) $6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 6^1 = 6$

Dla liczb wymiernych x, y i liczb rzeczywistych $a > 0, b > 0$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ b) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}$ c) $4^{\frac{9}{2}} : 4^{\frac{5}{2}}$ d) $2^{7,5} : 2^{2,5}$ e) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

Przykład 4

Oblicz.

a) $8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = (16^{\frac{1}{2}})^5 = 4^5 = 1024$

b) $10^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}} = (10 : 5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

c) $80^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 40$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ b) $12^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{5}{2}}$ c) $24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ d) $9^{\frac{4}{3}} : 24^{\frac{2}{3}}$ e) $375^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $\left(9^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}$ b) $\left(8^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}}$ c) $\left(32^{\frac{28}{25}}\right)^{-\frac{5}{7}}$ d) $\left(125^{\frac{2}{3}}\right)^{0,75}$ e) $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{2,5}\right)^{0,6}$

Obliczając przybliżone wartości potęg o wykładniku wymiernym, możemy skorzystać z odpowiedniego kalkulatora (przykładowe wyniki zostały przedstawione obok).

$$10^{0,3} \approx 1,995262315$$

$$10^{0,45} \approx 2,818382931$$

$$10^{0,625} \approx 4,216965034$$

Ćwiczenie 8

Korzystając z powyższych przybliżeń, podaj z dokładnością do czterech miejsc po przecinku przybliżoną wartość potęgi:

a) $10^{2,3}$, b) $10^{3,45}$, c) $10^{\frac{13}{8}}$, d) $10^{-1,7}$.

W dalszym toku nauki rozszerzymy pojęcie potęgi na potęgę o wykładniku rzeczywistym, czyli także niewymiernym, np. $2^{\sqrt{3}}$, $10^{\sqrt{2}}$.

W tabeli obok przedstawiono kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $10^{\sqrt{2}}$.

Uwaga. $\sqrt{2} \approx 1,414213562$

$10^{1,4}$	$\approx 25,118864315$
$10^{1,41}$	$\approx 25,703957828$
$10^{1,414}$	$\approx 25,941793621$
$10^{1,414213562}$	$\approx 25,954553497$
$10^{\sqrt{2}}$	$\approx 25,954553519$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.

- | | | | |
|------------------|------------------|---------------------|-------------------|
| a) $\sqrt{2}$ | c) $\sqrt{0,5}$ | e) $\sqrt{512}$ | g) $2\sqrt{2}$ |
| b) $\sqrt[3]{2}$ | d) $\sqrt[3]{4}$ | f) $\sqrt[3]{1024}$ | h) $2\sqrt[3]{2}$ |

2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.

- | | | | |
|--------------------|----------------------------|------------------------------|--------------------------|
| a) $\sqrt{7^3}$ | c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ | e) $\sqrt{\frac{1}{7^3}}$ | g) $49\sqrt{7}$ |
| b) $\sqrt[3]{7^2}$ | d) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ | f) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ | h) $7 \cdot \sqrt[5]{7}$ |

3. Oblicz.

- | | | | |
|------------------------|------------------------|----------------|---------------------|
| a) $9^{\frac{3}{2}}$ | c) $8^{\frac{4}{3}}$ | e) $144^{0,5}$ | g) $10\,000^{0,25}$ |
| b) $125^{\frac{2}{3}}$ | d) $27^{-\frac{2}{3}}$ | f) $16^{0,75}$ | h) $81^{-0,125}$ |

4. Oblicz.

- | | | | |
|--------------------------|----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| a) $0,04^{\frac{3}{2}}$ | c) $0,027^{\frac{2}{3}}$ | e) $0,0625^{-\frac{5}{4}}$ | g) $0,0081^{-1,25}$ |
| b) $0,16^{-\frac{1}{2}}$ | d) $0,0016^{-\frac{3}{4}}$ | f) $0,000\,32^{\frac{3}{5}}$ | h) $0,000\,002\,56^{0,375}$ |

5. Oblicz.

- | | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|--|--|
| a) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ | b) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$ | c) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$ | d) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$ |
|--------------------------------|----------------------------------|--|--|

Powtórzenie

6. Oblicz.

- | | | | |
|---|--|--|---|
| a) $25^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}}$ | b) $32^{\frac{1}{5}} + 81^{\frac{1}{4}}$ | c) $4^{-\frac{1}{2}} + 8^{-\frac{1}{3}}$ | d) $(\frac{9}{16})^{-\frac{1}{2}} + (\frac{27}{64})^{-\frac{1}{3}}$ |
|---|--|--|---|

7. Oblicz.

- | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| a) $16^{\frac{5}{4}}$ | b) $64^{\frac{2}{3}}$ | c) $8^{-\frac{5}{3}}$ | d) $25^{-\frac{3}{2}}$ | e) $81^{-\frac{3}{4}}$ |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|

8. Oblicz.

- | | | | |
|-------------------------------------|--|--|---|
| a) $2^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{2}$ | b) $49^{\frac{1}{2}} : 49^{\frac{1}{4}}$ | c) $\sqrt{7^5} \cdot 7^{-\frac{3}{2}}$ | d) $9^{-\frac{3}{4}} : 27^{-\frac{3}{2}}$ |
|-------------------------------------|--|--|---|

- 2** Zapisz masy Słońca, Merkurego, Jowisza i Ziemi, korzystając z europejskiego oraz amerykańskiego nazewnictwa wielkich liczb.

1.9. Logarytm i jego własności

Pojęcie logarytmu wprowadził ponad 400 lat temu szkocki matematyk John Napier (1550–1617), a logarytmy dziesiętne zdefiniował Anglik Henry Briggs (1561–1630) – opublikował on wielocyfrowe tablice takich logarytmów.

Definicja

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z dodatniej liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Piszemy wówczas $\log b = x$.

Przykład 1

a) $\log 1000 = 3$, ponieważ $10^3 = 1000$

b) $\log 0,1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0,1$

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Pytanie o wartość $\log b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log 10$ b) $\log 100$ c) $\log 100\,000$ d) $\log 0,01$ e) $\log \sqrt[3]{10}$

Rozpatrywane są też logarytmy o innych podstawach. Na przykład logarytmem o podstawie 2 z liczby b jest taka liczba x , że $2^x = b$. Piszemy wówczas $\log_2 b = x$.

Przykład 2

a) $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$

b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, ponieważ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

Pytanie o wartość $\log_2 b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\log_2 16$ b) $\log_2 1024$ c) $\log_2 \frac{1}{2}$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_2 \sqrt{2}$

Definicja

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytm** o podstawie a z liczby b to wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Przykład 3

- a) $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$
b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$

$$\log_a b = x$$

liczba logarytmowana
podstawa logarytmu

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $\log_3 3$ b) $\log_3 81$ c) $\log_3 \sqrt{3}$ d) $\log_3 27$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1 zachodzą podane obok własności.

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

W obliczeniach wykorzystywane są następujące własności logarytmów (ich dowody zostaną przedstawione w dalszym toku nauki).

Twierdzenie

Jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad \text{logarytm iloczynu}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \text{logarytm ilorazu}$$

$$\log_a b^p = p \log_a b \quad \text{logarytm potęgi}$$

Przykład 4

- a) $\log_2(256 \cdot 1024) = \log_2 256 + \log_2 1024 = 8 + 10 = 18$
b) $\log_2 16\sqrt{2} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

- a) $\log_2(64 \cdot 256)$ b) $\log_5(125 \cdot 625)$ c) $\log_5 5\sqrt{5}$ d) $\log_2 8\sqrt[3]{2}$ e) $\log_3 9\sqrt[4]{3}$

Przykład 5

- a) $\log_2 \frac{0,25}{32} = \log_2 0,25 - \log_2 32 = -2 - 5 = -7$
b) $\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu.

- a) $\log_2 \frac{0,5}{64}$ b) $\log_2 \frac{1024}{0,125}$ c) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{8}$ d) $\log_5 \frac{625}{\sqrt{5}}$ e) $\log_3 \frac{243}{\sqrt[4]{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm potęgi.

a) $\log_2 4^{10}$ b) $\log_2 32^4$ c) $\log_3 9^6$ d) $\log_3 81^{-4}$

$$\begin{aligned}\log_2 8^5 &= 5 \log_2 8 = \\ &= 5 \cdot 3 = \\ &= 15\end{aligned}$$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_2 512$ b) $\log_2 2$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ d) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ e) $\log_2 \sqrt{8}$

2. Oblicz.

a) $\log_3 1$ b) $\log_3 243$ c) $\log_3 \frac{1}{3}$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$ e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[5]{27}}$

3. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ e) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

4. Podaj podstawę logarytmu.

a) $\log_a 16 = 4$ c) $\log_a 16 = 1$ e) $\log_a 16 = -1$
b) $\log_a 16 = 2$ d) $\log_a 16 = \frac{1}{2}$ f) $\log_a 16 = -2$

5. Sprawdź prawdziwość równości $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$ dla podanych wartości x i y .

a) $x = 4, y = 16$ b) $x = 8, y = \frac{1}{4}$ c) $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{8}$

6. Sprawdź prawdziwość równości $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y}$ dla podanych wartości x i y .

a) $x = 27, y = 3$ b) $x = 81, y = 9$ c) $x = 3, y = \sqrt{3}$

7. Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

a) $\log 2 + \log 5$ b) $\log 8 + \log 125$ c) $\log 250 + \log \frac{2}{5}$

Powtórzenie

8. Oblicz.

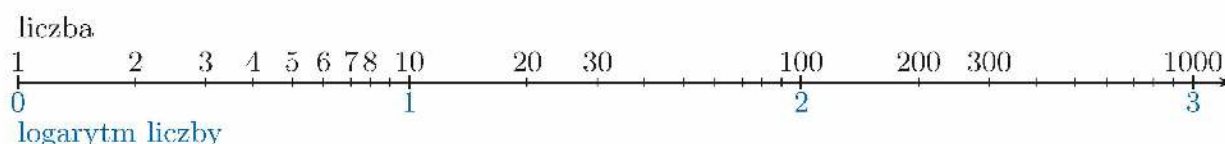
a) $\log_2 1 + \frac{1}{2} \log_2 16$ c) $\log_4 4 - \log_4 64$ e) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_{\frac{1}{3}} 3$
b) $\log_3 27 - \log_4 1$ d) $\log_5 125 - \log_5 \frac{1}{5}$ f) $\log_4 2 + \log_9 3$

9. Dla jakiej liczby b podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_2 b = 5$ c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ g) $\log_{10} b = 6$
b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ d) $\log_7 b = 0$ f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ h) $\log_8 b = -1$

Skala logarytmiczna

Czasami, zamiast porównywać dane wielkości, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. Stosuje się wówczas tak zwaną **skalę logarytmiczną**. Jest nią np. **skala Richtera**, określająca siłę trzęsienia ziemi. Wykorzystuje się w niej logarytm dziesiętny. Każdy kolejny stopień tej skali oznacza 10-krotnie większą siłę trzęsienia. Na rysunku poniżej pokazano, jak skonstruować skalę logarytmiczną wykorzystującą logarytm dziesiętny.

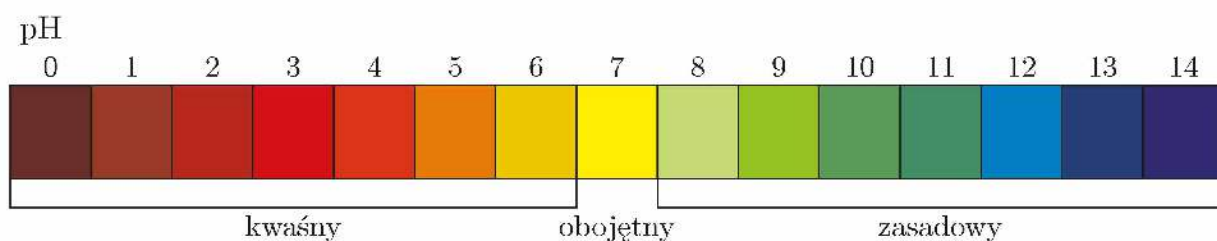


Liczby na górze takiej skali nie są położone równomiernie, ale zgodnie z wartościami ich logarytmów:

$\log 2 \approx 0,30$	$\log 4 \approx 0,60$	$\log 6 \approx 0,78$	$\log 8 \approx 0,90$
$\log 3 \approx 0,48$	$\log 5 \approx 0,70$	$\log 7 \approx 0,85$	$\log 9 \approx 0,95$

- Korzystając z tego, że $\log 10x = 1 + \log x$, wskaż, którym punktom z powyższej osi odpowiadają liczby: 40, 90.
 - Korzystając z tego, że $\log 100x = 2 + \log x$, wskaż, którym punktom z powyższej osi odpowiadają liczby: 400, 900.
- Przyjmując jako jednostkę 1 cm, naszkicuj skalę logarytmiczną i zaznacz na niej liczby $a = 10$, $b = 10^4$, $c = 10^6$, $d = 10^{-4}$, $e = 10^{-6}$.

Innym przykładem wykorzystania skali logarytmicznej jest stosowana w chemii skala pH, opisująca odczyn roztworu.



Każdą z liczb od 0 do 14 z powyższej skali otrzymujemy, mnożąc logarytm dziesiętny odpowiedniego stężenia jonów wodorowych przez -1 .

Na przykład dla wody stężenie to wynosi 10^{-7} mol/dm³.

Zatem pH wody obliczamy następująco: $\text{pH}(\text{wody}) = -\log 10^{-7} = 7$.

Dla wody morskiej pH wynosi od 7,5 do 8,4, dla kawy od 5 do 5,9, a dla soku pomarańczowego 3,5.

1.10. Procenty

■ Obliczanie procentu danej liczby

Należy pamiętać, że procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej).

$$1\%w = \frac{1}{100}w = 0,01w; \quad 15\%w = \frac{15}{100}w = 0,15w;$$

$$4,5\%w = \frac{4,5}{100}w = 0,045w$$

1% (1 procent) danej wielkości to 0,01 tej wielkości.

Ćwiczenie 1

Oblicz, ile zapłacimy, jeżeli kupimy czapkę i rękawice po obniżce (w tabeli podano ceny przed obniżką i wysokość obniżki).

	Cena	Obniżka
czapka	45 zł	o 40%
rękawice	60 zł	o 35%

Warto zauważyć, że wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

Ćwiczenie 2

W styczniu narty kosztowały 825 zł. W lutym ich cenę obniżono o 30%, a w marcu – o dalsze 20%. Ile trzeba było zapłacić za narty po marcowej obniżce? Ile kosztowałyby, gdyby ich cenę od razu obniżono o 50%?

Ćwiczenie 3

Cena kajaka wynosiła 1000 zł. Cenę podniesiono najpierw o 20%, a następnie o 15%. Ile kosztuje kajak po tych zmianach? O ile procent wzrosła cena kajaka w stosunku do ceny początkowej?

Ćwiczenie 4

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru o $p\%$ jego cena spadła o $x\%$. Oblicz p , jeśli: a) $x = 36$, b) $x = 51$.

W niektórych zagadnieniach rozpatruje się dziesiątą część procentu, czyli **promil**.

1‰ (1 promil) danej wielkości to 0,001 tej wielkości.

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) 8‰ liczby 300

c) 50‰ liczby 100

e) 0,2‰ liczby 180

b) 22‰ liczby 1400

d) 5‰ liczby 1000

f) 5,5‰ liczby 180

■ Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Przykład 1

Za jedną akcję firmy X tydzień temu trzeba było zapłacić 25 zł, a dzisiaj – o 2,25 zł więcej. O ile procent podrożały akcje?

$$\frac{2,25}{25} \cdot 100\% = 9\%$$

Akcje podrożały o 9%.

Ćwiczenie 6

W tabeli podano ceny jednej akcji firmy Y i firmy Z w lutym i w marcu. Oblicz, o ile procent podrożały akcje każdej z tych firm.

	Luty	Marzec
Y	18 zł	24,3 zł
Z	24 zł	27 zł

Ćwiczenie 7

Oblicz, jakim procentem liczby x jest liczba y oraz jakim procentem liczby y jest liczba x .

a) $x = 100, y = 50$

b) $x = 50, y = 40$

c) $x = 10, y = 16$

■ Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Przykład 2

W tabeli podano ceny zestawów rondli po obniżce oraz wysokość obniżki. Oblicz cenę dużego zestawu przed obniżką.

Oznaczmy przez x cenę dużego zestawu przed obniżką. Obecna cena stanowi 85% z x , czyli:

$$\frac{85}{100}x = 272 \text{ i stąd } x = 272 \cdot \frac{100}{85} = 320 \text{ [zł]}.$$

Zestaw	Obniżka	Cena
duży	o 15%	272 zł
średni	o 24%	190 zł
mały	o 32%	85 zł

Ćwiczenie 8

Oblicz cenę średniego i cenę małego zestawu rondli przed obniżką, korzystając z danych z przykładu 2.

Zadania

1. Oblicz.

a) 401% liczby 40

b) 15‰ liczby 300

c) 2‰ liczby 2

2. Cenę sukni ślubnej obniżono o $p\%$. O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby suknia kosztowała tyle samo co przed obniżką?

a) $p = 50$

b) $p = 20$

c) $p = 36$

3. Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o $p\%$. O ile procent należałoby obniżyć jego cenę, by kosztował tyle, co na początku?
- a) $p = 25$ b) $p = 50$
4. Oblicz $p\%$ liczby x .
- a) $x = 2^3 \cdot 5^2$, $p = 55$ b) $x = \sqrt[4]{16} \cdot 5^2$, $p = 12$ c) $x = \sqrt[3]{64} \cdot 5^4$, $p = 0,2$
5. Wyznacz liczbę, której $p\%$ jest równo y .
- a) $y = 2^0 \cdot 3^4$, $p = 50$ b) $y = 2^2 \cdot 5^{-2}$, $p = 20$ c) $y = 2^{-1} : 2^2$, $p = 12,5$
6. Wycieczka do Londynu kosztuje 1200 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki:
- a) gdyby najpierw podniesiono ją o 10%, a następnie obniżono o 10%,
b) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,
c) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?
7. Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.
- a) Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?
b) Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?
-
- | Kategoria | Bolek | Olek | Alek |
|-----------|-------|------|------|
| dop | 3 | 1 | 2 |
| dst | 3 | 2 | 0 |
| db | 2 | 4 | 1 |
| bdb | 0 | 1 | 3 |
| cel | 0 | 0 | 2 |

Powtórzenie

8. Na diagramach przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z matematyki w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz, ile procent uczniów otrzymało ocenę dobrą, a ile procent – ocenę pozytywną.

9. O ile procent liczba x jest większa od liczby y ? O ile procent liczba y jest mniejsza od liczby x ?
- a) $x = 32, y = 20$ c) $x = 8, y = 6$ e) $x = 22, y = 4,4$
b) $x = 60, y = 48$ d) $x = 2,4, y = 0,6$ f) $x = 80, y = 25$

1.11. Zagadnienia uzupełniające

■ Notacja wykładnicza

Przy zapisywaniu bardzo dużych i bardzo małych liczb wygodnie jest posługiwać się **notacją wykładniczą** (inaczej zwaną notacją naukową).

Liczbę dodatnią a możemy przedstawić w postaci iloczynu:

$$a = x \cdot 10^n$$

gdzie x jest liczbą spełniającą warunki $1 \leq x < 10$, a n – liczbą całkowitą. Takie przedstawienie liczby nazywamy **notacją wykładniczą**.

Przykład 1

a) $326\,000\,000\,000 = 3,26 \cdot 10^{11}$


b) $0,000\,000\,97 = 9,7 \cdot 10^{-7}$


1. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 5 020 000 000 000 000 000 000 000 ton (masa Syriusza)
- b) 0,000 27 mm (wielkość wirusa ospy)
- c) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 029 9 kg (masa cząsteczki wody)
- d) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 956 kg (masa elektronu)

2. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 6 320 000 c) 43,728 e) 0,000 65 g) 0,100 324
- b) 109 000 000 d) 8765,2 f) 0,003 02 h) 0,000 001

3. Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

- a) $8,62 \cdot 10^4$ b) $7,89 \cdot 10^{-4}$ c) $8,34 \cdot 10^{-5}$ d) $6,02 \cdot 10^0$

4. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

- a) $(3,4 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^{-5})$
- b) $(1,4 \cdot 10^3) \cdot (8 \cdot 10^2)$
- c) $(4,8 \cdot 10^{-1}) : (1,6 \cdot 10^{-3})$
- d) $(7,2 \cdot 10^{-3}) : (1,2 \cdot 10^{-2})$

Oblicz.

$$(5,2 \cdot 10^9) \cdot (0,5 \cdot 10^{-7}) = 5,2 \cdot 0,5 \cdot 10^{9-7} = 2,6 \cdot 10^2 = 260$$

5. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

- a) $42\,000 \cdot 6500$ b) $1600 \cdot 0,0125$ c) $0,0044 \cdot 0,055$ d) $0,0605 \cdot 8600$

6. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

- a) $2\,100\,000\,000 : 105\,000$ c) $51\,000\,000\,000 : 0,017$
 b) $243\,000\,000\,000 : 2,7$ d) $102\,400\,000\,000 : 0,64$

7. Oblicz. Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

- a) $\frac{(3,2 \cdot 10^{-12}) \cdot (1,2 \cdot 10^4)}{4 \cdot 10^{-18}}$ c) $\frac{(3,4 \cdot 10^{-15}) \cdot (7,5 \cdot 10^{-16})}{2,5 \cdot 10^{-30}}$
 b) $\frac{(5,2 \cdot 10^8) \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})}{1,3 \cdot 10^{-18}}$ d) $\frac{(4,8 \cdot 10^{18}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-10})}{(6 \cdot 10^{-8}) \cdot (1,2 \cdot 10^{16})}$

8. W tabeli podano wybrane szybkości, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tę tabelę.

	v [m/s] (zapis dziesiętny)	v [m/s] (notacja wykładnicza)
Rosnący włos	?	$4,6 \cdot 10^{-9}$
Szybki ślimak	0,001 94	?
Sprinter	10	?
Ziemia wokół Słońca	?	$2,96 \cdot 10^4$
Światło w próżni	299 792 458	?



9. Prędkość światła wynosi w przybliżeniu 300 000 km/s. Odległość, którą przebywa światło w ciągu roku (365 dni), nazywamy rokiem świetlnym. Oblicz, ile kilometrów ma rok świetlny i przedstaw podane niżej wielkości w kilometrach. Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

Odległość z Ziemi wyrażona w jednostkach świetlnych	
Księżyc	1,3 sekundy świetlnej
Słońce	8 minut 19 sekund świetlnych
Pluton	5,5 godziny świetlnej
Gwiazda Polarna	około 430 lat świetlnych
środek Galaktyki	około 28 000 lat świetlnych
najbliższe kwazary	około 1,5 mld lat świetlnych



10. Największą prędkość, z jaką kiedykolwiek podróżował człowiek, osiągnęła załoga misji Apollo 10 – wynosiła ona niemal 40 000 km/h. Oblicz, ile czasu zajęłoby pokonanie z tą prędkością odległości dzielącej nas od Gwiazdy Polarnej. Odpowiedź podaj, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą.



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Podaj wszystkie dzielniki liczby:
a) 18, b) 38, c) 40, d) 58, e) 68.
- Jaka jest największa liczba trzycyfrowa podzielna przez:
a) 5, b) 6, c) 7, d) 15?
- Wyznacz liczbę przeciwną do podanej liczby.
a) $23 : (-7\frac{2}{3}) - \frac{324}{243}$ c) $(-6\frac{2}{3}) : (-7\frac{1}{7}) - \sqrt{\frac{169}{225}}$ e) $3\frac{3}{4} : \frac{3}{10} - (-1\frac{1}{6}) : \frac{7}{5}$
b) $(-2\frac{3}{5}) \cdot 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ d) $-12 \cdot 3\frac{7}{15} + 3\frac{1}{2} : 5$ f) $4\frac{3}{4} : (\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}$
- Podaj liczbę przeciwną do liczby x i liczbę odwrotną do liczby y .
a) $x = (3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})$, $y = (2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}$
b) $x = (1\frac{1}{6} - \frac{1}{9}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})$, $y = (\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{1}{3} : (-1\frac{1}{2})$
c) $x = -48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 54 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}$, $y = 1\frac{1}{3} \cdot (-3\frac{3}{5}) + (\frac{3}{5} - 2\frac{4}{15}) \cdot 0,5$
d) $x = 0,3(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75$, $y = (\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}$
- Wśród poniższych liczb wskaż liczbę niewymierną i podaj największą liczbę całkowitą od niej mniejszą.
a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, $14 - \sqrt{196}$, $2\sqrt{16} - \sqrt{36}$ c) $\frac{\sqrt{49}}{3} + \frac{\sqrt[3]{729}}{4}$, $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$ d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$
- Wyznacz liczbę odwrotną do podanej liczby.
a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$ c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$ e) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{512}}$ g) $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$
b) $\sqrt{5\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$ f) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{192}}$ h) $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$
- a) Oblicz iloraz sumy liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 4 - \sqrt{5}$ przez ich różnicę.
b) Oblicz sześćcian różnicy liczb $x = 1 - 6\sqrt[3]{3}$ i $y = 0,9 - \sqrt[3]{3}$.
c) Oblicz różnicę odwrotności kwadratów liczb $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$ i $y = 0,2 \cdot \sqrt{3}$.
-  8. Uzasadnij, że podana liczba jest wymierna.
a) $\log_3 6 + \log_3 1,5$ c) $\log 625 + \log 16$ e) $\log_4 \frac{3}{2} + \log_4 \frac{1}{3}$
b) $\log_2 6 - \log_2 0,75$ d) $\log 175 - \log 1\frac{3}{4}$ f) $\log_2 \sqrt{18} - \log_2 3$

9. O ile procent zmieniło się pole prostokąta, jeśli:
- oba boki skrócono o 20%,
 - jeden bok skrócono o 10%, a drugi wydłużono o 10%?
10. Liczba członków pewnego klubu golfowego wzrastała przez ostatnie trzy lata o 20% rocznie. Ilu członków liczył ten klub trzy lata temu, jeśli rok temu należało do niego 216 osób?
11. Wyznacz liczbę o 20% mniejszą od podanej liczby.
- $\frac{(3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})}{(2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}$
 - $\frac{(1\frac{1}{6} - \frac{7}{9}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})}{(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{2}{3} : (-2\frac{1}{2})}$
 - $\frac{-48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 45 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}}{1\frac{1}{3} \cdot (-2\frac{2}{5}) + (\frac{3}{5} - 5\frac{1}{5}) \cdot 0,5}$
 - $\frac{0,3(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75}{(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}}$

■ Zestaw II

- Suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest o 15 większa od podwojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.
 - Suma czterech kolejnych liczb parzystych jest o 20 większa od potrojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.
- Liczby $x = 0,(3)$ i $y = 1,(3)$ zapisz jako ułamki zwykłe i oblicz:
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,
 - $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$,
 - $\frac{1}{x} + y^2$,
 - $x^2 - \frac{1}{y^2}$.
- Oblicz sumę oraz iloczyn liczb x i y .
 - $x = \sqrt{1\frac{9}{16}}$, $y = \sqrt{5\frac{4}{9}}$
 - $x = \sqrt{\frac{28}{63}}$, $y = \sqrt{\frac{75}{48}}$
 - $x = \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$, $y = \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$
 - $x = \sqrt[3]{-8}$, $y = \sqrt[3]{-\frac{270}{640}}$
- Wyznacz liczbę a .
 - $\sqrt{3} = \sqrt[3]{a}$
 - $\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{a}$
 - $\sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{a}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt[4]{a}$
 - $2\sqrt{3} = \sqrt[4]{a}$
 - $3\sqrt{2} = \sqrt[4]{a}$
- Oblicz $x - \frac{1}{x}$.
 - $x = \sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{125}}$
 - $x = \sqrt[3]{\frac{(-2)^6}{(-3)^3}}$
 - $x = (\sqrt{169} - \sqrt{196})^2$
 - $x = ((\sqrt{225} - 10)^2)^2$
 - $x = \sqrt{88 + \sqrt{144}}$
 - $x = \sqrt{\sqrt{6,25} - 0,25}$



6. Oblicz wartość wyrażenia $2m - 3n$.

a) $3^m = 81, 0,5^n = 0,125$

c) $0,5^m = 64, \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3,375$

b) $6^m = 216, 0,4^n = 2,5$

d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^m = -27, \left(-\frac{2}{5}\right)^n = -15,625$

7. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = \frac{3}{4}$ i $b = \frac{8}{9}$.

a) $\frac{(ab)^{-1}}{b^{-2}a^{-2}}$

c) $\frac{ab^2 \cdot (ab)^{-3}}{(a^0b^{-1})^{-1}}$

e) $\frac{(a^{-1}b^2)^{-3}a^{-2}b^5}{a^2 : (ab)^3}$

b) $\frac{a^5b^{-2}}{(b^{-1}a)^3}$

d) $\frac{(a^7b^{-2}) : b^3}{(a^8 : a^{-3}) \cdot (b^{-2})^2}$

f) $\frac{(a^{-2}b) \cdot (a^3b^4)^{-1}}{(a^2b^{-3}) : (a^5b^{-1})}$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^{12}}{x^9} = 64$

c) $\frac{x^5 \cdot x^4}{(x^2)^3} = 27$

e) $\frac{(x^2)^{-3} \cdot x}{(x^{-2})^2} = \frac{2}{7}$

b) $\frac{x^7}{x^3} = 1024$

d) $\frac{x^7 \cdot x^{-3}}{x^{-1}} = 32$

f) $\frac{x^{-4} \cdot x^{-7}}{(x^2)^{-4}} = \frac{1}{8}$

9. Oblicz.

a) $\frac{18^{\frac{2}{5}}}{6^{\frac{7}{5}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}}$

b) $\frac{12^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}}}{6^{\frac{4}{3}}}$

c) $\frac{14^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}$

d) $\frac{20^{1,2} \cdot 24^{0,3}}{6^{1,3} \cdot 25^{0,1}}$

10. Uporządkuj liczby a, b, c i d w kolejności rosnącej.

a) $a = \log_2 64, b = \log_3 81, c = \log_4 1024, d = \log_5 125$

b) $a = \log_2 2\sqrt{2}, b = \log_3 9\sqrt[3]{3}, c = \log_4 32, d = \log_5 0,04$

11. Oblicz 125% liczby x , jeśli:

a) $9 - \frac{3}{2}x = 6,$

b) $3x - 7 = \frac{1}{2}x + 8,$

c) $\frac{x-3}{2} = \frac{1}{6} + \frac{x-2}{3}.$

12. Oblicz:

a) 6‰ liczby 400,

c) 0,5‰ liczby 64,

b) 15‰ liczby 120,

d) 20,5‰ liczby 8.

13. Wyznacz liczbę:

a) o 2‰ większą od 100,

b) o 1,6‰ większą od 500.

D 14. Uzasadnij, że jeśli $x, y, z \neq 0$ oraz $x + y^{-1} - z^{-2} = 0$, to:

a) $x = \frac{y - z^2}{yz^2},$ b) $y = \frac{z^2}{1 - xz^2}, xz^2 \neq 1,$ c) $z^2 = \frac{y}{1 + xy}, xy \neq -1.$

D 15. Uzasadnij, że suma:

a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3,

b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6.

**Przykład 1**

Ile jest liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

- Liczb spełniających warunki zadania nie jest dużo, można je zatem wszystkie wypisać: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94 – jest ich 13.
- Zauważmy, że najmniejszą liczbą dwucyfrową spełniającą podany warunek jest 10, a największą 94. Wszystkie te liczby można zapisać w postaci: $7n + 3$, gdzie $1 \leq n \leq 13$, zatem jest 13 takich liczb.

Odpowiedź: 13

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 3 i przez 5?

Zauważmy, że liczby podzielne przez 3 i przez 5 to liczby podzielne przez 15. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 15 jest 1005, a największą 9990. Liczb spełniających warunki zadania jest zbyt dużo, by je wszystkie wypisać.

$$1005 = 67 \cdot 15, 1020 = 68 \cdot 15, 1035 = 69 \cdot 15, \dots, 9990 = 666 \cdot 15$$

Każdą z tych liczb możemy zapisać w postaci $15 \cdot n$, gdzie $67 \leq n \leq 666$. Zatem takich liczb jest $666 - 66 = 600$.

Odpowiedź: 600

Przykład 3

Ile jest liczb trzycyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 5 lub przez 6?

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 5: 100, 105, 110, ..., 995. Najmniejszą z nich jest 100, a największą 995. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 można zapisać w postaci: $100 + 5n$, gdzie $0 \leq n \leq 179$, zatem takich liczb jest 180.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 6: 102, 108, 114, ..., 996. Najmniejszą z nich jest 102, a największą 996. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 6 można zapisać w postaci: $102 + 6n$, gdzie $0 \leq n \leq 149$, zatem takich liczb jest 150.

Zauważmy, że dwa razy zostały policzone liczby podzielne przez 30 (są one podzielne zarówno przez 5, jak i przez 6).

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 30 można zapisać w postaci: $120 + 30n$, gdzie $0 \leq n \leq 29$, zatem takich liczb jest 30.

Liczb podzielnych przez 5 lub przez 6 jest: $180 + 150 - 30 = 300$.

Odpowiedź: 300



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Przez 15 podzielna jest liczba:
A. 9 720 279, B. 2 220 205, C. 22 222 220, D. 23 420 340.
2. Liczbą odwrotną do $\frac{0,25 - \sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2 : 3}$ jest:
A. 6, B. 4, C. -4, D. -6.
3. Najmniejszą liczbą całkowitą większą od $6 - 2\pi$ jest:
A. -1, B. 0, C. 1, D. -2.
4. Liczbą wymierną jest:
A. $\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{16}}{2}$, B. $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, C. $\frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$, D. $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{54}}$.
5. Ułamek $\frac{\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}}$ jest równy:
A. $\frac{-16}{\sqrt[3]{-4}}$, B. $\frac{16}{\sqrt[3]{-4}}$, C. -4, D. 4.
6. Ułamek $\frac{5^5 \cdot 3 + 2 \cdot 5^5}{5^6 : 5^2}$ jest równy:
A. 5^6 , B. $15 + 2 \cdot 5^5$, C. 25, D. 5^7 .
7. Suma $2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15}$ jest równa:
A. 2^{60} , B. 8^{15} , C. 2^{18} , D. 2^{17} .
8. Która z poniższych liczb jest równa 24?
A. $12 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ B. $8 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ C. $6 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ D. $3 \cdot \sqrt{6} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$
9. Cena ulgowego karnetu na basen stanowi 60% ceny karnetu normalnego. Karnet ulgowy kosztuje 60 zł. Za karnet normalny trzeba zapłacić:
A. 84 zł, B. 100 zł, C. 360 zł, D. 36 zł.
10. Liczba $\log_8 4$ jest równa:
A. $\frac{1}{2}$, B. $\frac{1}{3}$, C. $\frac{2}{3}$, D. $\frac{3}{2}$.
11. Oprocentowanie lokaty terminowej było równe 4%. Po roku bank podwyższył oprocentowanie do 5%. Oprocentowanie lokaty wzrosło:
A. o 20%, B. o 25%, C. o 40%, D. o 75%.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Ile jest liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 2?

Zadanie 2 (2 pkt)

Określ znak iloczynu liczb: $a = \frac{13}{5} - 2, (5)$, $b = \sqrt{2} - 1, (4)$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $2\sqrt{27}$ i $4\sqrt{12}$.

Zadanie 4 (2 pkt)

Wiedząc, że $(\sqrt{5})^x = 125\sqrt{5}$ oraz $(\sqrt{2})^y = 1024$, oblicz $3x - y$.

Zadanie 5 (2 pkt)

Cena brutto kurtki zimowej wynosiła 307,50 zł. Na cenę tę składała się cena netto oraz 23% podatku VAT. O ile zmniejszyła się cena netto tej kurtki, jeśli po obniżce podatek VAT wynosił 51,75 zł?

Zadanie 6 (2 pkt)

Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o $p\%$. Wyznacz p , jeśli w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 7 (4 pkt)

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub przez 5?

Zadanie 8 (4 pkt)

O ile procent liczba x jest większa od liczby y , jeżeli $x = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) : \left(\frac{11}{20} - 0,2\right)$, $y = (0,5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$?

Zadanie 9 (4 pkt)

Woda płynąca z kranów: A , B i C może napełnić basen w ciągu 4 godzin. Woda płynąca tylko z kranu A napełnia w ciągu godziny $\frac{1}{10}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{12}$ basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C ?

D Zadanie 10 (4 pkt)

Uzasadnij, że jeśli $a = 45$, $b = (2 - \sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$ i $c = (-2 + \sqrt{5})(11 + 2\sqrt{5})$, to liczba $\frac{\sqrt{a}}{b+c}$ jest liczbą wymierną.



2 Język matematyki

Wieża CN Tower w Toronto jest najwyższym budynkiem na zachodniej półkuli. Stosunek jej wysokości (553,33 m) do wysokości, na której znajduje się kosz wieży (342 m) wynosi około 1,618. Jest to przybliżenie liczby zwanej **złotą liczbą** lub **złotym stosunkiem**. O odcinku mówimy, że został podzielony w złotym stosunku, jeśli stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części: $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.



Dokładna wartość złotego stosunku wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.1. Zbiory

Zgodnie z tradycją zbiory oznaczamy wielkimi literami. Aby opisać zbiór, należy określić, jakie są jego **elementy**. Można to zrobić słownie lub (jeśli to możliwe) wypisać jego elementy, np.:

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych

$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 20

Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**. Zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów, nazywamy **zbiorem nieskończonym**.

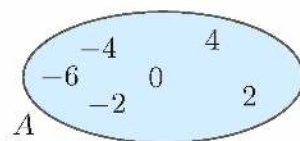
Aby zapisać, że element należy do zbioru, używamy symbolu $\in$, np. $7 \in N$, aby zapisać, że element nie należy do zbioru – symbolu $\notin$, np. $\sqrt{2} \notin Q$.

Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono sześcioelementowy zbiór A . Określ, czy zdanie jest prawdziwe.

- a) $2 \in A$ c) $\sqrt{16} \in A$ e) $-6 \notin A$
b) $1 \in A$ d) $\sqrt{9} \in A$ f) $6 \notin A$



Jeszcze innym sposobem opisanie zbioru jest podanie warunku, który muszą spełniać jego elementy. Na przykład zapis $A = \{n \in N : n^2 \leq 16\}$ oznacza, że $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Przykład 1

Opis zbioru	Zapis symboliczny
A jest zbiorem tych liczb całkowitych, których kwadraty są równe 4.	$A = \{-2, 2\}$
B jest zbiorem tych liczb naturalnych, których kwadraty są mniejsze od 30.	$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Ćwiczenie 2

Wypisz wszystkie elementy zbiorów: D , E i F .

D – zbiór tych liczb naturalnych, których kwadraty są mniejsze od 5

E – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 5

F – zbiór tych liczb rzeczywistych, których kwadraty są równe 5

Dwa zbiory są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

Ćwiczenie 3

Które spośród zbiorów A , B i C są równe?

- a) $A = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$, $B = \{-6, -3, 0, 3, 6, 8\}$, $C = \{0, 3, -3, 6, -6\}$
b) $A = \{-3, -2, -1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, C – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 10

Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą. Mówimy, że zbiór liczb naturalnych jest **podzbiorem** zbioru liczb całkowitych.

Definicja

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Zapisujemy to: $A \subset B$. Mówimy również, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B .

Zapis $A \not\subset B$ oznacza, że A nie jest podzbiorem zbioru B .

Uwaga. Dla dowolnego zbioru A zachodzą zawierania: $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$.

Jeśli $A \subset B$ i $B \subset A$, to zbiory A i B są równe: $A = B$.

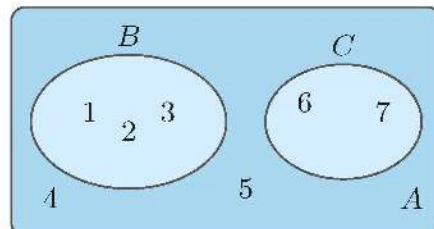
Przykład 2

Na diagramie obok przedstawiono zbiory:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{6, 7\}$.

Miedzy tymi zbiorami zachodzą zależności:

$$B \subset A \text{ i } C \subset A$$



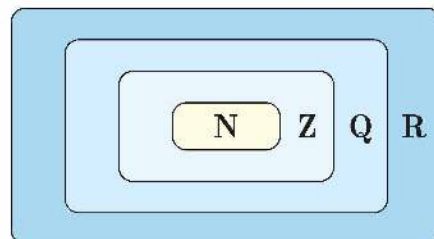
Ćwiczenie 4

Czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?

- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
b) $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, B – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 20
c) A – zbiór dzielników liczby 40, B – zbiór dzielników liczby 60

Zwróćmy uwagę, że dla poznanych dotychczas zbiorów liczbowych zachodzą zawierania:

$$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset R}$$



Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że: a) $Z \not\subset N$, b) $R \not\subset Q$.

Zadania

- Określ zbiory A i B , wypisując wszystkie ich elementy. Czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?
 - A – zbiór dzielników liczby 12, B – zbiór dzielników liczby 24
 - A – zbiór dzielników liczby 42, B – zbiór dzielników liczby 45
- Wypisz wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru A .
 - $A = \{0, 1, 2\}$
 - $A = \{a, b, c\}$
 - $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Wypisz wszystkie czteroelementowe podzbiory zbioru $\{a, b, c, d, e\}$.
- Zbiór X jest podzbiorem zbioru nieparzystych liczb naturalnych. Wypisz jego elementy, jeśli są nimi liczby, których:
 - kwadrat jest mniejszy od 180,
 - pierwiastek jest mniejszy od 5.

Czy wiesz, że...

W języku potocznym słowo „zbiór” jest używane w wielu sytuacjach. Na przykład „zbiorami” nazywa się różnorodne kolekcje gromadzone przez hobbystów czy też kolekcje dzieł sztuki. *Wazon z irysami na żółtym tle* – obraz Vincenta van Gogha, należy do zbiorów Muzeum van Gogha w Amsterdamie.

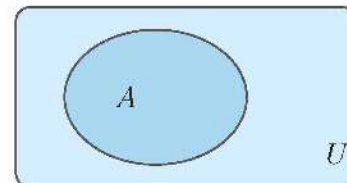


Powtórzenie

- D** 5. Czy zbiory A i B mają tyle samo elementów? Uzasadnij, że $A \not\subset B$.
- A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 15
 - A – zbiór dzielników liczby 18, B – zbiór dzielników liczby 30
 - A – zbiór dzielników liczby 36, B – zbiór dzielników liczby 48
6. Wypisz wszystkie trzelementowe podzbiory zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$.
7. Wypisz trzelementowe podzbiory zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, dla których:
- suma wszystkich elementów jest większa od 7,
 - iloczyn wszystkich elementów jest równy zero.

2.2. Działania na zbiorach

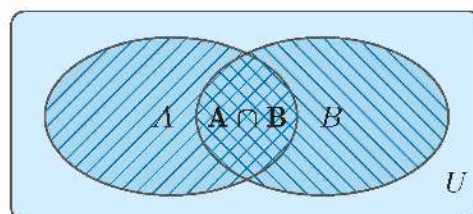
Na diagramie obok zbiór U oznacza zbiór wszystkich rozpatrywanych elementów i jest nazywany **przestrzenią**. Gdy mówimy o liczbach, to przestrzenią jest zwykle zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.



Definicja

Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy: $A \cap B$.

Na diagramie iloczyn $A \cap B$ jest przedstawiony jako obszar podwójnie zakreskowany. Zauważmy, że iloczyn zbiorów jest ich częścią wspólną.



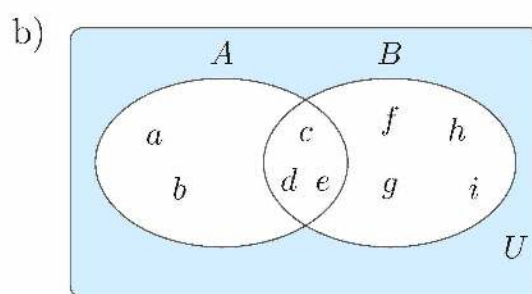
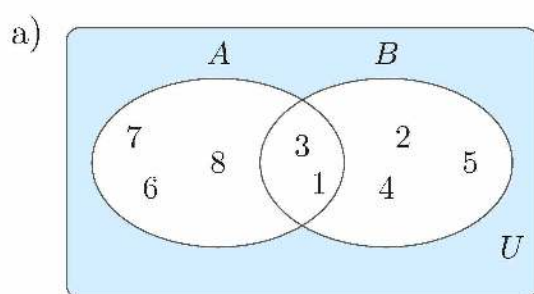
Przykład 1

Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Tylko liczby 2 i 4 należą do obu zbiorów jednocześnie, zatem:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

Ćwiczenie 1

Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów: A , B oraz $A \cap B$.



Ćwiczenie 2

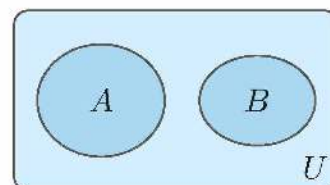
Wyznacz iloczyn zbiorów A i B .

a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

c) $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$, $B = \{\frac{10}{100}, \frac{20}{100}, \frac{30}{100}, \frac{40}{100}, \frac{50}{100}\}$

Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, gdy nie mają wspólnych elementów, czyli gdy $A \cap B = \emptyset$. Na diagramie obok przedstawiono rozłączne zbiory A i B .



Ćwiczenie 3

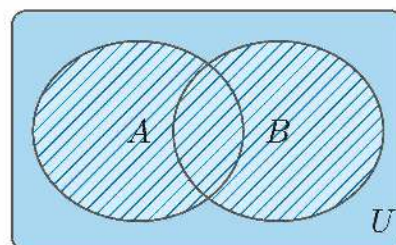
Czy zbiory X i Y są rozłączne?

- X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb nieparzystych
- X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb podzielnych przez 5

Definicja

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów: A lub B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy: $A \cup B$.

Na diagramie suma $A \cup B$ jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.

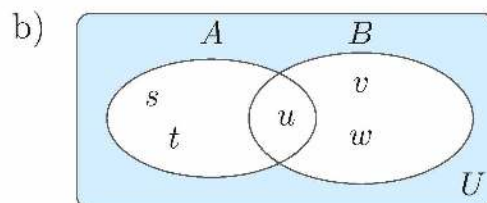
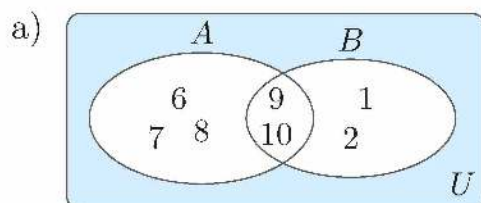


Przykład 2

Jeśli $A = \{2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 3, 5, 7\}$,
to $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

Ćwiczenie 4

Na podstawie diagramu podaj elementy sumy zbiorów A i B .



Ćwiczenie 5

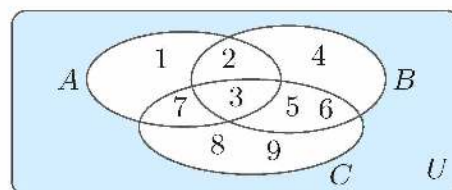
Wyznacz sumę zbiorów A i B .

- $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 8
- A – zbiór liczb parzystych, B – zbiór liczb nieparzystych

Ćwiczenie 6

Korzystając z diagramu, wyznacz zbiory:

- $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$,
- $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

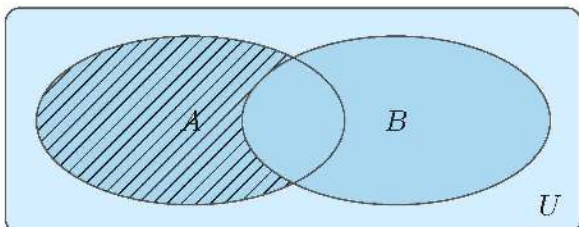


Definicja

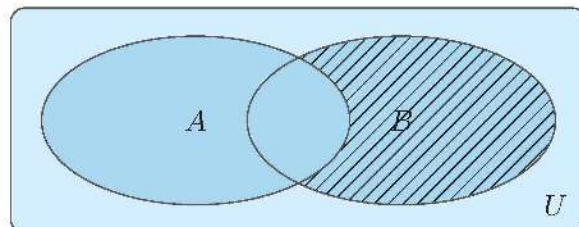
Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy: $A \setminus B$.

Obszary zakreskowane na poniższych diagramach przedstawiają:

zbiór $A \setminus B$,

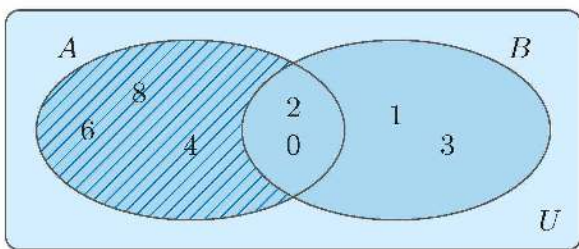


zbiór $B \setminus A$.

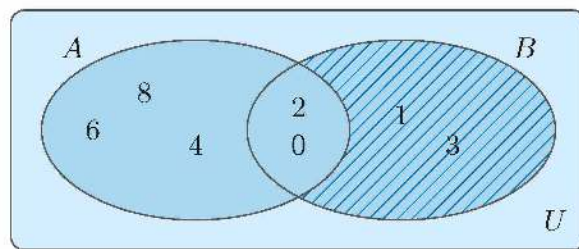


Przykład 3

Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i $B = \{0, 1, 2, 3\}$.



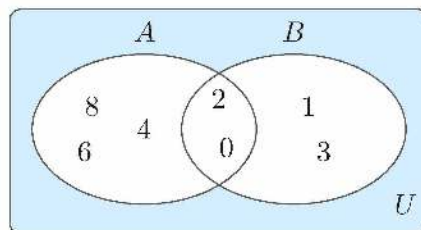
$$A \setminus B = \{4, 6, 8\}$$



$$B \setminus A = \{1, 3\}$$

Ćwiczenie 7

Dane są zbiory: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ – zbiór liczb parzystych mniejszych od 9 i $B = \{0, 1, 2, 3\}$ – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 4. Wyznacz zbiory: $A \setminus B$ i $B \setminus A$.



Ćwiczenie 8

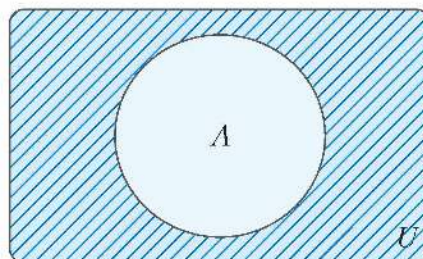
Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli:

- a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, b) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **dopełnienie zbioru**, które oznaczamy przez A' i definiujemy jako różnicę całej przestrzeni i zbioru A :

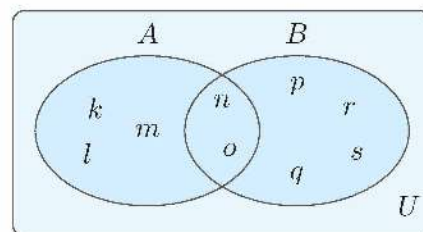
$$A' = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$$

Obszar zakreskowany na diagramie to zbiór A' .



Zadania

1. Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.



2. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, jeśli:

- a) $A = \{a, c, e, g\}$, $B = \{d, e, f, g\}$,
b) $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

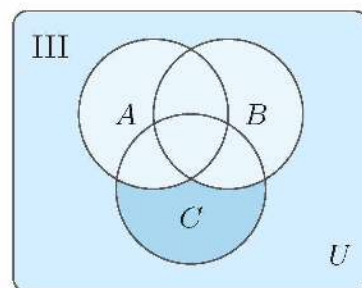
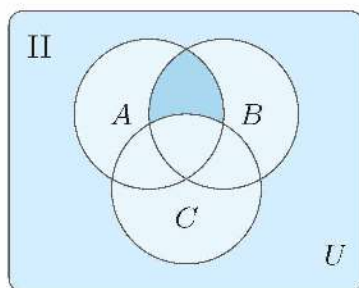
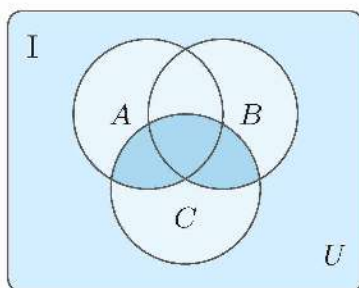
3. W pewnej 30-osobowej klasie 16 uczniów jeździ na nartach, a 10 – gra w hokeja. Ilu uczniów nie uprawia żadnego z wymienionych sportów, jeśli połowa uczniów grających w hokeja jeździ na nartach?

4. Który z poniższych diagramów odpowiada zbiorowi:

a) $(A \cap B) \setminus C$,

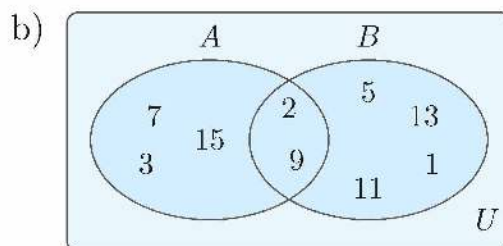
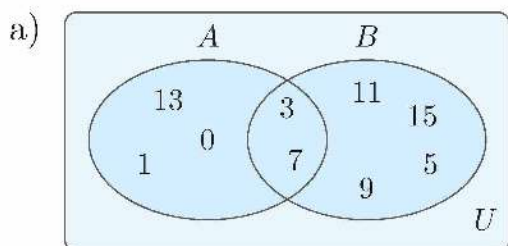
b) $C \setminus (A \cup B)$,

c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$?



Powtórzenie

5. Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Do których ze zbiorów: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, należą tylko liczby nieparzyste?



6. A jest zbiorem spółgłosek w słowie *arytmetyka*, B – zbiorem spółgłosek w słowie *geometria*, a C zbiorem spółgłosek w słowie *algebra*. Wyznacz zbiór:

- a) $A \cap B$, c) $B \setminus A$, e) $B \setminus C$, g) $A \cap B \cap C$,
b) $A \setminus B$, d) $B \cap C$, f) $C \setminus B$, h) $A \cup B \cup C$.

2.3. Przedziały

■ Przedziały ograniczone

Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają jednocześnie nierówności: $x > -2$ i $x < 3$.

Liczy, które spełniają obie nierówności jednocześnie, muszą być większe od -2 i mniejsze od 3 , co zapisujemy symbolicznie: $-2 < x < 3$. Na osi liczbowej zbiór ten przedstawiamy następująco:



Liczy -2 i 3 nie należą do zbioru. Na osi zaznaczamy je pustymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem otwartym** od -2 do 3 , co symbolicznie zapisujemy $(-2; 3)$. Liczy -2 i 3 nazywamy **końcami przedziału**.

Podając, które liczy x spełniają obie nierówności, piszemy: $x \in (-2; 3)$.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczy x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; b)$	$a < x < b$	

Uwaga. Przedział otwarty $(a; b)$ często zaznacza się na osi liczbowej następująco:



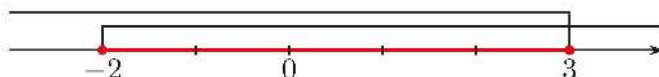
Ćwiczenie 1

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczy należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

- a) $(-3; 2)$ b) $(0; 4)$ c) $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ d) $(100; 150)$

Przykład 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczy spełniających warunek: $-2 \leq x \leq 3$.



Liczy -2 i 3 należą do zbioru, dlatego na osi końce przedziałów zaznaczamy zamalowanymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem obustronnie domkniętym** od -2 do 3 i zapisujemy symbolicznie $[-2; 3]$.

Jeśli do przedziału należy tylko jego lewy koniec, to przedział nazywamy **lewostronnie domkniętym**, zaś jeśli należy do niego tylko jego prawy koniec – **prawostronnie domkniętym**.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział domknięty	$\langle a; b \rangle$	$a \leq x \leq b$	
przedział lewostronnie domknięty	$\langle a; b \rangle$	$a \leq x < b$	
przedział prawostronnie domknięty	$(a; b \rangle$	$a < x \leq b$	

Ćwiczenie 2

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej. Podaj, ile liczb całkowitych należy do tego przedziału.

- a) $\langle -1; 4 \rangle$ b) $\langle \frac{3}{2}; 5 \rangle$ c) $\langle -2; -\frac{1}{2} \rangle$ d) $\langle -60; 40 \rangle$

■ Przedziały nieograniczone

Przykład 3

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x > -1$ nazywamy **przedziałem otwartym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $(-1; \infty)$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x < 3$ nazywamy **przedziałem otwartym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3)$.



Przykład 4

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \geq -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie domkniętym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $\langle -1; \infty \rangle$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \leq 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie domkniętym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3 \rangle$.



Uwaga. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ możemy zapisać jako przedział $(-\infty; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

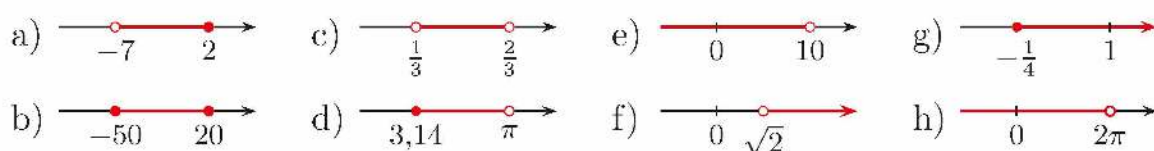
Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; \infty)$	?	
przedział lewostronnie domknięty	$\langle a; \infty)$	$x \geq a$	?
?	?	$x \leq b$	
?	$(-\infty; b)$	?	?

Zadania

1. Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających podany warunek. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

a) $-7 \leq x \leq 0$ c) $\frac{1}{4} \leq x < \sqrt{2}$ e) $x \geq 2\frac{1}{4}$ g) $x \leq -\frac{1}{3}$
 b) $\frac{1}{2} < x < 9$ d) $-\frac{13}{3} < x \leq 5$ f) $x > -3$ h) $x \leq 27$

2. Zapisz symbolicznie poniższe przedziały i podaj warunki, które muszą spełniać należące do nich liczby.



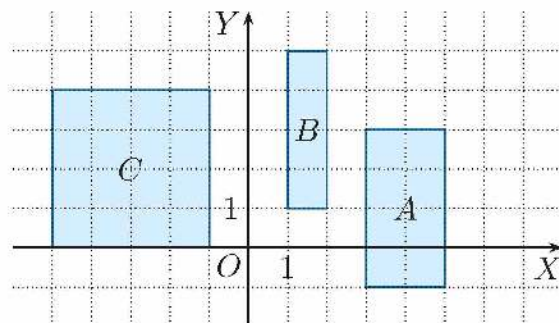
3. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich:

- a) liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,
 b) liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,
 c) liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od $2\frac{1}{2}$,
 d) liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$.

4. Zapisz przedział, do którego należą liczby:

- a) odległe od liczby 1 o mniej niż 2,
 b) odległe od liczby -1 o mniej niż 3,
 c) odległe od liczby 3 o nie więcej niż 2,
 d) odległe od liczby $-\frac{1}{4}$ o nie więcej niż $\frac{3}{2}$.

5. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do przedziału:
- a) $\langle -1; 4 \rangle$, b) $\langle 0; 6 \rangle$, c) $\langle -\frac{2}{3}; \frac{5}{2} \rangle$, d) $\langle -\frac{25}{4}; -2 \rangle$.
6. Ile liczb całkowitych x spełnia podany warunek?
- a) $\sqrt{x} \in \langle 1; 2 \rangle$ b) $\sqrt{x} \in \langle 2; 3 \rangle$ c) $\sqrt[3]{x} \in (1; 2)$ d) $\sqrt[3]{x} \in \langle -2; 0 \rangle$
7. Sprawdź, czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.
- a) $A = \langle -1; 2 \rangle$, $B = \langle -1; 3 \rangle$ c) $A = \langle -\frac{7}{8}; \frac{15}{8} \rangle$, $B = \langle -\frac{6}{7}; \frac{13}{7} \rangle$
b) $A = \langle -\infty; 7 \rangle$, $B = \langle 2; 7 \rangle$ d) $A = \langle \frac{22}{7}; 7 \rangle$, $B = \langle \pi; \sqrt{50} \rangle$
8. Podaj najdłuższy przedział domknięty, którego końce są liczbami całkowitymi i który jest zawarty w przedziale:
- a) $\langle -2\frac{1}{2}; 5 \rangle$, b) $\langle -\pi; 6 \rangle$, c) $\langle -3\frac{3}{4}; 2\frac{3}{4} \rangle$, d) $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{3} \rangle$.
9. Wskaż liczbę jednakowo odległą od końców przedziału:
- a) $\langle -3; 1 \rangle$, b) $\langle -2; 3 \rangle$, c) $\langle \sqrt{2}; 4\sqrt{2} \rangle$, d) $\langle 1\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4} \rangle$.
10. Dla jakich wartości parametru p przedziały $\langle p; p+1 \rangle$ oraz $\langle 2p; 2p+1 \rangle$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?
11. Współrzędne (x, y) punktów należących do prostokąta A (rysunek obok) spełniają warunki: $x \in \langle 3; 5 \rangle$ i $y \in \langle -1; 3 \rangle$. Zapisz warunki, które spełniają punkty należące do:
- a) prostokąta B ,
b) kwadratu C .



Powtórzenie

12. Zaznacz na osi liczbowej podany przedział. Ile liczb całkowitych należy do tego przedziału?
- a) $\langle -3; 2 \rangle$ b) $\langle -1; 6 \rangle$ c) $\langle -1\frac{1}{2}; 4 \rangle$ d) $\langle -2\frac{1}{3}; 5 \rangle$
13. Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby x należące do podanego przedziału. Ile liczb całkowitych podzielnych przez 3 należy do tego przedziału?
- a) $\langle -3; 5 \rangle$ b) $\langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$ c) $\langle -\frac{7}{3}; \frac{4}{3} \rangle$ d) $\langle -\pi; 2\pi \rangle$
14. Które spośród liczb: $-\frac{8}{3}$, $-2\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$, π , należą do podanego przedziału?
- a) $\langle -2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3} \rangle$ b) $\langle -2\frac{2}{3}; 3,4 \rangle$ c) $\langle -2; 3,14 \rangle$ d) $\langle -2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4} \rangle$

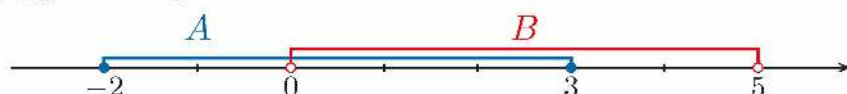
2.4. Działania na przedziałach

Przedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Można wykonywać na nich działania: $\cup, \cap, \setminus$.

Przykład 1

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy $A = \langle -2; 3 \rangle$ i $B = (0; 5)$.

Kiedy wykonujemy działania na przedziałach, wygodnie jest posługiwać się ich ilustracją graficzną.



$A \cup B = \langle -2; 5 \rangle$	Sumie przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona co najmniej jednym kolorem.
$A \cap B = (0; 3)$	Iloczynowi przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona dwoma kolorami.
$A \setminus B = \langle -2; 0 \rangle$	Różnicy $A \setminus B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem niebieskim.
$B \setminus A = (3; 5)$	Różnicy $B \setminus A$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem czerwonym.

Uwaga. Wykonując działania na przedziałach, zwróć szczególną uwagę na ich końce. Na osi liczbowej używamy pustego kółka, gdy liczba odpowiadająca temu punktowi nie należy do zbioru, a kółka zamalowanego – gdy należy.

Ćwiczenie 1

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (1; 4)$, $B = (2; 6)$

c) $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \langle -5; 3 \rangle$

b) $A = \langle -4; 1 \rangle$, $B = \langle 1; 3 \rangle$

d) $A = (-3; 2)$, $B = (-1; 2)$

Przykład 2

Zbiór X zaznaczony na osi liczbowej jest sumą przedziałów $\langle -3; 0 \rangle$ i $(1; 4)$.

$$X = \langle -3; 0 \rangle \cup (1; 4)$$



Ćwiczenie 2

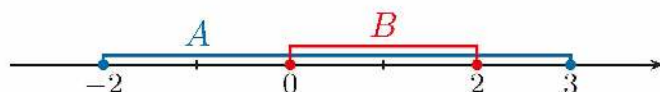
Zaznacz na osi liczbowej zbiór X .

a) $X = \langle -4; -1 \rangle \cup (2; 4)$

b) $X = \langle -6; -5 \rangle \cup (-3; 2) \cup \langle 4; \infty \rangle$

Przykład 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$, jeżeli $A = \langle -2; 3 \rangle$ i $B = \langle 0; 2 \rangle$.



Różnicą zbiorów A i B jest suma przedziałów.

$$A \setminus B = \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

a) $A = \langle -5; 4 \rangle$, $B = \langle -3; -1 \rangle$

c) $A = \langle -3; \infty \rangle$, $B = \langle -1; 2 \rangle$

b) $A = \langle -3; 5 \rangle$, $B = \langle 2; \frac{5}{2} \rangle$

d) $A = \mathbf{R}$, $B = \langle -3; 1 \rangle$

Zadania

1. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = \langle -3; 0 \rangle$, $B = \langle -1; 4 \rangle$

d) $A = \langle -\infty; 2 \rangle$, $B = \langle 0; 2 \rangle$

b) $A = \langle -4; 2 \rangle$, $B = \langle -\frac{1}{2}; 3 \rangle$

e) $A = \langle -1; 2 \rangle$, $B = \langle 2; \infty \rangle$

c) $A = \langle -5; 4 \rangle$, $B = \langle -2; 0 \rangle$

f) $A = \langle -\infty; 6 \rangle$, $B = \langle -3; \infty \rangle$

2. Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.

a) $X = \langle -1; 3 \rangle \cup \{5\}$

b) $X = \langle 0; 2 \rangle \cup \{3, 4\}$

c) $X = \{1\} \cup \langle 3; 5 \rangle$

3. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako sumę przedziałów zbiór:

a) $\mathbf{R} \setminus \langle -2; 3 \rangle$, b) $\mathbf{R} \setminus \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$, c) $\mathbf{R} \setminus \langle 0; 10 \rangle$, d) $\mathbf{R} \setminus \langle \sqrt{2}; \infty \rangle$.

4. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = \langle -3; 1 \rangle \cup \langle 3; 6 \rangle$, $B = \langle 0; 4 \rangle$

b) $A = \langle 0; 7 \rangle$, $B = \langle 1; 3 \rangle \cup \langle 8; 9 \rangle$

Powtórzenie

5. Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.

a) $X = \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$

c) $X = \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$

b) $X = \langle -3; 1 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$

d) $X = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 0; 2 \rangle \cup \langle 3; 6 \rangle$

6. Niech $A = \langle -5; 3 \rangle$, $B = \langle -7; 4 \rangle$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru:

a) $A \cup B$,

b) $A \cap B$,

c) $A \setminus B$,

d) $B \setminus A$?

7. Który ze zbiorów: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, jest zbiorem pustym?

a) $A = \langle 0; 4 \rangle$, $B = \langle 0; 4 \rangle$

b) $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \langle 3; 6 \rangle$

Rozwiązywanie równań

1. Sprawdź, czy liczba p spełnia podane równanie.

a) $20 - 5x = 4 - 13x$, $p = -2$

c) $3x - (1 + 5x) = \frac{1}{2}x + 14$, $p = -5$

b) $6x - 9 = x - (6 - 2x)$, $p = 1$

d) $\frac{2}{3}x - 3(1 - \frac{2}{9}x) = -2(x - \frac{7}{2})$, $p = 3$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x + 4 = 9$

c) $4x + 3 = 2x - 9$

e) $2x + \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3} - 2x$

b) $-3x + 6 = 7$

d) $x - 6 = 5x - 2$

f) $\frac{1}{2} - 3x = 6,5 + \frac{1}{2}x$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4x-1}{3} = 5$

c) $\frac{6x+1}{5} = x$

e) $\frac{2x-1}{2} = \frac{1-x}{4}$

b) $\frac{2-3x}{4} = 1$

d) $3 - x = \frac{2x-3}{2}$

f) $\frac{x-3}{2} = \frac{x-2}{3}$

4. Liczba x jest rozwiązaniem poniższego równania. Oblicz sumę liczby przeciwnej i liczby odwrotnej do x .

a) $\frac{3x-5}{2} + 3 = \frac{3x+5}{6}$

c) $\frac{x+4}{2} - \frac{-2x-5}{6} = \frac{0,5x+2,5}{3}$

b) $\frac{4x+1}{5} = 2 - \frac{4-8x}{3}$

d) $\frac{5-4x}{4} - \frac{6x-1}{3} = \frac{4x-1}{12}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $3(2x - 7) - (7x - 13) = -10$

d) $3x = x - (1 - (x - 3))$

b) $-2(-27 - 3x) = -3(2x - 10)$

e) $5x - (2x + (3 - x)) = 11$

c) $6 - 2(2x - \frac{1}{2}) = 4x - 2(\frac{3}{4} - 3x)$

f) $1 - (x - (x - (x - 1))) = 0$

6. Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe (spełnione dla każdej liczby rzeczywistej), czy sprzeczne.

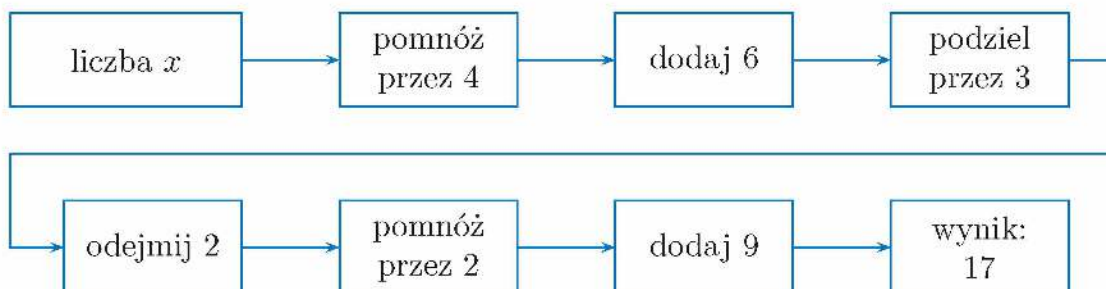
a) $3x - 6 = 1 - (7 - 3x)$

c) $\frac{3}{2}(4x - 6) = \frac{2}{3}(9x - 6)$

b) $4 - (3 + 2x) = 5 - (2x + 6)$

d) $\frac{1}{2}(8 - \frac{1}{2}x) = 4 - \frac{1}{4}x$

7. Począwszy od liczby x , wykonano kolejno ciąg operacji. Wyznacz liczbę x .



2.5. Rozwiązywanie nierówności

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność**, jeśli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymujemy nierówność prawdziwą. Np. liczba 7 spełnia nierówność $x + 1 > 5$, bo $7 + 1 > 5$. Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich liczb, które ją spełniają.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność $\frac{1}{2}x - 2 < 1$.

- a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

Przykład 1

a) Rozwiąż nierówność $x + 3 > 7$.

$$\begin{aligned}x + 3 &> 7 \\x + 3 - 3 &> 7 - 3 && \text{Od obu stron nierówności odejmujemy 3} \\x &> 4 && \text{– nie zmienia to jej zbioru rozwiązań.} \\&&& \text{Nierówność jest spełniona dla } x \in (4; \infty).\end{aligned}$$

Nierówności $>$ i $<$ nazywamy **nierównościami ostrymi**.

b) Rozwiąż nierówność $x - 4 \leq 5$.

$$\begin{aligned}x - 4 &\leq 5 \\x - 4 + 4 &\leq 5 + 4 && \text{Do obu stron nierówności dodajemy 4} \\x &\leq 9 && \text{– nie zmienia to jej zbioru rozwiązań.} \\&&& \text{Nierówność jest spełniona dla } x \in (-\infty; 9).\end{aligned}$$

Nierówności $\geq$ i $\leq$ nazywamy **nierównościami nieostrymi**.

Zauważ, że dodanie tej samej liczby do obu stron nierówności lub jej odjęcie od obu stron jest równoważne przeniesieniu tej liczby na drugą stronę nierówności z przeciwnym znakiem.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą tę nierówność.

- a) $x + 309 < 273$ b) $x - \frac{1}{2} \geq 2\frac{1}{3}$ c) $x - \frac{1}{4} \leq -5\frac{1}{2}$ d) $2x - 3 > x + 17$

Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają one te same zbiory rozwiązań.

Ćwiczenie 3

Czy podane nierówności są równoważne?

- a) $x - 13 < 56$, $x + 26 > 95$ b) $x + \frac{1}{4} \geq \frac{2}{3}$, $x + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{2}$

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $6x + 5 < 17$.

$$6x + 5 < 17$$

Od obu stron nierówności odejmujemy 5.

$$6x < 12 \quad / : 6$$

Obie strony nierówności dzielimy przez 6.

$$x < 2$$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $3x + 7 \leq 34$ b) $\frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{3}$ c) $0,1x + 1 < -\frac{1}{2}$ d) $5x - 7 \geq 3x + 5$

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną, to po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{3}x > 5$.

$$-\frac{1}{3}x > 5 \quad / \cdot (-3)$$

Mnożymy obie strony nierówności przez -3 .

$$x < -15$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Zwróć uwagę na to, że zamiast mnożyć obie strony nierówności przez liczbę ujemną (-3), można je pomnożyć przez 3 i przenieść odpowiednie wyrazy na drugą stronę nierówności.

b) Rozwiąż nierówność $-6x - 4 \leq -13$.

$$-6x - 4 \leq -13$$

Do obu stron nierówności dodajemy 4.

$$-6x \leq -9 \quad / : (-6)$$

Dzielimy obie strony nierówności przez -6 .

$$x \geq \frac{3}{2}$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

a) $-3x - 7 < 2$

c) $3(x - 1) \geq x + 5$

e) $\frac{x-3}{2} < \frac{x+2}{3}$

b) $-\frac{2}{3}x + 1 \leq 5$

d) $2(x + \frac{1}{4}) > \frac{1}{2}x + 4$

f) $\frac{2-x}{5} \leq \frac{x+1}{2}$

Ćwiczenie 6

Przeczytaj przykład w ramce. Sprawdź, czy nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$, czy jest sprzeczna.

a) $3(2 - \frac{1}{6}x) \geq -0,5x + 1$

b) $-\frac{2}{3}(3x - 2) > \frac{1}{2}(3 - 4x)$

c) $\frac{x-2}{2} < \frac{3x-4}{6} - 1$

d) $\frac{4-3x}{3} \geq \frac{2-5x}{5} + 5$

e) $\frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6}$

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1-3x}{6} < -\frac{1}{2}x / \cdot 6$

$$1 - 3x < -3x$$

$$1 < 0x \quad \text{sprzeczność}$$

Nierówność jest sprzeczna
(nie spełnia jej żadna liczba).

b) $4x - 2 \geq 4x - 10$

$$0x \geq -8$$

Nierówność jest spełniona
przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

Zadania

1. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie nierówności.

a) $\begin{cases} x + 9 \geq 13 \\ 2x - 6 < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 6 > -9 \\ 1 - x \geq 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + 3 \leq 4 \\ 5 - 4x \geq 1 \end{cases}$

2. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie nierówności. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą należącą do tego przedziału.

a) $2x + 20 > 8$ i $5 < 1 - x$

c) $2x + 3 < 7$ i $3 - 4x \leq 19$

b) $2x + 3 > 2$ i $4x < 3$

d) $3x + 9 > -7$ i $-3x > 4x + 21$

3. Które spośród liczb: $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5} - 1$, $c = \pi + 2$, spełniają podaną nierówność?

a) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} > x + \frac{1}{2}$

c) $\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x+1}{3}$

e) $\frac{3x+2}{-5} < 3 - x$

b) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x \leq \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}$

d) $\frac{2x+7}{3} > \frac{6-x}{2}$

f) $-3(x+3) > \frac{x-5}{-2}$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $2 - \frac{x+3}{3} < \frac{2x-3}{2}$

d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{6-2x}{5} > -\frac{1}{20} - \frac{x-1}{2}$

b) $\frac{2-x}{2} - \frac{2x-1}{3} \leq 1 - x$

e) $-\frac{1}{6}x - \frac{2x-5}{4} \geq 3 - \frac{8x-3}{3}$

c) $\frac{x+4}{12} + 1 \geq \frac{x}{6} - \frac{3-x}{4}$

f) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{3}x - 6 < 9 - 2\sqrt{3}x$

b) $\sqrt{2}x + 4 < \sqrt{8}x - 8$

c) $\sqrt{5}x < \frac{5\sqrt{5}}{3}x - 2\frac{2}{3}$

Czy wiesz, że...

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest jedna z relacji: $a < b$, $a = b$ lub $a > b$. Własność ta nosi nazwę trychotomii.
- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi następująca własność (zwana przechodniością): jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$.

6. a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną n , od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości n .
- b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną k , do otrzymanego iloczynu dodamy 7, a następnie otrzymaną sumę pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 2. Podaj możliwe wartości k .
- c) Jeśli od połowy liczby naturalnej m odejmiemy trzecią część liczby m pomniejszonej o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 3. Podaj możliwe wartości m .
7. Wysokość prostopadłościanu jest równa k cm, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm. Jakie wartości całkowite może przyjmować k , jeśli:
- a) suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 cm i mniejsza od 46 cm,
- b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od 40 cm^2 i mniejsze od 68 cm^2 ?
- D** 8. Czy poniższe zdanie jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.
- a) Dla dowolnych liczb p, q , jeśli $p < q$, to $p^2 < q^2$.
- b) Dla dowolnych różnych od zera liczb p, q , jeśli $p < q$, to $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$.

Powtórzenie

9. Rozwiąż nierówność.
- a) $3 - x < 4$ c) $3 + \frac{1}{2}x > \frac{3}{2}x - 1$ e) $\frac{2}{3}x + 1 \geq \frac{1}{2}x - 2$
- b) $6x \geq 1 + 8x$ d) $1 - \frac{2}{3}x \leq 8 + \frac{5}{3}x$ f) $2,5x - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}x + 1$
10. Które liczby ze zbioru $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ spełniają nierówność?
- a) $x - (2x - 3) < 2(x - 1,5)$
- b) $1 - (0,6 - 0,3x) \leq x - 0,1(4x + 5)$
- c) $2(x - 1) - 3(2x + 1) > -x - \frac{1}{2}(6 - 4x)$

Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Przypomnijmy, że aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez ten jednomian.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1. Wykonaj mnożenie.

a) $(3x^2 + 2x - 4)x^2$

d) $\sqrt{2}x^4(\sqrt{8}xy + y^2)$

b) $-2x^3(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2)$

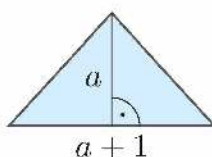
e) $(x^2y - xy + xy^2)x^2y$

c) $-\frac{1}{2}x^2(4x^2y - 2xy^2)$

f) $2\sqrt{3}xy^3(\sqrt{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y)$

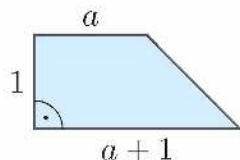
2. Dopasuj do figury wzór na jej pole.

A.



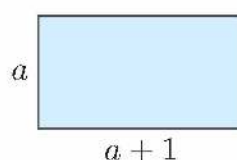
I. $2a^2 + a$

B.



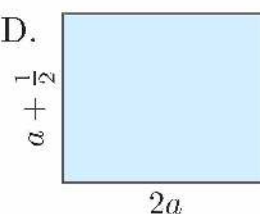
II. $a^2 + a$

C.



III. $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$

D.



IV. $a + \frac{1}{2}$

3. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $2x(3x - 4) - 6x(x^2 + 2x - 3)$

b) $-\frac{1}{2}x^2(x^2 - 2x + 6) - 2x(\frac{1}{2}x^2 - 4x)$

c) $\sqrt{6}x^3(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) + \sqrt{3}x(2x^2 - 4\sqrt{2}x)$

d) $xy^2(2x - 3xy + y) + \frac{1}{4}x^2y(\frac{1}{2}y^2 - 8y)$

e) $-\frac{1}{2}x^3y(xy - 2xy^2) - \frac{1}{8}xy^2(4x^3 - 16x^2y)$

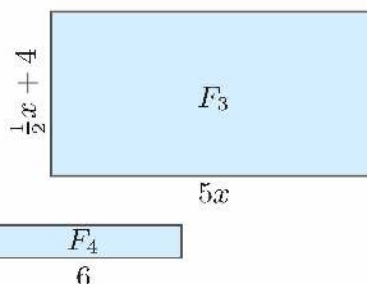
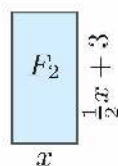
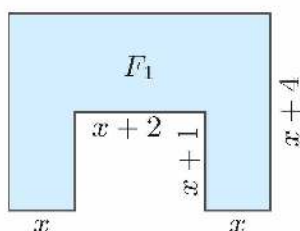
f) $-\frac{1}{4}x^2y(-2x + y) - \frac{3}{4}y(x^2 - x^2y) - \frac{1}{2}(x^3y + xy)$

D 4. Uzasadnij, że wartość wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x .

a) $4x^2(x^2 - \frac{3}{2}x + 1) - 3x(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1) - 4(x^2 - \frac{3}{4}x - 8)$

b) $\sqrt{15}x(2\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{5}x - \sqrt{10}) - 2\sqrt{5}x^2(3x - 3\sqrt{15}) + \sqrt{6}(5x - 1)$

D 5. Uzasadnij, że suma pól figur F_1 i F_2 równa się różnicy pól figur F_3 i F_4 .



2.6. Wylączenie jednomianu przed nawias

Jeżeli w poszczególnych wyrazach sumy rozpozna się jednakowe czynniki i wylączy je przed nawias, łatwiej będzie wykonać obliczenia.

Przykład 1

Oblicz sumę $7 \cdot 49 + 7 \cdot 51$.

Wylączamy przed nawias liczbę 7:

$$7 \cdot 49 + 7 \cdot 51 = 7 \cdot (49 + 51) = 7 \cdot 100 = 700$$

Korzystamy z własności działań
 $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
zwanej rozdzielnością mnożenia
względem dodawania.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

a) $2 \cdot 183 + 2 \cdot 17$

c) $3 \cdot 251 + 3 \cdot 249$

e) $12 \cdot 228 + 12 \cdot 172$

b) $9 \cdot 27 + 9 \cdot 23$

d) $6 \cdot 378 + 6 \cdot 222$

f) $19 \cdot 116 + 19 \cdot 84$

Również w sumach algebraicznych można wylączyć wspólny czynnik przed nawias.

Przykład 2

Dana jest suma algebraiczna $6x^3 + 12x^2$. Wylącz przed nawias wspólny czynnik.

- Wylączamy przed nawias 6: $6x^3 + 12x^2 = 6(x^3 + 2x^2)$
- Wylączamy przed nawias $6x$: $6x^3 + 12x^2 = 6x(x^2 + 2x)$
- Wylączamy przed nawias $6x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$
- Wylączamy przed nawias $12x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 12x^2(\frac{1}{2}x + 1)$

To, jaki czynnik wylączymy przed nawias, zależy od konkretnego zadania.

Wylączenie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

Ćwiczenie 2

Wylącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $5x + 5y$

c) $9x - 27y^2$

e) $39y^2 - 26z$

g) $-48p + 36q^2$

b) $4b - 8a$

d) $-6x^2 + 18y^2$

f) $-11a^3 + 22b^2$

h) $75xy^3 - 125$

Ćwiczenie 3

Wylącz wskazany jednomian przed nawias.

- a) $4x^2 + xy$, x c) $3xy - xyz$, xy e) $a^2b + 3a^2b^2 - a^3b$, a^2b
b) $2x^3 - 12xy$, $2x$ d) $6pq + 18p^2q$, $6pq$ f) $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 2x^2y^3$, x^2y^2

Przed nawias wylączamy zwykle **czynnik liczbowy** oraz **wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach**. Na przykład:

$$27x^3y^2 + 18x^2y^3 = 9x^2y^2(3x + 2y)$$

Ćwiczenie 4

Wylącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach.

- a) $8x^3 - 36x^2$ d) $20ax - 15ay$ g) $2a^3b + 4a^2b - 4a^2b^2$
b) $7y^2 - 14y^4$ e) $8ab + 12bc$ h) $21p^3q^2 - 27p^2q^3 + 3p^2q^2$
c) $5x^3 + 10x^2y$ f) $4xy + 6x^2y$ i) $48x^2y + 18xy^2 - 12x^2y^2$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $4 \cdot 49 + 4 \cdot 51$ c) $113 \cdot 25 + 87 \cdot 25$ e) $10 \cdot 17 + 10 \cdot 33 + 50 \cdot 10$
b) $40 \cdot 47 + 40 \cdot 53$ d) $63 \cdot 37 + 37 \cdot 37$ f) $15 \cdot 17 + 15 \cdot 2 + 15$

2. Wylącz podany czynnik przed nawias.

- a) $a^2b + ab^3$, ab c) $9a^3b^2 - 3a^2c^2$, $3a^2$ e) $3a^3b^2 - 6a^2b$, $3a^2b$
b) $x^3y^2 - xy^3$, xy^2 d) $4x^4y^4 + 8y^3z$, $4y^3$ f) $6x^2y^4 + 8x^3y^3$, $2x^2y^3$

3. Zapisz wyrażenie algebraiczne w postaci iloczynu, wylączając przed nawias podany jednomian.

- a) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$, xyz c) $2x^3y - 4x^2y^2 + 6x^2yz$, $2x^2y$
b) $x^2yz^2 + xy^2z^3 - x^3yz^2$, xyz^2 d) $12x^4y^3 + 6x^3y^3 - 9x^5y^2$, $3x^3y^2$

4. Przepisz do zeszytu i uzupełnij odpowiednimi jednomianami.

- a) $27y^4 + 36y^3 - 54y^2 = 9y^2(3y^2 + \boxed{?} + \boxed{?})$
b) $3ab(3a + b + \boxed{?}) = 9a^2b + \boxed{?} + 6ab$
c) $12t^4 - 9t^3 + 3t^2 = \boxed{?} \cdot (\boxed{?} - 3t + 1)$

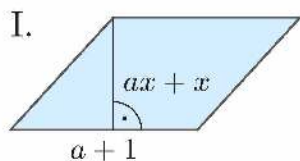
5. Oblicz wartość podanego wyrażenia, jeśli $a + b = 15$.

- a) $-3a - 3b$ b) $2(a + b) - 4a - 4b$ c) $a(a + b) + b(a + b)$

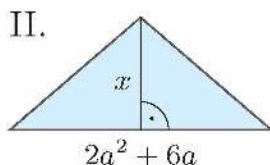
6. Oblicz wartość podanego wyrażenia, jeśli $6x + 9y = 12$.

- a) $60x + 90y$ b) $12x + 18y$ c) $2x + 3y$ d) $x + \frac{3}{2}y$

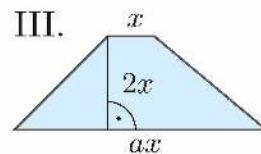
7. Dopasuj wyrażenie opisujące pole figury do odpowiedniej figury.



A. $ax(a+3)$



B. $x^2(a+1)$



C. $x(a+1)^2$

D 8. Przeczytaj podane obok uzasadnienie stwierdzenia, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3. Następnie uzasadnij, że:

- a) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,
b) suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6,
c) suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3.

Niech n , $n+1$ i $n+2$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Ich suma S jest równa:

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) &= \\ &= 3n + 3 = 3(n+1) \end{aligned}$$

Suma S została przedstawiona w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 3, a drugim liczba naturalna $n+1$. Zatem S jest podzielna przez 3.

D 9. Uzasadnij, że jeśli dwie liczby są podzielne przez 3, to suma ich kwadratów jest podzielna przez 9.

D 10. Uzasadnij, że suma dowolnej liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przedstawienia cyfr tej liczby jest podzielna przez 11 (np. $23 + 32 = 55$, a liczba 55 jest podzielna przez 11).

Powtórzenie

11. Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz zmienną x w jak najwyższej potędze.

- a) $9x^3 - 6x^2 + 15x$ b) $18x^4 + 24x^3 - 12x^2$ c) $8x^5 - 16x^4 + 12x^6$

12. Wyłącz przed nawias czynnik $3x^2$ lub $2xy^2$.

- a) $9x^3 + 3x^2y^2$ c) $6x^2y^2 - 2xy^2$ e) $6x^3y^3 - 6x^4y^4 + 12xy^2$
b) $3x^4y^2 - 6x^2y$ d) $8xy^5 + 12x^2y^4$ f) $6x^4y^2 + 6x^3y^2 - 18x^4y$

13. Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższej potędze.

- a) $9x^4y^3 - 12y^5$ b) $8a^2b^2 + 4a^3b^4$ c) $8p^3q^3 + 4p^4q^4 - 6p^2q^3$

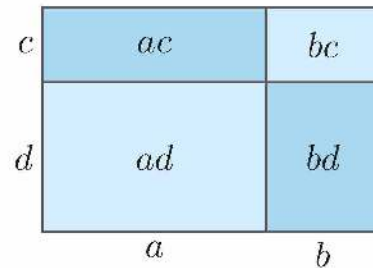
2.7. Mnożenie sum algebraicznych

Prostokąt narysowany obok ma boki długości $a + b$ i $c + d$, zatem jego pole jest równe $(a + b) \cdot (c + d)$. Pole tego prostokąta możemy również obliczyć, sumując pola czterech mniejszych prostokątów:

$$ac + ad + bc + bd$$

Mamy zatem równość:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$



Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Uwaga. W zapisie iloczynu sum algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia między nawiasami.

Przykład 1

a) Wykonaj mnożenie $(x + 3)(x + 5)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(x + 3)(x + 5) = x \cdot x + x \cdot 5 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5 = x^2 + 8x + 15$$

Każdy wyraz jednej sumy mnożymy przez każdy wyraz drugiej sumy.

b) Wykonaj mnożenie $(a + 4b)(a - b)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(a + 4b)(a - b) = a^2 - ab + 4ab - 4b^2 = a^2 + 3ab - 4b^2$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Zredukuj wyrazy podobne.

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| a) $(x + 4)(x + 3)$ | c) $(p + q)(q - 2p)$ | e) $(a + 3b)(3a - 2b)$ |
| b) $(p + 6)(p - q)$ | d) $(3x + 1)(2x + 6)$ | f) $(2a - \frac{1}{2}b)(4a - 3b)$ |

Przykład 2

Wykonaj mnożenie $(x - 3)(x^2 + x - 2)$.

Zauważmy, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy mnożenie danych sum algebraicznych.

$$(x - 3)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$(x^2 + x - 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj mnożenie.

- a) $(x-1)(x^2+x-2)$ c) $(x+y-4)(x-y)$ e) $(x-y+2)(x+y-3)$
b) $(x+3)(2x^2-x+3)$ d) $(2x-y+6)(x+3y)$ f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Przykład 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

Aby wyznaczyć objętość prostopadłościanu, mnożymy przez siebie wyrażenia opisujące długości krawędzi jego podstawy i wysokość:

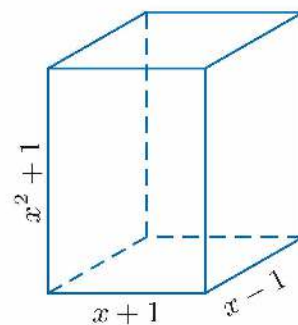
$$V = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x^2+1) &= \\&= (x^2-x+x-1)(x^2+1) = \\&= (x^2-1)(x^2+1) = \\&= x^4+x^2-x^2-1 = x^4-1\end{aligned}$$

Mnożymy dwie dowolnie wybrane sumy i w otrzymanym wyrażeniu redukujemy wyrazy podobne.

Mnożymy dwie sumy i ponownie redukujemy wyrazy podobne.

Zatem objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = x^4 - 1$.



Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu, którego krawędzie mają podane długości. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

- a) $x+2$, $x-2$, x^2+2 b) $x-2$, x^2-1 , x^2+1

Przykład 4

- a) Oblicz $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)$.

Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 3 + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}$$

- b) Oblicz $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= 2(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = \\&= 6 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 = 4 + \sqrt{6}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)$ c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$
b) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)$ d) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

D Przykład 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba S jest podzielna przez 5.

$$S = (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n)$$

Przekształcamy wyrażenie opisujące liczbę S :

$$\begin{aligned} S &= (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n) = && \text{Mnożymy sumy algebraiczne.} \\ &= 4n^2 - 8n - n + 2 + 8 - 4n - 2n + n^2 = && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ &= 5n^2 - 15n + 10 = \\ &= 5(n^2 - 3n + 2) && \text{Wyłączamy liczbę 5 przed nawias.} \end{aligned}$$

Liczbę S przedstawiliśmy w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 5, a drugim liczba $n^2 - 3n + 2$. Liczba $n^2 - 3n + 2$ jest całkowita, ponieważ jest sumą liczb całkowitych. Zatem S jest podzielna przez 5.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba postaci:

- a) $(2n - 3)(n + 4) + (n - 3)(n + 2) - n$ jest podzielna przez 3,
- b) $(3n - 4)(2n - 5) - (2n - 1)(5 - 2n)$ jest podzielna przez 5,
- c) $(6n - 3)(n + 4) - (3n - 2)(2n - 1)$ jest podzielna przez 7.

Przykład 6

a) Rozwiąż równanie $(x - 1)(x + 3) = x^2$.

$$\begin{aligned} (x - 1)(x + 3) &= x^2 && \text{Mnożymy sumy algebraiczne i przenosimy } x^2 \\ x^2 + 3x - x - 3 - x^2 &= 0 && \text{na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem.} \\ 2x &= 3 \quad / :2 && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Rozwiąż nierówność $(2x + 1)(2x + 5) + x \leq (4x - 1)(x + 3)$.

$$\begin{aligned} (2x + 1)(2x + 5) + x &\leq (4x - 1)(x + 3) \\ 4x^2 + 10x + 2x + 5 + x &\leq 4x^2 + 12x - x - 3 \\ 4x^2 + 10x + 2x + x - 4x^2 - 12x + x &\leq -3 - 5 && \text{Przenosimy ze zmienionym znakiem} \\ 2x &\leq -8 \quad / :2 && \text{wyrażenia zawierające niewiadomą} \\ x &\leq -4 && \text{na lewą stronę nierówności,} \\ &&& \text{a liczby na prawą stronę.} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż.

- a) $(x + 2)(x - 5) = x^2$
- b) $(x + 3)(1 - 2x) + 2x^2 = 0$
- c) $3x^2 - (x + 1)(3x + 2) = 0$
- d) $(x + 4)(x - 1) < x(x + 2) + 2x - 1$
- e) $(2x + 3)(3x - 1) + 4 > (6x - 2)(x + 1)$
- f) $(1 - x)(2x + 3) \leq -2(x + 1)(x - 2) - 2$

Zadania

1. Wykonaj mnożenie.

- a) $(2a + b)(a - 1)$ c) $(-2a + b)(6a - 2)$ e) $(2a + b^2)(a - 2b)$
b) $(3a - 2b)(2b + 3)$ d) $(3 + 4a)(-2b - 1)$ f) $(a^2 - 3b)(2b - 3a)$

2. Wykonaj mnożenie.

- a) $(x + 2y + 3)(x - 2)$ c) $(x^2 + y)(x + y + 2)$ e) $2x(x - 2y)(3 + y)$
b) $(2x - y + 1)(2x - 3)$ d) $(x - y)(x^2 - 2x + 1)$ f) $-4x(2x - y)(2x + y)$

3. Uprość wyrażenie.

- a) $(a + 3)(a - 4) + (a - 3)(a + 4)$ c) $3y^2 - 2x(x + 2y) - (x - y)(2x + y)$
b) $(2a - b)(a + 3b) - (a - 4b)(2a + b)$ d) $2x^2 + 3(x(x + 2) - x(x - 3))$

4. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = -0,5$.

- a) $(x + 2)(6(x + 4) - 5(x + 6))$ b) $-2(x^4 + x^2) + x^3(x + 1) + (x^2 - 2)(x^2 + 3)$

5. Dany jest prostokąt o bokach długości a i $a + 2$.

- a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.
b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.

6. a) Dany jest kwadrat o boku długości $x + 3$. O ile zmniejszy się pole tej figury, gdy jeden jej bok zmniejszymy o 2, a drugi o 1?

- b) Dany jest trójkąt o podstawie równej $a + 3$ i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej $a + 4$. O ile zwiększy się pole trójkąta, gdy wysokość zwiększymy o 2?

- c) Dany jest prostokąt o bokach długości $x + 4$ i $2x + 3$. O ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli jeden z jego boków zwiększymy o 2, a drugi o 1? Rozpatrz dwa przypadki.

7. Oblicz.

- a) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 8\sqrt{2})$ c) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (4 - \sqrt{6})$
b) $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ d) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (6 - 3\sqrt{15})$

D 8. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby x wartość wyrażenia jest nieujemna.

- a) $(3x - 6)(4x - 2) - (6x + 3)(2x - 6)$
b) $(3x - 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 1)$

9. Rozwiąż równanie.

a) $(x+2)(x-3) = x^2 + 4$

c) $(x-2)(x-5) = (x+3)(x+6)$

b) $(x-4)(x+6) = x(x-4)$

d) $(2x+1)(x+3) = (x-4)(2x-3)$

10. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - (x+3)(x-3) \leq 6x$

c) $(2x-1)(3x-1) - (3x-2)(2x-3) \geq 0$

b) $(4-x)(2x+3) + 2x^2 < 6$

d) $(4-6x)(2x+1) + (4x-5)(3x-1) > x$

11. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?

a) $(3x+1)(2-x) + x(3x-5) \geq x$

b) $2x^2 - (2x+1)(x-3) > 6x-7$

c) $(3x+3)(2x-1) + 4x < 6(x+2)(x-1) + 9$

12. a) Dane są dwa prostokąty: P_1 o wymiarach $(2x+30)$ cm $\times$ $(x+20)$ cm oraz P_2 o wymiarach $(2x+10)$ cm $\times$ $(x+10)$ cm. Różnica pól prostokątów P_1 i P_2 jest równa 900 cm². Oblicz obwody tych prostokątów.

b) Dane są dwa prostokąty o wymiarach $(6-x)$ cm $\times$ $(2x-5)$ cm oraz $(x+5)$ cm $\times$ $(2x-1)$ cm. Suma ich pól jest równa 69 cm². Oblicz różnicę między polem większego i mniejszego prostokąta.

13. Dane są prostokąt o wymiarach $(4x+1)$ cm $\times$ $(x+3)$ cm oraz kwadrat o boku $(2x+7)$ cm. Pole kwadratu jest o 91 cm² większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodami kwadratu i prostokąta.

Powtórzenie

14. Uprość wyrażenie.

a) $(3k+5)(4k-2) + 2(5-7k)$

c) $(2k-l)(5k+l) - (4k+l)(k-l)$

b) $(3-l)(4-l) - (6-l)(1-l)$

d) $3k(8k-2l) - (6k+l)(4k-l)$

15. Rozwiąż.

a) $(3x-4)(2x-1) = (6x+2)(x-1)$

b) $(9x+1)(2x-1) = (1-6x)(1-3x)$

c) $9x^2 - (3-4x)(3-2x) < x(x-9)$

d) $(x+1\frac{1}{2})(2x+1) \geq (2x+\frac{1}{2})(x-1) + 6x$

D 16. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to liczba postaci:

a) $(3n+2)(1-2n) + (2-5n)(2n-3) - 2n$ jest podzielna przez 4,

b) $(5n-8)(4n+1) - (2n-5)(9n-2) + n(4n+2)$ jest podzielna przez 6.

2.8. Wzory skróconego mnożenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat sumy}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat różnicy}$$

D Ćwiczenie 1

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwe są podane wyżej wzory.

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można zilustrować następująco:

$$(\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

$$(\bigcirc - \square)^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

Przykład 1

$$\text{a) } (x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$\text{b) } (3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$\text{c) } (2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\text{a) } (x + 1)^2$$

$$\text{c) } (x - 3)^2$$

$$\text{e) } (2x + 1)^2$$

$$\text{g) } (4x - 1)^2$$

$$\text{b) } (x + 2)^2$$

$$\text{d) } (x - 5)^2$$

$$\text{f) } \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2$$

$$\text{h) } \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Ćwiczenie 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\text{a) } (x + 2y)^2$$

$$\text{d) } \left(3x + \frac{1}{2}y\right)^2$$

$$\text{b) } (2x - y)^2$$

$$\text{e) } \left(2x - \frac{1}{4}y\right)^2$$

$$\text{c) } (3x + 2y)^2$$

$$\text{f) } \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^2$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

$$\text{a) } (\sqrt{7} + 1)^2$$

$$\text{d) } (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$\text{b) } (\sqrt{5} - 3)^2$$

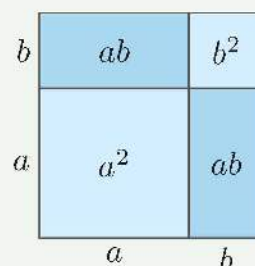
$$\text{e) } (\sqrt{6} + \sqrt{15})^2$$

$$\text{c) } (6 - \sqrt{3})^2$$

$$\text{f) } \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6}\right)^2$$

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Podaj analogiczną interpretację geometryczną wzoru:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

różnica kwadratów

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest podany wyżej wzór.

Przykład 2

a) $(\boxed{x} - \boxed{6})(\boxed{x} + \boxed{6}) = \boxed{x}^2 - \boxed{6}^2 = x^2 - 36$

b) $(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x - 3)(x + 3)$

c) $(2x - 4)(2x + 4)$

e) $(3x - 4y)(3x + 4y)$

b) $(x + 7)(x - 7)$

d) $(6 + 5x)(5x - 6)$

f) $(\frac{1}{2}x + 3y)(3y - \frac{1}{2}x)$

Przykład 3

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) = 49 - 3 = 46$$

Ten przykład rozwiązany za pomocą kalkulatora wyglądałby następująco:

$$\begin{aligned}(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) &\approx (7 - 1,732050808)(7 + 1,732050808) = \\ &= 5,267949192 \cdot 8,732050808 \approx 46\end{aligned}$$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})$ c) $(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2})(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2})$ e) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

b) $(\sqrt{5} + 1)(1 - \sqrt{5})$ d) $(2\sqrt{2} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2})(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2})$

Zadania

1. Uprość wyrażenie:

a) $(x - 3)(x + 3) + (2 + x)(2 - x)$, d) $(5y + 1)(1 - 5y) - (1 + 5y)^2$,

b) $(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) - (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$, e) $(2x - y)(2x + y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$,

c) $(2y - 3)^2 - (3y - 2)(3y + 2)$, f) $(y + 3x)(3x - y) - (x - 5y)(x + 5y)$.

2. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(x + 1)(x - 1) + (x + 2)(x - 2) - (x + 3)(x - 3)$ dla $x = \sqrt{3}$,

b) $(1 - 2x)(1 + 2x) + (1 - 3x)(1 + 3x) - (1 - 4x)(4x + 1)$ dla $x = \sqrt{5}$,

c) $(2x - 1)^2 - (2x - 1)(1 + 2x) - (2x + 1)^2$ dla $x = \sqrt{2}$.

3. Oblicz.

- a) $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$ d) $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)(2 + \sqrt{5})$
b) $(\sqrt{3} - 1)^2 - (2 - \sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$
c) $(2\sqrt{3} - \frac{3}{2})^2 - (2\sqrt{3} + \frac{3}{2})^2$ f) $(2\sqrt{5} - \sqrt{10})^2 - (2\sqrt{5} + 1)(1 - 2\sqrt{5})$

4. Oblicz.

- a) $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ c) $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$
b) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ d) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

5. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a .

- a) $a = 3 + \sqrt{2}$ b) $a = 2\sqrt{3} - 1$ c) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

- a) $a = 4 - \sqrt{2}$, $b = 4 + \sqrt{2}$ b) $a = 8 + \sqrt{2}$, $b = 4 - 2\sqrt{2}$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(2x + 3y)(2x - 3y) - (2x - 3y)^2$ dla $x = \sqrt{\sqrt{10} - 3}$, $y = \sqrt{\sqrt{10} + 3}$,
b) $(\sqrt{3}x - y)^2 - (x - \sqrt{3}y)^2$ dla $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.
c) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{5}y)$ dla $x = \sqrt{5} - 4$, $y = \sqrt{6}$,
d) $(x^2 - 4y^2)^2 - (4y^2 - x^2)^2$ dla $x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

D 8. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

- a) $(n + 1)^2 - n^2$ jest nieparzysta, c) $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2$ jest parzysta,
b) $(2n + 1)^2$ jest nieparzysta, d) $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Powtórzenie

9. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(7 - x)^2$ c) $(2x + 4)^2$ e) $(\frac{1}{4}x + 8)^2$ g) $(0,5x + 0,4)^2$
b) $(x + \frac{1}{2})^2$ d) $(3x + 8)^2$ f) $(\frac{2}{3}x - 6)^2$ h) $(0,1x - 2,5)^2$

10. Oblicz.

- a) $(3 + \sqrt{2})^2$ c) $(4 - 3\sqrt{2})^2$ e) $(2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$ g) $(\sqrt{8} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2$
b) $(1 - \sqrt{5})^2$ d) $(2\sqrt{7} + 3)^2$ f) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2$ h) $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3})^2$

11. Oblicz.

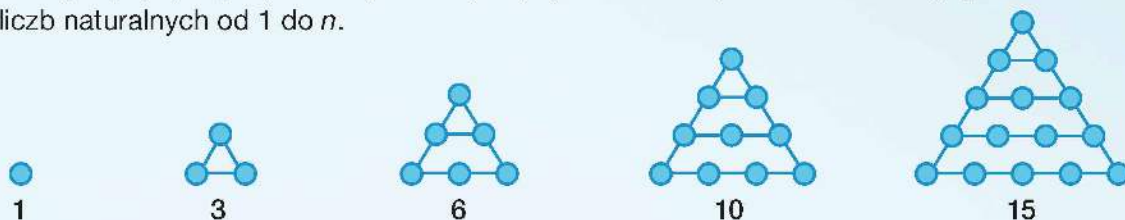
- a) $(\sqrt{7} - 1)(1 + \sqrt{7})$ b) $(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$ c) $(\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

Liczby wielokątne

Liczby wielokątne badali już w VI wieku p.n.e. starożytni Grecy. Ich nazwę wyjaśniono na poniższych rysunkach.

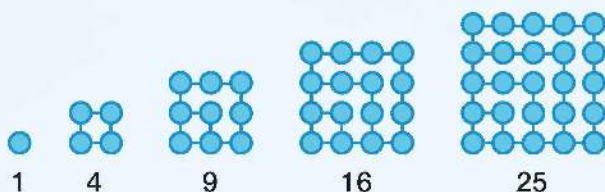
Liczby trójkątne

Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, to kolejne liczby trójkątne. Zauważ, że n -ta liczba trójkątna to suma liczb naturalnych od 1 do n .



Wzór na n -tą liczbę trójkątną ma postać $\frac{n(n+1)}{2}$.

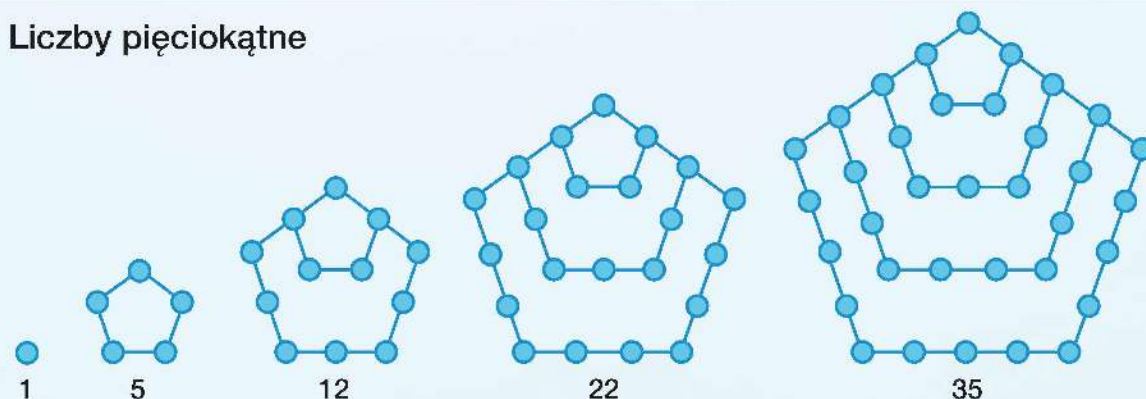
Liczby kwadratowe



$1 = 1^2$	
$1 + 3 = 2^2$	
$1 + 3 + 5 = 3^2$	
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$	

- 1 Zauważ, że n -ta liczba kwadratowa jest sumą n początkowych liczb nieparzystych (rysunek po prawej). Ile jest równa suma dwudziestu początkowych liczb nieparzystych?
- 2 Wykaż, że dla $n > 1$ n -ta liczba kwadratowa jest sumą dwóch kolejnych liczb trójkątnych.

Liczby pięciokątne



- 3 Korzystając z podanego obok wzoru, oblicz szóstą liczbę pięciokątną.
- 4 Oblicz pięć kolejnych liczb sześciokątnych. Podaj ich ilustrację graficzną.

n -ta liczba r -kątna wyraża się wzorem:

$$(r-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n$$

2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

Wzór na różnicę kwadratów: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ można zastosować do usuwania niewymierności z mianownika.

Przykład 1

$$\frac{5}{\sqrt{2}-1} = \frac{5}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{5\sqrt{2}+5}{2-1} = 5\sqrt{2} + 5$$

Ćwiczenie 1

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{6+\sqrt{2}}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4}$

c) $\frac{2}{4-3\sqrt{2}}$

d) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Wzory skróconego mnożenia wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany obok przykład.

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - (2 - x)^2 = 8$

b) $(3x + 1)^2 - 9x^2 = 7$

c) $(x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1) = 12$

Rozwiąż równanie.

$$(x - 4)(x + 4) - (x - 3)^2 = 17$$

$$x^2 - 16 - (x^2 - 6x + 9) = 17$$

$$x^2 - 16 - x^2 + 6x - 9 = 17$$

$$6x - 25 = 17$$

$$6x = 42$$

$$x = 7$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 - (2x + 1)^2 < 3$

c) $(2x + 1)(2x - 1) > 4x^2 - 9x$

b) $(3 - x)^2 \geq x^2 + 12$

d) $2 - (2x - 1)^2 \leq (3 - 2x)(2x + 3)$

Przykład 2

Dla jakich wartości x wyrażenie $x^2 + 4x + 4$ przyjmuje wartość równą 0?

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2, \text{ więc:}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Symbol $\Leftrightarrow$ czytamy:
„wtedy i tylko wtedy, gdy”.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

a) $x^2 + 8x + 16$

c) $4x^2 - 4x + 1$

e) $4x^2 + 12x + 9$

b) $x^2 - 6x + 9$

d) $25x^2 + 10x + 1$

f) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

Równanie, które nie jest spełnione przez żadną liczbę rzeczywistą, nazywamy **równaniem sprzecznym**. Podobnie taką nierówność nazywamy **nierównością sprzeczną**.

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $(x + 3)^2 = 6x$.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= 6x \\x^2 &= -9\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej
nie może być liczbą ujemną.

Zatem równanie jest spreczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(2x - 1)^2 < 4x(x - 1)$.

$$\begin{aligned}4x^2 - 4x + 1 &< 4x^2 - 4x \\1 &< 0\end{aligned}$$

Zatem nierówność jest spreczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

Równanie lub nierówność spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą nazywamy **równaniem tożsamościowym** (krótko: **tożsamością**) lub **nierównością tożsamościową**.

Przykład 4

a) Rozwiąż równanie $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x$.

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - (x - 3)^2 &= 12x \\x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) &= 12x \\12x &= 12x\end{aligned}$$

Zatem równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(x - 2)(x + 2) + 5 > 0$.

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) + 5 &> 0 \\x^2 - 4 + 5 &> 0 \\x^2 &> -1\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej
zawsze jest większy od liczby
ujemnej.

Zatem nierówność jest tożsamościowa – spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe lub spreczne.

$$\text{a) } (6 - x)^2 - (2 - x)^2 = -8x \qquad \text{b) } (x - 4)^2 + 4x = (x - 2)^2 + 12$$

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub spreczna.

$$\text{a) } (x + 1)^2 - 2 \leq (x - 1)(1 + x) + 2x \qquad \text{b) } 6x - (3x - 1)^2 \geq (2x + 3)^2$$

Zadania

1. Usuń niewymierność z mianownika. Czy podana liczba należy do przedziału $(0; 4)$?

a) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$	d) $\frac{2}{1-2\sqrt{2}}$	g) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$	j) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
b) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$	e) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}$	h) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$	k) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$
c) $\frac{3}{2+\sqrt{5}}$	f) $\frac{8}{3\sqrt{2}-4}$	i) $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$	l) $\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $(x-5)(x+5) = x^2 - 100x$	d) $4(x+2)^2 - (2x-1)^2 = 20x + 10$
b) $(3-x)^2 - (x+\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$	e) $(6+\frac{1}{3}x)(-\frac{1}{3}x+6) + (\frac{1}{3}x-4)^2 = 4$
c) $4(\frac{1}{2}x-3)^2 = (6-x)^2$	f) $(-4x-3)(4x-3) + 8(1-\sqrt{2}x)^2 = 1$

3. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

a) $4(x-3)^2 - (2x-5)^2 \geq 2$	c) $-9(2-x)^2 - (1-3x)(3x+1) \leq 11$
b) $9(\frac{2}{3}x-1)^2 > (1-2x)^2 - 8x$	d) $(\frac{1}{4}x+2)^2 + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}x)(1+\frac{1}{2}x) \geq 0$

4. Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 1 \\ (x-1)^2 < (2-x)^2 \end{cases}$	c) $\begin{cases} (2x+5)(5-2x) + (2x-3)^2 - 2 > 0 \\ (x-\frac{1}{2})^2 - 4 < x - (2-x)(2+x) \end{cases}$
b) $\begin{cases} \frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2} \\ (2x-3)^2 \leq (5-2x)^2 \end{cases}$	d) $\begin{cases} x - \frac{4x-2}{3} \geq x-6 \\ 1 - (2x-1)(1+2x) < -2x - (2x-1)^2 \end{cases}$

Powtórzenie

5. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	b) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$	c) $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$	d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2}$	e) $\frac{3+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$
-------------------------	---------------------------	---------------------------	----------------------------------	--------------------------------------

6. Rozwiąż równanie.

a) $(x-1)^2 - (x+2)^2 = 6$	c) $x^2 - (x-4)(4+x) = 2$
b) $(3-x)^2 + (2x+1)^2 = 5x^2$	d) $(\frac{x}{2}+3)(\frac{x}{2}-3) = (\frac{x}{2}-1)^2$

7. Rozwiąż nierówność.

a) $(x+3)^2 - (x+2)^2 \leq 0$	c) $9x^2 + (2+3x)(2-3x) \geq 6x$
b) $(4-x)^2 + (2+x)^2 > 2x^2$	d) $(\frac{3}{2}x-4)(\frac{3}{2}x+4) < (\frac{3}{2}x-1)^2$

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach

D Przykład 1

Uzasadnij, że liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

$$\begin{aligned} 13^8 - 7^8 &= (13^4 - 7^4)(13^4 + 7^4) = \\ &= (13^2 - 7^2)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\ &= (169 - 49)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\ &= 120(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) \end{aligned}$$

Zatem liczba $13^8 - 7^8$ jest podzielna przez 120.

- D** 1. a) Uzasadnij, że liczba $19^{16} - 9^{16}$ jest podzielna przez 280.
b) Uzasadnij, że liczba $11^{32} - 7^{32}$ jest podzielna przez 72.

D Przykład 2

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a, b zachodzi nierówność $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Jeśli $a + b < 0$, to nierówność jest prawdziwa (dlaczego?).

Zakładamy teraz, że $a + b \geq 0$. Obie strony nierówności są wówczas nieujemne, możemy więc podnieść je do kwadratu, nie zmieniając zwrotu nierówności.

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^2}{4} &\leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad / \cdot 4 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.} \\ a^2 + 2ab + b^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\ 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\ 0 &\leq (a - b)^2 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb a, b , zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

- D** 2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ zachodzi nierówność:

$$\text{a) } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \text{b) } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

D Przykład 3

Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:

$$2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 \geq 0$$

Przekształcamy równoważnie wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 &= x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = (x - y)^2 + (x - 1)^2 \\ (x - y)^2 &\geq 0 \text{ i } (x - 1)^2 \geq 0, \text{ więc nierówność jest prawdziwa.} \end{aligned}$$

- * **D** 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb x i y prawdziwa jest nierówność:

$$\text{a) } y^2 + 2x^2 - 2xy - 6x + 9 \geq 0, \quad \text{b) } 5x^2 + y^2 + 4 \geq 4xy + 4x.$$

2.10. Wartość bezwzględna

Definicja

Liczbę $|a|$ zdefiniowaną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a .

Oznaczenie $|a|$ wprowadził Karl Weierstrass w 1841 roku.

Zwróć uwagę, że $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geq 0$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

Przykład 1

a) $|3,5| = 3,5$ b) $|-3,5| = -(-3,5) = 3,5$ c) $|0| = 0$ d) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

Przykład 2

a) $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, gdyż $\sqrt{5} - 2 > 0$

b) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$, gdyż $1 - \sqrt{2} < 0$

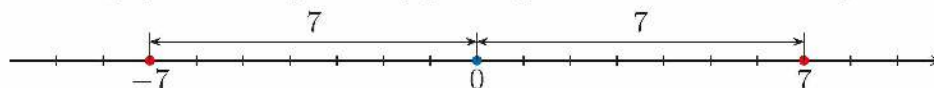
Ćwiczenie 1

Podaj wartość bezwzględną liczby.

a) 5 b) -5 c) $\sqrt{3} - 1$ d) $\sqrt{3} - 3$ e) $4 - 3\sqrt{2}$ f) $5 - 2\sqrt{5}$

■ Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby x to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



Liczby -7 i 7 leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą wartość bezwzględną, równą 7.

$$|-7| = 7 \quad \text{i} \quad |7| = 7$$

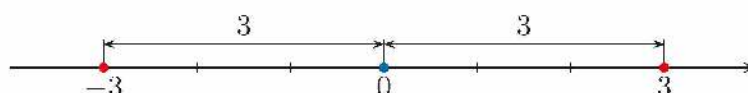
Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:

$$|-a| = |a|$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x| = 3$.

Ponieważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby x jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi równanie są -3 oraz 3 .



Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości x spełnione jest równanie:

- a) $|x| = 2$, b) $|x| = 10$, c) $|x| = 0$, d) $|x| = -3$.

Ćwiczenie 3

Która z liczb x, y ma większą wartość bezwzględną?

- a) $x = 7, y = -6$ b) $x = -10, y = -12$ c) $x = -8, y = 0$

Przypomnijmy, że:

- $\sqrt{a^2} = a$ dla $a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = -a$ dla $a < 0$

Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

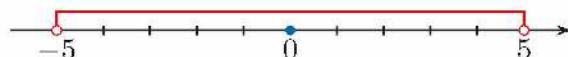
- a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ b) $\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 4

- a) Rozwiąż nierówność $|x| < 5$.

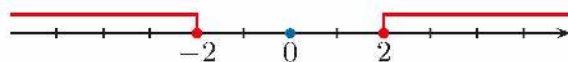
Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest mniejsza od 5.



Nierówność jest spełniona dla $-5 < x < 5$, zatem $x \in (-5; 5)$.

- b) Rozwiąż nierówność $|x| \geq 2$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest większa lub równa 2.



Nierówność jest spełniona dla $x \leq -2$ oraz dla $x \geq 2$, zatem:

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

- a) $|x| < 8$ b) $|x| \leq 4$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x| \geq 0$ b) $|x| \leq 0$ c) $|x| > 0$ d) $|x| < 0$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $|2\frac{1}{2}| + |-2\frac{1}{2}|$ c) $|-0,5| + |-0,25| - |0,75|$ e) $1 + |1 - \sqrt{2}|$
b) $|7\frac{1}{4}| - |-7\frac{1}{4}|$ d) $2|-\frac{3}{4}| - 3|\frac{1}{8}| + 4|-\frac{5}{16}|$ f) $\sqrt{3} - |2 - \sqrt{3}|$

2. Oblicz $x + |x|$ oraz $x - 2|x|$.

- a) $x = 5$ b) $x = -3$ c) $x = 2 - \sqrt{6}$ d) $x = 3\sqrt{2} - 4$

3. Wyznacz liczby spełniające równanie.

- a) $2|x| = 8$ c) $\frac{2}{3}|x| = 4$ e) $3|x| + 6 = 7$ g) $3 - 2|x| = 1$
b) $\frac{1}{2}|x| = 7$ d) $-3|x| = -\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$ h) $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$

4. Która nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a która nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej?

- a) $|x| > -7$, $|x| < -7$ b) $|x| \geq -3$, $|x| \leq -3$

5. Które spośród liczb: -3 , 3 , $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, spełniają warunek:

- a) $|x| < 3$, b) $|x| < 2$, c) $|x| \geq 1$, d) $|x| \geq 3$?

6. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako sumę przedziałów zbiór liczb x , które spełniają obie nierówności:

- a) $|x| \leq 3$ i $|x| \geq 1$, b) $|x| < 5$ i $|x| > 2$, c) $|x| \leq 4$ i $|x| > 3\frac{1}{2}$.

Powtórzenie

7. Oblicz.

- a) $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$ b) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2}$ c) $\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2}$

8. Rozwiąż równanie.

- a) $3|x| = 2$ b) $-\frac{3}{2}|x| = -6$ c) $\frac{1}{4}|x| - \frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$ d) $|x| + 2 = 1, (9)$

9. Zbiór rozwiązań nierówności zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów.

- a) $1 < |x| < 4$ b) $2 \leq |x| \leq 5$ c) $\frac{1}{2} \leq |x| < 3$ d) $\frac{5}{2} \leq |x| \leq \frac{9}{2}$

Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach

D Przykład 1

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} - 3\sqrt{2}$ jest całkowita.

Zauważ, że $\sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} = |2 - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2$.

Stąd $a = 3\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{2} = -2$, czyli $a \in \mathbb{Z}$.

D Przykład 2

Wykaż, że liczba $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Wyrażenie $11 - 6\sqrt{2}$ próbujemy zapisać jako kwadrat różnicy:

$$(1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(1 - 3\sqrt{2})^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$$

$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |3 - \sqrt{2}| + \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3$,
czyli dana liczba jest całkowita.

D Przykład 3

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ jest wymierna.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

- Obliczamy kwadrat liczby a :

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \right)^2 = \\ &= 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = \\ &= 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

Ponieważ $a > 0$, otrzymujemy $a = 2$ – jest to liczba wymierna.

- Zauważamy, że $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ oraz $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$, czyli:

$a = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} + 1| - |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2$,
co oznacza, że a jest liczbą wymierną.

D 1. Wykaż, że:

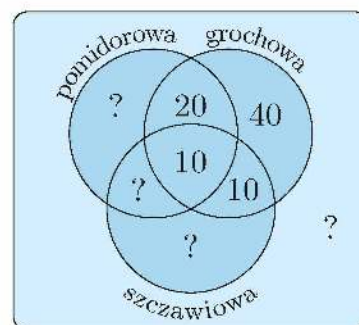
- a) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = 5$, c) $3\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} = 10$,
b) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 1$, d) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$.

2.11. Zagadnienia uzupełniające

■ Działania na zbiorach

- Wyznacz zbiory: $(A \cup B) \setminus C$, $(A \cup C) \setminus B$, $(A \cap B) \setminus C$, $(A \cap C) \setminus B$, gdy:
 - $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 4, 6\}$,
 - $A = \langle -4; 0 \rangle$, $B = (-1; 3)$, $C = \langle 2; \infty \rangle$.
- Dla zawodników szkolnej drużyny piłki nożnej przygotowano koszulki z numerami od 1 do 11. Niech: $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ilu uczniów otrzyma koszulki z numerami należącymi do zbioru:
 - $(A \setminus C) \cup B$,
 - $(A \cap C) \cup (B \setminus C)$,
 - $C \setminus (A \cup B)$?
- Niech A_2 , A_3 i A_5 będą zbiorami liczb dwucyfrowych podzielnych odpowiednio przez 2, 3 i 5. Ile elementów należy do zbioru:
 - $(A_2 \cup A_3 \cup A_5) \setminus (A_2 \cap A_3 \cap A_5)$,
 - $(A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_5) \cup (A_3 \cap A_5)$?
- W ofercie pewnej stołówki są tylko trzy zupy: pomidorowa, szczawiowa i grochowa. Wśród 300 uczniów korzystających z tej stołówki przeprowadzono ankietę, której wyniki podano poniżej.

130 uczniów lubi zupę pomidorową,
110 uczniów lubi zupę szczawiową,
80 uczniów lubi zupę grochową,
40 uczniów lubi zupę pomidorową i szczawiową,
30 uczniów lubi zupę pomidorową i grochową,
20 uczniów lubi zupę szczawiową i grochową,
10 uczniów lubi wszystkie zupy.



Przerysuj do zeszytu i uzupełnij powyższy diagram, a następnie podaj, ilu uczniów:

- nie lubi żadnej z oferowanych przez stołówkę zup,
 - lubi dokładnie jedną zupę oferowaną przez stołówkę.
- W 30-osobowej klasie 14 uczniów ma psa, 9 – kota, 3 – świnki morskie, a 8 nie ma żadnego z wymienionych zwierząt. Uczniowie mający świnki morskie nie mają innych zwierząt. Ilu uczniów ma jednocześnie psa i kota?
 - Jeden z uczniów z poprzedniego zadania mający świnkę morską dostał na urodziny psa. Jaki procent uczniów w klasie nie ma teraz ani psa, ani kota?

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako przedział zbiór liczb jednocześnie spełniających obie nierówności.

a) $3x + 14 > 8$ i $5 < 1 - 4x$

c) $4x + 3 < 19$ i $21 - 2x \geq 7$

b) $3x + 2 > 1$ i $3x \leq 4$

d) $2x + 7 \geq -2$ i $-4x \geq 3x + 14$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3}{4}x \leq \frac{5}{2}$

c) $\frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2}$

e) $x - \frac{4x-2}{3} \geq x - 6$

b) $\frac{1-x}{2} < 1$

d) $\frac{x}{3} - \frac{1-x}{6} < 0$

f) $\frac{x-\frac{1}{3}}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} < 1$

3. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+1)^2 + (x+2)^2$

c) $(x-4)^2 - (x+4)^2$

e) $(2x-1)^2 + (2x-3)^2$

b) $(x+3)^2 + (x-2)^2$

d) $(x-3)^2 - (x-1)^2$

f) $(2x+1)^2 - (3x-1)^2$

4. Uprość wyrażenie.

a) $(x-2)(x+2) + (x+5)(x-5)$

c) $(5-2x)(5+2x) - (3x+4)(4-3x)$

b) $(x-1)(x+1) - (x-4)(x+4)$

d) $(\frac{1}{2} - x)(x + \frac{1}{2}) + (x + \frac{5}{2})(x - \frac{5}{2})$

5. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = \sqrt{3} + 1$.

a) $(x-1)^2 - (x-1)(x+1)$

b) $(x+3)^2 - (x-3)^2 - 12$

6. Oblicz.

a) $(\sqrt{2}+3)^2 + (\sqrt{2}-3)^2$

c) $(2\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{3}+2)^2$

b) $(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2$

d) $(2\sqrt{3}-1)^2 + (2\sqrt{3}+1)^2$

7. Zapisz liczbę w postaci $a + b\sqrt{3}$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi.

a) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$

b) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

c) $\frac{2}{2\sqrt{3}-4}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

8. Dla liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 2 + \sqrt{5}$ oblicz:

a) iloczyn x i y ,

b) iloraz x i y ,

c) sumę kwadratów x i y .

9. Zapisz wyrażenie jako kwadrat sumy lub kwadrat różnicy. Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

a) $x^2 + 10x + 25$

c) $9x^2 - 6x + 1$

e) $9x^2 + 12x + 4$

b) $x^2 - 16x + 64$

d) $16x^2 + 8x + 1$

f) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$



■ Zestaw II

1. Wyznacz zbiory: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle -1; 4 \rangle$, $B = \langle 2; 5 \rangle$

d) $A = (-\infty; 0)$, $B = \langle 0; 4 \rangle$

b) $A = \langle 2; 7 \rangle$, $B = \langle 3; 5 \rangle$

e) $A = (-\infty; -1)$, $B = (-2; 4)$

c) $A = \langle -4; 2 \rangle$, $B = \langle 2; 9 \rangle$

f) $A = (2; \infty)$, $B = \langle 0; 5 \rangle$

2. Ile liczb całkowitych spełnia jednocześnie obie nierówności?

a) $\begin{cases} 2x + 3 \geq 4x - 5 \\ 2 - x \leq -(1 - 2x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 < \frac{1}{3}x + 2 \\ -\frac{2}{3}x - 1 > \frac{1}{3} - x \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x-1}{4} \leq 1 \\ \frac{1}{6}x > -1 - \frac{x}{3} \end{cases}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $(x + 2)(2 - x) = 6x - x^2$

c) $(x + 3)^2 = (x - 5)(x + 5)$

b) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 5 = (\frac{1}{2}x - 4)(\frac{1}{2}x + 4)$

d) $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - \frac{1}{2}$

4. Wyznacz liczbę całkowitą n tak, aby rozwiązanie równania należało do przedziału $(n; n + 2)$.

a) $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 56$

c) $(x - 3)(x + 3) + (4 - x)(4 + x) = 2x$

b) $(x - 3)^2 - (4 - x)^2 = 13$

d) $(2x - 1)(1 + 2x) - (2x - 1)^2 = 6$

5. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

a) $9(x + 1)^2 - (3x - 1)^2 \geq -4$

c) $4(3 + x)^2 - (2x - 1)(2x + 1) \leq 13$

b) $4(\frac{1}{2}x - 2)^2 < (1 - x)^2 + 7$

d) $(2 - 3x)(3x + 2) > 3 - (3x - 1)^2$

6. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

a) $(x - 1)^2 - (x + 1)^2 \leq 28$

c) $(x - 2)(2 + x) + (4 - x)(4 + x) \leq 3x$

b) $(x + 2)^2 - (3 - x)^2 > 5$

d) $(3x - 1)^2 - (3x + 1)(3x - 1) < 20$

7. Sprawdź, czy liczba p jest liczbą wymierną.

a) $p = (3 - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 3)^2$

b) $p = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$

D 8. Uzasadnij, że liczba q jest liczbą wymierną.

a) $q = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

b) $q = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}+3}$

c) $q = \frac{1}{3+\sqrt{5}} + \frac{5}{5-\sqrt{5}}$

9. Podaj wszystkie liczby całkowite x spełniające warunek:

a) $|x| \leq 4$,

b) $0 < |x| < 3$,

c) $2 \leq |x| \leq 4$.

10. Dla $x = -2\frac{1}{2}$ oblicz wartość wyrażenia:

a) $||x| - 3| - \frac{1}{2}$,

b) $|1 - |x|| + \frac{1}{2}$,

c) $||x| - 6| - |x|$.

**D Przykład 1**

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 2.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne: n , $n + 1$, $n + 2$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Suma kwadratów tych liczb:

$$\begin{aligned} S &= n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 \end{aligned}$$

Ponieważ $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia S przez 3 jest równa 2.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 3 jest równa 2, liczbę tę przedstawiliśmy w postaci $3k + 2$, gdzie $k \in \mathbf{N}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych. Sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

D Przykład 2

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$. Rozpatrywaną sumę oznaczamy przez S .

$$\begin{aligned} S &= (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = \\ &= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) = \\ &= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ $3n^2 + 9n + 8$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 4 jest równa 3.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 4 jest równa 3, liczbę S przedstawiliśmy w postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych. Podobnie jak w przykładzie 1 sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. A jest zbiorem kwadratów liczb naturalnych, a B – zbiorem ich sześciątów. Ile liczb mniejszych od 200 należy do zbioru $B \setminus A$?
A. 5 B. 4 C. 3 D. 0
2. Liczba $|\sqrt{3} - 4|$ należy do przedziału:
A. $(-\infty; 0)$, B. $\langle 0; 2,3 \rangle$, C. $\langle 2,3; 4 \rangle$, D. $\langle 4; \infty \rangle$.
3. $A = (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cap \mathbf{Z}$ jest zbiorem:
A. siedmioelementowym, C. czteroelementowym,
B. sześcioclementowym, D. pustym.
4. Zbiór $\mathbf{R} \setminus (-1; 1)$ można zapisać w postaci:
A. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$, C. $(-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$,
B. $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, D. $\{-1, 1\}$.
5. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3}$ jest przedział:
A. $(-\infty; 12)$, B. $(-\infty; -12)$, C. $(-12; \infty)$, D. $(12; \infty)$.
6. Zbiór wszystkich liczb spełniających jednocześnie nierówności $1 - x \geq 2$ i $2x + 4 > -6$ można zapisać w postaci przedziału:
A. $(-5; -1)$, B. $(-5; -1)$, C. $\langle -5; -1 \rangle$, D. $(-\infty; -5)$.
7. Dla dowolnych liczb a i b zachodzi równość:
A. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4b^2$, C. $(a - 2b)^2 = a^2 - 2ab + 4b^2$,
B. $(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2$, D. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$.
8. Dla dowolnej liczby x wyrażenie $\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 1$ jest równe:
A. $(-\frac{x}{3} + 1)^2$, B. $(-\frac{x}{3} - 1)^2$, C. $(-\frac{x}{3} - 3)^2$, D. $(\frac{2}{3}x - 1)^2$.
9. Ułamek $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ jest równy:
A. $1 + \sqrt{2}$, B. $-1 - \sqrt{2}$, C. $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$, D. $\frac{1 + \sqrt{3}}{3 - 2\sqrt{2}}$.
10. Niech $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$. Wówczas a jest równe:
A. 2, B. $4 + 2\sqrt{3}$, C. $4 - 2\sqrt{3}$, D. $\sqrt{10}$.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia $(x - 4y)^2 - (4y + x)^2$ dla $x = \frac{1}{4}$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności:

$$(3 - 2x)^2 \leq (2x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2x)$$

D Zadanie 3 (2 pkt)

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

D Zadanie 4 (2 pkt)

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a, b spełniona jest nierówność $a^2 \geq b(2a - b)$.

Zadanie 5 (2 pkt)

Ile liczb całkowitych x spełnia warunek $\frac{1}{2-\sqrt{3}} \leq |x| < 9$?

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ dla $a = 3 + \sqrt{2}$ i $b = 3 - \sqrt{2}$.

D Zadanie 7 (3 pkt)

Uzasadnij, że każda liczba z przedziału $(\frac{7}{2}; \infty)$ spełnia nierówność:

$$\sqrt{2}x + 2 \leq 2x$$

Zadanie 8 (4 pkt)

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających jednocześnie obie nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} < \frac{5-x}{4} \\ (2x-1)^2 \geq (2x-3)(2x+3) + 2 \end{cases}$$

Zadanie 9 (5 pkt)

Ile jest liczb całkowitych spełniających jednocześnie obie nierówności?

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leq (x+1)^2 \end{cases}$$

D Zadanie 10 (4 pkt)

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 4.



3 Układy równań

Samolot lecący pod wiatr przebywa trasę 1200 km w ciągu 2,4 h. Tę samą trasę z wiatrem pokonuje w 2 h. Jaka jest prędkość samolotu, a jaka wiatru (przyjmujemy, że prędkości te są stałe)?

Jeśli oznaczymy przez x prędkość samolotu, a przez y prędkość wiatru, to do opisu sytuacji potrzebujemy dwóch równań z niewiadomymi x i y . Poszukiwanym rozwiązaniem są wielkości spełniające jednocześnie oba te równania: $x = 550$ km/h i $y = 50$ km/h.

Rozdział ten poświęcony jest metodom rozwiązywania układów równań oraz wykorzystaniu ich do rozwiązywania zadań tekstowych.

3.1. Co to jest układ równań

Przykład 1

Podaj trzy pary liczb x, y spełniające równanie $2x + 4y = 20$.

Przykładowe pary:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 4,75 \end{cases}$$

Po wybraniu jako x dowolnej liczby wyznaczamy y , rozwiązując odpowiednie równanie.

Równanie $2x + 4y = 20$ to przykład **równania z dwiema niewiadomymi**. Równanie to jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb.

Przykład 2

Do skarbonki wrzucono 7 monet. Były to monety dwu- i pięciozłotowe. Ile monet dwu-, a ile pięciozłotowych wrzucono, jeśli w skarbonce znajduje się 26 zł?

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych: x – liczba monet dwuzłotowych, y – liczba monet pięciozłotowych.

Aby opisać sytuację z zadania, potrzebujemy dwóch równań: $x + y = 7$ (do skarbonki wrzucono 7 monet) i $2x + 5y = 26$ (w skarbonce znajduje się 26 zł). Równania te muszą być spełnione jednocześnie – zapisujemy to, łącząc je klamrą:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

Ustalmy najpierw, które pary liczb spełniają pierwsze równanie. Liczby monet x i y mogą być tylko liczbami dodatnimi naturalnymi, zatem równanie $x + y = 7$ spełnia sześć par liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Spośród nich tylko para $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ spełnia drugie równanie $2x + 5y = 26$.

Zatem jest ona rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$, czyli do skarbonki wrzucono 3 monety dwuzłotowe i 4 monety pięciozłotowe.

Ćwiczenie 1

Resztę 2 zł 10 gr wydano w 9 monetach, wśród których były tylko 10- i 50-groszówki. Ile było 10-groszówek?

Układem dwóch równań z dwiema niewiadomymi (lub krótko: układem równań) nazywamy dwa równania jednocześnie rozpatrywane, opisujące związek między tymi dwiema niewiadomymi. **Rozwiązanie układu równań** to para liczb, która spełnia jednocześnie oba równania.

Przykład 3

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań
$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$$

A. Podstawiamy do równań układu $x = 1$ i $y = 2$.

$$\begin{cases} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -1 + 2 \cdot 2 = 3 \neq 14 & \text{Drugie równanie nie jest spełnione.} \end{cases}$$

Zatem para $x = 1, y = 2$ nie spełnia podanego układu równań.

B. Podstawiamy do równań układu $x = -2$ i $y = 6$.

$$\begin{cases} 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = -8 + 18 = 10 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -(-2) + 2 \cdot 6 = 2 + 12 = 14 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Zatem para $x = -2, y = 6$ spełnia podany układ równań.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań
$$\begin{cases} 3x - 2y = -18 \\ -\frac{1}{2}x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\text{A. } \begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -5 \\ y = -1,5 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -5 \\ y = 1,5 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Zadania

1. Sprawdz, czy para liczb $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ spełnia podany układ równań.

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 7x - y = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{3}y = 3 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{6} \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 7 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2 \\ \frac{5}{2}y - \frac{3}{4}x = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 0 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = -\frac{5}{6} \end{cases}$

2. Sprawdź, która z podanych par liczb spełnia układ równań.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ -6x - 5y = 11 \end{cases}$$

A. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -8 \\ y = 8 \end{cases}$

3. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich spełniające równanie.

a) $3x + 2y = 17$

b) $3x + 4y = 17$

c) $2x + 4y = 17$

4. Do danego równania dopisz takie drugie, aby utworzony układ równań był spełniony przez podaną parę liczb.

a) $4x + 3y = 14$, $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

c) $4x - 9y = -1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

b) $3x - 7y = 6$, $\begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$

d) $12x + \frac{1}{2}y = -10$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -8 \end{cases}$

5. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Liczba x jest o 8 większa od liczby y . Liczba y jest pięciokrotnie mniejsza od liczby x .

b) Suma liczby x i podwojonej liczby y wynosi 10. Połowa liczby x jest równa y .

6. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Liczba a stanowi 40% liczby b . Gdy do 20% liczby a dodamy 60% liczby b , to otrzymamy 4.

b) Liczba o 10% mniejsza od liczby a jest o 10% większa od liczby b . Różnica liczby o 15% większej od a i liczby o 15% mniejszej od b wynosi 1.

Powtórzenie

7. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych spełniających równanie $x + 3y = 9$ oraz te, które spełniają równanie $5x + 2y = 19$. Czy istnieje para liczb naturalnych spełniająca oba równania?

8. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Suma liczb x i y jest równa 5. Różnica tych liczb wynosi 2.

b) Suma liczb a i b jest równa 14. Gdy do 120% liczby a dodamy 70% liczby b , to otrzymamy sumę a i b .

3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Jedną z metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Wybieramy jedno z równań i wyznaczamy z niego jedną z niewiadomych. To, którą niewiadomą wyznaczymy, nie ma wpływu na ostateczne rozwiązanie układu równań.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Wyznaczamy niewiadomą } x \text{ z pierwszego równania.} \\ \text{Drugie równanie przepisujemy bez zmian.} \end{array}$$

W miejsce x w drugim równaniu podstawiamy wyrażenie $3y + 5$, dzięki czemu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4(3y + 5) + 5y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Pierwsze równanie przepisujemy bez zmian.} \\ \text{Podstawiamy wyrażenie } 3y + 5 \\ \text{w miejsce } x \text{ w drugim równaniu.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 12y + 20 + 5y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Rozwiązujemy drugie równanie} \\ \text{z niewiadomą } y. \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 17y = -17 \quad / : 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1) + 5 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Podstawiamy wyznaczoną wartość } y \\ \text{do pierwszego równania} \\ \text{i obliczamy niewiadomą } x. \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Otrzymana para liczb jest jedynym} \\ \text{rozwiązaniem układu równań.} \end{array}$$

Aby przekonać się, czy nie popełniliśmy błędu, możemy sprawdzić otrzymane rozwiązanie, podstawiając je do układu równań:

$$\begin{cases} 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 8 - 5 = 3 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Zatem otrzymana para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań.

W wyniku przekształceń równań układu w kolejne równoważne równania otrzymujemy **równoważne układy równań**, czyli takie, które mają to samo rozwiązanie (są spełnione przez tę samą parę liczb).

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -3x + y = -20 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y = 20 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} -7x + 2y = 13 \\ -5x + y = 11 \end{cases}$$

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x + y = 6 - 2y \\ 2y - x = 2 + y \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia obu równań do prostszej postaci – takiej, w której niewiadome znajdują się po jednej stronie równań.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y - x = 2 \end{cases}$$

Wybierając równanie, z którego wyznaczymy niewiadomą, kierujemy się przede wszystkim łatwością obliczeń.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$$\begin{cases} 4x + 3(x + 2) = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Podstawiamy wyrażenie $x + 2$ w miejsce y w pierwszym równaniu.

$$\begin{cases} 4x + 3x + 6 = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie z niewiadomą x .

$$\begin{cases} 7x = 0 \quad / : 7 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 2 \end{cases}$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Para liczb $x = 0$, $y = 2$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2x - 4y \\ x + y = 7 - y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x = x - y + 3 \\ 2 = y - x \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2(x + 2) = y - 2 \\ 2x - y = x + y - 15 \end{cases}$$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia pierwszego równania do prostszej postaci, a następnie rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 & / \cdot 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + 2x - 7 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y + 3 = 2(x + 1) - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 4x = 8 & / : 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y + 3 = 2x + 2 - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb: $x = 2$, $y = -3$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} = 5 \\ \frac{x-y}{3} = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{2x-y}{3} = \frac{3x+y}{2} \\ x = 2(x + y + 1) \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 1 - \frac{x-1}{2} = 2 + \frac{y+1}{3} \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

Nie każdy układ równań ma rozwiązanie. Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

nie jest spełniony przez żadną parę liczb. (Jeśli suma dwóch liczb jest równa 7, to nie może być jednocześnie równa 8). Zauważmy, że również układ równań:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania (dlaczego?).

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 7 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -2(3 + 2y) + 4y = 7 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania.
Podstawiamy wyrażenie $3 + 2y$ w miejsce x w drugim równaniu.

$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -6 - 4y + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ 0y = 13 \end{cases}$$

Drugie równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną wartość niewiadomej y .

Zatem **żadna para liczb nie spełnia danego układu równań**.

Układ równań może mieć **nieskończenie wiele rozwiązań**. Np. układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

spełnia każda para liczb x, y , których suma jest równa 2.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 6x - 2y = 12 \\ -3x + y = -6 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Doprowadzamy pierwsze równanie do prostszej postaci.
Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$$\begin{cases} 3x - (3x - 6) = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Podstawiamy wyrażenie $3x - 6$ w miejsce y w pierwszym równaniu.

$$\begin{cases} 3x - 3x + 6 = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Równanie $0x = 0$ (możemy je również zapisać $0 = 0$) jest zawsze spełnione, niezależnie od tego, jaką wartość wstawimy w miejsce niewiadomej x .
Zatem o liczbie rozwiązań układu decyduje tylko drugie równanie, w którym występują obie niewiadome.

Równanie $y = 3x - 6$ jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb, co oznacza, że **układ równań jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb**,

np. spełniają go pary liczb: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = -4,5 \end{cases}$

Układ równań z dwiema niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{gdzie } a_1 \neq 0 \text{ lub } b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{gdzie } a_2 \neq 0 \text{ lub } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

nazywamy **układem równań liniowych**.

Definicja

Układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb, nazywamy **układem oznaczonym**.

Układ równań liniowych, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Układ równań liniowych, który nie ma ani jednego rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony, czy spreczny.

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x + 6 = 3x + y \\ 4 = x - 2y + 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x = 3y - 2 \\ y - 6x = -6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 3y = 1 - x - y \\ 0,2x + 0,1y = -0,1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = 0,7 \\ x + 4y = 5,3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0,4x - 0,3y = -2 \\ 1,6x + 1,5y = 46 \end{cases}$

2. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3(x - y) - 4(x - y) = -5 \\ 6 - x = 2(x - 3y) - 18 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3 - 2(y - 4x) = 4(1 - x) - 19 \\ -3(2x - y + 1) = -2y + 26 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 6x - (2y - 3x) = 7y - 9 \\ -3x + 8 = -2(x - 2y - 9) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4(3x - 0,5) - 5(y + 0,5) = 9 \\ -2x - 5(y - 2,5) = -9y + 5,5 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x - 2(3 - 2(x - y)) = 23 \\ 6 + 5(1 - 3(y - x)) = 20x + 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4(x - 1) - 2(y - 0,5) = 7 \\ 3(x - 2) + 5(y - 1,5) = 13,5 \end{cases}$

3. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb całkowitych?

a)
$$\begin{cases} \frac{x+5}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+8}{4} \\ -3x - y = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{2+x}{4} = \frac{y-1}{3} \\ \frac{5-x-y}{2} = \frac{x+2y}{5} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{2x-6}{5} + 6y = 3 \\ x - 6y - 1 = 2y \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ \frac{x-2}{8} - \frac{y-1}{4} = 2 \end{cases}$$

4. Sprawdź, ile rozwiązań ma podany układ równań.

a)
$$\begin{cases} 2(x-3y) + 3(x-2y) = 1 \\ \frac{5}{2}x - 2y = 4(y+1) \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 7(y-1) = -2(\frac{5}{2} + x) \\ -2(1-2x-y) = 1-x-5y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2(x-2y) - 2(y-x+1,5) = 5 \\ \frac{2-x}{5} - 0,3y = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3(1-x) - 5(2-y) = 5 \\ 0,2(2-3x) + y = 0,8 \end{cases}$$

5. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} (x+2)^2 + 2y = x + 15 + (x-2)(x+2) \\ x + (y-1)^2 = 1 - (\sqrt{3}-y)(y+\sqrt{3}) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x(1-2x) - y(1-y) = (y-\sqrt{2}x)(y+\sqrt{2}x) + 3 \\ 2x - (2y - \frac{1}{4})^2 + 16\frac{1}{16} = (2y+3)(3-2y) \end{cases}$$

6. Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony, czy sprzeczny.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3(y-2) = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ \frac{1}{2}y = 2(x-1) \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2y - x = 8 \\ x + 4 = 2(y-2) \end{cases}$$

7. Dane jest równanie $3x - 4y = 2$. Dopisz do niego drugie równanie, tak by otrzymany układ równań był:

a) sprzeczny,

b) nieoznaczony,

c) oznaczony.

Powtórzenie

8. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a)
$$\begin{cases} 3x + 4 = 2y - 4 \\ x + y = 1 - x \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 6y + x + 1 = 0 \\ 2y - 6x + 7 = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{x+10}{2} + y = \frac{y+5}{2} - 3 \\ 3 - \frac{3x-2y}{2} = 5 + 2y \end{cases}$$

9. Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony, czy sprzeczny.

a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -2x + \frac{4}{3}y = -3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 7,5x - 5y = 6 \\ 2y - 3x = -2,4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 3y = -\frac{1}{3} \\ 4x - 4\frac{1}{2}y = 6 \end{cases}$$

3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Inną metodą rozwiązywania układów równań jest **metoda przeciwnych współczynników**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zauważmy, że współczynniki przy niewiadomej x są liczbami przeciwnymi (1 i -1). Aby zredukować taką niewiadomą, wystarczy dodać oba równania stronami – otrzymamy równanie z jedną niewiadomą y .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases} \\ + \\ \hline x - x + 3y + 6y = -4 + 13 \\ 9y = 9 \\ y = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dodajemy równania stronami.} \\ \text{Niewiadoma } x \text{ została zredukowana.} \end{array}$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej y podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, na przykład do równania $x + 3y = -4$. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 3 \cdot 1 = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Podstawiamy liczbę 1 w miejsce } y \text{ w równaniu} \\ x + 3y = -4 \text{ i obliczamy niewiadomą } x. \end{array}$$

Stąd otrzymujemy jako rozwiązanie układu równań parę liczb:

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Sprawdzenie

$$\begin{cases} -7 + 3 \cdot 1 = -7 + 3 = -4 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -(-7) + 6 \cdot 1 = 7 + 6 = 13 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ -5x + y = 9 \end{cases} \end{array}$$

Czasami zanim dodamy równania stronami, musimy najpierw pomnożyć obie strony jednego równania (lub obu równań) przez taką liczbę (lub liczby), aby współczynniki przy jednej z niewiadomych w obu równaniach były liczbami przeciwnymi.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Współczynniki przy żadnej z niewiadomych nie są liczbami przeciwnymi. Przekształcimy zatem jedno z równań tak, by otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej y .

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \text{Mnożymy obie strony drugiego równania przez } -4. \\ + \begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ -8x - 4y = -12 \end{cases} \quad \text{Dodajemy równania stronami i wykonujemy} \\ \hline \quad \quad \quad 5x - 8x = 6 - 12 \quad \text{redukcję wyrazów podobnych.} \end{array}$$

Niewiadoma y została zredukowana.

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą x :

$$-3x = -6, \text{ stąd } x = 2.$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do równania $2x + y = 3$.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y = 3 \end{cases} \quad \text{Podstawiamy liczbę 2 w miejsce } x \text{ w równaniu } 2x + y = 3. \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}$$

Otrzymana para liczb $x = 2, y = -1$ jest rozwiązaniem podanego układu.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x + 14y = 5 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 10x + 21y = -9 \\ -5x - 7y = 8 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x + y = -13 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 3x + 5y = -9 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x + 3y = -3,5 \\ 3x - 2y = 4,5 \end{cases} \end{array}$$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x + 7y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie układu równań rozpoczynamy od pomnożenia każdego z równań przez takie liczby, aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 & / \cdot 5 \\ 5x + 7y = 4 & / \cdot (-2) \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 5, a drugiego przez -2 .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 10x + 15y = 10 \\ -10x - 14y = -8 \end{cases} \\ \hline y = 2 \end{array}$$

Dodajemy równania stronami.

Niewiadoma x została zredukowana.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

Otrzymujemy nowy, równoważny układ równań.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3 \cdot 2 = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy liczbę 2 w miejsce y w drugim równaniu.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x = -4 & / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb: $x = -2$, $y = 2$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x + 7y = 7 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 6x + 2y = 13 \\ 4x - 7y = 2 \end{cases} \end{array}$$

Ćwiczenie 4

Podaj liczby, przez które można pomnożyć obie strony równań układu, aby móc skorzystać z metody przeciwnych współczynników. Nie rozwiązuj układu.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ -5x + 4y = 8 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 17y = 4 \\ \frac{1}{3}x - 13y = 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{2}{5}x - 6y = 1 \\ 3x - 5y = 9 \end{cases} \end{array}$$

Przykład 4

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} 5(x - y) + 5 = 2(2x + y) \\ 2(x - 1) = y + 1 \end{cases}$$

Rozpoczynamy od doprowadzenia równań układu do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} 5x - 5y + 5 = 4x + 2y \\ 2x - 2 = y + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Redukujemy wyrazy podobne. Niewiadome} \\ \text{zapisujemy po lewej stronie każdego równania.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 7y = -5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Otrzymany układ równań możemy rozwiązać jedną z dwóch metod.

Metoda podstawiania

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ 2(-5 + 7y) - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ -10 + 14y - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ 13y = 13 \quad / : 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Metoda przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} x - 7y = -5 \quad / \cdot (-2) \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -2x + 14y = 10 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$13y = 13 \quad / : 13$$
$$y = 1$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań nie zależy od:

- wyboru metody rozwiązywania,
- kolejności równań w układzie – można ją zmienić na każdym etapie rozwiązywania.

W przypadku metody podstawiania rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru wyznaczonej niewiadomej i tego, z którego równania ją wyznaczamy.

W przypadku metody przeciwnych współczynników rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru niewiadomej, którą redukujemy.

Rozpatrywane poprzednio układy równań były układami oznaczonymi. Pokażemy, jak wygląda rozwiązywanie metodą przeciwnych współczynników układu sprzecznego oraz nieoznaczonego.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases} \quad / \cdot 3$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez 3.

$$+ \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\hline 0x + 0y = 7$$

Dodajemy równania stronami. Obie niewiadome zostały zredukowane. Otrzymaliśmy równanie spreczne.

Równania $0x + 0y = 7$ (można je zapisać w postaci $0 = 7$) nie spełnia żadna para liczb x i y , zatem układ równań jest spreczny.

Przykład 6

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \quad / \cdot 3$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 3, a drugiego przez 4.

$$+ \begin{cases} -15x + 2y = -12 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\hline 0x + 0y = 0$$

Dodajemy równania stronami. Obie niewiadome zostały zredukowane. Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.

Równanie $0x + 0y = 0$ (można je zapisać w postaci $0 = 0$) spełnia dowolna para liczb x i y . Wyjściowy układ równań jest równoważny nieoznaczonemu układowi równań:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

Układ ten jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb, które spełniają drugie równanie. Jego rozwiązanie można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \frac{15}{2}x - 6 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy układ równań jest nicoznaczony, czy sprzeczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + 0,4y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 1,5x - 2y = 6 \\ x - 1\frac{1}{3}y = 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -\frac{2}{3}x + 3y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4}y = 5 \end{cases} \end{array}$$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 8y = 3 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2(2x + 3y) = 30 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x - 5y = 3,5 \\ -4x + 2y = -7 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2(x + y) = 2 - 2y \\ x + 2y = 6 \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 0,2(x + 2y) - 0,3(2x - y) = 3,5 \\ 2(x + y) - (x - 2) = 2y + 2 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{3}(x + y) \\ \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}(y + 3x) = -4 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 0,01(4x - y) = 0,01y + 0,02 \\ 0,6(y - x) = 0,1(y + 2x + 1) \end{cases} \end{array}$$

3. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 5(y + 2) + x = 3x + y \\ \frac{y+2,5}{5} = x + 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 13 \\ \frac{x-y}{3} = \frac{3x}{2} + \frac{3y}{4} + 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - y = 5 \\ (x + 1)(x + 1) - y = x(x + 1) \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{5y-x}{3} - \frac{7y-3x}{5} \\ 5(x + 1) = 3(y - 1) \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{3} = 3 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y-2}{6} = 2 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 1 \\ \frac{5}{2}y - 2 = 1 - \frac{1}{2}x \end{cases} \end{array}$$

Powtórzenie

4. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x - y = 4x - 3y + 5 \\ x + y = 3x + 5y - 2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 0,01x - 0,01(y - 1) = -0,06 \\ 0,03x - 0,02(y - 2) = -0,12 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}x + 2 \\ 5x - (y - (x - 2y)) = 4 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x - 3y = 4 - \frac{1}{3}y \\ -x + 5y = 2x - 2y + 2 \end{cases} \end{array}$$

3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

Przykład 1

Dwie ciężarówki przewożące piasek wykonały łącznie 13 kursów. Jedna z nich przewoziła za każdym razem 15 ton, a druga – 8 ton piasku. Ile kursów wykonała każda z ciężarówek, jeśli łącznie przewiozły one 132 tony piasku? Ułóż i rozwiąż odpowiedni układ równań.

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych:

x – liczba kursów wykonanych przez pierwszą ciężarówkę,

y – liczba kursów wykonanych przez drugą ciężarówkę.

Zapisujemy układ równań odpowiadający treści zadania.

$$\begin{cases} x + y = 13 & \text{Łączna liczba kursów dwóch ciężarówek.} \\ 15x + 8y = 132 & \text{Łączna masa przewiezonego piasku.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 13 \quad / \cdot (-8) \\ 15x + 8y = 132 \end{cases} \quad \text{Układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -8x - 8y = -104 \\ 15x + 8y = 132 \end{cases} \\ \hline 7x = 28 \end{array}$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu równań $x = 4$ i $y = 9$.

Pierwsza ciężarówka wykonała 4 kursy, a druga 9.

Ćwiczenie 1

Dwie ciężarówki, jedna o ładowności 6 ton, a druga – 10 ton, przewiozły łącznie 460 ton piasku podczas 50 kursów (za każdym razem były maksymalnie obciążone). Ile kursów wykonała jedna, a ile – druga ciężarówka?

Ćwiczenie 2

a) Śliwki na targowisku kosztowały 6,50 zł/kg, a wiśnie – 8,50 zł/kg. Gospodyni kupiła łącznie 4 kg tych owoców i zapłaciła za nie 31 zł. Ile kupiła śliwek, a ile wiśni?

b) Warzywa znajdujące się na stoisku kosztują: marchew – 4 zł/kg, buraki – 6 zł/kg, rzepa – 7,50 zł/kg. Kierownik stołówki kupił 8 kg tych warzyw, w tym 2 kg rzepy. Za wszystko zapłacił 49 zł. Ile kupił marchwi, a ile buraków?

Przykład 2

Piotr i Dorota mają razem 30 lat. Dorota jest o cztery lata młodsza od Piotra. Oblicz wiek Doroty i wiek Piotra.

Oznaczamy niewiadome:

d – wiek Doroty w latach, p – wiek Piotra w latach.

Zapisujemy warunki zadania w postaci układu równań:

$$\begin{cases} d + p = 30 \\ d = p - 4 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy (sprawdź):

$$\begin{cases} p = 17 \\ d = 13 \end{cases}$$

Dorota ma 13 lat, a Piotr – 17 lat.

Ćwiczenie 3

Tomek jest o cztery lata starszy od swojej siostry. Za dwa lata będą mieli w sumie 30 lat. Ile lat ma obecnie każde z nich?

Przykład 3

Sześć lat temu mama Basi była trzy razy starsza od swojej córki, a za cztery lata będzie od niej dwa razy starsza. Ile lat ma obecnie Basia, a ile jej mama?

Oznaczamy niewiadome:

b – wiek Basi w latach, m – wiek mamy Basi w latach.

Informacje z zadania wygodnie jest przedstawić w formie tabeli.

	Sześć lat temu	Obecnie	Za cztery lata
Wiek Basi	$b - 6$	b	$b + 4$
Wiek mamy Basi	$m - 6$	m	$m + 4$

Zapisujemy układ równań, w którym pierwsze równanie opisuje sytuację sprzed sześciu lat, a drugie sytuację, która nastąpi za cztery lata.

$$\begin{cases} m - 6 = 3(b - 6) \\ m + 4 = 2(b + 4) \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy (sprawdź):

$$\begin{cases} b = 16 \\ m = 36 \end{cases}$$

Basia ma obecnie 16 lat, a jej mama – 36 lat.

Ćwiczenie 4

- a) Pięć lat temu Daria miała dwa razy mniej lat niż Maria. Daria jest młodsza od Marii o 5 lat. Ile lat ma obecnie Daria, a ile Maria?
- b) Za trzy lata Olek będzie o połowę starszy od Alka, a dziewięć lat temu Olek miał o dwa lata więcej niż wynosił podwojony wiek Alka. Ile lat ma obecnie Olek, a ile Alk?

Zadania

1. Dziewięć lat temu ojciec był sześć razy starszy od syna. Za dziewięć lat obaj będą mieli razem 85 lat. Ile lat ma obecnie każdy z nich?
2. Dwa lata temu Ania, jej siostra bliźniaczka i ich starszy brat mieli razem 45 lat. Za trzy lata suma wieku bliźniaczek będzie o 12 większa od wieku ich brata. Ile lat ma obecnie każde z nich?
3. Skarbnik klasowy zebrał 30 monet o nominałach 2 zł oraz 5 zł. Wszystkie monety ważyły łącznie 169,6 g. Ile monet 2-złotowych, a ile 5-złotowych zebrał skarbnik, jeśli moneta 2-złotowa waży 5,21 g, a 5-złotowa – 6,54 g?
4. Wydano 48 złotych w 20 monetach: było wśród nich 8 monet 2-złotowych oraz monety 1- i 5-złotowe. Ile było monet 1-, a ile 5-złotowych?
5. Kwotę 100 złotych wydano w monetach 1-, 2-, i 5-złotowych – łącznie w 32 monetach, przy czym liczba monet 5-złotowych była o dwa większa od podwojonej liczby monet 1-złotowych. Ile monet każdego rodzaju wydano?
6. Jednego dolara rozmieniono na monety 5-, 10- i 25-centowe. Ile było monet 5-, a ile 10-centowych, jeśli po rozmienieniu było łącznie 12 monet, w tym jedna moneta 25-centowa?

1 dolar = 100 centów



Moneta 5-centowa



Moneta 10-centowa



Moneta 25-centowa



7. W skarbonce znajdowały się 4 dolary w monetach 5-, 10- i 25-centowych. Wszystkich monet było 29, a 10-centówek było trzy razy więcej niż 5-centówek. Ile było monet każdego nominału?

8. Długość jednego boku prostokąta jest o 3 cm większa od podwojonej długości drugiego boku. Oblicz pole tego prostokąta, jeśli jego obwód jest równy 36 cm.
9. Obwód prostokąta jest równy 56 cm. Gdyby zwiększyć długość jednego jego boku o 2 cm, a drugiego o 6 cm, to proporcja między długościami boków otrzymanego prostokąta wynosiłaby 1:3. Oblicz długości boków wyjściowego prostokąta (rozpatrz dwa przypadki).
10. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 40 cm. Jego ramię ma długość równą średniej arytmetycznej długości jego podstaw i jest o 6 cm dłuższe od jego krótszej podstawy. Oblicz długości boków tego trapezu.
11. W sobotę wystawę fotografii odwiedziły 72 osoby: 50 osób kupiło bilety normalne, pozostali kupili bilety ulgowe. Dochód ze sprzedaży biletów w tym dniu wyniósł 654 zł. W niedzielę wystawę obejrzało 112 osób, w tym 42 osoby, które kupiły bilety ulgowe. Tego dnia dochód ze sprzedaży biletów wyniósł 994 zł. Ile kosztował bilet normalny, a ile ulgowy?
12. Różnica między pewną liczbą dwucyfrową a liczbą otrzymaną w wyniku przestawienia cyfr tej liczby wynosi 36. Suma tych liczb wynosi 110. Jakie to liczby?
13. Dana jest trzycyfrowa liczba A o cyfrze dziesiątek równej 5. Po usunięciu tej cyfry otrzymujemy dwucyfrową liczbę B . Różnica liczb A i B wynosi 320, a suma liczb A i B jest równa 388. Jakie to liczby?

Powtórzenie

14. Na widowni teatru muzycznego znajduje się 280 miejsc. Na spektakl sprzedano $\frac{3}{4}$ wszystkich miejsc. Cena biletu ulgowego wynosi 30 zł, a normalnego 35 zł. Ile sprzedano biletów ulgowych, a ile normalnych, jeśli przychód ze sprzedaży biletów wyniósł 7000 zł?
15. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 50 cm. Jego dłuższa podstawa ma długość 20 cm, a suma długości jego ramion jest o 2 cm krótsza od krótszej podstawy. Oblicz długość ramienia tego trapezu.
16. Ramiona trapezu mają długości 25 cm i 65 cm, a jego obwód jest równy 205 cm. Suma długości dwóch dłuższych boków trapezu jest o 105 cm większa od sumy długości jego dwóch krótszych boków. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

Układy równań są często wykorzystywane przy rozwiązywaniu zadań dotyczących wielkości podanych procentowo oraz zadań dotyczących prędkości.

Przykład 1

Ile kilogramów solanki o stężeniu 6% należy zmieszać z solanką o stężeniu 2%, aby otrzymać 100 kg solanki o stężeniu 5%?

Oznaczamy niewiadome:

x – masa w kg solanki 6-procentowej,

y – masa w kg solanki 2-procentowej.

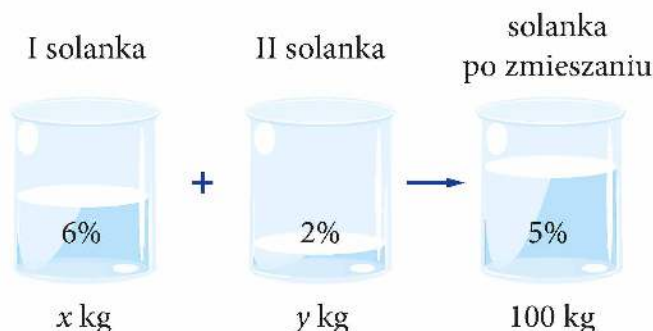
Zapisujemy równania opisujące warunki zawarte w treści zadania:

$$x + y = 100$$

$$0,06 \cdot x + 0,02 \cdot y = 0,05 \cdot 100$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 100 \\ 0,06x + 0,02y = 5 \end{array} \right. / \cdot (-50) \\ + \left\{ \begin{array}{l} x + y = 100 \\ -3x - y = -250 \end{array} \right. \\ \hline -2x = -150 \quad / : (-2) \\ x = 75 \end{array}$$



Stężenie procentowe roztworu określa, jaki procent masy całego roztworu stanowi masa rozpuszczonej substancji. Roztwór soli nazywany jest **solanką**.

Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu: $x = 75$ i $y = 25$.

Aby otrzymać 100 kg solanki 5-procentowej, należy zmieszać 75 kg solanki 6-procentowej i 25 kg solanki 2-procentowej.

Ćwiczenie 1

a) Ile kilogramów solanki o stężeniu 13% należy zmieszać z solanką o stężeniu 6%, aby otrzymać 35 kg solanki o stężeniu 9%?

b) Do 5-procentowego roztworu soli dosypano taką jej ilość, że otrzymano 95 gramów roztworu o stężeniu 6%. Ile soli dosypano?

Łódź płynąca z prądem i pod prąd

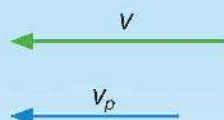
Gdy rozpatrujemy ruch łodzi na rzece, ważnym pojęciem jest prędkość własna łodzi.

Prędkość własna łodzi to prędkość, jaką osiąga łódź na stojącej wodzie.

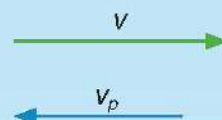
$$\text{prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$$



Na prędkość, z jaką po rzece porusza się łódź, wpływa prędkość prądu rzeki. Oznaczmy przez v prędkość własną łodzi, a przez v_p prędkość prądu rzeki.



Prędkość łodzi poruszającej się z prądem rzeki jest równa $v + v_p$



Prędkość łodzi płynącej pod prąd jest równa $v - v_p$



Przykład 2

Łódź motorowa płynąca z prądem rzeki przebyła trasę pomiędzy przystaniami odległymi o 36 kilometrów w 2 godziny, drogę powrotną zaś w 3 godziny. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

Oznaczamy przez v – prędkość własną łodzi, a przez v_p – prędkość prądu rzeki. Informacje podane w zadaniu możemy przedstawić w tabeli.

	Odległość	Prędkość	Czas
Płynięcie z prądem	36 km	$v + v_p$	2 h
Płynięcie pod prąd	36 km	$v - v_p$	3 h

Prędkość łodzi płynącej z prądem jest równa:

$$\frac{36 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 18 \text{ km/h}$$

a prędkość łodzi płynącej pod prąd:

$$\frac{36 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 12 \text{ km/h}$$

Otrzymujemy układ równań:

$$+ \begin{cases} v + v_p = 18 \\ v - v_p = 12 \end{cases}$$

$$\hline 2v = 30$$

$$v = 15$$

$$\begin{cases} v = 15 \\ v + v_p = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 15 \\ v_p = 3 \end{cases}$$



Prędkość własna łodzi była równa 15 km/h, a prędkość prądu rzeki – 3 km/h.

Ćwiczenie 2

Płynąc w dół rzeki, łódź pokonała 24 kilometry w 2 godziny. Oblicz jej prędkość własną oraz prędkość prądu rzeki, jeśli droga powrotna łodzi trwała trzykrotnie dłużej.

Ćwiczenie 3

Pierwszego dnia łódź płynąca 2 godziny z prądem rzeki, a następnie 3 godziny pod prąd, przebyła trasę długości 58 km. Drugiego dnia, płynąc 3 godziny z prądem i 4 godziny pod prąd, przepłynęła trasę długości 82 km. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

Zadania

1. W pewnym liceum uczy się 500 osób. Jeżeli liczba dziewcząt zmniejszyłaby się o 40%, a liczba chłopców zwiększyłaby się o 60%, to liczba osób uczęszczających do tej szkoły by się nie zmieniła. Ile dziewcząt, a ilu chłopców uczy się w tym liceum?
2. Paweł i Bartek pracowali w wakacje przy zbiorze owoców. Paweł zarobił 110% tego co Bartek i jeszcze 280 zł, natomiast Bartek dostał 60% tego co Paweł i jeszcze 240 zł. Ile zarobił każdy z nich?
3. Kwotę 10 000 zł podzielono na dwie części. Jedną z nich wpłacono do banku *A* na lokatę roczną oprocentowaną 3% w skali roku, drugą do banku *B* na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Po roku z lokat otrzymano łączne 10 340 zł. Jaką kwotę wpłacono do banku *A*, a jaką do banku *B*? Przeanalizuj przedstawiony obok początek rozwiązywania tego zadania i je dokończ.

Oznaczamy niewiadome:

x – kwota w zł wpłacona do banku *A*,

y – kwota w zł wpłacona do banku *B*.

$$\begin{cases} x + y = 10\,000 \\ 1,03x + 1,04y = 10\,340 \end{cases}$$

Mosiądz to stop miedzi, w którym głównym dodatkiem jest cynk. Z mosiądzu wykonuje się na przykład dzwony okrętowe.



5. Zawartość miedzi w dwóch różnych stopach wynosi 40% i 80%. Ile każdego z tych stopów należy użyć, aby otrzymać 2 kg stopu zawierającego 50% miedzi?
6. Mamy do dyspozycji dwa stopy miedzi o różnej jej zawartości. Jeśli użyjemy 2 kg pierwszego i 6 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 55% miedzi. Jeśli zaś użyjemy 3 kg pierwszego i 5 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 52,5% miedzi. Jaka jest zawartość miedzi w każdym z tych stopów?

7. Roman przygotowuje się do zawodów rowerowych. Na sobotnim treningu przejechał 90 kilometrów w ciągu 5 godzin. Część trasy wiodła po drogach asfaltowych, część po gruntowych. Na drogach asfaltowych średnia prędkość jazdy wynosiła 20 km/h, a na drogach gruntowych 15 km/h. Ile czasu Roman jechał po drogach asfaltowych? Jaką odległość w tym czasie pokonał?
8. Z miast A i B wyruszają jednocześnie naprzeciw siebie ze stałymi prędkościami dwa pociągi. Jeden z nich jedzie z prędkością dwukrotnie większą niż drugi. Spotykają się po godzinie i 20 minutach. Gdyby wolniejszy pociąg jechał z prędkością o 10 km/h większą, spotkanie nastąpiłoby po godzinie i 12 minutach. Jaka jest odległość między miastami A i B ?
9. Pociąg pokonał 120 km w ciągu godziny i 45 minut. Pierwszy odcinek trasy przebył z prędkością 80 km/h, a drugi – ze względu na roboty torowe – z prędkością 40 km/h. Jaka była długość drugiego odcinka?



Powtórzenie

10. Po zmieszaniu roztworów soli pięcio- i dziesięcioprocentowego otrzymano 200 g roztworu ośmioprocentowego. Ile było roztworu pięcioprocentowego?
11. Zmieszano 60 g dziesięcioprocentowego roztworu soli z roztworami ośmio- i pięcioprocentowym. W rezultacie otrzymano 150 g roztworu o stężeniu 8%. Ile gramów roztworu pięcioprocentowego wykorzystano?
12. Do 7-procentowej solanki dolano 3 litry wody i dosypano pewną ilość soli. W rezultacie otrzymano 8,5 kg solanki o stężeniu 10%. Ile soli dosypano? Przyjmij, że 1 litr wody ma masę 1 kg.
13. Pan Tomek podzielił kwotę 17 000 zł na trzy części: 2000 zł odłożył do szuflady, a pozostałe dwie części ulokował na lokatach oprocentowanych odpowiednio 2% i 2,5% w skali roku. Po roku miał do dyspozycji 17 350 zł. Jaką kwotę ulokował na lokacie dwuprocentowej?
14. Z kwoty 10 000 zł wydzielono x zł i złożono na lokacie oprocentowanej 2,5% w skali roku, pozostałe y zł złożono na lokacie o oprocentowaniu rocznym wynoszącym 2,75%. Po roku z obu lokat odebrano 10 260 zł. Oblicz x i y .

3.6. Zagadnienia uzupełniające

■ Układy trzech równań z trzema niewiadomymi

Niektóre zagadnienia wymagają wprowadzenia trzech lub więcej niewiadomych. Tworzy się wtedy i rozwiązuje układ tylu równań, ile niewiadomych zostało wprowadzonych.

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3 - 2x - 2y \\ 3x - 2y + (3 - 2x - 2y) = 1 \\ x - y - (3 - 2x - 2y) = 4 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą z z pierwszego równania i podstawiamy otrzymane wyrażenie do pozostałych równań.

$$\begin{cases} z = 3 - 2x - 2y \\ x - 4y = -2 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

Doprowadzamy równania do prostszej postaci.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} x - 4y = -2 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ i otrzymujemy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Podstawiamy wyznaczone wartości x i y do równania $z = 3 - 2x - 2y$ i otrzymujemy $z = -3$.

Zatem rozwiązaniem wyjściowego układu są trzy liczby: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$

1. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + y - z = 20 \\ x - y - z = 30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y - 3z = -6 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 5x - 3y - z = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 4y + z = 5 \\ 4x + 2y - z = 7 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$

2. Czy podany układ równań spełnia trójka liczb całkowitych?

a)
$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ 2y + z = 2 \\ 2y = -2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 2y - z = 10 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 2y - z = -9 \\ 2y + 3z = 16 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 4 \\ x - 3y - 2z = -3 \end{cases}$$

3. a) Suma trzech liczb jest równa 36. Suma pierwszej i drugiej liczby jest dwukrotnie większa od trzeciej liczby, a suma drugiej i trzeciej jest o 10 większa od pierwszej liczby. Jakie to liczby?
- b) Suma trzech liczb: a , b , c jest równa 27. Liczba c jest o 3 większa od średniej arytmetycznej liczb a i b , a liczba b o 3 mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a i c . Wyznacz liczby a , b i c .
4. Na pewne przedstawienie w teatrze sprzedano łącznie 500 biletów trzech rodzajów – normalnych po 50 zł, ulgowych po 40 zł i wejściówek po 30 zł. Biletów normalnych było o 40 więcej niż ulgowych i wejściówek razem. Wszystkie bilety kosztowały łącznie 22 300 zł. Ile biletów poszczególnych rodzajów sprzedano? Przeanalizuj przedstawiony poniżej początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.

Oznaczamy niewiadome:

x – liczba sprzedanych biletów normalnych,

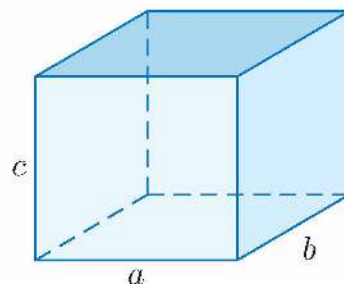
y – liczba sprzedanych biletów ulgowych,

z – liczba sprzedanych wejściówek.

Możemy zatem ułożyć układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x = y + z + 40 \\ 50x + 40y + 30z = 22\,300 \end{cases}$$

5. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu (rysunek obok) jest równa 52. Krawędź c jest o 1 krótsza od sumy długości krawędzi a i b , zaś krawędź b jest o 2 krótsza od średniej arytmetycznej długości krawędzi a i c . Oblicz objętość tego prostopadłościanu.



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1 \\ \frac{x-2}{4} - \frac{y-6}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{4y-7}{3} = 2 \\ \frac{3y-6}{4} - \frac{5-x}{6} = -1\frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 0,95 \\ \frac{2x-2}{5} + \frac{3-2y}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{2x-y}{5} - \frac{y+2x}{4} = 1,2 \\ \frac{2x+3y}{12} - \frac{4x-y}{8} = 0,25 \end{cases}$$

2. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb o różnych znakach?

$$\text{a) } \begin{cases} 2x = 3(1-y) + 2y \\ 3(y-x) = y-1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y = \frac{1}{3}(x-1) \\ 3(x+1) = -(y+1) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{-2+x}{2} + 5 = x + \frac{y+8}{3} \\ \frac{2+3x}{4} = \frac{2y+6}{2} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x-2}{4} - \frac{y-3}{3} = \frac{x+y}{6} \\ \frac{x+y-1}{3} - x = \frac{y-1}{4} \end{cases}$$

3. Określ liczbę rozwiązań układu równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2(2y+1) = 6(4-x) \\ 3x+2y = 11 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -2x+2y = y-2 \\ 2(y-3x) = 6-y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 0,2y = \frac{6x+y}{5} + 1 \\ x-1 = \frac{y-5}{6} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = \frac{2-x}{4} \\ x - \frac{x+y}{2} = 1 - \frac{2x-3y}{2} \end{cases}$$

4. a) Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 13. Gdybyśmy zamienili miejscami cyfry tej liczby, to otrzymalibyśmy liczbę o 45 większą od szukanej. Co to za liczba?

b) Dana jest dwucyfrowa liczba A oraz liczba B otrzymana z przestawienia cyfr liczby A . Wyznacz te liczby, jeśli ich suma jest równa 121, a liczba A jest o 7 większa od podwojonej liczby B .

c) Jeśli do licznika pewnego ułamka dodamy 1, a od jego mianownika odejmiemy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Jeśli natomiast od licznika odejmiemy 1, a do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{3}$. Co to za ułamek?

5. Na wycieczkę pojechało 23 uczniów. Na postoju dwie dziewczynki i jeden chłopiec zostali w autokarze. Wśród dzieci, które opuściły pojazd, było trzy razy mniej chłopców niż dziewczynek. Ile dziewczynek, a ilu chłopców pojechało na wycieczkę?



■ Zestaw II

1. Podaj, ile rozwiązań ma układ równań dla $m = 1$, a ile – dla $m = -2$.

a) $\begin{cases} 2x - my = 1 \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 4 - 2m \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - |m|y = m^2 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$

2. Dla jakich wartości parametrów m i k para liczb: $x = 3$, $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań?

a) $\begin{cases} mx + ky = 5 \\ (k - 1)x - 2my = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 - m)x + 4ky = 10 \\ (m - 2k)x - (4k + m)y = -8 \end{cases}$

3. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ (x - 1)^2 = (2 - x)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ (3x - 1)(1 + 3x) + y = (1 - 3x)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (y + 2)^2 = y^2 + x \\ (2x - 1)^2 = 4x^2 - y \end{cases}$ e) $\begin{cases} (x - y)(x + y) = x^2 - (y - 1)^2 \\ (x + y)(x + 2) - xy = x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (3x - 1)^2 = 9x^2 + y \\ 2x + 4y^2 = (1 - 2y)^2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x - 8)^2 = (x + 8)(x + 8) + y \\ x(y - 1) = y(x - 2) \end{cases}$

4. a) Roztwór soli o stężeniu 5% zmieszano z roztworem soli o stężeniu 40%. Ile gramów każdego z tych roztworów użyto, jeśli otrzymano 1,4 kg roztworu soli o stężeniu 30%?

b) Laborant potrzebuje 10 g roztworu azotanu potasu o stężeniu 9%. Ma do dyspozycji roztwory tego związku o stężeniach 6% i 10%. Ile gramów jednego roztworu i ile drugiego powinien zmieszać?

5. Jubiler dysponuje dwoma rodzajami stopu złota. W jednym na każde 37,5 g czystego złota przypada 62,5 g miedzi, drugi ma próbę 750. Ile gramów każdego z tych stopów należy stopić, aby otrzymać 100 g złota próby 585?

Uwaga. Próba złota – zawartość złota w stopie wyrażona w promilach.

6. Dwa samochody poruszające się ze średnimi prędkościami v_1 i v_2 wyruszyły jednocześnie naprzeciwko siebie z miejscowości oddalonych o 450 km. Samochody te minęły się po upływie 3 godzin. Gdyby wolniejszy samochód jechał z prędkością o połowę większą, to spotkanie nastąpiłoby po upływie $2\frac{1}{2}$ godziny. Oblicz prędkości, z jakimi poruszały się te samochody.



Rozwiązując zadania tekstowe, możemy spotkać się z takimi, w których mamy trzy niewiadome. Jednak nie zawsze musimy wtedy wykorzystywać układ trzech równań z trzema niewiadomymi.

Przykład 1

Dany jest trójkąt o kątach α , β , γ , przy czym suma miar kątów α i β jest równa 105° . Wyznacz te kąty, jeśli spełniona jest równość $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ$.

- Rozwiązanie tego zadania możemy rozpocząć od zauważenia, że mamy trzy niewiadome: α , β , γ . Prowadzi to jednak do układu trzech równań z trzema niewiadomymi (napisz ten układ).
- Jeśli zauważymy, że $\alpha = 105^\circ - \beta$, możemy napisać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} (105^\circ - \beta) + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ \\ (105^\circ - \beta) + \beta + \gamma = 180^\circ \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań i otrzymujemy $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 75^\circ$.

Zatem $\alpha = 105^\circ - \beta = 35^\circ$.

Odpowiedź: $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 75^\circ$

Przykład 2

W skarbonce znajduje się 18 monet – są to monety 1-, 2- i 5-złotowe. Monet 5-złotowych jest o dwie mniej niż monet 1-złotowych. Oblicz, ile monet każdego nominału znajduje się w skarbonce, jeśli jest w niej 48 zł.

- Zadanie możemy rozwiązać, wprowadzając trzy niewiadome:

x – liczba monet 1-złotowych,

y – liczba monet 2-złotowych,

z – liczba monet 5-złotowych.

Następnie należy ułożyć i rozwiązać układ trzech równań z trzema niewiadomymi (napisz ten układ).

- Zauważmy, że możemy tu wprowadzić dwie niewiadome: x – liczba monet 1-złotowych, y – liczba monet 2-złotowych. Wówczas monet 5-złotowych jest $x - 2$. Otrzymujemy teraz układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + (x - 2) = 18 \\ x + 2y + 5(x - 2) = 48 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest: $x = 9$ oraz $y = 2$ (sprawdź).

Odpowiedź: W skarbonce znajduje się 9 monet 1-złotowych, 2 monety 2-złotowe oraz 7 monet 5-złotowych.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Wskaż rozwiązanie układu równań $\begin{cases} 5x - 2y = 27 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$
- A. $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$
2. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ mx - y = m - 1 \end{cases}$ jest para liczb ujemnych dla:
- A. $m = -\frac{5}{2}$, B. $m = -\frac{1}{2}$, C. $m = \frac{1}{3}$, D. $m = \frac{3}{2}$.
3. Kuba jest o 5 lat starszy od Magdy. Wiek Magdy stanowi $\frac{2}{3}$ wieku Kuby. Który z poniższych układów równań opisuje tę sytuację? Przyjmij oznaczenia k – wiek Kuby, m – wiek Magdy.
- A. $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ B. $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$ C. $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ D. $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$
4. Wskaż równanie, które należy dopisać do równania $3x - 4y = 6$, aby otrzymać nieoznaczony układ równań.
- A. $3x - 4y = -6$ C. $\frac{3}{2}x - 2y = -3$
B. $-3x + 4y = 6$ D. $-\frac{3}{2}x + 2y = -3$
5. Wskaż układ równań równoważny układowi $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$
- A. $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ -x = 22 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 5x = 22 \end{cases}$
B. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ 5x - 10y = 12 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ -x - 10y = 12 \end{cases}$
6. Układ równań $\begin{cases} 2m^2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = -10m \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym dla:
- A. $m = -\frac{1}{2}$, B. $m = -1$, C. $m = 1$, D. $m = \frac{1}{2}$.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} \frac{-x-5}{2} = x - y \\ 5 - 2(x - 3(y - 1)) = 0 \end{cases}$$

Zadanie 2 (2 pkt)

Bankomat wypłacił kwotę 940 zł w banknotach o nominałach 10 zł, 20 zł i 50 zł. Ile było banknotów każdego rodzaju, jeśli banknotów 10-złotowych było tyle samo co banknotów 50-złotowych, a banknotów 20-złotowych było o 7 więcej niż 50-złotowych?

Zadanie 3 (2 pkt)

Różnica miar kątów α i β pewnego trójkąta wynosi 30° . Kąt γ tego trójkąta ma miarę o 20° większą od sumy miar kątów α i β . Wyznacz kąty tego trójkąta.

Zadanie 4 (2 pkt)

Para liczb $x = 2$, $y = 3$ jest rozwiązaniem układu równań utworzonego przez dwa spośród poniższych równań. Wskaż te równania.

I. $x - 2y = -4$ II. $2x + 3y = 15$ III. $2x - 3y = -5$ IV. $3x - y = 2$

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)

Cztery lata temu Kasia i jej dwaj bracia bliźniacy mieli razem 22 lata. Za dwa lata Kasia będzie miała tyle lat co obaj jej bracia razem. Oblicz, ile lat będzie mieć Kasia, gdy jej bracia będą mieli po 18 lat.

Zadanie 6 (3 pkt)

Tomek ma w skarbonce trzydzieści jeden monet, w tym: trzy monety 5-złotowe, monety 1- i 2-złotowe oraz monety 10- i 50-groszowe. Liczba monet 10-groszowych jest taka sama jak liczba monet 50-groszowych, a monet 1-złotowych jest dwukrotnie więcej niż monet 2-złotowych. Suma pieniędzy w skarbonce wynosi 42 zł. Oblicz, ile jest monet każdego rodzaju.

Zadanie 7 (3 pkt)

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} 4(x + y)^2 - 4y(2x + y) = (2x)^2 + x + y \\ (x - 1)(y + 1) = (x + 2)(y - 2) \end{cases}$$



4 Funkcje

U osób wyczynowo uprawiających sport regularnie przeprowadza się specjalistyczne badania lekarskie.

Elektrokardiogram wykonuje się za pomocą przyrządu, który odbiera i wzmacnia impulsy elektryczne. Jako wynik badania otrzymujemy wykres funkcji napięcia elektrycznego, wytworzonego na skutek skurczu mięśnia sercowego, w zależności od czasu.



Prawidłowa czynność serca



Zaburzenie rytmu serca

4.1. Pojęcie funkcji

Przykład 1

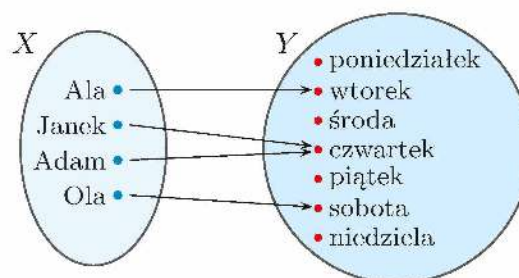
W szkolnym turnieju piłki nożnej wzięło udział pięć drużyn A , B , C , D i E . Grano systemem każdy z każdym. Za zwycięstwo przyznawano 3 pkt, za remis 1 pkt, a za przegraną 0 pkt. Najmniejsza możliwa do zdobycia liczba punktów to 0, a największa to 12. Każdej drużynie przyporządkowano sumę zdobytych punktów wyniki turnieju przedstawiono w tabeli.

Drużyna	A	B	C	D	E
Zdobyte punkty	3	7	8	1	8



Przykład 2

Na przedstawionym obok grafie każdej z czterech osób przyporządkowano dzień tygodnia, w którym dana osoba się urodziła. Zbiór osób oznaczono literą X , a zbiór dni tygodnia – literą Y .

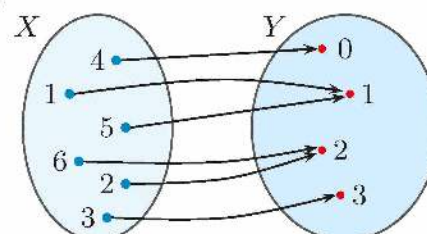


Omówione powyżej przyporządkowania są przykładami **funkcji**. W każdym z nich są wskazane dwa zbiory, często oznaczane przez X i Y , oraz określony sposób przyporządkowania elementom zbioru X elementów zbioru Y – można to zrobić np. za pomocą tabeli, grafu lub opisu słownego.

Przykład 3

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ przyporządkowano jej resztę z dzielenia przez 4. Zbiór możliwych reszt oznaczono literą Y . Przyporządkowanie to przedstawiono za pomocą tabeli i grafu.

Liczba	1	2	3	4	5	6
Reszta	1	2	3	0	1	2



Ćwiczenie 1

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ przyporządkowano liczbę ze zbioru $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ będącą jej resztą z dzielenia przez 5. Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą tabeli i grafu.

Definicja

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

Zbiór X nazywamy **dziedzina** funkcji, a jego elementy **argumentami**.

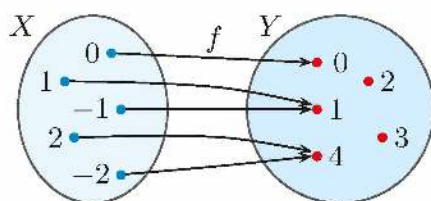
Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedzina** funkcji. Jeśli element zbioru Y jest przyporządkowany jakiemuś elementowi zbioru X , to nazywamy go **wartością funkcji**.

Funkcje zwykle oznaczamy małymi literami, na przykład: f , g , h .

Mówiąc o funkcji f ze zbioru X w zbiór Y , używamy zapisu $f: X \rightarrow Y$, a wartość, którą funkcja f przyjmuje dla argumentu x , oznaczamy przez $f(x)$.

Przykład 4

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcję f ze zbioru X w zbiór Y , która każdej liczbie przyporządkowuje jej kwadrat, przedstawiono za pomocą grafu i tabeli.



Argument x	-2	-1	0	1	2
Wartość funkcji $f(x)$	4	1	0	1	4

Zwróć uwagę, że liczby 2 i 3 należą do przeciwdziedziny funkcji f , ale nie są wartościami tej funkcji.

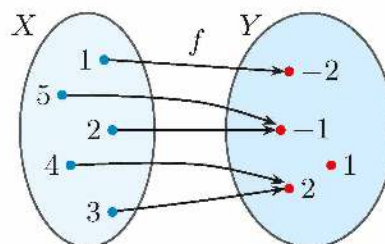
Funkcja f dla argumentu $x = 2$ przyjmuje wartość $y = 4$, co zapisujemy „ $f(2) = 4$ ” i czytamy: „ f od 2 jest równe 4”.

Wartość $y = 4$ funkcja f przyjmuje również dla argumentu $x = -2$, zatem $f(-2) = 4$.

Ćwiczenie 2

Dane są zbiory $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ oraz funkcja $f: X \rightarrow Y$ przedstawiona za pomocą grafu.

- Podaj wartości funkcji f dla argumentów parzystych.
- Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2, a dla jakich – wartość 1?
- Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli.



Ćwiczenie 3

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ przyporządkowuje każdemu argumentowi połowę jego kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i tabeli. Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

Ćwiczenie 4

Funkcję $f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	1	-2	0	2	1	3	3	3	4

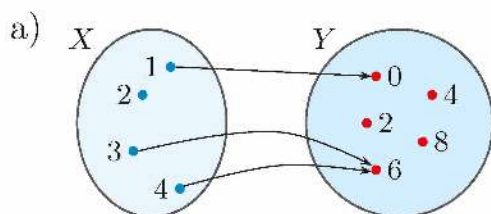
Dla których argumentów zachodzi równość:

- a) $f(x) = 0$, b) $f(x) = 1$, c) $f(x) = -2$, d) $f(x) = -1$?

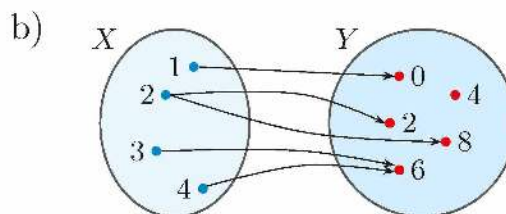
Zauważmy, że zgodnie z definicją przyporządkowanie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y , gdy **każdemu** elementowi zbioru X przyporządkowany jest **dokładnie jeden** element zbioru Y .

D Przykład 5

Uzasadnij, że na poniższym grafie nie przedstawiono funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



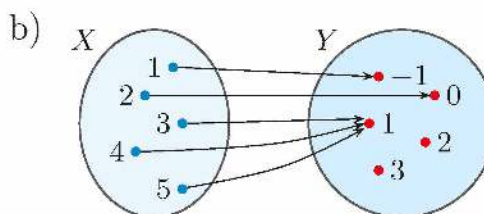
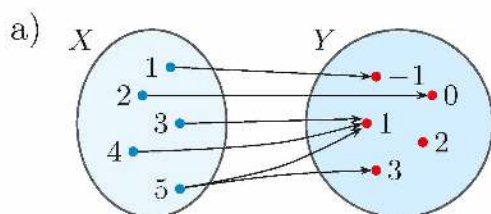
Liczbę 2 należącą do zbioru X nie przyporządkowano żadnego elementu zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



Liczbę 2 należącą do zbioru X przyporządkowano dwa elementy zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .

Ćwiczenie 5

Czy na poniższym grafie przedstawiono funkcję ze zbioru X w zbiór Y ? Jeśli tak, to podaj argument, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość 0.



Definicja

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x , dla którego:

$$f(x) = 0$$

Przykład 6

Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiona za pomocą tabeli ma dwa miejsca zerowe: -1 i 2 .

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	4	3	0

Ćwiczenie 6

Przedstaw za pomocą tabeli funkcję f i podaj jej miejsca zerowe, jeśli każdej liczbie ze zbioru $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje ona:

- a) liczbę o 2 mniejszą,
- b) liczbę o 3 większą,
- c) kwadrat tej liczby pomniejszony o 1,
- d) sześcian tej liczby pomniejszony o 8.

Zadania

1. Funkcję $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i podaj jej miejsca zerowe.

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	0	2	3

b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3

2. Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ została podana w postaci tabeli. Przedstaw ją za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości nieparzyste?

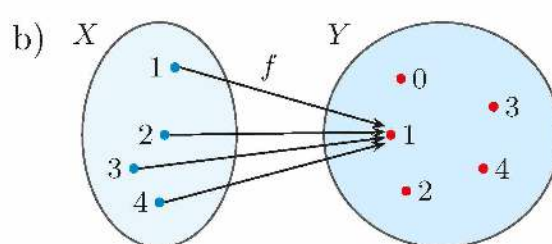
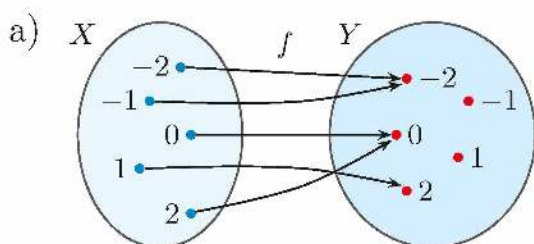
a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	0	1	2	3

3. Funkcję $f: X \rightarrow Y$ przedstawiono w postaci grafu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i podaj jej miejsca zerowe.



4. Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ każdemu argumentowi przyporządkowuje jego kwadrat.

- a) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu.
b) Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

5. Funkcja f została podana w postaci tabeli. Określ jej dziedzinę, a następnie przedstaw tę funkcję za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie?

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2

6. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej kwadrat pomniejszony o 4. Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne? Czy ma ona miejsca zerowe?

- D** 7. Rozważmy przyporządkowanie, w którym liczbie odpowiada jej pierwiastek kwadratowy. Uzasadnij, że przyporządkowanie to nie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y , jeśli:

- a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y = \mathbf{Q}$, b) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y = \mathbf{R}$.

8. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np. $f(24) = 6$. Podaj zbiór wartości funkcji f . Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3, a dla jakich 7?

Powtórzenie

9. Funkcję $f: \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu. Dla ilu argumentów zachodzi równość $f(x) = x$?

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	-1	2	0	2

b)

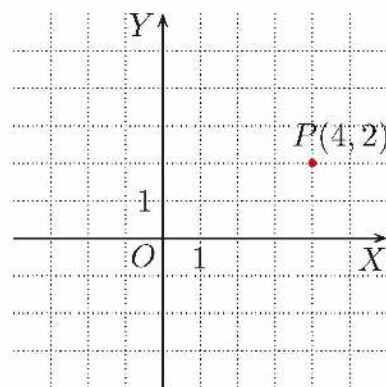
x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1	1	-2	2	1

10. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartość większą od -2 ?
11. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez n . Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?
- a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 5$ d) $n = 10$

Układ współrzędnych

Prostokątny układ współrzędnych to układ dwóch prostopadłych osi liczbowych o wspólnym początku. Oś pozioma nazywana jest osią OX lub **osią odciętych**, a oś pionowa to oś OY lub inaczej **oś rzędnych**.

Każdy punkt płaszczyzny jest w układzie współrzędnych jednoznacznie określony przez parę liczb zwanych **współrzędnymi**. Na przykład punktowi P na rysunku obok odpowiadają współrzędne $(4, 2)$.



Prostokątny układ współrzędnych nazywany jest również **kartezjańskim układem współrzędnych** na cześć francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes'a (1596–1650) zwanego w Polsce Kartezjuszem.

1. Odczytaj współrzędne punktów: P , Q , R , S , T , U , W (rysunek obok).

2. Podaj, w której ćwiartce układu współrzędnych położony jest punkt:

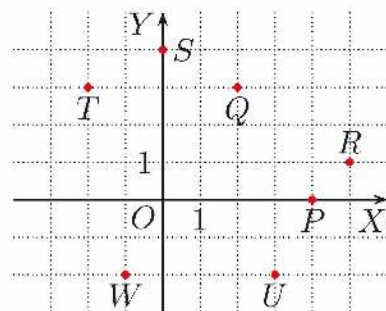
a) $A(-3, 6)$,

c) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$,

b) $B(4, -11)$,

d) $D(-50, -60)$.

3. Naskicuj układ współrzędnych, a następnie zaznacz w nim punkty: $A(0, 5)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, -4)$, $D(6, 1\frac{1}{2})$, $E(-2, 0)$, $F(3, -3)$.



Definicja

Punktami kratowymi nazywamy punkty, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

4. Naskicuj prostokąt $ABCD$. Ile punktów kratowych leży wewnątrz tego prostokąta?

a) $A(1, -1)$, $B(4, -1)$, $C(4, 3)$, $D(1, 3)$

b) $A(-4, -2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 4)$, $D(-4, 4)$

5. Dany jest trójkąt T_1 o wierzchołkach: $A(-4, -2)$, $B(2, -2)$ i $C(-4, 4)$ oraz trójkąt T_2 o wierzchołkach: $D(0, 2)$, $E(8, 2)$ i $F(4, 6)$. Do wnętrza którego z tych trójkątów należy więcej punktów kratowych i o ile?

4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)

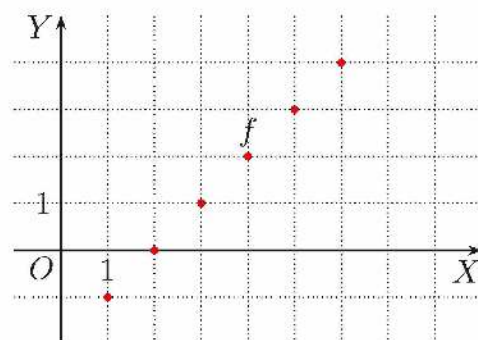
Funkcję, której argumenty i wartości są liczbami, nazywamy **funkcją liczbową**. Jednym ze sposobów przedstawienia takiej funkcji jest wykres.

Przykład 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 mniejszą. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	-1	0	1	2	3	4

Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych (x, y) , gdzie x jest argumentem, a y – wartością funkcji. Są to punkty: $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$ i $(6, 4)$.



Definicja

Wykresem funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów (x, y) , że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

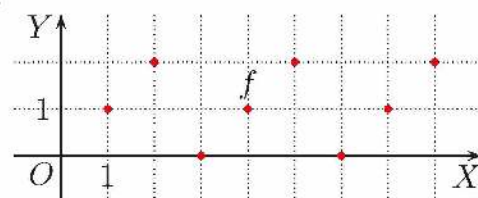
Ćwiczenie 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 większą. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.

Przykład 2

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi jego resztę z dzielenia przez 3. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2



Ćwiczenie 2

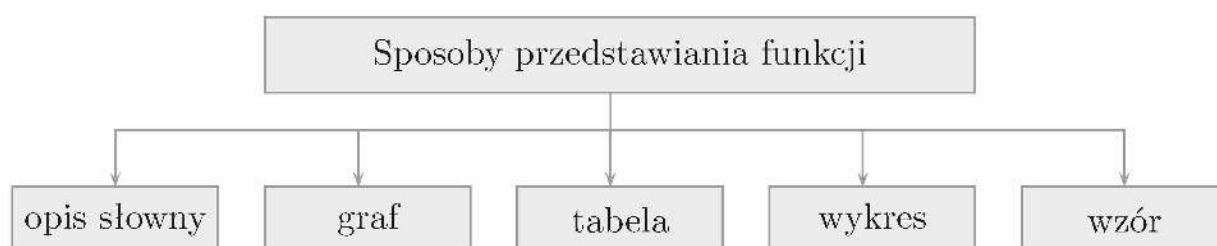
Naszkicuj wykres funkcji, która każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez: a) 2, b) 4.

Często możliwe jest określenie funkcji za pomocą wzoru. Na przykład:

Opis słowny	Wzór
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x liczbę o 3 większą	$f(x) = x + 3$
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego połowę	$f(x) = \frac{1}{2}x$
f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego kwadrat	$f(x) = x^2$

Uwaga. Wzór funkcji $f(x) = x + 3$ możemy zapisać też w postaci $y = x + 3$.

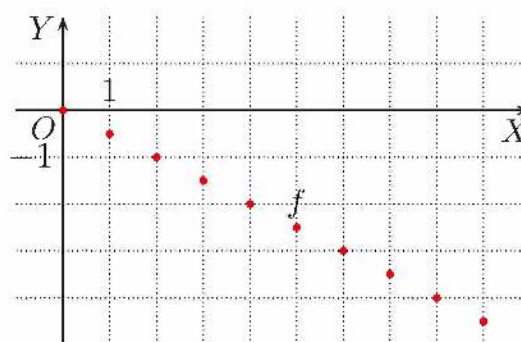
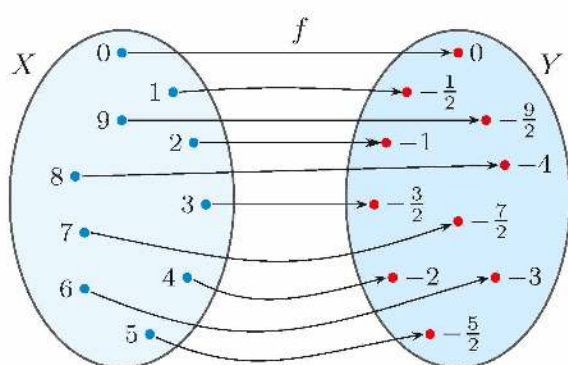
W zależności od zagadnienia korzystamy z jednego lub kilku sposobów przedstawiania funkcji.



Przykład 3

Funkcja f każdej jednocyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej połowy. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli, grafu i wykresu. Podaj jej wzór.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$



Funkcję f można opisać wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x$ (lub $y = -\frac{1}{2}x$).

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres oraz podaj wzór funkcji f , która każdej liczbie ze zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje:

- a) liczbę o 3 mniejszą, b) połowę kwadratu tej liczby.

Przed naszkicowaniem wykresu funkcji, należy zwrócić uwagę na jej dziedzinę.

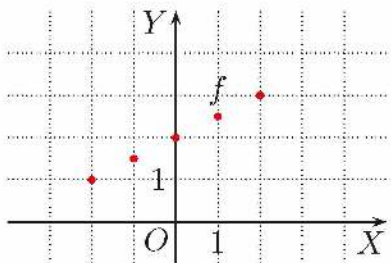
Przykład 4

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

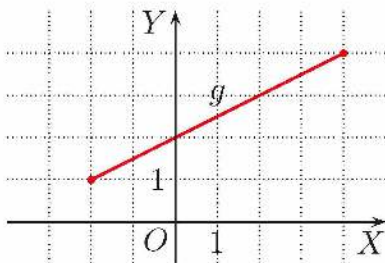
II. przedział $\langle -2; 4 \rangle$

III. przedział $(-2; 4)$



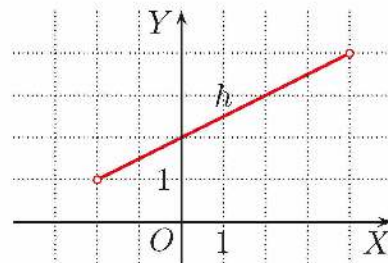
$$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$g: \langle -2; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$h: (-2; 4) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

- Wykresem funkcji g (rysunek II) jest odcinek łączący punkty $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ – jego końce zaznaczono pełnymi kółkami.
- Na rysunku III puste kółka w punktach $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ oznaczają, że punkty te nie należą do wykresu funkcji h (ponieważ liczby -2 i 4 nie należą do dziedziny tej funkcji).

Jeśli dziedziną funkcji $f(x) = ax + b$, gdzie a, b są dowolnymi liczbami, jest przedział domknięty $\langle x_1; x_2 \rangle$, to wykresem tej funkcji jest odcinek. Aby go naszkicować, należy obliczyć wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Jeśli dziedziną funkcji f jest przedział otwarty, to jej wykresem jest odcinek bez swoich końców.

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

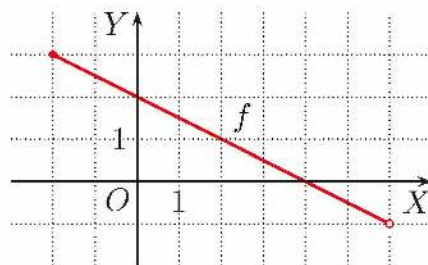
Obliczamy wartość funkcji dla $x = -2$:

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$$

Obliczamy wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x + 2$ dla $x = 6$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = -1$$

Wykresem funkcji f jest odcinek łączący punkty $(-2, 3)$ i $(6, -1)$ bez końca w punkcie $(6, -1)$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, jeśli:

a) $D = \langle -2; 3 \rangle$, $f(x) = x + 1$,

c) $D = (0; 5)$, $f(x) = x - 1$,

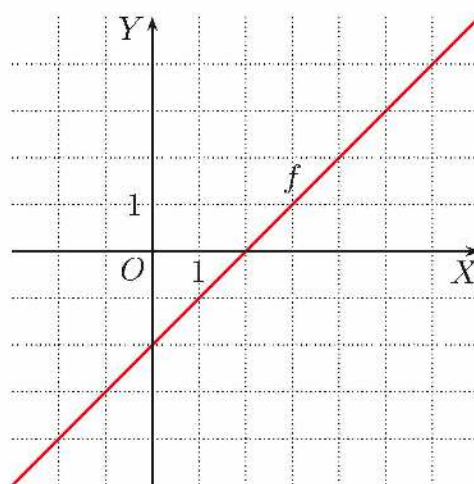
b) $D = \langle -2; 6 \rangle$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$,

d) $D = (-4; 2)$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$ wykresem funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest prosta. Takie funkcje będą szczegółowo omawiane w następnym rozdziale.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = x - 2$.

Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy obliczyć jej wartości dla dwóch dowolnych argumentów (dlaczego?), zaznaczyć odpowiednie punkty i poprowadzić przez nie prostą.

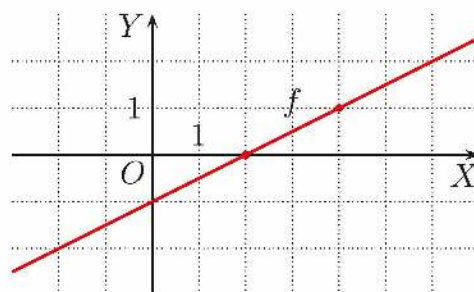


Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Obliczamy wartości funkcji f dla dwóch dowolnych argumentów, np. dla $x = 2$ i $x = 4$:
 $f(2) = 0$, $f(4) = 1$.

Do wykresu funkcji f należą punkty: $(2, 0)$ oraz $(4, 1)$. Szkicujemy prostą przechodzącą przez te punkty.



Ćwiczenie 5

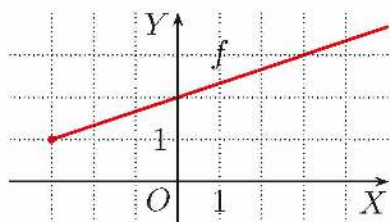
Wykresem funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest prosta. Wyznacz dwa punkty należące do tego wykresu i go naszkicuj.

- a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = -x$ c) $f(x) = x - 1$ d) $f(x) = -2x + 2$

Przykład 7

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

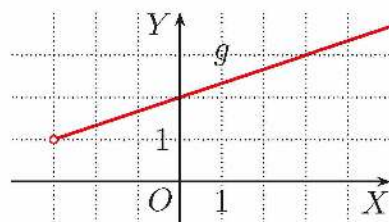
I. przedział $\langle -3; \infty \rangle$



$$f: \langle -3; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$$

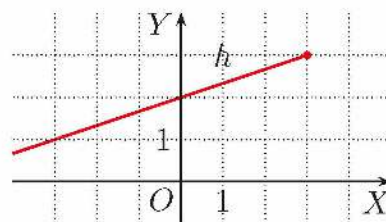
II. przedział $(-3; \infty)$



$$g: (-3; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x + 2$$

III. przedział $(-\infty; 3)$



$$h: (-\infty; 3) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{3}x + 2$$

Wykresami funkcji f i h są półproste domknięte (zawierające swój początek).

Wykresem funkcji g jest półprosta otwarta (bez początku).

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbf{R}$, która każdej liczbie z dziedziny przyporządkowuje:
- a) liczbę o 1 mniejszą, c) jej wartość bezwzględną,
b) liczbę przeciwną, d) jej kwadrat.
2. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i naskicuj jej wykres.
- a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x$ c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$ d) $f(x) = -|x|$
3. Funkcja f podana została za pomocą tabeli. Naskicuj wykres tej funkcji i spróbuj odgadnąć wzór, którym mogłaby być określona.
- a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0

 c)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	4	3	2	1
- b)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4

 d)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3
4. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x + 1$, jeśli jej dziedziną jest przedział:
- a) $\langle 0; 4 \rangle$, b) $\langle -2; 3 \rangle$, c) $\langle 1; \infty \rangle$, d) $(-\infty; 2]$.

Powtórzenie

5. Funkcję $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i wykresu.
- a)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	-1	2	1

 b)

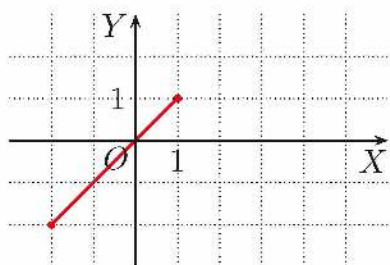
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	3	-1	-2	0
6. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.
- a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = x - 2$ c) $f(x) = x + 3$
7. Naskicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, jeśli:
- a) $D = \langle -3; 3 \rangle$, $f(x) = x - 2$ c) $D = \langle -2; \infty \rangle$, $f(x) = x + 3$
b) $D = (-1; 4)$, $f(x) = 2x - 3$ d) $D = (0; \infty)$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)

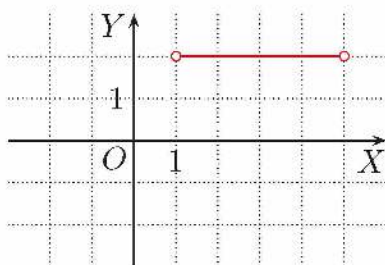
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 5) \end{cases}$

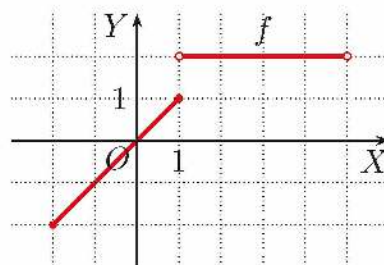
Zauważ, że dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -2; 5 \rangle$.



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in \langle -2; 1 \rangle$



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in (1; 5)$



Wykres funkcji f

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-3; -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1; 4 \rangle \end{cases}$

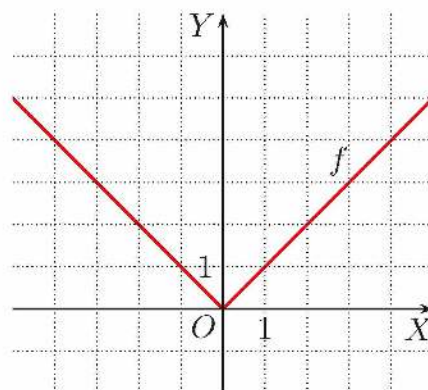
b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \\ x & \text{dla } x \in (-2; 3) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = |x|$. W tabeli podano wartości funkcji f dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	1	2	3



Tabelę taką nazywamy **tabelą wartości funkcji**.

Wzór tej funkcji można zapisać w postaci: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$

Ćwiczenie 2

Sporządź tabelę wartości funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dla całkowitych argumentów x , takich że $|x| \leq 3$. Naszkicuj wykres tej funkcji i zapisz jej wzór bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

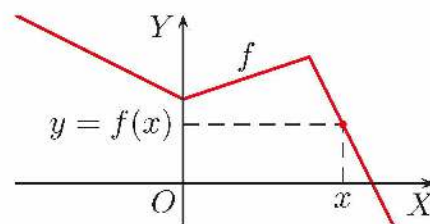
a) $f(x) = |2x|$

b) $f(x) = |3x|$

c) $f(x) = |\frac{1}{2}x|$

d) $f(x) = -|x|$

Z wykresu funkcji można czasem odczytać wartość, jaką przyjmuje ona dla danego argumentu. Zauważmy, że dla argumentu x istnieje dokładnie jedna wartość y taka, że punkt (x, y) należy do wykresu funkcji f .

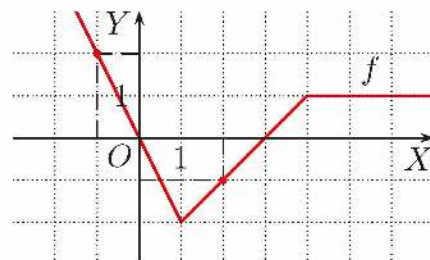


Przykład 3

Z podanego obok wykresu funkcji f odczytaj jej wartości dla argumentów $x = -1$ oraz $x = 2$.

Dla $x = -1$ odczytujemy $f(-1) = 2$.

Dla $x = 2$ odczytujemy $f(2) = -1$.



Ćwiczenie 3

Wykresem funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest prosta przechodząca przez punkty A i B . Naszkicuj ten wykres i odczytaj z niego wartości funkcji dla $x = 1$ i dla $x = 7$.

a) $A(-3, -1)$, $B(5, 3)$

b) $A(3, 0)$, $B(5, -3)$

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = 1$ oraz $x = 3$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x & \text{dla } x \in (-2; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \end{cases}$$

Dokładne odczytanie wartości funkcji z wykresu może być trudne lub niemożliwe. Wartości funkcji jesteśmy w stanie wyznaczyć, gdy znamy jej wzór.

Przykład 4

Oblicz wartości funkcji $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 5x^2 - 6x$ i $h(x) = x^3 - 1$ dla argumentu $x = 2$. Czy punkt $P(2, 7)$ należy do wykresu którejś z tych funkcji?

Obliczamy wartości funkcji dla $x = 2$:

$$f(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$g(2) = 5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 20 - 12 = 8$$

$$h(2) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji $y = f(x)$, jeśli po wstawieniu jego współrzędnych odpowiednio w miejsca x i y do wzoru funkcji otrzymamy równość.

Zatem punkt P należy do wykresu funkcji f oraz do wykresu funkcji h .

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

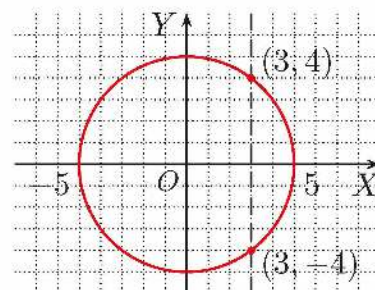
a) $f(x) = 3x^2 + 1$, $P(-2, -11)$

b) $f(x) = -2x^2 - x$, $P(-\frac{1}{2}, 0)$

Funkcja każdemu argumentowi x przyporządkowuje tylko jedną wartość y , więc do wykresu funkcji nie mogą należeć dwa punkty o tej samej odciętej.

Przykład 5

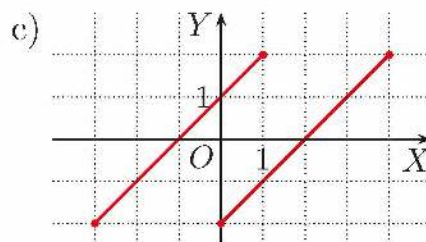
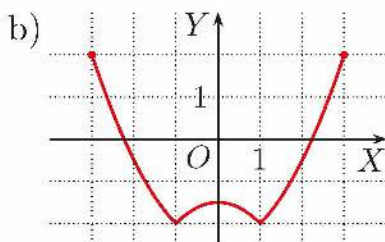
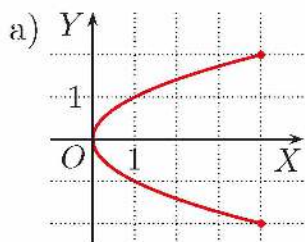
Okrąg (rysunek obok) nie jest wykresem funkcji, gdyż można wskazać takie liczby x , którym odpowiadają dwie różne wartości y_1, y_2 , np. dla $x = 3$ mamy $y_1 = -4$ i $y_2 = 4$. Jest to sprzeczne z definicją funkcji.



Żadna prosta pionowa (równoległa do osi OY) nie przecina wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.

Zadania

- D** 1. Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.



2. Naskicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = |x|$ o podanej dziedzinie D .

a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $D = (-4; 4)$ c) $D = \langle -2; \infty \rangle$

3. Dana jest funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Który z punktów $P(-1, -5)$, $Q(2, -9)$ należy do wykresu tej funkcji?

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 6$ b) $f(x) = -4x^2 + x$ c) $f(x) = x^3 - 4x^2$

4. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = -3$ oraz dla $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ 2x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -3; 3 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$

Powtórzenie

5. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = -4$ oraz dla $x = 4$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -2; \infty \rangle \end{cases}$

Inne przykłady wykresów funkcji

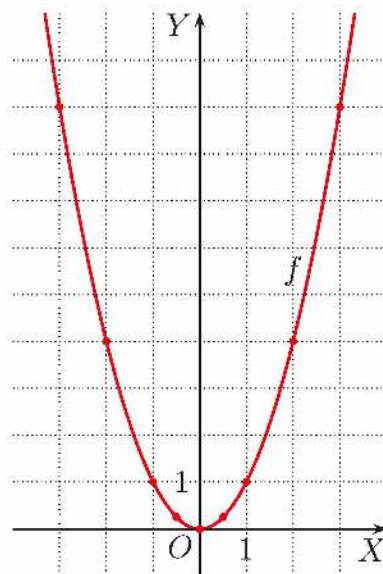
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = x^2$.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^2$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i łączymy je krzywą, jak na rysunku – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f . Wykres ten nazywamy **parabolą**.



- Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = x^2$ o podanej dziedzinie D .
 - $D = \langle -2; 2 \rangle$
 - $D = \langle 1; 3 \rangle$
 - $D = \langle 0; \infty \rangle$
- Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu, a następnie narysuj jej wykres.
 - $f(x) = -x^2$
 - $f(x) = 2x^2$
 - $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

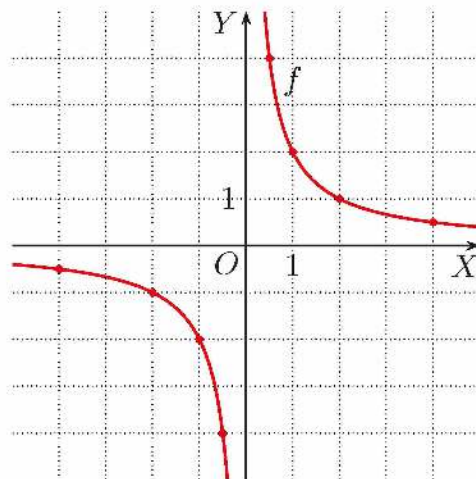
Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{2}{x}$.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów (zwróć uwagę, że liczba 0 nie należy do dziedziny funkcji).

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i odpowiednio je łączymy – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f (składa się on z dwóch osobnych gałęzi). Wykres ten nazywamy **hiperbolą**.



- Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$.

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{4}{x}$
- $f(x) = -\frac{1}{x}$

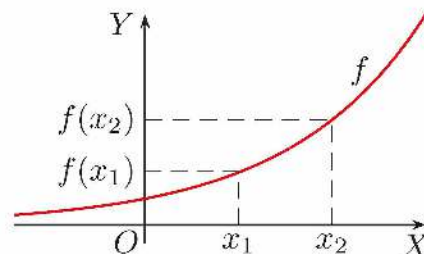
4.4. Monotoniczność funkcji

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada większa wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



Przykład 1

Wykaż, że funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ jest rosnącą.

Założmy, że $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 &< \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - 4 &< \frac{1}{2}x_2 - 4 \end{aligned}$$

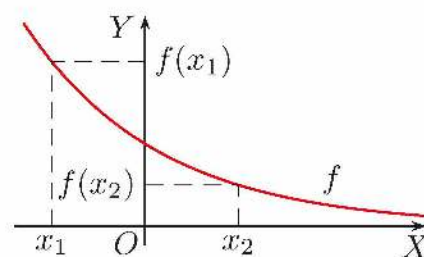
Zatem $f(x_1) < f(x_2)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, takich że $x_1 < x_2$, co oznacza, że funkcja f jest rosnącą.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada mniejsza wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



Przykład 2

Wykaż, że funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$ jest malejącą.

Założmy, że $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} 4x_1 &< 4x_2 \quad / : (x_1 \cdot x_2) \\ \frac{4}{x_2} &< \frac{4}{x_1} \end{aligned}$$

Dzielenie obu stron nierówności przez $x_1 \cdot x_2$ nie zmienia zwrotu nierówności, gdyż $x_1 \cdot x_2 > 0$.

Zatem $f(x_2) < f(x_1)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in (0; \infty)$, takich że $x_1 < x_2$, co oznacza, że funkcja f jest malejącą.

D Ćwiczenie 1

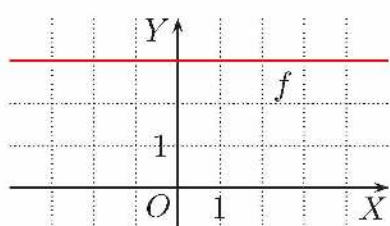
Uzasadnij, że:

- funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -2x + 6$ jest malejąca,
- funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{4}{x}$ jest rosnąca,
- funkcja $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{2}{x}$ jest rosnąca.

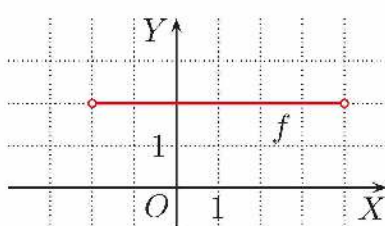
Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

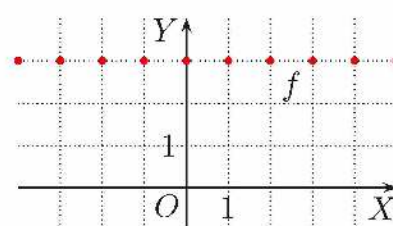
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji stałych.



$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3$$



$$f: (-2; 4) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2$$

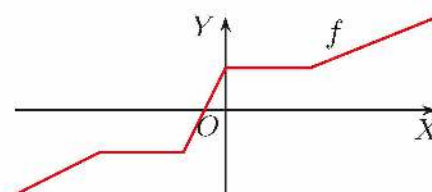


$$f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3$$

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

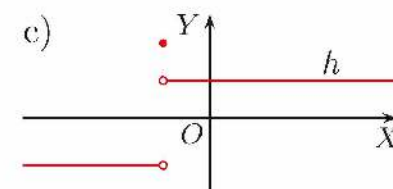
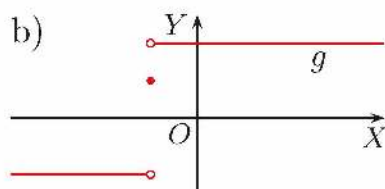
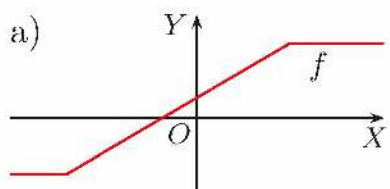
$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$



Przykład funkcji niemalejącej

Ćwiczenie 2

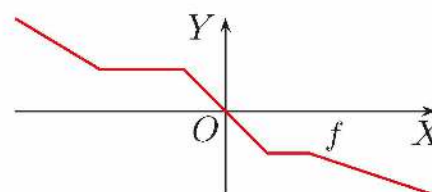
Czy na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji niemalejącej?



Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$

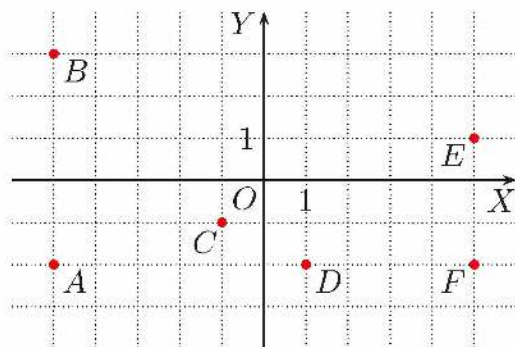


Przykład funkcji nierosnącej

Ćwiczenie 3

a) Naskicuj wykres funkcji nierosnącej $f: \langle -5; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów $A-F$.

b) Czy można naskicować wykres funkcji niemalejącej $f: \langle -5; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów $A-F$?



Uwaga. Każda funkcja malejąca jest funkcją nierosnącą, a każda funkcja rosnąca jest funkcją niemalejącą. Funkcja stała jest zarówno funkcją niemalejącą, jak i nierosnącą.

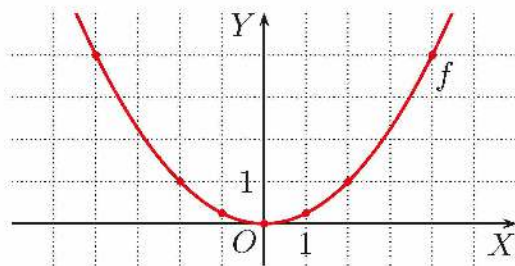
Definicja

Funkcje rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

Funkcja f rozpatrywana w całej swojej dziedzinie nie jest monotoniczna. Jest to funkcja **przedziałami monotoniczna**.



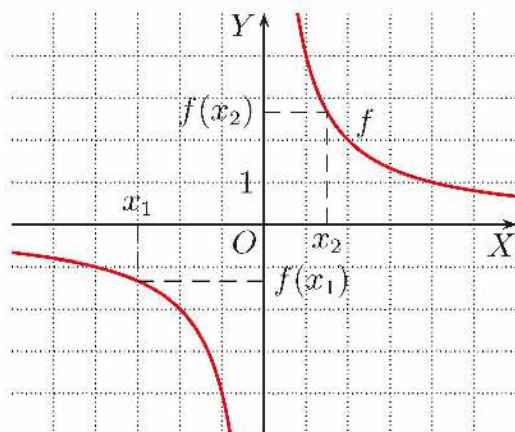
W przedziale $(-\infty; 0)$ funkcja f maleje, a w przedziale $\langle 0; \infty)$ – rośnie. Przedziały te nazywamy przedziałami monotoniczności tej funkcji.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$. Funkcja ta jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$.

Jednak funkcja f nie jest funkcją malejącą w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Na przykład dla pary argumentów x_1, x_2 , mamy:

$$x_1 < x_2 \text{ i } f(x_1) < f(x_2)$$

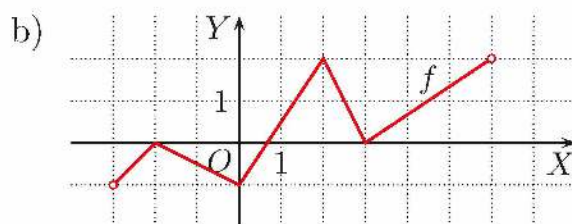
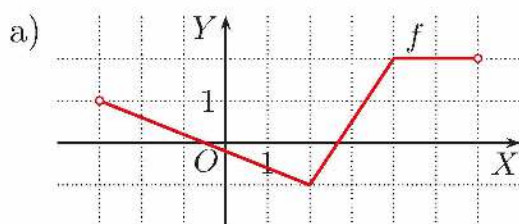


Ćwiczenie 4

Naskicuj wykres dowolnej funkcji, która jest przedziałami rosnącą, ale nie jest funkcją monotoniczną.

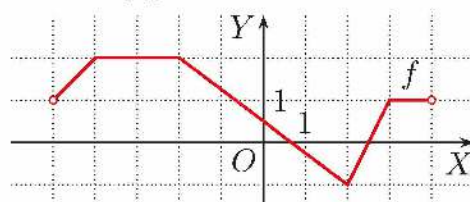
Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $f: (-3; 6) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.

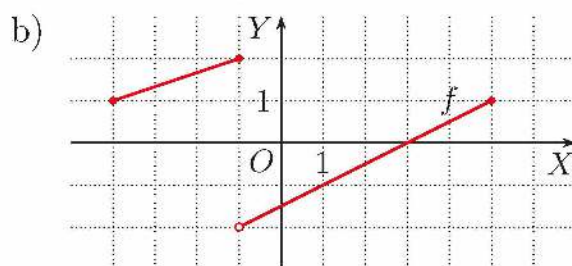
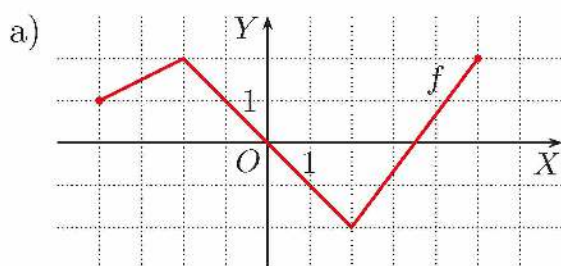


2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-5; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj jej przedziały monotoniczności. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

- A. Funkcja f jest nierosnąca w $\langle -4; 2 \rangle$.
 B. Funkcja f jest niemalejąca w $(-5; -2)$.
 C. Funkcja f jest niemalejąca w $\langle 2; 4 \rangle$.



- D** 3. Dany jest wykres funkcji $f: \langle -4; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Uzasadnij, że funkcja ta nie jest monotoniczna. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.

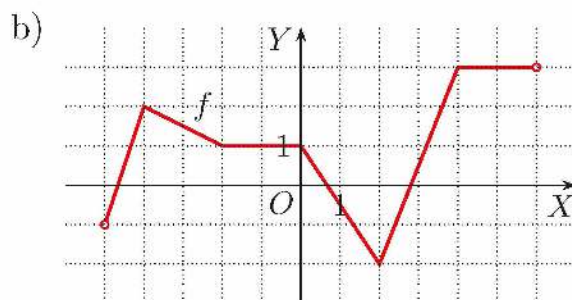
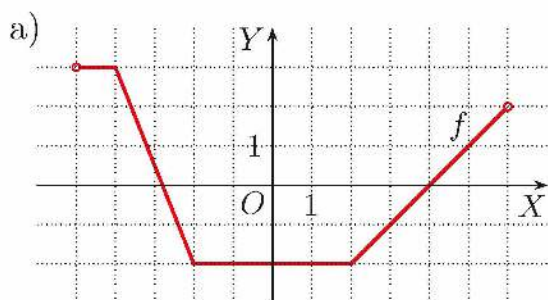


Powtórzenie

4. Naskicuj wykres funkcji f . Czy jest to funkcja monotoniczna?

a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x < 0 \\ 2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{4}x - 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

5. Odczytaj z wykresu funkcji $f: (-5; 6) \rightarrow \mathbf{R}$ przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, jest niemalejąca.



4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

■ Odczytywanie dziedziny funkcji

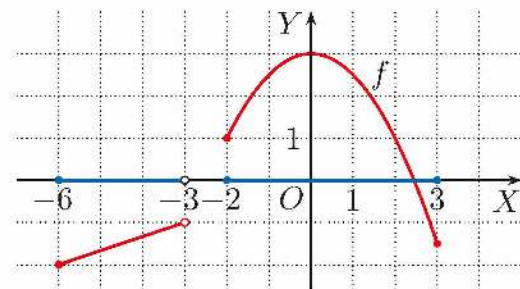
Dziedzina funkcji $y = f(x)$ to zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja jest określona. Dziedzinę funkcji f oznaczamy przez D lub D_f .

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Jej dziedziną jest zbiór:

$$D = \langle -6; -3 \rangle \cup \langle -2; 3 \rangle$$

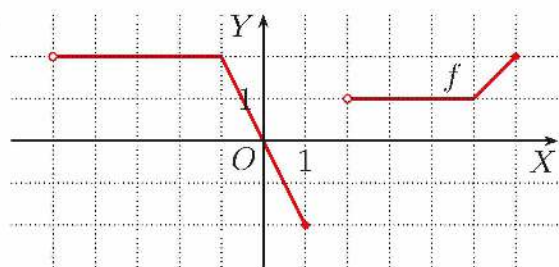
Na rysunku został on zaznaczony na osi OX kolorem niebieskim.



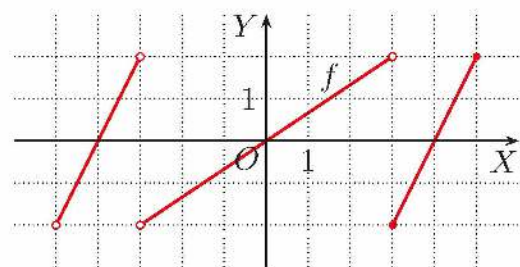
Ćwiczenie 1

Z wykresu funkcji f odczytaj jej dziedzinę.

a)



b)



■ Odczytywanie zbioru wartości funkcji

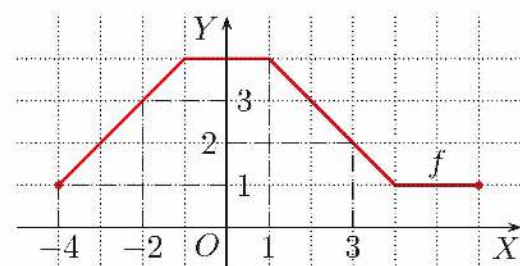
Z wykresu funkcji można odczytać nie tylko wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla danego argumentu, ale także zbiór wszystkich liczb, które są wartościami tej funkcji. Zbiór ten nazywamy **zbiorem wartości** funkcji.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z niego $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$ i $f(3)$ oraz zbiór wartości funkcji f .

Z wykresu odczytujemy wartości funkcji: $f(-4) = 1$, $f(-2) = 3$, $f(1) = 4$ i $f(3) = 2$.

Wartościami funkcji f są wszystkie liczby y spełniające warunek $1 \leq y \leq 4$. Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 1; 4 \rangle$.



Definicja

Zbiór wartości funkcji $f: D \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in D$, że $f(x) = y$.

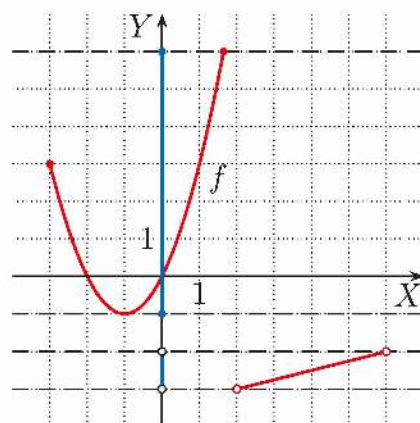
Zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez $f(D)$ lub $f(D_f)$.

Przykład 3

Z wykresu funkcji f odczytaj jej zbiór wartości.

Przy odczytywaniu zbioru wartości funkcji wygodnie jest poprowadzić odpowiednie proste poziome (równoległe do osi OX).

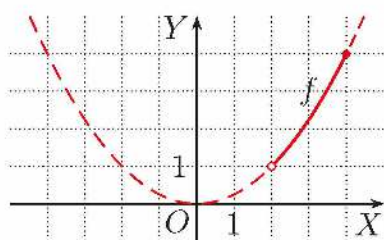
Zbiór wartości $f(D) = (-3; -2) \cup \langle -1; 6 \rangle$ został zaznaczony na osi OY kolorem niebieskim.



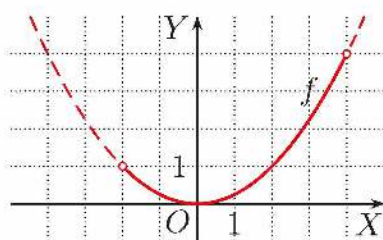
Ćwiczenie 2

Linia ciągłą narysowano wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f .

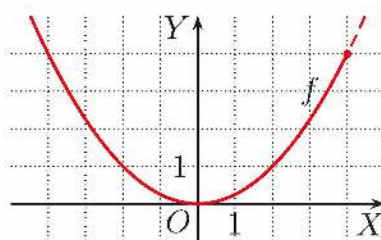
a) $D = (2; 4)$



b) $D = (-2; 4)$

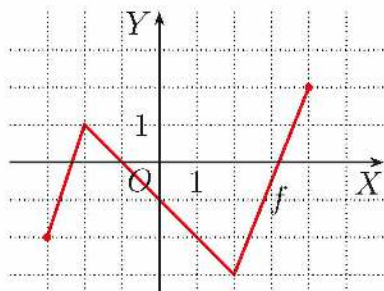


c) $D = (-\infty; 4)$

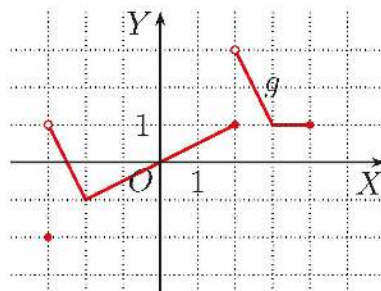


Ćwiczenie 3

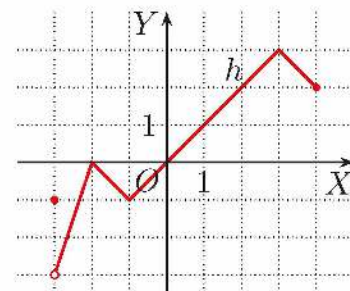
Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji f , g i h określonych w przedziale $\langle -3; 4 \rangle$. Najmniejsze wartości każdej z tych funkcji podano pod wykresami. Odczytaj ich największe wartości. Dla jakich argumentów są one przyjmowane?



Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -3 . Jest ona przyjmowana dla $x = 2$.



Najmniejsza wartość funkcji g jest równa -2 . Jest ona przyjmowana dla $x = -3$.



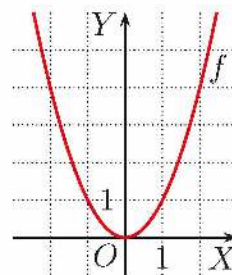
Funkcja h nie przyjmuje najmniejszej wartości.

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x^2$ o dziedzinie $D = \mathbf{R}$.

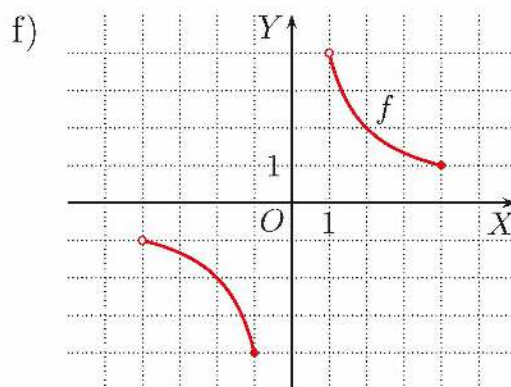
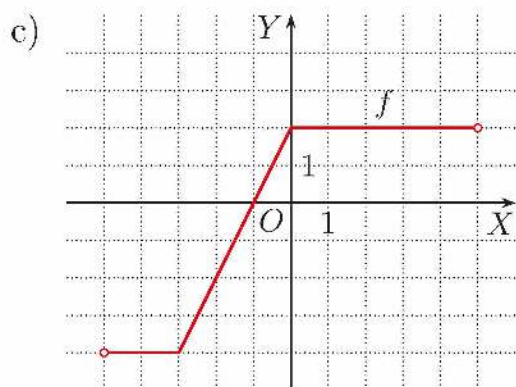
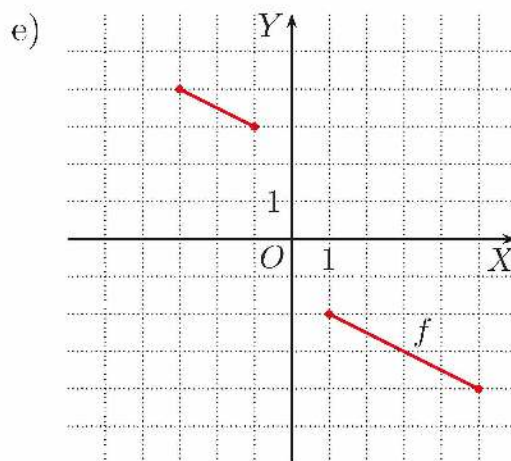
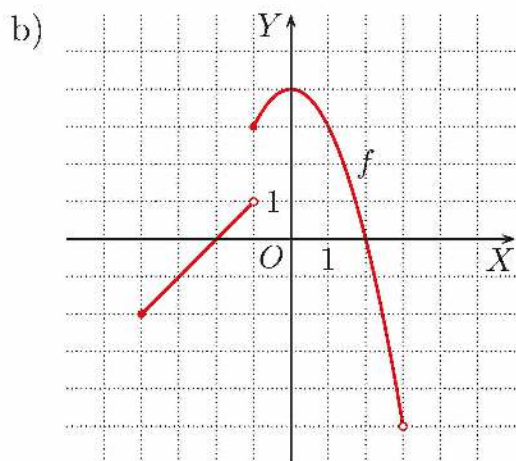
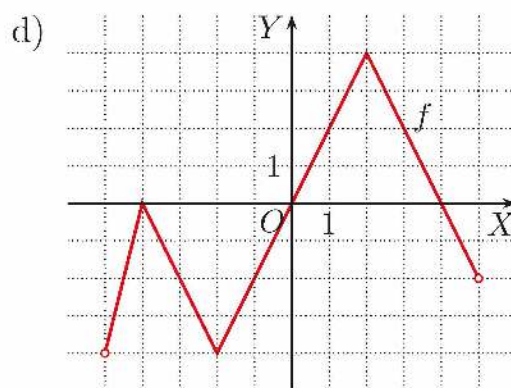
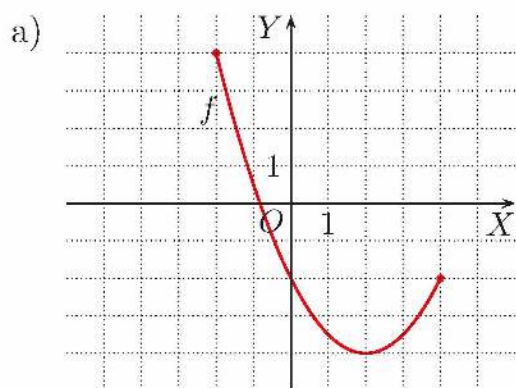
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$.

Najmniejsza wartość funkcji f równa 0 jest przyjmowana dla $x = 0$. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.

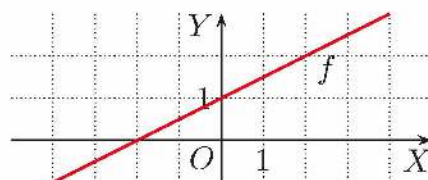


Zadania

1. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.

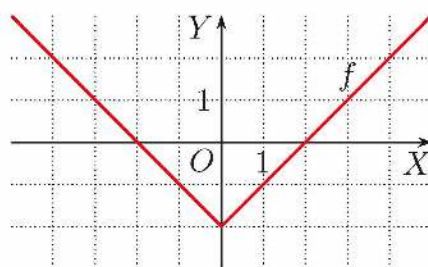


2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Podaj zbiór wartości funkcji danej tym samym wzorem, jeśli jej dziedziną jest zbiór D .



- a) $D = \langle -4; 4 \rangle$ b) $D = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 0; 4 \rangle$ c) $D = \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$
3. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.
- a) $D = \langle -4; 6 \rangle$ b) $D = \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$ c) $D = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$
4. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = 2x - 4$. Podaj jej dziedzinę, jeśli zbiór wartości jest równy:
- a) $\langle -3; 4 \rangle$, b) $\langle -2; 2 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$, c) $\langle 0; 2 \rangle \cup \{3\}$, d) $\{0, 2, 3\}$.

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = |x| - 2$. Dla funkcji g danej tym samym wzorem podaj wartości największą i najmniejszą oraz argumenty, dla których są one przyjmowane, jeśli dziedziną tej funkcji jest zbiór:



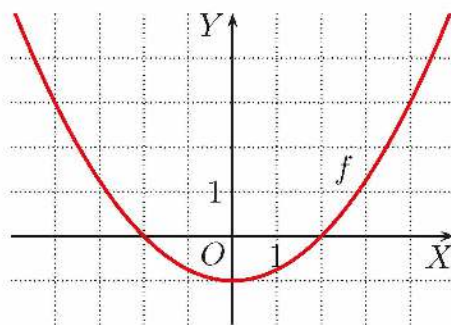
- a) $D = \langle -4; -1 \rangle$, b) $D = \langle -3; 4 \rangle$, c) $D = \langle -2; \infty \rangle$.
6. Naskicuj wykres dowolnej funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, której zbiór wartości jest równy:
- a) $\langle -2; 6 \rangle$, b) $\langle -4; 0 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$, c) $\langle -2; 3 \rangle \cup \{5\}$, d) $\{0, 4\}$.

Powtórzenie

7. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.

- a) $D = \langle 0; 4 \rangle$ b) $D = \langle -1; 2 \rangle$ c) $D = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$

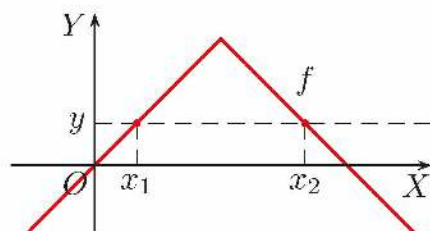
8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Wyznacz zbiór wartości funkcji $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$, której dziedziną jest przedział:



- a) $\langle 2; 4 \rangle$, c) $\langle -4; 2 \rangle$,
b) $\langle -2; 0 \rangle$, d) $\langle -\infty; 4 \rangle$.

4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

Na podstawie wykresu funkcji możemy podać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość. Zwróć uwagę, że funkcja f , której wykres przedstawiono obok, przyjmuje wskazaną wartość y dla dwóch argumentów: x_1 i x_2 .

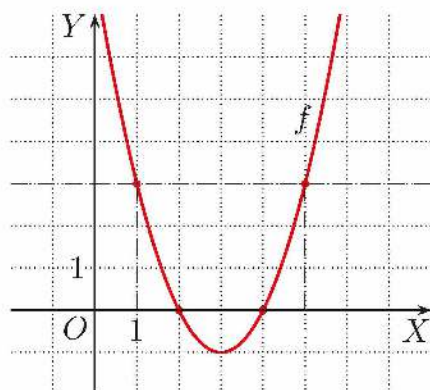


Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3 oraz podaj jej miejsca zerowe.

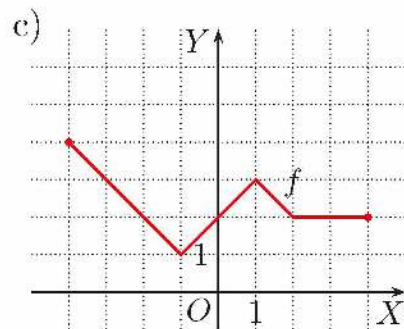
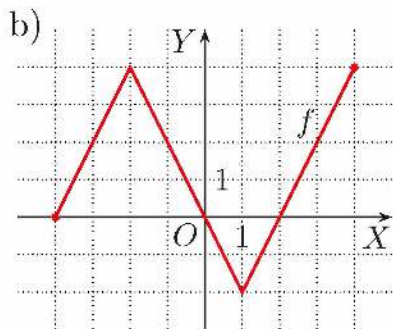
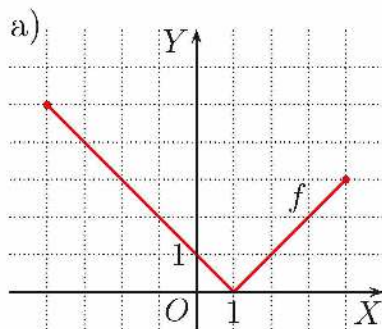
Rysujemy prostą $y = 3$. Przecina ona wykres funkcji w punktach $(1, 3)$ i $(5, 3)$. Zatem funkcja f przyjmuje wartość równą 3 dla $x = 1$ i $x = 5$.

Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby 2 i 4.



Ćwiczenie 1

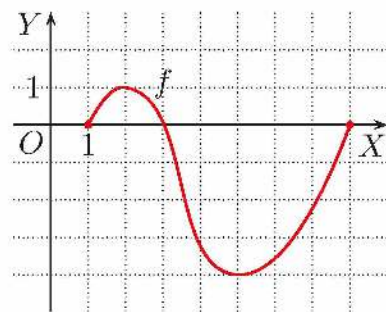
Na podstawie wykresu funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ podaj jej miejsca zerowe oraz te argumenty x , dla których spełnione jest równanie $f(x) = 2$.



Przykład 2

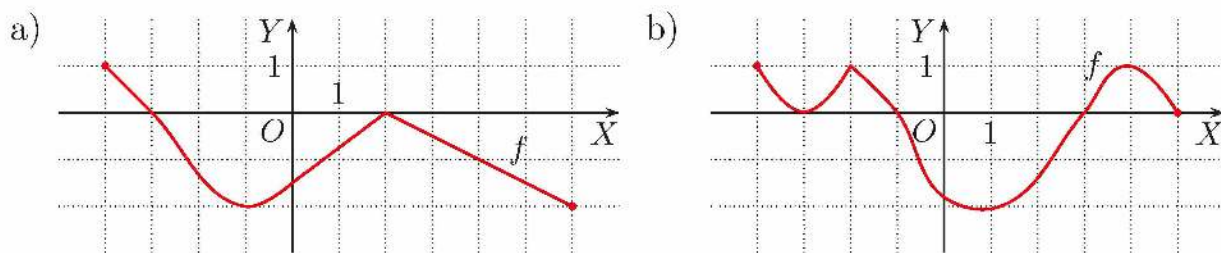
Dany jest wykres funkcji $f: \langle 1; 8 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytujemy z niego:

- równanie $f(x) = 0$ jest spełnione dla $x = 1$,
 $x = 3$, $x = 8$,
- nierówność $f(x) > 0$ zachodzi dla $x \in (1; 3)$,
- nierówność $f(x) \leq 0$ zachodzi dla $x \in \{1\} \cup \langle 3; 8 \rangle$.



Ćwiczenie 2

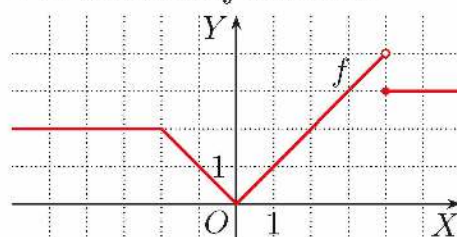
Z wykresu funkcji f odczytaj jej miejsca zerowe, zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ oraz nierówności $f(x) \leq 0$.



Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -2; 4) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty) \end{cases}$$



Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$ oraz nierówności $f(x) \geq 2$.

Nierówność $f(x) > 2$ jest spełniona dla $x \in (2; \infty)$, a nierówność $f(x) \geq 2$ zachodzi dla $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z niego rozwiązanie równania:

- $f(x) = 3$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 3$,
- $f(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -5) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -5; 3) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 3; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -1; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$

Przykład 4

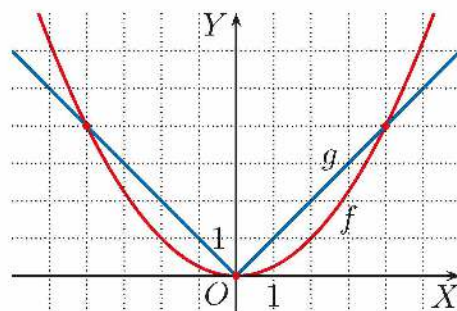
Rozwiąż graficznie równanie $\frac{1}{4}x^2 = |x|$ oraz nierówność $\frac{1}{4}x^2 < |x|$.

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$.

Z wykresów odczytujemy:

$$\frac{1}{4}x^2 = |x| \text{ dla } x = -4, x = 0, x = 4$$

$$\frac{1}{4}x^2 < |x| \text{ dla } x \in (-4; 0) \cup (0; 4)$$



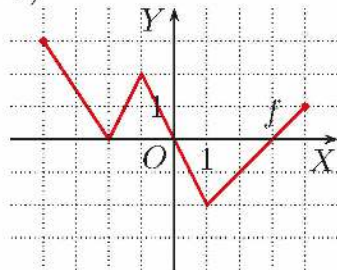
Ćwiczenie 4

Odczytaj z wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$ z przykładu 4 rozwiązanie nierówności $\frac{1}{4}x^2 \geq |x|$.

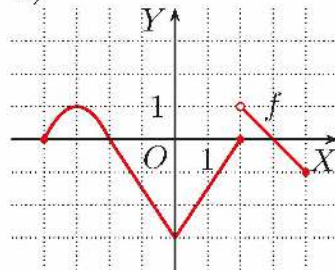
Zadania

1. Z wykresu funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ odczytaj jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) \geq 0$.

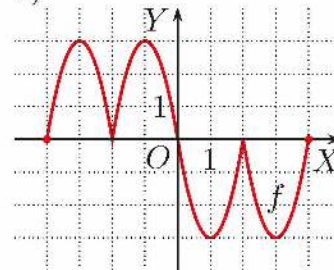
a)



b)



c)



2. Naskicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania $f(x) = -1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 3$.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = -x - 2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

3. Naskicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = 1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -4; 1 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |2x| & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$

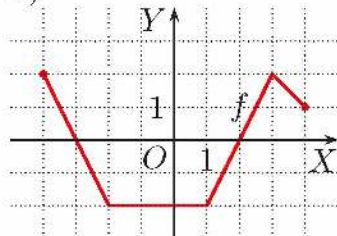
b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in \langle -4; 2 \rangle \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |2x| & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

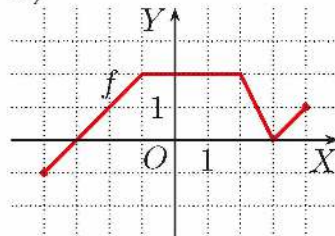
Powtórzenie

4. Odczytaj z wykresu funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności $f(x) < 0$ i $f(x) \leq 0$.

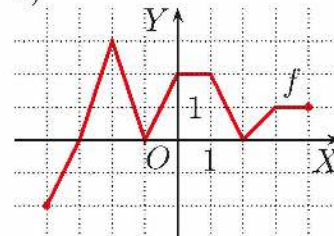
a)



b)



c)



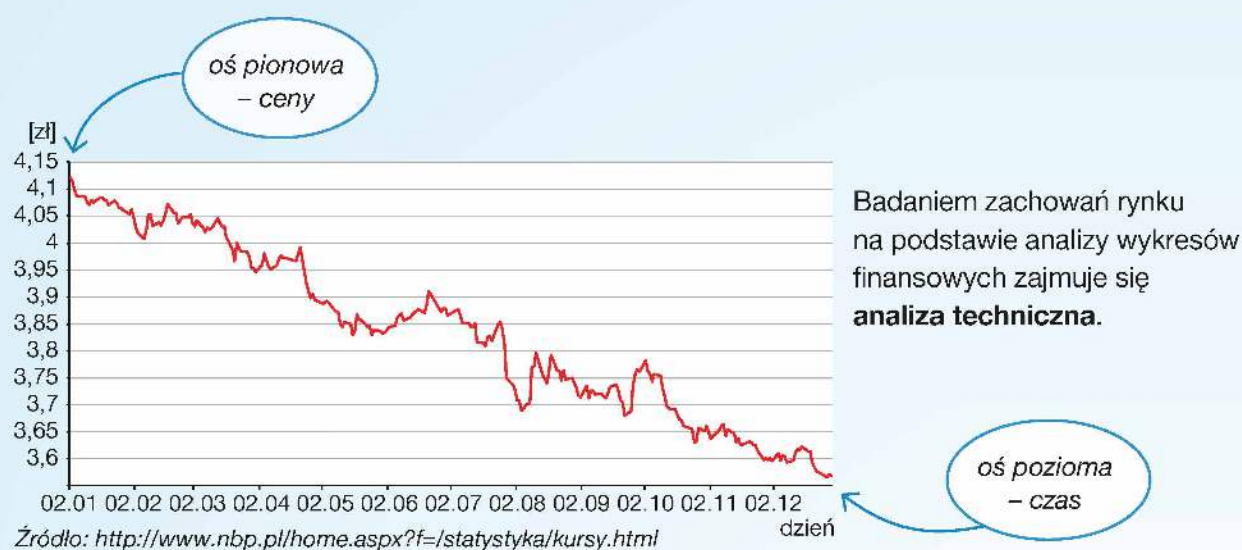
5. Naskicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = 2$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$

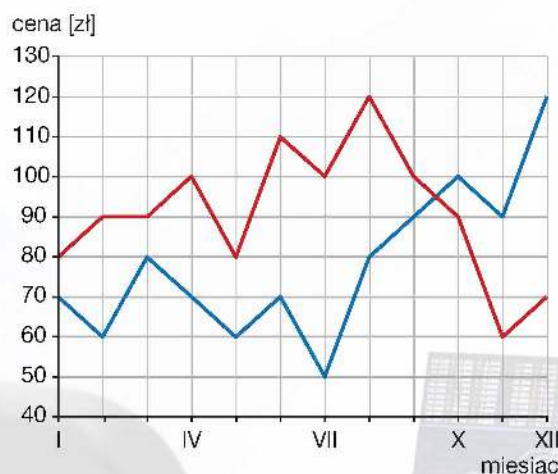
Wykresy jako nośnik informacji finansowych

Wiele informacji finansowych jest prezentowanych w postaci wykresów. Poniżej przedstawiono zmiany kursu franka szwajcarskiego w stosunku do złotego w okresie od 2 stycznia do 29 grudnia 2017 r. Taki wykres składa się z bardzo wielu punktów odpowiadających kursom franka w kolejnych dniach – zwyczajowo łączy się je odcinkami. Poprawia to czytelność wykresu.



1 Na rysunku przedstawiono ceny akcji spółki X (kolor czerwony) i spółki Y (kolor niebieski) na koniec kolejnych miesięcy 2018 roku.

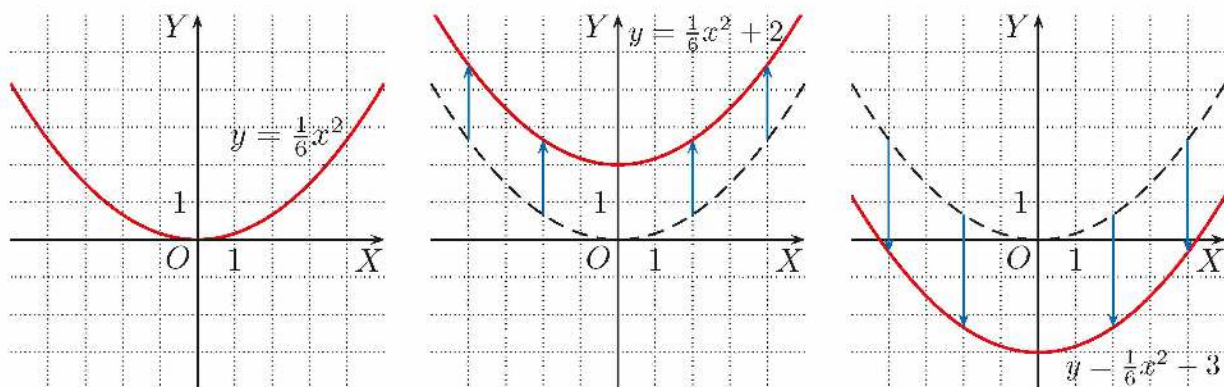
- a) Jaki jest największy możliwy zysk przy zakupie i sprzedaży po 3 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaki – spółki Y?
- b) Jaka jest największa możliwa strata przy zakupie i sprzedaży po 5 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaka – spółki Y?



4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2$, $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ oraz $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$.



Wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ i $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$ wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

Twierdzenie

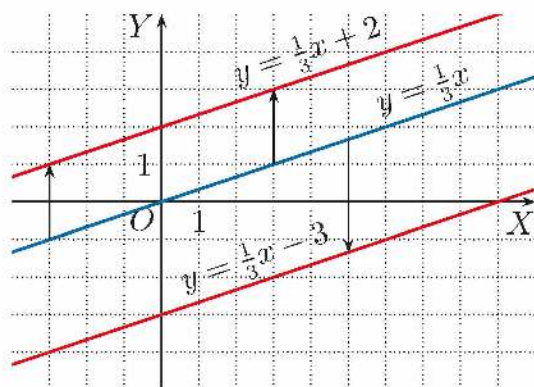
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY.

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY.

Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x - 3$.



Ćwiczenie 1

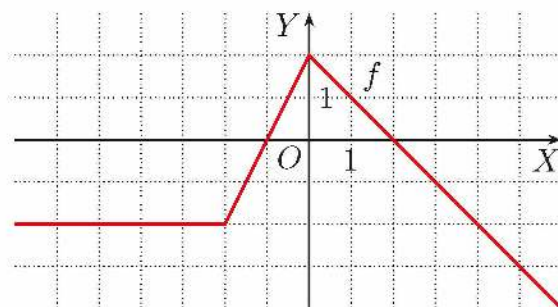
Stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$, naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji:

- a) $y = |x| + 2$, b) $y = |x| - 2$, c) $y = |x| - 3$, d) $y = |x| + \frac{1}{2}$.

Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.
Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej zbiór wartości.

- a) $g(x) = f(x) + 2$
b) $g(x) = f(x) - 2$
c) $g(x) = f(x) - 3$



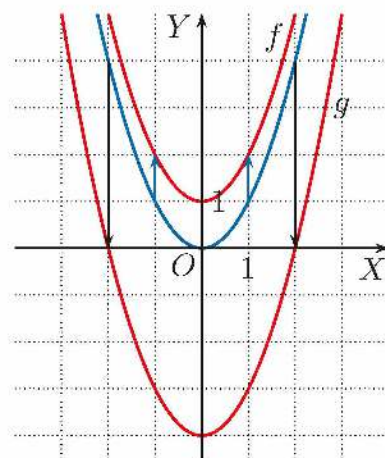
2. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 1$ oraz $h(x) = f(x) - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji f , g i h .

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |2x| & \text{dla } x \in \langle -1; 2 \rangle \\ 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |\frac{1}{2}x| & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x|$, a następnie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |x| + a$ oraz podaj wartość parametru a , jeśli:

- a) zbiorem wartości funkcji g jest przedział $\langle 1; \infty \rangle$,
b) miejscami zerowymi funkcji g są liczby -4 i 4 .

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = x^2$ (kolor niebieski) oraz wykresy funkcji f i g (kolor czerwony). Podaj wzory funkcji f i g .



5. Naszkicuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie wykres funkcji f . Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ dla $m \in \{-3, -1, 2\}$.

- a) $f(x) = x^2 + 2$ c) $f(x) = x^2 - 3$
b) $f(x) = x^2 - 1$ d) $f(x) = x^2 - 9$

Powtórzenie

6. Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = \frac{1}{2}x + 5$, b) $y = \frac{1}{2}x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x - 6$, d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

7. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}|x|$, a następnie wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 3$

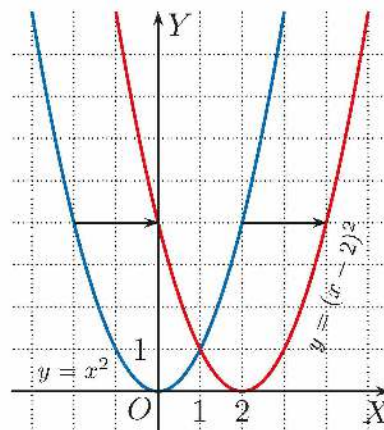
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x - 2)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x - 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9



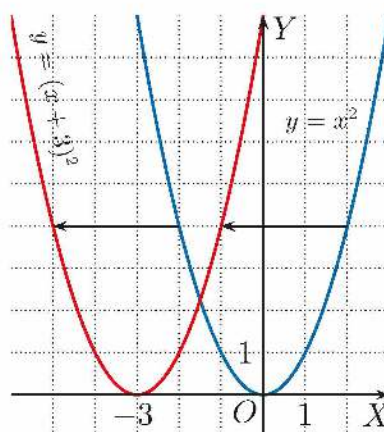
Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x - 2)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x + 3)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = (x + 3)^2$	9	4	1	0	1	4	9

Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x + 3)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX.



Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX.

Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = |x|$. Podaj miejsce zerowe funkcji g .

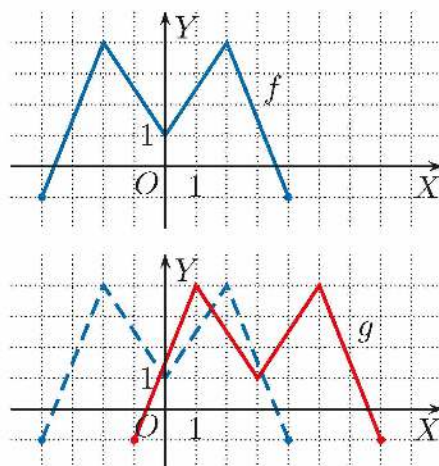
- a) $g(x) = |x - 1|$ b) $g(x) = |x + 2|$ c) $g(x) = |x + 3|$ d) $g(x) = |x - 4|$

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ i podaj jej dziedzinę.

Wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ otrzymujemy, przesuając wykres funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji g jest przedział $\langle -1; 7 \rangle$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji f z przykładu 3. Podaj dziedzinę funkcji g .

- a) $g(x) = f(x - 2)$ b) $g(x) = f(x + 3)$ c) $g(x) = f(x + 4)$

Ćwiczenie 3

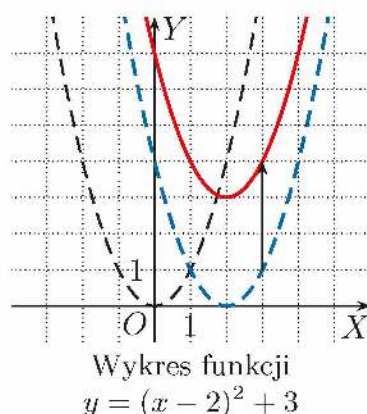
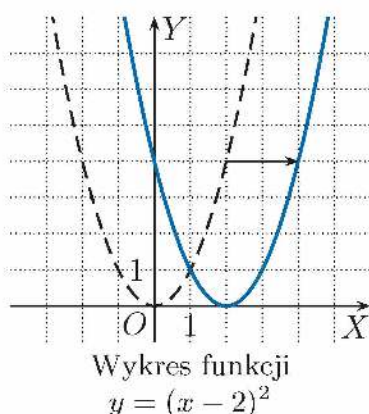
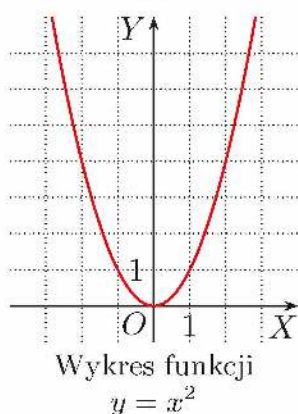
Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x - 3)$ i $h(x) = f(x + 2)$.

- a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $y = (x - 2)^2 + 3$.

Wykres funkcji $y = x^2$ przesuwamy najpierw o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX , a następnie otrzymany wykres przesuwamy o 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY .



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ b) $f(x) = (x + 3)^2 - 2$ c) $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naskicuj wykres funkcji g . Podaj jej miejsce zerowe.

a) $g(x) = (x - 1)^2$ b) $g(x) = (x + 1)^2$ c) $g(x) = (x + 2)^2$

2. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |2x|$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naskicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = |2(x - 3)|$ b) $g(x) = |2(x - 2)|$ c) $g(x) = |2(x + 2)|$

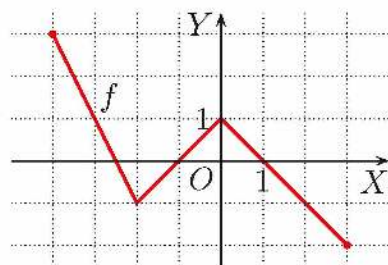
3. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |3x|$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naskicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = |3(x - 1)|$ b) $g(x) = |3x + 3|$ c) $g(x) = |3x + 12|$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 3 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naskicuj wykres funkcji g i podaj jej dziedzinę.

a) $g(x) = f(x - 2)$ c) $g(x) = f(x + 1)$

b) $g(x) = f(x - 3)$ d) $g(x) = f(x + 2)$



5. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsca zerowe i zbiór wartości.

a) $f(x) = |x + 2| + 3$ b) $f(x) = |x - 2| - 3$ c) $f(x) = |x + 1| - 2$

6. Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$:

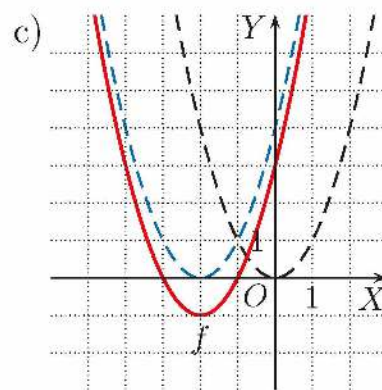
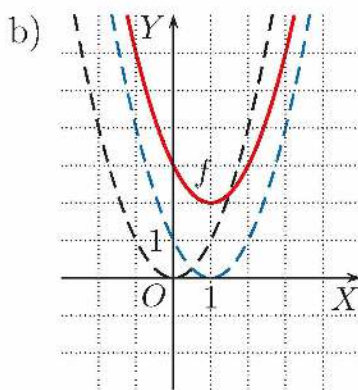
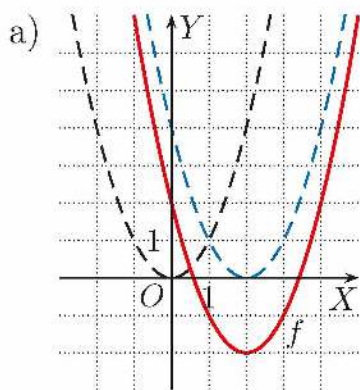
a) o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w górę,

b) o 4 jednostki w lewo i 3 jednostki w dół,

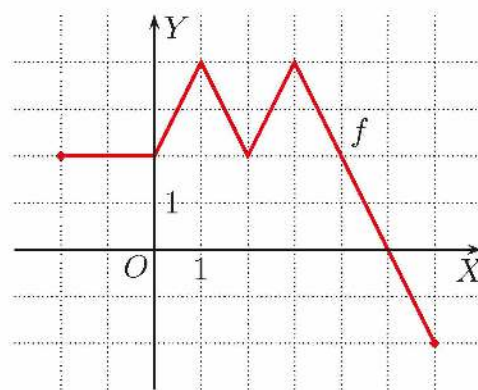
c) o 1 jednostkę w lewo i 2 jednostki w górę.

Podaj wzór funkcji g i naskicuj jej wykres.

7. Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$. Podaj wzór funkcji f .



8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g , odczytaj jej dziedzinę i zbiór wartości.



- a) $g(x) = f(x + 2) + 1$
 b) $g(x) = f(x + 4) - 2$
 c) $g(x) = f(x - 1) + 2$
 d) $g(x) = f(x - 2) - 4$

9. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji f i osią OX .

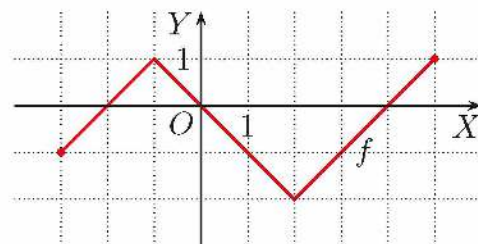
- a) $f(x) = |x - 3| - 2$ b) $f(x) = |x + 1| - 4$

10. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji f i g .

- a) $f(x) = |2x|$ i $g(x) = |x - 2| + 1$
 b) $f(x) = |2x| - 2$ i $g(x) = |x - 1| + 1$

Powtórzenie

11. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -3; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji g .



- a) $g(x) = f(x - 3)$
 b) $g(x) = f(x + 2)$

12. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2x|$, a następnie wykresy funkcji g i h . Podaj zbiory wartości oraz miejsca zerowe funkcji g i h .

- a) $g(x) = |2(x + 1)|$, $h(x) = |2(x + 1)| - 1$
 b) $g(x) = |2(x - 4)|$, $h(x) = |2(x - 4)| - 2$

13. Naszkicuj wykresy funkcji f i g .

- a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$, $g(x) = f(x + 3)$
 b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 1 & \text{dla } x \in \langle -1; \infty \rangle \end{cases}$, $g(x) = f(x - 5)$
 c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x & \text{dla } x \in \langle -1; \infty \rangle \end{cases}$, $g(x) = f(x - 2) + 4$
 d) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ -x & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$, $g(x) = f(x + 3) + 1$

4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX

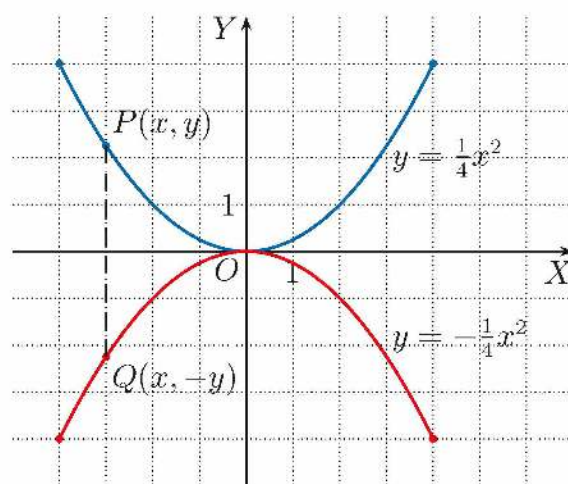
Przykład 1

Naszkicuj wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ określonych dla $x \in \langle -4; 4 \rangle$.

W tabeli obok podano wartości tych funkcji dla wybranych argumentów.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Dla porównania wykresy tych funkcji narysowano w jednym układzie współrzędnych. Zauważmy, że wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ są symetryczne względem osi OX. Punktowi $P(x, y)$, należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$, odpowiada punkt $Q(x, -y)$, należący do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{4}x^2$.

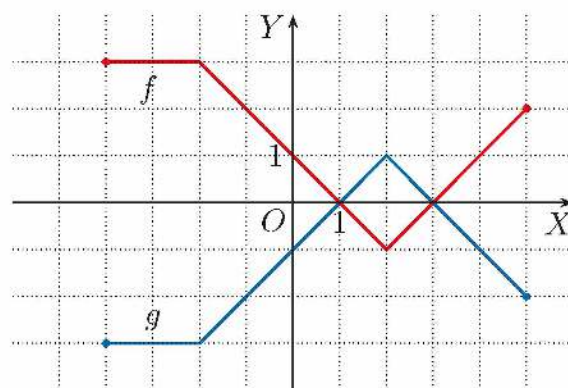


Twierdzenie

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f oraz wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiór wartości każdej z tych funkcji.



Ćwiczenie 2

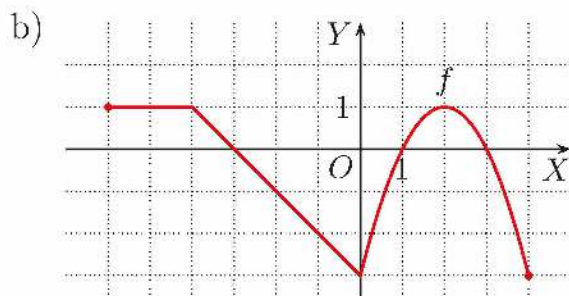
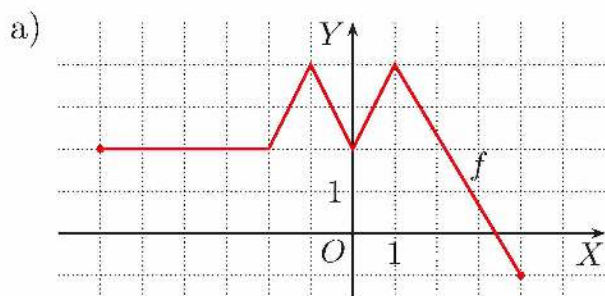
Naszkicuj wykresy funkcji f i g oraz podaj ich zbiory wartości.

a) $f(x) = |x|$ i $g(x) = -|x|$

b) $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2$

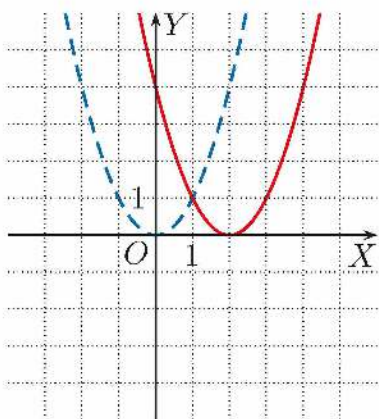
Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -6; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie kolejno wykresy funkcji: $g(x) = f(x - 2)$, $h(x) = f(x - 2) - 4$, $k(x) = -[f(x - 2) - 4]$.

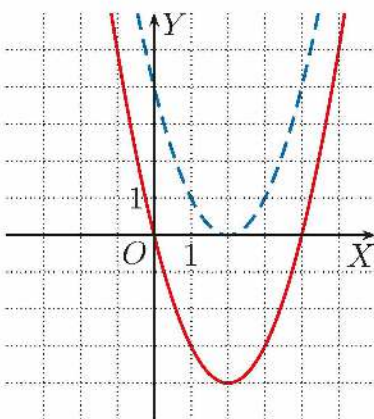


Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:

$$f(x) = x^2$$

linią ciągłą wykres funkcji:

$$g(x) = (x - 2)^2$$

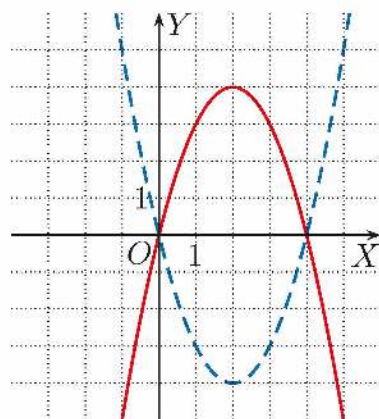


Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:

$$g(x) = (x - 2)^2$$

linią ciągłą wykres funkcji:

$$h(x) = (x - 2)^2 - 4$$



Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:

$$h(x) = (x - 2)^2 - 4$$

linią ciągłą wykres funkcji:

$$k(x) = -[(x - 2)^2 - 4]$$

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty \rangle \end{cases}$, a następnie kolejno wykresy funkcji:

a) $g(x) = f(x) - 3$, $h(x) = f(x - 2) - 3$, $k(x) = -[f(x - 2) - 3]$,

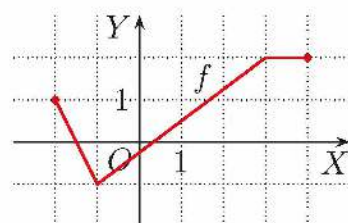
b) $g(x) = f(x + 3)$, $h(x) = f(x + 3) + 1$, $k(x) = -[f(x + 3) + 1]$.

Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji g .

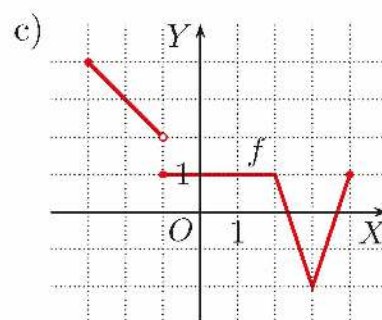
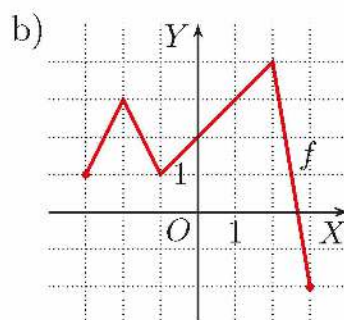
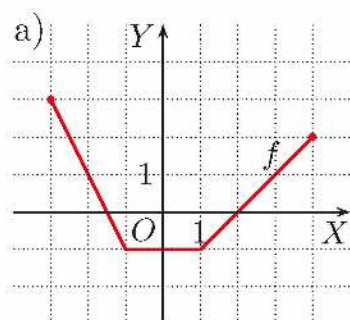
a) $g(x) = -f(x - 1)$

b) $g(x) = -f(x + 2)$



Zadania

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naskicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz podaj zbiory wartości funkcji f i g .



2. Naskicuj wykresy funkcji f i $g(x) = -f(x)$. Podaj punkty wspólne tych wykresów.

a) $f(x) = |x| - 1$

b) $f(x) = |x| + 2$

c) $f(x) = |x - 2|$

3. Naskicuj wykres funkcji f oraz wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f i g .

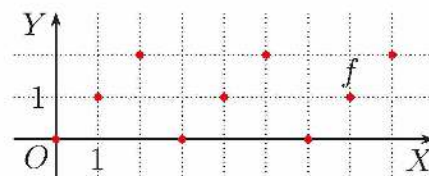
a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \leq 0 \\ 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leq -2 \\ -x & \text{dla } -2 < x \leq 3 \\ -3 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

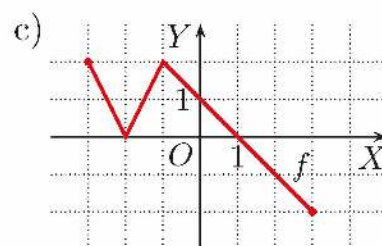
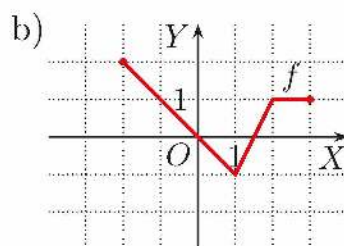
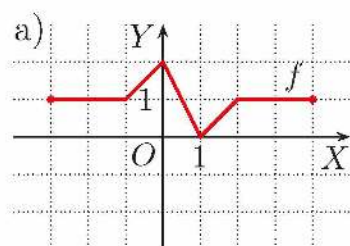
d) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \leq -2 \\ -2x & \text{dla } -2 < x \leq 1 \\ x - 3 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f , która każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez 3. Naskicuj wykres funkcji $g(n) = -f(n)$.



Powtórzenie

5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naskicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiór wartości funkcji g oraz jej przedziały monotoniczności.



4.10. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY

Przykład 1

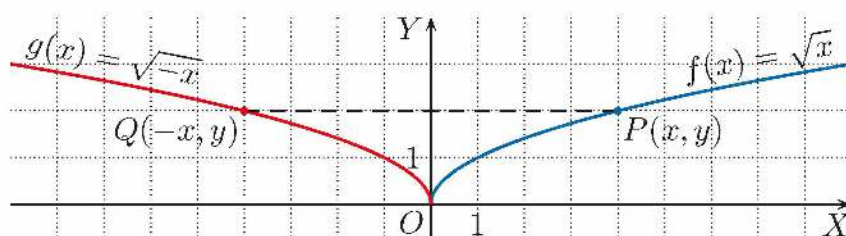
Naszkicuj wykres funkcji $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x}$ oraz wykres funkcji $g: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $g(x) = \sqrt{-x}$.

Zauważmy, że:

$$g(-4) = f(4) = 2$$

$$g(-1) = f(1) = 1$$

$$g\left(-\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$



Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OY – punktowi $P(x, y)$ należącemu do wykresu funkcji f odpowiada punkt $Q(-x, y)$ należący do wykresu funkcji g .

Twierdzenie

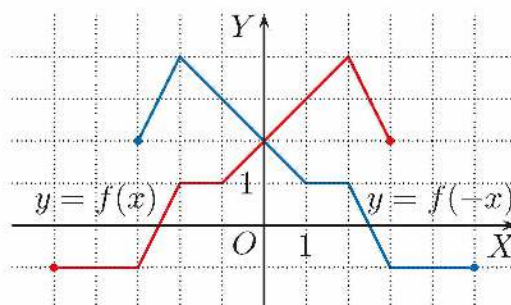
Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY .

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$ (kolor czerwony) oraz wykres funkcji $y = f(-x)$ (kolor niebieski).

Zwróć uwagę na to, że dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -5; 3 \rangle$, a dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $\langle -3; 5 \rangle$.

Funkcje $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ mają takie same zbiory wartości.

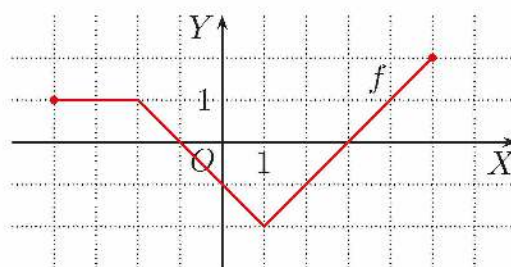


Ćwiczenie 1

Dana jest funkcja $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$, której miejscami zerowymi są liczby: $-1, 0, 3$ i 5 . Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $g(x) = f(-x)$.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj jej dziedzinę i miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności funkcji f i g .

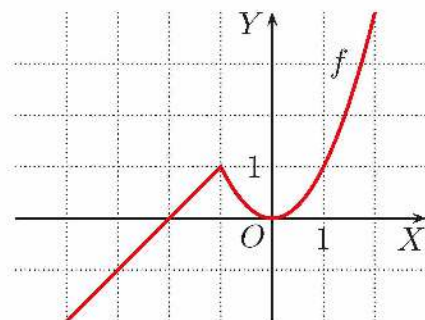


Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

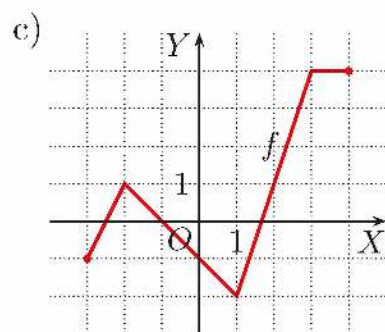
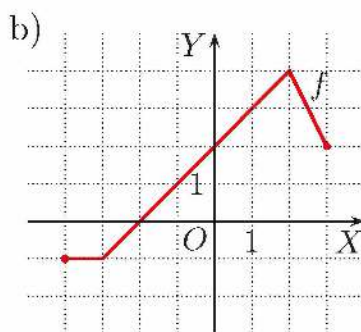
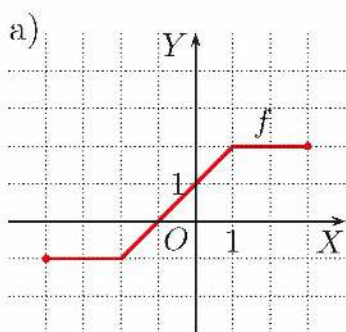
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x^2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$$

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ i podaj jej wzór.



Zadania

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz podaj dziedziny funkcji f i g .



2. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz podaj jej wzór.

a) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in \langle -5; -3 \rangle \\ x & \text{dla } x \in \langle -3; 3 \rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \\ -x & \text{dla } x \in \langle -2; 6 \rangle \end{cases}$

3. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie kolejno wykresy funkcji g i h .

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x-2)$, $h(x) = f(-x-2)$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x+2)$, $h(x) = f(-x+2)$

Powtórzenie

4. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ i $h(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f , g i h .

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \rangle \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -1 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$

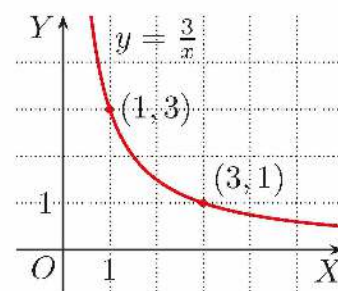
b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ x & \text{dla } x \in \langle 2; 3 \rangle \\ 3 & \text{dla } x \in \langle 3; \infty \rangle \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1; 4 \rangle \\ -4 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \rangle \end{cases}$

4.11. Proporcjonalność odwrotna

Przykład 1

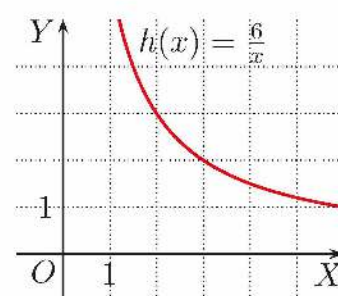
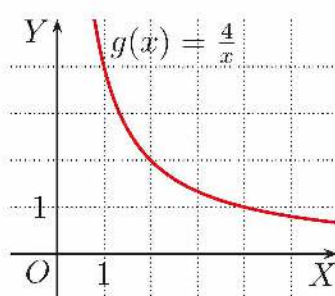
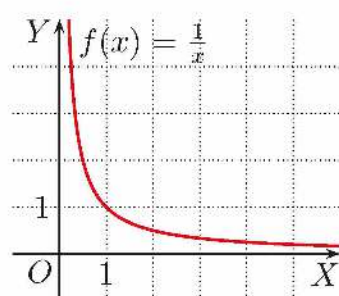
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, gdzie $x > 0$. Zwróć uwagę, że jeśli punkt (x, y) należy do wykresu tej funkcji, to jego współrzędne spełniają zależność $x \cdot y = 3$.

Jedynymi punktami o współrzędnych całkowitych należącymi do wykresu tej funkcji są punkty $(1, 3)$ i $(3, 1)$.



Ćwiczenie 1

Funckje f , g i h , których wykresy przedstawiono poniżej, określone są dla $x > 0$. Podaj punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z nich.



Definicja

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz a jest stałą dodatnią, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości x i y nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to ich iloczyn jest stały. Wzór proporcjonalności odwrotnej możemy również zapisać w postaci $x \cdot y = a$.

Czy wiesz, że...

Dwie masy m_1 i m_2 umieszczone na równoważni w odległościach r_1 i r_2 od punktu podparcia znajdują się w równowadze, jeśli zachodzi równość:

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

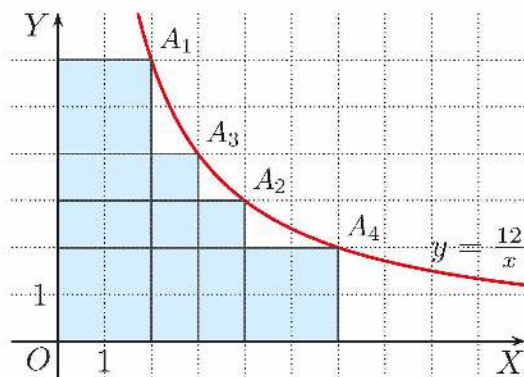
Oznacza to, że masa i jej odległość od punktu podparcia są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Odkrycie tego prawa (zwanego też zasadą dźwigni) zawdzięczamy Archimedesowi (ok. 287 r. p.n.e. – ok. 212 r. p.n.e.).



Przykładem wielkości odwrotnie proporcjonalnych są długości x i y boków prostokąta o ustalonym polu P . Zachodzi wówczas zależność $x \cdot y = P$.

Przykład 2

Rozpatrzmy prostokąty, każdy o polu równym 12 i dwóch bokach x , y zawartych w osiach układu współrzędnych (rysunek obok). Wierzchołki A_1 , A_2 , A_3 i A_4 tych prostokątów należą do wykresu funkcji $y = \frac{12}{x}$. Ich współrzędne (x, y) spełniają zależność: $x \cdot y = 12$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, gdzie $x > 0$, i narysuj prostokąt, którego jeden z wierzchołków należy do wykresu tej funkcji, a dwa boki zawierają się w osiach układu współrzędnych. Ile jest równe pole tego prostokąta? Czy odpowiedź zależy od wyboru wierzchołka należącego do wykresu funkcji f ?

Zauważ, że jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to wraz ze wzrostem jednej z nich proporcjonalnie maleje druga.

Przykład 3

W tabeli podano, ile kilogramów winogron możemy kupić za 24 zł w zależności od ceny za jeden kilogram.

x – cena [zł]	4	5	6	8	12
y – liczba [kg]	6	4,8	4	3	2

Wraz ze wzrostem ceny za kilogram x proporcjonalnie maleje liczba kilogramów winogron y , które możemy kupić.

Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne: $y = \frac{24}{x}$.

Ćwiczenie 3

Na zakup jabłek przeznaczono kwotę 9 zł. Niech x oznacza cenę za kilogram, a y – liczbę kilogramów jabłek, które możemy kupić.

x [zł]	1,5	2	3	4,5	6
y [kg]	?	?	?	?	1,5

a) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{9}{x}$, gdzie $x > 0$, i zaznacz na nim punkty odpowiadające wartościom z tabeli.

Zadania

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Przecrysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj wzór tej proporcjonalności i naskicuj jej wykres.

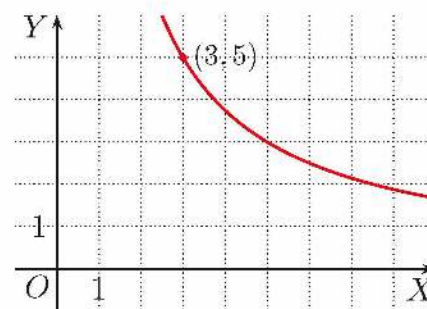
a)

x	1	2	2,5	4	5
y	?	?	3,2	?	?

b)

x	1	2	2,5	4	5
y	?	?	?	2,5	?

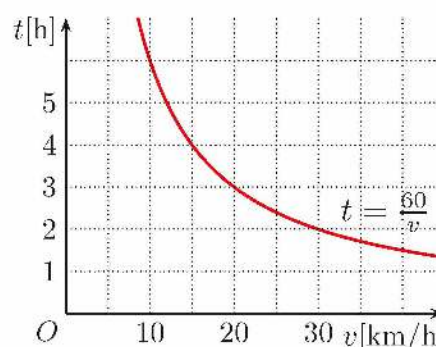
2. Pewną stałą kwotę k zł przeznaczono na zakup śliwek. Na wykresie przedstawiono zależność między ceną x w złotych za kilogram a liczbą kilogramów y , które można w tej cenie kupić. Podaj wartość k i przedstaw za pomocą tabeli zależność między x i y dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Zależność między czasem t potrzebnym do przebycia drogi s ze średnią prędkością v wyraża się wzorem $t = \frac{s}{v}$.

3. Rowerzysta ma do przebycia dystans 60 km. Na wykresie przedstawiono zależność czasu jego jazdy od średniej prędkości. Ile czasu zajmie rowerzyście pokonanie całego dystansu, jeśli będzie jechał z prędkością:

- a) 15 km/h, c) 24 km/h,
b) 18 km/h, d) 25 km/h?



4. Samochód ma do przebycia trasę 240 km. Dobierz odpowiednio jednostki na osiach układu współrzędnych i naskicuj wykres zależności między średnią prędkością samochodu a czasem podróży.

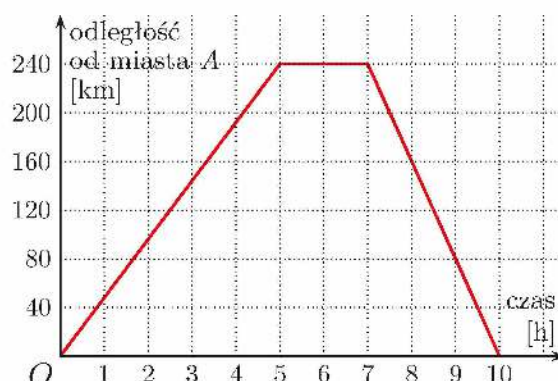
Powtórzenie

5. Naskicuj wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie $x > 0$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu tej funkcji?
- a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{5}{x}$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$ d) $f(x) = \frac{18}{x}$
6. Rozważmy n -kąty foremne o obwodzie równym 12. Sporządź odpowiednią tabelę i naskicuj wykres funkcji opisującej zależność długości boku n -kąta od liczby boków dla $n \leq 12$. Podaj dziedzinę tej funkcji.

4.12. Zagadnienia uzupełniające

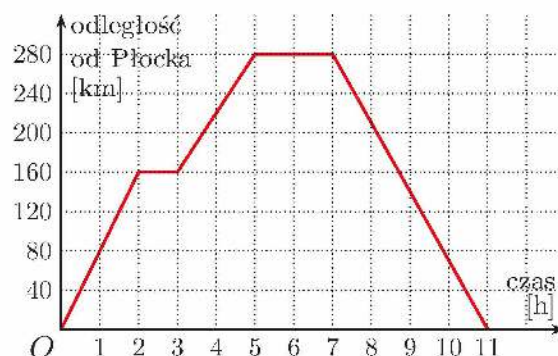
■ Prędkość, droga, czas

1. Przejazd samochodem z miasta A do odległego o 240 km miasta B i z powrotem zajął (razem z dwugodzinnym postojem) 10 godzin. Korzystając z wykresu, podaj średnią prędkość przejazdu:



- a) z miasta B do miasta A ,
b) całej trasy bez postoju.

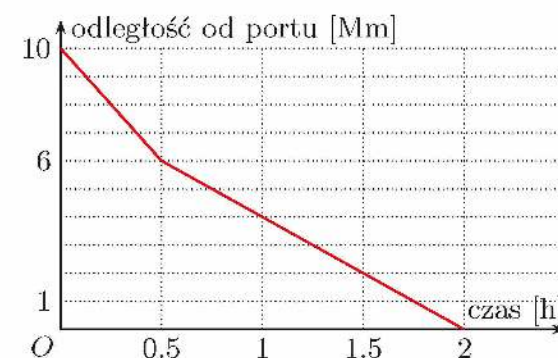
2. Na wykresie poniżej przedstawiono, jak zmieniła się odległość samochodu od Płocka podczas jazdy na trasie Płock–Gdańsk–Płock.



a) Oblicz średnią prędkość samochodu bez uwzględniania postojów.

b) Jaka byłaby średnia prędkość na trasie z Gdańska do Płocka, gdyby postój w Gdańsku przedłużył się o godzinę, a cała wyprawa trwałaby $11\frac{1}{2}$ godziny?

3. Jacht znajdujący się w odległości 10 mil morskich od portu płynął w jego kierunku z prędkością 8 węzłów. Po półgodzinie wiatr osłabł, a prędkość jachtu spadła o połowę. Na wykresie pokazano, jak zmieniła się odległość jachtu od portu w zależności od czasu.



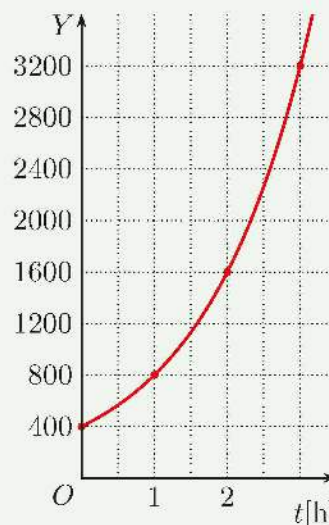
Naszkicuj wykres przedstawiający zmiany odległości jachtu od portu w zależności od czasu, jeśli jacht będący 10 mil morskich od portu płynął w jego kierunku przez godzinę z prędkością 2 węzłów, a następnie jego prędkość wzrosła do 6 węzłów. Po jakim czasie jacht dotarł do portu?



■ Wzrost wykładniczy i funkcja wykładnicza

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 400 bakterii, następnie stwierdzono, że ich liczba podwajała się w ciągu godziny. Funkcja $y = 400 \cdot 2^t$ (wykres obok) opisuje liczbę bakterii po upływie czasu t mierzonego w godzinach. Na przykład po 2 godzinach liczba bakterii wynosiła $400 \cdot 2^2 = 1600$, a po upływie 2 godzin i 30 minut liczba bakterii wzrosła do $400 \cdot 2^{2,5} \approx 2263$. W tabeli podano wartości funkcji $y = 400 \cdot 2^t$ dla wybranych argumentów.



t [h]	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$y = 400 \cdot 2^t$	800	1131	1600	2263	3200	4525

W opisie doświadczenia wykorzystana została funkcja $f(t) = 2^t$. Funkcje opisane wzorem $y = a^x$, gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1, określone dla $x \in \mathbf{R}$, noszą nazwę **funkcji wykładniczych**.

- D** 4. Podczas pewnego doświadczenia liczba bakterii, których początkowo było 600, podwajała się w ciągu pół godziny. Uzasadnij, że funkcja $y = 600 \cdot 4^t$ opisuje liczbę bakterii w zależności od czasu t mierzonego w godzinach i uzupełnij tabelę.

Czas t [h]	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Liczba bakterii y	?	?	?	?	?	?	?	?

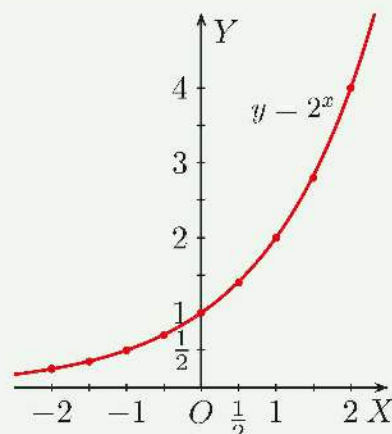
5. W pewnym doświadczeniu badano liczebność kolonii bakterii. Zgodnie z modelem teoretycznym liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą. Wyznacz stałą a , jeśli początkowo było 1500 bakterii, a po 8 godzinach ich liczba wzrosła do 24 000. Po jakim czasie liczebność kolonii bakterii będzie równa 96 000?

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = 2^x$. Zaznaczone zostały punkty odpowiadające danym z tabeli (wartości funkcji podano z dokładnością do 0,01), które połączono krzywą, jak na rysunku.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
2^x	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4

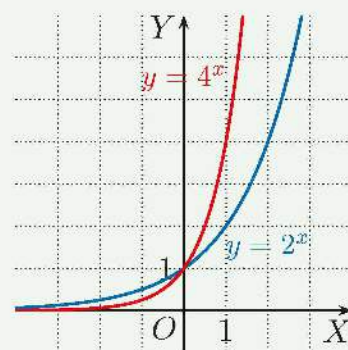


6. Podaj wartość funkcji $y = 2^x$ dla argumentu:

- a) 3, b) 4, c) 10, d) -10.

Wykresy funkcji $y = 2^x$ i $y = 4^x$ dla porównania umieszczono w tym samym układzie współrzędnych.

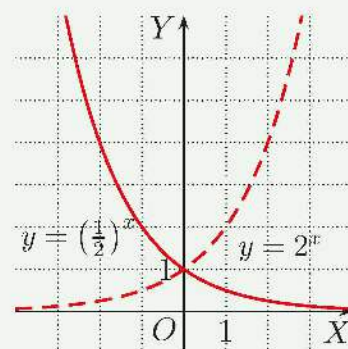
Zauważmy, że dowolna funkcja określona wzorem $y = a^x$, gdzie $a > 1$, jest funkcją rosnącą. W przypadku zjawisk opisywanych za pomocą takich funkcji mówimy o **wzroście wykładniczym**.



7. Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji $y = 3^x$, a następnie naszkicuj jej wykres.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji danej wzorem $y = (\frac{1}{2})^x$. Funkcja ta jest funkcją malejącą. Jej wykres możemy otrzymać przez symetryczne odbicie względem osi OY wykresu funkcji $y = 2^x$ (uzasadnij).

Funkcja $y = (\frac{1}{2})^x$ wykorzystywana jest przy opisie zjawiska rozpadu promieniotwórczego.



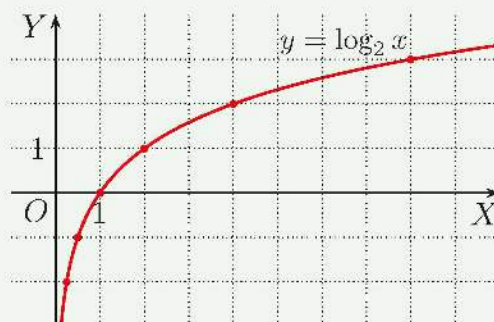
8. a) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ i na jego podstawie podaj rozwiązanie nierówności $1 \leq f(x) \leq 9$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ i na jego podstawie podaj rozwiązanie nierówności $\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 4$.

■ Funkcja logarytmiczna

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji opisanej wzorem $y = \log_2 x$. Zaznaczone punkty odpowiadają wartościom z tabeli.

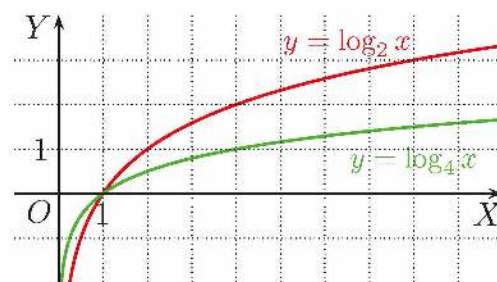
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3



Funkcje opisane wzorem $y = \log_a x$, gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1, określone dla $x \in (0; \infty)$, noszą nazwę **funkcji logarytmicznych**.

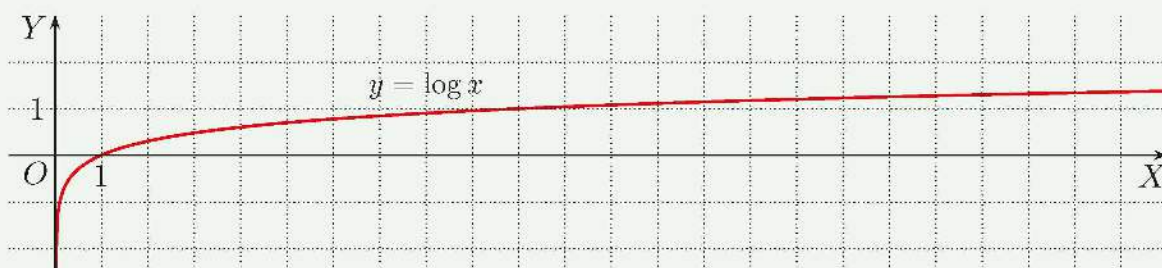
9. Dla jakiego argumentu x funkcja $y = \log_2 x$ przyjmuje wartość równą:
 a) 4, b) 5, c) 10, d) $\frac{1}{2}$?

10. Wykresy funkcji $y = \log_2 x$ i $y = \log_4 x$ umieszczono dla porównania w tym samym układzie współrzędnych (rysunek obok). Podaj po cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z tych funkcji.



11. Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji $y = \log_3 x$, a następnie narysuj jej wykres.

Poniżej przedstawiono wykres funkcji $y = \log x$.



Zauważ, że funkcja $y = \log x$ (oraz dowolna funkcja $y = \log_a x$, gdzie $a > 1$) jest funkcją rosnącą. Jednak jest to wzrost bardzo powolny.

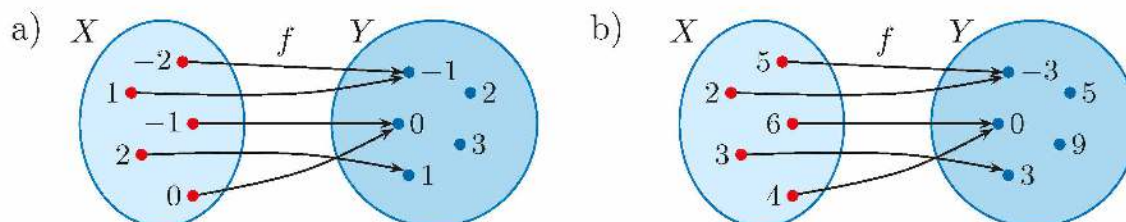
12. Dla jakich argumentów x funkcja $y = \log x$ osiąga wartości większe od:
 a) 2, b) 3, c) 6, d) 10?



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

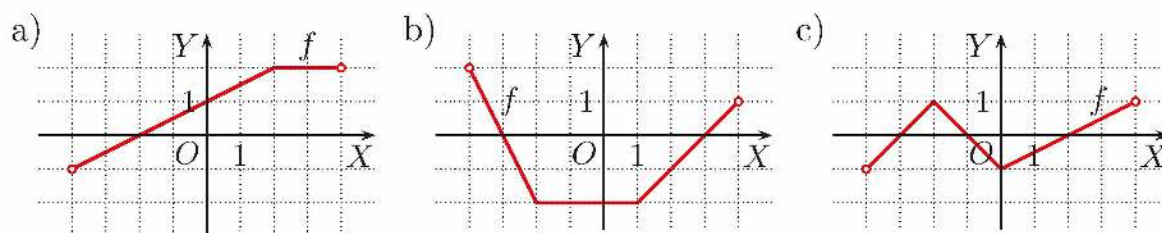
1. Funkcję f przedstawiono w postaci grafu. Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz wartość najmniejszą i wartość największą. Sporządź tabelę i naskicuj wykres funkcji f .



2. Naskicuj wykres funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = |x|$. Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f .

a) $X = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$ b) $X = \langle -4; 4 \rangle$ c) $X = \langle -2; \infty \rangle$

3. Dany jest wykres funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj jej przedziały monotoniczności i miejsca zerowe oraz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



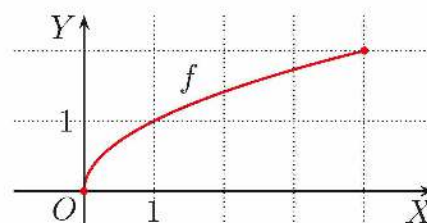
4. Naskicuj wykres funkcji f , korzystając z wykresu funkcji $y = |x|$.

a) $f(x) = |x| - \frac{1}{2}$ c) $f(x) = |x - 5|$ e) $f(x) = |x + 3| - 2$
b) $f(x) = |x| + 4$ d) $f(x) = |x + \frac{5}{2}|$ f) $f(x) = |x - 2| + 3$

5. Naskicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 3$ i $h(x) = f(x) - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji g i h .

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in \langle -3; 1 \rangle \\ -1 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-4; -2) \\ 2x & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \end{cases}$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle 0; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x}$. Podaj dziedziny funkcji $g(x) = f(x + 2)$ i $h(x) = f(x - 3)$ oraz naskicuj ich wykresy.



7. Dziedzina funkcji f jest zbiór D . Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj wzór funkcji g oraz zbiory wartości funkcji f i g .

a) $f(x) = x - 2$, $D = \langle -2; 1 \rangle$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $D = \langle -2; 4 \rangle$

8. Dziedzina funkcji f jest zbiór D . Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj dziedzinę i wzór funkcji g oraz jej wartość najmniejszą i wartość największą.

a) $f(x) = x - 1$, $D = \langle 1; 3 \rangle$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $D = \langle -4; 2 \rangle$

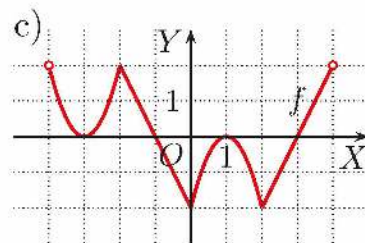
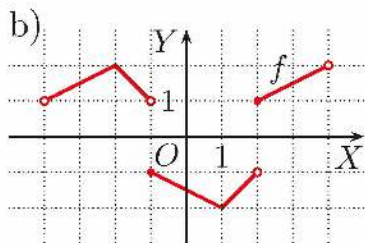
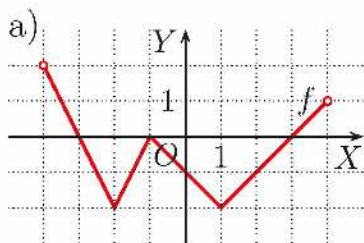
- D** 9. Uzasadnij, że nie istnieje funkcja, do której wykresu należą punkty: $(-5, 1)$, $(-2, -1)$, $(-2, -2)$, $(0, -3)$, $(4, 1)$.

■ Zestaw II

1. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj wartości $f(3\sqrt{2})$ i $f(\sqrt{2} - 6)$.

a) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x < -4 \\ x + 1 & \text{dla } -4 \leq x < 2 \\ 1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq -3 \\ -x & \text{dla } -3 < x < 3 \\ 4 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$

2. Dany jest wykres funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania $f(x) = -2$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.



3. Wykres funkcji g przechodzi przez punkt $(0, 1)$. Wykres ten można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OY . Naszkicuj wykresy funkcji f i g .

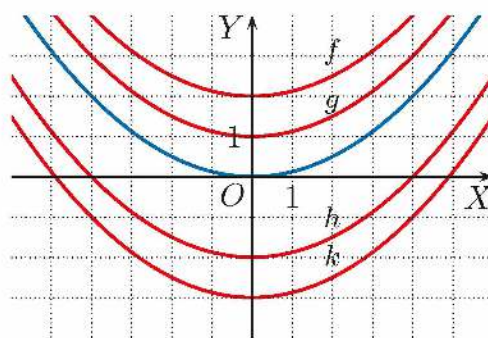
a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla } x \leq 0 \\ 3 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < -2 \\ -2 & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$

4. Wykres funkcji g przechodzi przez punkt $(-2, 0)$. Wykres ten można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OX . Naszkicuj wykresy funkcji f i g .

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dla } x \leq -3 \\ -x - 2 & \text{dla } x > -3 \end{cases}$

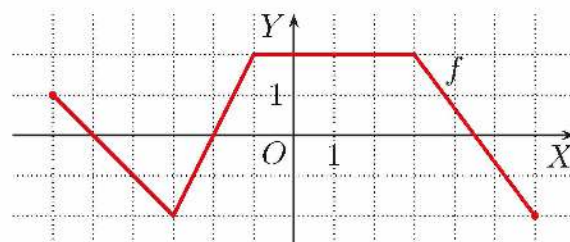


5. Przedstawione na rysunku obok wykresy funkcji: f , g , h , k otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = \frac{1}{8}x^2$ zaznaczonej kolorem niebieskim.



- a) Podaj wzory funkcji: f , g , h , k .
b) Do którego wykresu należą poszczególne punkty: $P(8, 6)$, $Q(-4, 3)$, $R(2, 2\frac{1}{2})$?

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -6; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji:



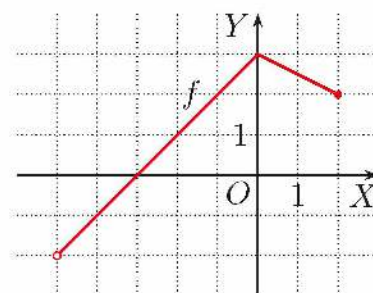
- a) $y = -f(x)$, b) $y = f(-x)$.

7. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = f(-x)$. Podaj zbiory wartości funkcji: f , g i h .

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x < -2 \\ x & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ 3 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

8. Dziedzina funkcji f (rysunek obok) jest przedział $(-5; 2)$. Podaj dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji g .



a) $g(x) = f(x - 3)$

c) $g(x) = -f(x + 2)$

b) $g(x) = f(2 - x)$

d) $g(x) = -f(1 - x)$

9. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ jej kwadrat pomniejszony o podwójną wartość tej liczby. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.

10. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości obu funkcji, jeśli funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej:

- a) jej resztę z dzielenia przez 3 powiększoną o 1,

- b) jej resztę z dzielenia przez 4 pomniejszoną o 4,

- c) połowę jej reszty z dzielenia przez 5.

- D** 11. Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach $(0, 0)$ i $(a, 0)$, gdzie $a > 0$. Trzeci wierzchołek trójkąta należy do wykresu funkcji $y = \frac{4}{x}$. Uzasadnij, że pole tego trójkąta nie zależy od wyboru parametru a .

**Przykład 1**

Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in \langle -2; 2) \\ -2x + 8 & \text{dla } x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

A. 0**B. 1****C. 2****D. 3**

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Miejsca zerowe funkcji f możemy wyznaczyć, rozwiązując równania:

$$-2x - 2 = 0, \text{ skąd } x = -1, \text{ ale } -1 \notin (-\infty; -2)$$

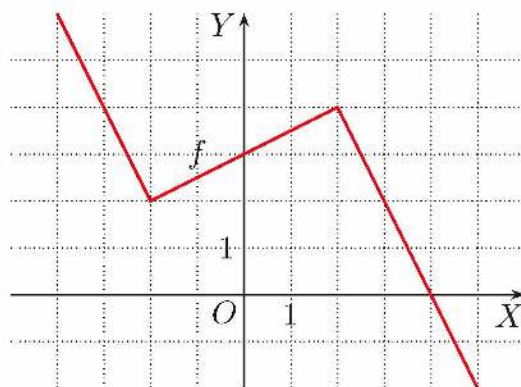
$$\frac{1}{2}x + 3 = 0, \text{ skąd } x = -6, \text{ ale } -6 \notin \langle -2; 2)$$

$$-2x + 8 = 0, \text{ skąd } x = 4 \in \langle 2; \infty)$$

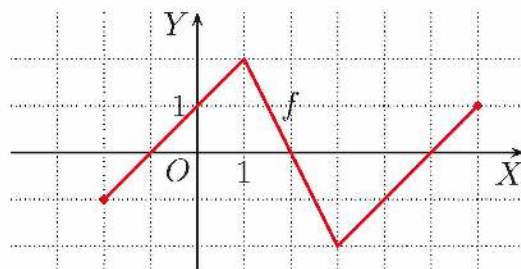
Liczby -1 i -6 nie są miejscami zerowymi funkcji f , jedynym jej miejscem zerowym jest liczba 4 .

Zatem funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

- Możemy też naszkicować wykres funkcji f i odczytać z niego liczbę jej miejsc zerowych.

Odpowiedź: B**Przykład 2**

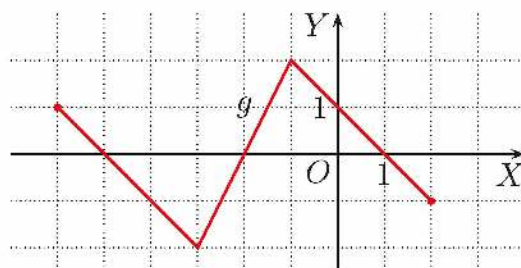
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -2; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Suma miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x)$ jest równa:

A. -2, B. -4, C. -6, D. -8.

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: $-1, 2, 5$. Zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: $1, -2, -5$. Ich suma jest równa -6 .

- Możemy też naszkicować wykres funkcji g i odczytać z niego jej miejsca zerowe. Są to liczby: $-5, -2$ i 1 . Ich suma jest równa -6 .

Odpowiedź: C

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4. Niech $a = f(129)$. Wówczas:

A. $a > f(29)$, B. $a = f(59)$, C. $a < f(89)$, D. $a = f(149)$.

2. Liczba $-\frac{3}{2}$ jest miejscem zerowym funkcji:

A. $y = x^2 + \frac{9}{4}$, B. $y = x^3 - \frac{27}{8}$, C. $y = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2$, D. $y = \frac{3}{2} - \frac{4}{9}x^3$.

3. Liczba -2 nie jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem:

A. $y = \sqrt{x+2}$, B. $y = x^2 - 2$, C. $y = x^3 + 8$, D. $y = \frac{2}{x} + 1$.

4. Do wykresu funkcji $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ należy punkt:

A. $A(-2, 0)$, B. $B(4, 6)$, C. $C(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, D. $D(-4, -8)$.

5. Do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3}(x-1)^2$ należy punkt:

A. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3})$, C. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3} + 12)$,
B. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3})$, D. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3} - 12)$.

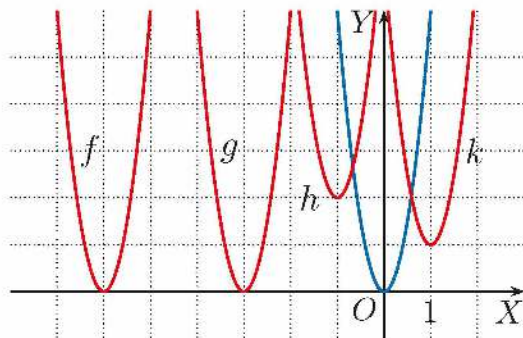
6. Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in \langle 4; \infty \end{cases}$$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. Wykresy funkcji: f, g, h, k otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = 6x^2$. Zatem:

A. $f(x) = 6(x^2 - 12x + 36)$,
B. $g(x) = 6(x^2 + 6x + 9)$,
C. $h(x) = 6(x^2 - 2x + 1) + 2$,
D. $k(x) = 6(x^2 - 1) + 1$.



8. Jeśli $D_f = \langle -5; 3 \rangle$, to dziedziną funkcji $g(x) = f(-x + 1)$ jest zbiór:

A. $\langle -2; 6 \rangle$, B. $\langle -3; 5 \rangle$, C. $\langle -4; 4 \rangle$, D. $\langle -6; 2 \rangle$.

9. Funkcja f ma pięć miejsc zerowych: $-5, -3, -1, 0, 2$. Wynika stąd, że suma miejsc zerowych funkcji $y = -f(-x)$ jest równa:

A. -9 , B. -7 , C. 7 , D. 9 .

■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

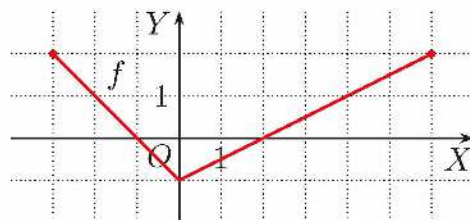
Wyznacz miejsca zerowe funkcji f danej wzorem $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{dla } x < 2 \\ -5x + 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

Zadanie 2 (2 pkt)

Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest funkcją nierosnącą, a punkty: $(-6, 4)$, $(-3, 2)$, $(1, 2)$ i $(4, -5)$ należą do jej wykresu. Wyznacz wartość $f(-2\sqrt{2})$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -3; 6 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj dziedzinę funkcji $g(x) = f(-x)$ i naszkicuj jej wykres.



Zadanie 4 (2 pkt)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x \leq 3 \\ x - 2 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: -3 , 2 i 4 . Wyznacz sumę miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x + 6)$.

Zadanie 6 (4 pkt)

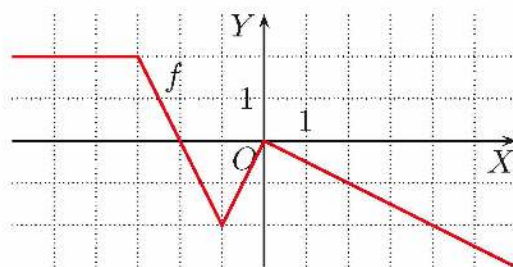
Dana jest funkcja $f(x) = 2x + 2$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = f(x - 4)$. Oblicz pole obszaru ograniczonego osią OX i wykresami funkcji g i h .

Zadanie 7 (4 pkt)

Zbiór X jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 12. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje resztę z dzielenia przez 4. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) - 1$ i podaj jej miejsca zerowe.

Zadanie 8 (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji g i odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 0$.





5 Funkcja liniowa

Dla snowboardzisty czy narciarza kąt nachylenia stoku jest niezwykle istotny. Jest to jeden z czynników branych pod uwagę przy ustalaniu stopnia trudności trasy narciarskiej.

Kąt nachylenia terenu ma też zasadnicze znaczenie w zagadnieniach inżynierskich, takich jak budowa dróg czy kolei.

O nachyleniu prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ decyduje współczynnik a .

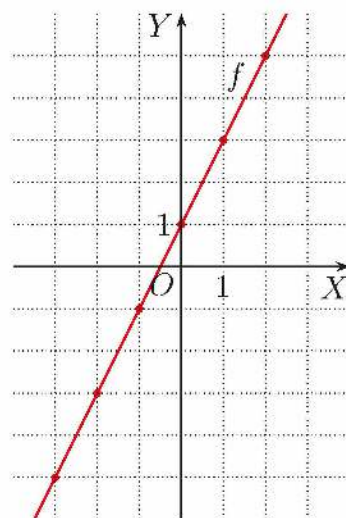
5.1. Wykres funkcji liniowej (1)

Przykład 1

Naszkiej wykreś funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = 2x + 1$, jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$, sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5



Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Zwróć uwagę, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej – jest ona wykresem funkcji f .

Ćwiczenie 1

Naszkiej wykreś funkcji f , jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = -x$ d) $f(x) = -x + 3$

Definicja

Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**.

Wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ (używamy też zapisu $y = ax + b$) jest **prosta**. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta). Prosta ta ma równanie $y = ax + b$.

Przykład 2

Naszkiej wykreś funkcji $f(x) = \frac{5}{3}x - 1$.

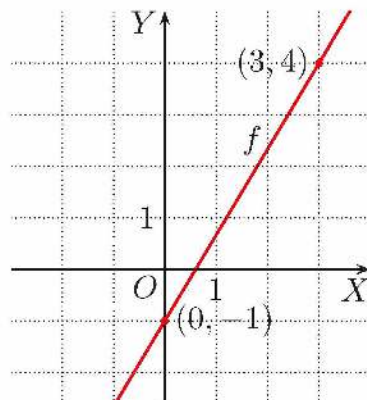
Dla $x = 0$ mamy $f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$.

Dla $x = 3$ mamy $f(3) = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$.

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

x	0	3
$f(x)$	-1	4

Punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji f .



Ćwiczenie 2

Znajdź dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f . Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ b) $f(x) = -\frac{3}{5}x$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ d) $f(x) = -\frac{4}{7}x - 1$

Definicja

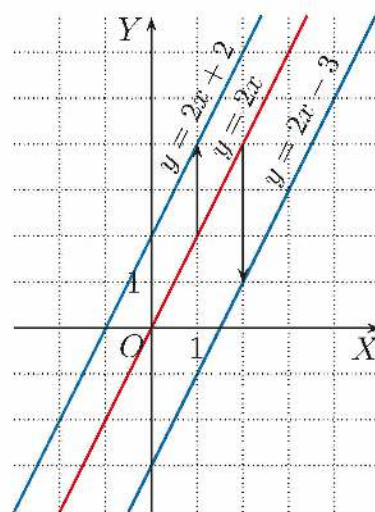
Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej.

Przykład 3

Wykresy funkcji liniowych $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$ są prostymi równoległymi. Każdy z nich możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x$ wzdłuż osi OY .

Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 2 jednostki w górę otrzymamy prostą $y = 2x + 2$.

Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 3 jednostki w dół otrzymamy prostą $y = 2x - 3$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji $y = 3x$, a następnie wykres funkcji f .

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = 3x + 3$ c) $f(x) = 3x - 2$ d) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

Twierdzenie

Wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi.

Podane powyżej twierdzenie można też sformułować następująco:

Proste dane równaniami $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Ćwiczenie 4

Które spośród prostych $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

$l_1: y = \frac{1}{2}x - 3$

$l_3: y = -\frac{1}{2}x + 3$

$l_5: y = 8 - \frac{1}{2}x$

$l_7: y = 1 - 2x$

$l_2: y = 2x - 3$

$l_4: y = 4 + 2x$

$l_6: y = 2x - \sqrt{3}$

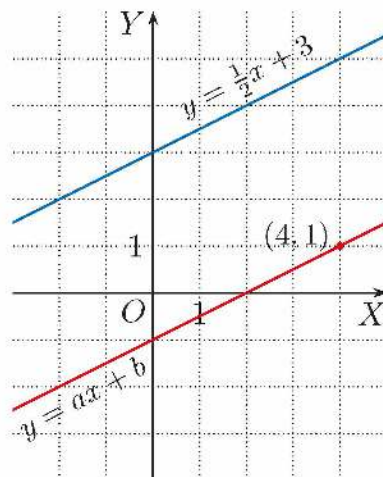
$l_8: y = \sqrt{5} - \frac{1}{2}x$

Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt $P(4, 1)$ i równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Funkcja liniowa dana jest wzorem $y = ax + b$, a jej wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$, więc $a = \frac{1}{2}$. Aby wyznaczyć współczynnik b , podstawiamy współrzędne punktu $P(4, 1)$ do równania $y = \frac{1}{2}x + b$ i otrzymujemy $1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, skąd $b = -1$.

Zatem warunki zadania spełnia funkcja $y = \frac{1}{2}x - 1$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P .

a) $l: y = 2x - 4$, $P(3, 7)$

c) $l: y = -\frac{2}{3}x + 3$, $P(3, -4)$

b) $l: y = -3x + 5$, $P(-\frac{1}{3}, 2)$

d) $l: y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$, $P(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji. Które z punktów $P(4, 3)$, $Q(2, 5)$, $R(-2, -3)$ należą do jej wykresu?

a) $y = x + 3$

c) $y = 2x - 5$

e) $y = -x + 7$

g) $y = -3x + 6$

b) $y = x - 1$

d) $y = 3x - 1$

f) $y = -2x - 7$

h) $y = -4x - 3$

2. Naskicuj wykres funkcji. Podaj trzy punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do tego wykresu.

a) $y = \frac{1}{2}x - 2$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

e) $y = \frac{2}{3}x - 1$

g) $y = -\frac{3}{4}x + 4$

b) $y = \frac{1}{3}x + 4$

d) $y = -\frac{1}{4}x - 2$

f) $y = \frac{5}{2}x + 2$

h) $y = -\frac{5}{3}x - 2$

3. Które spośród prostych: $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

$l_1: y = 5x - \frac{1}{2}$

$l_3: y = \frac{1}{5}x - \sqrt{3}$

$l_5: y = -\frac{1}{5}x + 3$

$l_7: y = 4 - \frac{1}{5}x$

$l_2: y = -\frac{1}{5}x$

$l_4: y = 5x - \frac{1}{5}$

$l_6: y = \frac{1}{5} + 5x$

$l_8: y = 5x - \sqrt{5}$

D 4. Czy czworokąt, którego boki są zawarte w prostych k, l, m, n , jest trapezem? Czy jest równoległobokiem? Odpowiedź uzasadnij.

a) $k: y = -\frac{3}{4}x + 3$, $l: y = 0,3x - 2$, $m: y = \frac{1}{3}x + 4$, $n: y = 6 - 0,75x$

b) $k: y = 2\sqrt{2}x - 4$, $l: y = 4 - 2,5x$, $m: y = 1 + \sqrt{8}x$, $n: y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

5. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej o podanym wzorze i przechodząca przez punkt P .

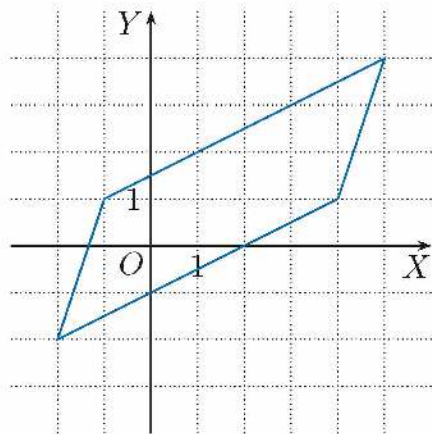
a) $y = 4x - 2$, $P(0, 5)$

c) $y = -\frac{4}{3}x + 6$, $P(-6, 5)$

b) $y = -3x + 4$, $P(1, 8)$

d) $y = \frac{5}{12}x - 3$, $P(-\frac{4}{5}, \frac{2}{3})$

6. Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych $y = \frac{1}{2}x - 1$ i $y = 3x + 4$ (rysunek obok). Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe boki równoległoboku.



7. Jedna z podstaw trapezu o wierzchołkach $A(0, -3)$, $B(4, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(-3, -1)$ jest zawarta w prostej $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$. Wyznacz równanie prostej zawierającej drugą podstawę trapezu.

8. Proste l_1 i l_2 są równoległe do prostej k . Do prostej l_1 należy punkt A , a do prostej l_2 punkt B . Wyznacz równania tych prostych.

a) $k: y = \sqrt{3}x - 3$, $A(2\sqrt{3}, 6)$, $B(1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 4)$

b) $k: y = (\sqrt{2} - 1)x + 6$, $A(\sqrt{8}, 3 - \sqrt{2})$, $B(1 + \sqrt{2}, 4)$

Powtórzenie

9. Naskicuj wykres funkcji. Podaj współczynnik kierunkowy prostej.

a) $y = x - 3$

c) $y = 3 - 2x$

e) $y = \frac{1}{2}x + 2$

g) $y = \frac{1}{2}(6 - 5x)$

b) $y = 2x + 4$

d) $y = 2 - 5x$

f) $y = \frac{x+6}{3}$

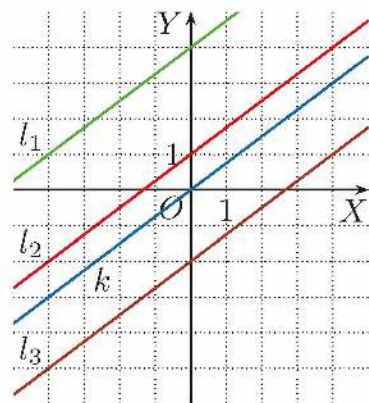
h) $y = \frac{1}{3}(4x - 6)$

10. Wśród trzech podanych prostych wskaż dwie proste równoległe.

a) $y = 2 - \frac{1}{3}x$, $y = 2x - \frac{1}{3}$, $y = \frac{6-x}{3}$

b) $y = 2(x - 4)$, $y = 4(1 - \frac{x}{2})$, $y = -2(x + 1)$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$, $y = \sqrt{3}x - 3$, $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$



11. Proste przedstawione na rysunku obok są równoległe do prostej $k: y = \frac{3}{4}x$. Podaj ich równania.

12. Wyznacz wzór funkcji f , której wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = -6x + 5$ i przechodząca przez punkt P .

a) $P(1, -4)$

b) $P(\frac{2}{3}, 2)$

c) $P(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$

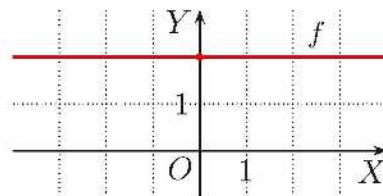
d) $P(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 3\sqrt{2} + 2)$

5.2. Wykres funkcji liniowej (2)

Szczególnym przypadkiem funkcji liniowej jest funkcja stała.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = 2$ dla dowolnego argumentu $x \in \mathbf{R}$ przyjmuje wartość równą 2. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX i przechodząca przez punkt $(0, 2)$.



Ćwiczenie 1

Naszkiecuj wykres funkcji $f(x) = ax + b$, jeśli:

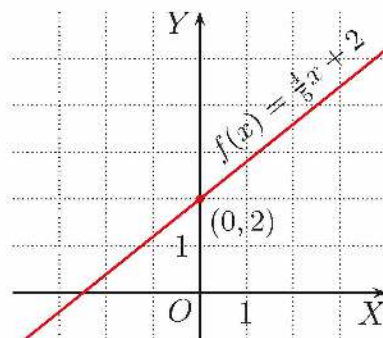
- a) $a = 0, b = 1$, b) $a = 0, b = -\frac{3}{2}$, c) $a = 0, b = 0$.

Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wskazuje punkt przecięcia prostej będącej wykresem funkcji z osią OY .

Przykład 2

Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{5}x + 2$ z osią OY .

Jeśli podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś OY . Zatem $f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0 + 2 = 2$, czyli wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$.



Twierdzenie

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

Przykład 3

Wyznacz wzór funkcji, której wykres jest prostą równoległą do prostej o równaniu $y = \frac{3}{4}x - 6$ oraz przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$.

Szukany wzór funkcji ma postać $f(x) = ax + b$. Z warunków zadania: $a = \frac{3}{4}$, $b = 3$, zatem $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przecinająca oś OY w punkcie P .

- a) $l: y = 3x - 4, P(0, 6)$ b) $l: y = -\frac{3}{4}x + 1, P(0, -\frac{3}{2})$

Ćwiczenie 3

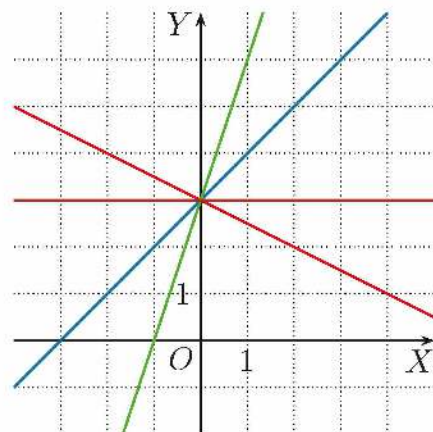
Na rysunku przedstawiono proste przechodzące przez punkt $(0, 3)$. Są one wykresami funkcji liniowych:

$$f_1(x) = x + 3, \quad f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3,$$

$$f_2(x) = 3, \quad f_4(x) = 3x + 3.$$

a) Oblicz wartości tych funkcji dla $x = 1$.

b) Dla każdej z tych funkcji określ, która prosta jest jej wykresem.



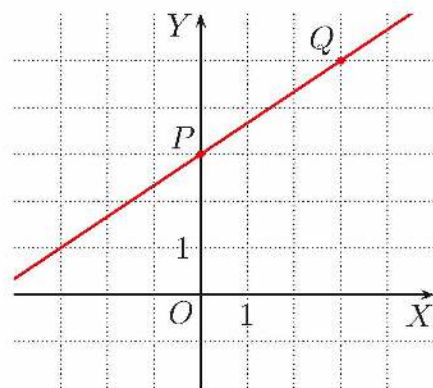
Czy wiesz, że...

Zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt nazywamy **pękiem prostych**, a punkt przecięcia tych prostych **środkiem pęku**.

Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $P(0, 3)$ i $Q(3, 5)$.

Funkcja liniowa dana jest wzorem $y = ax + b$. Jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$, więc $b = 3$. Aby wyznaczyć współczynnik a , podstawiamy współrzędne punktu $Q(3, 5)$ do równania $y = ax + 3$ i otrzymujemy $5 = 3a + 3$, skąd $a = \frac{2}{3}$. Zatem szukany wzór funkcji: $y = \frac{2}{3}x + 3$.



Ćwiczenie 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty P i Q . Czy punkt R należy do wykresu tej funkcji?

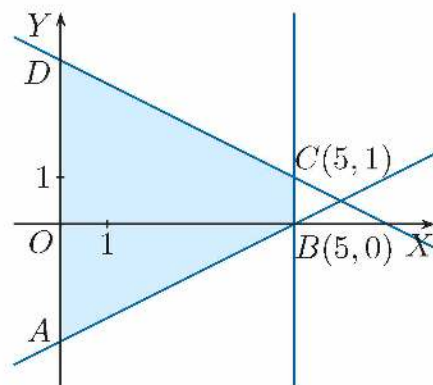
a) $P(0, 5)$, $Q(4, 2)$, $R(8, -1)$

b) $P(0, -4)$, $Q(-3, -9)$, $R(6, 5)$

Ćwiczenie 5

a) Ramiona trapezu $ABCD$ zawierają się w prostych $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ i $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ (rysunek obok). Wyznacz współrzędne wierzchołków A i D , a następnie oblicz pole tego trapezu.

b) Proste $y = \frac{5}{3}x + 5$ i $y = -\frac{1}{3}x - 1$ przecinają się w punkcie $(-3, 0)$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY .



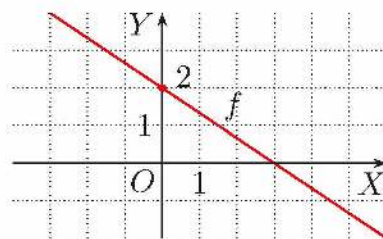
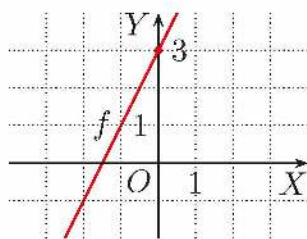
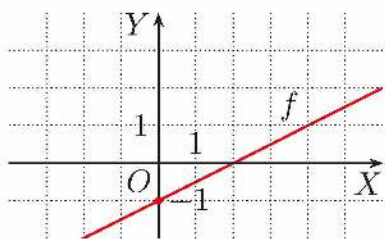
Zadania

1. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych $l_1, \dots, l_8$, które przecinają oś OY w punkcie $(0, 2)$, a w drugim te, które przecinają oś OY w punkcie $(0, -1)$.

$$\begin{array}{llll} l_1: y = 3x + 2 & l_3: y = -1 & l_5: y = -2x + 2 & l_7: y = \frac{1}{2}x - 1 \\ l_2: y = 3x - 1 & l_4: y = 2 & l_6: y = -2x - 1 & l_8: y = \frac{1}{2}x + 2 \end{array}$$

2. Sprawdź, czy punkt Q należy do wykresu funkcji liniowej f , jeśli należy do niego punkt P .

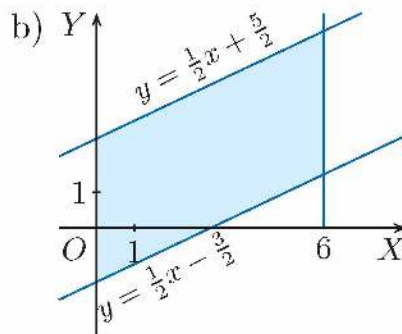
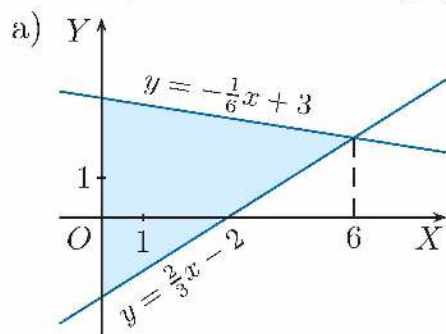
a) $P(8, 3), Q(16, 9)$ b) $P(-6, -9), Q(7, 19)$ c) $P(9, -4), Q(8, -3\frac{1}{3})$



3. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt P i przecina oś OY w punkcie $(0, 4)$. Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres.

a) $P(2, 6)$ b) $P(-6, 1)$ c) $P(5, -11)$ d) $P(\frac{3}{4}, -2)$

4. Oblicz pole zacieniowanej figury.



Powtórzenie

5. Prosta l przecina oś OY w punkcie P , a prosta k – w punkcie Q . Naskicuj te proste. Podaj długość odcinka PQ .

a) $l: y = 2x + 6, k: y = x + 3$ b) $l: y = -\frac{1}{4}x - 2, k: y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

6. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych proste: k_1, k_2, k_3 i k_4 . Podaj punkty, w których te proste przecinają oś rzędnych.

a) $k_1: y = \frac{1}{3}x, k_2: y = \frac{1}{3}x - 4, k_3: y = \frac{1}{3}x + 3, k_4: y = \frac{1}{3}x + 5$

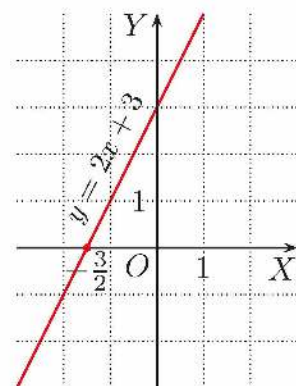
b) $k_1: y = -2x, k_2: y = -2x - 1, k_3: y = -2x + 8, k_4: y = -2x + \frac{1}{2}$

5.3. Własności funkcji liniowej

■ Miejsce zerowe funkcji liniowej

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = 2x + 3$. Jej miejsce zerowe jest równe $-\frac{3}{2}$. Można je wyznaczyć, rozwiązując równanie $2x + 3 = 0$.

Jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$.



D Ćwiczenie 1

Uzasadnij powyższe twierdzenie.

Ćwiczenie 2

Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

- a) $y = -4x + 6$, b) $y = -3x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x + 3$, d) $y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{9}$.

Ćwiczenie 3

Dla jakich wartości współczynników a, b funkcja $f(x) = ax + b$:

- a) nie ma miejsc zerowych, b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych?

Przykład 1

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji $f(x) = \frac{9}{16}x + 3$ (rysunek obok).

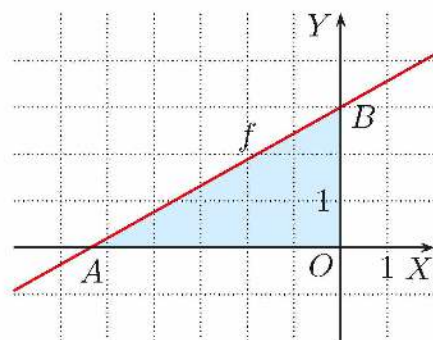
Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f :

$$\frac{9}{16}x + 3 = 0 \text{ dla } x = -\frac{16}{3}. \text{ Zatem } |OA| = \frac{16}{3}.$$

Punkt B ma współrzędne $(0, 3)$, stąd $|OB| = 3$.

Obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 3 = 8$$



Ćwiczenie 4

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji f .

- a) $f(x) = 2x + 4$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 4$
b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ d) $f(x) = \frac{5}{3}x - 5$

■ Monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa może być funkcją rosnącą, malejącą lub stałą.

Przypomnijmy, że funkcję f nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **rosnąca**.

Dowód

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie $a > 0$.

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$.

Wówczas mamy:

$$\begin{aligned}x_1 &< x_2 \quad / \cdot a \\ax_1 &< ax_2 \\ax_1 + b &< ax_2 + b\end{aligned}$$

Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę $a > 0$, zatem nie zmieniamy jej zwrotu.

Oznacza to, że $f(x_1) < f(x_2)$. Zatem f jest funkcją rosnącą.

Funkcja f jest funkcją **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

Jeśli $a < 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **malejąca**.

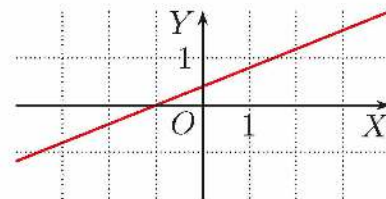
D Ćwiczenie 5

Udowodnij powyższe twierdzenie.

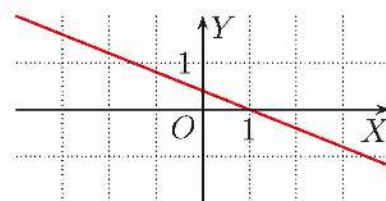
Funkcja f jest funkcją **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

Jeśli $a = 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest funkcją **stałą**.

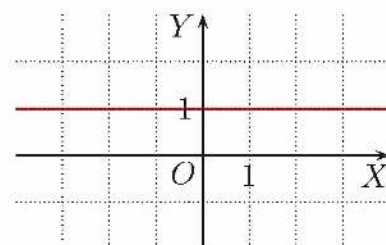
Jeśli funkcja liniowa jest funkcją stałą, to jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX .



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stale tę samą wartość.

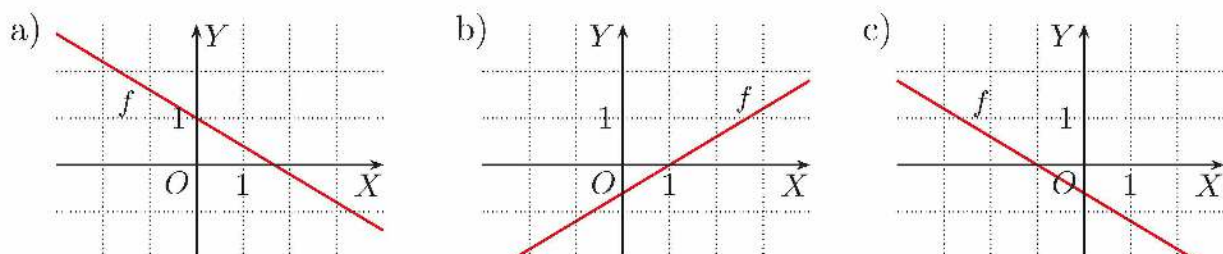
Ćwiczenie 6

Określ monotoniczność funkcji f .

- a) $f(x) = 5x - 12$ b) $f(x) = 8 - 3x$ c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$ d) $f(x) = -3$

Ćwiczenie 7

Dany jest wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Podaj znaki współczynników a i b .

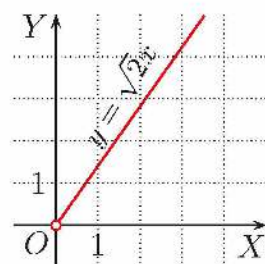


■ Proporcjonalność prosta

Przypomnijmy, że zależność między dwiema dodatnimi wielkościami x i y daną wzorem $y = ax$, gdzie $a > 0$ jest stałą, nazywamy **proporcjonalnością prostą**. Wielkości x i y nazywamy **wprost proporcjonalnymi**, a liczbę a **współczynnikiem proporcjonalności**.

Przykład 2

Długość boku kwadratu x i długość jego przekątnej y są wielkościami wprost proporcjonalnymi: zachodzi równość $y = \sqrt{2}x$. Zależność tę przedstawiono na wykresie obok.



Ćwiczenie 8

Czy opisane wielkości są odwrotnie proporcjonalne, czy wprost proporcjonalne? Podaj wzór tej proporcjonalności.

- a) Długość boku kwadratu i jego obwód.
 b) Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o ustalonym polu P .
 c) Obwód i promień okręgu.
 d) Długości przekątnych rombu o ustalonym polu P .

Ćwiczenie 9

Wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Podaj wzór tej proporcjonalności, a następnie przerysuj do zeszytu i uzupełnij poniższą tabelę. Naszkicuj wykres tej proporcjonalności.

a)

x	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$2\frac{1}{4}$	?	?

b)

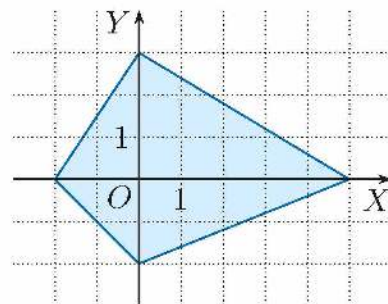
x	1	1,8	?
y	?	1,2	2

c)

x	$2\frac{1}{3}$	?	14
y	$1\frac{2}{3}$	5	?

Zadania

- Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta:
a) $y = -\frac{3}{2}x + 1$, c) $y = -8x - 3$, e) $y = (1 - \sqrt{2})x + 3$,
b) $y = 4x + 1$, d) $y = 12x - 1$, f) $y = -5$
- Określ monotoniczność funkcji $f(x) = mx - 4$, gdy:
a) $m = \sqrt{3} - 2$, b) $m = 5 - 2\sqrt{5}$, c) $m = 3 - \sqrt[3]{-27}$.
- Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
a) $f(x) = (5 - m)x$ b) $f(x) = (1 + 5m)x$ c) $f(x) = (|m| - 1)x$
- Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkty:
a) $(-37, -9)$ i $(-9, -37)$, b) $(3\sqrt{2}, 7)$ i $(2\sqrt{3}, 5)$, c) $(\frac{2}{3}, -8)$ i $(\frac{3}{5}, -7)$.
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli do jej wykresu należy punkt:
a) $(0, 4)$ i przyjmuje ona wartości ujemne tylko dla $x < -6$,
b) $(0, -2)$ i przyjmuje ona wartości nieujemne tylko dla $x \leq -4$.
- Wyznacz równania prostych, w których zawierają się:
a) boki przedstawionego obok czworokąta,
b) boki czworokąta o wierzchołkach:
 $A(-48, 0)$, $B(0, -72)$, $C(36, 0)$, $D(0, 144)$.
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli trójkąt ograniczony jej wykresem i osiami układu współrzędnych jest równoramienny oraz:
a) funkcja ta przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x > 3$,
b) do wykresu tej funkcji należy punkt $(0, -4)$.



Powtórzenie

- Wyznacz punkty, w których prosta przecina osie układu współrzędnych. Naszkicuj tę prostą i określ monotoniczność funkcji, której jest wykresem.
a) $y = 3x + 6$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = \frac{1}{2}x + 3$ d) $y = -\frac{2}{3}x - 2$
- Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i prostą:
a) $y = -2x + 4$, b) $y = 3x - 6$, c) $y = -\frac{1}{4}x - 1$, d) $y = 6x + 3$.

5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie

Jeśli znamy współrzędne dwóch punktów należących do prostej, możemy wyznaczyć jej równanie. Dla prostej będącej wykresem funkcji liniowej wyznaczamy równanie postaci $y = ax + b$.

Definicja

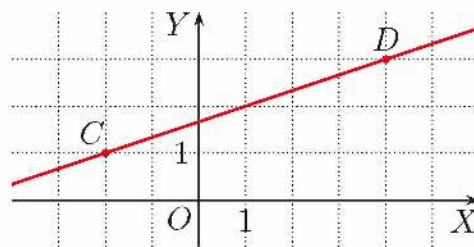
Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Przykład 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(-2, 1)$ i $D(4, 3)$.

Aby wyznaczyć współczynniki a, b równania $y = ax + b$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów} \\ \text{C i D do równania } y = ax + b. \end{array}$$



Powyższy układ spełniony jest przez parę liczb $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.

Zatem równanie prostej ma postać $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D .

- a) $C(-1, -5)$, $D(3, 3)$ b) $C(-2, 4)$, $D(8, -1)$ c) $C(-3, -3)$, $D(6, 3)$

Ćwiczenie 2

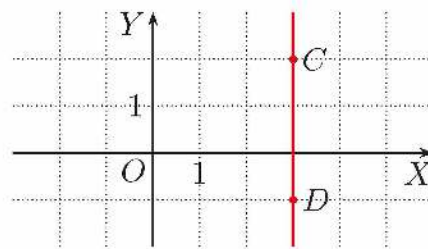
Sprawdź, czy punkty A , B , C są współliniowe.

- a) $A(0, 1)$, $B(6, 2)$, $C(12, 3)$ c) $A(-2, 6)$, $B(2, -2)$, $C(5, -7)$
b) $A(8, 3)$, $B(6, 4)$, $C(-2, 8)$ d) $A(-4, 5)$, $B(7, 5)$, $C(7, 2\sqrt{6})$

Przykład 2

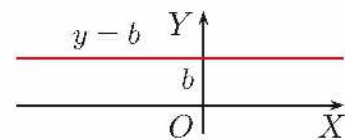
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(3, 2)$ i $D(3, -1)$.

Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 3. Jej równanie ma postać $x = 3$.



Zwróć uwagę na to, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji (dlaczego?), a jej równania nie można zapisać w postaci kierunkowej.

Uwaga. Równanie prostej $y = b$ (równoległej do osi OX) jest równaniem w postaci kierunkowej. Dla tej prostej współczynnik $a = 0$.



Ćwiczenie 3

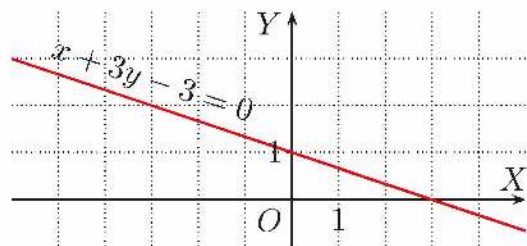
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D . Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

- a) $C(-3, 4), D(-3, 6)$ b) $C(-5, -3), D(7, -3)$ c) $C(8, -2), D(8, 6)$

Przykład 3

Naszkicuj prostą daną za pomocą równania $x + 3y - 3 = 0$.

Równanie przekształcamy do postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{3}x + 1$ i następnie szkicujemy prostą.



Definicja

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Równanie każdej prostej na płaszczyźnie (również prostej równoległej do osi OY) można zapisać w postaci $Ax + By + C = 0$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj prostą daną równaniem ogólnym.

- a) $-x + 2y - 4 = 0$ b) $6x + 3y - 9 = 0$ c) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$

Jedna prosta może mieć wiele równań ogólnych. Na przykład każde z poniższych równań opisuje tę samą prostą.

- I. $2x + y - 4 = 0$ II. $4x + 2y - 8 = 0$ III. $x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

Zauważ, że po przekształceniu do postaci kierunkowej w każdym z powyższych przykładów otrzymujemy równanie $y = -2x + 4$.

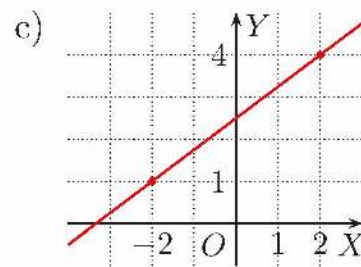
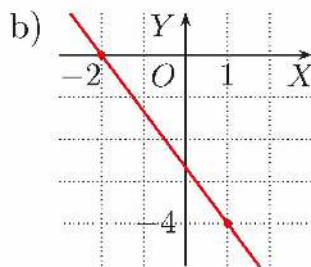
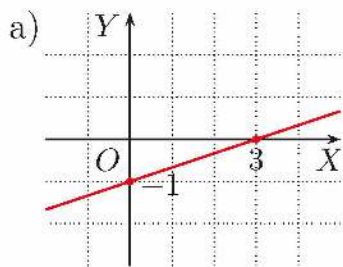
Ćwiczenie 5

Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?

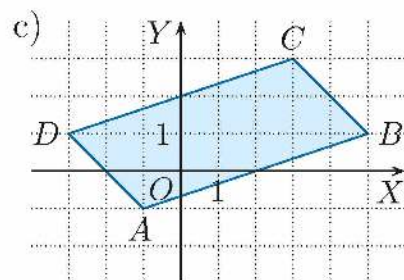
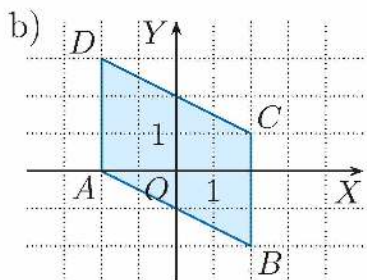
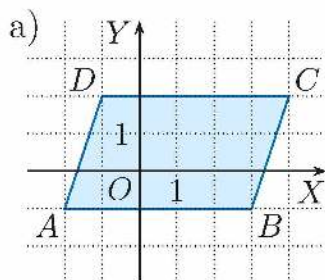
- $l: -\frac{3}{4}x + y - 1 = 0$ $n: 9x - 12y + 12 = 0$ $p: 3x - 4y + 4 = 0$
 $m: -3x + 4y + 4 = 0$ $o: 6x - 8y + 12 = 0$ $r: -\frac{3}{2}x + 2y - 2 = 0$

Zadania

- Sprawdź, czy punkt C należy do prostej AB .
 - $A(1,3)$, $B(7,4)$, $C(13,5)$
 - $A(9,0)$, $B(4,5)$, $C(0,9)$
 - $A(-5,4)$, $B(-1,-4)$, $C(2,9)$
 - $A(3,0)$, $B(3,7)$, $C(3,\sqrt{6})$
- Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Czy punkt $A(-10, -5)$ lub punkt $B(-3, \frac{8}{3})$ należy do tej prostej?

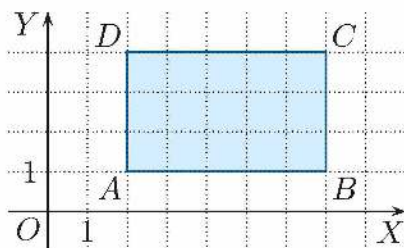


- Naszczuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.
 - $2x - y + 2 = 0$
 - $10x + 5y - 5 = 0$
 - $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$
 - $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$
 - $-4(y - \frac{1}{4}x) = 16$
 - $2(1 - \frac{1}{3}y) - 4x = 0$
- Zapisz w postaci ogólnej równania prostych, w których są zawarte boki równoległoboku $ABCD$.



Powtórzenie

- Zapisz w postaci ogólnej równanie prostej przechodzącej przez punkt $(4, 3)$ i przecinającej oś OY w punkcie:
 - $(0, -5)$,
 - $(0, 6)$,
 - $(0, 3)$.
- Dany jest prostokąt $ABCD$ (rysunek obok). Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki oraz przekątne tego prostokąta.



5.5. Współczynnik kierunkowy prostej

Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, dany jest wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dowód

Podstawiamy współrzędne punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) do równania prostej i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

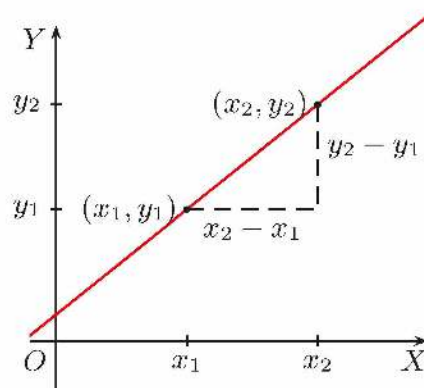
Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

czyli $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, skąd:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Uwaga:
 $x_1 \neq x_2$.



Przykład 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(-2, 3)$ i $B(4, 6)$.

Mamy $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ oraz $(x_2, y_2) = (4, 6)$.

Zatem współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A i B jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty A i B .

- a) $A(3, 7), B(9, 12)$ b) $A(3, 5), B(-7, -5)$ c) $A(12, -2), B(6, 8)$

Ćwiczenie 2

Czy prosta przechodząca przez punkty $P(4, 8)$ i $Q(-2, -1)$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty R i S ?

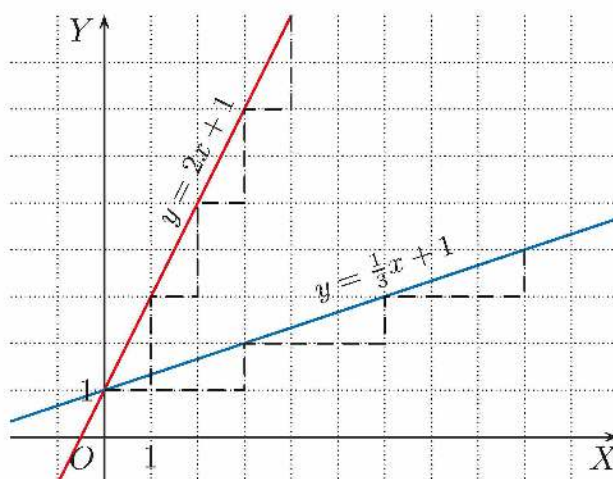
- a) $R(0, 6), S(-4, 0)$ b) $R(-2, 4), S(1, 7)$ c) $R(5, -\frac{5}{2}), S(8, 2)$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-3, -5)$, $B(6, -2)$, $C(4, 2)$ oraz $D(-5, -1)$ jest równoległobokiem.

■ Interpretacja współczynnika kierunkowego

Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić, jak bardzo jest ona „stroma”. Na przykład dla prostej $y = 2x + 1$ wzrostowi argumentu o jedną jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o dwie jednostki, a dla prostej $y = \frac{1}{3}x + 1$ wzrostowi argumentu o trzy jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o jedną jednostkę.



Ćwiczenie 4

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego podanej prostej.

- a) $y = 3x + 2$ b) $y = \frac{1}{2}x + 2$ c) $y = -2x + 2$ d) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Ćwiczenie 5

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego podanej prostej.

- a) $y = \frac{2}{5}x - 3$ b) $y = \frac{4}{3}x - 3$ c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$ d) $y = -\frac{2}{5}x - 3$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(3, -7)$ i $Q(-2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$:

$$a = \frac{3 - (-7)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

Następnie do równania $y = -2x + b$ podstawiamy współrzędne jednego z punktów: P lub Q .

Dla punktu $P(3, -7)$ otrzymujemy:

$$-7 = -2 \cdot 3 + b, \text{ stąd } b = -1.$$

Równanie prostej ma zatem postać $y = -2x - 1$.

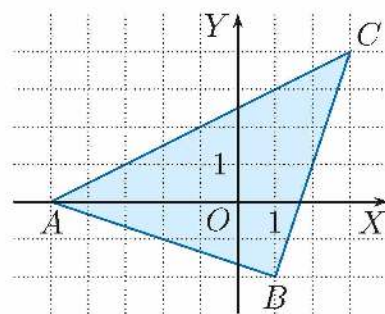
Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .

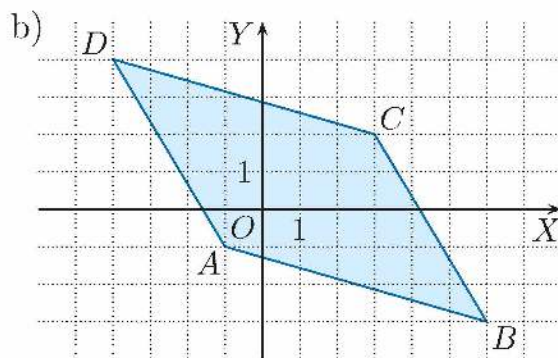
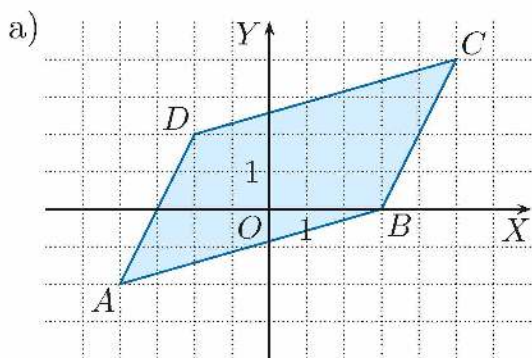
- a) $P(4, 5), Q(-4, 9)$ b) $P(4, -13), Q(2, -7)$ c) $P(3, 3), Q(1, \frac{7}{3})$

Zadania

- Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta ABC . Podaj współczynniki kierunkowe prostych zawierających jego boki.
- Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których są zawarte boki czworokąta $ABCD$, gdzie: $A(-4, -2)$, $B(2, 1)$, $C(0, 3)$, $D(-5, 4)$.
- Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .
 - $P(3, 4)$, $Q(7, 6)$
 - $P(-2, 7)$, $Q(2, -1)$
 - $P(\frac{1}{3}, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, -1)$
 - $P(3, \frac{7}{3})$, $Q(2, \frac{1}{3})$
 - $P(-2, -6)$, $Q(8, -6)$
 - $P(\sqrt{3}, 4)$, $Q(3\sqrt{3}, 10)$



- D** 4. Oblicz współczynniki kierunkowe i wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest równoległobokiem.



- D** 5. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się boki czworokąta $PQRS$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest trapezem.
- $P(0, -5)$, $Q(9, 1)$, $R(6, 11)$, $S(-6, 3)$
 - $P(-8, 5)$, $Q(-6, -2)$, $R(4, -6)$, $S(7, -1)$

Powtórzenie

- Naszczuj proste o współczynnikach kierunkowych: 1, 2, 3, -2 i -3, przecinające się w punkcie P .
 - $P(0, 2)$
 - $P(0, -4)$
 - $P(3, 0)$
 - $P(-4, -2)$
- Podaj, który ze współczynników kierunkowych prostych zawierających boki trójkąta ABC jest największy, a który – najmniejszy.
 - $A(0, -2)$, $B(3, 4)$, $C(-2, 2)$
 - $A(6, 3)$, $B(0, 1)$, $C(-2, -1)$

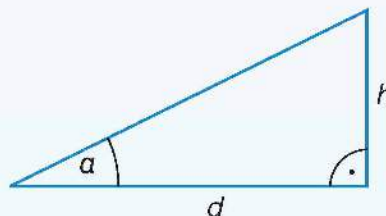
Nachylenie trasy

Współczynnik kierunkowy prostej mówi nam o jej stromości, czyli o jej nachyleniu do poziomu.

Nachylenie trasy

Nachylenie trasy często podaje się w procentach. Wyraża się je wzorem:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$



Nachylenie równe 100% odpowiada kątowi 45°, a nachylenie 10% – kątowi około 6°.

Kąt α	5°	10°	15°	20°	30°	45°
Nachylenie	ok. 9%	ok. 18%	ok. 27%	ok. 36%	ok. 58%	100%

Skocznia narciarska

Największa skocznia narciarska na świecie znajduje się w Vikersund w Norwegii. Ma ponad pół kilometra długości: od najwyższej belki startowej do końca odjazdu jest około 570 metrów. Maksymalne nachylenie zeskoku to 38°.

- 1 Wyszukaj informacje dotyczące nachylenia poszczególnych części skoczni narciarskiej: rozbiegu, progu, grzbietu skoczni i zeskoku.



5.6. Warunek prostokątności prostych

Przykład 1

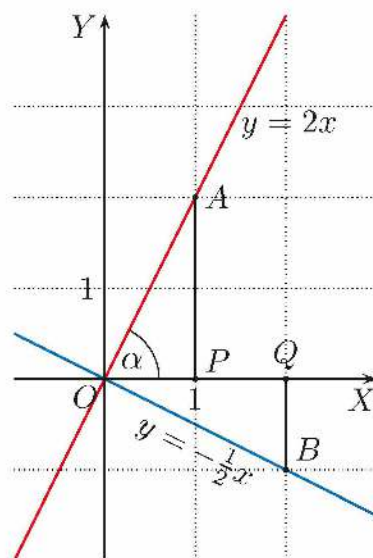
Wykaż, że proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.

Punkt $A(1, 2)$ należy do prostej $y = 2x$, a punkt $B(2, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{2}x$ (rysunek obok). Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.

Przyjmijmy, że $\angle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO : $\angle OBQ = \alpha$ oraz $\angle BOQ = 90^\circ - \alpha$. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOP + \angle BOQ = \\ &= \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ\end{aligned}$$

Zatem proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.



Ćwiczenie 1

Udowodnij, stosując metodę pokazaną w przykładzie, że proste są prostopadłe.

a) $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ c) $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ ($a_1 \neq 0$) i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ (czyli $a_1 \cdot a_2 = -1$).

Przykład 2

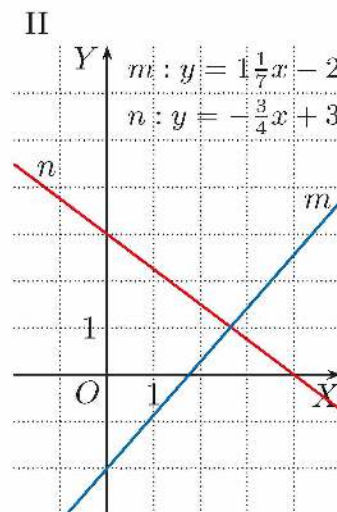
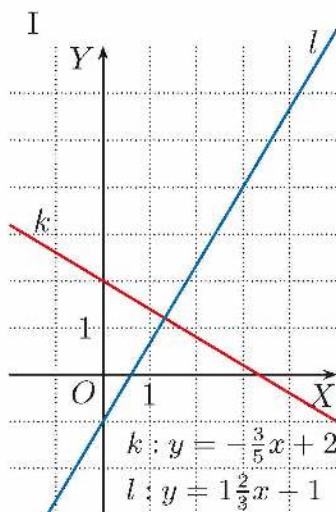
Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunkach I i II są prostopadłe.

I. Współczynniki kierunkowe prostych k i l są odpowiednio równe: $a_1 = -\frac{3}{5}$ i $a_2 = 1\frac{2}{3}$.

$a_1 \cdot a_2 = -1$, więc proste k i l są prostopadłe.

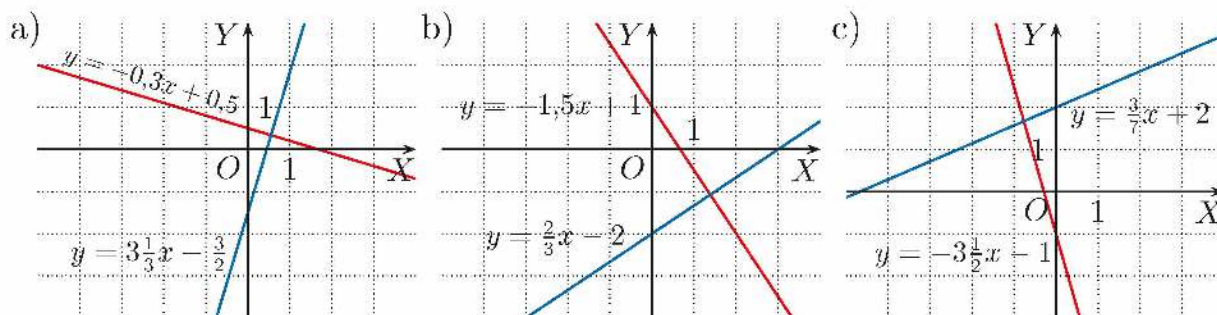
II. Współczynniki kierunkowe prostych m i n są odpowiednio równe: $a_1 = 1\frac{1}{7}$ i $a_2 = -\frac{3}{4}$.

$a_1 \cdot a_2 \neq -1$, więc proste m i n nie są prostopadłe.



Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.



Przykład 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej k , jeśli jest ona prostopadła do prostej $y = \frac{3}{8}x - 4$.

Oznaczmy przez a_1 współczynnik kierunkowy prostej k . Wówczas:

$$a_1 = \frac{-1}{\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do podanej prostej.

- a) $y = \frac{1}{5}x + 4$ b) $y = 9x$ c) $y = -2\frac{1}{3}x - 3$ d) $y = \frac{\sqrt{2}}{6}x - 1$

D Ćwiczenie 4

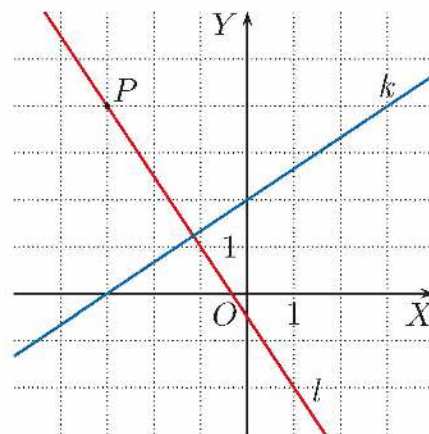
Uzasadnij, że jeśli proste $y = a_1x$ i $y = a_2x$ są prostopadłe, to dla dowolnych współczynników b_1, b_2 prostopadłe są również proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$.

Przykład 4

Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.

Prosta l ma zatem równanie $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -3x + 2$, $P(0, -1)$ b) $y = -0,1x$, $P(1, 9)$ c) $y = \frac{3}{7}x + 9$, $P(3, 2)$

Przykład 5

Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba 3, a jej wykresem jest prosta l prostopadła do prostej $4x + 3y - 7 = 0$. Wyznacz równanie prostej l .

Równanie $4x + 3y - 7 = 0$ przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

Stąd równanie prostej l ma postać $y = \frac{3}{4}x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, 0)$ i otrzymujemy $0 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, czyli $b = -\frac{9}{4}$.

Równanie prostej l ma zatem postać $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$.

Ćwiczenie 6

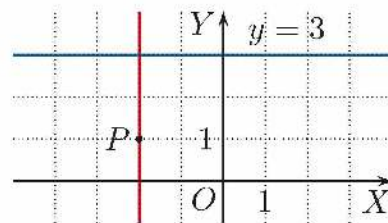
Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba -2 . Wyznacz równanie prostej będącej wykresem tej funkcji i jednocześnie prostopadłej do podanej prostej.

- a) $3x + 2y + 6 = 0$ b) $2x - \frac{1}{2}y - 5 = 0$ c) $-\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}y + 3 = 0$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 3$ i przechodzącej przez punkt $P(-2, 1)$.

Powyższe warunki spełnia prosta $x = -2$.



Ćwiczenie 7

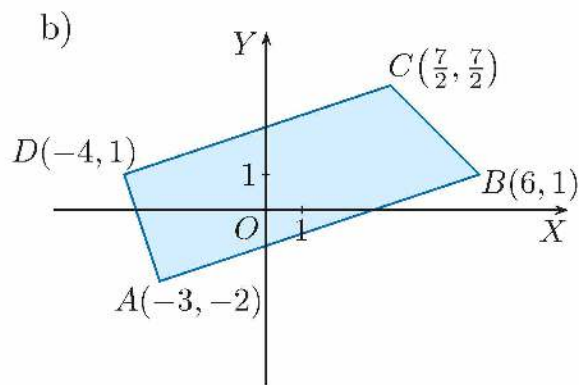
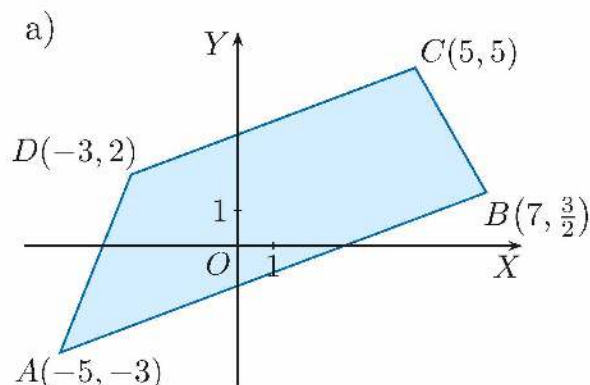
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(6, -5)$ i prostopadłej do prostej:

- a) $y = -3$, b) $x = -3$, c) $x = -2\sqrt{3}$.

Zadania

- Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .
 - $l: y = -3x + 1$, $P(3, -2)$ c) $l: y = -\frac{4}{3}x + 11$, $P(-4, -2)$
 - $l: y = \frac{2}{3}x - 3$, $P(4, 1)$ d) $l: y = 3\frac{1}{2}x - 3$, $P(14, -4)$
- Wyznacz równania prostych: AB , AC i BC . Czy trójkąt ABC jest prostokątny?
 - $A(1, 5)$, $B(4, 2)$, $C(7, 5)$ c) $A(-7, -2)$, $B(8, -2)$, $C(-2, 3)$
 - $A(-2, -1)$, $B(0, -3)$, $C(4, 5)$ d) $A(4\frac{1}{2}, 6)$, $B(-2, -\frac{1}{2})$, $C(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
- Punkty: A , B , C i D są kolejnymi wierzchołkami rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte przekątne tego rombu.
 - $A(-2, -6)$, $B(5, -3)$, $C(8, 4)$ b) $A(-1, -2)$, $B(6, -1)$, $D(-6, 3)$

- D** 4. Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Czy jest to trapez prostokątny?



- D** 5. Uzasadnij, że czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

- a) $P(-5, 0)$, $Q(-1, -6)$, $R(8, 0)$, $S(4, 6)$
 b) $P(-8, -2)$, $Q(6, -8)$, $R(9, -1)$, $S(-5, 5)$

- D** 6. Punkty $A(0, 0)$ i $C(2, 8)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$, którego przekątna BD jest zawarta w prostej $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$. Uzasadnij, że prostokąt ten jest kwadratem. Oblicz jego obwód i pole.

7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $y = 3x + 10$, a odcinek BC jest przyprostokątną. Wyznacz współrzędne wierzchołka A tego trójkąta, jeśli:

- a) $B(-2, -8)$, $C(-2, 4)$, b) $B(-6, -8)$, $C(-6, 7)$.

8. Wyznacz równania prostych prostopadłych l_1 , l_2 przecinających się w punkcie $(2, 4)$, jeśli jedna z nich przecina oś OX w punkcie $(-6, 0)$. O ile procent większe jest pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OX od pola trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY ?

Powtórzenie

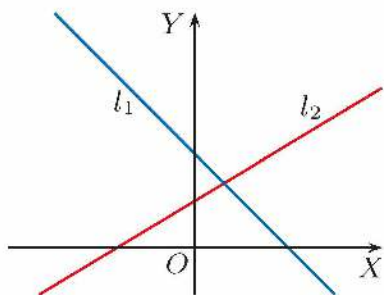
9. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt $P(6, -2)$.
- a) $l: y = -2x + 4$ c) $l: y = -\frac{2}{3}x + 6$ e) $l: 3x + y - 3 = 0$
 b) $l: y = 3x - 1$ d) $l: y = 1,5x - 2,5$ f) $l: x + 2y - 3 = 0$
10. Punkty A , B , C są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Wyznacz równania prostych zawierających jego boki.
- a) $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$, $C(6, 3)$ b) $A(-15, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(0, 3)$

5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

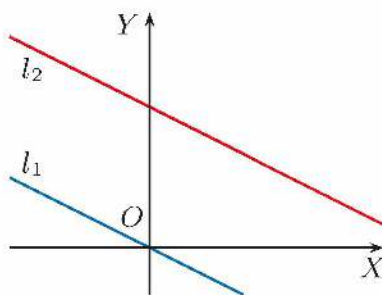
Rozpatrzmy proste l_1 i l_2 opisane równaniami układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

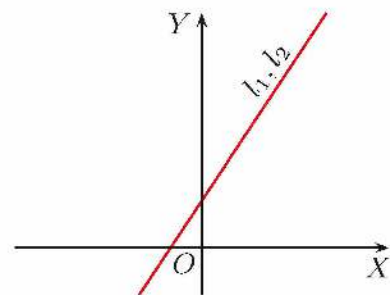
Współrzędne punktów (x, y) należących jednocześnie do obu prostych są rozwiązaniami tego układu. Może zachodzić jedna z poniższych sytuacji.



Układ oznaczony (ma jedno rozwiązanie) – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ spreczny (nie ma rozwiązań) – proste są równoległe i różne.



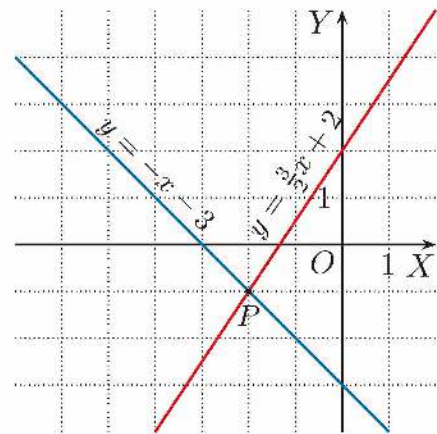
Układ nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań) – proste pokrywają się.

Przykład 1

Rozwiąż graficznie układ równań.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Pierwsze równanie po przekształceniu do postaci kierunkowej ma postać $y = -x - 3$, a drugie $y = \frac{3}{2}x + 2$. Szkicujemy obie proste i odczytujemy współrzędne ich punktu przecięcia: $P(-2, -1)$.



Rozwiązaniem układu jest więc para liczb: $x = -2$, $y = -1$ (poprawność rozwiązania można sprawdzić, podstawiając je do układu równań).

Ćwiczenie 1

Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

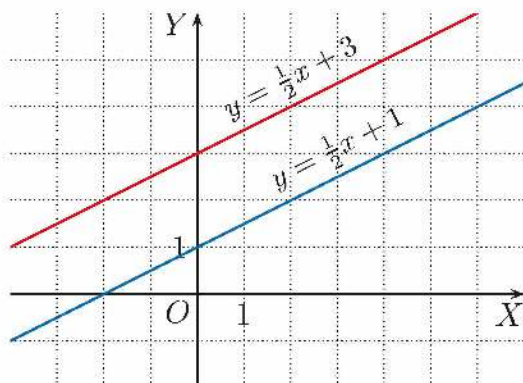
Przykład 2

Rozwiąż graficznie układ równań
$$\begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$$

Równania układu przekształcamy do postaci kierunkowej i szkicujemy obie proste.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Są to proste równoległe – nie mają punktów wspólnych. Zatem układ równań nie ma rozwiązania – jest sprzeczny.



Przykład 3

Rozwiąż graficznie układ równań.

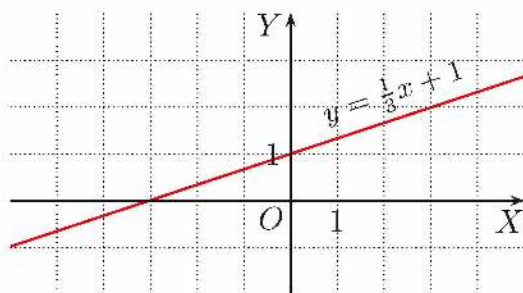
$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

Obydwa równania opisują tę samą prostą o równaniu kierunkowym $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Układ ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Są nimi wszystkie pary liczb $(x, \frac{1}{3}x + 1)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązaniami tego układu są na przykład pary: $(-3, 0)$, $(0, 1)$ czy $(3, 2)$.

Podaj trzy inne pary liczb będące rozwiązaniami tego układu równań.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż graficznie układ równań.

a)
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 0,5y - x = -3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$$

Czasami nie musimy przekształcać równań układu, aby określić, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Wystarczy przyjrzeć się współczynnikom przy niewiadomych oraz wyrazom wolnym.

Ćwiczenie 3

Określ, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$$

Zadania

1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y + x = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -\frac{4}{3}x + 2y = -4 \end{cases}$

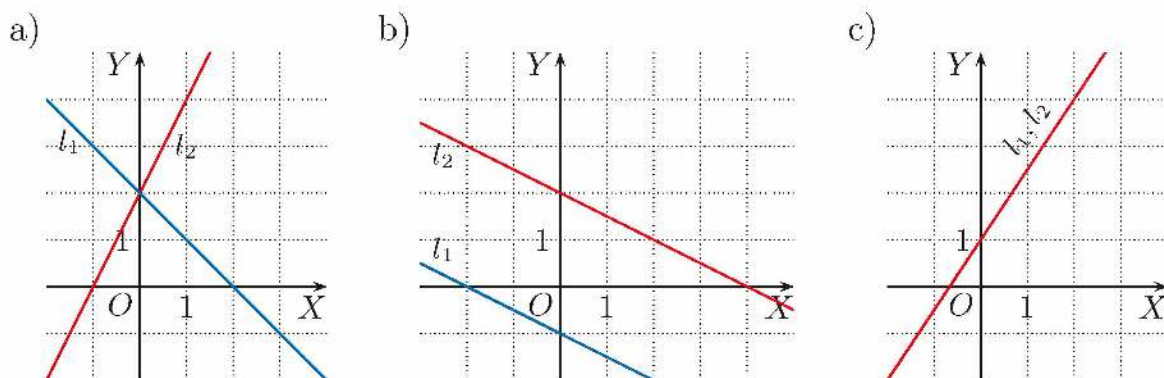
b) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ 4y + 3x = -12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 9x - 2y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3y + x = 9 \\ y + 3 = -\frac{1}{3}x \end{cases}$

2. Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x = 3 + 2y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,5x + 2y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 6x + 2 \\ \frac{3}{2}y + 3x = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x = 6 - y \\ \frac{y-1}{3} = x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - 1 = x \\ 6y - 3x = 3 \end{cases}$

3. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



4. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

Jakie warunki powinny spełniać współczynniki: a_1, a_2, b_1, b_2 , aby układ był:

a) nieoznaczony, b) sprzeczny, c) oznaczony?

5. Narysuj równoległobok, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

a) $y = x - 2$, $y = x - 6$, $y + 3 = 0$, $y - 2 = 0$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3$, $y = \frac{1}{2}x - 2$, $y = -2x - 7$, $y = -2x + 8$

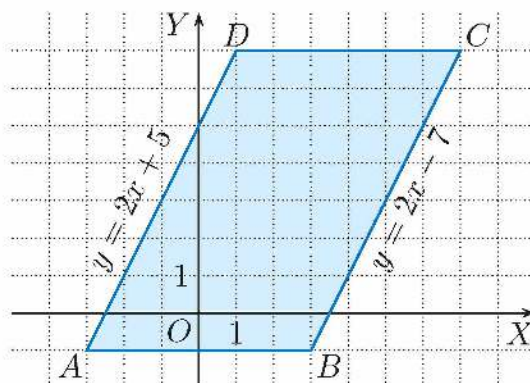
c) $3x - y = -2$, $3x - y = 4$, $x - 2y = 6$, $x - 2y = -14$

6. Trzy boki trapezu prostokątnego $ABCD$ są zawarte w prostych: $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = 2x + 3$. Wierzchołek B jest punktem przecięcia osi OX z prostą $y = \frac{1}{3}x - 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

7. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok).

a) Punkt P jest punktem przecięcia prostej AD z prostą $y = -x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABP .

b) Punkt Q jest punktem przecięcia prostej BC z prostą $y = -2x + 7$. Oblicz pole trapezu $ABQD$.



8. a) Uzasadnij, że trójkąt, którego boki są zawarte w prostych: $x + y = 0$, $x - y = 0$ i $y = 3$, ma pole równe polu trójkąta o wierzchołkach: $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(9,0)$.
- b) Uzasadnij, że trójkąt, którego boki są zawarte w prostych $2x - y = 0$, $y - x - 2 = 0$ i $y + 2 = 0$, ma pole równe połowie pola równoległoboku o wierzchołkach: $A(-2,-1)$, $B(4,-1)$, $C(6,2)$, $D(0,2)$.

Powtórzenie

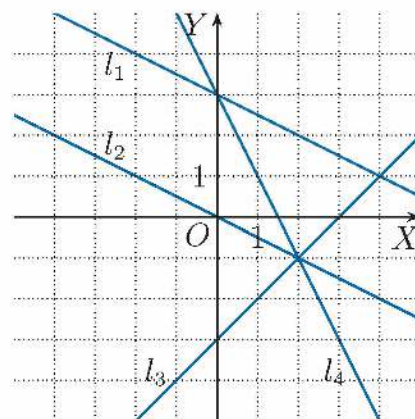
9. Sprawdź, czy współrzędne punktu $P(x, y)$, który jest punktem przecięcia prostych l_1 i l_2 , spełniają warunek $x^2 + y^2 < 25$.

- a) $l_1: y = -x + 1$, $l_2: y = \frac{1}{3}x + 5$ c) $l_1: y = 2x + 1$, $l_2: y = 4x + 5$
 b) $l_1: y = x - 2$, $l_2: y = -\frac{1}{2}x + 4$ d) $l_1: y = -\frac{1}{2}x - 2$, $l_2: y = -2x + 4$

10. Która para prostych (rysunek obok) przedstawia interpretację geometryczną układu równań?

- a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ \frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$

11. Podaj równanie dowolnej prostej, które wraz z równaniem prostej l_3 (rysunek obok) tworzy układ sprzeczny.



12. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

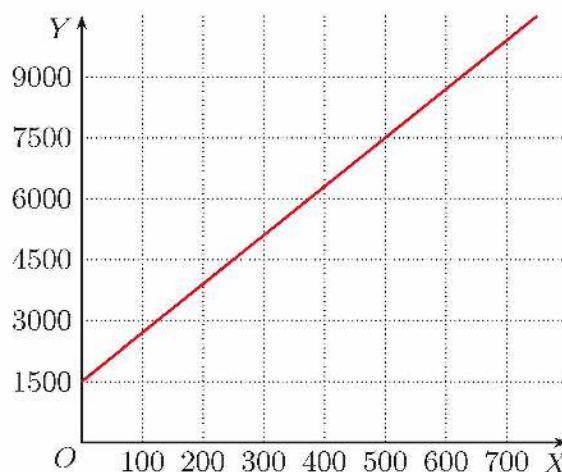
- a) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

5.8. Funkcja liniowa – zastosowania

Ćwiczenie 1

Funkcja $y = 1500 + 12x$ opisuje miesięczne koszty (w złotych) firmy Skrzat produkującej krasnale ogrodowe: 1500 zł to koszt stały, 12 zł to koszt wyprodukowania jednego krasnala, x – liczba krasnali.

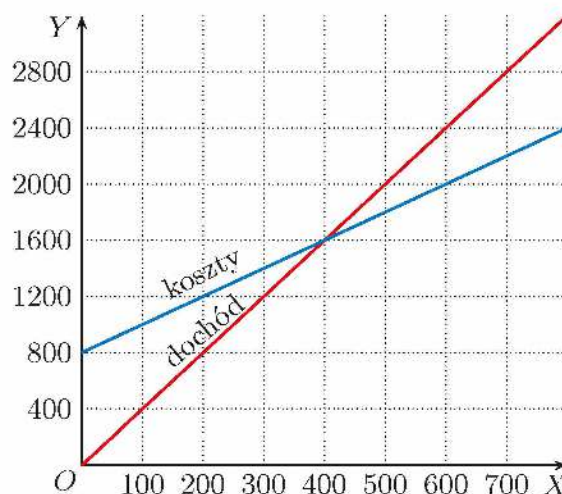
- Jaki był półroczny zysk firmy, jeśli w tym czasie wyprodukowano 1800 krasnali i sprzedano je po 37 zł za sztukę?
- Naszkicuj wykres funkcji opisującej miesięczne koszty firmy, jeśli podjęto decyzję o produkcji większych krasnali, a koszt wyprodukowania jednego wyniesie 18 zł (koszty stałe bez zmian).



Ćwiczenie 2

Wzór $y = 2x + 800$ opisuje dzienne koszty, jakie ponosi firma produkująca pokarm dla kotów: 800 zł to stały koszt dzienny, x – liczba puszek pokarmu wyprodukowanych dziennie, a 2 zł – koszt wyprodukowania jednej puszki. Dochody firmy opisuje wzór $y = 4x$, gdzie x jest liczbą sprzedanych dziennie puszek pokarmu, a 4 zł to cena jednej puszki. Przyjmując, że liczba wyprodukowanych i sprzedanych danego dnia puszek jest taka sama, podaj wielkość dziennej produkcji, dzięki której firma osiągnie:

- zerowy wynik ekonomiczny (dochód jest równy kosztom),
- dzienny zysk w wysokości 400 zł,
- dzienny zysk w wysokości 1400 zł.

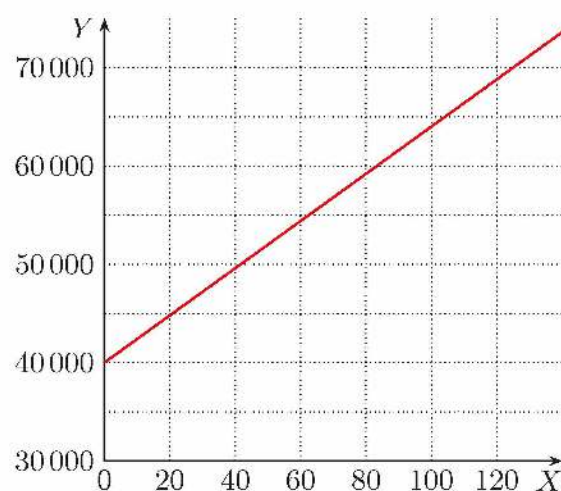


Ćwiczenie 3

Wynajęcie lokalu A na dyskotekę kosztuje 400 zł za salę i 10 zł za każdego uczestnika. Wynajęcie lokalu B kosztuje 100 zł za salę i 15 zł za każdego uczestnika. Naszkicuj wykresy przedstawiające koszty zorganizowania dyskoteki w lokalach A i B w zależności od liczby uczestników. Dla jakiej liczby uczestników koszty te będą równe?

Zadania

1. Samochód A kosztuje 35 tys. zł i spala 8 l benzyny na 100 km, a samochód B kosztuje 40 tys. zł i spala 6 l benzyny na 100 km. Niech x oznacza liczbę przejechanych tysięcy kilometrów, y – cenę samochodu plus koszty paliwa w złotych (pozostałe koszty pomijamy). Na zamieszczonym obok wykresie przedstawiono łączny koszt dla samochodu B , jeśli cena benzyny wynosi średnio 4 zł za liter.

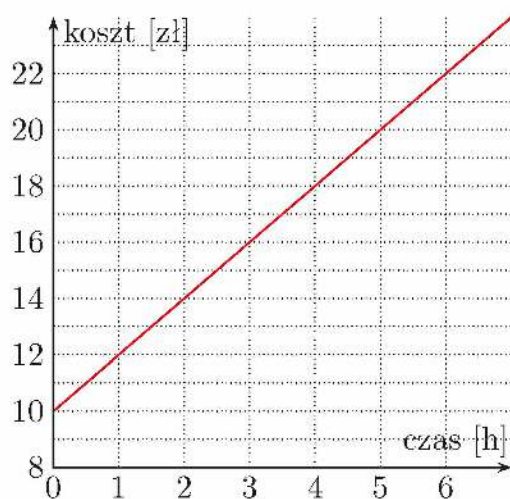


- a) Naskicuj analogiczny wykres dla samochodu A .
- b) Jeżeli zakupiono samochód B , to po przejechaniu ilu kilometrów zwróci się różnica w cenie?
2. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach Wagabunda i Szprycha (x oznacza liczbę godzin).

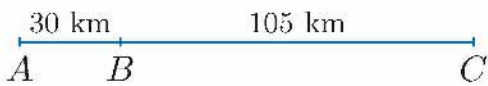
WYPOŻYCZALNIA WAGABUNDA	
• Rower górski	10 zł + 2x zł
• Rower dziecięcy	6 zł + 2x zł

WYPOŻYCZALNIA SZPRYCHA	
• Rower górski	6 zł + 3x zł
• Rower dziecięcy	2 zł + 3x zł

Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczania roweru górskiego w wypożyczalni Wagabunda w zależności od czasu.



- a) Naskicuj analogiczny wykres dla wypożyczalni Szprycha.
- b) Odczytaj z wykresów, dla jakiej liczby godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda, a dla jakiej z wypożyczalni Szprycha.
- c) Chcemy wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Dla jakiej liczby godzin korzystniejsza jest oferta wypożyczalni Wagabunda?

3. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta C o tej samej godzinie.  Piotr startuje z miasta B i jedzie ze stałą prędkością 15 km/h , a Stefan z miasta A i jedzie ze stałą prędkością $22,5 \text{ km/h}$.
- Naszkicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta C w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta C w zależności od czasu.
 - Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?
 - O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią prędkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście C ?
4. Z miasta A o godzinie 8.00 wyjechał rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h . Dwie godziny później z miasta A w tę samą stronę wyjechał samochód, który poruszał się z prędkością 60 km/h . Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności liczby przejechanych kilometrów przez każdy z pojazdów od czasu, jaki upłynął od rozpoczęcia podróży przez pierwszy z nich. Oblicz na podstawie wykresu:
- o której godzinie samochód wyprzedził rowerzystę,
 - jaki dystans dzielił rowerzystę i samochód o godzinie 10.30,
 - o której godzinie samochód oddalił się od rowerzysty o 40 km .
5. Z Kartuz do odległych o 15 km Ostrzyc wyruszył pieszo turysta. Godzinę później z Ostrzyc do Kartuz wyjechał samochód, który minął turystę po 15 minutach jazdy. Po półgodzinnym postoju w Kartuzach kierowca ruszył w drogę powrotną. Po raz kolejny minął turystę zmierzającego do Ostrzyc po 50 minutach od ich ostatniego spotkania. Oblicz, ile czasu zajęła turystyście droga z Kartuz do Ostrzyc. Przyjmij, że turysta szedł całą drogę w tym samym tempie, a kierowca w obie strony jechał z taką samą stałą prędkością.
6. Z miejscowości A do oddalanej o 40 km miejscowości B wyruszył rowerzysta jadący z prędkością 16 km/h . Jednocześnie z miejscowości B do miejscowości A wyruszył drugi rowerzysta, który poruszał się z tą samą prędkością.
- Przedstaw na wykresie i za pomocą wzoru odległość każdego z rowerzystów od miejscowości A w zależności od czasu.
 - Zapisz wzór określający odległość między rowerzystami w zależności od czasu. W jakim czasie od chwili rozpoczęcia podróży odległość ta była równa 8 km ?

5.9. Zagadnienia uzupełniające

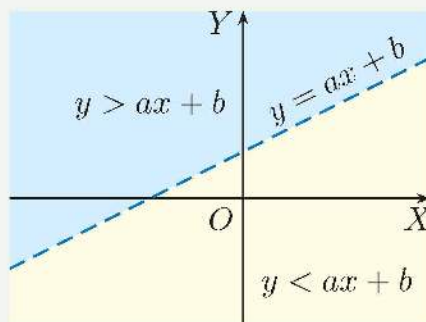
Nierówności liniowe

Półpłaszczyznę zawierającą swoją krawędź nazywamy **półpłaszczyzną domkniętą**. Półpłaszczyznę, do której nie należy żaden punkt z jej krawędzi, nazywamy **półpłaszczyzną otwartą**.

Prosta $l : y = ax + b$ wyznacza dwie półpłaszczyzny otwarte:

- zbiór $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \text{ i } y < ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą poniżej prostej l ,
- zbiór $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \text{ i } y > ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą powyżej tej prostej.

Prosta l jest krawędzią obu półpłaszczyzn.



Przykład 1

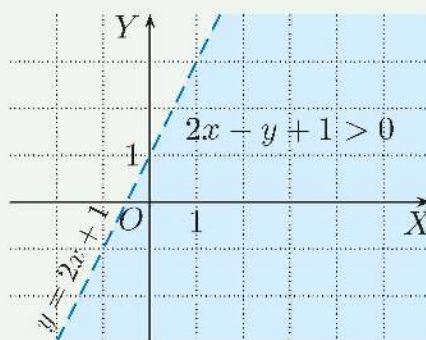
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $2x - y + 1 > 0$.

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y < 2x + 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną otwartą leżącą poniżej prostej $y = 2x + 1$.

Współrzędne punktów tej prostej nie spełniają nierówności $y < 2x + 1$, więc tę prostą rysujemy linią przerywaną.



Przykład 2

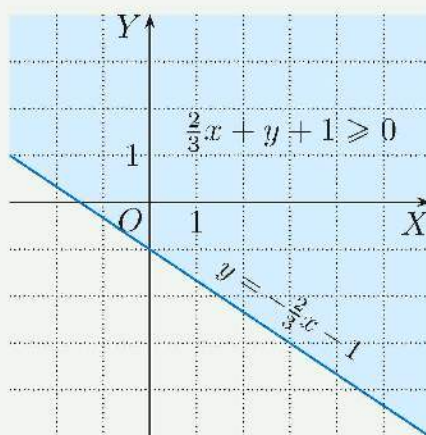
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $\frac{2}{3}x + y + 1 \geq 0$.

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y \geq -\frac{2}{3}x - 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną domkniętą leżącą nad prostą $y = -\frac{2}{3}x - 1$.

Współrzędne punktów tej prostej spełniają nierówność $y \geq -\frac{2}{3}x - 1$, więc tę prostą rysujemy linią ciągłą.



1. Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność:

- a) $-3x + 2y - 6 > 0$, b) $y \geq -\frac{1}{2}x - 1$, c) $y - 2x \leq -3$.

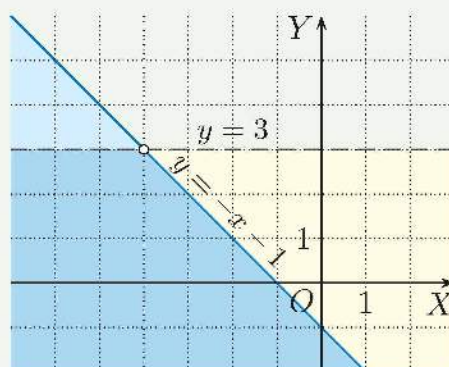
Przykład 3

Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności.

$$\begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ y < 3 \end{cases}$$

Zaznaczamy odpowiednią półpłaszczyznę domkniętą, której krawędzią jest prosta $y = -x - 1$. Dla drugiej nierówności zaznaczamy półpłaszczyznę otwartą ograniczoną z góry prostą $y = 3$. Część wspólna obu półpłaszczyzn jest zbiorem punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności.

Zauważ, że punkt $(-4, 3)$ nie należy do części wspólnej obu półpłaszczyzn.



2. Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności.

a) $\begin{cases} -2x + y - 3 \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y - 2 < 0 \\ -6x + 2y < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y + 3 \geq 0 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$

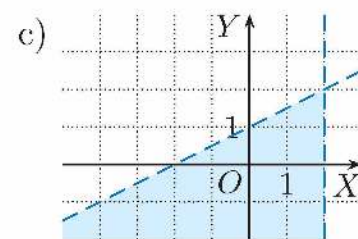
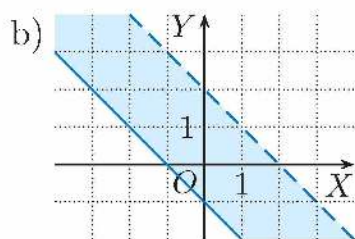
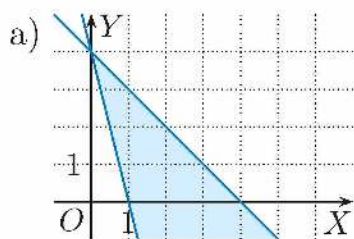
3. Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności. Które z punktów $P(6, 1)$, $Q(-3, 5)$, $R(8, -3)$ należą do otrzymanego zbioru?

a) $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x - y - 5 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + 1 \geq 0 \\ x + 2y - 7 < 0 \end{cases}$

4. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na poniższym rysunku.

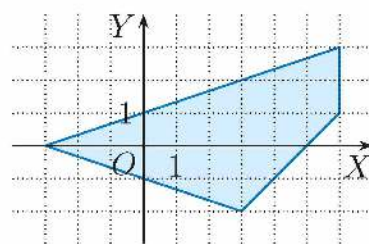


5. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów leżących wewnątrz trójkąta ABC , jeśli:

a) $A(1, 2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 4)$,

b) $A(-6, 7)$, $B(0, 1)$, $C(2, 3)$.

6. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów należących do przedstawionego obok czworokąta. Oblicz pole tego czworokąta.

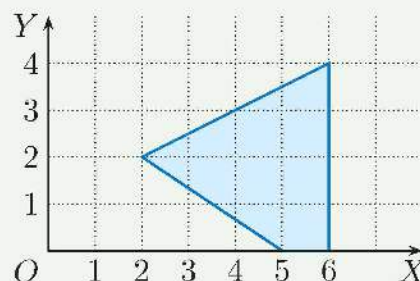


Przykład 4

Chcemy wyznaczyć największą i najmniejszą wartość sumy $x+y$ dla punktów (x, y) należących do wielokąta opisanego za pomocą układu nierówności:

$$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Wielokąt ten przedstawiono na rysunku obok.



Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że wartość największa oraz wartość najmniejsza sumy $x+y$ jest osiągana w którymś z wierzchołków (lub na całym boku) danego wielokąta.

Wierzchołkami wielokąta są punkty: $(5, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 4)$ i $(2, 2)$. Obliczamy dla nich wartości sumy $x+y$:

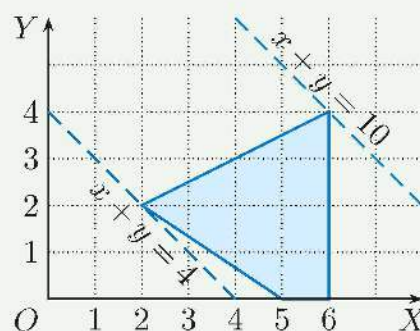
$$(5, 0): x + y = 5 + 0 = 5$$

$$(6, 0): x + y = 6 + 0 = 6$$

$$(6, 4): x + y = 6 + 4 = 10$$

$$(2, 2): x + y = 2 + 2 = 4$$

Zatem największą wartością sumy jest 10, a najmniejszą 4.



W powyższym przykładzie przedstawiono proste zagadnienie z działy matematyki zwanego **programowaniem liniowym**. Dział ten zajmuje się zagadnieniami optymalizacyjnymi, czyli szukaniem najlepszego rozwiązania wśród wszystkich możliwych (np. maksymalizacji zysków lub minimalizacji kosztów). Programowanie liniowe było intensywnie rozwijane podczas II wojny światowej, kiedy wykorzystywano je w logistyce.

7. Znajdź wartość największą i wartość najmniejszą sumy $x+y$ dla wielokąta opisanego układem nierówności.

a)
$$\begin{cases} y \leq 2x + 4 \\ y \geq 2x - 4 \\ y \geq -2 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y \leq 2x + 9 \\ y \geq 2x - 6 \\ y \geq -x - 3 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 6 \leq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 7 \leq 0 \\ x + 3y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Zestawy powtórzeniowe

■ Zestaw I

- Naszkicuj prostą l . Podaj, które z punktów P, Q, R należą do tej prostej.
 - $l: y = 2x - 4, P(5, 6), Q(-3, -10), R(-\frac{7}{2}, -11)$
 - $l: y = \frac{1}{2}x + 2, P(-8, -2), Q(9, \frac{11}{2}), R(17, 10\frac{1}{2})$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich większe od 2?
 - $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$
 - $f(x) = -3x + 5$
 - $f(x) = -2,5x - 3$
- Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji f .
 - $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$
 - $f(x) = \frac{4}{7}x - 8$
 - $f(x) = -3x - 7,5$
- Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
 - $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$
 - $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$
- Sprawdź, czy punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.
 - $A(-4, 1), B(8, 7), C(11, 5)$
 - $A(-4, 4), B(-2, 0), C(1, -6)$
 - $A(2, -7), B(3, -10), C(-2, 5)$
 - $A(-4, -3), B(-2, -2), C(12, 5)$
- Oblicz k , jeśli punkty P i Q należą do wykresu funkcji $y = ax$.
 - $P(\frac{2}{3}, 2), Q(5, k)$
 - $P(k, 6), Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
 - $P(1, 8, 2, 4), Q(12, k)$
- Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt P i równoległa do prostej l . Czy ta funkcja jest malejąca?
 - $l: y = \frac{3}{4}x - 9, P(-8, 3)$
 - $l: y = -6x + 27, P(\frac{5}{12}, \frac{1}{3})$
 - $l: y = -\frac{1}{3}x + 7, P(6, 5)$
 - $l: y = \frac{1}{4}x - 11, P(-6, 1)$
- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-3, -1)$ i prostopadłej do prostej l .
 - $l: y = \frac{1}{2}x - 7$
 - $l: y = -6$
 - $l: 3x - 5y - 1 = 0$
 - $l: y = -4,5x - 5$
 - $l: x = 11$
 - $l: x - y = y + x$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej f , która spełnia warunki:
 - $f(-2) = -4$ i $f(4) = -1$,
 - $f(-8) = 6$ i $f(-3) = 4$,
 - $f(-3) = 2$ i $f(3) = 6$,
 - $f(0) = 0$ i $f(\sqrt{2}) = 2$.



■ Zestaw II

1. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nie-dodatnie, jeśli jej wykresem jest prosta o równaniu:
a) $y = 6x + 18$, b) $y = -\frac{5}{2}x - 10$, c) $\sqrt{2}x + y - 4 = 0$.
2. Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki trójkąta o wierzchołkach: A, B, C . Czy jest to trójkąt prostokątny?
a) $A(0, 0), B(8, 6), C(-6, 8)$ b) $A(-6, 0), B(1, 1), C(-3, 4)$
- D** 3. Wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta o wierzchołkach: $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem.
4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.
a) $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0,5y - 0,125x = 1,5 \\ \frac{1}{8}y - \frac{1}{64}x = \frac{1}{2} \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 3y = -15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ \frac{1}{2}x - y = -1,5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - \frac{3x-4}{2} = 0 \\ y - 1,5x = 5 \end{cases}$
5. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki są zawarte w prostych: l_1, l_2 i l_3 . Narysuj ten trójkąt i oblicz jego pole.
a) $l_1: y = x + 2, l_2: y = -x + 2, l_3: y = -3x + 6$
b) $l_1: 2x - y + 6 = 0, l_2: 3x - 4y + 4 = 0, l_3: y - 4 = 0$
c) $l_1: x - 2y - 4 = 0, l_2: 3x + 4y - 28 = 0, l_3: x + 2 = 0$
6. Przekątne rombu są zawarte w prostych $3x + 4y - 10 = 0$ i $4x - 3y - 5 = 0$, a dwa spośród jego boków w prostych $x - 2y - 5 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$. Narysuj podane proste i odczytaj współrzędne wierzchołków rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki rombu.
7. Narysuj trójkąt prostokątny, którego boki są zawarte w prostych k, l, m i odczytaj współrzędne jego wierzchołków. Wyznacz współrzędne spodka wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego.
a) $k: y = 2x + 2, l: y = \frac{3}{4}x - 3, m: y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$
b) $k: y = -2x - 7, l: y = 2x - 3, m: y = \frac{1}{2}x + 3$
8. Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych $y = \frac{1}{2}x - 1$ i $y = -\frac{2}{3}x + 6$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-1, 2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku.

Przykład 1

Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty P i Q . Współczynnik a jest ujemny, gdy:

A. $P(-\frac{9}{5}, \frac{2}{3}), Q(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3})$,

C. $P(-\frac{7}{2}, -\frac{4}{3}), Q(\frac{5}{2}, \frac{8}{3})$,

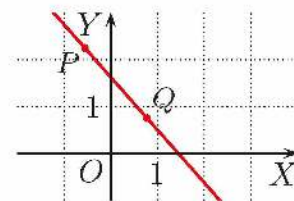
B. $P(\frac{3}{7}, -\frac{7}{6}), Q(\frac{9}{7}, \frac{5}{6})$,

D. $P(-\frac{5}{9}, \frac{9}{4}), Q(\frac{7}{9}, \frac{3}{4})$.

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zaznaczamy punkty P i Q w układzie współrzędnych, aby sprawdzić, w którym przypadku prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej (na rysunku obok przedstawiono prostą PQ dla przypadku D).



- Można zauważyć, że w przypadku D: $x_P < x_Q$ (gdyż $-\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$) oraz $y_P > y_Q$ (gdyż $\frac{9}{4} > \frac{3}{4}$), zatem prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej, czyli $a < 0$.

Odpowiedź: D

Przykład 2

Która para punktów nie należy do prostej $y = ax + 2$ dla żadnej wartości współczynnika a ?

A. $(-8, -5), (8, 9)$

C. $(-8, -6), (4, -2)$

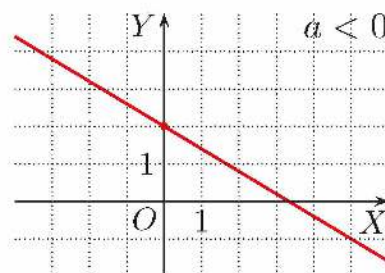
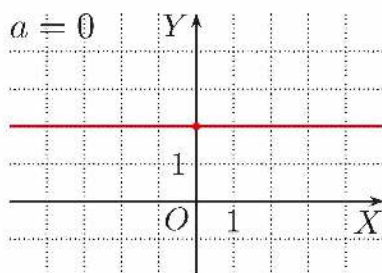
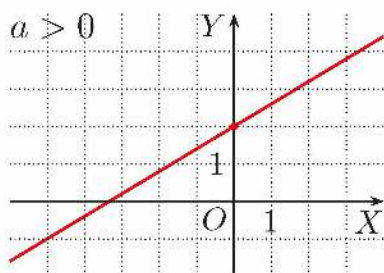
B. $(-9, 6), (9, -2)$

D. $(-10, 4), (5, 1)$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Sprawdzamy współliniowość podanych punktów z punktem $(0, 2)$ w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zauważamy, że prosta $y = ax + 2$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do III i IV ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano w przypadku C.



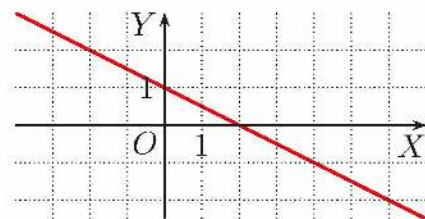
Odpowiedź: C



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji liniowej o wzorze:

A. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$,
 B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, D. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.



2. Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$?

A. I B. II C. III D. IV

3. Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}x + 4$ jest równe:

A. $-2\sqrt{2}$, B. $\sqrt{2}$, C. 2, D. $2\sqrt{2}$.

4. Prosta przechodząca przez punkt $(-1, 6)$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej 1 przecina oś OY w punkcie:

A. $(0, 3)$, B. $(0, \frac{3}{2})$, C. $(0, -3)$, D. $(0, -6)$.

5. Punkt $A(2k, 7)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 2x + 1$ dla:

A. $k = \frac{2}{3}$, B. $k = \frac{3}{2}$, C. $k = \frac{1}{2}$, D. $k = 7$.

6. Do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{3}{4}x + 6$ nie należy punkt:

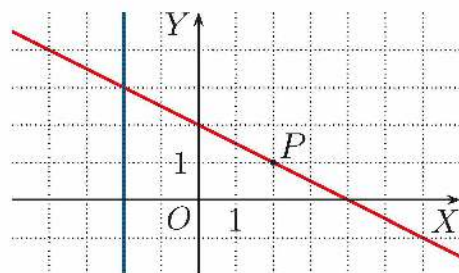
A. $(-8, 12)$, B. $(5\frac{1}{3}, 2)$, C. $(-16, 15)$, D. $(-32, 30)$.

7. Proste $y = 3x + 3m$ i $y = (2m + 1)x + 6$ są prostopadłe, gdy:

A. $m = 0$, B. $m = -1$, C. $m = -\frac{1}{3}$, D. $m = -\frac{2}{3}$.

8. Dwa boki trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku P są zawarte w prostych przedstawionych na rysunku obok. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 20, C. 28,
 B. 24, D. 40.



9. Która para punktów nie należy do prostej $y = a(x - 2)$ dla żadnej wartości współczynnika a ?

A. $(4, 1)$, $(-4, -3)$ C. $(-3, -2)$, $(-1, 3)$
 B. $(-3, -10)$, $(1, -2)$ D. $(1, 3)$, $(3, -3)$



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Dla jakiej wartości współczynnika c miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x + c$ jest równe 6?

D Zadanie 2 (2 pkt)

Uzasadnij, że proste $y = \frac{2}{3}x - (1 - x)$ i $y = 0,4x - (x - 1)$ są prostopadłe.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wyznacz równanie prostej k , jeśli jest ona prostopadła do prostej $l: y = \frac{1}{2}x + 2$ i przecina oś OX w tym samym punkcie co prosta l .

Zadanie 4 (2 pkt)

Znajdź największą liczbę całkowitą m , dla której prosta $y = (\frac{3}{2}m + 9)x - 4$ jest wykresem funkcji malejącej.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (4 pkt)

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osią OX oraz prostymi $2x - y - 2 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$.

D Zadanie 6 (4 pkt)

Dwa boki trójkąta są zawarte w prostych $y = -\frac{3}{4}x + 4$ i $y = \frac{2}{3}x - 6$. Uzasadnij, że jeśli punkty $P(2, -4)$ i $Q(-2, 2)$ należą do trzeciego boku tego trójkąta, to jest on prostokątny.

Zadanie 7 (4 pkt)

Punkty: $A(0, -5)$, $B(8, -3)$, $C(4, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte odcinki AD i CD .

Zadanie 8 (4 pkt)

Punkty $(-3, -5)$ i $(3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $x = -3$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 9 (5 pkt)

Prosta $y = \frac{5}{3}x + 5$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B , a prosta $y = 1,5x - 6$ – w punktach C i D . Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

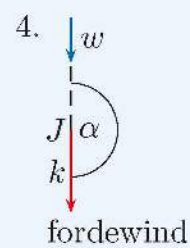
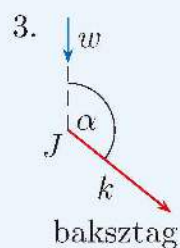
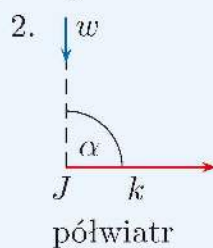
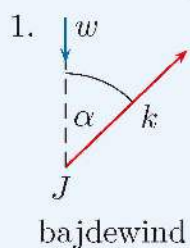
Zadanie 10 (6 pkt)

Wyznacz punkt przecięcia przekątnych prostokąta $PQRS$, jeśli wiadomo, że $P(-3, 0)$, $S(-1, 4)$, a punkt R leży na osi OX .



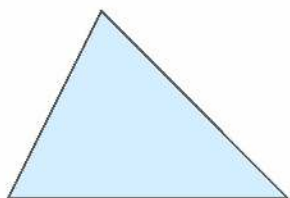
6 Planimetria

Jednym z pojęć omawianych w tym rozdziale jest pojęcie kąta. W żeglarsztwie od kąta między kierunkiem wiatru a kursem jachtu zależy ustawienie żagli. Na poniższych rysunkach podano nazwy kursów jachtu względem wiatru (strzałka w oznacza kierunek wiatru, punkt J – położenie jachtu, a strzałka k – kurs obrany przez jacht).

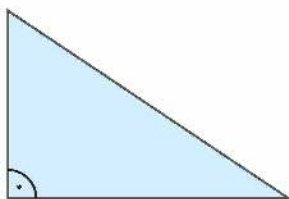


6.1. Miary kątów w trójkącie

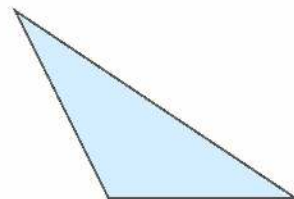
Trójkąt to figura wyznaczona przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z tych punktów jest wierzchołkiem trójkąta, a odcinki łączące wierzchołki nazywamy bokami. Trójkąty można klasyfikować ze względu na ich kąty.



Trójkąt ostrokątny ma wszystkie kąty ostre.
(Kąt ostry to kąt o mierze mniejszej od 90° .)



Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty.
(Kąt prosty to kąt o mierze równej 90° .)



Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty.
(Kąt rozwarty to kąt o mierze większej od 90° i mniejszej od 180° .)

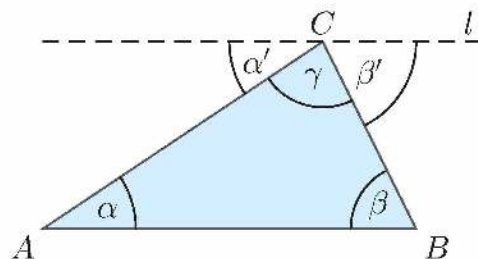
Twierdzenie

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt ABC (rysunek obok). Rysujemy pomocniczą prostą l równoległą do boku AB , przechodzącą przez wierzchołek C . Kąty α i α' są równe (są to kąty naprzemianległe). Również kąty β i β' są równe (jako kąty naprzemianległe). Zatem $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$. $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$, więc również:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



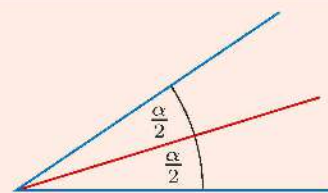
Zauważmy, że powyższe rozumowanie jest takie samo dla trójkąta rozwartokątnego czy prostokątnego. Udowodniliśmy w ten sposób, że suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest równa 180° .

Uwaga. Tam, gdzie nie powoduje to nieporozumień, będziemy zamiennie używać określeń „kąt” i „miara kąta”.

Ćwiczenie 1

- D** a) Wykaż, że trójkąt ABC , w którym kąt B jest dwa razy większy od kąta A , a kąt C jest trzy razy większy od kąta A , jest trójkątem prostokątnym.
b) Stosunek miar kątów trójkąta jest jak $1:4:5$. Podaj miary tych kątów.

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty przystające.



Przykład 1

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B . Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P . Oblicz miarę kąta APC .

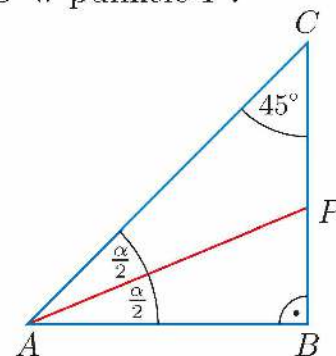
Trójkąt ABC jest prostokątny równoramienny, więc:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 45^\circ$$

Stąd:

$$\sphericalangle CAP = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ$$

Zatem $\sphericalangle APC = 180^\circ - (45^\circ + 22,5^\circ) = 112,5^\circ$.

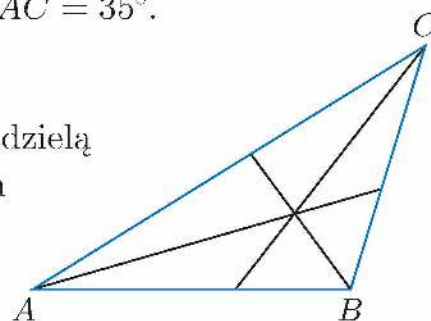


Ćwiczenie 2

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P . Oblicz miary kątów trójkąta APB , jeśli: a) $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, b) $\sphericalangle BAC = 35^\circ$.

Ćwiczenie 3

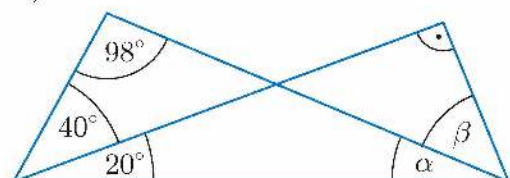
Dwusieczne kątów trójkąta ABC (rysunek obok) dzielą go na sześć trójkątów. Wyznacz miary kątów tych trójkątów, jeśli miary kątów CAB i CBA są odpowiednio równe 32° i 108° .



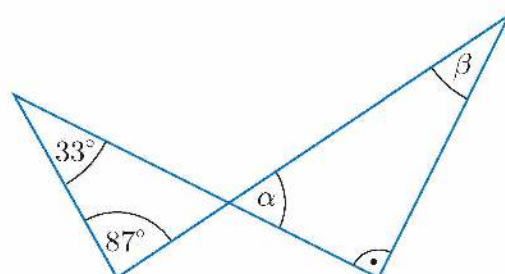
Zadania

1. Wyznacz miary kątów α i β .

a)

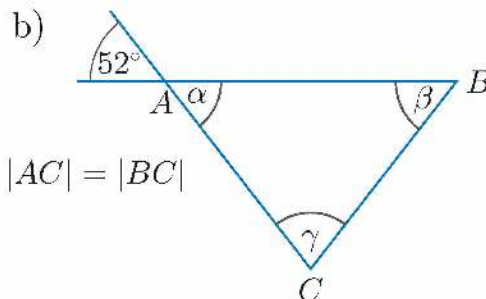
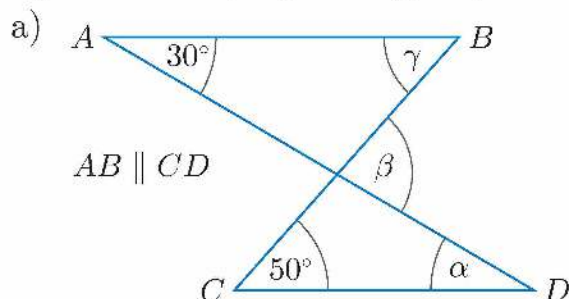


b)



2. Stosunek miar dwóch kątów trójkąta wynosi $2:3$, a miara trzeciego kąta jest o 26° większa od miary najmniejszego kąta. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

3. Wyznacz miary kątów α , β i γ .



4. Wyznacz miary kątów przyległych, jeśli ich stosunek jest równy 1:4.

- D** 5. Uzasadnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

6. Wyznacz miary kątów zewnętrznych trójkąta, jeśli miary jego kątów wewnętrznych są w stosunku 1:2:6.

- D** 7. Wykaż, że miara kąta zewnętrznego γ trójkąta jest równa sumie miar kątów wewnętrznych α i β .

Dwa kąty są **przyległe**, jeśli mają wspólne ramie, a ich pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.

Kąt zewnętrzny trójkąta to kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta.



- D** 8. Wykaż, że suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie jest równa 360° .

9. Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych:

a) w pięciokącie,

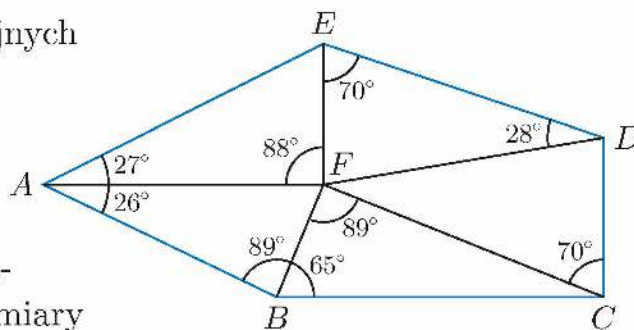
b) w sześciokącie,

c) w n -kącie?

10. Ile boków ma wielokąt, w którym suma miar kątów wewnętrznych jest równa 1440° ?

Powtórzenie

11. Do wykonania pomiarów geodezyjnych wykorzystuje się metodę zwaną triangulacją. Polega ona na podzieleniu mierzonego obszaru na przylegające do siebie trójkąty, czyli utworzeniu tak zwanej siatki triangulacyjnej. Określ miary pozostałych kątów narysowanego obok fragmentu siatki triangulacyjnej.

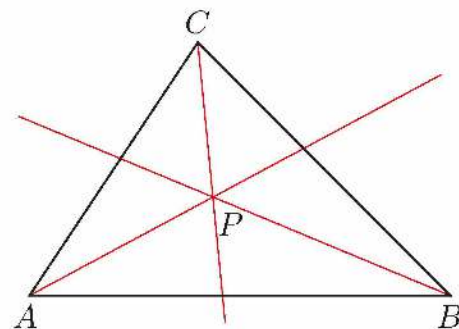


12. Przekątne poprowadzone z jednego wierzchołka pięciokąta foremnego podzieliły pięciokąt na trzy trójkąty. Podaj miary kątów tych trójkątów.

Punkty specjalne w trójkącie

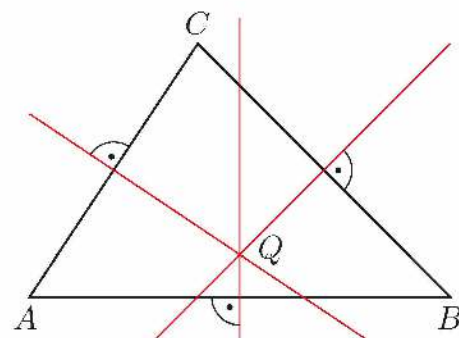
Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty o równych miarach.

Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



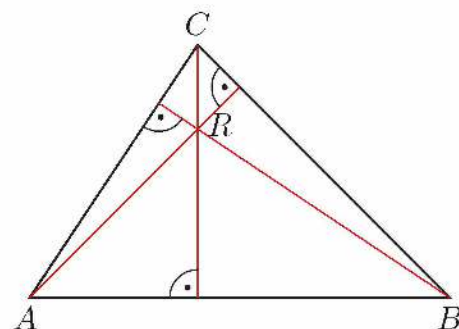
Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka, przechodzącą przez jego środek.

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Wysokością trójkąta nazywamy odcinek prostopadły do boku trójkąta, łączący ten bok (lub jego przedłużenie) z przeciwległym wierzchołkiem.

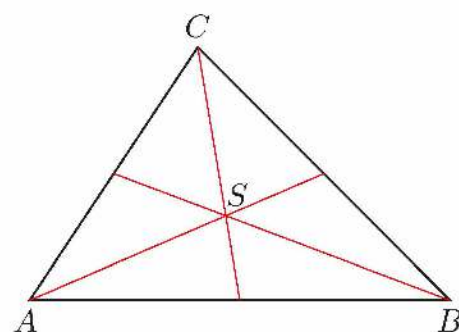
Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Punkt przecięcia wysokości trójkąta nazywamy **ortocentrum trójkąta**.

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Punkt przecięcia środkowych trójkąta nazywamy **środkiem ciężkości** lub **barycentrum trójkąta**. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1, gdy liczymy od wierzchołka.

1. Wskaż wyżej wymienione punkty specjalne w trójkącie:

- a) rozwartokątnym, b) prostokątnym.

6.2. Trójkąty przystające

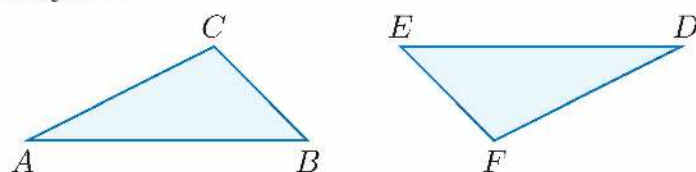
Figury **przystające** to, intuicyjnie, figury tego samego kształtu i wielkości. Dwa wielokąty są **przystające**, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są równe.

W tej lekcji omówimy przystawanie trójkątów.

Symbolem $|AB|$ oznaczać będziemy długość odcinka AB .

Ćwiczenie 1

Trójkąty przedstawione na poniższym rysunku są przystające. Wskaż pary równych boków i kątów.



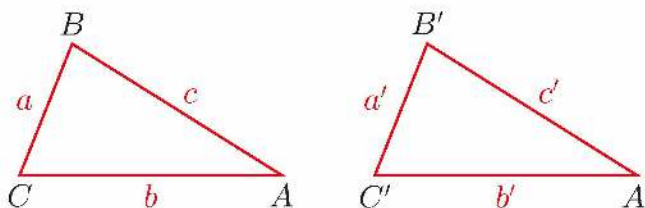
Do stwierdzenia, że trójkąty są przystające, nie jest konieczne porównanie aż 6 par wielkości (3 par kątów i 3 par boków). Przypomnijmy twierdzenia pozwalające wnioskować o przystawaniu trójkątów.

Cecha BBB

Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

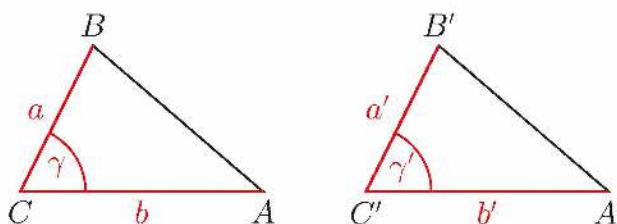


Cecha BKB

Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

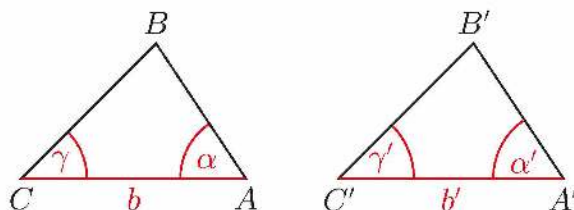


Cecha KBK

Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$



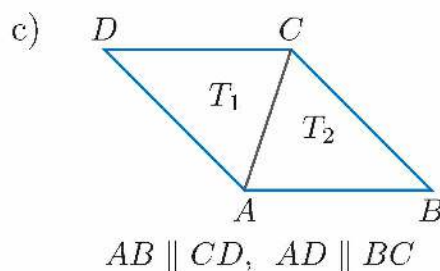
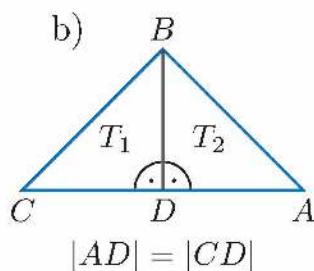
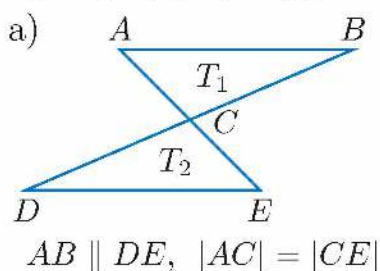
Ćwiczenie 2

Czy przystające są trójkąty, o których wiadomo, że:

- trzy kąty jednego z nich są równe trzem kątom drugiego,
- mają jedną parę równych kątów i dwie pary równych boków?

Ćwiczenie 3

Podaj cechę przystawania, na podstawie której można stwierdzić, że trójkąty T_1 i T_2 są przystające.



Przykład 1

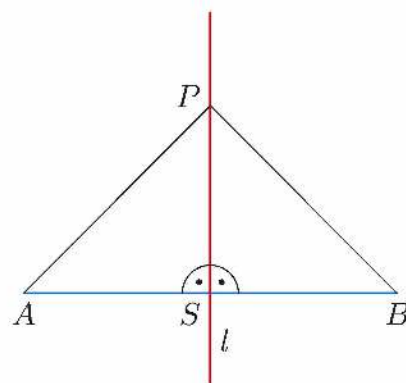
Uzasadnij, że dowolny punkt symetralnej odcinka jest równo oddalony od końców tego odcinka.

Rozpatrzmy odcinek AB i jego symetralną l , tj. prostą przechodzącą przez środek tego odcinka (punkt S) i do niego prostopadłą.

Niech P będzie dowolnym, różnym od S , punktem symetralnej.

Korzystając z cechy KBK, stwierdzamy, że trójkąty ASP i BSP są przystające (uzasadnij).

Zatem zachodzi równość $|AP| = |BP|$.



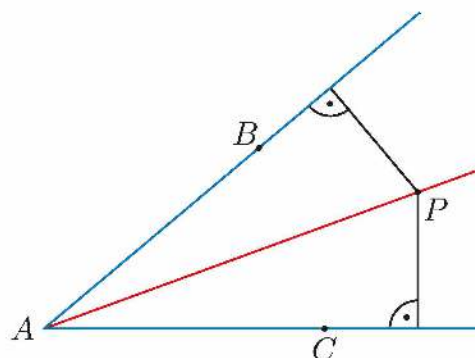
Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

D Ćwiczenie 5

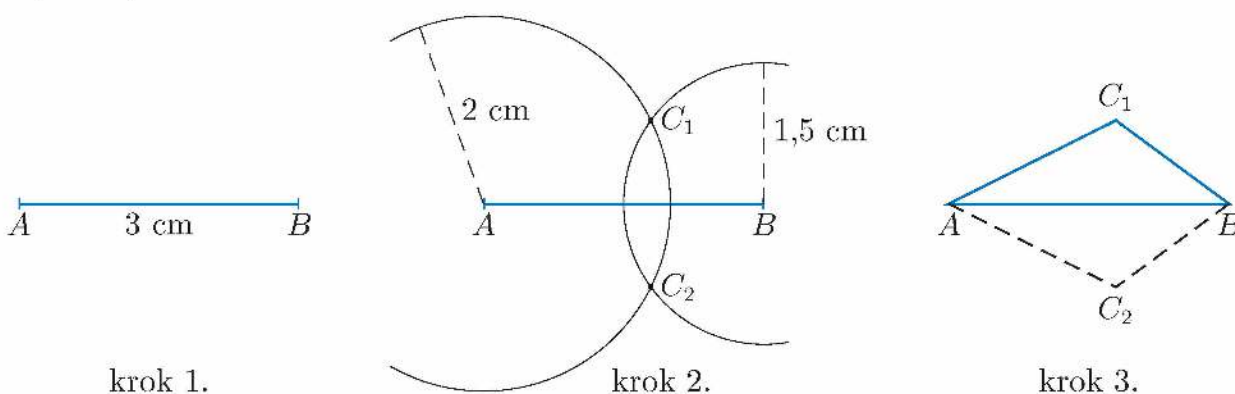
a) Półprosta AP jest dwusieczną kąta BAC (rysunek obok). Korzystając z cechy KBK przystawiania trójkątów, uzasadnij, że punkt P jest równo odległy od ramion tego kąta.

b) Uzasadnij, że dwusieczne kątów dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Przykład 2

Skonstruuj (narysuj za pomocą cyrkla i linijki) trójkąt o bokach długości: 1,5 cm, 2 cm i 3 cm.



W kroku 2. z punktów A i B zataczamy łuki okręgów, które przecinają się w punkcie C_1 oraz w punkcie C_2 .

Konstrukcja trójkąta jest możliwa tylko wtedy, gdy najdłuższy odcinek jest krótszy od sumy dwóch pozostałych.

Nierówność trójkąta

Z odcinków długości: a, b, c można zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy:

$$a + b > c$$

gdzie c jest długością najdłuższego odcinka.

Ćwiczenie 6

Czy boki trójkąta mogą mieć długości:

a) 2, 2, $\sqrt{7}$,

b) 7, 8, $\sqrt{225}$,

c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$,

d) 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$?

Ćwiczenie 7

Na ile sposobów można zbudować trójkąt, jeżeli są do dyspozycji dwa odcinki długości 2 dm, trzy odcinki długości 3 dm i dwa odcinki długości 5 dm?

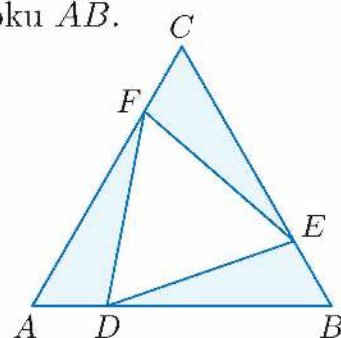
Zadania

- D** 1. a) W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku AB .

Uzasadnij, że trójkąty APD i BPC są przystające.

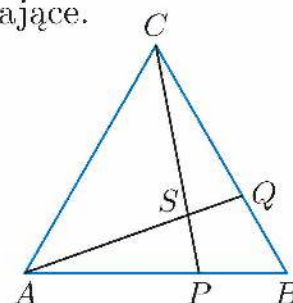
b) Uzasadnij, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy.

- D** 2. Trójkąt ABC jest równoboczny (rysunek obok). Odcinki AD , BE i CF mają równe długości. Uzasadnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.



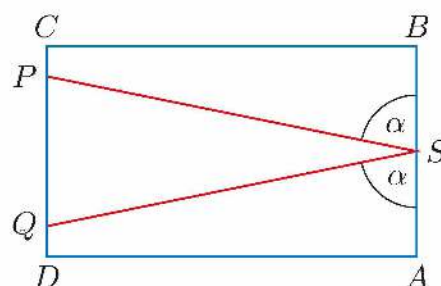
- D** 3. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Środkowe AP i BQ tego trójkąta przecinają się w punkcie O . Uzasadnij, że trójkąty AOQ i BOP są przystające.

- D** 4. W trójkącie równobocznym ABC (rysunek obok) na bokach AB i BC wybrano odpowiednio punkty P i Q tak, że $|AP| = 2|BP|$ i $|CQ| = 2|BQ|$. Odcinki AQ i CP przecinają się w punkcie S . Uzasadnij, że trójkąty APS i CQS są przystające.



- D** 5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dwie pary boków są równe: $|AB| = |BC|$ oraz $|CD| = |DA|$. Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie O . Uzasadnij, że trójkąt AOB jest przystający do trójkąta COB oraz trójkąt AOD jest przystający do trójkąta COD .

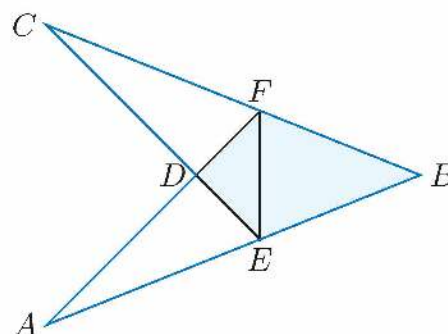
- D** 6. Kula bilardowa odbija się od bandy stołu bilardowego pod takim samym kątem, pod jakim w nią uderzyła (rysunek obok). Kula przebyła drogę z P do S i z S do Q , gdzie S jest środkiem bandy AB . Uzasadnij, że $|PC| = |QD|$.



- D** 7. Uzasadnij, że jeśli wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej kąta tego trójkąta, to trójkąt ten jest równoramienny.

- D** 8. W czworokącie $ABCD$ (rysunek obok) kąty EFB i FEB są równe oraz $|AE| = |CF|$. Uzasadnij, że:

- a) trójkąty BAF i BCE są przystające,
b) czworokąt $DEBF$ ma dwie pary boków równych.

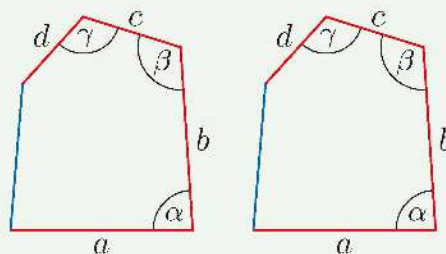


Czy wiesz, że...

Cechy przystawania można sformułować również dla wielokątów o większej liczbie boków. Poniżej przedstawiamy cechy przystawania pięciokątów.

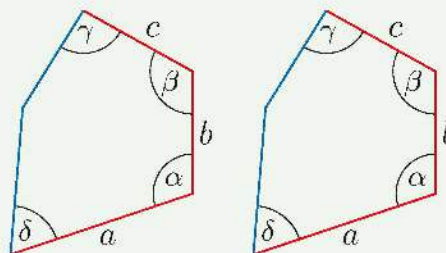
Cecha BKBKBK

Jeżeli cztery boki oraz kąty zawarte między tymi bokami w jednym pięciokącie są odpowiednio równe czterem bokom oraz kątom zawartym między tymi bokami w drugim pięciokącie, to pięciokąty te są przystające.

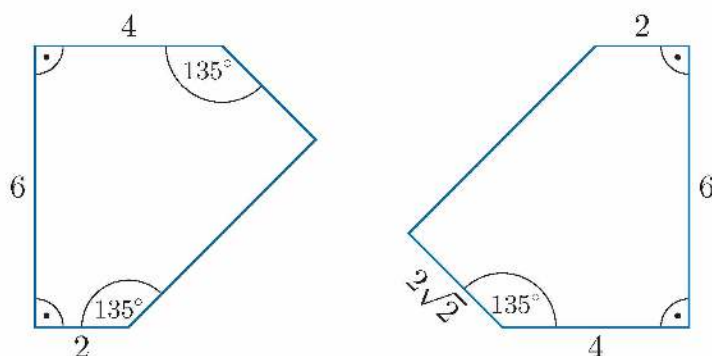


Cecha KBKBKB

Jeżeli trzy kolejne boki oraz cztery kąty leżące przy tych bokach w jednym pięciokącie są odpowiednio równe trzem kolejnym bokom oraz czterem kątom leżącym przy tych bokach w drugim pięciokącie, to pięciokąty te są przystające.



- D** 9. Uzasadnij, że przedstawione na rysunku pięciokąty są przystające.



Powtórzenie

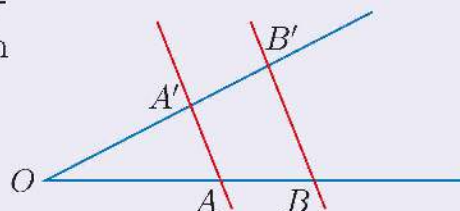
10. Na ile trójkątów przystających wszystkie osie symetrii dzielą:
a) trójkąt równoboczny, b) kwadrat, c) sześciokąt foremny?
- D** 11. Korzystając z odpowiedniej cechy przystawania trójkątów, uzasadnij, że przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty przystające.
- D** 12. Dany jest ośmiokąt foremny $ABCDEFGH$. Uzasadnij, że czworokąt $ACEG$ jest kwadratem.
13. Danych jest pięć odcinków o długościach: 1 cm, 2 cm, 2,5 cm, 5 cm i 7 cm. Ile różnych trójkątów można zbudować z tych odcinków?

6.3. Twierdzenie Talesa

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta AOA' są przecięte dwiema prostymi równoległymi AA' i BB' , to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu tego kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu:

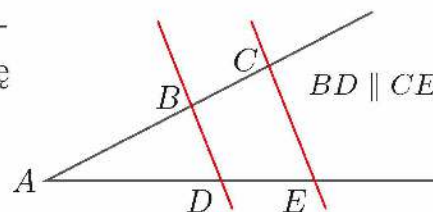
$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}$$



Ćwiczenie 1

a) Długość którego odcinka (rysunek obok) należy wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać proporcję prawdziwą? Zapisz tę proporcję w zeszycie.

$$\frac{?}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}, \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{?}{|DE|}$$



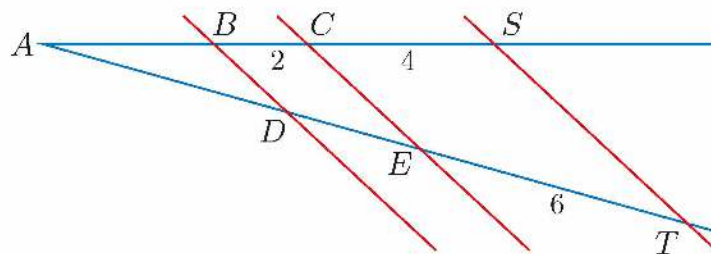
b) Oblicz długość odcinka AD , jeśli: $|AB| = 3,6$; $|AC| = 5,4$; $|DE| = 1,2$.

Ćwiczenie 2

Proste: BD , CE i ST (rysunek obok) są równoległe.

D a) Uzasadnij, że:

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$$

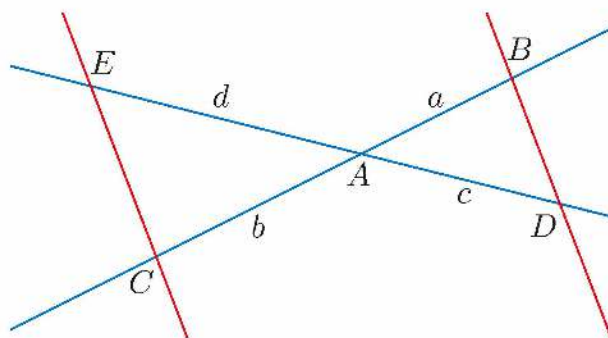


b) Oblicz długości odcinków: AD i DE , jeśli $|AS| = 10$.

Zauważmy, że równość $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ zachodzi również w sytuacji przedstawionej na rysunku poniżej ($BD \parallel CE$).

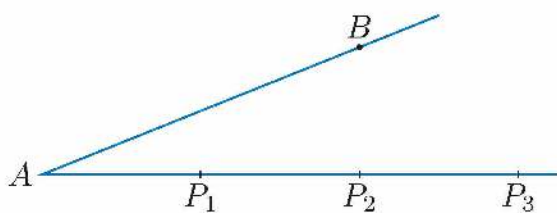
Ćwiczenie 3

Oblicz długość odcinka ED (rysunek obok), jeśli $a = 3,6$, $b = 4,8$, $c = 4,5$ oraz proste BD i CE są równoległe.

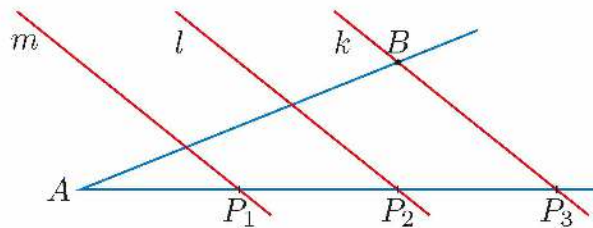


Przykład 1

Za pomocą cyrkla i linijki podziel dany odcinek AB na trzy równe części.



Odcinek AB umieszczamy na jednym ramieniu kąta. Na drugim ramieniu odmierzymy trzy odcinki tej samej (dowolnej) długości. Są to odcinki AP_1 , P_1P_2 i P_2P_3 .



Przez punkt P_3 i B prowadzimy prostą (prosta k), następnie konstruujemy dwie proste równoległe do prostej k przechodzące przez punkty P_2 i P_1 (proste l i m). Patrz str. 254.

Zgodnie z twierdzeniem Talesa odcinki wyznaczone na ramionach kąta przez proste równoległe są proporcjonalne, więc opisana konstrukcja prowadzi do podziału odcinka AB na trzy równe części.

Ćwiczenie 4

Jak za pomocą cyrkla i linijki podzielić dany odcinek:

- a) na 5 równych części, b) na 7 równych części, c) w stosunku 4:5?

Prawdziwe jest również **twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa** – mówi ono, że z proporcji odpowiednich odcinków wynika równoległość prostych.

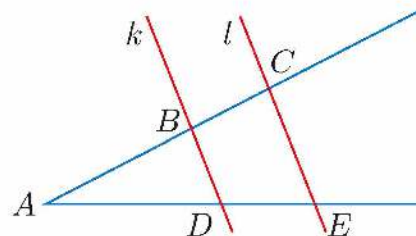
Twierdzenie

Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.

Ćwiczenie 5

- a) Podaj przykłady proporcji, z których wynika równoległość prostych k i l (rysunek obok).

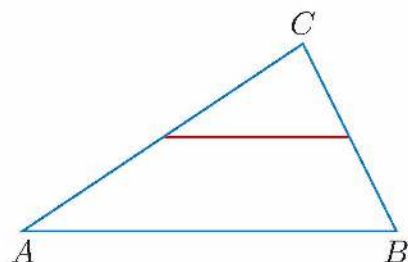
- D** b) Uzasadnij, że jeśli $|AB| = 2,4$, $|AC| = 3,6$, $|AD| = 2,8$ i $|DE| = 1,4$, to proste BD i CE są równoległe.



D

Ćwiczenie 6

Wykaż, że w dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego boku.



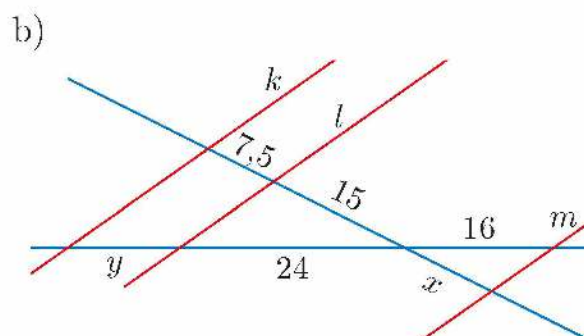
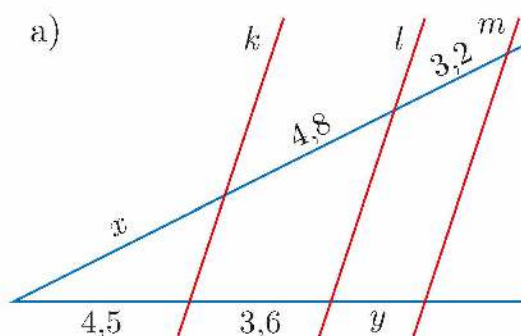
Ćwiczenie 7

Wykaż, że w trapezie niebędącym równoległobokiem odcinek łączący środki:

- ramion trapezu jest równoległy do jego podstaw (rozpatrz kąt otrzymany przez przedłużenie ramion trapezu),
- *b) przekątnych trapezu jest równoległy do jego podstaw.

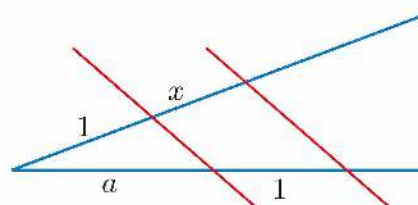
Zadania

- Wiedząc, że proste k , l i m są równoległe, oblicz długości x i y .

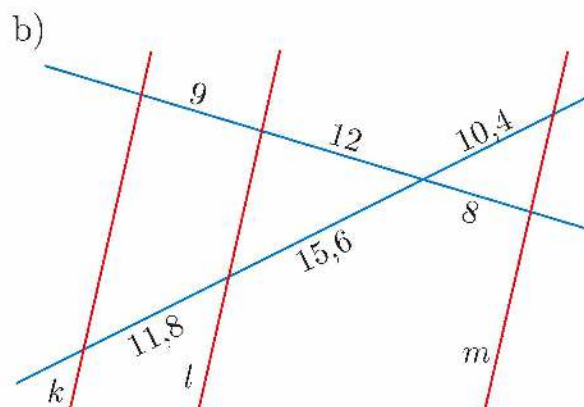
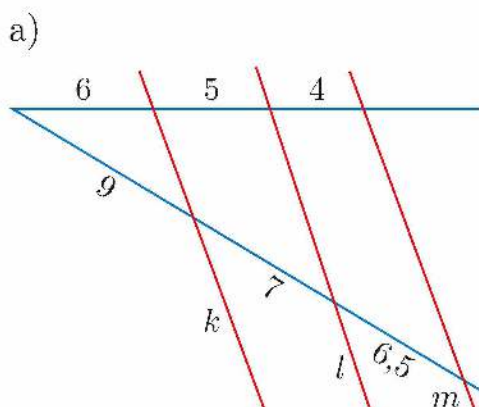


- Dany jest trapez $ABCD$ o ramionach $|AD| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm. Na ramieniu AD wybrano punkty P i Q takie, że $|AQ| = 7$ cm i $|DP| = 5$ cm. Oblicz długości odcinków, na jakie proste równoległe do podstaw trapezu i przechodzące przez punkty P i Q podzieliły ramię BC .

- Na rysunku pokazano, jak – mając dane odcinki o długościach 1 i a – skonstruować odcinek o długości $x = \frac{1}{a}$. Opisz, jak mając dane odcinki o długościach 1 i a , skonstruować odcinki o długościach a^2 i a^3 .

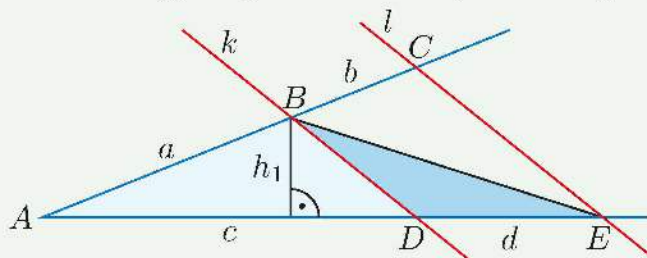


- Opisz, jak podzielić dany odcinek w stosunku $1 : \sqrt{2}$.
- Sprawdź, które z prostych k , l i m są równoległe.



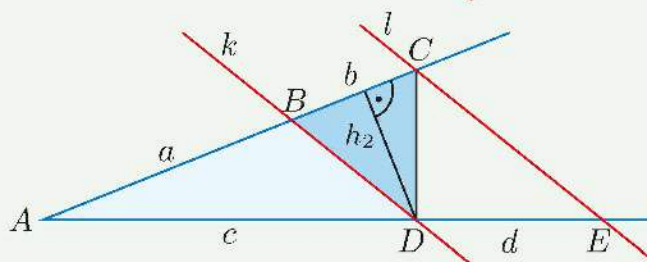
Dowód twierdzenia Talesa

Zakładamy, że proste k i l są równoległe (rysunek poniżej).



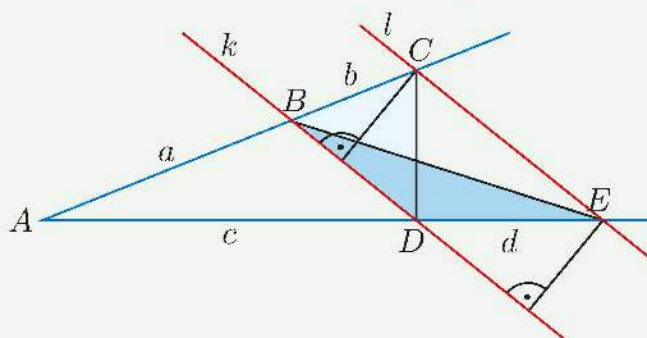
Trójkąty ADB i DEB mają wspólną wysokość h_1 , zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2}ch_1}{\frac{1}{2}dh_1} = \frac{c}{d}$$



Trójkąty ADB i CBD mają wspólną wysokość h_2 , zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{CBD}} = \frac{\frac{1}{2}ah_2}{\frac{1}{2}bh_2} = \frac{a}{b}$$



Trójkąty DEB i CBD mają wspólną podstawę BD oraz tę samą wysokość (gdyż proste k i l są równoległe). Zatem:

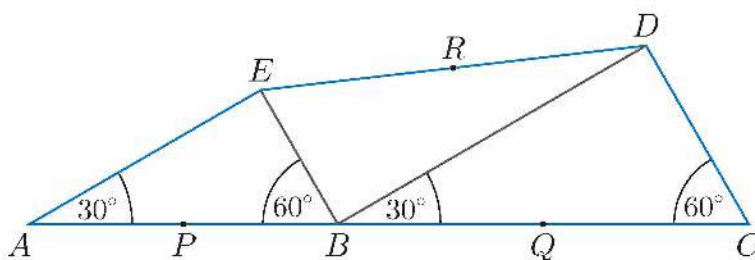
$$P_{DEB} = P_{CBD}$$

Zatem otrzymujemy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lub równoważnie $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Powtórzenie

6. Dany jest trapez $ABCD$, którego ramię AD ma długość 30 cm. Punkt P leży na ramieniu AD , punkt Q na ramieniu BC oraz $PQ \parallel AB$. Oblicz x i y , jeśli $|AP| = x$ cm, $|PD| = y$ cm, $|BQ| = (x+2)$ cm, $|QC| = (y+3)$ cm.

- D** 7. Punkty P , Q i R są środkami odcinków: AB , BC i DE (rysunek poniżej).

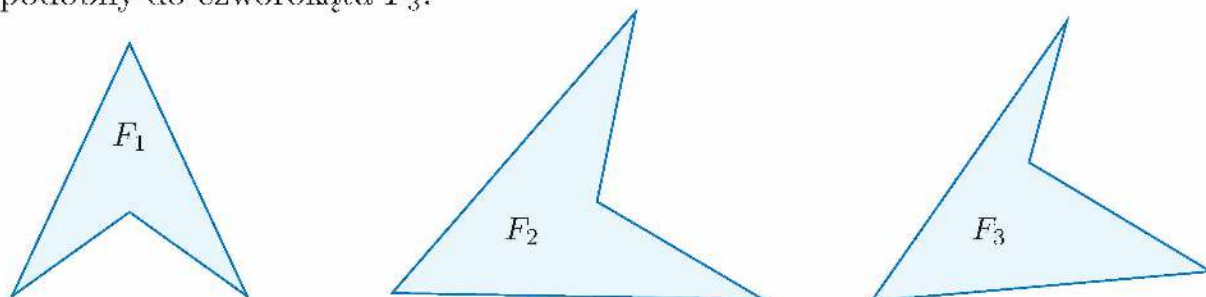


- a) Uzasadnij, że czworokąty $BCDE$ i $ABDE$ są trapezami.
b) Wykaż, że $RQ \parallel DC$ i $PR \parallel BD$ oraz że trójkąt PQR jest prostokątny.

6.4. Wielokąty podobne

Dwie figury geometryczne są **podobne**, jeśli są tego samego kształtu, lecz niekoniecznie tej samej wielkości. Na przykład podobne są dwa dowolne koła, dwa dowolne kwadraty czy trójkąty równoboczne.

Na rysunku poniżej podobne są czworokąty F_1 i F_2 . Żaden z nich nie jest podobny do czworokąta F_3 .



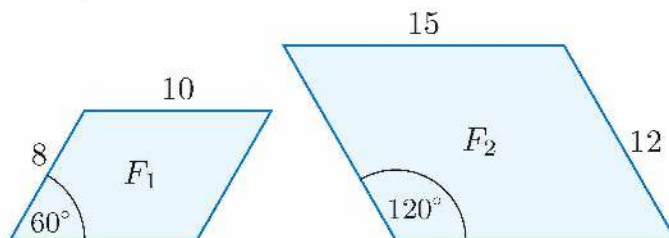
Dwa wielokąty są **podobne**, jeśli ich odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne.

Jeśli figury F_1 i F_2 są podobne, to piszemy $F_1 \sim F_2$.

D Przykład 1

Uzasadnij, że równoległoboki F_1 i F_2 są podobne.

Długości boków równoległoboków F_1 i F_2 są proporcjonalne, ponieważ $\frac{15}{10} = \frac{12}{8}$, a ich odpowiednie kąty są równe. Zatem $F_1 \sim F_2$.



Ćwiczenie 1

Dany jest prostokąt P_1 o bokach $a = 2,4$ i $b = 1,8$. Sprawdź, czy prostokąt ten jest podobny do prostokąta P_2 o bokach c i d .

a) $c = 3,6$, $d = 2,7$

b) $c = 4$, $d = 6$

c) $c = 54$, $d = 72$

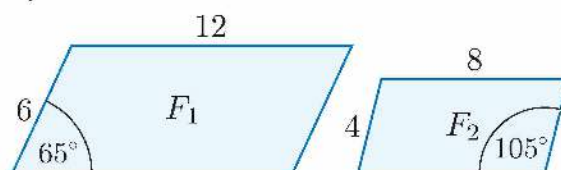
Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równoległoboki F_1 i F_2 są podobne.

a)



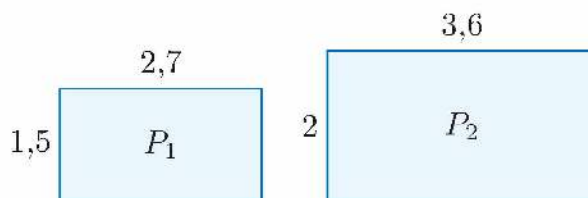
b)



Stosunek długości odpowiadających sobie odcinków w wielokątach podobnych nazywamy **skala podobieństwa** (zwykle oznaczamy ją literą k).

Przykład 2

Prostokąty P_1 i P_2 (rysunek obok) są podobne. Podaj skalę podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz prostokąta P_1 do prostokąta P_2 .



Skala podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa:

$$k_1 = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$$

Zwróć uwagę, że również $\frac{3,6}{2,7} = \frac{4}{3}$.

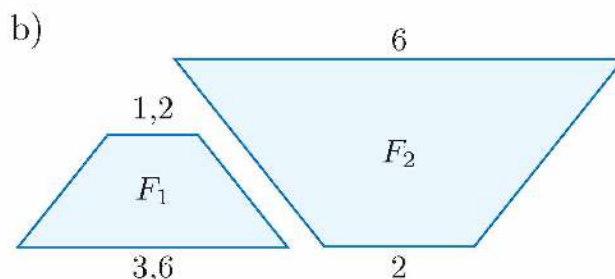
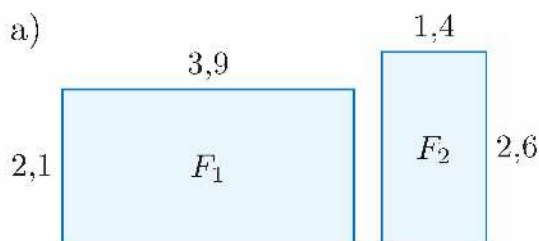
Skala podobieństwa prostokąta P_1 do prostokąta P_2 jest równa:

$$k_2 = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{Zauważ, że skale podobieństwa } k_1 \text{ i } k_2 \text{ są liczbami odwrotnymi.}$$

Zwróć uwagę, że jeśli figury F_1 i F_2 są przystające, to są podobne, a ich skala podobieństwa jest równa 1.

Ćwiczenie 3

Figury F_1 i F_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa figury F_2 do figury F_1 oraz skalę podobieństwa figury F_1 do figury F_2 .



Przykład 3

Dane są prostokąty: P_1 o bokach $a_1 = 5$ i $b_1 = 8$ oraz podobny do niego P_2 o krótszym boku $a_2 = 15$. Oblicz długość drugiego boku prostokąta P_2 .

Oznaczmy przez b_2 długość szukanego boku. Prostokąty są podobne, zatem:

$$\frac{b_2}{8} = \frac{15}{5} \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

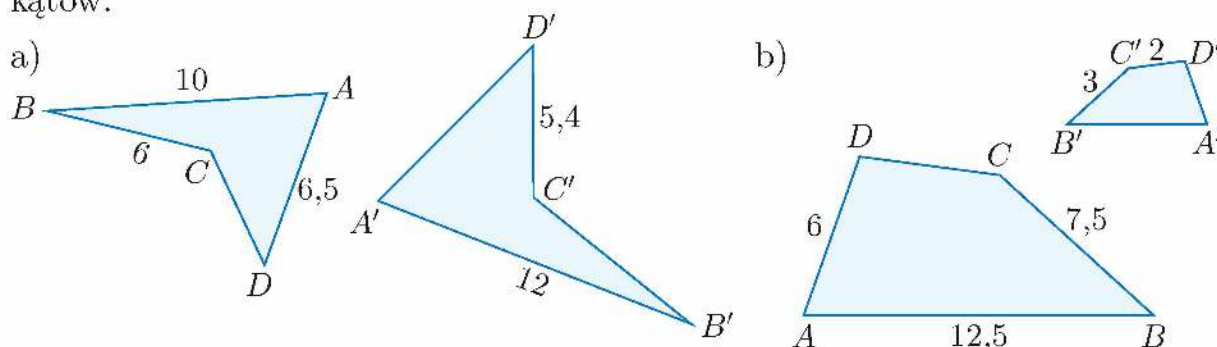
Stąd $\frac{b_2}{8} = 3$, czyli $b_2 = 24$.

Długość boku b_2 można też wyznaczyć, obliczając najpierw skalę podobieństwa. Skala podobieństwa k prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa 3, co oznacza, że:

$$b_2 = k \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$$

Ćwiczenie 4

Czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są podobne. Oblicz skalę podobieństwa większego czworokąta do mniejszego oraz brakujące długości boków tych czworokątów.



Ćwiczenie 5

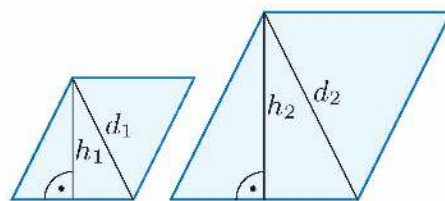
Przeczytaj informację w ramce, a następnie wyznacz szukane wielkości.

Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach długości 6 cm i 12 cm. Jego krótsza przekątna tworzy z jego krótszym bokiem kąt prosty. Równoległobok $A'B'C'D'$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$, a jego krótsza przekątna ma długość $9\sqrt{3}$ cm.

- Oblicz obwód równoległoboku $A'B'C'D'$.
- Oblicz wysokości obu równoległoboków.

Jeśli dwa wielokąty są podobne w skali k , to proporcjonalne są nie tylko ich boki, lecz także inne odpowiadające sobie odcinki, na przykład wysokości czy przekątne.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2} = k$$



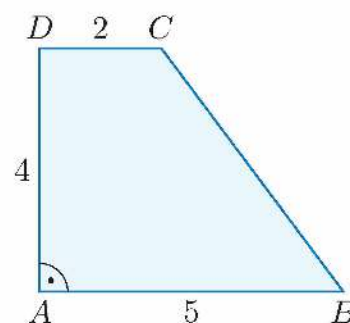
Zadania

- Oblicz skalę podobieństwa kwadratu K_1 o boku 5 cm do kwadratu K_2 :
 - o przekątnej $8\sqrt{2}$ cm,
 - o obwodzie 40 cm.
- Trapez o podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz skalę podobieństwa otrzymanych trapezów.
- Dany jest prostokąt P o bokach długości 12 cm i 8 cm. Oblicz obwód prostokąta P' , jeśli skala podobieństwa prostokąta:
 - P' do P jest równa 3,
 - P do P' jest równa 2.
- Uzasadnij, że dwa prostokąty są podobne, gdy stosunek długości do szerokości jest w obu prostokątach taki sam.

5. a) Dwa romby są podobne w skali $k = \frac{5}{2}$. Oblicz obwód każdego z nich, jeśli długości przekątnych mniejszego są równe 12 i 16.

b) Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 10 i 24, obwód podobnego do niego rombu $A'B'C'D'$ jest równy 78. Oblicz skalę podobieństwa większego rombu do mniejszego.

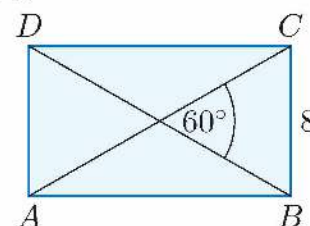
6. Trapez $A'B'C'D'$ o obwodzie równym 24 jest podobny do trapezu prostokątnego $ABCD$ (rysunek obok). Oblicz długości boków trapezu $A'B'C'D'$.



7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o bokach długości 9 cm, 12 cm i 15 cm. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = \frac{25}{24}$. Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną w każdym z tych trójkątów oraz sumę ich obwodów.

8. Dwa kwadraty o przekątnych długości d_1 i d_2 są podobne w skali $k = \sqrt{2}$. Oblicz sumę obwodów tych kwadratów, jeśli $d_1 + d_2 = 2$.

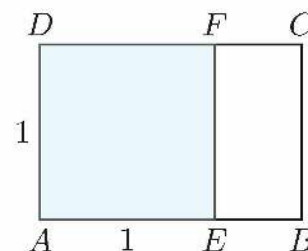
9. Prostokąt $A'B'C'D'$ jest podobny do prostokąta $ABCD$ (rysunek obok). Oblicz skalę podobieństwa tych figur, jeśli obwód prostokąta $A'B'C'D'$ jest równy $20 + 20\sqrt{3}$.



- D** 10. Prostokąt o bokach długości x i 4, gdzie $x > 4$, jest podobny do prostokąta o bokach długości 6 i $x + 5$. Uzasadnij, że suma obwodów tych prostokątów jest równa 70.

- D** 11. Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1. Uzasadnij, że po odcięciu od tego prostokąta kwadratu o boku 1 (rysunek obok) otrzymamy prostokąt $BCFE$ podobny do prostokąta $ABCD$.

Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nosi nazwę **złotej liczby**.



Powtórzenie

12. Czy prostokąty o podanych wymiarach są podobne? Jeśli tak, to oblicz ich skalę podobieństwa.
- a) 12×18 oraz $5 \times 7,5$ b) $1,5 \times 2,5$ oraz $10,5 \times 17,5$
13. Prostokąt P_1 o bokach 6 cm i 9 cm jest podobny do prostokąta P_2 . Oblicz długości boków prostokąta P_2 , jeśli jego:
- a) obwód jest równy 50 cm, b) przekątna ma długość $2\sqrt{13}$ cm.

6.5. Trójkąty podobne

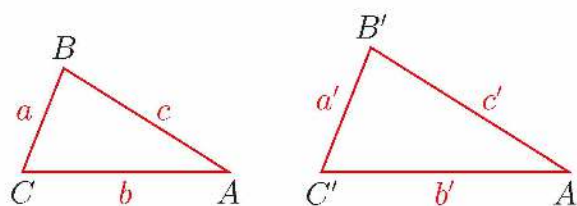
Aby ustalić podobieństwo trójkątów, nie musimy sprawdzać przystawania wszystkich kątów i proporcjonalności wszystkich boków. Możemy skorzystać z twierdzeń znanych jako **cechy podobieństwa trójkątów**.

Cecha BBB

Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

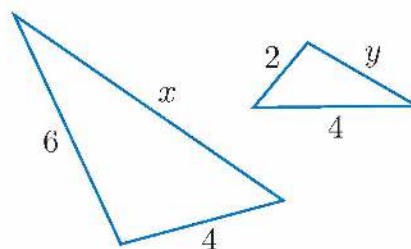
Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Ćwiczenie 1

Przedstawione na rysunku trójkąty są podobne. Oblicz długości boków x i y tych trójkątów. Podaj skalę podobieństwa.



Ćwiczenie 2

Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy te trójkąty są podobne?

a) 6, 8, 12 oraz 9, 12, 18

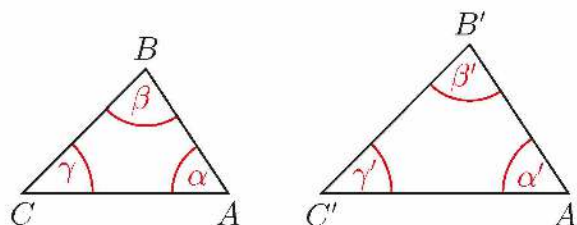
b) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ oraz 9, 15, 20

Cecha KKK

Jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Ćwiczenie 3

a) Uzasadnij, że jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

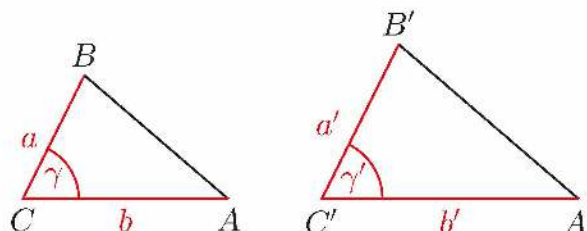
b) Uzasadnij, że trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ma miarę 27° , jest podobny do trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ma miarę 63° .

Cecha BKB

Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

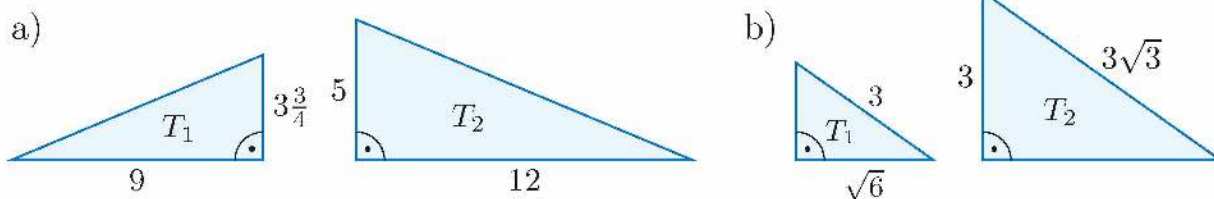


D Ćwiczenie 4

Dane są trójkąty prostokątne T_1 i T_2 . Uzasadnij, że jeśli stosunek długości przyprostokątnych w trójkącie T_1 równa się stosunkowi długości przyprostokątnych w trójkącie T_2 , to trójkąty te są podobne.

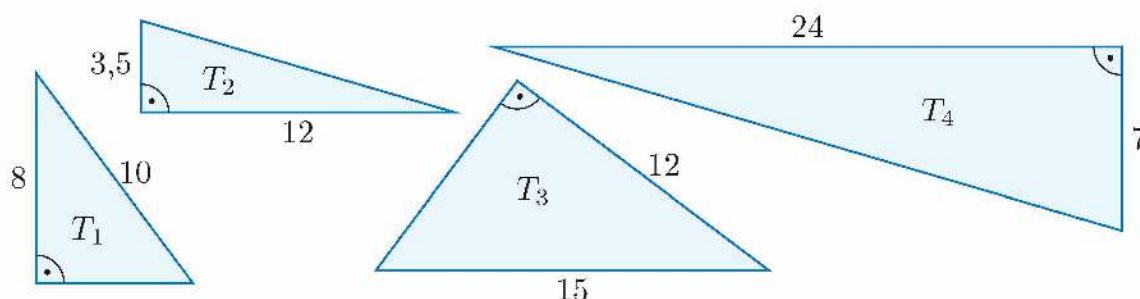
D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa trójkąta T_1 do trójkąta T_2 .



Zadania

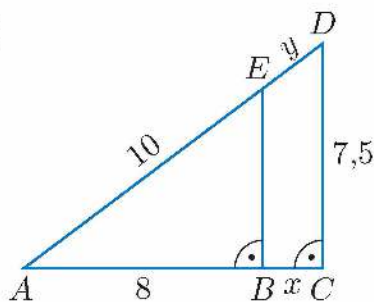
1. Wśród trójkątów przedstawionych na rysunku wskaż pary trójkątów podobnych. Dla każdej pary podaj skalę podobieństwa.



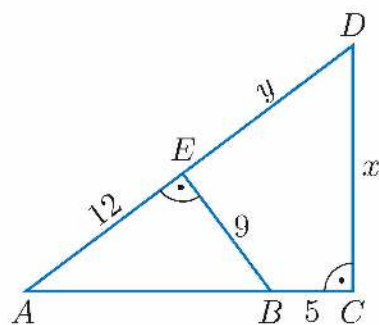
2. a) Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: 6, 8, 12. Najdłuższy bok trójkąta $A'B'C'$ jest równy 16 oraz $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Jaka jest skala podobieństwa tych trójkątów? Oblicz obwód trójkąta $A'B'C'$.
b) Trójkąt ABC , którego obwód jest równy 55, jest podobny do trójkąta o bokach długości: 4, 8, 10. Oblicz długości boków trójkąta ABC .

3. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, oblicz długości odcinków x i y .

a)

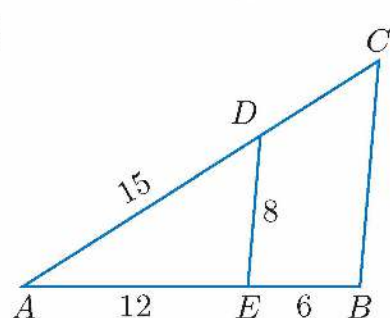


b)

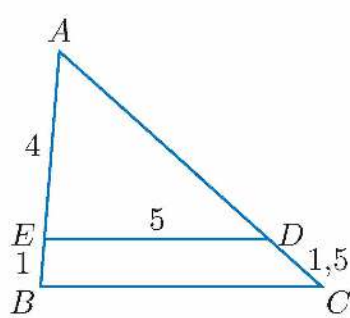


4. Wiedząc, że $ED \parallel BC$, oblicz obwód trójkąta ABC .

a)



b)

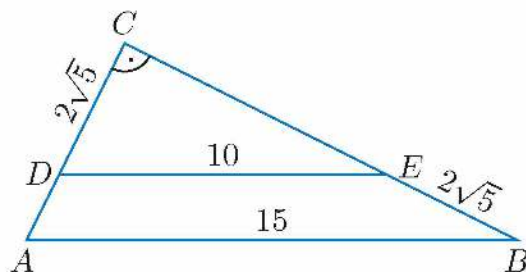


5. a) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych 12 i 16 jest podobny do trójkąta o obwodzie równym 6. Oblicz długości przeciwprostokątnych obu trójkątów.

b) Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 100 jest podobny do trójkąta o przyprostokątnych 12 i 3,5. Oblicz obwody obu trójkątów.

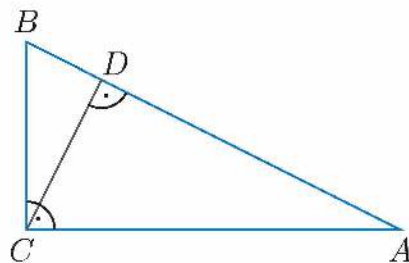
- D** 6. Uzasadnij, że $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Oblicz:

- a) skalę podobieństwa tych trójkątów,
b) obwody tych trójkątów.



- D** 7. a) Wypisz pary trójkątów podobnych (rysunek poniżej). Odpowiedź uzasadnij.

b) W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 3 i 4 poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Oblicz długości odcinków, na jakie wysokość ta podzieliła przeciwprostokątną.

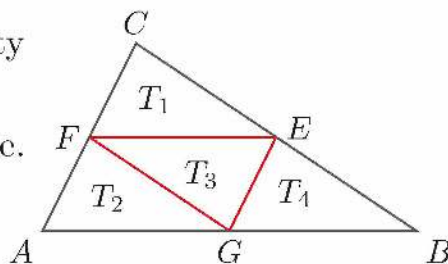


8. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki długości 2 cm i 8 cm.

- D** 9. W trójkącie ostrokątnym DEF poprowadzono wysokości DM i EN . Wykaż, że trójkąty FEN i FDM są podobne.

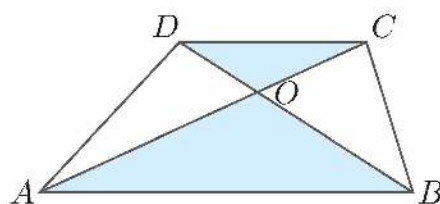
- D** 10. W trójkącie ABC połączono odcinkami punkty będące środkami boków (rysunek obok).

- a) Wykaż, że trójkąty ABC i EFG są podobne.
b) Uzasadnij, że trójkąty: T_1 , T_2 , T_3 i T_4 są przystające.



- D** 11. a) Dany jest trapez o podstawach AB i CD . Jego przekątne przecinają się w punkcie O . Uzasadnij, że trójkąty ABO i CDO są podobne.

- b) Jaka jest odległość punktu O (rysunek obok) od krótszej podstawy, jeśli wysokość trapezu wynosi 6 cm, a długości podstaw są równe odpowiednio 4 cm i 8 cm? Oblicz pola trójkątów ABO i CDO .

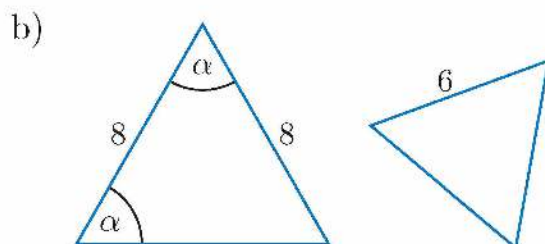
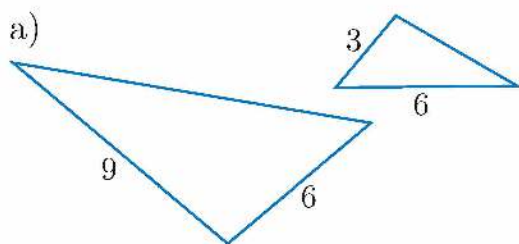


- D** 12. a) Dany jest trapez o podstawie AB i przekątnych AC i BD . Wykaż, że jeśli przekątne trapezu przecinają się w punkcie O , to pola trójkątów AOD i BOC są równe.

- b) Dłuższa podstawa trapezu ma długość 10 cm. Punkt przecięcia przekątnych tego trapezu jest odległy o 5 cm od jego dłuższej podstawy i o 3 cm – od krótszej. Oblicz pola trójkątów, na które przekątne dzielą trapez.

Powtórzenie

13. Trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Oblicz długości pozostałych boków tych trójkątów. Podaj skalę podobieństwa.



- D** 14. Uzasadnij, że trójkąty o podanych długościach boków są podobne.

- a) 2, 7, 8 oraz 3, $10\frac{1}{2}$, 12 b) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 4 oraz 2, 4, $4\sqrt{2}$

15. Trójkąt prostokątny CDE ma przeciwprostokątną długości $2\sqrt{5}$ i jest podobny do trójkąta ABO o wierzchołkach: $A(-6, 0)$, $B(0, 3)$, $O(0, 0)$. Podaj skalę podobieństwa tych trójkątów. Oblicz obwód i pole trójkąta CDE .

Proste i odcinki pomocnicze

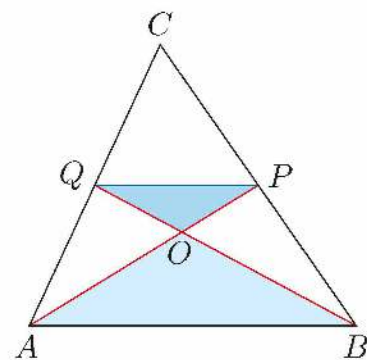
Przeprowadzając dowody w geometrii, często dorysowujemy pomocnicze odcinki lub proste.

- D 1.** Udowodnij, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.

Rozpatrzmy środkowe AP i BQ trójkąta ABC . Punkt O jest punktem ich przecięcia. Rysujemy pomocniczy odcinek PQ .

Uzasadnij kolejno, że:

- odcinek PQ jest równoległy do odcinka AB ,
- trójkąty ABO i PQO są podobne,
- punkt O dzieli każdą ze środkowych AP i BQ w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.

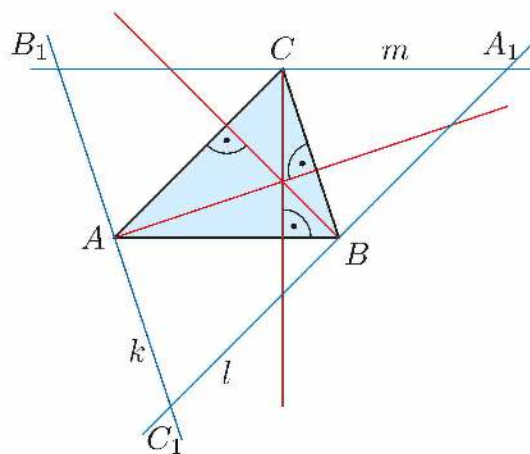


Przeprowadź analogiczne rozumowanie dla środkowych poprowadzonych z wierzchołków A i C , a następnie uzasadnij, że wszystkie środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

- D 2.** Udowodnij, że proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dany jest trójkąt ABC . Rysujemy proste pomocnicze:

- prosta k jest równoległa do boku BC i przechodzi przez wierzchołek A ,
- prosta l jest równoległa do boku AC i przechodzi przez wierzchołek B ,
- prosta m jest równoległa do boku AB i przechodzi przez wierzchołek C .



Punkty przecięcia prostych k, l, m oznaczamy przez A_1, B_1, C_1 – jak na rysunku. Uzasadnij kolejno, że:

- czworokąty $ABCB_1$ i AC_1BC są równoległobokami (skąd wynika, że $|AC_1| = |AB_1|$, analogicznie $|BC_1| = |BA_1|$ i $|CA_1| = |CB_1|$),
- punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta $A_1B_1C_1$ jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta ABC .

Uwaga. Zauważmy, że powyższe rozumowanie jest takie samo dla trójkąta rozwartokątnego czy prostokątnego.

6.6. Pola wielokątów podobnych

Przykład 1

Bok jednego kwadratu jest o 20% dłuższy od boku drugiego kwadratu. Jaka jest skala podobieństwa tych kwadratów? Ile wynosi stosunek ich pól?

Niech bok pierwszego kwadratu ma długość a , wówczas bok drugiego z nich ma długość $a + 20\%a = 120\%a = \frac{6}{5}a$.

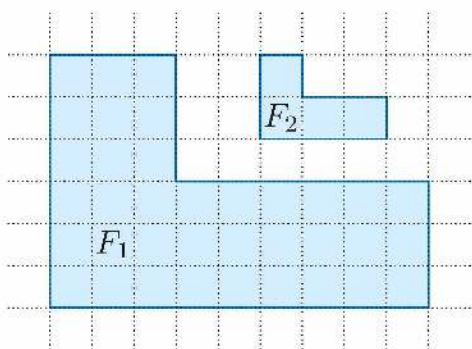
Zatem skala podobieństwa $k = \frac{6}{5}$.

Pola kwadratów są odpowiednio równe a^2 i $\frac{36}{25}a^2$, zatem stosunek ich pól jest równy $\frac{36}{25}$. Zauważmy, że $\frac{36}{25} = k^2$.

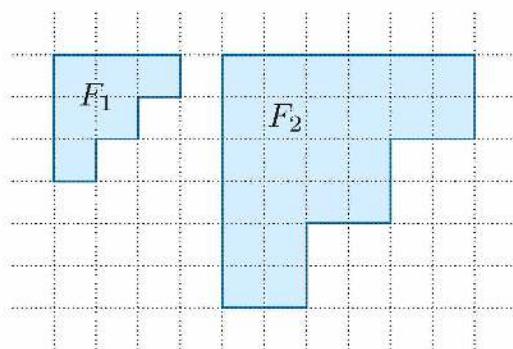
Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wielokąty podobne F_1 i F_2 . Podaj skalę podobieństwa i oblicz stosunek pola figury F_2 do pola figury F_1 .

a)



b)



D Przykład 2

Trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali k . Uzasadnij, że stosunek pola trójkąta T_2 do pola trójkąta T_1 jest równy k^2 .

Pole trójkąta T_1 : $P_1 = \frac{1}{2}a_1h_1$.

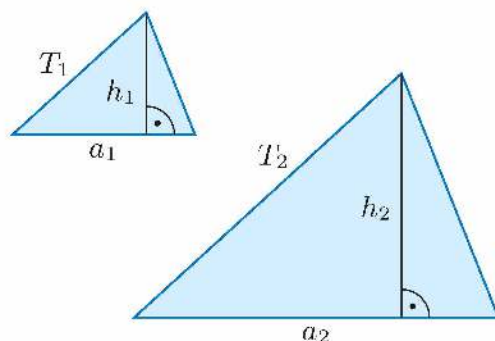
Dla trójkąta T_2 mamy:

$$a_2 = k \cdot a_1, \quad h_2 = k \cdot h_1.$$

Stąd pole trójkąta T_2 :

$$P_2 = \frac{1}{2}a_2h_2 = \frac{1}{2}(k \cdot a_1)(k \cdot h_1) = \frac{1}{2}k^2 \cdot a_1h_1$$

$$\text{Zatem } \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}k^2a_1h_1}{\frac{1}{2}a_1h_1} = k^2.$$



D Ćwiczenie 2

Prostokąt P_2 jest podobny do prostokąta P_1 w skali k . Uzasadnij, że stosunek pola prostokąta P_2 do pola prostokąta P_1 jest równy k^2 .

Twierdzenie

Jeśli skala podobieństwa figur podobnych równa się k , to stosunek ich pól jest równy k^2 .

Ćwiczenie 3

Jaka jest skala podobieństwa dwóch kwadratów, jeśli pole jednego z nich jest:

- a) o 19% mniejsze od pola drugiego, b) o 125% większe od pola drugiego?

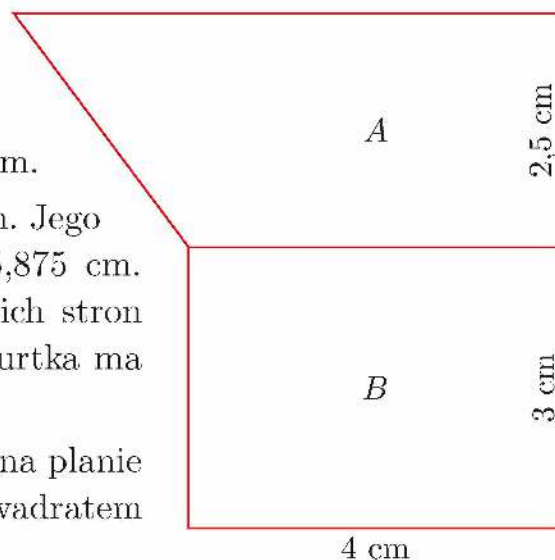
Ćwiczenie 4

Dany jest trapez prostokątny T_1 o podstawach długości 5 cm i 7 cm oraz wysokości równej 4 cm. Pole trapezu T_2 podobnego do trapezu T_1 jest równe 6 cm^2 . Oblicz skalę podobieństwa trapezu T_2 do trapezu T_1 oraz ich obwody.

Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono plan sąsiadujących działek budowlanych.

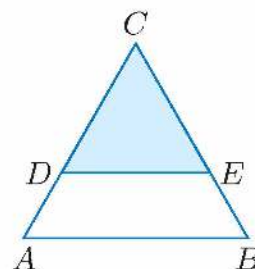
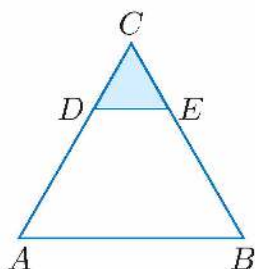
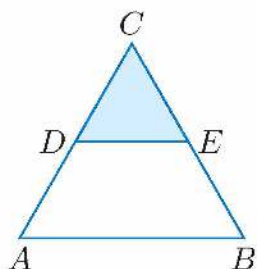
- a) Wyznacz skalę planu, jeśli działka B jest prostokątem o wymiarach $32 \text{ m} \times 24 \text{ m}$.
b) Działka A jest trapezem prostokątnym. Jego najdłuższy bok ma na planie długość $5,875 \text{ cm}$. Czy na ogrodzenie działki A ze wszystkich stron wystarczy 125 m bieżących siatki, jeśli furtka ma mieć szerokość $1,5 \text{ m}$?
c) Jaka jest powierzchnia działki C , jeśli na planie wykonanym w tej samej skali jest ona kwadratem o polu równym 9 cm^2 ?



Ćwiczenie 6

Dany jest trójkąt równoboczny ABC , którego bok ma długość 12 cm . Odcinek DE jest równoległy do boku AB , a pole trójkąta DEC jest równe P . Wyznacz stosunek długości odcinków DC do AC i oblicz obwód trapezu $ABED$.

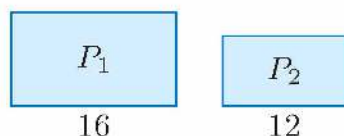
- a) $P = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $P = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ c) $P = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$



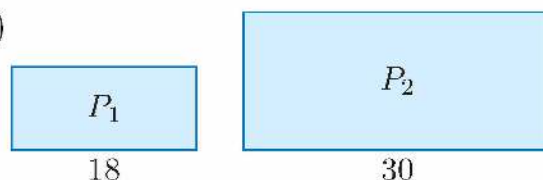
Zadania

1. Prostokąty P_1 i P_2 są podobne. Oblicz skalę podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz pole prostokąta P_2 , jeśli pole prostokąta P_1 jest równe 144 cm^2 .

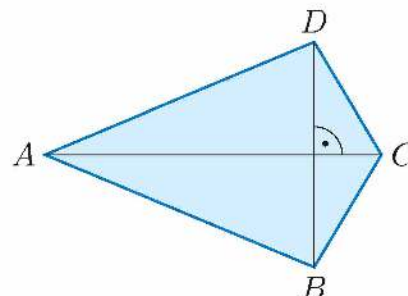
a)



b)



2. Prostokąt o bokach długości 6 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta o obwodzie 60 cm. Oblicz pole większego prostokąta.
3. a) Trójkąt prostokątny T_2 jest podobny do trójkąta T_1 o polu równym 45 cm^2 w skali $k = \frac{2}{3}$. Oblicz obwód trójkąta T_2 , jeśli jedna z jego przyprostokątnych ma długość 10 cm.
- b) Romb R_2 jest podobny do rombu R_1 w skali $k = 3$. Pole rombu R_2 jest równe 648 cm^2 . Oblicz obwód każdego z rombów, jeśli jedna z przekątnych rombu R_1 ma długość 6 cm.
4. Dany jest równoległobok R_1 , którego boki mają długości 4 cm i 6 cm. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest prostopadła do jego krótszych boków. Równoległobok R_2 o polu $200\sqrt{5} \text{ cm}^2$ jest podobny do równoległoboku R_1 . Oblicz obwód równoległoboku R_2 .
5. a) Suma pól dwóch figur podobnych jest równa 340 dm^2 , a ich skala podobieństwa $k = 4$. Oblicz pole każdej z tych figur.
- b) Suma pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych jest równa 180 cm^2 , a ich skala podobieństwa $k = 3$. Oblicz obwód każdego z tych trójkątów.
6. Przekątne deltoidu $ABCD$ mają długości: $|AC| = 15 \text{ cm}$ i $|BD| = 10 \text{ cm}$. Oblicz pole powierzchni latawca podobnego do tego deltoidu, jeśli jego wymiary są czterokrotnie większe.



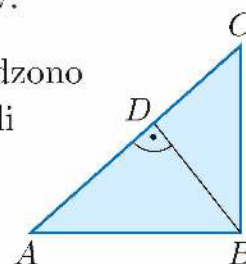
8. Trzy odbitki zdjęć to prostokąty podobne P_1 , P_2 i P_3 . Pole prostokąta P_2 jest o 44% większe od pola prostokąta P_1 , a pole prostokąta P_3 jest o 125% większe od pola prostokąta P_1 . Oblicz wymiary prostokąta P_3 , jeśli wymiary prostokąta P_2 są równe $24 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}$.



9. W trójkącie prostokątnym ABC , którego przeciwprostokątna AB ma długość 15 cm, poprowadzono wysokość CD . Stosunek pól trójkątów ADC i BCD jest równy 4. Oblicz obwód trójkąta ABC .
10. Przekątne trapezu o podstawach AB i CD oraz wysokości równej 10 przecinają się w punkcie P . Oblicz odległości punktu P od podstaw trapezu, wiedząc, że stosunek pola trójkąta ABP do pola trójkąta CDP jest równy $\frac{9}{4}$.
11. Trapez o wysokości równej 5 cm i podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz pole każdego z trapezów otrzymanych w wyniku tego podziału.
12. Działka budowlana o powierzchni 1025 m^2 ma kształt trapezu o podstawach 32 m i 50 m. Działkę tę podzielono prostą równoległą do podstaw trapezu na dwie działki będące trapezami podobnymi. Oblicz pole każdej z nowo powstałych działek.

Powtórzenie

13. a) Prostokąty P_1 i P_2 o przekątnych długości $\sqrt{12} \text{ cm}$ i $\sqrt{18} \text{ cm}$ są podobne. Oblicz stosunek pól tych prostokątów.
b) Trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Pole trójkąta T_2 jest o 300% większe od pola trójkąta T_1 . Podaj stosunek obwodów tych trójkątów.
14. W trójkącie prostokątnym ABC (rysunek obok) poprowadzono wysokość BD . Oblicz podany stosunek pól trójkątów, jeśli $|BD| : |CB| = 4 : 5$.
a) $P_{\triangle ABD} : P_{\triangle ABC}$ b) $P_{\triangle BCD} : P_{\triangle ABD}$
15. Dane są dwa romby, obydwa o kącie ostrym 60° . Stosunek ich pól wynosi $9:4$, a pole większego jest równe $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz sumę obwodów tych rombów.



Fraktale

Fraktal to figura geometryczna cechująca się samopodobieństwem – dowolnie małe części tej figury są podobne do całości.

Krzywa Kocha i śnieżynka Kocha

Przykładem fraktala jest krzywa Kocha (jej konstrukcję opisał w 1904 r. szwedzki matematyk Helge von Koch). Oto kolejne etapy jej powstawania.

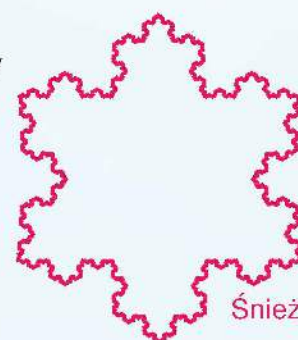
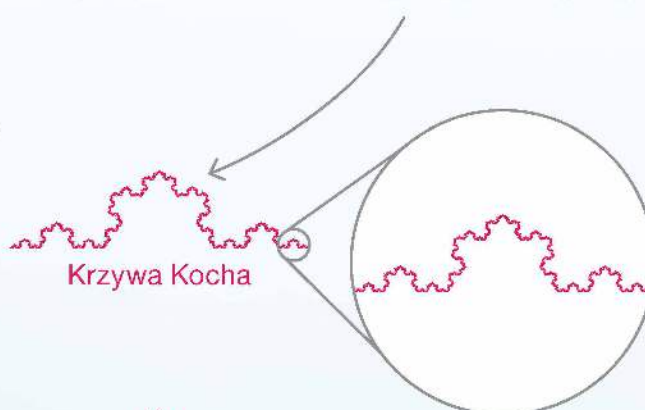


Na każdym kolejnym etapie konstrukcji krzywej Kocha jej długość powiększa się o $\frac{1}{3}$ długości krzywej z poprzedniego etapu. Jeśli zatem długość początkowego odcinka jest równa 1, to kolejne krzywe mają długości:

$$1, \frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \dots$$

Jeżeli konstrukcję krzywej przeprowadzimy na bokach trójkąta równobocznego, otrzymamy figurę nazywaną **śnieżynką Kocha**.

Śnieżynka Kocha ma skończone pole, ale jest ograniczona przez krzywą o nieskończonej długości.



SAMOPODOBIEŃSTWO

Powiększając dowolnie mały fragment krzywej Kocha, otrzymamy jej idealną kopię.

Trójkąt Sierpińskiego

Innym przykładem fraktala jest **trójkąt Sierpińskiego**. Konstrukcję, w której z trójkąta równobocznego wycina się kolejne trójkąty równoboczne, przedstawił w 1915 r. polski matematyk Wacław Sierpiński.



- 1** Czy potrafisz obliczyć pole ostatniej z pokazanych figur, jeśli pole wyjściowego trójkąta jest równe 1?

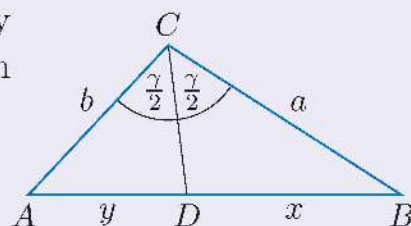
6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód

Rysujemy półprostą AC oraz prostą l równoległą do prostej CD przechodzącą przez punkt B . Punkt przecięcia półprostej AC z prostą l oznaczamy przez P .

Proste CD i BP są równoległe, więc:

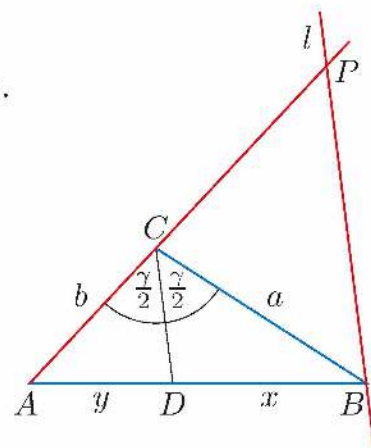
$\sphericalangle ACD = \sphericalangle APB$ oraz $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBP$ (uzasadnij).

Oznacza to, że trójkąt BPC jest równoramienny

i $|CP| = |CB| = a$.

Z twierdzenia Talesa otrzymujemy: $\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|CP|}{|AC|}$,

zatem $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.



Ćwiczenie 1

- Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego tego trójkąta dzieli jego przeciwprostokątną.
- Przeciwprostokątna trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° ma długość 2. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów dzielą boki tego trójkąta.
- Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego na odcinki długości $\frac{15}{7}$ i $\frac{20}{7}$. Oblicz obwód tego trójkąta.
- Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę $22,5^\circ$. Oblicz długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta, jeśli dłuższa przyprostokątna ma długość równą 1.

Zadania

- Dany jest trójkąt ABC o bokach $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB , jeśli:
 - $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$,
 - $a = 6$, $b = 10$, $c = 12$.
- Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC , którego przeciwprostokątna AB ma długość $\sqrt{2}$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie P . Oblicz obwody trójkątów BCP i BAP .
- D Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Uzasadnij, że dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB na odcinki długości $\frac{ac}{a+b}$ i $\frac{bc}{a+b}$.
- D Przeczytaj podany poniżej dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie. W miejscach oznaczonych ? podaj brakujące uzasadnienia.

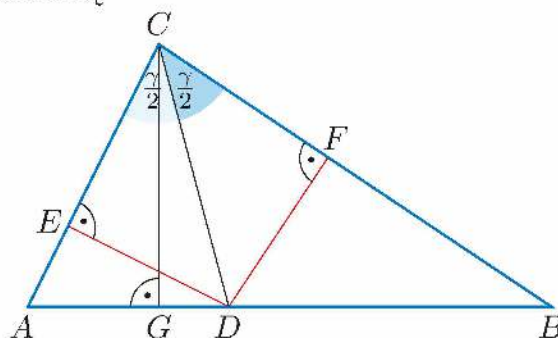
Na rysunku odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB , a CG jest wysokością trójkąta opuszczoną z wierzchołka C .

Stąd $\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|DB|}{|AD|}$?

Odcinki DE i DF mają równe długości ?. Zatem:

$$\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|BC|}{|AC|}$$
 ?

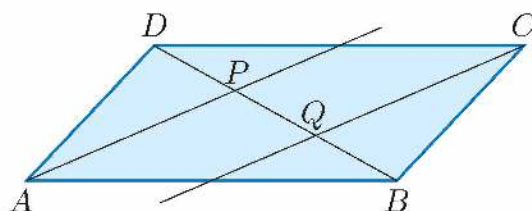
czyli prawdziwa jest proporcja $\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$.



Powtórzenie

- Dany jest trójkąt DEF o bokach $|EF| = d$, $|DF| = e$ i $|DE| = f$. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta DEF dzieli bok DF , jeśli:
 - $d = 5$, $e = 6$, $f = 7$,
 - $d = 12$, $e = 15$, $f = 18$.

- D Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach $|AD| = 6$ cm, $|AB| = 12$ cm. Dwusieczne kątów BAD i BCD przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q . Uzasadnij, że punkty te dzielą przekątną BD na trzy odcinki równej długości.



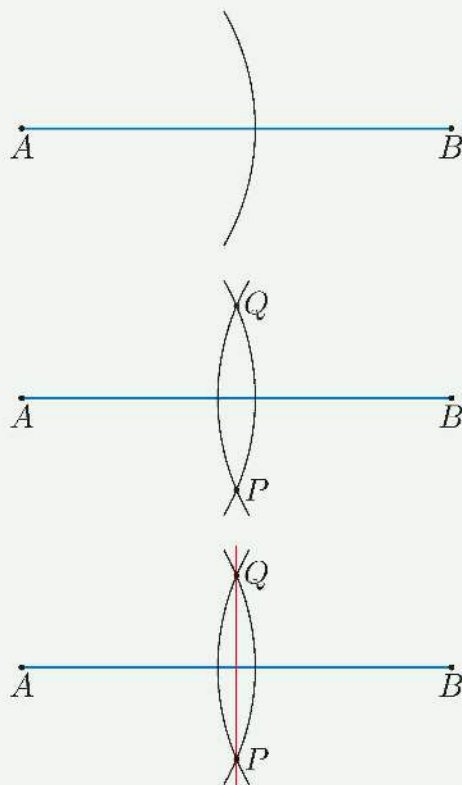
6.8. Zagadnienia uzupełniające

■ Problemy konstrukcyjne

Klasyczne konstrukcje wykonuje się, korzystając tylko z cyrkla i linijki. Oto niektóre z nich.

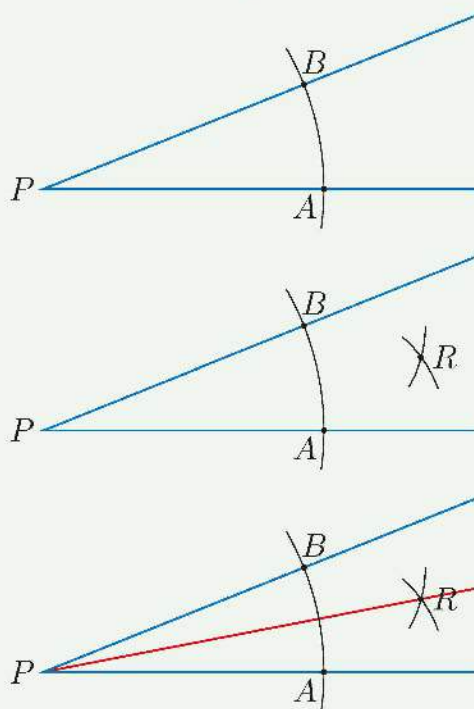
Konstrukcja symetralnej odcinka

1. Z jednego końca odcinka rysujemy łuk okręgu o promieniu większym od połowy odcinka.
2. Z drugiego końca odcinka rysujemy łuk okręgu o tym samym promieniu. Punkty przecięcia łuków oznaczamy przez P i Q .
3. Rysujemy prostą PQ – jest ona symetralną odcinka AB , ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.



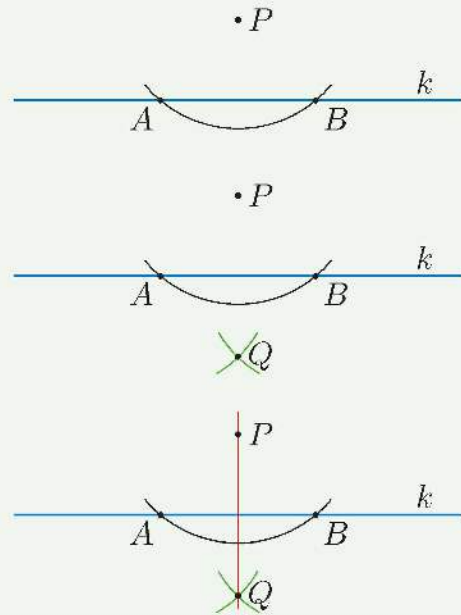
Konstrukcja dwusiecznej kąta

1. Z wierzchołka kąta rysujemy łuk okręgu przecinający jego ramiona. Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B .
2. Wewnątrz kąta rysujemy łuki okręgów o takim samym promieniu oraz środkach w punktach A i B . Punkt przecięcia tych łuków oznaczamy przez R .
3. Rysujemy prostą PR – jest ona dwusieczną kąta APB , ponieważ trójkąty PAR i PBR są przystające (cecha BBB).



Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt nieleżący na tej prostej

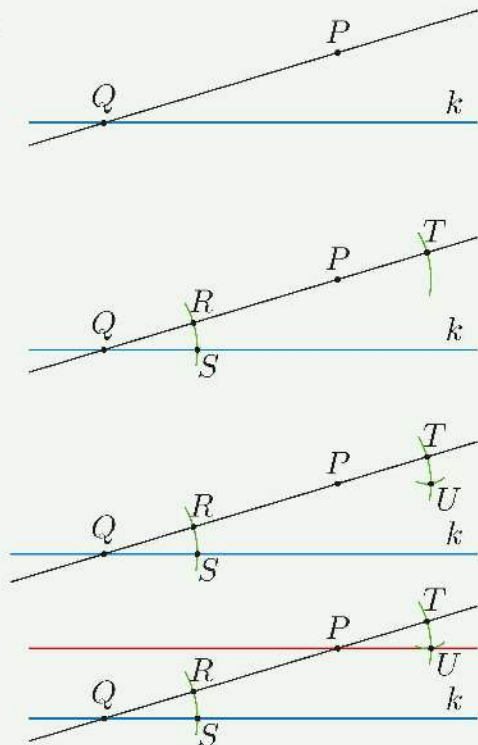
1. Z danego punktu P rysujemy łuk okręgu przecinający prostą k . Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B .
2. Z punktów A i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o promieniu $|AP|$. Punkt przecięcia łuków oznaczamy przez Q .
3. Rysujemy prostą PQ – jest ona prostopadła do prostej k , ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.



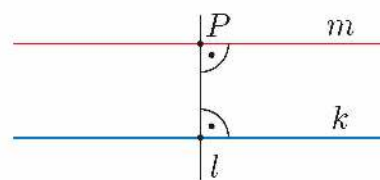
1. Dana jest prosta k i leżący na niej punkt P . Skonstruuj prostą prostopadłą do prostej k i przechodzącą przez punkt P .

Konstrukcja prostej przechodzącej przez dany punkt, równoległej do danej prostej

1. Rysujemy dowolną prostą przechodzącą przez dany punkt P . Punkt przecięcia tej prostej z daną prostą k oznaczamy przez Q .
2. Rysujemy łuki okręgów o tym samym promieniu i środkach w punktach P i Q . Punkt przecięcia łuku o środku w punkcie Q z prostą k oznaczamy przez S .
3. Rysujemy łuk okręgu o środku w punkcie T i promieniu $|RS|$. Punkt przecięcia tego łuku z łukiem o środku w punkcie P oznaczamy przez U .
4. Rysujemy prostą PU – jest ona równoległa do prostej k , ponieważ kąt TPU jest przystający do kąta RQS .

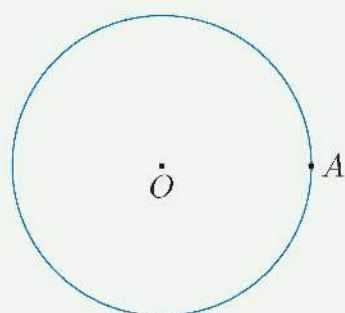


2. Prostą równoległą do danej prostej k i przechodzącą przez punkt P można skonstruować, rysując kolejno proste l i m takie, że $l \perp k$ i $m \perp l$. Przeprowadź tę konstrukcję i podaj jej opis.

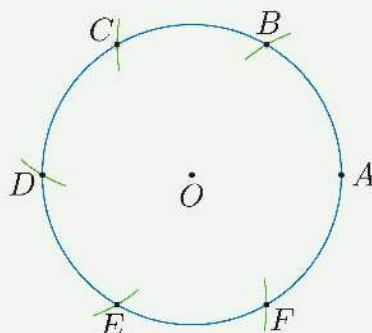


3. Mając dany trójkąt, skonstruuj punkt przecięcia jego:
 a) symetralnych, b) dwusiecznych, c) wysokości.

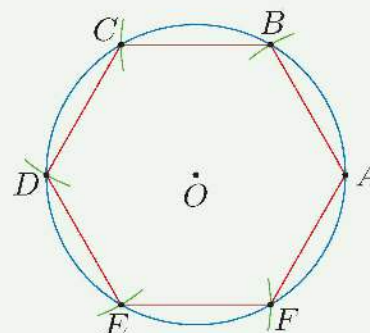
Konstrukcja sześciokąta foremnego



Rysujemy okrąg i wybieramy dowolny punkt tego okręgu – oznaczamy go przez A .



Zaczynając od punktu A , odmierzamy łuki o promieniach równych promieniowi okręgu.



Wielokąt $ABCDEF$ jest sześciokątem foremnym.

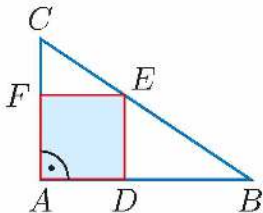
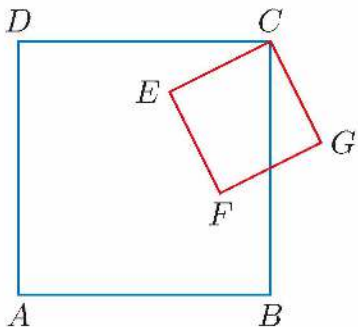
4. Skonstruuj:
 a) trójkąt równoboczny, c) ośmiokąt foremny,
 b) kwadrat, d) dwunastokąt foremny.
5. Narysuj dowolny kąt. Skonstruuj kąt do niego przystający.
6. Skonstruuj kąt o mierze:
 a) 30° , b) 45° , c) 75° , d) 105° .

Nad wymienionymi poniżej klasycznymi problemami konstrukcyjnymi zastanawiali się już starożytni Grecy. Jak udowodniono później, nie mają one rozwiązania.

- Kwadratura koła – konstrukcja kwadratu o polu równym polu danego koła.
- Trysekcja kąta – podział dowolnego kąta na trzy równe części.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Wyznacz miary kątów trójkąta, jeśli ich stosunek jest równy:
a) 1:2:3, b) 1:3:5, c) 2:9:13.
- Kąty między bokiem trójkąta ostrokatnego a wysokościami poprowadzonymi z wierzchołków należących do tego boku mają miary 40° i 20° . Wyznacz miary kątów tego trójkąta.
- Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy trójkąty te są podobne?
a) 15, 18, 24 oraz 20, 24, 32 c) 1,2; 1,4; 1,8 oraz 1,8; 2,1; 2,8
b) 4, 8, 10 oraz 6, 3, 7,5 d) 20, 25, 30 oraz 6, 9, 7,5
- Trójkąt T_1 o bokach 5 cm, 5 cm i 4 cm jest podobny do trójkąta T_2 . Oblicz długości boków trójkąta T_2 , jeśli:
a) jego obwód jest równy 35 cm, b) jego pole jest równe $4\sqrt{21}$ cm².
- W trójkącie ABC o polu 50 dm² bok AB ma długość 20 dm. Punkt P leży na boku AC i $|CP| = \frac{1}{5}|AC|$. Punkt Q leży na boku BC i $|CQ| = \frac{1}{5}|BC|$. Oblicz długość odcinka PQ i pole trójkąta CPQ .
- Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek obok) mają długości 10 i 15. Oblicz pole kwadratu $ADEF$.

- Dany jest trójkąt o bokach 4 cm, 6 cm i 8 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą jego przeciwległe boki.

- D** Punkt C jest wspólnym wierzchołkiem kwadratów $ABCD$ i $CEFG$ (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów DEC i CBG są równe.
- Działkę budowlaną w kształcie trójkąta o bokach długości: 60 m, 60 m i 40 m podzielono na dwie części o równych polach płotem równoległym do boku długości 40 m. Oblicz z dokładnością do 1 m obwód każdej z nowo powstałych działek.

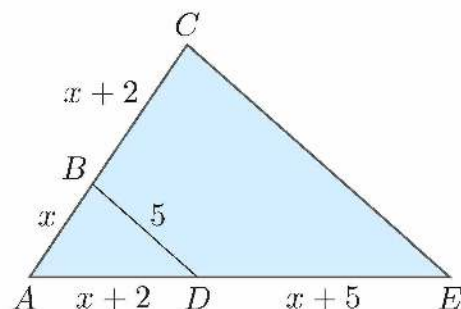


■ Zestaw II

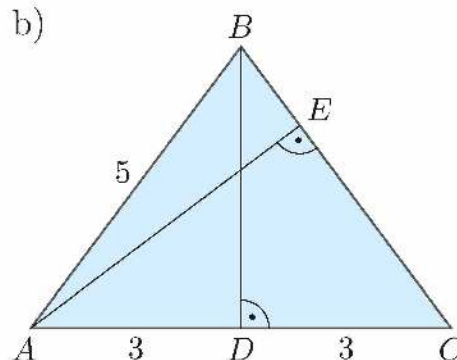
- D** 1. a) Wykaż, że dowolne dwa prostokąty, w których przekątne przecinają się pod tym samym kątem α , są podobne.
b) Wykaż, że jeśli prostokąt o bokach x i y jest podobny do prostokąta o bokach odpowiednio $x + 1$ i $y + 1$, to prostokąty te są kwadratami.

2. Oblicz obwód trójkąta AEC .

a) $BD \parallel CE$



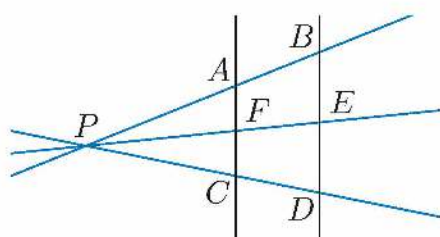
b)



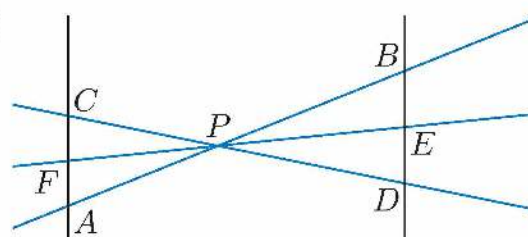
3. a) Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 260 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{5}{8}$. Oblicz obwód każdej z tych figur.
b) Figury F_1 i F_2 są podobne w skali 1:2, a figury F_2 i F_3 są podobne w skali 1:3. Oblicz pole każdej z tych figur, jeśli suma ich pól jest równa 410 dm^2 .

- D** 4. Uzasadnij, że jeśli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AF|}{|BE|} = \frac{|FC|}{|ED|}$.

a)



b)

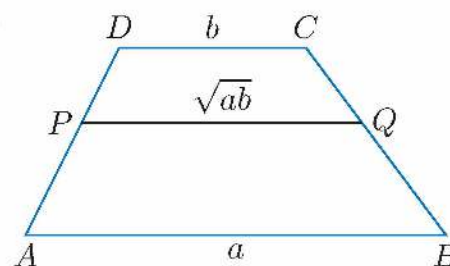


- D** 5. W rombie $ABCD$ połączono środki kolejnych boków i otrzymano czworokąt $A'B'C'D'$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem o polu dwa razy mniejszym od pola rombu.

- *D** 6. W trapezie $ABCD$ o podstawach a i b (rysunek obok) poprowadzono odcinek PQ o długości $\sqrt{ab}$ równoległy do podstaw trapezu. Uzasadnij, że:

a) $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AB|}{|PQ|}$,

b) trapezy $ABQP$ i $PQCD$ są podobne.



Przy przedstawianiu dowodu należy precyzyjnie uzasadnić każdy krok rozumowania. Można to zrobić tak, jak w przykładzie 1, lub w postaci dowodu dwukolumnowego (przykład 2).

D Przykład 1

Dany jest kwadrat $ABCD$ i równoległobok $EFBA$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BCF są przystające.

Oznaczmy przez α kąt ostry równoległoboku. Wówczas $\sphericalangle CBF = 90^\circ + \alpha$. Suma miar kątów przy jednym boku równoległoboku jest równa 180° , więc:

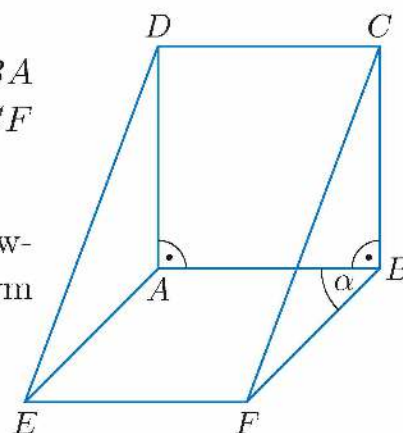
$$\sphericalangle BAE = 180^\circ - \alpha$$

Stąd:

$$\begin{aligned}\sphericalangle DAE &= 360^\circ - (\sphericalangle BAE + \sphericalangle BAD) = \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \alpha + 90^\circ) = 90^\circ + \alpha\end{aligned}$$

czyli $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CBF$. Jednocześnie $|AD| = |BC|$ (boki kwadratu) oraz $|AE| = |BF|$ (przeciwległe boki równoległoboku).

Na podstawie cechy BKB wnioskujemy, że trójkąty ADE i BCF są przystające.

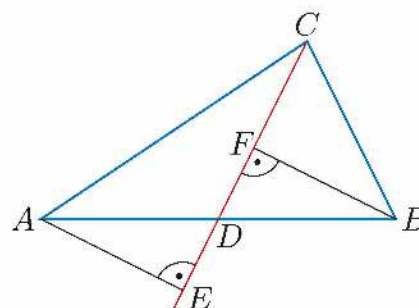


D Przykład 2

Środkowa trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina bok AB w punkcie D . Punkty E i F leżą na tej środkowej, przy czym $AE \perp CD$ oraz $BF \perp CD$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BDF są przystające.

Dowód przedstawimy w dwukolumnowej tabeli.

W jednej kolumnie zapisujemy kolejne stwierdzenia, a w drugiej – ich uzasadnienia. Pozwala to uporządkować całe rozumowanie.



Stwierdzenie	Uzasadnienie
$ AD = BD $	Punkt D jest środkiem boku AB .
$\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDF$	Są to kąty wierzchołkowe.
$\sphericalangle AED = \sphericalangle BFD$	Są to kąty proste.
$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBF$	Trójkąty ADE i BDF mają dwa kąty równe, więc wszystkie ich kąty są równe.
$\triangle ADE \equiv \triangle BDF$	Na podstawie cechy KBK przystawiania trójkątów.

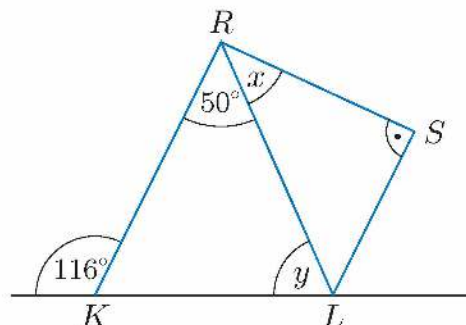
Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Przekątna ośmiokąta foremnego dzieli go na siedmiokąt i trójkąt równoramienny. Miara kąta ostrego tego trójkąta jest równa:

A. $22,5^\circ$, C. $26,5^\circ$,
B. $24,5^\circ$, D. $28,5^\circ$.

2. Na rysunku obok $RK \parallel SL$. Suma miar kątów x i y jest równa:

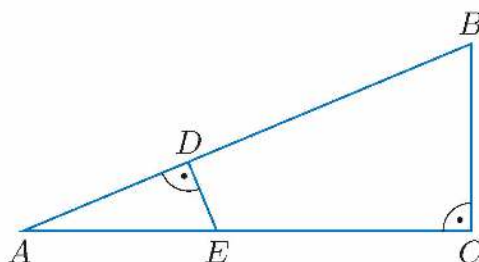
A. 104° , C. 106° ,
B. 105° , D. 110° .



3. Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 340 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{7}{10}$. Różnica obwodów tych figur jest równa:

A. 60 cm, B. 65 cm, C. 75 cm, D. 80 cm.

4. Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek poniżej) mają długości 5 cm i 12 cm. Ile wynosi obwód trójkąta AED , jeśli jego pole jest równe $4,8 \text{ cm}^2$?



A. 6 cm B. 8 cm C. 10 cm D. 12 cm

5. Jeżeli prostokąt P_1 o bokach długości 9 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta P_2 o przekątnej długości 20 cm, to:

A. obwód prostokąta P_2 jest równy 54 cm,
B. pole prostokąta P_2 jest równe 200 cm^2 ,
C. pole prostokąta P_2 jest o 64 cm^2 większe od pola prostokąta P_1 ,
D. stosunek pola prostokąta P_1 do pola prostokąta P_2 jest równy 9:16.

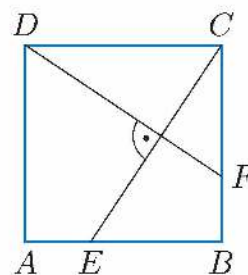
6. Na boku AB trójkąta ABC wybrano punkt P , a na boku AC – punkt Q tak, że $PQ \parallel BC$. Jeśli $|AB| = 4,5 \text{ cm}$, $|AC| = 5 \text{ cm}$, $|AQ| = 2 \text{ cm}$ i $|BC| = 3 \text{ cm}$, to obwód trójkąta APQ jest równy:

A. 5 cm, B. 6 cm, C. $6,5 \text{ cm}$, D. 7 cm.

Zadania krótkiej odpowiedzi

D Zadanie 1 (2 pkt)

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty E i F takie, że $CE \perp DF$ (rysunek obok). Uzasadnij, że trójkąty BCE i CDF są przystające.



Zadanie 2 (2 pkt)

Romb o przekątnych 6 i 10 jest podobny do rombu o polu 270. Oblicz obwód większego rombu.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wyznacz miarę kąta wewnętrznego dwunastokąta foremnego.

Zadanie 4 (2 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej równej 6. Oblicz odległość jego środka ciężkości od wierzchołka kąta prostego.

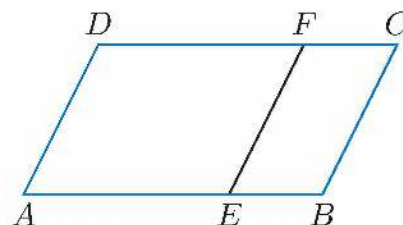
Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (4 pkt)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $|AB| = 40$ cm i $|CD| = 25$ cm i ramionach długości 12 cm i 9 cm. Przedłużenia ramion tego trapezu przecinają się w punkcie P . Oblicz obwód trójkąta ABP .

D Zadanie 6 (4 pkt)

Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach $|AB| = a$ i $|BC| = b$. Czworokąt $EBCF$ jest równoległobokiem podobnym do równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że obwód czworokąta $AEFD$ jest równy $\frac{2a^2 - 2b^2 + 2ab}{a}$.



D Zadanie 7 (4 pkt)

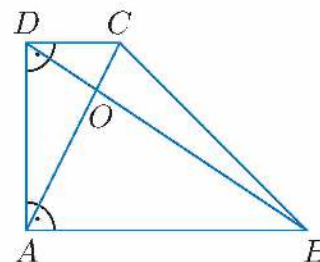
Uzasadnij, że suma długości środkowych trójkąta o obwodzie L jest mniejsza od $\frac{3}{2}L$.

Zadanie 8 (4 pkt)

Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie równym 30° . Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.

Zadanie 9 (4 pkt)

W trapezie prostokątnym (rysunek obok) dane są długości podstaw $|AB| = 6$ i $|CD| = 2$ oraz ramienia $|AD| = 4$. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu. Oblicz obwód trójkąta AOB .



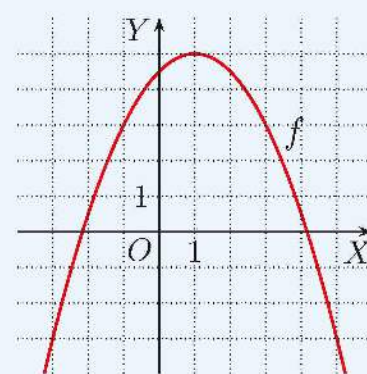


7 Wstęp do funkcji kwadratowej

Liny podtrzymujące most wiszący mają kształt paraboli (na zdjęciu most Golden Gate w San Francisco).

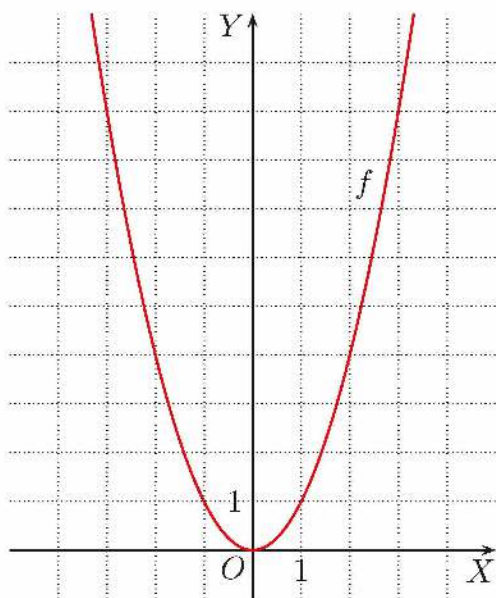
Funkcję postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**. Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**. Mówimy „parabola określona równaniem $y = ax^2 + bx + c$ ” lub krótko: „parabola $y = ax^2 + bx + c$ ”.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$.



7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

Na rysunku poniżej przedstawiono **parabolę**, która jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział $\langle 0; \infty \rangle$. Z wykresu możemy odczytać następujące własności:

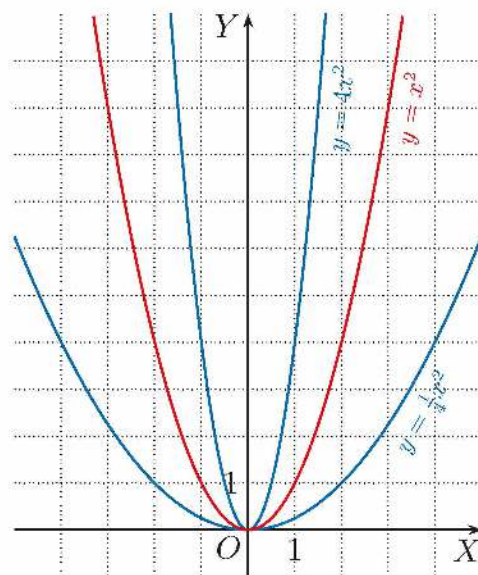


- a) **ramiona** paraboli są skierowane do góry,
- b) oś OY jest **osią symetrii** paraboli,
- c) punkt $(0,0)$ jest **wierzchołkiem** paraboli,
- d) funkcja f jest **malejąca** w przedziale $(-\infty; 0)$ i **rosnąca** w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$,
- e) dla $x = 0$ funkcja f przyjmuje **wartość najmniejszą** równą zero, natomiast dla każdego $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność $f(x) > 0$,
- f) funkcja f nie przyjmuje **wartości największej**.

Ćwiczenie 1

Sporządź odpowiednie tabele wartości funkcji i naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$ i $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Parabole $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$ zostały dla porównania naszkicowane w jednym układzie współrzędnych. Zwróć uwagę na zależność między współczynnikiem a w równaniu paraboli $y = ax^2$ i rozchyleniem ramion tej paraboli.



Ćwiczenie 2

Czy punkt P należy do paraboli $y = 4x^2$?

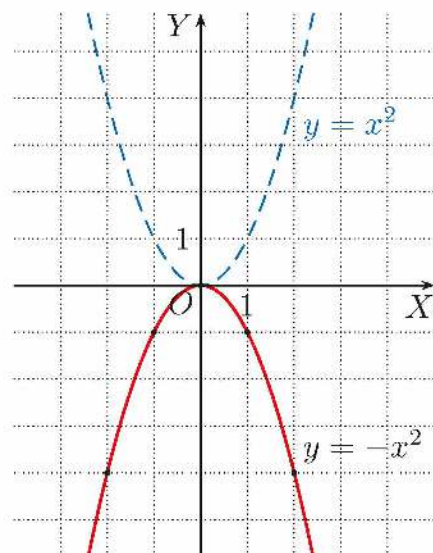
- a) $P(-\frac{1}{4}, 1)$
- b) $P(4, 32)$
- c) $P(\frac{1}{2}, 1)$
- d) $P(-2, 16)$

Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości współczynnika a punkt Q należy do paraboli $y = ax^2$?

- a) $Q(1, 6)$
- b) $Q(2, 8)$
- c) $Q(-4, 8)$
- d) $Q(-8, 48)$

Wykres funkcji $y = -x^2$ można otrzymać, odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y = x^2$. Zwróć uwagę na to, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji $y = -x^2$ są skierowane w dół.

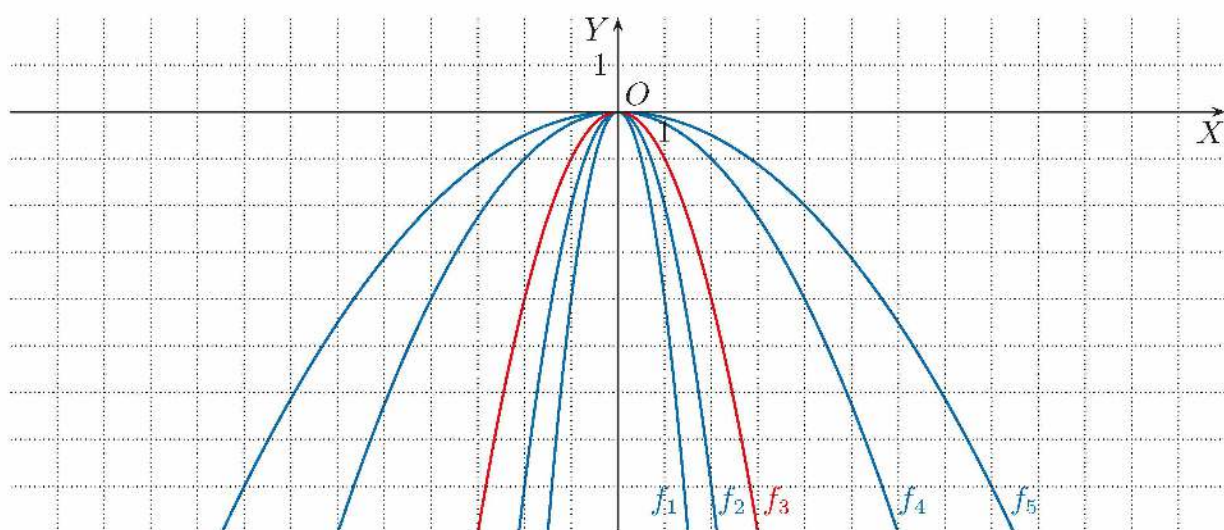


Ćwiczenie 4

- Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^2$.
- Podaj równanie osi symetrii i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -x^2$.

Ćwiczenie 5

Wykresy funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 (rysunek poniżej) otrzymano, odbijając symetrycznie względem osi OX wykresy funkcji $y = \frac{1}{8}x^2, y = \frac{1}{4}x^2, y = x^2, y = 2x^2, y = 4x^2$. Podaj wzory funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 .



Wartość współczynnika a we wzorze funkcji $f(x) = ax^2, a \neq 0$, decyduje o tym, czy ramiona paraboli będącej jej wykresem skierowane są do góry (gdy $a > 0$) czy do dołu (gdy $a < 0$) oraz o tym, jak bardzo są rozchylone.

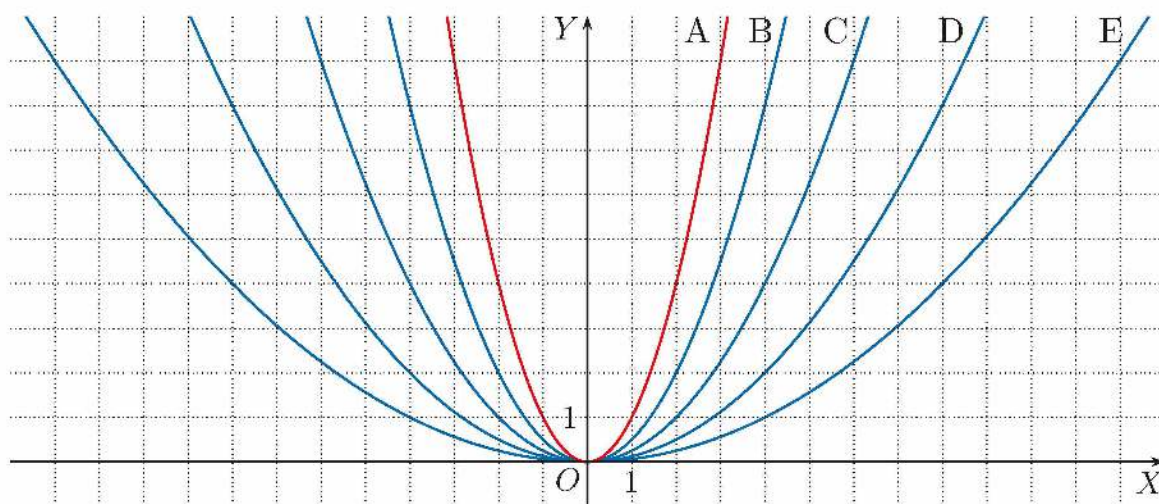
Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax^2$, jeśli należy do niego punkt P . Podaj pięć punktów należących do wykresu funkcji f , których obie współrzędne są całkowite.

- $P(2, -4)$
- $P(\frac{1}{2}, -1)$
- $P(-\sqrt{2}, -6)$
- $P(-2\sqrt{2}, -4)$

Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.
 - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $D = (-2; 4)$
 - $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $D = \langle -4; 2 \rangle$
 - $f(x) = 3x^2$, $D = (-1; 2)$
 - $f(x) = -2x^2$, $D = \langle 1; 2 \rangle$
- Które z poniższych parabol dane są równaniami: $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{8}x^2$?
Podaj równania pozostałych parabol.



- Dla której spośród trzech podanych funkcji odległość od osi OX punktu o odciętej $x = 1$ należącego do jej wykresu jest najmniejsza?
 - $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = -6x^2$
 - $y = \frac{3}{2}x^2$, $y = \sqrt{2}x^2$, $y = 2x^2$
 - $y = -\frac{1}{3}x^2$, $y = 3x^2$, $y = 2\sqrt{3}x^2$
 - $y = -3x^2$, $y = \pi x^2$, $y = 3,14x^2$
- Punkty $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Oblicz odległość punktu Q od osi OX , jeśli:
 - $x_1 = 3$, $y_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -2$,
 - $x_1 = -2\sqrt{2}$, $y_1 = 20$, $x_2 = 2$.
- Prosta $y = 4$ przecina parabolę $y = ax^2$ w punktach A i B . Oblicz a , jeśli:
 - $|AB| = 2$,
 - $|AB| = 8$,
 - $|AB| = \frac{1}{2}$,
 - $|AB| = 2\sqrt{2}$.
- Punkty: $O(0, 0)$, $A(x, 3)$ i $B(-x, 3)$, należą do paraboli $y = ax^2$. Naszkicuj tę parabolę, jeśli pole trójkąta AOB jest równe 12.

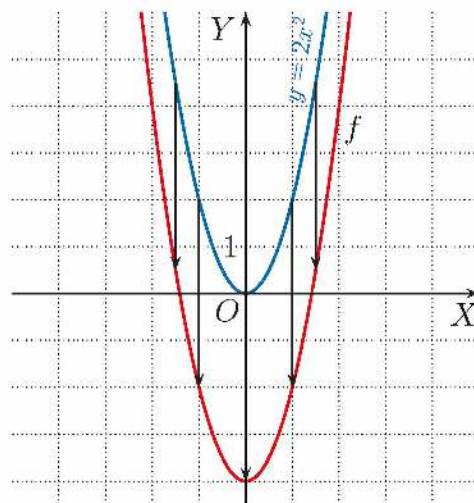
Powtórzenie

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax^2$, jeśli należy do niego punkt P .
 - $P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
 - $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 - $P(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$
 - $P(-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$
- Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie $D = \langle -2; 2 \rangle$.
 - $f(x) = x^2$
 - $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
 - $f(x) = -x^2$
 - $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

7.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2x^2 - 4$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 4 jednostki w dół (rysunek obok).



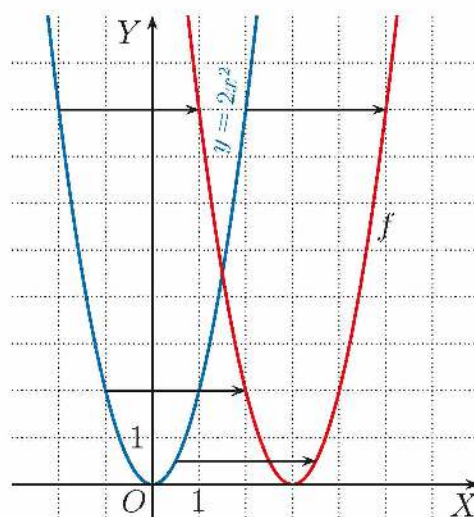
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f i określ jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = x^2 - 3$ c) $f(x) = -2x^2 - 4$
b) $f(x) = x^2 + 1$ d) $f(x) = -2x^2 + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2(x-3)^2$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 3 jednostki w prawo (rysunek obok).



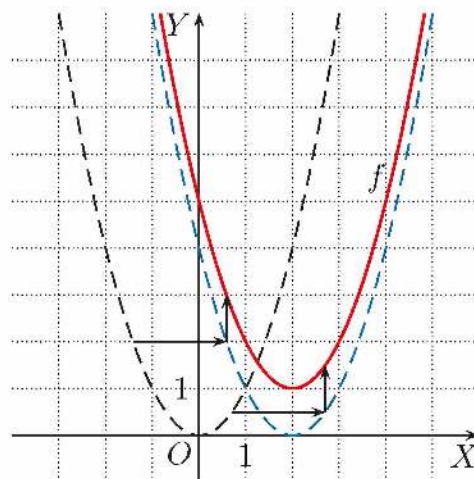
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

- a) $f(x) = (x+3)^2$ c) $f(x) = -2(x+2)^2$
b) $f(x) = (x-1)^2$ d) $f(x) = -2(x-2)^2$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (x-2)^2 + 1$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę (rysunek obok).



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj współrzędne wierzchołka otrzymanej paraboli.

- a) $f(x) = (x-3)^2 - 2$
b) $f(x) = (x+2)^2 + 1$

Wykresem funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q) . Jej osią symetrii jest prosta $x = p$.

Ćwiczenie 4

Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f . W jaki sposób należy przesunąć parabolę daną wzorem $y = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji f ?

a) $f(x) = 2(x-4)^2 + 2$

c) $f(x) = 2(x+6)^2 - 3$

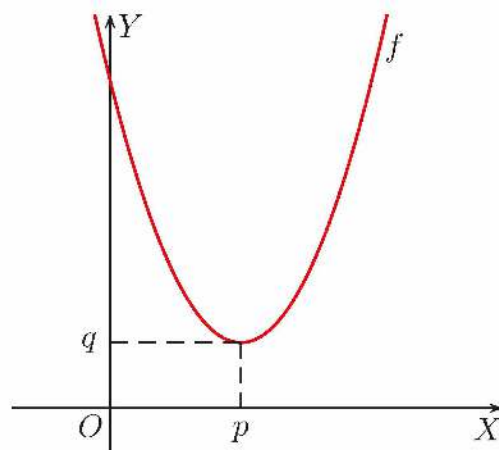
b) $f(x) = 2(x-6)^2 - 1$

d) $f(x) = 2(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$

Poniższe własności funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$ zależą od współczynnika a .

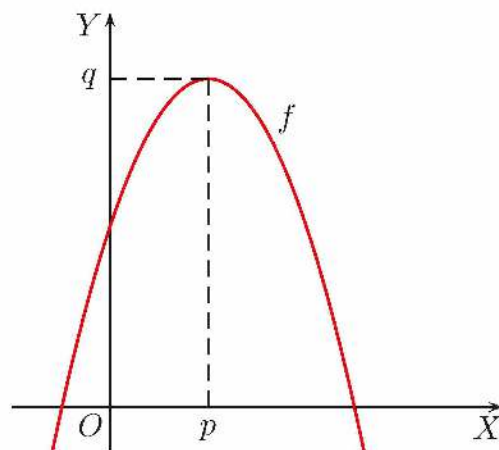
$$a > 0$$

- ramiona paraboli są skierowane do góry
- dla $x = p$ funkcja osiąga wartość najmniejszą $y = q$
- funkcja maleje w przedziale $(-\infty; p)$
- funkcja rośnie w przedziale $\langle p; \infty)$
- zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle q; \infty)$



$$a < 0$$

- ramiona paraboli są skierowane w dół
- dla $x = p$ funkcja osiąga wartość największą $y = q$
- funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; p)$
- funkcja maleje w przedziale $\langle p; \infty)$
- zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; q]$



Ćwiczenie 5

Podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Naskicuj tę parabolę.

a) $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$

c) $f(x) = -(x+4)^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 + 2$

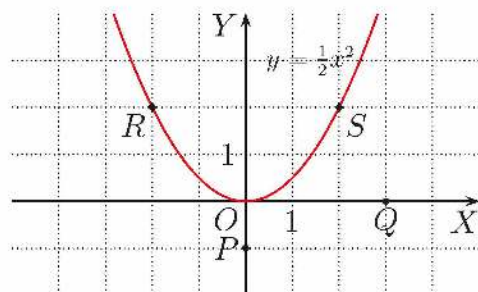
d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + 3$

Zadania

- Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$:
a) o 3 jednostki w prawo, b) o 2 jednostki w lewo.
Podaj wzór funkcji g , jej przedziały monotoniczności i naszkicuj jej wykres.
- Wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = -x^2$:
a) o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki w górę,
b) o 1 jednostkę w prawo i 2 jednostki w dół.
Podaj wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres.
- Naszkicuj parabolę daną poniższym wzorem. Podaj współrzędne jej wierzchołka oraz równanie jej osi symetrii.
a) $y = x^2 + 2$ c) $y = (x - 2)^2$ e) $y = (x - 1)^2 - 4$
b) $y = x^2 - 4$ d) $y = (x + 1)^2$ f) $y = (x + 3)^2 + 1$
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = -x^2 + 4$ d) $f(x) = -2(x-2)^2 + 1$ g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
b) $f(x) = -(x-2)^2 - 1$ e) $f(x) = 2(x-2)^2 + 1$ h) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$
c) $f(x) = -(x+3)^2 + 1$ f) $f(x) = 2(x+1)^2 - 8$ i) $f(x) = 2x^2 - 4$

Powtórzenie

- Podaj zbiór wartości funkcji f , jej przedziały monotoniczności i współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.
a) $f(x) = 3x^2 - 6$ d) $f(x) = -5x^2 + 9$ g) $f(x) = (2 - x)^2 + 1$
b) $f(x) = 3(x - 4)^2$ e) $f(x) = -5(x + 8)^2$ h) $f(x) = 4 - \frac{2}{3}(x - 1)^2$
c) $f(x) = 3(x + 2)^2 + 5$ f) $f(x) = -5(x - 3)^2 - 2$ i) $f(x) = (3 + x)^2 - \sqrt{2}$
- Wykresem funkcji f jest parabola otrzymana przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ (rysunek obok). Podaj wzór funkcji f , jeśli wierzchołkiem jej wykresu jest punkt:
a) P , b) Q , c) R , d) S .
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 2$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 4$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$ f) $f(x) = -2x^2 - 1$



7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)

Definicja

Postać:
 $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Postać:
 $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a, p, q \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji kwadratowej.

Uwaga. Funkcję kwadratową nazywamy też **trójmianem kwadratowym**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj przykład w ramce pokazujący, w jaki sposób przejść od postaci kanonicznej funkcji kwadratowej do postaci ogólnej.

a) $y = 3(x - 4)^2 - 7 =$	Postać kanoniczna
$= 3(x^2 - 8x + 16) - 7 =$	Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
$= 3x^2 - 24x + 41$	Postać ogólna
b) $y = -4(x + \frac{1}{2})^2 + 1 =$	Postać kanoniczna
$= -4(x^2 + x + \frac{1}{4}) + 1 =$	Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
$= -4x^2 - 4x$	Postać ogólna

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = -2(x - 3)^2 + 6$ b) $y = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ c) $y = 3(x - 5)^2 + 9$

Przejście od postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej wymaga zastosowania uzupełniania do kwadratu.

Przykład 1

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 - 10x + 27 =$	Postać ogólna
$= x^2 - 2 \cdot 5x + 27 =$	Współczynnik -10 zapisujemy jako $-2 \cdot 5$.
$= x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25 + 27 =$	Dodajemy i odejmujemy $25 = 5^2$.
$= (x - 5)^2 - 25 + 27 =$	Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
$= (x - 5)^2 + 2$	Postać kanoniczna

$$\text{b) } y = x^2 + 5x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 =$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 =$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

Postać ogólna

Współczynnik 5 zapisujemy jako $2 \cdot \frac{5}{2}$.

Dodajemy i odejmujemy $\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

Korzystamy ze wzoru
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Postać kanoniczna

Ćwiczenie 2

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

$$\text{a) } y = x^2 - 8x + 6$$

$$\text{c) } y = x^2 - 6x - 2$$

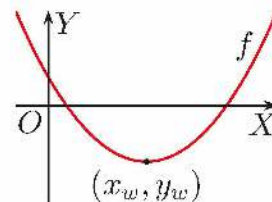
$$\text{e) } y = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } y = x^2 + 4x + 8$$

$$\text{d) } y = x^2 - 3x + 1$$

$$\text{f) } y = x^2 - x - 2$$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku (p, q) . Współrzędne wierzchołka paraboli oznaczamy także (x_w, y_w) .



Twierdzenie

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Dowód

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x\right) + c = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Jest to postać kanoniczna funkcji $y = a(x - p)^2 + q$ dla $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, zatem $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$.

Przykład 2

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego $y = -x^2 + 5x - 2$.

Współczynniki trójmianu: $a = -1$, $b = 5$ i $c = -2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 25 - 8 = 17$$

Ćwiczenie 3

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$$\text{a) } y = x^2 + 3x + 1$$

$$\text{c) } y = x^2 - 4x + 4$$

$$\text{e) } y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$$

$$\text{b) } y = 2x^2 + 4x + 1$$

$$\text{d) } y = -2x^2 + 6x - 6$$

$$\text{f) } y = 2x^2 - \sqrt{2}x$$

Przykład 3

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $y = 2x^2 - 6x + 1$, a następnie zapisz tę funkcję w postaci kanonicznej.

Współczynniki trójmianu: $a = 2$, $b = -6$ i $c = 1$.

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 36 - 8 = 28$$

$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2}$$

Zatem wierzchołkiem paraboli jest punkt o współrzędnych $(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$.

Postać kanoniczna: $y = 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{2}$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem podanej funkcji, a następnie zapisz tę funkcję w postaci kanonicznej.

a) $y = 4x^2 + 6x + 3$

b) $y = -2x^2 + 4x + 1$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Zadania

1. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = (x - \frac{1}{2})^2 + 4$

c) $y = 2(x - 3)^2 + 1$

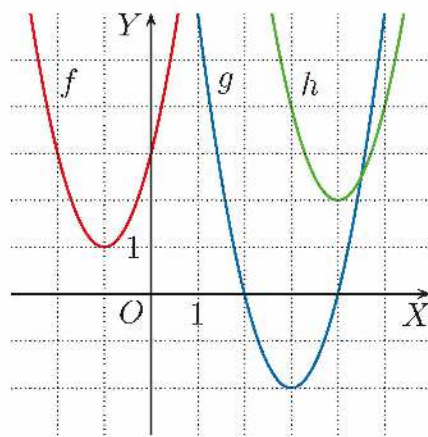
e) $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$

b) $y = -(x - 4)^2 - 3$

d) $y = -3(x + 2)^2 - 4$

f) $y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 4$

2. Wykresy funkcji kwadratowych f , g i h (rysunek obok) otrzymano, przesuwając wykres funkcji $y = 2x^2$. Odczytaj współrzędne wierzchołków otrzymanych parabol. Podaj wzory funkcji f , g i h w postaciach kanonicznych i ogólnych.



3. Zapisz w postaciach kanonicznej i ogólnej wzór funkcji g , jeśli jej wykres otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji:

a) $f(x) = 3x^2$ o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół,

b) $f(x) = -4x^2$ o 5 jednostek w lewo i 100 jednostek w górę.

4. Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

a) $y = -2x^2 + 5x + 7$

c) $y = -2x^2 + 3x - 1$

e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x - 3$

b) $y = 2x^2 + 3x + 2$

d) $y = 4x^2 - 12x + 9$

f) $y = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 5$

5. Oblicz wyróżnik trójkianu kwadratowego. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tego trójkianu.

- a) $y = x^2 + 4x - 3$ c) $y = 2x^2 + 4x - 5$ e) $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
 b) $y = -x^2 + 6x - 1$ d) $y = -3x^2 + 6x - 2$ f) $y = -\frac{3}{4}x^2 + x + 1$

6. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f , a następnie przedstaw tę funkcję w postaci kanonicznej.

- a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ c) $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$ e) $f(x) = x^2 - x$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ d) $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$ f) $f(x) = -2x^2 + 6x$

7. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ należy punkt P . Oblicz współczynnik c i zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

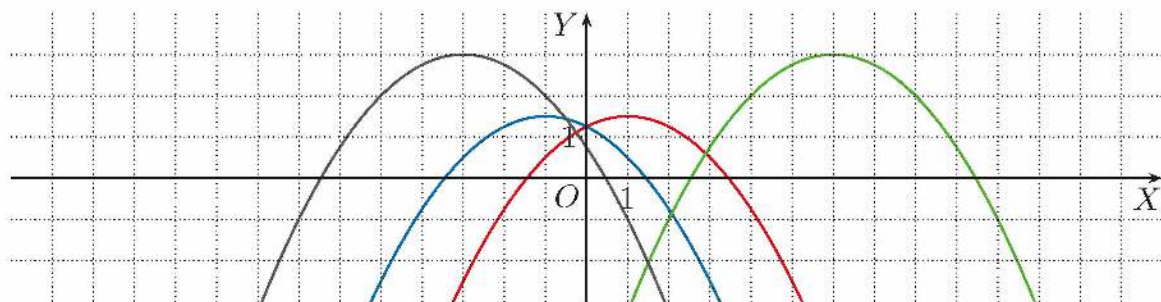
- a) $P(0, 1)$ b) $P(0, -2)$ c) $P(1, 4)$ d) $P(2, 2)$ e) $P(-2, -4)$

8. Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy funkcji:

$$f_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}, \quad f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4},$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6, \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}.$$

- a) Wzór każdej funkcji zapisz w postaci kanonicznej.
 b) Do każdej funkcji dopasuj odpowiedni wykres.



Powtórzenie

9. Oblicz wyróżnik trójkianu kwadratowego.

- a) $y = x^2 - 3x - 4$ b) $y = 3x^2 + 5x + 2$ c) $y = -x^2 - 4x + 1$

10. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

- a) $y = 4x^2 - 8x + 1$ c) $y = x^2 + 6x - 10$ e) $y = x^2 + x$
 b) $y = -4x^2 + 6x + 2$ d) $y = -x^2 - 3x + 2$ f) $y = -2x^2 - 3x$

11. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

- a) $y = x^2 - 4x - 2$ c) $y = -3x^2 + 5x - \frac{1}{2}$ e) $y = 8x^2 - x$
 b) $y = 2x^2 - 8x + 1$ d) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ f) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$

7.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)

Przykład 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli $y = -x^2 + 6x - 5$. Naskicuj tę parabolę.

$a = -1$, $b = 6$, $c = -5$, zatem:

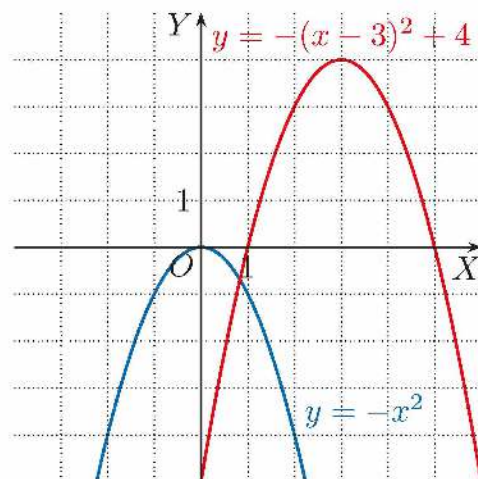
$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16$$

$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-16}{-4} = 4$$

Trójmian kwadratowy zapisujemy w postaci kanonicznej: $y = -(x - 3)^2 + 4$.

Szukaną parabolę otrzymujemy, przesuwa-
jąc parabolę $y = -x^2$ o 3 jednostki w prawo
i 4 jednostki w górę.



Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, a następnie przedstaw trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej. Naskicuj tę parabolę.

a) $y = x^2 + 4x + 1$

c) $y = 2x^2 + 4x + 2$

e) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

b) $y = -x^2 + 2x - 3$

d) $y = -2x^2 - 8x - 5$

f) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

Zauważmy, że jeśli wyznaczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f , to jego drugą współrzędną możemy obliczyć, korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 1$$

$$a = -2, b = 8, \text{ więc } x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2.$$

$$\text{Współrzędna } y_w = f(x_w) = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 7.$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(2, 7)$.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 10$

Przykład 2

Oblicz współczynnik b funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + bx - 4$, jeśli prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.

Ośią symetrii paraboli jest prosta $x = -\frac{b}{2a}$, zatem $-\frac{b}{2 \cdot 3} = 1$. Stąd $b = -6$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz współczynnik b funkcji kwadratowej f , jeśli prosta l jest osią symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.

- a) $f(x) = x^2 + bx + 4$, $l: x = 2$ c) $f(x) = 2x^2 + bx - 1$, $l: x = -1$
b) $f(x) = -x^2 + bx - 3$, $l: x = 4$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 7$, $l: x = -6$

Przykład 3

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku $(3, -2)$. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i ogólnej, jeśli wiadomo, że punkt $P(4, 1)$ należy do tej paraboli.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie punkt (p, q) jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f :

$$f(x) = a(x - 3)^2 - 2 \quad \text{Wierzchołkiem paraboli jest punkt } (3, -2).$$

Podstawiamy współrzędne punktu P do powyższego wzoru: $1 = a(4 - 3)^2 - 2$, czyli $a = 3$. Zatem otrzymujemy postać kanoniczną funkcji:

$$f(x) = 3(x - 3)^2 - 2$$

Następnie wyznaczamy postać ogólną:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x - 3)^2 - 2 = 3(x^2 - 6x + 9) - 2 = \\ &= 3x^2 - 18x + 27 - 2 = 3x^2 - 18x + 25 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i ogólnej, jeśli wiadomo, że punkt P należy do tej paraboli.

- a) $P(3, 1)$, $W(2, 2)$ b) $P(3, -2)$, $W(4, 0)$ c) $P(-2, -4)$, $W(-1, -6)$

Ćwiczenie 5

Oblicz współczynniki a , b , c funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, jeśli do paraboli będącej jej wykresem należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W .

- a) $P(0, 2)$, $W(2, 0)$ c) $P(3, 1)$, $W(0, 3)$ e) $P(2, 1)$, $W(1, 2)$
b) $P(0, 0)$, $W(-1, -1)$ d) $P(-2, 0)$, $W(-1, 3)$ f) $P(1, 2)$, $W(2, 4)$

Zadania

1. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naszkicuj jej wykres, podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości.
a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$ c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ d) $f(x) = -2x^2 + 2x$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$
2. Zapisz wzór funkcji kwadratowej $y = ax^2 + 6x - 8$ w postaci kanonicznej, jeśli jej wykresem jest parabola o wierzchołku, którego pierwsza współrzędna jest równa x_w .
a) $x_w = -3$ c) $x_w = -6$ e) $x_w = \frac{3}{2}$
b) $x_w = 3$ d) $x_w = 12$ f) $x_w = -\frac{3}{2}$
3. Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $y = x^2 + bx + c$, jeśli punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej jej wykresem.
a) $W(2, 4)$ c) $W(\frac{1}{2}, -1)$ e) $W(10, 0)$
b) $W(-1, -3)$ d) $W(0, 3)$ f) $W(-4, 4)$
4. Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest symetryczny względem prostej l i przecina oś OY w punkcie P . Oblicz współczynniki b i c . Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
a) $l: x = 1, P(0, 1)$ c) $l: x = 3, P(0, -6)$
b) $l: x = -4, P(0, 2)$ d) $l: x = -\frac{1}{2}, P(0, -4)$
5. Punkty $A(0, -2)$ i $B(1, 1)$ należą do paraboli będącej wykresem funkcji f . Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli jej wierzchołkiem jest punkt: a) A , b) B .
-  6. Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabolą o wierzchołku w punkcie (p, q) . Uzasadnij, że $b = -2p$ i $c = p^2 + q$.

Powtórzenie

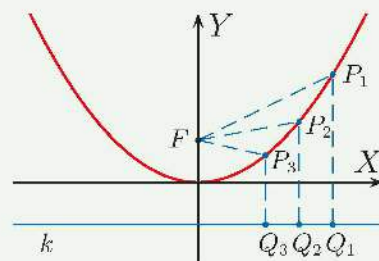
7. Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej. Przesuwając odpowiednio parabolę $y = x^2$ lub parabolę $y = -x^2$, naszkicuj wykres funkcji f .
a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ c) $f(x) = x^2 + 2x$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
b) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ d) $f(x) = -x^2 + 4x$ f) $f(x) = -x^2 + 8x - 8$
8. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f , jeśli do paraboli będącej jej wykresem należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W .
a) $P(2, 5), W(1, 4)$ b) $P(-3, 6), W(-2, 3)$ c) $P(-4, -8), W(-3, -4)$

7.5. Zagadnienia uzupełniające

■ Parabola

Parabola jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonej prostej k (zwanej **kierownicą**) i ustalonego punktu F (zwanego **ogniskiem**). Na rysunku obok mamy:

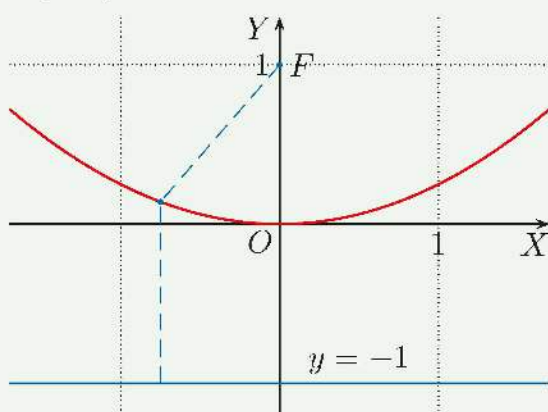
$$|P_1F| = |P_1Q_1|, |P_2F| = |P_2Q_2|, |P_3F| = |P_3Q_3|$$



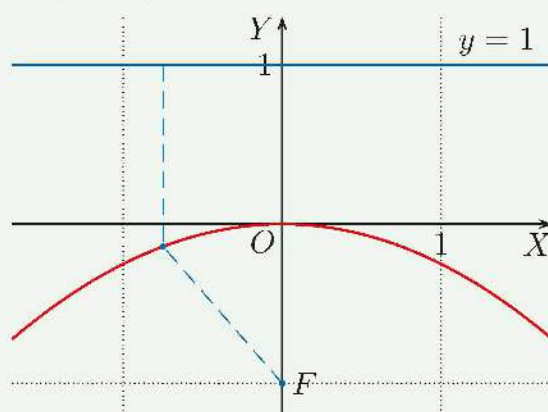
Parabola, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej $y = -p$ i punktu $F(0, p)$, jest określona za pomocą równania $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Przykład 1

Parabola $y = \frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -1$ i ognisko $F(0, 1)$.



Parabola $y = -\frac{1}{4}x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = 1$ i ognisko $F(0, -1)$.



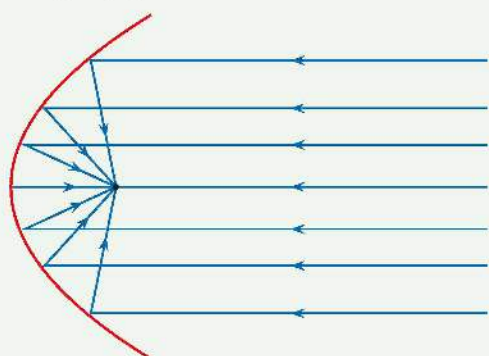
Parabola $y = x^2$ ma kierownicę daną równaniem $y = -\frac{1}{4}$ i ognisko $F(0, \frac{1}{4})$.

- Podaj równanie paraboli, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej k i punktu F .
 a) $k: y = -\frac{1}{2}, F(0, \frac{1}{2})$ b) $k: y = \frac{1}{2}, F(0, -\frac{1}{2})$ c) $k: y = -\frac{1}{6}, F(0, \frac{1}{6})$
- Wyznacz równanie kierownicy i współrzędne ogniska paraboli danej równaniem:
 a) $y = -x^2$, b) $y = 2x^2$, c) $y = -2x^2$, d) $y = \frac{1}{8}x^2$.
- Wyznacz równanie kierownicy i współrzędne ogniska paraboli:
 a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$, b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$.

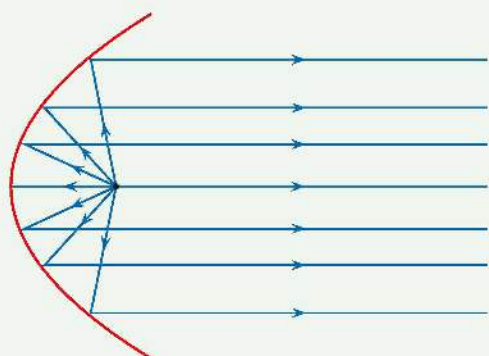
4. Przeprowadź konstrukcję paraboli zgodnie z podanym niżej opisem.
- Narysuj kierownicę i prostą do niej prostopadłą – oś symetrii paraboli.
 - Na osi symetrii wybierz punkt F – ognisko paraboli i zaznacz wierzchołek paraboli w połowie odległości między ogniskiem a kierownicą.
 - Po tej samej stronie wierzchołka, po której znajduje się ognisko, narysuj kilka prostych równoległych do kierownicy.
 - Odmierz cyrklem odległość każdej z narysowanych prostych od kierownicy, a następnie narysuj łuk okręgu o środku w punkcie F i promieniu równym tej odległości – punkty przecięcia łuku z daną prostą należą do paraboli.

Czy wiesz, że...

Promienie równoległe padające na zwierciadło o parabolicznym kształcie po odbiciu skupiają się w jednym punkcie zwanym ogniskiem paraboli. Zjawisko to wykorzystuje się w telewizyjnych antenach satelitarnych i radioteleskopach, w których odbiornik umieszcza się w ognisku, aby uzyskać silny sygnał.



Natomiast promienie wychodzące z żarówki umieszczonej w ognisku zwierciadła parabolicznego po odbiciu są równoległe. Zjawisko to jest wykorzystywane na przykład w reflektorach samochodowych.





Zestaw powtórzeniowy

1. Dane są funkcje $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$, $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$. Do wykresu której spośród tych funkcji należą punkty $A(-2, 1)$, $B(2, 1)$, $C(-4, -2)$? Naszkicuj wykres tej funkcji.
2. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = -x^2$, $g(x) = -(x-2)^2$ i $h(x) = -(x-2)^2 + 3$.
3. Wyznacz zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności funkcji f .
a) $f(x) = x^2 - 7$ b) $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$ c) $f(x) = -2x^2 - 12x + 1$
4. Przedstaw funkcję kwadratową f w postaci kanonicznej oraz podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Przesuwając odpowiednio parabolę $y = x^2$ lub parabolę $y = -x^2$, naszkicuj wykres funkcji f .
a) $f(x) = x^2 - 4x$ c) $f(x) = x^2 + 10x + 26$
b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ d) $f(x) = -x^2 + 8x - 17$
5. Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Wyznacz współczynniki b i c oraz zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
a) $W(0, 1)$ b) $W(1, 3)$ c) $W(-2, 2)$ d) $W(4, -1)$
6. Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2 + q$ należy punkt $P(-1, 2)$. Podaj wzór tej funkcji, jeśli jej zbiorem wartości jest przedział:
a) $\langle 1; \infty \rangle$, b) $\langle 0; \infty \rangle$, c) $(-\infty; 3]$, d) $(-\infty; 6]$.
7. Wykres funkcji f przecina oś rzędnych w punkcie P . Wyznacz współczynnik a oraz przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f . Naszkicuj parabolę będącą jej wykresem.
a) $f(x) = a(x-2)^2 - 1$, $P(0, 1)$ c) $f(x) = a(x+1)^2 - 4$, $P(0, -2)$
b) $f(x) = a(x-4)^2 + 3$, $P(0, -5)$ d) $f(x) = a(x+2)^2 + 5$, $P(0, -3)$
8. W prostokącie, którego dłuższy bok ma długość x , stosunek długości boków jest równy $1 : 4$. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta. Podaj jej dziedzinę, jeśli obwód prostokąta jest mniejszy od 15. Naszkicuj wykres tej funkcji.
9. Dany jest kwadrat o obwodzie nie większym niż $8\sqrt{2}$ i przekątnej o długości x . Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego kwadratu w zależności od długości przekątnej. Podaj dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

1.1. Liczby naturalne

1. a) 1, 2, 3, 4, 6, 12
b) 1, 2, 4, 7, 14, 28
c) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48
2. a), c) tak b), d) nie
3. a) $3 \cdot 8 + 2$ b) $3 \cdot 25 + 1$
c) $3 \cdot 36$ d) $3 \cdot 42 + 1$ e) $3 \cdot 237 + 2$
4. a) $4 \cdot 0 + 3$ b) $4 \cdot 12 + 1$ c) $4 \cdot 19 + 3$
d) $4 \cdot 31 + 2$ e) $4 \cdot 123$
5. a) 2 b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
c) 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
d) 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
6. $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$,
 $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$,
 $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$,
 $1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$,
 $1323 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$
7. a) $\text{NWD}(18, 30) = 6$,
 $\text{NWW}(18, 30) = 90$
b) $\text{NWD}(15, 50) = 5$,
 $\text{NWW}(15, 50) = 150$
c) $\text{NWD}(24, 72) = 24$,
 $\text{NWW}(24, 72) = 72$
d) $\text{NWD}(144, 192) = 48$,
 $\text{NWW}(144, 192) = 576$
e) $\text{NWD}(84, 105) = 21$,
 $\text{NWW}(84, 105) = 420$
f) $\text{NWD}(196, 420) = 28$,
 $\text{NWW}(196, 420) = 2940$
8. $\text{NWD}(x, y) = 1$,
 $\text{NWD}(x, y) = x \cdot y$
9. a) 2, 4 b) 2, 3, 6 c) 3, 9
d) 2, 3, 4, 6, 12 e) 2, 3, 4, 6, 9, 12
10. a) 41 b) 26 c) 19 d) 13 e) 11
11. a) $5 \cdot 7 + 4$ b) $5 \cdot 12 + 2$
c) $5 \cdot 31 + 1$ d) $5 \cdot 55 + 0$

12. a) nie b) tak, dla $r = 2$
c) tak, dla $r = 3$ d) nie
13. a) $6n + 9$ b) $6n + 3$
c) $6n - 9$ d) $12n + 15$
14. a) 6 b) 4 c) 2 d) 9 e) 12
15. a) 9 reszta 3 b) 25 reszta 0
c) 18 reszta 1 d) 184 reszta 2
e) 540 reszta 1
16. a) $\text{NWD}(24, 40) = 8$,
 $\text{NWW}(24, 40) = 120$
b) $\text{NWD}(36, 45) = 9$,
 $\text{NWW}(36, 45) = 180$
c) $\text{NWD}(48, 72) = 24$,
 $\text{NWW}(48, 72) = 144$
d) $\text{NWD}(54, 96) = 6$,
 $\text{NWW}(54, 96) = 864$
e) $\text{NWD}(112, 144) = 16$,
 $\text{NWW}(112, 144) = 1008$
f) $\text{NWD}(105, 150) = 15$,
 $\text{NWW}(105, 150) = 1050$

Cechy podzielności liczb

1. a) 3, 5 b) 2, 3, 9 c) 2, 5 d) 2, 3
2. a) 4 – tak, 8 – tak b) 4 – tak, 8 – nie
c) 4 – nie, 8 – nie d) 4 – tak, 8 – tak
3. a) 6, 12 b) 6, 15
c) przez żadną d) 6
4. a) $a = 6$ b) $a = 0$ lub $a = 6$
c) $a = 2$ lub $a = 6$ d) $a = 6$
5. a) 15 b) 15, 75 c) żadna d) 15, 45
6. a) tak b) tak c) nie

1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne

1. a) -36 b) 16 c) 720
d) -481 e) -58 f) 26
2. a), b) $x = y$ c) $x \neq y$
3. $\frac{1}{36}$
4. a) $-2\frac{13}{24}$ b) $\frac{11}{12}$ c) $3\frac{13}{18}$ d) $2\frac{55}{72}$
5. a) $2\frac{1}{4}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $-2\frac{7}{9}$ d) 5

- [Z]** 1. a) $A = 10\frac{1}{5}$, $B = 11\frac{4}{5}$, $C = 12\frac{1}{5}$
 b) $D = -3\frac{3}{7}$, $E = -1\frac{5}{7}$, $F = \frac{6}{7}$
 c) $G = 2\frac{1}{15}$, $H = 6\frac{1}{15}$, $I = 8\frac{11}{15}$
 d) $J = -\frac{8}{11}$, $K = \frac{4}{11}$, $L = 2\frac{6}{11}$
 2. a) $-\frac{17}{30}$ b) $6\frac{5}{24}$ c) 1 d) $-1\frac{5}{12}$ e) $3\frac{2}{15}$
 f) $-\frac{31}{48}$ g) $4\frac{1}{24}$ h) $-2\frac{3}{5}$ i) $\frac{7}{60}$
 3. a) $2\frac{1}{4}$ b) 5 c) $-2\frac{7}{9}$
 4. a) $1\frac{1}{2}$ b) $1\frac{2}{3}$ c) $8\frac{1}{2}$ d) $1\frac{1}{9}$
 e) $1\frac{2}{5}$ f) $1\frac{2}{7}$ g) -2 h) -2
 5. a) 14 b) $-2\frac{3}{5}$ c) 8
 6. $b < c < a$
 8. a) $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$ b) $\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$
 c) $\frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}$
 9. a) $1\frac{1}{11}$ b) $2\frac{2}{3}$ c) $\frac{24}{41}$
 d) $11\frac{1}{4}$ e) $\frac{4}{53}$ f) $-\frac{6}{199}$
 10. a) -8 b) $-15\frac{58}{65}$ c) $8\frac{4}{15}$
 d) 3 e) $6\frac{1}{4}$ f) $\frac{9}{256}$
 11. a) $1\frac{3}{7}$ b) $1\frac{1}{5}$ c) $-2\frac{3}{4}$

1.3. Liczby niewymierne

- [C]** 1. a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$
 b) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$
 2. a), c), e) jest b), d), f) nie jest
 3. a) np. $\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$
 b) np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$
[Z] 1. a) $\sqrt{164}$ b) $\sqrt{29}$ c) $\sqrt{125}$
 d) $\sqrt{286}$ e) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{81}$
 2. a) $\sqrt{5}$, nie b) $\sqrt{10}$, nie
 3. b), c), e), f) tak a), d) nie
 4. a), c), e) jest b), d), f) nie jest
 5. a) 11 b) 8 c) 4
 6. sześciokąta
 7. a) p , q lub p , r b) q , r c) q , s d) q , s
 8. a) tak b) nie
 9. a) 0, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{125}$
 b) $-\frac{12}{3}$, -3, 0, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{125}$
 c) $-\frac{12}{3}$, -3, 0, 0,1, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{125}$, $121\frac{1}{3}$
 d) $-\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{2}$
 10. a) $n = 5$ b) $n = 3$ c) $n = 12$
 11. a), c) tak b) nie

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

- [C]** 1. a) 0,35 b) 0,44 c) 2,08
 d) 2,86 e) 0,032 f) 0,068
 2. a) dziesiąte miejsce: 2,
 dwudzieste miejsce: 4
 b) dziesiąte miejsce: 7,
 dwudzieste miejsce: 3
 c) dziesiąte miejsce: 5,
 dwudzieste miejsce: 4
 d) dziesiąte miejsce: 0,
 dwudzieste miejsce: 4
 3. 1, 6, 2, 3
 4. rozwinięcia skończone: $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$,
 rozwinięcia nieskończone: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$
 5. a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$ b) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$
 6. a) 21 b) 20 c) 0 d) 1 e) 2
 7. a) 3,141 593; z nadmiarem
 b) 3,141 59; z niedomiarem
 c) 3,1416; z nadmiarem
 d) 3,142; z nadmiarem
 e) 3,14; z niedomiarem
 8. a) 6,78; błąd przybliżenia: 0,0024
 b) 8,47; błąd przybliżenia: -0,0047
 c) 7,90; błąd przybliżenia: -0,0049
 d) 10,00; błąd przybliżenia: -0,0038
 e) 5,90; błąd przybliżenia: 0,0039
[Z] 1. a) 1,25 b) -6,75 c) -0,125
 d) 0,375 e) 0,625 f) 1,375
 g) 0,0375 h) 0,0875
 2. a) 0,(7) b) 0,01(6)
 c) 0,00(3) d) 0,00(5)
 e) 0,3(6) f) 0,1(8)
 3. a) na 12. miejscu: 6,
 na 25. miejscu: 0; 1,046
 b) na 12. miejscu: 2,
 na 25. miejscu: 5; 0,325
 c) na 12. miejscu: 3,
 na 25. miejscu: 7; 7,004
 d) na 12. miejscu: 6,
 na 25. miejscu: 3; 9,349
 e) na 12. miejscu: 3,
 na 25. miejscu: 4; 2,863

4. a) na 24. miejscu: 4, na 100. miejscu: 7
b) na 24. miejscu: 5, na 100. miejscu: 2
5. $a = 6$, $b = 3$
6. $x = 1$, $y = 6$
7. a), d) skończone
b), c) okresowe
8. a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{41}{11}$ c) $-\frac{206}{33}$
d) 1 e) $\frac{209}{5}$ f) $\frac{2131}{990}$
9. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{48}{11}$, $x + y = 5\frac{1}{33}$,
 $x^2 - y = -3\frac{91}{99}$, $x + \frac{1}{y} = \frac{43}{48}$
10. a) 4,75 b) 0,175 c) 0,0375
d) -7,375 e) 3,125 f) 8,(6)
g) 2,(3) h) -6,(4) i) 0,(2)
j) 0,0625
11. a) 5 b) 3 c) 6 d) 6 e) 5
12. a) 2,236 068 0 b) 2,236 07 c) 2,2

Długość okręgu. Liczba π

1. kwadrat: 1,4142; 2,8284;
8-kąt: 0,7654; 3,0615;
16-kąt: 0,3902; 3,1214;
32-kąt: 0,1960; 3,1365;
64-kąt: 0,0981; 3,1403;
dla 32-kąta i 64-kąta

1.5. Pierwiastek kwadratowy

- Ć 1. a) 12 b) 15 c) 18 d) 25 e) 50
f) 90 g) 1,1 h) 1,9 i) 2,1
2. a) 3 b) 3 c) 9 d) 1,2 e) $\sqrt{3}$
3. a) 7,2 cm b) 128 cm
4. a) 18, 3, 5,7 b) $\frac{11}{12}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{24}{25}$
c) 4, 3, 10 d) 3, $\frac{1}{2}$, 2
- Z 1. a) 3 b) -11 c) 4,2 d) 0,5
e) $-\frac{17}{20}$ f) $1\frac{19}{30}$
3. a) 2, 3, 4, 5
b) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
c) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17
4. a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{6}$ e) $6\sqrt{3}$ f) $6\sqrt{7}$
g) $14\sqrt{2}$ h) $15\sqrt{2}$
5. a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $10\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{2}$ e) $20\sqrt{2}$ f) $22\sqrt{2}$

6. a) $9\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{5}$
e) $4,6\sqrt{2}$ f) $-25\sqrt{5}$
7. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{25}$
8. a) $4\sqrt{2} + 1 \approx 6,6$
b) $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \approx 0,6$
c) $\frac{5}{4}(1 - \sqrt{2}) \approx -0,5$
9. a) 6 b) 16 c) 20 d) 30
e) 42 f) 30 g) 120 h) 120
10. a) 30 b) $\frac{35}{4}\sqrt{6}$ c) 2,2 d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
11. a) $6 + 18\sqrt{2}$
b) $\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{6}$
12. a) 15 b) $6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$ c) 16
13. a) 14 b) 1,5 c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{30}$
14. 14,2
15. a) $\sqrt{125}$ b) $\sqrt{147}$ c) $\sqrt{162}$
d) $\sqrt{338}$ e) $\sqrt{3}$
16. a) 42 cm b) 10,8 cm c) 1,5 m d) 0,5 m

1.6. Pierwiastek sześcienny

- Ć 1. a) 1 b) 4 c) 6 d) 20
2. a) 8 b) $\frac{1}{9}$ c) 11 d) $\frac{2}{9}$ e) 1,1 f) $\frac{9}{11}$
3. a) 6 b) 5 c) 14 d) 2 e) $-\frac{1}{12}$ f) $2\frac{1}{3}$
4. a) $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ b) $2\sqrt[3]{2}$ c) $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$
5. a) -3 b) -4 c) -5 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{3}{10}$
6. a) 3 b) -2 c) 0,2 d) -0,1 e) 3
f) -1 g) 2 h) -2 i) 2 j) -2
- Z 1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$
e) $\frac{3}{10}$ f) $\frac{5}{6}$ g) $\frac{4}{3}$ h) $\frac{7}{3}$
2. a) 7 b) 1 c) 13 d) 2 e) 0,6 f) 0,5
3. a) $2\sqrt[3]{4}$ b) $5\sqrt[3]{2}$ c) $3\sqrt[3]{5}$
d) $5\sqrt[3]{3}$ e) $3\sqrt[3]{4}$
4. a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{54}$ c) $\sqrt[3]{432}$
d) $\sqrt[3]{640}$ e) $\sqrt[3]{1080}$
5. Wszystkie równości są prawdziwe.
6. a) y b) $x = y$ c) y d) x
7. a), b) Większa jest pierwsza liczba.
c) Są równe.
8. a) 8 cm b) 20 cm
9. a) $12\sqrt[3]{2}$ cm b) 15 cm

10. a) $\sqrt[4]{162}$ b) $\sqrt[4]{2500}$ c) $\sqrt[5]{2048}$
 d) $\sqrt[6]{10\,000}$ e) $\sqrt[10]{5120}$
11. a) 14 b) 9 c) -10
 d) 0,6 e) 2,1 f) $1\frac{1}{4}$
12. a) -20 b) -0,1 c) $-\frac{5}{4}$ d) -1,5
13. a) 1 b) 0,3 c) $\frac{14}{15}$
 d) -1 e) -2,4 f) 4
15. a) 6 b) -1 c) -0,2
 d) 0,3 e) 3,1 f) 1,8
16. a) b – najmniejsza, d – największa
 b) c – najmniejsza, b – największa

1.7. Potęga o wykładniku całkowitym

- Ć** 1. a) 81, 729, 6561
 b) $\frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}$
 c) $\frac{4}{25}, -\frac{8}{125}, \frac{16}{625}$
2. $(-3)^9 < (-2)^9 < (-2)^0 < (-2)^4 = 2^4 < 3^4 = (-3)^4$
3. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{64}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $-\frac{1}{27}$ e) 4
 f) 32 g) $\frac{9}{4}$ h) $\frac{81}{16}$ i) 25 j) -125
4. a) tak b) tak c) nie
5. a) 27 b) $\frac{1}{1024}$ c) $\frac{1}{1024}$ d) $\frac{1}{256}$
 e) 25 f) 1024 g) 32
 h) 1024 i) $\frac{27}{4}$ j) 400
6. a) $x^4, x \neq 0$
 b) $x^6, x \neq 0$
 c) $\frac{x}{y}, x, y \neq 0$
 d) $\frac{x^4}{y^3}, x, y \neq 0$
- Z** 1. a) -32, $-\frac{1}{32}, \frac{1}{32}$ b) 9, -27, 81
 c) $9, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}$ d) $8, 8\sqrt{2}, \frac{1}{16}$
2. a) 2^{15} b) 2^{-4} c) 2^{27} d) 2^{20}
3. a) $2^4, 2^{-6}, 2^9, 2^2, 2^{20}$
 b) $3^{-4}, 3^3, 3^{-4}, 3^3, 3^{-20}$
 c) $10^3, 10^{10}, 10^8, 10^6$
 d) $5^{-6}, 5^2, 5^{-12}, 5^{-20}$
4. a) $-\frac{\sqrt{3}}{72}$ b) $\frac{4}{81}$ c) $-40\sqrt{5}$ d) 18
5. $a \neq 0$ a) a^2 b) a^3 c) a^2
 d) a^{13} e) a^{-16} f) a^{14}
6. a) x b) y
7. a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{16}{81}$ c) 6
 d) $3\frac{3}{8}$ e) 0 f) $2\frac{1}{2}$

8. a) $\frac{1}{64}, 64, -\frac{1}{64}, -\frac{1}{64}$
 b) $64, -\frac{1}{64}, -\frac{1}{64}, 64$
 c) $81, \frac{1}{81}, -81$ d) $\frac{1}{8}, 8, -\frac{1}{8}$
9. a) 36 b) $\frac{1}{16}$ c) 32 d) $\frac{27}{8}$
 e) $\frac{1}{125}$ f) 49 g) $\frac{16}{9}$ h) $\frac{8}{3}$
 i) $\frac{1}{9}$ j) $\frac{1}{36}$ k) 64 l) 64

1.8. Potęga o wykładniku wymiernym

- Ć** 1. a) 2 b) 4 c) 9 d) 2 e) 3 f) 3
2. a) 8 b) 9 c) 16 d) 8 e) 729
 f) 32 g) $\frac{1}{25}$ h) 27 i) 32 j) $\frac{9}{4}$
4. a) 1000 b) 1024 c) 25 d) 8 e) 5
 f) 3 g) 3 h) 2 i) 7 j) 4
5. a) 4 b) 125 c) 16 d) 32 e) $\sqrt[3]{3}$
6. a) 216 b) 32 c) 12 d) $\frac{9}{4}$ e) 15
7. a) 81 b) 4 c) $\frac{1}{16}$ d) $5\sqrt{5}$ e) $\frac{8}{27}$
8. a) 199,5262 b) 2818,3829
 c) 42,1697 d) 0,0200
- Z** 1. a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{-\frac{1}{2}}$ d) $2^{\frac{2}{3}}$
 e) $2^{\frac{9}{2}}$ f) $2^{\frac{10}{3}}$ g) $2^{\frac{3}{2}}$ h) $2^{\frac{4}{3}}$
2. a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $7^{-\frac{1}{2}}$ d) $7^{-\frac{1}{3}}$ e) $7^{-\frac{3}{2}}$
 f) $7^{-\frac{3}{5}}$ g) $7^{\frac{5}{2}}$ h) $7^{\frac{6}{5}}$
3. a) 27 b) 25 c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{1}{12}$ f) 8
 g) 10 h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. a) 0,008 b) 2,5 c) 0,09 d) 125 e) 32
 f) 0,008 g) $(\frac{10}{3})^5$ h) 0,008
5. a) 16 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 64
6. a) 7 b) 5 c) 1 d) $\frac{8}{3}$
7. a) 32 b) 16 c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{125}$ e) $\frac{1}{27}$
8. a) 8 b) $\sqrt{7}$ c) 7 d) 27

Nazwy wielkich liczb

2. nazewnictwo europejskie:
 Słońce – 1,989 kwintylionów kg,
 Merkury – 330,2 tryliardów kg,
 Jowisz – 1,899 kwadryliardów kg,
 Ziemia – 5,974 kwadryliardów kg;
 nazewnictwo amerykańskie:
 Słońce – 1,989 nonylionów kg,
 Merkury – 330,2 sekstylionów kg,
 Jowisz – 1,899 oktylionów kg,
 Ziemia – 5,974 septylionów kg

1.9. Logarytm i jego własności

- Ć** 1. a) 1 b) 2 c) 5 d) -2 e) $\frac{1}{3}$
 2. a) 4 b) 10 c) -1 d) -3 e) $\frac{1}{2}$
 3. a) 1 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) 3 e) -2 f) $\frac{1}{4}$
 5. a) 14 b) 7 c) $1\frac{1}{2}$ d) $3\frac{1}{3}$ e) $2\frac{1}{4}$
 6. a) -7 b) 13 c) $-2\frac{1}{2}$ d) $3\frac{1}{2}$ e) $4\frac{3}{4}$
 7. a) 20 b) 20 c) 12 d) -16
- Z** 1. a) 9 b) 1 c) -5 d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{3}{2}$
 2. a) 0 b) 5 c) -1 d) $\frac{3}{2}$ e) $-\frac{3}{2}$
 3. a) -1 b) 2 c) 4 d) 3 e) $\frac{1}{2}$
 4. a) 2 b) 4 c) 16 d) 256 e) $\frac{1}{16}$ f) $\frac{1}{4}$
 5. a) $2+4=6$ b) $3-2=1$ c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$
 6. a) $3-1=2$ b) $4-2=2$ c) $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
 7. a) 1 b) 3 c) 2
 8. a) 2 b) 3 c) -2 d) 4 e) -1 f) 1
 9. a) 32 b) 2 c) 9 d) 1 e) 8 f) $\frac{1}{8}$
 g) 1 000 000 h) $\frac{1}{8}$

Skala logarytmiczna

1. a) $\log 40 \approx 1,6$; $\log 90 \approx 1,95$
 b) $\log 400 \approx 2,6$; $\log 900 \approx 2,95$
 2. $\log a = 1$, $\log b = 4$, $\log c = 6$,
 $\log d = -4$, $\log e = -6$

1.10. Procenty

- Ć** 1. czapka 27 zł, rękawice 39 zł,
 razem 66 zł
 2. cena nart po obniżce: marcowej – 462 zł,
 o 50% – 412,5 zł
 3. 1380 zł, wzrosła o 38%
 4. a) 20 b) 30
 5. a) 2,4 b) 30,8 c) 5 d) 5 e) 0,036 f) 0,99
 6. firma Y: o 35%, firma Z: o 12,5%
 7. a) $y = 50\%x$, $x = 200\%y$
 b) $y = 80\%x$, $x = 125\%y$
 c) $y = 160\%x$, $x = 62,5\%y$
 8. cena średniego zestawu: 250 zł,
 cena małego zestawu: 125 zł
- Z** 1. a) 160,4 b) 4,5 c) 0,004
 2. a) 100% b) 25% c) 56,25%
 3. a) 36% b) $55\frac{5}{9}\%$

4. a) 110 b) 6 c) 5
 5. a) 162 b) 0,8 c) 1
 6. a) 1188 zł b) 1125 zł c) 1080 zł
 7. a) 62,5% b) 75%
 8. dobrą: 25%, pozytywną: 87,5%
 9. x większe od y o: a) 60% b) 25%
 c) $33\frac{1}{3}\%$ d) 300% e) 400% f) 220%
 y mniejsze od x o: a) 37,5% b) 20%
 c) 25% d) 75% e) 80% f) 68,75%

1.11. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $5,02 \cdot 10^{27}$ b) $2,7 \cdot 10^{-4}$
 c) $2,99 \cdot 10^{-26}$ d) $9,109\,56 \cdot 10^{-31}$
 2. a) $6,32 \cdot 10^6$ b) $1,09 \cdot 10^8$
 c) $4,3728 \cdot 10^1$ d) $8,7652 \cdot 10^3$
 e) $6,5 \cdot 10^{-4}$ f) $3,02 \cdot 10^{-3}$
 g) $1,003\,24 \cdot 10^{-1}$ h) $1 \cdot 10^{-6}$
 3. a) 86 200 b) 0,000 789
 c) 0,000 083 4 d) 6,02
 4. a) $1,36 \cdot 10^3 = 1360$
 b) $1,12 \cdot 10^6 = 1\,120\,000$
 c) $3 \cdot 10^2 = 300$
 d) $6 \cdot 10^{-1} = 0,6$
 5. a) $2,73 \cdot 10^8 = 273\,000\,000$
 b) $2 \cdot 10^1 = 20$
 c) $2,42 \cdot 10^{-4} = 0,000\,242$
 d) $5,203 \cdot 10^2 = 520,3$
 6. a) $2 \cdot 10^4 = 20\,000$
 b) $9 \cdot 10^{10} = 90\,000\,000\,000$
 c) $3 \cdot 10^{12} = 3\,000\,000\,000\,000$
 d) $1,6 \cdot 10^{11} = 160\,000\,000\,000$
 7. a) $9,6 \cdot 10^9$ b) $6 \cdot 10^{-13}$
 c) $1,02 \cdot 10^0$ d) $1,2 \cdot 10^0$
 8. włoś: 0,000 000 004 6 m/s,
 ślimak: $1,94 \cdot 10^{-3}$ m/s,
 sprinter: $1 \cdot 10^1$ m/s,
 Ziemia: 29 600 m/s,
 światło: $2,997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s
 9. rok świetlny: $9,4608 \cdot 10^{12}$ km;
 kolcjno: $3,9 \cdot 10^5$, $1,5 \cdot 10^8$, $5,9 \cdot 10^9$,
 $4,1 \cdot 10^{15}$, $2,6 \cdot 10^{17}$, $1,4 \cdot 10^{22}$
 10. $1,017 \cdot 10^{11}$ h

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) 1, 2, 3, 6, 9, 18
b) 1, 2, 19, 38
c) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40
d) 1, 2, 29, 58
e) 1, 2, 4, 17, 34, 68
2. a) 995 b) 996 c) 994 d) 990
3. a) $4\frac{1}{3}$ b) 8 c) $-\frac{1}{15}$ d) 40,9
e) $-13\frac{1}{3}$ f) $3\frac{1}{2}$
4. a) $-x = 3\frac{9}{32}, \frac{1}{y} = -\frac{4}{7}$
b) $-x = -\frac{19}{21}, \frac{1}{y} = 1\frac{8}{37}$
c) $-x = -8,4, \frac{1}{y} = -\frac{30}{169}$
d) $-x = \frac{37}{60}, \frac{1}{y} = \frac{15}{16}$
5. a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}, 2$
b) $\sqrt{1\frac{4}{25}}, 1$
c) $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}, 13$
d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}, 8$
6. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{15}$ e) 2
f) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{8}{9}$
7. a) $-3 + \sqrt{5}$ b) -375 c) $\frac{135}{4}$
9. a) Zmniejszyło się o 36%.
b) Zmniejszyło się o 1%.
10. 150
11. a) $1\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{24}{25}$ d) $\frac{11}{16}$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) 16, 17, 18 b) 26, 28, 30, 32
2. a) $3\frac{3}{4}$ b) $9\frac{9}{16}$ c) $4\frac{7}{9}$ d) $-\frac{65}{144}$
3. a) $x + y = \frac{43}{12}, xy = \frac{35}{12}$
b) $x + y = \frac{23}{12}, xy = \frac{5}{6}$
c) $x + y = 1,7, xy = 0,3$
d) $x + y = -2,75, xy = 1,5$
4. a) $a = 3\sqrt{3}$ b) $a = \frac{5\sqrt{5}}{8}$
c) $a = \frac{16}{9}$ d) $a = \frac{1}{4}$
e) $a = 144$ f) $a = 324$
5. a) 2,1 b) $-\frac{7}{12}$ c) 0
d) $624\frac{624}{625}$ e) 9,9 f) $\frac{5}{6}$
6. a) -1 b) 9 c) -3 d) 3
7. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{4}$
d) $\frac{32}{9}$ e) $\frac{4}{9}$ f) 2

8. a) $x = 4$ b) $x = -2, x = 2$ c) $x = 3$
d) $x = 2$ e) $x = \frac{7}{2}$ f) $x = 2$
9. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $2\frac{1}{3}$ d) $\frac{20}{3}$
10. a) d, b, c, a b) d, a, b, c
11. a) 2,5 b) 7,5 c) 7,5
12. a) 2,4 b) 1,8 c) 0,032 d) 0,164
13. a) 100,2 b) 500,8

Zadania testowe

1. D 2. A 3. B 4. D 5. C 6. C 7. D 8. C
9. B 10. C 11. B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. 15
2. ujemny
3. $24\sqrt{3}$
4. 1
5. 25 zł
6. 150
7. 360
8. 12,5%
9. 15 h

2.1. Zbiory

- Ć** 1. a), c), f) jest
b), d), e) nie jest
2. $D = \{0, 1, 2\}, E = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$
 $F = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
3. a) $A = C$ b) $B = C$
4. a) $B \subset A$ b) $A \subset B$ c) nie
- Z** 1. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}, A \subset B$
b) $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\},$
 $B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\},$ nie
2. a) $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$
b) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$
c) $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$
 $\{3, 4\}$
3. $\{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\},$
 $\{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}$
4. a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$

5. a) tak b) nie c) nie
 6. $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$
 7. a) $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$
 b) $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 4\}$, $\{0, 2, 3\}$,
 $\{0, 2, 4\}$, $\{0, 3, 4\}$

2.2. Działania na zbiorach

1. a) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$
 b) $A = \{a, b, c, d, e\}$,
 $B = \{c, d, e, f, g, h, i\}$,
 $A \cap B = \{c, d, e\}$
 2. a) $\{3, 5\}$ b) $\{0, 6, 12, 18\}$
 c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$
 3. a) tak b) nie
 4. a) 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10
 b) s, t, u, v, w
 5. a) $\{5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25\}$
 b) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ c) $\mathbb{Z}$
 6. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 b) $A \cap B = \{2, 3\}$,
 $A \cap C = \{3, 7\}$,
 $B \cap C = \{3, 5, 6\}$,
 $A \cap B \cap C = \{3\}$
 7. $A \setminus B = \{4, 6, 8\}$, $B \setminus A = \{1, 3\}$
 8. a) $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$
 b) $A \setminus B = \{7\}$, $B \setminus A = \{0, 2, 4\}$
 9. $A \cup B = \{k, l, m, n, o, p, q, r, s\}$,
 $A \cap B = \{n, o\}$, $A \setminus B = \{k, l, m\}$,
 $B \setminus A = \{p, q, r, s\}$
 2. a) $A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\}$,
 $A \cap B = \{e, g\}$, $A \setminus B = \{a, c\}$,
 $B \setminus A = \{d, f\}$
 b) $A \cup B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cap B = \{5, 7\}$, $A \setminus B = \{1, 9\}$,
 $B \setminus A = \{4, 6, 8\}$
 3. 9 uczniów
 4. a) II b) III c) I
 5. a) $A \cap B$, $B \setminus A$ b) $A \setminus B$, $B \setminus A$

6. a) $A \cap B = \{m, r, t\}$
 b) $A \setminus B = \{k\}$
 c) $B \setminus A = \{g\}$
 d) $B \cap C = \{g, r\}$
 e) $B \setminus C = \{m, t\}$
 f) $C \setminus B = \{b, l\}$
 g) $A \cap B \cap C = \{r\}$
 h) $A \cup B \cup C = \{b, g, k, l, m, r, t\}$

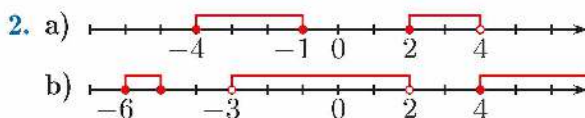
2.3. Przedziały

1. a) $-3 < x < 2$
 b) $0 < x < 4$
 c) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$
 d) $100 < x < 150$
 2. a) $-1 \leq x \leq 4$, 6 liczb całkowitych
 b) $\frac{3}{2} \leq x < 5$, 3 liczby całkowite
 c) $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$, 1 liczba całkowita
 d) $-60 \leq x \leq 40$, 101 liczb całkowitych
 3. a) $\langle -7; 0 \rangle$ b) $(\frac{1}{2}; 9)$
 c) $(\frac{1}{4}; \sqrt{2})$ d) $(-\frac{13}{3}; 5)$
 e) $(2\frac{1}{4}; \infty)$ f) $(-3; \infty)$
 g) $(-\infty; -\frac{1}{3})$ h) $(-\infty; 27)$
 2. a) $\langle -7; 2 \rangle$, $-7 < x \leq 2$
 b) $\langle -50; 20 \rangle$, $-50 \leq x \leq 20$
 c) $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$
 d) $\langle 3, 14; \pi \rangle$, $3, 14 \leq x < \pi$
 e) $(-\infty; 10)$, $x < 10$
 f) $(\sqrt{2}; \infty)$, $x > \sqrt{2}$
 g) $\langle -\frac{1}{4}; \infty \rangle$, $x \geq -\frac{1}{4}$
 h) $(-\infty; 2\pi)$, $x < 2\pi$
 3. a) $(0; 4)$ b) $\langle -4; 0 \rangle$
 c) $(2\frac{1}{2}; \infty)$ d) $(-\infty; -\sqrt{2})$
 4. a) $(-1; 3)$ b) $(-4; 2)$
 c) $\langle 1; 5 \rangle$ d) $\langle -\frac{7}{4}; \frac{5}{4} \rangle$
 5. a) -1, 0, 1, 2, 3
 b) 1, 2, 3, 4, 5
 c) 0, 1, 2
 d) -6, -5, -4, -3, -2
 6. a) 4 b) 6 c) 6 d) 8
 7. a) $A \subset B$
 b) Nie zachodzi żadna z tych zależności.
 c) $B \subset A$ d) $A \subset B$
 8. a) $\langle -2; 5 \rangle$ b) $\langle -3; 5 \rangle$ c) $\langle -3; 2 \rangle$ d) $\langle -1; 1 \rangle$

9. a) -1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ d) 2
 10. $p = -1$ lub $p = 1$
 11. a) $x \in \langle 1; 2 \rangle$ i $y \in \langle 1; 5 \rangle$
 b) $x \in \langle -5; -1 \rangle$ i $y \in \langle 0; 4 \rangle$
 12. a) 6 b) 6 c) 5 d) 8
 13. a) $-3 \leq x \leq 5$; 3
 b) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$; 1
 c) $-\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$; 1
 d) $-\pi < x < 2\pi$; 4
 14. a) $3\frac{2}{5}$, π b) $-\frac{8}{3}$, π c) żadna d) π

2.4. Działania na przedziałach

1. a) $A \cup B = (1; 6)$, $A \cap B = (2; 4)$,
 $A \setminus B = (1; 2)$, $B \setminus A = \langle 4; 6 \rangle$
 b) $A \cup B = \langle -4; 3 \rangle$, $A \cap B = \{1\}$,
 $A \setminus B = \langle -4; 1 \rangle$, $B \setminus A = (1; 3)$
 c) $A \cup B = \langle -5; 3 \rangle$, $A \cap B = \langle 1; 3 \rangle$,
 $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \langle -5; 1 \rangle$
 d) $A \cup B = (-3; 2)$, $A \cap B = (-1; 2)$,
 $A \setminus B = (-3; -1)$, $B \setminus A = \emptyset$



3. a) $\langle -5; -3 \rangle \cup \langle -1; 4 \rangle$
 b) $\langle -3; 2 \rangle \cup \langle \frac{5}{2}; 5 \rangle$
 c) $\langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$
 d) $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

1. a) $A \cup B = (-3; 4)$, $A \cap B = \langle -1; 0 \rangle$,
 $A \setminus B = (-3; -1)$, $B \setminus A = \langle 0; 4 \rangle$
 b) $A \cup B = (-4; 3)$, $A \cap B = \langle -\frac{1}{2}; 2 \rangle$,
 $A \setminus B = (-4; -\frac{1}{2})$, $B \setminus A = (2; 3)$
 c) $A \cup B = \langle -5; 4 \rangle$, $A \cap B = (-2; 0)$,
 $A \setminus B = \langle -5; -2 \rangle \cup (0; 4)$, $B \setminus A = \emptyset$
 d) $A \cup B = (-\infty; 2)$, $A \cap B = \langle 0; 2 \rangle$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0) \cup \{2\}$, $B \setminus A = \emptyset$
 e) $A \cup B = \langle -1; \infty \rangle$, $A \cap B = \{2\}$,
 $A \setminus B = \langle -1; 2 \rangle$, $B \setminus A = (2; \infty)$
 f) $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \langle -3; 6 \rangle$,
 $A \setminus B = (-\infty; -3)$, $B \setminus A = \langle 6; \infty \rangle$
 3. a) $(-\infty; -2) \cup \langle 3; \infty \rangle$
 b) $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 c) $(-\infty; 0) \cup (10; \infty)$
 d) $(-\infty; \sqrt{2})$

4. a) $A \cup B = (-3; 6)$,
 $A \cap B = (0; 1) \cup (3; 4)$,
 $A \setminus B = (-3; 0) \cup \langle 4; 6 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 1; 3 \rangle$
 b) $A \cup B = \langle 0; 7 \rangle \cup \langle 8; 9 \rangle$,
 $A \cap B = (1; 3)$,
 $A \setminus B = \langle 0; 1 \rangle \cup \langle 3; 7 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 8; 9 \rangle$
 6. a) 10 b) 7 c) 0 d) 3
 7. a) $B \setminus A$ b) $A \cap B$

Rozwiązywanie równań

1. a), b), d) spełnia c) nie spełnia
 2. a) $x = \frac{5}{2}$ b) $x = -\frac{1}{3}$
 c) $x = -6$ d) $x = -1$
 e) $x = \frac{1}{3}$ f) $x = -\frac{12}{7}$
 3. a) $x = 4$ b) $x = -\frac{2}{3}$
 c) $x = -1$ d) $x = \frac{9}{4}$
 e) $x = \frac{3}{5}$ f) $x = 5$
 4. a) $2\frac{2}{3}$ b) $-3\frac{3}{4}$ c) $2\frac{2}{3}$ d) $1\frac{1}{2}$
 5. a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = \frac{17}{28}$
 d) $x = -4$ e) $x = \frac{7}{2}$ f) $x = 2$
 6. a), d) tożsamościowe
 b), c) sprzeczne
 7. $x = 3$

2.5. Rozwiązywanie nierówności

1. a), b) spełnia
 c), d) nie spełnia
 2. a) $x < -36$, nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność
 b) $x \geq 2\frac{5}{6}$, liczba 3
 c) $x \leq -5\frac{1}{4}$, nie istnieje liczba naturalna spełniająca tę nierówność
 d) $x > 20$, liczba 21
 3. a) nie b) tak
 4. a) $x \leq 9$ b) $x > \frac{16}{9}$
 c) $x < -15$ d) $x \geq 6$
 5. a) $x > -3$ b) $x \geq -6$ c) $x \geq 4$
 d) $x > \frac{7}{3}$ e) $x < 13$ f) $x \geq -\frac{1}{7}$
 6. a), e) spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$
 b), c), d) sprzeczna

- [Z]** 1. a) $\langle 4; 5 \rangle$ b) $\langle -5; -2 \rangle$ c) $\langle -\frac{1}{2}; 1 \rangle$
 2. a) $\langle -6; -4 \rangle, -5$
 b) $\langle -\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \rangle, 0$
 c) $\langle -4; 2 \rangle, -4, 1$
 d) $\langle -\frac{16}{3}; -3 \rangle, -5, -4$
 3. a) żadna b) c c) c d) b, c
 e) a, b, c f) żadna
 4. a) $x > \frac{15}{8}$ b) $x \geq 2$ c) $x \leq \frac{25}{4}$
 d) $x > \frac{28}{33}$ e) $x \geq \frac{11}{8}$ f) $x < \frac{19}{3}$
 5. a) $x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $x > 6\sqrt{2}$ c) $x > \frac{4\sqrt{5}}{5}$
 6. a) $n \in \{6, 7, 8\}$
 b) $k \in \{-2, -1\}$
 c) $m \leq 13$ i $m \in \mathbb{N}$
 7. a) $k \in \{4, 5\}$ b) $k \in \{2, 3, 4\}$
 8. a) nie b) nie
 9. a) $x > -1$ b) $x \leq -\frac{1}{2}$ c) $x < 4$
 d) $x \geq -3$ e) $x \geq -18$ f) $x < \frac{8}{7}$
 10. a) 3, 4 b) 3, 4 c) $-4, -3, -2, -1$

Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

1. a) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2$
 b) $-\frac{1}{2}x^5 + x^4 + 4x^3$
 c) $-2x^4y + x^3y^2$
 d) $4x^5y + \sqrt{2}x^4y^2$
 e) $x^4y^2 - x^3y^2 + x^3y^3$
 f) $6x^3y^5 - \sqrt{3}x^4y^4$
 2. A – III, B – IV, C – II, D – I
 3. a) $-6x^3 - 6x^2 + 10x$
 b) $-\frac{1}{2}x^4 + 5x^2$
 c) $3\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{6}x^2$
 d) $-\frac{23}{8}x^2y^3 + xy^3$
 e) $-x^4y^2 + x^4y^3 + 2x^3y^3$
 f) $\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy$

2.6. Wylączenie jednomianu przed nawias

- [C]** 1. a) 400 b) 450 c) 1500
 d) 3600 e) 4800 f) 3800
 2. a) $5(x + y)$ b) $4(b - 2a)$
 c) $9(x - 3y^2)$ d) $-6(x^2 - 3y^2)$
 e) $13(3y^2 - 2z)$ f) $-11(a^3 - 2b^2)$
 g) $-12(4p - 3q^2)$ h) $25(3xy^3 - 5)$

3. a) $x(4x + y)$ b) $2x(x^2 - 6y)$
 c) $xy(3 - z)$ d) $6pq(1 + 3p)$
 e) $a^2b(1 + 3b - a)$
 f) $x^2y^2(4 - 5x + 2y)$
 4. a) $4x^2(2x - 9)$ b) $7y^2(1 - 2y^2)$
 c) $5x^2(x + 2y)$ d) $5a(4x - 3y)$
 e) $4b(2a + 3c)$ f) $2xy(2 + 3x)$
 g) $2a^2b(a + 2 - 2b)$
 h) $3p^2q^2(7p - 9q + 1)$
 i) $6xy(8x + 3y - 2xy)$
[Z] 1. a) 400 b) 4000 c) 5000
 d) 3700 e) 1000 f) 300
 2. a) $ab(a + b^2)$ b) $xy^2(x^2 - y)$
 c) $3a^2(3ab^2 - c^2)$
 d) $4y^3(x^4y + 2z)$
 e) $3a^2b(ab - 2)$ f) $2x^2y^3(3y + 4x)$
 3. a) $xyz(x + y + z)$
 b) $xyz^2(x + yz - x^2)$
 c) $2x^2y(x - 2y + 3z)$
 d) $3x^3y^2(4xy + 2y - 3x^2)$

4. a) $4y - 6$
 b) $3ab(3a + b + 2) = 9a^2b + 3ab^2 + 6ab$
 c) $3t^2(4t^2 - 3t + 1)$
 5. a) -45 b) -30 c) 225
 6. a) 120 b) 24 c) 4 d) 2
 7. I – C, II – A, III – B
 11. a) $3x(3x^2 - 2x + 5)$
 b) $6x^2(3x^2 + 4x - 2)$
 c) $4x^4(2x - 4 + 3x^2)$
 12. a) $3x^2(3x + y^2)$
 b) $3x^2(x^2y^2 - 2y)$
 c) $2xy^2(3x - 1)$
 d) $2xy^2(4y^3 + 6xy^2)$
 e) $2xy^2(3x^2y - 3x^3y^2 + 6)$
 f) $3x^2(2x^2y^2 + 2xy^2 - 6x^2y)$
 13. a) $3y^3(3x^4 - 4y^2)$
 b) $4a^2b^2(2 + ab^2)$
 c) $2p^2q^3(4p + 2p^2q - 3)$

2.7. Mnożenie sum algebraicznych

- [C]** 1. a) $x^2 + 7x + 12$ b) $p^2 - pq + 6p - 6q$
 c) $-2p^2 - pq + q^2$ d) $6x^2 + 20x + 6$
 e) $3a^2 + 7ab - 6b^2$ f) $8a^2 - 8ab + \frac{3}{2}b^2$

2. a) $x^3 - 3x + 2$ b) $2x^3 + 5x^2 + 9$
 c) $x^2 - 4x + 4y - y^2$
 d) $2x^2 + 6x + 5xy + 18y - 3y^2$
 e) $x^2 - x + 5y - y^2 - 6$ f) $x^4 + x^2 + 1$

3. a) $V = x^4 - 2x^2 - 8$

b) $V = x^5 - 2x^4 - x + 2$

4. a) $2\sqrt{2} - 1$ b) $11 - 5\sqrt{5}$

c) $7 - 3\sqrt{6}$ d) $16 + 7\sqrt{10}$

e) $5 + 2\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

f) $-5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

6. a) $x = -\frac{10}{3}$ b) $x = \frac{3}{5}$ c) $x = -\frac{2}{5}$

d) $x > -3$ e) $x > -1$ f) $x \geq \frac{1}{3}$

[Z] 1. a) $2a^2 - 2a + ab - b$

b) $6ab + 9a - 4b^2 - 6b$

c) $-12a^2 + 4a + 6ab - 2b$

d) $-4a - 8ab - 6b - 3$

e) $2a^2 - 4ab + ab^2 - 2b^3$

f) $-3a^3 + 2a^2b + 9ab - 6b^2$

2. a) $x^2 + x + 2xy - 4y - 6$

b) $4x^2 - 4x - 2xy + 3y - 3$

c) $x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + y^2 + 2y$

d) $x^3 - x^2y - 2x^2 + 2xy + x - y$

e) $2x^2y + 6x^2 - 12xy - 4xy^2$

f) $-16x^3 + 4xy^2$

3. a) $2a^2 - 24$ b) $12ab + b^2$

c) $4y^2 - 4x^2 - 3xy$ d) $2x^2 + 15x$

4. a) $x^2 - 4x - 12, -9, 75$

b) $x^3 - x^2 - 6, -6, 375$

5. a) $P = a^2 + 2a$ b) 1

6. a) $3x + 7$ b) $a + 3$

c) $5x + 12$ lub $4x + 13$

7. a) -20 b) -6 c) -4 d) 10

9. a) $x = -10$ b) $x = 4$

c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = \frac{1}{2}$

10. a) $x \geq \frac{3}{2}$ b) $x < -\frac{6}{5}$ c) $x \geq \frac{5}{8}$

d) $x < \frac{1}{2}$

11. a) 3 b) 10 c) 0

12. a) 160 cm i 100 cm b) 57 cm^2

13. 14 cm

14. a) $12k^2$ b) 6 c) $6k^2$ d) $l^2 - 4kl$

15. a) $x = \frac{6}{7}$ b) $x = 1$ c) $x < \frac{1}{3}$

d) $x \leq 4$

2.8. Wzory skróconego mnożenia

[C] 2. a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 + 4x + 4$

c) $x^2 - 6x + 9$ d) $x^2 - 10x + 25$

e) $4x^2 + 4x + 1$ f) $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

g) $16x^2 - 8x + 1$ h) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

3. a) $x^2 + 4xy + 4y^2$

b) $4x^2 - 4xy + y^2$

c) $9x^2 + 12xy + 4y^2$

d) $9x^2 + 3xy + \frac{1}{4}y^2$

e) $4x^2 - xy + \frac{1}{16}y^2$

f) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

4. a) $8 + 2\sqrt{7}$ b) $14 - 6\sqrt{5}$

c) $39 - 12\sqrt{3}$ d) $5 + 2\sqrt{6}$

e) $21 + 6\sqrt{10}$ f) $6\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$

6. a) $x^2 - 9$ b) $x^2 - 49$

c) $4x^2 - 16$ d) $25x^2 - 36$

e) $9x^2 - 16y^2$ f) $9y^2 - \frac{1}{4}x^2$

7. a) 18 b) -4 c) $-\frac{25}{18}$

d) -1 e) -1 f) 4,5

[Z] 1. a) -5 b) -2 c) $-5y^2 - 12y + 13$

d) $-50y^2 - 10y$ e) $13x^2 - 5y^2$ f) $8x^2 + 24y^2$

2. a) 7 b) 16 c) $-7 - 8\sqrt{2}$

3. a) 6 b) $-3 + 2\sqrt{3}$ c) $-12\sqrt{3}$

d) 10 e) $12 - 2\sqrt{30}$ f) $49 - 20\sqrt{2}$

4. a) 1 b) 1 c) 2 d) 2

5. a) $66 + 36\sqrt{2}$ b) $78 - 24\sqrt{3}$

c) $48 + 24\sqrt{3}$

6. a) 14 b) $12 - \sqrt{2} + 3\sqrt{10}$

7. a) $-18\sqrt{10} - 42$ b) $16\sqrt{3}$

c) $96 - 12\sqrt{5}$ d) 0

9. a) $49 - 14x + x^2$ b) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

c) $4x^2 + 16x + 16$

d) $9x^2 + 48x + 64$

e) $\frac{1}{16}x^2 + 4x + 64$

f) $\frac{4}{9}x^2 - 8x + 36$

g) $0,25x^2 + 0,4x + 0,16$

h) $0,01x^2 - 0,5x + 6,25$

10. a) $11 + 6\sqrt{2}$ b) $6 - 2\sqrt{5}$

c) $34 - 24\sqrt{2}$ d) $37 + 12\sqrt{7}$

e) $23 + 4\sqrt{15}$ f) $18 - 12\sqrt{2}$

g) 4,5 h) $3,5 + \sqrt{6}$

11. a) 6 b) 6 c) -4

Liczby wielokątne

- 400
- 51
- 1, 6, 15, 28, 45

2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

- Ć 1. a) $\frac{6\sqrt{2}}{34}$ b) $\frac{8\sqrt{2}}{11}$ c) $\frac{2\sqrt{10}}{11}$
 c) $-4 - 3\sqrt{2}$ d) $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$
 2. a) $x = 3$ b) $x = 1$ c) $x = 5$
 3. a) $x > -1$ b) $x \leq -\frac{1}{2}$
 c) $x > \frac{1}{9}$ d) $x \leq 2$
 4. a) $x = -4$ b) $x = 3$ c) $x = \frac{1}{2}$
 d) $x = -\frac{1}{5}$ e) $x = -\frac{3}{2}$ f) $x = \frac{1}{6}$
 5. a) sprzeczne b) tożsamościowe
 6. a) tożsamościowa b) sprzeczna

- Z 1. a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, tak
 b) $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$, tak
 c) $3\sqrt{5} - 6$, tak
 d) $-\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$, nie
 e) $4\sqrt{3} - 6$, tak
 f) $12\sqrt{2} + 16$, nie
 g) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$, nie
 h) $2\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$, tak
 i) $2\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$, nie
 j) $\sqrt{6} - 2$, tak
 k) $-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5}$, nie
 l) $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, tak
 2. a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = 1,3$ c) $x \in \mathbb{R}$
 d) sprzeczne
 e) $x = 18$ f) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 3. a) $x \leq \frac{9}{4}$ b) $x \in \mathbb{R}$
 c) $x \leq \frac{4}{3}$ d) $x \geq -\frac{17}{4}$
 4. a) $(0; \frac{3}{2})$ b) $(-5; 2)$
 c) $(\frac{1}{8}; \frac{8}{3})$ d) $(\frac{3}{2}; 5)$
 5. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $2 + \sqrt{3}$ c) $4 + 2\sqrt{2}$
 d) $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ e) $7 + 4\sqrt{3}$
 6. a) $x = -\frac{3}{2}$ b) $x = 5$
 c) sprzeczne d) $x = 10$
 7. a) $x \leq -\frac{5}{2}$ b) $x < 5$
 c) $x \leq \frac{2}{3}$ d) $x < \frac{17}{3}$

2.10. Wartość bezwzględna

- Ć 1. a) 5 b) 5 c) $\sqrt{3} - 1$
 d) $3 - \sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2} - 4$
 f) $5 - 2\sqrt{5}$
 2. a) $x = -2$ lub $x = 2$
 b) $x = -10$ lub $x = 10$
 c) $x = 0$ d) brak rozwiązań
 3. a) x b) y c) x
 4. a) $2 - \sqrt{3}$ b) $4 - 2\sqrt{3}$
 c) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
 5. a) $x \in (-8; 8)$
 b) $x \in \langle -4; 4 \rangle$
 c) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 6. a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x = 0$
 c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) sprzeczna
 Z 1. a) 5 b) 0 c) 0 d) $\frac{19}{8}$
 e) $\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{3} - 2$
 2. a) $x + |x| = 10, x - 2|x| = -5$
 b) $x + |x| = 0, x - 2|x| = -9$
 c) $x + |x| = 0, x - 2|x| = 6 - 3\sqrt{6}$
 d) $x + |x| = 6\sqrt{2} - 8, x - 2|x| = 4 - 3\sqrt{2}$
 3. a) $x = -4, x = 4$
 b) $x = -14, x = 14$
 c) $x = -6, x = 6$
 d) $x = -\frac{1}{4}, x = \frac{1}{4}$
 e) $x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}$
 f) $x = -8, x = 8$
 g) $x = -1, x = 1$
 h) $x = -4, x = 4$
 4. a) $|x| > -7$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 $|x| < -7$ dla $x \in \emptyset$
 b) $|x| \geq -3$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 $|x| \leq -3$ dla $x \in \emptyset$
 5. a) $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$
 b) $1 - \sqrt{2}$
 c) $-3, 1 + \sqrt{2}, 3$ d) $-3, 3$
 6. a) $\langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$
 b) $(-5; -2) \cup (2; 5)$
 c) $\langle -4; -3\frac{1}{2} \rangle \cup (3\frac{1}{2}; 4)$
 7. a) $3 - \sqrt{7}$ b) $3 - 2\sqrt{2}$
 c) $3\sqrt{2} - 4$

8. a) $x = -\frac{2}{3}, x = \frac{2}{3}$
 b) $x = -4, x = 4$
 c) $x = -13, x = 13$
 d) $x = 0$

9. a) $(-4; -1) \cup (1; 4)$
 b) $(-5; -2) \cup (2; 5)$
 c) $(-3; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 3)$
 d) $(-\frac{9}{2}; -\frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \frac{9}{2})$

2.11. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $(A \cup B) \setminus C = \{1, 3, 5\}$,
 $(A \cup C) \setminus B = \{1, 2\}$,
 $(A \cap B) \setminus C = \{3\}$,
 $(A \cap C) \setminus B = \{2\}$
 b) $(A \cup B) \setminus C = \langle -4; 2 \rangle$,
 $(A \cup C) \setminus B = \langle -4; -1 \rangle \cup (3; \infty)$,
 $(A \cap B) \setminus C = (-1; 0)$,
 $(A \cap C) \setminus B = \emptyset$
2. a) 7 b) 6 c) 1
3. a) 63 b) 24
4. a) 60 b) 170
5. 4
6. $33\frac{1}{3}\%$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $(-2; -1)$ b) $(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3})$
 c) $(-\infty; 4)$ d) $(-\frac{9}{2}; -2)$
2. a) $x \leq 3\frac{1}{3}$ b) $x > -1$
 c) $x > -5$ d) $x < \frac{1}{3}$
 e) $x \leq 5$ f) $x < 6$
3. a) $2x^2 + 6x + 5$
 b) $2x^2 + 2x + 13$
 c) $-16x$ d) $-4x + 8$
 e) $8x^2 - 16x + 10$
 f) $-5x^2 + 10x$
4. a) $2x^2 - 29$ b) 15
 c) $5x^2 + 9$ d) -6
5. a) $-2\sqrt{3}$ b) $12\sqrt{3}$
6. a) 22 b) $8\sqrt{3}$
 c) $6 - 8\sqrt{3}$ d) 26
7. a) $2 + 2\sqrt{3}$ b) $4 + 2\sqrt{3}$
 c) $-2 - \sqrt{3}$ d) $3 - \sqrt{3}$
8. a) -1 b) $-9 + 4\sqrt{5}$ c) 18

9. a) $(x + 5)^2, x = -5$
 b) $(x - 8)^2, x = 8$
 c) $(3x - 1)^2, x = \frac{1}{3}$
 d) $(4x + 1)^2, x = -\frac{1}{4}$
 e) $(3x + 2)^2, x = -\frac{2}{3}$
 f) $(\frac{1}{2}x + 1)^2, x = -2$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $A \cap B = (2; 4), A \cup B = \langle -1; 5 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -1; 2 \rangle, B \setminus A = (4; 5)$
 b) $A \cap B = (3; 5), A \cup B = \langle 2; 7 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle 2; 3 \rangle \cup (5; 7), B \setminus A = \emptyset$
 c) $A \cap B = \{2\}, A \cup B = \langle -4; 9 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle -4; 2 \rangle, B \setminus A = (2; 9)$
 d) $A \cap B = \{0\}, A \cup B = (-\infty; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0), B \setminus A = (0; 4)$
 e) $A \cap B = (-2; -1), A \cup B = (-\infty; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -2), B \setminus A = \langle -1; 4 \rangle$
 f) $A \cap B = (2; 5), A \cup B = \langle 0; \infty \rangle$,
 $A \setminus B = \langle 5; \infty \rangle, B \setminus A = \langle 0; 2 \rangle$
2. a) 4 b) 1 c) 3
3. a) $x = \frac{2}{3}$ b) $x = 7$ c) $x = -\frac{17}{3}$ d) $x = \frac{3}{4}$
4. a) $n = 6$ b) $n = 9$ c) $n = 2$ lub $n = 3$
 d) $n = 1$
5. a) $x \geq -\frac{1}{2}$ b) $x > \frac{4}{3}$
 c) $x \leq -1$ d) $x < \frac{1}{3}$
6. a) -7 b) 2 c) 4 d) -2
7. a) nie jest b) jest
9. a) -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4
 b) -2, -1, 1, 2 c) -4, -3, -2, 2, 3, 4
10. a) 0 b) 2 c) 1

Zadania testowe

1. C 2. B 3. A 4. C 5. B 6. A 7. D
 8. A 9. B 10. A

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $-\sqrt{3}$
 2. $\langle 1; \infty \rangle$
 5. 10
 6. $\frac{1}{7}$
 8. $x \in (-3; 2)$
 9. 4

3.1. Co to jest układ równań

Ć 1. 6

2. C

Z 1. a), c), f) tak b), d), e) nie

2. C

3. a) (1, 7), (3, 4), (5, 1) b) (3, 2)

c) Nie ma takich liczb.

4. a) np. $x + y = 3$ b) np. $y - x = 2$

c) np. $4x + 3y = 3$ d) np. $2x + y = -9$

5. a) $\begin{cases} y + 8 = x \\ 5y = x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} a = 0,4b \\ 0,2a + 0,6b = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0,9a = 1,1b \\ 1,15a - 0,85b = 1 \end{cases}$

7. pary spełniające równanie $x + 3y = 9$:

(0, 3), (3, 2), (6, 1), (9, 0);

pary spełniające równanie $5x + 2y = 19$:

(1, 7), (3, 2); tak

8. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b = 14 \\ 1,2a + 0,7b = a + b \end{cases}$

3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Ć 1. a) $x = 10, y = 1$

b) $x = 19, y = 37$

c) $x = \frac{3}{5}, y = \frac{4}{5}$

d) $x = 8, y = 4$

e) $x = 3, y = -1$

f) $x = -3, y = -4$

2. a) $x = 5, y = 1$ b) $x = \frac{1}{3}, y = \frac{7}{3}$

c) $x = 1, y = 8$

3. a) $x = 11, y = -1$

b) $x = 2, y = -2$

c) $x = 3, y = -7$

4. a) nieoznaczony b) oznaczony

c) sprzeczny

Z 1. a) $x = 2,2, y = 1,6$

b) $x = \frac{1}{7}, y = -\frac{2}{7}$

c) $x = 1, y = 0$

d) $x = 1,7, y = 0,9$

e) $x = -\frac{1}{6}, y = -\frac{2}{3}$

f) $x = 10, y = 20$

2. a) $x = 2, y = -3$

b) $x = -2,8, y = -1,8$

c) $x = 5, y = -1$

d) $x = -\frac{2}{3}, y = 5$

e) $x = 0,5, y = -1,5$

f) $x = 4, y = 3$

3. a) tak b), c), d) nie

4. a) 0 b) 1 c) 1 d) 0

5. a) $x = 1, y = 2$

b) $x = -\frac{4}{3}, y = -\frac{13}{3}$

6. a), c) nieoznaczony

b) sprzeczny

7. a) np. $6x - 1 = 8y$

b) np. $6x - 4 = 8y$

c) np. $3x - 8y = 2$

8. a) $x = -\frac{6}{7}, y = \frac{19}{7}$

b) $x = \frac{20}{19}, y = -\frac{13}{38}$

c) $x = 18, y = -29$

9. a) sprzeczny b) nieoznaczony

c) oznaczony

3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Ć 1. a) $x = \frac{1}{2}, y = 3$

b) $x = 1, y = 1$

c) $x = -\frac{14}{5}, y = -5$

2. a) $x = 1, y = -1$

b) $x = -5, y = 2$

c) $x = 1, y = \frac{1}{7}$

d) $x = 2, y = -3$

e) $x = -3, y = 1$

f) $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$

3. a) $x = 2, y = -2$

b) $x = 7, y = -3$

c) $x = 1,9, y = 0,8$

4. a) np. 5 i 3 b) np. 2 i 3 c) np. $\frac{15}{2}$ i -1

5. a), c) sprzeczny b) nieoznaczony

- [Z]** 1. a) $x = 5, y = 3$ b) $x = 1, y = -3$
 c) $x = 24,5, y = 18$ d) $x = 2, y = 0,5$
 e) nieoznaczony: $x \in \mathbf{R}, y = -\frac{2}{3}x + 5$
 f) sprzeczny
2. a) $x = -8, y = 4$
 b) $x = -25, y = -5$
 c) $x = 0, y = 5$
 d) $x = 3, y = 5$
3. a) $x = -\frac{10}{9}, y = -\frac{55}{18}$
 b) $x = 3, y = 4$
 c) $x = 5, y = 2$
 d) $x = 1, y = -2$
 e) $x = -1, y = 1$
 f) nieoznaczony: $x \in \mathbf{R}, y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$
4. a) $x = -1, y = 1$
 b) układ nieoznaczony: $x \in \mathbf{R}, y = 2x - \frac{4}{3}$
 c) $x = -2, y = 5$
 d) $x = \frac{50}{9}, y = \frac{8}{3}$

3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

- [C]** 1. 10 i 40
2. a) 1,5 kg śliwek i 2,5 kg wiśni
 b) 1 kg marchwi i 5 kg buraków
3. Tomek 15 lat, siostra 11 lat
4. a) Daria 10 lat, Maria 15 lat
 b) Olek 27 lat, Alek 17 lat
- [Z]** 1. syn 16 lat, ojciec 51 lat
2. Ania i siostra po 15 lat, brat 21 lat
3. 20 monet 2-złotowych i 10 monet 5-złotowych
4. 7 monet 1-złotowych i 5 monet 5-złotowych
5. 6 monet 1-złotowych, 12 monet 2-złotowych i 14 monet 5-złotowych
6. 7 monet 5-centowych i 4 monety 10-centowe
7. 5 monet 5-centowych, 15 monet 10-centowych i 9 monet 25-centowych
8. 65 cm²
9. 7 cm i 21 cm lub 3 cm i 25 cm
10. 10 cm, 4 cm, 10 cm, 16 cm
11. 10 zł normalny, 7 zł ulgowy

12. 37 i 73
13. $A = 354, B = 34$
14. 70 biletów ulgowych i 140 normalnych
15. 7 cm
16. 25 cm, 90 cm

3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

- [C]** 1. a) 15 b) 1 g
2. prędkość własna łodzi – 8 km/h,
 prędkość prądu – 4 km/h
3. prędkość własna łodzi – 12 km/h,
 prędkość prądu – 2 km/h
- [Z]** 1. 300 dziewcząt, 200 chłopców
2. Bartek 1200 zł, Paweł 1600 zł
3. 6000 zł do banku A i 4000 zł do banku B
4. 6000 zł w banku X i 14000 zł w banku Y
5. 1,5 kg stopu 40% i 0,5 kg stopu 80%
6. 60% i 40%
7. 3 h, 60 km
8. 120 km
9. 20 km
10. 80 g
11. 40
12. 0,5 kg
13. 5000 zł
14. $x = 6000 \text{ zł}, y = 4000 \text{ zł}$

3.6. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $x = 20, y = -5, z = -5$
 b) $x = 2, y = 1, z = -1$
 c) $x = -\frac{13}{2}, y = \frac{25}{4}, z = -\frac{9}{4}$
 d) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}, z = -2$
2. a) $x = 2, y = -1, z = 4$; tak
 b) $x = -1, y = 2, z = 4$; tak
 c) $x = 2, y = 1\frac{2}{5}, z = -3\frac{1}{5}$; nie
 d) $x = 2, y = -1, z = 4$; tak
3. a) 13, 11, 12
 b) $a = 9, b = 7, c = 11$
4. 270 biletów normalnych, 190 biletów ulgowych, 40 wejściówek
5. 72

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $x = 6, y = 4$
b) nieoznaczony, $x \in \mathbf{R}, y = 0,4x - 1,9$
c) $x = 1, y = 1$
d) $x = -3, y = -2$
2. a), c), d) nie b) tak
3. a), d) nieskończenie wiele
b) 1 c) 0
4. a) 49 b) $A = 83, B = 38$
c) $\frac{7}{17}$
5. 6 chłopców, 17 dziewczynek

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $m = 1$: jedno rozwiązanie,
 $m = -2$: nie ma rozwiązań
b) $m = 1$: nieskończenie wiele rozwiązań,
 $m = -2$: jedno rozwiązanie
c) $m = 1$: jedno rozwiązanie,
 $m = -2$: nieskończenie wiele rozwiązań
2. a) $m = \frac{11}{17}, k = \frac{26}{17}$ b) $m = -1, k = \frac{1}{2}$
3. a) $x = \frac{3}{2}, y = 6$
b) $x = 0, y = -1$
c) $x = \frac{3}{22}, y = \frac{2}{11}$
d) $x = 1, y = -4$
e) $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$
f) $x = 0, y = 0$
4. a) 400 g roztworu 5% i 1 kg roztworu 40%
b) 7,5 g roztworu 10% i 2,5 g roztworu 6%
5. 56 g próby 750 i 44 g próby 375
6. $v_1 = 60 \text{ km/h}, v_2 = 90 \text{ km/h}$

Zadania testowe

1. C 2. D 3. C 4. D 5. C 6. B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $x = -2, y = -\frac{1}{2}$
2. 10 banknotów 10-złotowych, 17 banknotów 20-złotowych, 10 banknotów 50-złotowych
3. $\alpha = 55^\circ, \beta = 25^\circ, \gamma = 100^\circ$
4. I i III
5. 28

6. po 5 monet 10- i 50-groszowych, 12 monet 1-złotowych, 6 monet 2-złotowych
7. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

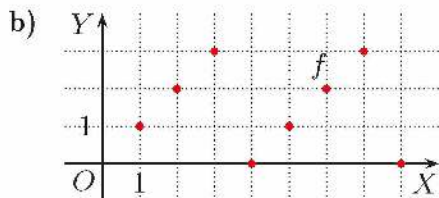
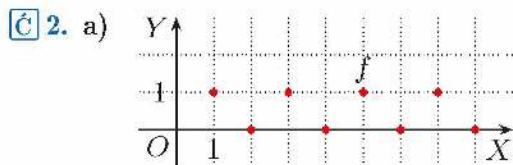
4.1. Pojęcie funkcji

- C** 2. a) $f(2) = -1, f(4) = 2$
b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{3, 4\}$,
nie istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1.
3. Wartościami funkcji nie są 1 i $\frac{3}{2}$.
Wartości przyjmowane dla dwóch argumentów: $\frac{1}{2}$ i 2.
4. a) 3 b) 0, 1, 5 c) 2 d) dla żadnych
5. a) nie b) tak, 2
6. miejsca zerowe funkcji f :
a) 2 b) brak c) $-1, 1$ d) 2
- Z** 1. miejsca zerowe funkcji f : a) 0 b) -1
2. a), b) wartości nieparzyste dla 3 argumentów
3. a) miejsca zerowe: 0, 2
b) brak miejsc zerowych
4. b) Wartościami funkcji f nie są: 2, 3, 5;
1 i 4 są przyjmowane dla dwóch argumentów.
5. wartości dodatnie dla:
a) jednego argumentu
b) trzech argumentów
6. wartości ujemne dla: $-1, 0, 1$,
dwa miejsca zerowe: $-2, 2$
8. $\{n \in \mathbf{N} : 1 \leq n \leq 18\}$,
 $f(x) = 3$ dla $x \in \{12, 21, 30\}$,
 $f(x) = 7$ dla $x \in \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$
9. a), b) dla dwóch
10. dla trzech
11. a) 45 b) 22 c) 18 d) 9

Układ współrzędnych

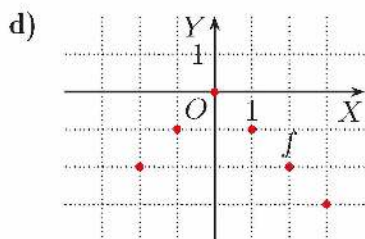
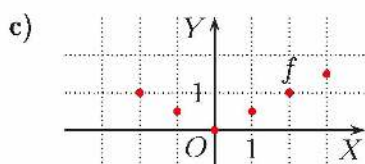
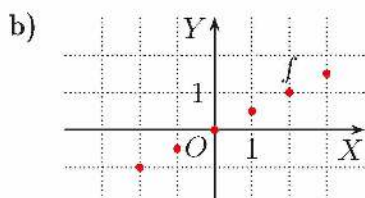
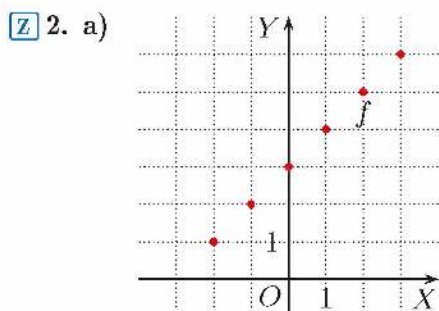
1. $P(4, 0), Q(2, 3), R(5, 1), S(0, 4),$
 $T(-2, 3), U(3, -2), W(-1, -2)$
2. a) II b) IV c) I d) III
4. a) 6 b) 40
5. do T_1 , o 1

4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)



3. a) $f(x) = x - 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

5. a) np. $(0, 0)$, $(1, 2)$
 b) np. $(0, 0)$, $(1, -1)$
 c) np. $(0, -1)$, $(1, 0)$
 d) np. $(0, 2)$, $(1, 0)$



3. a) $f(x) = x - 4$
 b) $f(x) = 2x$
 c) $f(x) = -x + 4$
 d) $f(x) = 2x - 1$

4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)

Ć 2. a) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 3x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \end{cases}$

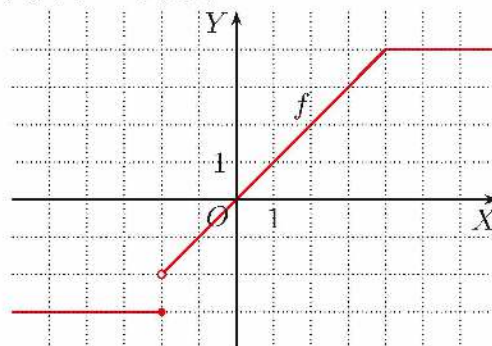
c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ -x & \text{dla } x \in \langle 0; \infty \end{cases}$

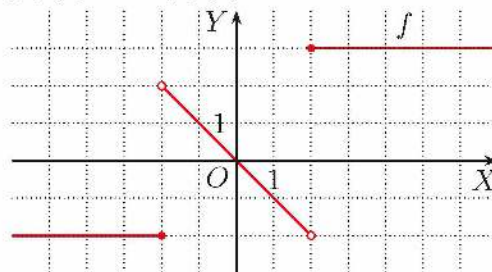
3. a) $f(1) = 1$, $f(7) = 4$

b) $f(1) = 3$, $f(7) = -6$

4. a) $f(1) = 1$, $f(3) = 3$



b) $f(1) = -1$, $f(3) = 3$

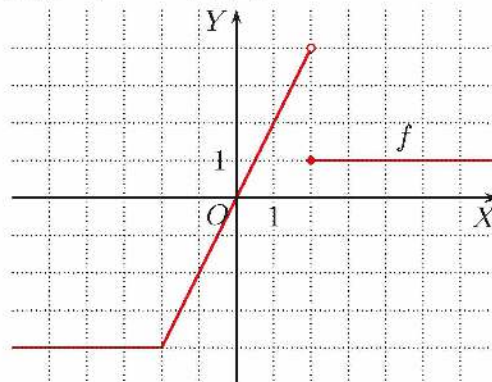


5. a) nie należy b) należy

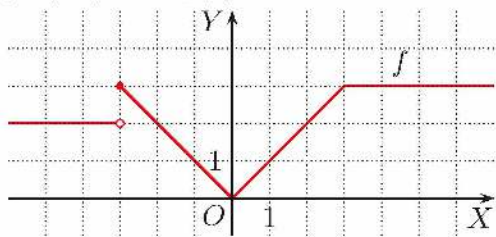
Z 1. a), c) nie b) tak

3. a) Q b) P c) P

4. a) $f(-3) = -4$, $f(2) = 1$



4. b) $f(-3) = 3, f(2) = 2$



5. a) $f(-4) = 4, f(4) = 8$

b) $f(-4) = 2, f(4) = 4$

4.4. Monotoniczność funkcji

2. a) tak b) tak c) nie

3. b) nie

1. a) maleje w $(-3; 2)$, stała w $\langle 4; 6)$,
rośnie w $\langle 2; 4)$

b) maleje w $\langle -2; 0)$ i w $\langle 2; 3)$,
rośnie w $(-3; -2)$, $\langle 0; 2)$ i w $\langle 3; 6)$

2. Wszystkie zdania są prawdziwe.

3. a) rośnie w $\langle -4; -2)$ i w $\langle 2; 5)$,
maleje w $\langle -2; 2)$

b) rośnie w $\langle -4; -1)$ i w $(-1; 5)$

4. a) tak, nierosnąca

b) tak, rosnąca

5. a) rośnie w $\langle 2; 6)$,
maleje w $\langle -4; -2)$,
jest niemalejąca w $(-5; -4)$ i w $\langle -2; 6)$

b) rośnie w $(-5; -4)$ i w $\langle 2; 4)$,
maleje w $\langle -4; -2)$ i w $\langle 0; 2)$,
jest niemalejąca w $(-5; -4)$, w $\langle -2; 0)$
i w $\langle 2; 6)$

4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

1. a) $D = (-5; 1) \cup (2; 6)$

b) $D = (-5; -3) \cup (-3; 5)$

2. a) $f(D) = \langle 1; 4)$

b) $f(D) = \langle 0; 4)$

c) $f(D) = \langle 0; \infty)$

3. Funkcja f przyjmuje największą wartość
równą 2 dla $x = 4$.

Funkcja g nie przyjmuje wartości
największej.

Funkcja h przyjmuje największą wartość
równą 3 dla $x = 3$.

1. a) $D = \langle -2; 4)$, $f(D) = \langle -4; 4)$,

$f_{\min} = -4$ dla $x = 2$,

$f_{\max} = 4$ dla $x = -2$

b) $D = \langle -4; 3)$, $f(D) = (-5; 4)$,

nie przyjmuje wartości najmniejszej,

$f_{\max} = 4$ dla $x = 0$

c) $D = (-5; 5)$, $f(D) = \langle -4; 2)$,

$f_{\min} = -4$ dla $x \in (-5; -3)$,

$f_{\max} = 2$ dla $x \in \langle 0; 5)$

d) $D = (-5; 5)$, $f(D) = \langle -4; 4)$,

$f_{\min} = -4$ dla $x = -2$,

$f_{\max} = 4$ dla $x = 2$

e) $D = \langle -3; -1) \cup \langle 1; 5)$,

$f(D) = \langle -4; -2) \cup \langle 3; 4)$,

$f_{\min} = -4$ dla $x = 5$,

$f_{\max} = 4$ dla $x = -3$

f) $D = (-4; -1) \cup (1; 4)$,

$f(D) = \langle -4; -1) \cup \langle 1; 4)$,

$f_{\min} = -4$ dla $x = -1$,

nie przyjmuje wartości największej

2. a) $f(D) = \langle -1; 3)$

b) $f(D) = \langle -1; 0) \cup \langle 1; 3)$

c) $f(D) = \langle -1; 1) \cup (2; 3)$

3. a) $f(D) = \langle 1; 6)$

b) $f(D) = \langle 1; 3) \cup \langle 4; 5)$

c) $f(D) = \langle 1; 2) \cup \langle 5; 6)$

4. a) $D = (\frac{1}{2}; 4)$

b) $D = (1; 3) \cup (3; \infty)$

c) $D = (2; 3) \cup \{\frac{7}{2}\}$

d) $D = \{2, 3, \frac{7}{2}\}$

5. a) $f_{\min} = -1$ dla $x = -1$,

$f_{\max} = 2$ dla $x = -4$

b) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,

nie przyjmuje wartości największej

c) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,

nie przyjmuje wartości największej

7. a) $f(D) = \langle -4; -2)$

b) $f(D) = (-3; -\frac{3}{2})$

c) $f(D) = \langle -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}) \cup \langle -2; -\frac{3}{2})$

8. a) $f(D) = \langle 0; 3)$

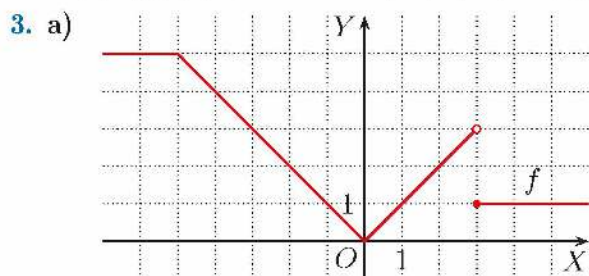
b) $f(D) = (-1; 0)$

c) $f(D) = \langle -1; 3)$

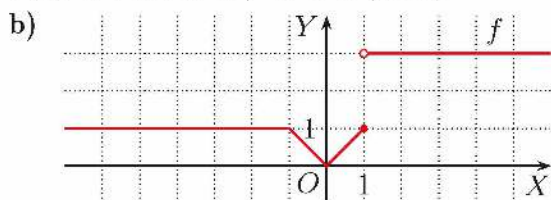
d) $f(D) = \langle -1; \infty)$

4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

- 1.** a) $f(x) = 0$ dla $x = 1$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-1, 3\}$
 b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, 0, 2\}$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-3, -1, 3\}$
 c) brak miejsc zerowych,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2, 0\} \cup \langle 2; 4 \rangle$
- 2.** a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 2\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -3; 6 \rangle$
 b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 3, 5\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$, $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -1; 3 \rangle \cup \{-3, 5\}$



$f(x) = 3$ dla $x = -3$,
 $f(x) > 3$ dla $x \in (-\infty; -3)$,
 $f(x) = 1$ dla $x \in \{-1, 1\} \cup \langle 3; \infty \rangle$,
 $f(x) \leq 1$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$

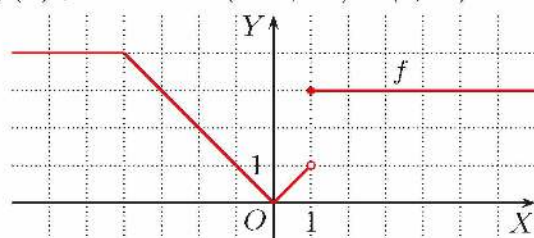


$f(x) = 3$ dla $x \in (1; \infty)$,
 nie przyjmuje wartości większych od 3,
 $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup \{1\}$,
 $f(x) \leq 1$ dla $x \in (-\infty; 1)$

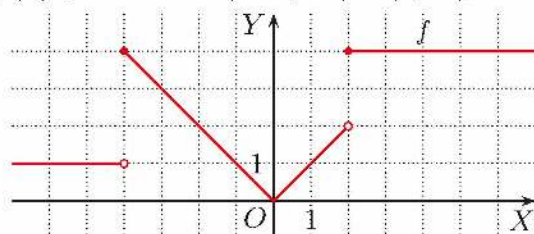
- 4.** $x \in (-\infty; -4) \cup \{0\} \cup \langle 4; \infty \rangle$

- 1.** a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$
 b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 2, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$
 c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle \cup \langle -2; 0 \rangle$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; 0 \rangle \cup \{2, 4\}$

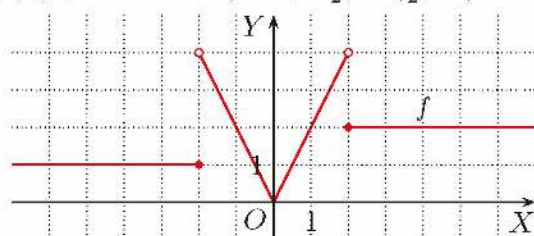
- 2.** a) $f(x) = -1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in (-\infty; 1]$
 b) $f(x) = -1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in \langle -5; \infty \rangle$
 c) $f(x) = -1$ dla $x = -4$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in (-\infty; 4]$
- 3.** a) $f(x) = 1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$



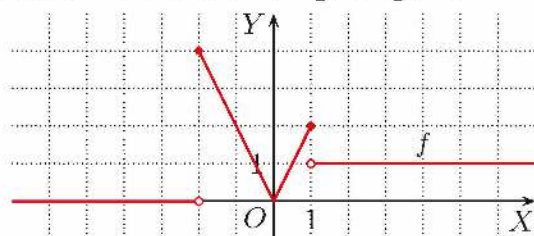
- b) $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup \{-1, 1\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$



- c) $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$



- d) $f(x) = 1$ dla $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \cup \langle 1; \infty \rangle$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in \langle -2; -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$



- 4.** a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 2\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 2)$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -3; 2 \rangle$
 b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 3\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup \{3\}$

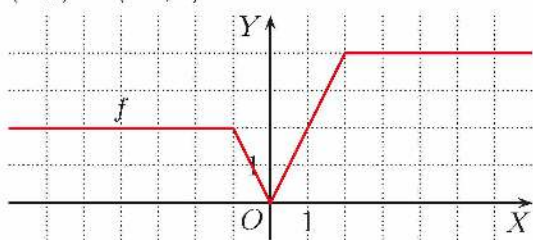
4. c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 2\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup \{-1, 2\}$
5. a) $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2, 4\}$,
 $f(x) < 1$ dla $x \in (-1; 2)$
b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2\} \cup \langle 2; \infty \rangle$,
 $f(x) < 1$ dla $x \in (-1; 1)$

Wykresy jako nośnik informacji finansowych

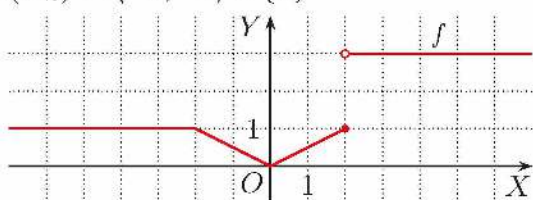
1. a) $X: 40$ zł, $Y: 50$ zł
b) $X: 50$ zł, $Y: 10$ zł

4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

- Ć 1. a) $f(D) = \langle 2; \infty \rangle$ b) $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$
c) $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$ d) $f(D) = \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$
- Z 1. a) $g(D) = (-\infty; 4)$
b) $g(D) = (-\infty; 0)$
c) $g(D) = (-\infty; -1)$
2. a) $f(D_f) = \langle 0; 4 \rangle$, $g(D_g) = \langle 1; 5 \rangle$,
 $h(D_h) = \langle -2; 2 \rangle$



- b) $f(D_g) = \langle 0; 1 \rangle \cup \{3\}$,
 $g(D_g) = \langle 1; 2 \rangle \cup \{4\}$,
 $h(D_h) = \langle -2; -1 \rangle \cup \{1\}$

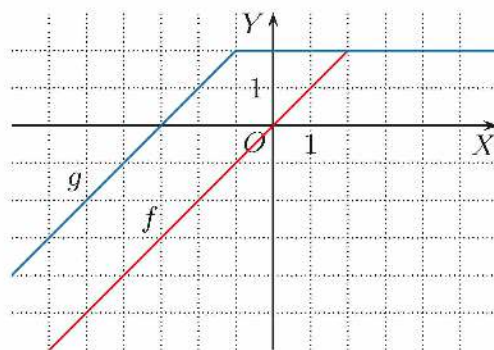


3. a) $a = 1$ b) $a = -4$
4. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 4$
5. a) 0 dla $m \in \{-3, -1\}$, 1 dla $m = 2$
b) 0 dla $m = -3$, 1 dla $m = -1$,
2 dla $m = 2$
c) 1 dla $m = -3$, 2 dla $m \in \{-1, 2\}$
d) 2 dla $m \in \{-3, -1, 2\}$
7. a) $f(D) = \langle 3; \infty \rangle$
b) $f(D) = \langle -1; \infty \rangle$
c) $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$

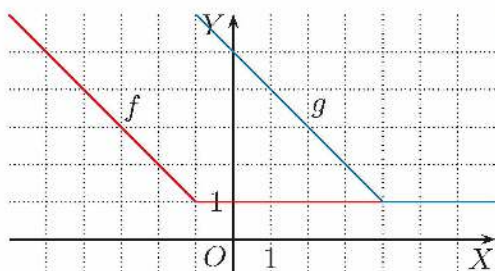
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

- Ć 1. a) 1 b) -2 c) -3 d) 4
2. a) $D = \langle -2; 6 \rangle$ b) $D = \langle -7; 1 \rangle$
c) $D = \langle -8; 0 \rangle$
- Z 1. a) $g(1) = 0$ b) $g(-1) = 0$ c) $g(-2) = 0$
4. a) $\langle -2; 5 \rangle$ b) $\langle -1; 6 \rangle$
c) $\langle -5; 2 \rangle$ d) $\langle -6; 1 \rangle$
5. a) brak miejsc zerowych,
 $f(D) = \langle 3; \infty \rangle$
b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 5\}$,
 $f(D) = \langle -3; \infty \rangle$
c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 1\}$,
 $f(D) = \langle -2; \infty \rangle$
6. a) $g(x) = |x - 3| + 2$
b) $g(x) = |x + 4| - 3$
c) $g(x) = |x + 1| + 2$
7. a) $f(x) = (x - 2)^2 - 2$
b) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$
c) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$
8. a) $D_g = \langle -4; 4 \rangle$, $g(D_g) = \langle -1; 5 \rangle$
b) $D_g = \langle -6; 2 \rangle$, $g(D_g) = \langle -4; 2 \rangle$
c) $D_g = \langle -1; 7 \rangle$, $g(D_g) = \langle 0; 6 \rangle$
d) $D_g = \langle 0; 8 \rangle$, $g(D_g) = \langle -6; 0 \rangle$
9. a) 4 b) 16
10. a) 6 b) 11
11. a) $D_g = \langle 0; 8 \rangle$, $g(x) = 0$ dla $x \in \{1, 3, 7\}$
b) $D_g = \langle -5; 3 \rangle$,
 $g(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 2\}$
12. a) $g(D_g) = \langle 0; \infty \rangle$, $g(x) = 0$ dla $x = -1$,
 $h(D_h) = \langle -1; \infty \rangle$,
 $h(x) = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$
b) $g(D_g) = \langle 0; \infty \rangle$, $g(x) = 0$ dla $x = 4$,
 $h(D_h) = \langle -2; \infty \rangle$,
 $h(x) = 0$ dla $x = 3$, $x = 5$

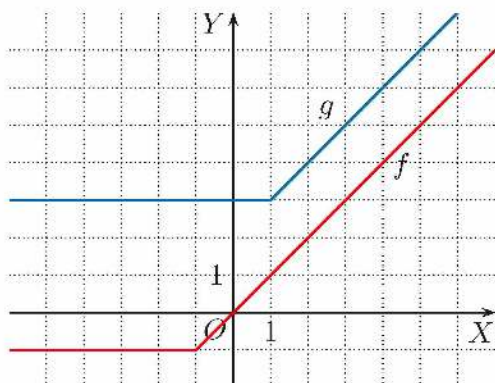
13. a)



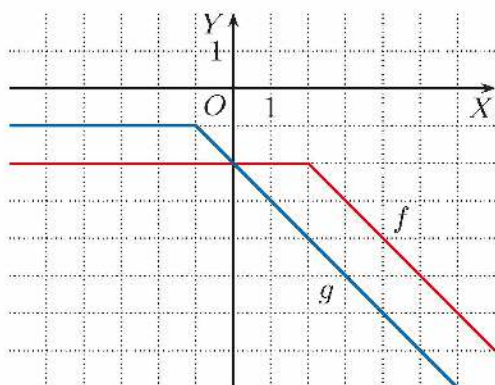
13. b)



c)



d)



4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX

1. $f(D_f) = \langle -1; 3 \rangle$, $g(D_g) = \langle -3; 1 \rangle$

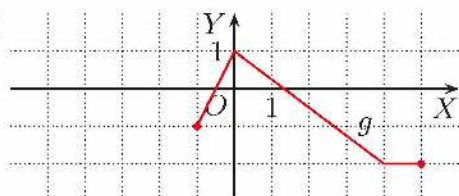
2. a) $f(D_f) = \langle 0; \infty \rangle$, $g(D_g) = \langle -\infty; 0 \rangle$

b) $f(D_f) = \langle 0; \infty \rangle$, $g(D_g) = \langle -\infty; 0 \rangle$

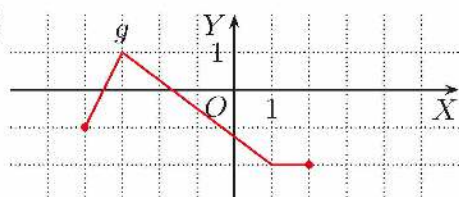
3. a) $f(D_f) = \langle -1; 4 \rangle$, $g(D_g) = \langle -4; 1 \rangle$

b) $f(D_f) = \langle -3; 1 \rangle$, $g(D_g) = \langle -1; 3 \rangle$

5. a)



b)



1. a) $f(D_f) = \langle -1; 3 \rangle$, $g(D_g) = \langle -3; 1 \rangle$

b) $f(D_f) = \langle -2; 4 \rangle$, $g(D_g) = \langle -4; 2 \rangle$

c) $f(D_f) = \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$,

$g(D_g) = \langle -4; -2 \rangle \cup \langle -1; 2 \rangle$

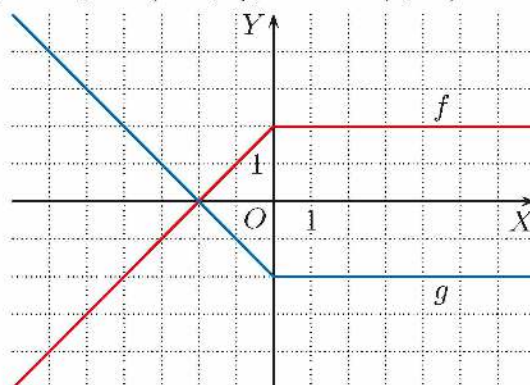
2. a) $(-1, 0)$, $(1, 0)$

b) brak punktów wspólnych

c) $(2, 0)$

3. a) f rośnie w $(-\infty; 0)$, stała w $\langle 0; \infty \rangle$,

g maleje w $(-\infty; 0)$, stała w $\langle 0; \infty \rangle$

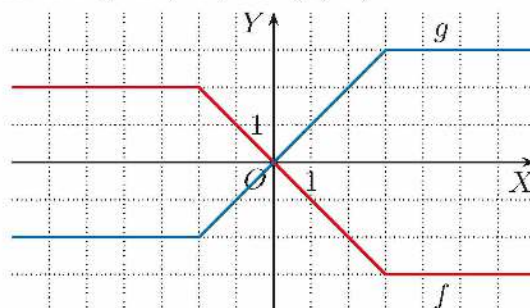


b) f maleje w $\langle -2; 3 \rangle$,

stała w $(-\infty; -2)$ i w $\langle 3; \infty \rangle$,

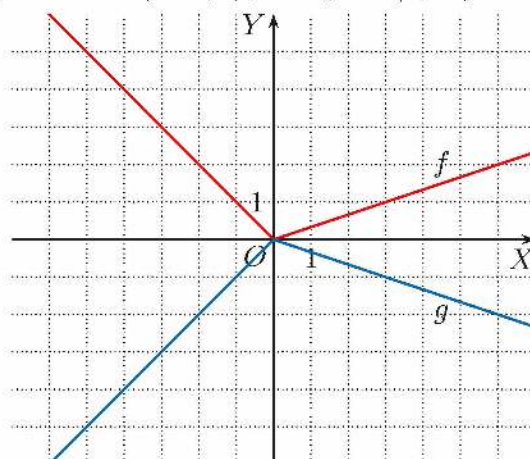
g rośnie w $\langle -2; 3 \rangle$,

stała w $(-\infty; -2)$ i w $\langle 3; \infty \rangle$

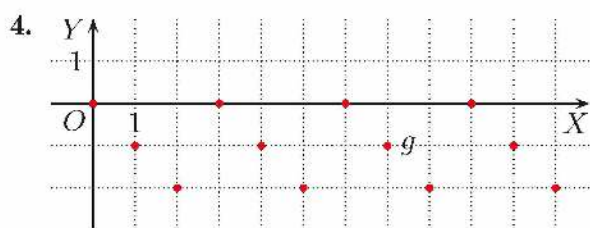
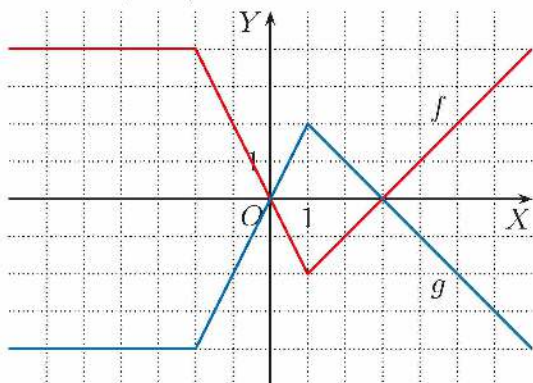


c) f maleje w $(-\infty; 0)$, rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$,

g rośnie w $(-\infty; 0)$, maleje w $\langle 0; \infty \rangle$



3. d) f maleje w $\langle -2; 1 \rangle$, stała w $(-\infty; -2)$,
rośnie w $\langle 1; \infty \rangle$,
 g rośnie w $\langle -2; 1 \rangle$, stała w $(-\infty; -2)$,
maleje w $\langle 1; \infty \rangle$



4. a) $g(D) = \langle -2; 0 \rangle$,
 g stała w $\langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$,
maleje w $\langle -1; 0 \rangle$ i w $\langle 1; 2 \rangle$, rośnie w $\langle 0; 1 \rangle$
b) $g(D) = \langle -2; 1 \rangle$, g stała w $\langle 2; 3 \rangle$,
maleje w $\langle 1; 2 \rangle$, rośnie w $\langle -2; 1 \rangle$
c) $g(D) = \langle -2; 2 \rangle$, g maleje w $\langle -2; -1 \rangle$,
rośnie w $\langle -3; -2 \rangle$ i w $\langle -1; 3 \rangle$

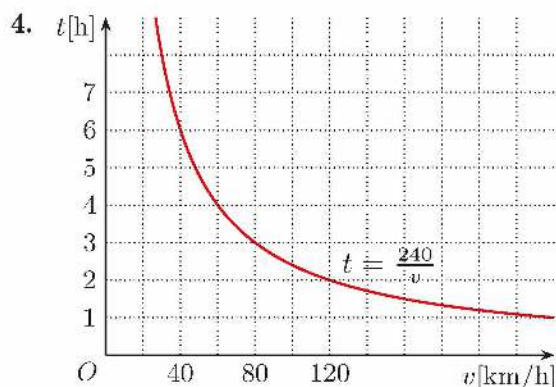
4.10. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY

- C** 1. $D = \langle -6; 2 \rangle$,
miejsca zerowe: $-5, -3, 0, 1$
2. $D = \langle -5; 4 \rangle$, $g(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 1\}$,
 f stała w $\langle -4; -2 \rangle$, maleje w $\langle -2; 1 \rangle$,
rośnie w $\langle 1; 5 \rangle$, g stała w $\langle 2; 4 \rangle$,
rośnie w $\langle -1; 2 \rangle$, maleje w $\langle -5; -1 \rangle$
3. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -x + 2 & \text{dla } x \in \langle 1; \infty \rangle \end{cases}$
Z 1. a) $D_f = \langle -4; 3 \rangle$, $D_g = \langle -3; 4 \rangle$
b) $D_f = \langle -4; 3 \rangle$, $D_g = \langle -3; 4 \rangle$
c) $D_f = \langle -3; 4 \rangle$, $D_g = \langle -4; 3 \rangle$
2. a) $g(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in \langle -3; 3 \rangle \\ -3 & \text{dla } x \in (3; 5) \end{cases}$
b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle -6; 2 \rangle \\ 2 & \text{dla } x \in (2; 4) \end{cases}$

4. a) f rośnie w $(-\infty; 4)$, stała w $\langle 4; \infty \rangle$,
 g stała w $(-\infty; -4)$, maleje w $\langle -4; \infty \rangle$,
 h maleje w $(-\infty; 4)$, stała w $\langle 4; \infty \rangle$
b) f stała w $(-\infty; 2)$ i w $\langle 3; \infty \rangle$,
rośnie w $\langle 2; 3 \rangle$,
 g stała w $(-\infty; -3)$ i w $\langle -2; \infty \rangle$,
maleje w $\langle -3; -2 \rangle$,
 h stała w $(-\infty; 2)$ i w $\langle 3; \infty \rangle$,
maleje w $\langle 2; 3 \rangle$
c) f maleje w $(-\infty; 1)$,
stała w $\langle 1; \infty \rangle$,
 g stała w $(-\infty; -1)$,
rośnie w $\langle -1; \infty \rangle$,
 h rośnie w $(-\infty; 1)$, stała w $\langle 1; \infty \rangle$
d) f stała w $(-\infty; -1)$ i w $\langle 4; \infty \rangle$,
maleje w $\langle -1; 4 \rangle$,
 g stała w $(-\infty; -4)$ i w $\langle 1; \infty \rangle$,
rośnie w $\langle -4; 1 \rangle$,
 h stała w $(-\infty; -1)$ i w $\langle 4; \infty \rangle$,
rośnie w $\langle -1; 4 \rangle$

4.11. Proporcjonalność odwrotna

- C** 1. $f: (1, 1), g: (1, 4), (2, 2), (4, 1)$,
 $h: (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$
2. 6, nie zależy
3. a) kolejno uzupełniamy: 6, 4, 5, 3, 2
Z 1. kolejno uzupełniamy:
a) 8, 4, 2, 1, 6 b) 10, 5, 4, 2
wzór: a) $y = \frac{8}{x}, x > 0$ b) $y = \frac{10}{x}, x > 0$
2. $k = 15$
3. a) 4 h b) 3 h 20 min c) 2,5 h
d) 2 h 24 min



5. a) 2 b) 2 c) 4 d) 6
6. $D = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 12\}$

4.12. Zagadnienia uzupełniające

1. a) 80 km/h b) 60 km/h
2. a) 70 km/h b) 80 km/h
3. 2 h 20 min
4. kolejno uzupełniamy: 2400, 4800, 9600, 19200, 38400, 76800, 153600, 307200
5. $a = \sqrt{2}$, po 12 godzinach
6. a) 8 b) 16 c) 1024 d) $\frac{1}{1024}$
8. a) $x \in \langle -2; 0 \rangle$ b) $x \in \langle -1; 1 \rangle$
9. a) 16 b) 32 c) 1024 d) $\sqrt{2}$
10. $y = \log_2 x$: np. (1, 0), (4, 2), (8, 3), (16, 4);
 $y = \log_4 x$: np. (1, 0), (16, 2), (64, 3), (256, 4)
12. a) $x > 100$ b) $x > 1000$ c) $x > 10^6$
d) $x > 10^{10}$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
 $f(D) = \{-1, 0, 1\}$, miejsca zerowe: -1, 0,
 $f_{\min} = -1$, $f_{\max} = 1$
b) $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $f(D) = \{-3, 0, 3\}$,
miejsca zerowe: 4, 6, $f_{\min} = -3$, $f_{\max} = 3$
2. a) $f(X) = \{0, 1, 3, 4\}$ b) $f(X) = \langle 0; 4 \rangle$
c) $f(X) = \langle 0; \infty \rangle$
3. a) rośnie w $\langle -4; 2 \rangle$, stała w $\langle 2; 4 \rangle$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -2$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -2; 4 \rangle$
b) rośnie w $\langle 1; 4 \rangle$, maleje w $\langle -4; -2 \rangle$,
stała w $\langle -2; 1 \rangle$, $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$
c) rośnie w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle 0; 4 \rangle$,
maleje w $\langle -2; 0 \rangle$,
 $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 2\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$
5. a) $g(D_g) = \langle 2; 6 \rangle$, $h(D_h) = \langle -3; 1 \rangle$
b) $g(D_g) = \langle -1; 7 \rangle$, $h(D_h) = \langle -6; 2 \rangle$
6. $D_g = \langle -2; 2 \rangle$, $D_h = \langle 3; 7 \rangle$
7. a) $g(x) = -x + 2$, $f(D_f) = \langle -4; -1 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle 1; 4 \rangle$ b) $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$,
 $f(D_f) = \langle -1; 2 \rangle$, $g(D_g) = \langle -2; 1 \rangle$
8. a) $D_g = \langle -3; -1 \rangle$, $g(x) = -x - 1$,
 $g_{\min} = 0$, $g_{\max} = 2$

b) $D_g = \langle -2; 4 \rangle$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$,
 $g_{\min} = 0$, $g_{\max} = 3$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $f(3\sqrt{2}) = 1$, $f(\sqrt{2} - 6) = -3$
b) $f(3\sqrt{2}) = 4$, $f(\sqrt{2} - 6) = 1$
2. a) $f(x) = -2$ dla $x \in \{-2, 1\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle -1; 3 \rangle$
b) $f(x) = -2$ dla $x = 1$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -1; 2 \rangle$
c) $f(x) = -2$ dla $x \in \{0, 2\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$
5. a) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 2$, $g(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$,
 $h(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2$, $k(x) = \frac{1}{8}x^2 - 3$
b) P należy do wykresu funkcji h ,
 Q do wykresu funkcji g ,
 R do wykresu funkcji f
7. a) $f(D_f) = \langle -2; \infty \rangle$, $g(D_g) = \langle -\infty; 2 \rangle$,
 $h(D_h) = \langle -2; \infty \rangle$ b) $f(D_f) = \langle -\infty; 3 \rangle$,
 $g(D_g) = \langle -3; \infty \rangle$, $h(D_h) = \langle -\infty; 3 \rangle$
8. a) $D_g = \langle -2; 5 \rangle$ b) $D_g = \langle 0; 7 \rangle$
c) $D_g = \langle -7; 0 \rangle$ d) $D_g = \langle -1; 6 \rangle$
10. a) $f(D_f) = \{1, 2, 3\}$,
 $g(D_g) = \{-3, -2, -1\}$
b) $f(D_f) = \{-4, -3, -2, -1\}$,
 $g(D_g) = \{1, 2, 3, 4\}$
c) $f(D_f) = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$,
 $g(D_g) = \{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\}$

Zadania testowe

1. D 2. C 3. B 4. A 5. D 6. C 7. B 8. A 9. C

Przed obowiązkową maturą z matematyki

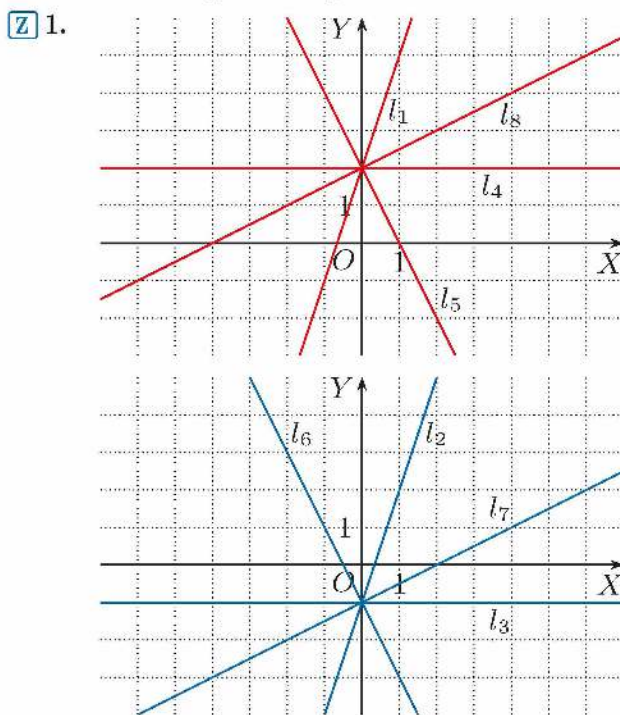
1. $\frac{5}{3}$
2. 2
3. $D_g = \langle -6; 3 \rangle$
4. -2, 1
5. 15
6. 8
7. 1, 5, 9
8. stała w $\langle -\infty; -3 \rangle$, rośnie w $\langle -3; -1 \rangle$
i w $\langle 0; \infty \rangle$, maleje w $\langle -1; 0 \rangle$,
 $g(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup \{0\}$

5.1. Wykres funkcji liniowej (1)

- Ć 2. a) np. $(0, -2), (2, 1)$
 b) np. $(0, 0), (5, -3)$
 c) np. $(0, 2), (-4, -1)$
 d) np. $(0, -1), (-7, 3)$
4. $l_2 \parallel l_4 \parallel l_6, l_3 \parallel l_5 \parallel l_8$
5. a) $y = 2x + 1$
 b) $y = -3x + 1$
 c) $y = -\frac{2}{3}x - 2$
 d) $y = -\frac{3}{5}x + 1$
- Z 1. a) Q b) P, R c) P d) Q
 e) P, Q f) R g), h) żaden
2. a) np. $(-2, -3), (0, -2), (2, -1)$
 b) np. $(-3, 3), (0, 4), (3, 5)$
 c) np. $(-2, 4), (0, 3), (2, 2)$
 d) np. $(-4, -1), (0, -2), (4, -3)$
 e) np. $(-3, -3), (0, -1), (3, 1)$
 f) np. $(-2, -3), (0, 2), (2, 7)$
2. g) np. $(-4, 7), (0, 4), (4, 1)$
 h) np. $(-3, 3), (0, -2), (3, -7)$
3. $l_1 \parallel l_4 \parallel l_6 \parallel l_8, l_2 \parallel l_5 \parallel l_7$
4. a) trapez b) równoległobok
5. a) $y = 4x + 5$ b) $y = -3x + 11$
 c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$
 d) $y = \frac{5}{12}x + 1$
6. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, y = 3x - 11$
7. $y = -\frac{2}{3}x - 3$
8. a) $l_1: y = \sqrt{3}x, l_2: y = \sqrt{3}x - 1$
 b) $l_1: y = (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 1,$
 $l_2: y = (\sqrt{2} - 1)x + 3$
9. a) 1 b) 2 c) -2 d) -5
 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$ g) $-\frac{5}{2}$ h) $\frac{4}{3}$
10. a) $y = 2 - \frac{1}{3}x$ i $y = \frac{6}{3}x$
 b) $y = 4(1 - \frac{x}{2})$ i $y = -2(x + 1)$
 c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ i $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$
11. $l_1: y = \frac{3}{4}x + 4, l_2: y = \frac{3}{4}x + 1,$
 $l_3: y = \frac{3}{4}x - 2$
12. a) $f(x) = -6x + 2$
 b) $f(x) = -6x + 6$
 c) $f(x) = -6x + 1$
 d) $f(x) = -6x + 8$

5.2. Wykres funkcji liniowej (2)

- Ć 2. a) $y = 3x + 6$
 b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$
3. a) $f_1(1) = 4, f_2(1) = 3,$
 $f_3(1) = 2\frac{1}{2}, f_4(1) = 6$
 b) f_1 - niebieski, f_2 - brązowy,
 f_3 - czerwony, f_4 - zielony
4. a) $y = -\frac{3}{4}x + 5$, tak
 b) $y = \frac{5}{3}x - 4$, nie
5. a) $A(0, -\frac{5}{2}), D(0, \frac{7}{2}), P = 17,5$ b) 9



2. a), b) nie należy c) należy
3. a) $y = x + 4$
 b) $y = \frac{1}{2}x + 4$
 c) $y = -3x + 4$
 d) $y = -8x + 4$
4. a) 15 b) 24
5. a) $|PQ| = 3$ b) $|PQ| = 4,5$
6. a) $k_1: (0, 0), k_2: (0, -4), k_3: (0, 3),$
 $k_4: (0, 5)$
 b) $k_1: (0, 0), k_2: (0, -1), k_3: (0, 8),$
 $k_4: (0, \frac{1}{2})$

5.3. Własności funkcji liniowej

- Ć 2. a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) -6 d) $\frac{2}{3}$
3. a) $a = 0$ i $b \neq 0$ b) $a = b = 0$
4. a) 4 b) 6 c) 16 d) 7,5

6. a), c) rosnąca b) malejąca d) stała

7. a) $a < 0$ i $b > 0$ b) $a > 0$ i $b < 0$
c) $a < 0$ i $b < 0$

8. a) wprost proporcjonalne, $a = \frac{1}{4}Ob$
b) odwrotnie proporcjonalne, $a = \frac{2P}{b}$
c) wprost proporcjonalne, $Ob = 2\pi r$
d) odwrotnie proporcjonalne, $d_1 = \frac{2P}{d_2}$

9. a) $y = 3x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = \frac{5}{7}x$

[Z] 1. a) I, II, IV b) I, II, III c) II, III, IV
d) I, III, IV e) I, II, IV f) III, IV

2. a) malejąca b), c) rosnąca

3. a) rosnąca dla $m < 5$,
stała dla $m = 5$,
malejąca dla $m > 5$
b) rosnąca dla $m > -\frac{1}{5}$,
stała dla $m = -\frac{1}{5}$,
malejąca dla $m < -\frac{1}{5}$
c) rosnąca dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
stała dla $m \in \{-1, 1\}$,
malejąca dla $m \in (-1; 1)$

4. a) malejąca b) rosnąca c) malejąca

5. a) $y = \frac{2}{3}x + 4$ b) $y = -\frac{1}{2}x - 2$

6. a) $y = \frac{2}{5}x - 2$, $y = -\frac{3}{5}x + 3$, $y = \frac{3}{2}x + 3$,
 $y = -x - 2$
b) $y = -\frac{3}{2}x - 72$, $y = 2x - 72$,
 $y = -4x + 144$, $y = 3x + 144$

7. a) $y = -x + 3$
b) $y = -x - 4$ lub $y = x - 4$

8. a) $(-2, 0)$, $(0, 6)$, rosnąca
b) $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(0, -3)$, malejąca
c) $(-6, 0)$, $(0, 3)$, rosnąca
d) $(-3, 0)$, $(0, -2)$, malejąca

9. a) 4 b) 6 c) 2 d) $\frac{3}{4}$

5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie

[C] 1. a) $y = 2x - 3$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $y = \frac{2}{3}x - 1$

2. a), b) są c), d) nie są

3. a) $x = -3$, nie jest
b) $y = -3$, jest
c) $x = 8$, nie jest

5. l, n, p, r

[Z] 1. a), b), d) należy c) nie należy

2. a) $y = \frac{1}{3}x - 1$, $x - 3y - 3 = 0$, nie należą
b) $y = -1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$, $4x + 3y + 8 = 0$,
nie należą

c) $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$, $3x - 4y + 10 = 0$,
 A należy, B nie należy

3. a) $(0, 2)$, $(-1, 0)$ b) $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$
c) $(0, 4)$, $(-\frac{4}{3}, 0)$ d) $(0, -3)$, $(\frac{9}{2}, 0)$
e) $(0, -4)$, $(16, 0)$ f) $(0, 3)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

4. a) $AB: y + 1 = 0$, $DC: y - 2 = 0$,
 $AD: 3x - y + 5 = 0$, $BC: 3x - y - 10 = 0$
b) $AB: x + 2y + 2 = 0$, $DC: x + 2y - 4 = 0$,
 $AD: x + 2 = 0$, $BC: x - 2 = 0$
c) $AB: x - 3y - 2 = 0$, $DC: x - 3y + 6 = 0$,
 $AD: x + y + 2 = 0$, $BC: x + y - 6 = 0$

5. a) $2x - y - 5 = 0$
b) $3x + 4y - 24 = 0$
c) $y - 3 = 0$

6. $AD: x = 2$, $BC: x = 7$, $AB: y = 1$,
 $DC: y = 4$, $AC: y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$,
 $BD: y = -\frac{3}{5}x + 5\frac{1}{5}$

5.5. Współczynnik kierunkowy prostej

[C] 1. a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) $-\frac{5}{3}$

2. a), c) jest b) nie jest

6. a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$ b) $y = -3x - 1$
c) $y = \frac{1}{3}x + 2$

[Z] 1. $AB: -\frac{1}{3}$, $BC: 3$, $AC: \frac{1}{2}$

2. $AB: \frac{1}{2}$, $BC: -1$, $CD: -\frac{1}{5}$, $AD: -6$

3. a) $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
b) $y = -2x + 3$
c) $y = -12x + 5$
d) $y = 2x - 3\frac{2}{3}$
e) $y = -6$ f) $y = \sqrt{3}x + 1$

4. a) $AB: y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$, $AD: y = 2x + 6$,
 $BC: y = 2x - 6$, $CD: y = \frac{2}{7}x + \frac{18}{7}$
b) $AB: y = -\frac{2}{7}x - 1\frac{2}{7}$, $AD: y = -\frac{5}{3}x - 2\frac{2}{3}$,
 $BC: y = -\frac{5}{3}x + 7$, $CD: y = -\frac{2}{7}x + 2\frac{6}{7}$

5. a) PQ i $RS: \frac{2}{3}$, $QR: -\frac{10}{3}$, $PS: -\frac{4}{3}$
b) $PQ: -\frac{7}{2}$, $RS: \frac{5}{3}$, QR i $PS: -\frac{2}{5}$

7. a) największy: 2, najmniejszy: -2
b) największy: 1, najmniejszy: $\frac{1}{3}$

5.6. Warunek prostokątności prostych

Ć 2. a), b) są c) nie są

3. a) -5 b) $-\frac{1}{9}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $-3\sqrt{2}$

5. a) $y = \frac{1}{3}x - 1$
b) $y = 10x - 1$
c) $y = -\frac{7}{3}x + 9$

6. a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
c) $y = -\frac{3}{2}x - 3$

7. a) $x = 6$ b) $y = -5$ c) $y = -5$

Z 1. a) $y = \frac{1}{3}x - 3$ b) $y = -\frac{3}{2}x + 7$
c) $y = \frac{3}{4}x + 1$ d) $y = -\frac{2}{7}x$

2. a) $AB: y = -x + 6$, $BC: y = x - 2$,
 $AC: y = 5$, jest

b) $AB: y = -x - 3$, $BC: y = 2x - 3$,
 $AC: y = x + 1$, jest

c) $AB: y = -2$, $BC: y = -\frac{1}{2}x + 2$,
 $AC: y = x + 5$, nie jest

d) $AB: y = x + \frac{3}{2}$, $BC: y = -\frac{1}{2}$,
 $AC: x = 4\frac{1}{2}$, jest

3. a) $AC: y = x - 4$, $BD: y = -x + 2$

b) $AC: y = 3x + 1$, $BD: y = -\frac{1}{3}x + 1$

4. a) nie jest b) jest

6. $Ob = 4\sqrt{34}$, $P = 34$

7. a) $(-6, -8)$ b) $(-1, 7)$

8. $l_1: y = \frac{1}{2}x + 3$, $l_2: y = -2x + 8$, o 300%

9. a) $y = \frac{1}{2}x - 5$ b) $y = -\frac{1}{3}x$
c) $y = \frac{3}{2}x - 11$ d) $y = -\frac{2}{3}x + 2$
e) $y = \frac{1}{3}x - 4$ f) $y = 2x - 14$

10. a) $AB: y = -x - 1$, $BC: y = x - 3$,
 $CD: y = -x + 9$, $AD: y = x + 3$

b) $AB: y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$, $BC: y = 2x + 3$,
 $CD: y = -\frac{1}{2}x + 3$, $AD: y = 2x + 33$

5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

Ć 1. a) $x = -1$, $y = 2$ b) $x = 2$, $y = 5$
c) $x = 1$, $y = -2$

2. a), c) sprzeczny
b) nieoznaczony: $x \in \mathbb{R}$, $y = 2x - 6$

3. a) sprzeczny b) nieoznaczony
c) oznaczony

Z 1. a) $x = 3$, $y = 4$

b) $x = 4$, $y = -6$

c) $x = 2$, $y = 1$

d) $x = 1$, $y = 6$

e) nieoznaczony, $x \in \mathbb{R}$, $y = \frac{2}{3}x - 2$

f) sprzeczny

2. a) $x = 3$, $y = 0$ b) $x = 3$, $y = 4$

c) $x = 2$, $y = 0$ d) $x = 1$, $y = 4$

c) sprzeczny

f) nieoznaczony, $x \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

3. a) np. $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$

b) np. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

c) np. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 6x - 4y = -4 \end{cases}$

4. a) $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$

b) $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$

c) $a_1 \neq a_2$ i b_1, b_2 dowolne

5. a) $A(-1, -3)$, $B(3, -3)$, $C(8, 2)$, $D(4, 2)$

b) $A(-2, -3)$, $B(4, 0)$, $C(2, 4)$, $D(-4, 1)$

c) $A(-2, -4)$, $B(\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5})$, $C(4\frac{2}{5}, 9\frac{1}{5})$,
 $D(2, 8)$

6. $A(-3, -3)$, $B(6, 0)$, $C(5, 3)$, $D(-1, 1)$

7. a) 12 b) 27

9. a), d) nie b), c) tak

10. a) l_1 i l_3 b) l_1 i l_2

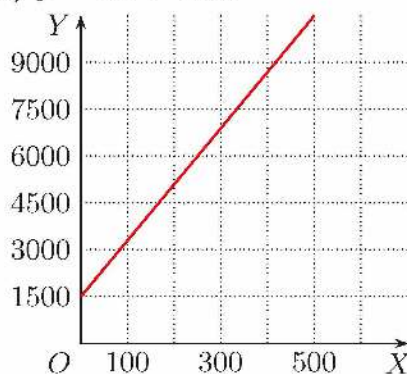
12. a) $x = -1$, $y = -3$ b) $x = 1$, $y = 0$

c) $x = -1$, $y = 2$

5.8. Funkcja liniowa – zastosowania

Ć 1. a) 36 000 zł

b) $y = 18x + 1500$



2. a) 400 b) 600 c) 1100

3. 60

1. b) 62500 km

2. b) korzystniej z wypożyczalni Waga-
bunda dla liczby godzin większej od 4
c) dla liczby godzin większej od 4

3. b) po 4 godzinach

c) o 2,5 km/h

4. a) o 11.00 b) 20 km c) o 12.00

5. 3 h 45 min

6. t – czas [h]

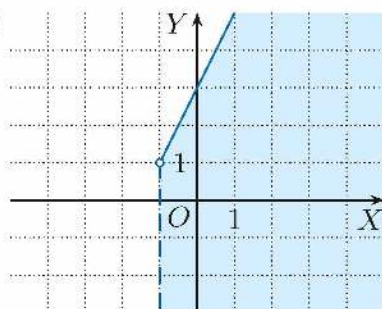
a) $d_1(t) = 16t, t \in \langle 0; 2,5 \rangle$;

$d_2(t) = 40 - 16t, t \in \langle 0; 2,5 \rangle$

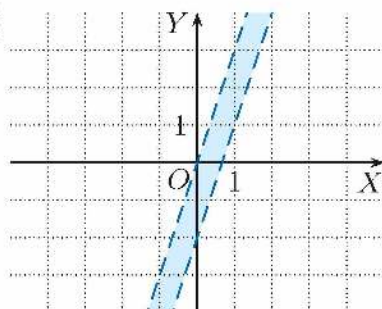
b) $d(t) = |32t - 40|, D_d = \langle 0; \frac{5}{2} \rangle$;
po 1 h i po 1,5 h

5.9. Zagadnienia uzupełniające

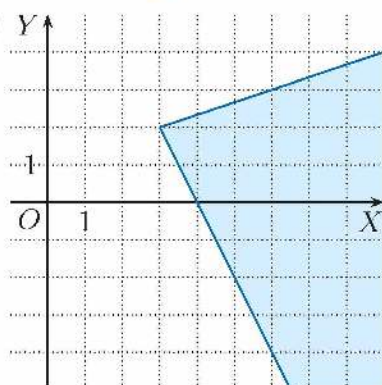
2. a)



b)



2. c)



3. a) P, R b) żaden c) R

$$4. a) \begin{cases} y \leq -x + 4 \\ y \geq -4x + 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} y < -x + 2 \\ y \geq -x - 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y < \frac{1}{2}x + 1 \\ x < 2 \end{cases}$$

$$5. a) \begin{cases} y < \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y > -x + 3 \\ x < 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} y > -x + 1 \\ y > x + 1 \\ y < -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

6. $P = 21$

$$\begin{cases} y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq -\frac{1}{3}x - 1 \\ y \geq x - 5 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

7. a) wartość najmniejsza: -5 ,

wartość największa: 22

b) wartość najmniejsza: -3 ,

wartość największa: 6

c) wartość najmniejsza: -3 ,

wartość największa: 7

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) wszystkie b) P, R

2. a) ujemne dla $x < -6$,
większe od 2 dla $x > -3$

b) ujemne dla $x > \frac{5}{3}$,
większe od 2 dla $x < 1$

c) ujemne dla $x > -\frac{6}{5}$,
większe od 2 dla $x < -2$

3. a) $(9, 0), (0, 3), P = 13,5$

b) $(14, 0), (0, -8), P = 56$

c) $(-\frac{5}{2}, 0), (0, -\frac{15}{2}), P = 9,375$

4. a) rosnąca dla $m \in (-\frac{1}{2}; \infty)$,
malejąca dla $m \in (-\infty; -\frac{1}{2})$,
stała dla $m = -\frac{1}{2}$

b) rosnąca dla $m \in (-\infty; 9)$, malejąca dla
 $m \in (9; \infty)$, stała dla $m = 9$

5. a) nie należą b), c), d) należą

6. a) 15 b) 12 c) 16

7. a) $y = \frac{3}{4}x + 9$, rosnąca

b) $y = -\frac{1}{3}x + 7$, malejąca

c) $y = -6x + 2\frac{5}{6}$, malejąca

d) $y = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$, rosnąca

8. a) $y = -2x - 7$ b) $y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$
 c) $x = -3$ d) $y = -1$
 e) $y = -\frac{5}{3}x - 6$ f) $x = -3$
9. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
 b) $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$
 c) $f(x) = -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$
 d) $f(x) = \sqrt{2}x$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $x \in (-\infty; -3)$ b) $x \in \langle -4; \infty \rangle$
 c) $x \in \langle 2\sqrt{2}; \infty \rangle$
2. a) $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{4}{3}x$, $y = -\frac{1}{7}x + 7\frac{1}{7}$, jest
 b) $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$, $y = \frac{4}{3}x + 8$, $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$,
 jest
3. AB : $y = \frac{1}{2}x - 2$, BC : $y = -2x + 8$,
 CD : $y = \frac{1}{2}x + 3$, AD : $y = -2x - 7$
4. a) $x = -3$, $y = 2$ b) $x = 3$, $y = 6$
 c) sprzeczny d) $x = -5$, $y = -1$
 e) $x = 8$, $y = 5$ f) $x = -8$, $y = -7$
5. a) $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$, $P = 2$
 b) $(-4, -2)$, $(4, 4)$, $(-1, 4)$, $P = 15$
 c) $(-2, -3)$, $(-2, \frac{17}{2})$, $(\frac{36}{5}, \frac{8}{5})$, $P = 52,9$
6. $(-1, -3)$, $(4, -\frac{1}{2})$, $(5, 5)$, $(0, \frac{5}{2})$,
 $y = \frac{11}{2}x + \frac{5}{2}$, $y = \frac{11}{2}x - \frac{45}{2}$
7. a) wierzchołki: $(-4, -6)$, $(4, 0)$, $(1, 4)$,
 spodek wysokości: $(0, 2)$
 b) wierzchołki: $(-4, 1)$, $(4, 5)$, $(-1, -5)$,
 spodek wysokości: $(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})$
8. $(2, 0)$, $(6, 2)$, $(3, 4)$

Zadania testowe

1. D 2. A 3. A 4. A 5. B 6. C 7. D 8. A
 9. C

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. -4
 3. $y = -2x - 8$
 4. -7
 5. 12
 7. AD : $y = -2x - 5$, CD : $y = \frac{1}{4}x + 4$
 8. 39
 9. 38,5
 10. $(2, 0)$

6.1. Miary kątów w trójkącie

- Ć 1. b) 18° , 72° , 90°
 2. a) 15° , 60° , 105° a) $17,5^\circ$, 55° , $107,5^\circ$
 3. 16° , 128° , 36° ; 52° , 54° , 74° ;
 54° , 56° , 70° ; 124° , 20° , 36° ;
 20° , 86° , 74° ; 94° , 16° , 70°
- Z 1. a) $\alpha = 22^\circ$, $\beta = 48^\circ$
 b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$
 2. 41° , 66° , 70°
 3. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 50^\circ$
 b) $\alpha = 52^\circ$, $\beta = 52^\circ$, $\gamma = 76^\circ$
 4. 36° , 144°
 6. 60° , 140° , 160°
 9. a) 540° b) 720° c) $(n - 2) \cdot 180^\circ$
 10. 10
 11. $\sphericalangle AEF = 65^\circ$, $\sphericalangle AFB = 65^\circ$,
 $\sphericalangle BCF = 26^\circ$, $\sphericalangle EFD = 82^\circ$,
 $\sphericalangle DFC = 36^\circ$, $\sphericalangle CDF = 74^\circ$
 12. 36° , 36° , 108° ; 36° , 72° , 72°

6.2. Trójkąty przystające

- Ć 1. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$,
 $|BC| = |EF|$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$,
 $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DFE$
2. a), b) nie
 3. a) KBK b) BKB c) KBK
 6. a), d) tak b), c) nie
 7. sześć
- Z 10. a) 6 b) 8 c) 12
 13. dwa

6.3. Twierdzenie Talesa

- Ć 1. a) $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}$, $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|DE|}$ b) 2,4
 2. b) $|DE| = 3$, $|AD| = 6$
 3. $|ED| = 10,5$
 5. a) np. $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$, $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$,
 $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|}$
- Z 1. a) $x = 6$, $y = 2,4$ b) $x = 10$, $y = 12$
 2. $5\frac{1}{3}$ cm, 4 cm, $2\frac{2}{3}$ cm
 5. a) k i m b) l i m
 6. $x = 12$, $y = 18$

6.4. Wielokąty podobne

- Ć** 1. a), c) jest b) nie jest
2. a) są b) nie są
3. a) F_1 do F_2 : $\frac{3}{2}$, F_2 do F_1 : $\frac{2}{3}$
b) F_1 do F_2 : $\frac{3}{5}$, F_2 do F_1 : $\frac{5}{3}$
4. a) $k = 1,2$, $|CD| = 4,5$, $|A'D'| = 7,8$,
 $|B'C'| = 7,2$
b) $k = 2,5$, $|CD| = 5$, $|A'B'| = 5$,
 $|A'D'| = 2,4$
5. a) 54 cm
b) wysokości równoległoboku $ABCD$:
 $3\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm,
wysokości równoległoboku $A'B'C'D'$:
 $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm, $9\sqrt{3}$ cm
- Z** 1. a) 5:8 b) 1:2
2. 2:3
3. a) 120 cm b) 20 cm
5. a) 40, 100 b) 3:2
6. 3, 6, 7,5, 7,5
7. $h = 7,2$ cm, $h' = 7,5$ cm,
suma obwodów: 73,5 cm
8. $4\sqrt{2}$
9. 1,25
12. a) tak, $k = 2,4$ b) tak, $k = \frac{1}{7}$
13. a) 10 cm, 15 cm b) 4 cm, 6 cm

6.5. Trójkąty podobne

- Ć** 1. $x = 8$, $y = 3$, $k = 2$
2. a) są b) nie są
5. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- Z** 1. T_1 i T_3 , $k_1 = \frac{2}{3}$;
 T_2 i T_4 , $k_2 = \frac{1}{2}$
2. a) $k = 0,75$, $Ob = 34\frac{2}{3}$
b) 10, 20, 25
3. a) $x = 2$, $y = 2,5$
b) $x = 15$, $y = 13$
4. a) 52,5 b) 18,75
5. a) 20, $2\frac{1}{2}$ b) 224, 28
6. a) $\frac{3}{2}$
b) $\triangle DEC$: $6\sqrt{5} + 10$,
 $\triangle ABC$: $9\sqrt{5} + 15$

7. a) $\triangle ABC \sim \triangle CBD$,
 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$,
 $\triangle CBD \sim \triangle ACD$
b) 1,8, 3,2

8. 20 cm^2

11. b) 2 cm, $P_{\triangle ABO} = 16 \text{ cm}^2$,
 $P_{\triangle CDO} = 4 \text{ cm}^2$
12. b) 25 cm^2 , 15 cm^2 , 15 cm^2 , 9 cm^2
13. a) 12 i 4,5, $k = 2$ b) 8, 6, 6, $k = \frac{4}{3}$
15. $k = \frac{2}{3}$, $Ob = 6 + 2\sqrt{5}$, $P = 4$

6.6. Pola wielokątów podobnych

- Ć** 1. a) $k = \frac{1}{3}$, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{9}$ b) $k = 2$, $\frac{P_2}{P_1} = 4$
3. a) 0,9 b) 1,5
4. $k = \frac{1}{2}$, $Ob_1 = (16 + 2\sqrt{5})$ cm,
 $Ob_2 = (8 + \sqrt{5})$ cm
5. a) 1:800 b) tak c) 576 m^2
6. a) $k = \frac{1}{2}$, $Ob = 30$ cm
b) $k = \frac{1}{3}$, $Ob = 32$ cm
c) $k = \frac{2}{3}$, $Ob = 28$ cm
- Z** 1. a) $k = 0,75$, $P = 81 \text{ cm}^2$
b) $k = \frac{5}{3}$, $P = 400 \text{ cm}^2$
2. 200 cm^2
3. a) $(14 + 2\sqrt{29})$ cm
b) $12\sqrt{17}$ cm, $36\sqrt{17}$ cm
4. 100 cm
5. a) 20 dm^2 , 320 dm^2
b) $(12 + 6\sqrt{2})$ cm, $(36 + 18\sqrt{2})$ cm
6. 1200 cm^2
7. 2
8. $30 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$
9. $(15 + 9\sqrt{5})$ cm
10. 6, 4
11. $22,5 \text{ cm}^2$, 10 cm^2
12. 625 m^2 , 400 m^2
13. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$
14. a) 16:25 b) $\frac{9}{16}$
15. 40 cm

Fraktale

1. $\frac{27}{64}$

6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

- Ć** 1. a) $3\frac{14}{17}, 9\frac{3}{17}$
 b) $\sqrt{3} - 1, 3 - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 4 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 3$
 c) 12 d) $\sqrt{2} - 1$

- Z** 1. a) 1,25, 3,75
 b) 4,5, 7,5
 2. $BCP: \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}},$
 $BAP: 2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$
 5. a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ b) 6, 9

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
 b) $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$
 c) $15^\circ, 67^\circ 30', 97^\circ 30'$
 2. $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$
 3. a), b), d) tak
 c) nie
 4. a) 12,5 cm, 12,5 cm, 10 cm
 b) $5\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm
 5. $|PQ| = 4$ dm, $P = 2$ dm²
 6. 36
 7. 3,2 cm, 4,8 cm; $1\frac{5}{7}$ cm, $2\frac{2}{7}$ cm;
 2 cm, 4 cm
 9. $160 - 40\sqrt{2} \approx 103$ [m],
 $80\sqrt{2} \approx 113$ [m]

Zestaw powtórzeniowy II

2. a) 37,5 b) 14,4
 3. a) 100 cm, 160 cm
 b) 10 dm², 40 dm², 360 dm²

Zadania testowe

1. A 2. C 3. A 4. D 5. D 6. A

Przed obowiązkową maturą z matematyki

2. $12\sqrt{34}$
 3. 150°
 4. 2
 5. 96 cm
 8. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm
 9. $6 + \frac{3}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{13})$

7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

- Ć** 2. a), b) nie należy c), d) należy
 3. a) 6 b) 2 c) 0,5 d) 0,75
 4. a) rośnie w $(-\infty; 0)$, maleje w $(0; \infty)$
 b) oś symetrii: $x = 0$, wierzchołek: $(0, 0)$
 5. $f_1(x) = -4x^2, f_2(x) = -2x^2,$
 $f_3(x) = -x^2, f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2,$
 $f_5(x) = -\frac{1}{8}x^2$
Z 1. a) $f(D) = (-8; 0)$
 b) $f(D) = (0; 4)$
 c) $f(D) = (0; 12)$
 d) $f(D) = (-8; -2)$
 2. $\Lambda: y = x^2, B: y = \frac{1}{2}x^2, C: y = \frac{1}{4}x^2,$
 $D: y = \frac{1}{8}x^2, E: y = \frac{1}{16}x^2$
 3. a) $y = x^2$ b) $y = \sqrt{2}x^2$
 c) $y = -\frac{1}{3}x^2$ d) $y = -3x^2$
 4. a) $\frac{2}{3}$ b) 10
 5. a) $a = 4$ b) $a = \frac{1}{4}$
 c) $a = 64$ d) $a = 2$
 6. $a = \frac{3}{16}$
 7. a) $a = 1$ b) $a = 2$
 c) $a = -4$ d) $a = \frac{1}{2}$

7.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY

- Ć** 1. a) $\langle -3; \infty \rangle$ b) $\langle 1; \infty \rangle$
 c) $\langle -\infty; -4 \rangle$ d) $\langle -\infty; 2 \rangle$
 2. a) maleje w $(-\infty; -3)$, rośnie w $\langle -3; \infty \rangle$
 b) maleje w $(-\infty; 1)$,
 rośnie w $\langle 1; \infty \rangle$
 c) rośnie w $(-\infty; -2)$,
 maleje w $\langle -2; \infty \rangle$
 d) rośnie w $(-\infty; 2)$, maleje w $\langle 2; \infty \rangle$
 3. a) $W(3, -2)$ b) $W(-2, 1)$
 4. a) $W(4, 2)$, 4 jednostki w prawo
 i 2 jednostki w górę
 b) $W(6, -1)$, 6 jednostek w prawo
 i 1 jednostkę w dół
 c) $W(-6, -3)$, 6 jednostek w lewo
 i 3 jednostki w dół
 d) $W(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, pół jednostki w lewo
 i pół jednostki w górę

5. a) maleje w $(-\infty; 3)$, rośnie w $\langle 3; \infty)$,
 $f(D) = \langle -4; \infty)$, $W(3, -4)$
 b) maleje w $(-\infty; -2)$, rośnie w $\langle -2; \infty)$,
 $f(D) = \langle 2; \infty)$, $W(-2, 2)$
 c) rośnie w $(-\infty; -4)$, maleje w $\langle -4; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; -1)$, $W(-4, -1)$
 d) rośnie w $(-\infty; 1)$, maleje w $\langle 1; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; 3)$, $W(1, 3)$

- [Z]** 1. a) $g(x) = (x - 3)^2$, rośnie w $\langle 3; \infty)$,
 maleje w $(-\infty; 3)$
 b) $g(x) = (x + 2)^2$, rośnie w $\langle -2; \infty)$,
 maleje w $(-\infty; -2)$

2. a) $g(x) = -(x + 2)^2 + 3$
 b) $g(x) = -(x - 1)^2 - 2$

3. a) $W(0, 2)$, $x = 0$
 b) $W(0, -4)$, $x = 0$
 c) $W(2, 0)$, $x = 2$
 d) $W(-1, 0)$, $x = -1$
 e) $W(1, -4)$, $x = 1$
 f) $W(-3, 1)$, $x = -3$

4. a) $(-\infty; 4)$ b) $(-\infty; -1)$
 c) $(-\infty; 1)$ d) $(-\infty; 1)$
 e) $\langle 1; \infty)$ f) $\langle -8; \infty)$
 g) $\langle -2; \infty)$ h) $(-\infty; 4)$
 i) $\langle -4; \infty)$

5. a) $f(D) = \langle -6; \infty)$, maleje w $(-\infty; 0)$,
 rośnie w $\langle 0; \infty)$, $W(0, -6)$
 b) $f(D) = \langle 0; \infty)$, maleje w $(-\infty; 4)$,
 rośnie w $\langle 4; \infty)$, $W(4, 0)$
 c) $f(D) = \langle 5; \infty)$, maleje w $(-\infty; -2)$,
 rośnie w $\langle -2; \infty)$, $W(-2, 5)$
 d) $f(D) = (-\infty; 9)$, rośnie w $(-\infty; 0)$,
 maleje w $\langle 0; \infty)$, $W(0, 9)$
 e) $f(D) = (-\infty; 0)$, rośnie w $(-\infty; -8)$,
 maleje w $\langle -8; \infty)$, $W(-8, 0)$
 f) $f(D) = (-\infty; -2)$, rośnie w $(-\infty; 3)$,
 maleje w $\langle 3; \infty)$, $W(3, -2)$
 g) $f(D) = \langle 1; \infty)$, maleje w $(-\infty; 2)$,
 rośnie w $\langle 2; \infty)$, $W(2, 1)$
 h) $f(D) = (-\infty; 4)$, rośnie w $(-\infty; 1)$,
 maleje w $\langle 1; \infty)$, $W(1, 4)$
 i) $f(D) = \langle -\sqrt{2}; \infty)$, maleje w $(-\infty; -3)$,
 rośnie w $\langle -3; \infty)$, $W(-3, -\sqrt{2})$

6. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2$
 c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$
 d) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$
 7. a) $f(D) = \langle 2; \infty)$ b) $f(D) = \langle -4; \infty)$
 c) $f(D) = \langle -2; \infty)$ d) $f(D) = \langle 3; \infty)$
 e) $f(D) = (-\infty; 2)$
 f) $f(D) = (-\infty; -1)$

7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)

- [C]** 1. a) $y = -2x^2 + 12x - 12$
 b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$
 c) $y = 3x^2 - 30x + 84$

2. a) $y = (x - 4)^2 - 10$, $W(4, -10)$
 b) $y = (x + 2)^2 + 4$, $W(-2, 4)$
 c) $y = (x - 3)^2 - 11$, $W(3, -11)$
 d) $y = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$, $W(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$
 e) $y = (x + \frac{1}{2})^2$, $W(-\frac{1}{2}, 0)$
 f) $y = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$, $W(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$

3. a) 5 b) 8 c) 0 d) -12 e) 8 f) 2

4. a) $W(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $y = 4(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{3}{4}$
 b) $W(1, 3)$, $y = -2(x - 1)^2 + 3$
 c) $W(1, \frac{1}{2})$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$

- [Z]** 1. a) $y = x^2 - x + 4\frac{1}{4}$
 b) $y = -x^2 + 8x - 19$
 c) $y = 2x^2 - 12x + 19$
 d) $y = -3x^2 - 12x - 16$
 e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$
 f) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$

2. $W_f(-1, 1)$, $W_g(3, -2)$, $W_h(4, 2)$,
 $f(x) = 2(x + 1)^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 3$,
 $g(x) = 2(x - 3)^2 - 2 = 2x^2 - 12x + 16$,
 $h(x) = 2(x - 4)^2 + 2 = 2x^2 - 16x + 34$

3. a) $g(x) = 3(x - 3)^2 - 2 = 3x^2 - 18x + 25$
 b) $g(x) = -4(x + 5)^2 + 100 = -4x^2 - 40x$

4. a) 81 b) -7 c) 1 d) 0 e) 42 f) -11

5. a) $\Delta = 28$, $W(-2, -7)$
 b) $\Delta = 32$, $W(3, 8)$
 c) $\Delta = 56$, $W(-1, -7)$
 d) $\Delta = 12$, $W(1, 1)$
 e) $\Delta = -2$, $W(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$
 f) $\Delta = 4$, $W(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

6. a) $W(-1, 2)$, $f(x) = (x+1)^2 + 2$
 b) $W(4, 0)$, $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$
 c) $W(1, 5)$, $f(x) = -4(x-1)^2 + 5$
 d) $W(-2, -15)$, $f(x) = 2(x+2)^2 - 15$
 e) $W(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$
 f) $W(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$,
 $f(x) = -2(x - 1\frac{1}{2})^2 + 4\frac{1}{2}$
7. a) $c = 1$, $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$
 b) $c = -2$, $f(x) = 2(x-1)^2 - 4$
 c) $c = 6$, $f(x) = 2(x-1)^2 + 4$
 d) $c = 2$, $f(x) = 2(x-1)^2$
 e) $c = -20$, $f(x) = 2(x-1)^2 - 22$
8. a) $f_1(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{3}{2}$,
 $f_2(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$,
 $f_3(x) = -\frac{1}{4}(x-6)^2 + 3$,
 $f_4(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 3$
 b) f_1 - czerwony, f_2 - niebieski,
 f_3 - zielony, f_4 - czarny
9. a) 25 b) 1 c) 20
10. a) $W(1, -3)$ b) $W(\frac{3}{4}, \frac{17}{4})$
 c) $W(-3, -19)$ d) $W(-\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$
 e) $W(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ f) $W(-\frac{3}{4}, \frac{9}{8})$
11. a) $y = (x-2)^2 - 6$
 b) $y = 2(x-2)^2 - 7$
 c) $y = -3(x - \frac{5}{6})^2 + \frac{19}{12}$
 d) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$
 e) $y = 8(x - \frac{1}{16})^2 - \frac{1}{32}$
 f) $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$

7.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)

- Ć 1. a) $W(-2, -3)$, $y = (x+2)^2 - 3$
 b) $W(1, -2)$, $y = -(x-1)^2 - 2$
 c) $W(-1, 0)$, $y = 2(x+1)^2$
 d) $W(-2, 3)$, $y = -2(x+2)^2 + 3$
 e) $W(-1, -1)$, $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$
 f) $W(-2, 5)$, $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 5$
2. a) $W(1, 1)$ b) $W(-1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$ c) $W(2, 9)$
3. a) $b = -4$ b) $b = 8$
 c) $b = 4$ d) $b = -6$
4. a) $f(x) = -(x-2)^2 + 2 = -x^2 + 4x - 2$
 b) $f(x) = -2(x-4)^2 = -2x^2 + 16x - 32$
 c) $f(x) = 2(x+1)^2 - 6 = 2x^2 + 4x - 4$

5. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 2$
 b) $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$
 c) $a = -\frac{2}{9}$, $b = 0$, $c = 3$
 d) $a = -3$, $b = -6$, $c = 0$
 e) $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$
 f) $a = -2$, $b = 8$, $c = -4$

- Z 1. a) $f(x) = (x-3)^2 - 7$, rośnie w $\langle 3; \infty \rangle$,
 maleje w $(-\infty; 3)$, $f(D) = \langle -7; \infty \rangle$
 b) $f(x) = (x+1)^2 - 4$,
 maleje w $(-\infty; -1]$, rośnie w $\langle -1; \infty \rangle$,
 $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
 c) $f(x) = 2(x+2)^2 - 4$, rośnie w $\langle -2; \infty \rangle$,
 maleje w $(-\infty; -2]$, $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
 d) $f(x) = -2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$,
 rośnie w $(-\infty; \frac{1}{2})$, maleje w $\langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$,
 $f(D) = (-\infty; \frac{1}{2}]$
 e) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1$, rośnie w $\langle 4; \infty \rangle$,
 maleje w $(-\infty; 4]$, $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$
 f) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2$, rośnie w $(-\infty; -2]$,
 maleje w $\langle -2; \infty \rangle$, $f(D) = (-\infty; 0]$
2. a) $y = (x+3)^2 - 17$
 b) $y = -(x-3)^2 + 1$
 c) $y = \frac{1}{2}(x+6)^2 - 26$
 d) $y = -\frac{1}{4}(x-12)^2 + 28$
 e) $y = -2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{2}$
 f) $y = 2(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{2}$
3. a) $b = -4$, $c = 8$ b) $b = 2$, $c = -2$
 c) $b = -1$, $c = -\frac{3}{4}$
 d) $b = 0$, $c = 3$
 e) $b = -20$, $c = 100$
 f) $b = 8$, $c = 20$
4. a) $b = -2$, $c = 1$, $f(x) = (x-1)^2$
 b) $b = 8$, $c = 2$, $f(x) = (x+4)^2 - 14$
 c) $b = -6$, $c = -6$, $f(x) = (x-3)^2 - 15$
 d) $b = 1$, $c = -4$, $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{4}$
5. a) $f(x) = 3x^2 - 2$
 b) $f(x) = -3(x-1)^2 + 1$
7. a) $f(x) = (x+1)^2$
 b) $f(x) = (x+1)^2 + 3$
 c) $f(x) = (x+1)^2 - 1$
 d) $f(x) = -(x-2)^2 + 4$
 e) $f(x) = (x-3)^2 - 1$
 f) $f(x) = -(x-4)^2 + 8$

8. a) $f(x) = (x-1)^2 + 4$
 b) $f(x) = 3(x+2)^2 + 3$
 c) $f(x) = -4(x+3)^2 - 4$

7.5. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $y = \frac{1}{2}x^2$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2$
 c) $y = \frac{3}{2}x^2$
 2. a) $y = \frac{1}{4}, F(0, -\frac{1}{4})$
 b) $y = -\frac{1}{8}, F(0, \frac{1}{8})$
 c) $y = \frac{1}{8}, F(0, -\frac{1}{8})$
 d) $y = -2, F(0, 2)$
 3. a) $y = 0, F(0, 2)$
 b) $y = -3, F(0, -1)$

Zestaw powtórzeniowy

1. h
 3. a) $f(D) = \langle -7; \infty \rangle$, rośnie w $\langle 0; \infty \rangle$,
 maleje w $(-\infty; 0)$
 b) $f(D) = \langle -5; \infty \rangle$, rośnie w $\langle -1; \infty \rangle$,
 maleje w $(-\infty; -1)$
 c) $f(D) = (-\infty; 19)$, rośnie w $(-\infty; -3)$,
 maleje w $\langle -3; \infty \rangle$

4. a) $f(x) = (x-2)^2 - 4, W(2, -4)$
 b) $f(x) = -(x-1)^2 - 2, W(1, -2)$
 c) $f(x) = (x+5)^2 + 1, W(-5, 1)$
 d) $f(x) = -(x-4)^2 - 1, W(4, -1)$
 5. a) $b = 0, c = 1, f(x) = x^2 + 1$
 b) $b = -2, c = 4, f(x) = (x-1)^2 + 3$
 c) $b = 4, c = 6, f(x) = (x+2)^2 + 2$
 d) $b = -8, c = 15, f(x) = (x-4)^2 - 1$
 6. a) $f(x) = x^2 + 1$
 b) $f(x) = 2x^2$
 c) $f(x) = -x^2 + 3$
 d) $f(x) = -4x^2 + 6$
 7. a) $a = \frac{1}{2}, f$ maleje w $(-\infty; 2)$,
 rośnie w $\langle 2; \infty \rangle, f(D) = \langle -1; \infty \rangle$
 b) $a = -\frac{1}{2}, f$ rośnie w $(-\infty; 4)$,
 maleje w $\langle 4; \infty \rangle, f(D) = (-\infty; 3)$
 c) $a = 2, f$ maleje w $(-\infty; -1)$,
 rośnie w $\langle -1; \infty \rangle, f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
 d) $a = -2, f$ rośnie w $(-\infty; -2)$,
 maleje w $\langle -2; \infty \rangle, f(D) = (-\infty; 5)$
 8. $P(x) = \frac{1}{4}x^2, D = (0; 6)$
 9. $P(x) = \frac{1}{2}x^2, D = (0; 4)$

Indeks

argumenty funkcji 135

barycentrum trójkąta 227

błąd przybliżenia 23

cechy

podobieństwa trójkątów 241, 242

podzielności liczb 14

przystawania trójkątów 228, 229

przystawania wielokątów 232

długość okresu 21

dopełnienie zbioru 61

dowód twierdzenia Talesa 236

dwusieczna kąta 225, 227, 251

konstrukcja 253

dziedzina funkcji 135

dzielnik 10, 15

element zbioru 56

Euklides 11

figury przystające 228

fraktale 250

funkcja 134, 135

kwadratowa 261

liczbowa 140

liniowa 186

logarytmiczna 178

malejąca 149, 194

monotoniczna 151

niemalejąca 150

nierosnąca 150

przedziałami monotoniczna 151

rosnąca 149, 194

stała 150, 194

wykładnicza 176

googol 39

hiperbola 148

iloczyn zbiorów 59

kartezjański układ współrzędnych 139

Kartezjusz (René Descartes) 139

kąt zewnętrzny trójkąta 226

kąty przyległe 226

kierownica paraboli 275

krzywa Kocha 250

kwadrat

różnicy 83

sumy 83

liczba logarytmowana 40, 41

liczby

całkowite 15, 19

czworokątne 86

naturalne 10, 19

nieparzyste 10

niewymierne 18, 19

parzyste 10

pierwsze 11

pięciokątne 86

trójkątne 86

wielokątne 86

wymierne 15, 19

względnie pierwsze 15

złożone 11

logarytm 40

dziesiętny 40

iloczynu 41

ilorazu 41

potęgi 41

metoda

podstawiania 105, 114

przeciwnych współczynników 111,
114

miejsce zerowe funkcji 137

liniowej 193

mnożenie sumy algebraicznej przez
jednomian 74

najmniejsza wspólna wielokrotność 12

największy wspólny dzielnik 12

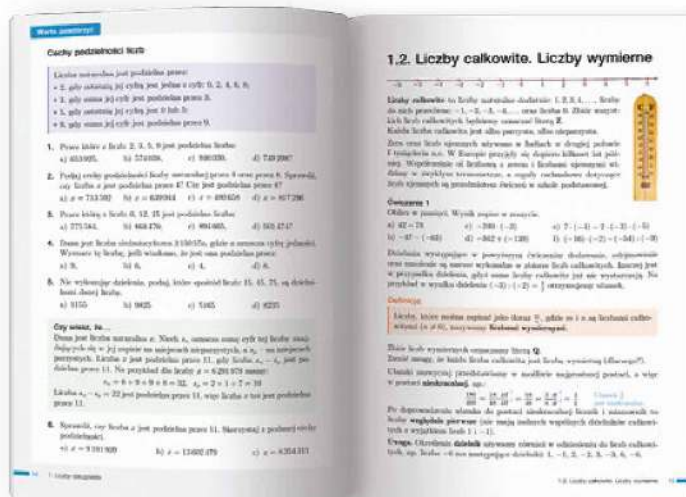
nazwy wielkich liczb 39

nierówności równoważne 70, 71

- nierówność
 - nieostra 70
 - ostra 70
 - sprzeczna 88
 - tożsamościowa 88
 - trójkąta 230
- notacja wykładnicza 47
- odbicie symetryczne funkcji 167, 170
- ognisko paraboli 275
- ortocentrum trójkąta 227
- oś
 - odciętych 139
 - rzędnych 139
 - symetrii paraboli 266
- parabola 148, 261, 262
- pęk prostych 191
- pierwiastek
 - iloczynu 27, 30
 - ilorazu 27, 30
 - kwadratowy (drugiego stopnia) 26
 - n -tego stopnia 31
 - sześcienny (trzeciego stopnia) 29, 30
- podstawa
 - logarytmu 40, 41
 - potęgi 33
- podzbiór zbioru 57
- podzielność liczb 10
- postać
 - dziesiętna liczby 21
 - kanoniczna funkcji kwadratowej 268
 - ogólna funkcji kwadratowej 268
- potęga 33
 - o wykładniku całkowitym ujemnym 34
 - o wykładniku wymiernym 36
- półpłaszczyzna
 - domknięta 215
 - otwarta 215
- procent 44
- programowanie liniowe 217
- promil 44
- proporcjonalność
 - odwrotna 172
 - prosta 195
- prosta prostopadła – konstrukcja 254
- prosta równoległa – konstrukcja 254
- proste
 - prostopadłe 204
 - równoległe 187
- prostokątny układ współrzędnych 139
- przechodność 73
- przeciwdziedzina funkcji 135
- przedział
 - lewostronnie domknięty 64
 - obustronnie domknięty 63
 - otwarty 63, 64
 - prawostronnie domknięty 64
- przekątna pięciokąta 18
- przesunięcie wykresu funkcji 163
- przybliżenie
 - z nadmiarem 23
 - z niedomiarem 23
- punkty kratowe 139
- reguła zaokrąglania 22
- rozkład liczby na czynniki pierwsze 12
- rozwiązanie układu równań 103
- rozwiniecie dziesiętne liczby 21
- równanie
 - kierunkowe prostej 197
 - ogólne prostej 198
 - sprzeczne 88
 - tożsamościowe 88
 - z dwiema niewiadomymi 102
- równoważne układy równań 106
- różnica
 - kwadratów 84
 - zbiorów 61
- skala
 - logarytmiczna 43
 - pH 43
 - podobieństwa 238
 - Richtera 43
- solanka 121
- sposoby przedstawiania funkcji 141
- stężenie procentowe 121
- stosunek pól figur podobnych 247
- suma zbiorów 60
- symetralna odcinka 227
 - konstrukcja 253
- sześciokąt foremny konstrukcja 255

- śnieżynka Kocha 250
- środek
 - ciężkości trójkąta 227
 - pęku prostych 191
- środkowa trójkąta 227
- trójkąt 224
 - ostrokątny 224
 - prostokątny 224
 - rozwartokątny 224
 - Sierpińskiego 250
- trójmian kwadratowy 261, 268
- trychotomia 73
- twierdzenie
 - odwrotne do twierdzenia Talesa 234
 - Pitagorasa 18
 - Talesa 233
- układ
 - dwóch równań z dwiema niewiadomymi 103
 - nieoznaczony 109, 208
 - oznaczony 109, 208
 - równań liniowych 109
 - sprzeczny 109, 208
 - trzech równań z trzema niewiadomymi 126
- ułamek nieskracalny 15, 24
- ułamki
 - dziesiętne 21
 - egipskie 17
- wartość
 - bezwzględna liczby 91
 - interpretacja geometryczna 91
 - funkcji 135
- wielkości
 - odwrotnie proporcjonalne 172
 - wprost proporcjonalne 195
- wielokąty
 - podobne 237
 - przystające 228
- wielokrotność 10
- współczynnik
 - kierunkowy prostej 187, 200
 - interpretacja 201
 - proporcjonalności 172, 195
- współrzędne
 - punktu 139
 - wierzchołka paraboli 266, 269
- wykładnik potęgi 33
- wykres funkcji 140
 - liniowej 186
- wyróżnik trójmianu kwadratowego 269
- wysokość trójkąta 227
- wzór
 - Leibniza 25
 - Wallisa 25
- wzrost wykładniczy 177
- zbiory
 - rozłączne 60
 - równe 57
- zbiór
 - liczb całkowitych 15
 - liczb naturalnych 10
 - liczb niewymiernych 19
 - liczb rzeczywistych 19
 - liczb wymiernych 15
 - nieskończony 56
 - pusty 56
 - skończony 56
 - wartości funkcji 153, 154
- złota liczba 55, 240
- złoty stosunek 55
- zwierciadło paraboliczne 276

Podręcznik **MATeMATyka 1** do zakresu podstawowego w spójny i przystępny sposób wprowadza ucznia w zagadnienia matematyczne. Umożliwia przeprowadzenie ciekawych lekcji w szkole, jednocześnie pozwalając na efektywną samodzielną naukę w domu.



Czytelny układ

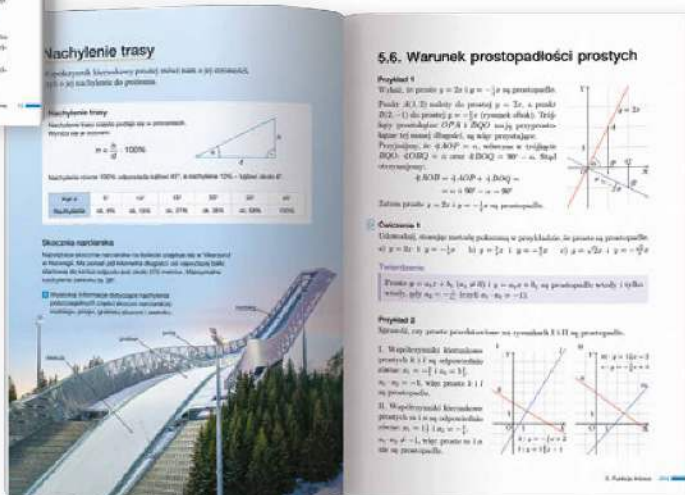
Przejrzyste wprowadzenia nowych treści, rozwiązane przykłady, proste ćwiczenia i ułożone zgodnie ze wzrastającym stopniem trudności zadania tworzą czytelny układ każdego tematu, który ułatwia pracę na lekcjach i w domu.

Pomocne sekcje

Warto powtórzyć pomagają lepiej przygotować się do kolejnych lekcji. *Warto wiedzieć* uzupełniają i rozszerzają treści z lekcji.

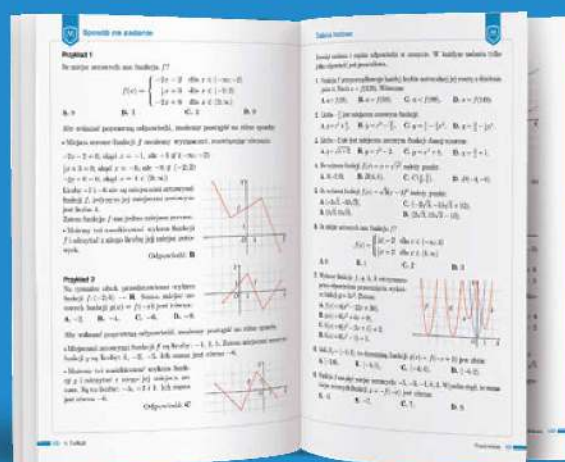
Różnorodne formy przekazu

Ciekawe infografiki i *Zagadnienia uzupełniające* urozmaicają pracę na lekcjach i zachęcają uczniów do samodzielnego poszukiwania.



WIESZ, UMIESZ, ZDASZ

Każdy dział podręcznika **MATeMATyka 1** kończy się dwoma zestawami powtórzeniowymi, dzięki którym uczniowie mogą utrwalić zdobyte wcześniej wiadomości. Następnie zaczyna się sekcja zadań zamkniętych i otwartych, w której znajdziemy też *Sposoby na zadania* pokazujące różne metody rozwiązywania zadań.



Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-3485-4

