

Matematyka



Podręcznik dla
branżowej szkoły I stopnia

WOPRON
Wydawnictwo Profesjonalistów

Matematyka

Podręcznik dla
branżowej szkoły I stopnia

dla

absolwentów ośmioletniej szkoły podstawowej

1

Adam Konstantynowicz

Anna Konstantynowicz

Małgorzata Pająk

 **OPERON**
Edukacja jest podróżą

2023

Projekt okładki: Paweł Kwacz
Redaktor prowadzący: Eliza Perkowska
Redakcja językowa: Katarzyna Kupracz
Redakcja graficzna i skład: Maciej Laska
Korekta techniczna: Izabela Skolmowska

Zdjęcia: Shutterstock

OPERON Sp. z o.o. oświadcza, że z należytą starannością podjął wszelkie działania zmierzające do powiadomienia podmiotów majątkowych praw autorskich do utworów słownych i fotograficznych wykorzystanych w podręczniku o zamiarze ich publikacji celem uzyskania od twórców lub ich następców prawnych wymaganej zgody za przysługującym wynagrodzeniem w stosownej wysokości. Osoby, których prawa w sposób niezawiniony przez wydawnictwo zostały naruszone, prosimy o bezpośredni kontakt z wydawcą.

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do matematyki na III etapie edukacyjnym - branżowa szkoła I stopnia dla uczniów będących absolwentami ośmioletniej szkoły podstawowej, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr Marii Borowskiej, mgr. Tadeusza Marczewskiego i prof. dr. hab. Tadeusza Zgółki.

Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: branżowa szkoła I stopnia
Rok dopuszczenia: 2019
Numer dopuszczenia: 1074/1/2019

© Copyright by OPERON Sp. z o.o. & Adam Konstantynowicz, Anna Konstantynowicz, Małgorzata Pająk
Gdynia 2019
Wszelkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody wydawcy zabronione.
N6922

Wydawca:
OPERON Sp. z o.o.
81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3
tel. centrali 58 679 00 00
e-mail: info@operon.pl
www.operon.pl

ISBN 978-83-7879-866-8

05/23/XIV/US70

Spis treści

I Liczby rzeczywiste

1.1. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory	8
1.2. Działania w zbiorze liczb wymiernych.....	13
1.3. Potęga o wykładniku całkowitym....	19
1.4. Pierwiastek arytmetyczny.....	27
1.5. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych.....	33
1.6. Oś liczbową i przedziały liczbowe ...	36
1.7. Własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych	43
1.8. Zadania utrwalające.....	48

II Wyrażenia algebraiczne

2.1. Wzory skróconego mnożenia.....	52
2.2. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń algebraicznych.....	57
2.3. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych.....	60
2.4. Wylaczanie wspólnego czynnika poza nawias	64
2.5. Zadania utrwalające.....	66

III Równania i nierówności liniowe

3.1. Równania równoważne	70
3.2. Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	75
3.3. Nierówności równoważne.....	81
3.4. Rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	84
3.5. Zadania utrwalające.....	90

IV Funkcje

4.1. Pojęcie funkcji i sposoby jej określania	94
4.2. Dziedzina, wartość funkcji i miejsca zerowe	102
4.3. Odczytywanie własności funkcji z wykresu. Dziedzina funkcji, zbiór wartości i monotoniczność funkcji	110
4.4. Odczytywanie własności funkcji z wykresu – ciąg dalszy	119
4.5. Przesuwanie wykresów funkcji	129
4.6. Przekształcanie wykresów funkcji ...	135
4.7. Funkcja liniowa i jej własności.....	141
4.8. Wykres funkcji kwadratowej.....	152
4.9. Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej	158
4.10. Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej	168
4.11. Wartość najmniejsza i największa funkcji kwadratowej.....	171
4.12. Zagadnienia geometryczne i fizyczne	173
4.13. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$	185
4.14. Zadania utrwalające	192

V Równania i nierówności kwadratowe

5.1. Równanie kwadratowe.....	202
5.2. Nierówność kwadratowa	208
5.3. Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych	212
5.4. Zadania utrwalające.....	217
Odpowiedzi.....	220

Wstęp

Jak jest zbudowany nasz podręcznik

Podręcznik do matematyki dla branżowej szkoły I stopnia został zaprojektowany z uwzględnieniem potrzeb i stylu nauki uczniów. Pomoże im szybko przyswoić niezbędne informacje, skutecznie powtórzyć wiadomości oraz przygotować się do sprawdzianów i kartkówek.

Przed rozpoczęciem korzystania z podręcznika, zapoznajcie się z jego budową i przyjrzyjcie się wszystkim jego elementom. Zostały one skonstruowane tak, by ułatwić wam naukę i pomóc w błyskawicznym znalezieniu potrzebnych zagadnień.

Podręcznik zawiera tylko niezbędne wiadomości ujęte w jasno i prosto sformułowanych tematach.

Przystępny język publikacji ułatwi wam zrozumienie treści i pozytywnie nastawi was do materiału.

Ikony na marginesach ułatwią wam odnalezienie definicji, najważniejszych treści do zapamiętania oraz zadań:

-  definicja, prawo, zasada
-  ćwiczenie do samodzielnej pracy
-  zadania sprawdzające
-  zadania do rozwiązania

W tekście pojawiają się **wytłuszczenia**. Dzięki nim łatwo odnajdziecie istotne zagadnienia, pojęcia i nazwy.

1.4. Pierwiastek arytmetyczny

Pierwiastkiem drugiego stopnia (kwadratem) z liczby a nazywamy taką liczbę x , której kwadrat jest równy liczbie a .

$$x^2 = a, \text{ bo } x^2 = a, a \geq 0, x \geq 0$$

Pierwiastkiem trzeciego stopnia (sześcianem) z liczby a nazywamy taką liczbę x , której sześcian jest równy liczbie a .

$$x^3 = a, \text{ bo } x^3 = a$$

Ćwiczenie 1.

Oblicz pierwiastki.

$$\begin{array}{llll} a) \sqrt{4} & b) \sqrt{44} & c) \sqrt{0,16} & d) \sqrt{\frac{9}{25}} \\ e) \sqrt{8} & f) \sqrt{-125} & g) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} & h) \sqrt[3]{-0,008} \end{array}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt{4} = 2, \text{ bo } 2^2 = 4 & b) \sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11} \\ c) \sqrt{0,16} = 0,4, \text{ bo } 0,4^2 = 0,16 & d) \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}, \text{ bo } \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\ e) \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \text{ bo } (2\sqrt{2})^2 = 8 & f) \sqrt{-125} = 5\sqrt{-5} \\ g) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}, \text{ bo } \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} & h) \sqrt[3]{-0,008} = -0,2, \text{ bo } (-0,2)^3 = -0,008 \end{array}$$

Zobaczmy pierwiastki wykładnicze.

$$\sqrt{a} = a, a \geq 0$$

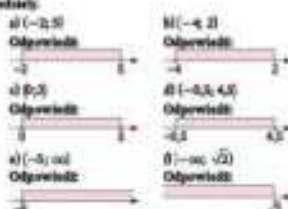
Ćwiczenie 4.

Zaczynamy na osi liczbowej przedziały:

Rozwiązanie: Na osi

liczbowej zaznaczamy punkty, które wyznaczają zakres przedziału.

Uwzględniamy to, czy dany punkt należy do przedziału (rysujemy kółko zamknięte), czy nie należy (rysujemy kółko otwarte).



Środek dwóch zbiorów liczb A i B (przedziałów A i B) nazywamy ich średnią arytmetyczną (ŚA), które należy do zbioru A lub należy do zbioru B . Środek zbiorów A i B nazywamy $A \cup B$.

Środek dwóch zbiorów liczb A i B (przedziałów A i B) nazywamy ich średnią arytmetyczną (ŚA), które należy jednocześnie do zbioru A i do zbioru B . Środek zbiorów A i B nazywamy $A \cap B$.

Ćwiczenie 5.

Wyznaczamy i liczymy przedziały $[1, 4]$ i $[-1, 5]$.

Rozwiązanie:

a) suma przedziałów $[1, 4]$ i $[-1, 5]$ to $[-1, 5]$.

Rysujemy na osi dwa przedziały. Zaznaczamy ich koniec, czyli przedział, który zawiera oba przedziały.

b) iloczyn przedziałów $[1, 4]$ i $[-1, 5]$ to $[1, 4]$.

Rysujemy na osi dwa przedziały. Zaznaczamy ich początek, czyli punkt, który należy do obu przedziałów.



Dwa przedziały mogą nie zawierać ani jednego punktu. Mówimy wówczas o zbiorze pustym i oznaczamy go jako $\emptyset$, np. $[-1, 2] \cap [3, 5] = \emptyset$. Dwa przedziały mogą być też zbiorami rozłącznymi i wówczas ich iloczyn zapisujemy w nawiasach klamrowych, np. $[1, 5] \cap [6, 10] = \emptyset$.

Iloczyn przedziałów może również występować w postaci zbioru nieskończonego, np. $[-1, 1] \cap (-1, 4) = (-1, 1) \cap (-1, 4) = (-1, 1) = \emptyset$.

Śledzenie **rozwiązania przykładów**, pomoże wam łatwiej zrozumieć omawiane zagadnienia.

Odpowiedź 1.

Klient wpłacił w banku kredyt na rok w wysokości 10 000 zł. Roczna stopa procentowa położyła wynosi 12%. Oblicz, jaką kwotę klient będzie musiał zwrócić do banku.

Rozwiązanie:
I sposób

Obliczamy wysokość odsetek za cały rok:

$$d = 12\% \cdot 10\,000 \text{ zł} = 0,12 \cdot 10\,000 \text{ zł} = 1200 \text{ zł}$$

Obliczamy, jaką kwotę klient zwróci do banku:

$$10\,000 \text{ zł} + 1200 \text{ zł} = 11\,200 \text{ zł}$$

II sposób

Obliczamy kapitał po jednym okresie oprocentowania.

Ustalamy dane:

$$K_0 = 10\,000 \text{ (zł)}, p = 12\%, t = 1 \text{ (rok)}, K = ?$$

$$K = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

$$K = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{12}{100} \right) = 11\,200$$

Odpowiedź: Klient musi zwrócić do banku 11 200 zł.

Odpowiedź 2.

Klient wpłacił w banku kwotę 30 000 zł na półroczny lokatę (kapitał) o odsetkach miesięcznych w skali roku. Roczna stopa procentowa lokaty wynosi 7%. Oblicz,

1.

Aby dostać dwie liczby o różnych znakach, od większej wartości bezwzględnej odejmijmy mniejszą, a wynik zapiszemy z takim znakiem, jaki miały liczby o większej wartości bezwzględnej.

Odpowiedź 3.

Odpis:

$$a) 13 + 14$$

$$b) -11 - 11$$

$$c) -13 + 45$$

$$d) 15 + (-40)$$

Rozwiązanie:

$$a) 13 + 14 = 27$$

$$b) -11 - 11 = -(11 + 11) = -22$$

$$c) -13 + 45 = 45 - 13 = 32$$

$$d) 15 + (-40) = -40 + 15 = -25$$

2.

Mając już dwie liczby o jednakowych znakach, w wyniku otrzymujemy liczbę dodatnią.

Mając już dwie liczby o różnych znakach, w wyniku otrzymujemy liczbę ujemną.

Odpowiedź 3.

Odpis:

$$a) 5 - 7$$

$$b) 5 - (-7)$$

$$c) (-5) - 7$$

$$d) (-5) - (-7)$$

Rozwiązanie:

$$a) 5 - 7 = -2$$

$$b) 5 - (-7) = 12$$

$$c) (-5) - 7 = -12$$

$$d) (-5) - (-7) = 2$$

$$e) 30 : 7 = 4$$

$$f) 30 : (-7) = -4$$

$$g) (-30) : 7 = -4$$

$$h) (-30) : (-7) = 4$$

Przy dodawaniu i mnożeniu możemy stosować prawa:

1. Prawo przemienności dodawania: $a + b = b + a$
2. Prawo przemienności mnożenia: $a \cdot b = b \cdot a$
3. Prawo łączności dodawania: $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. Prawo łączności mnożenia: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
5. Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
6. Prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Elementem neutralnym dodawania jest 0.

Elementem neutralnym mnożenia jest 1.

Zadanie 4.

Po upływie 15 lat z próbki kokonu o masie 10 gramów pozostało 1,25 grama. Oblicz okres półrocznego rozpadu ($T/2 = 0$) tego izotopu.

Rozwiązanie:

Ustalamy dane oraz obliczamy i rozwiązujemy równanie:

$$t = 15 \text{ (lat)}$$

$$m_0 = 10 \text{ (g)}$$

$$m = 1,25 \text{ (g)}$$

$$1,25 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T/2}}$$

$$0,125 = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T/2}}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T/2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^3$$

$$T = 15 \text{ (lat)}$$

Odpowiedź: Okres półroczny.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Pan Adamski otrzymał

Oblicz w sekcji II

wynosi 80 w skali II

2. Pani Anna wpłaciła

wpłaciła kwotę 1235

oblicz roczną stopę

3. Do banku wpłacono 40

byłyby odsetki, gdyby

oprocentowania, ale z

A. o 120 zł B. o

4. Na lokacie obliczono 300

zł co kwartał. Po upływie

A. $3000 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^4$ B. $3000 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$

5. Po jakim czasie zostanie 25% masy pierwiastka promieniotwórczego, dla którego

okres półrocznego rozpadu wynosi 2 dni?

A. po 2 dniach B. po 4 dniach C. po 6 dniach D. po 8 dniach

6. Wynik działania w sekcji

a) $(-5 + 2) \cdot (-3 - 4)$ b) $(-5 + 4) + (-3 + 4) + (-4)$ c) $(-7 + (-4)) \cdot (-3)$

7. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

8. Uprość liczbę a, b, c w kolejności: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

9. Podziel w sekcji liczb $-2, 1, 1, 2$ przez ich różnicę.

10. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

11. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

12. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

13. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

14. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

15. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

16. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

17. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

18. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

19. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

20. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

21. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

22. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

23. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

24. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

25. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

26. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

27. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

28. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

29. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

30. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

31. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

32. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

33. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

34. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

35. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

36. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

37. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

38. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

39. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

40. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

41. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

42. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

43. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

44. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

45. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

46. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

47. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

48. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

49. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

50. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

51. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

52. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

53. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

54. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

55. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

56. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

57. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

58. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

59. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

60. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

61. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

62. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

63. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

64. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

65. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

66. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

67. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

68. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

69. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

70. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

71. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

72. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

73. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

74. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

75. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

76. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

77. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

78. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

79. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

80. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

81. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

82. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

83. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

84. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

85. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

86. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

87. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

88. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

89. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

90. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

91. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

92. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

93. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

94. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

95. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

96. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

97. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

98. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

99. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

100. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

101. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

102. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

103. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

104. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

105. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

106. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

107. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

108. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

109. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

110. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

111. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

112. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

113. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

114. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

115. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

116. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

117. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

118. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

119. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

120. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

121. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

122. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

123. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

124. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

125. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

126. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

127. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

128. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

129. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

130. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

131. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

132. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

133. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

134. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

135. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

136. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

137. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

138. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

139. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

140. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

141. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

142. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

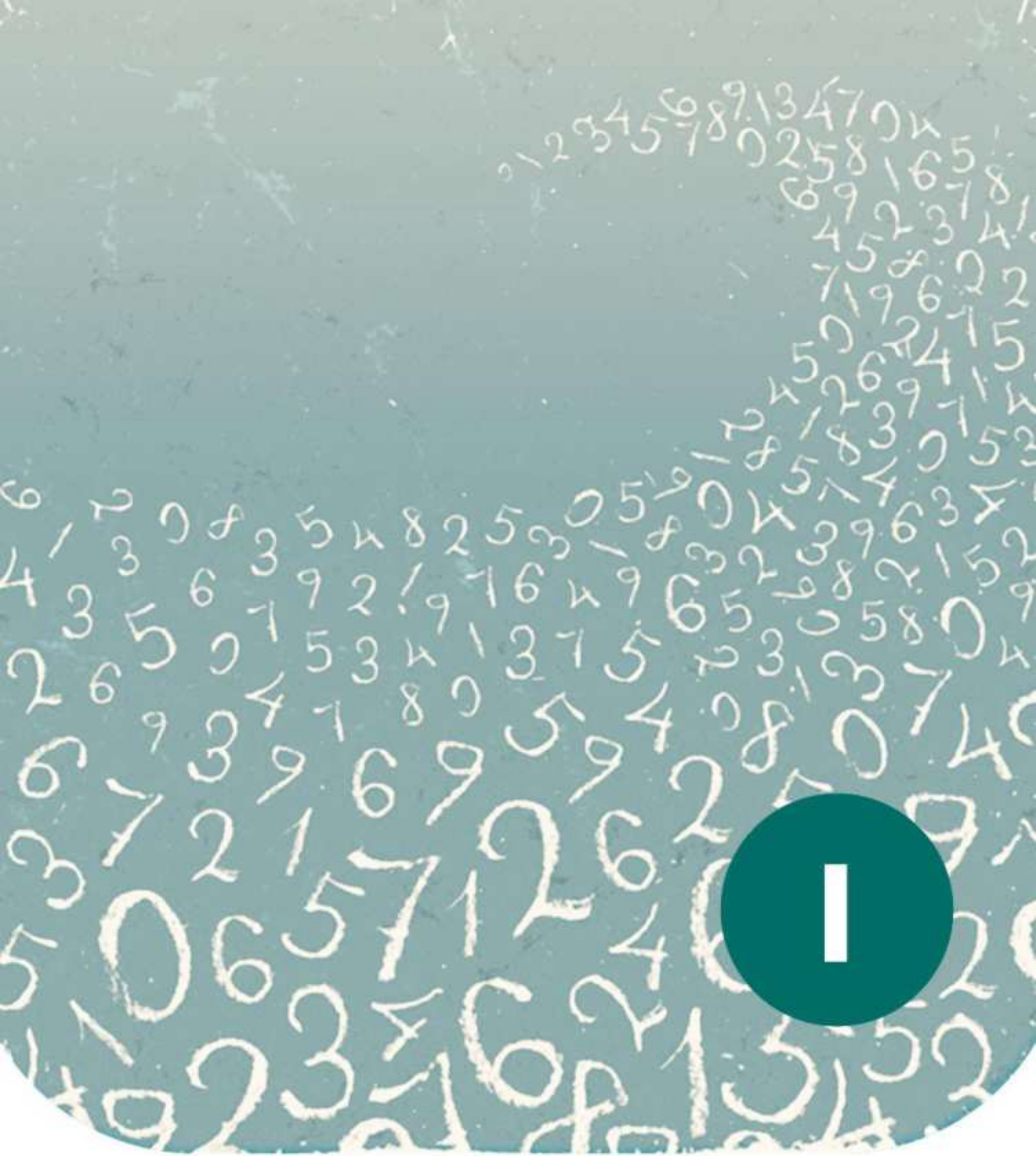
143. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

144. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

145. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

146. Oblicz w sekcji wartość wyrażenia

147



LICZBY RZECZYWISTE

1.1. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

Liczby naturalne

Pierwszym poznany podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych jest zbiór liczb naturalnych.

Oznaczamy go symbolem $\mathbb{N}$.

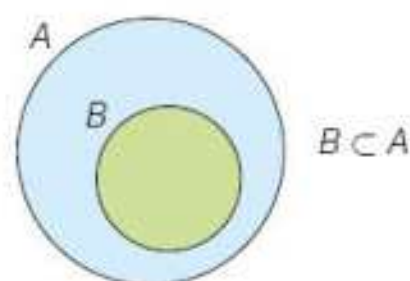
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$



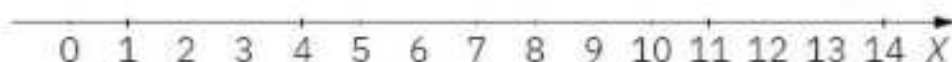
Podzbiór

Zbiór B jest podzbiorem zbioru A , co zapisujemy symbolicznie $B \subset A$.

Zbiór B nazywamy podzbiorem zbioru A , jeżeli każdy element zbioru B jest również elementem zbioru A . Mówimy, że zbiór B jest zawarty w zbiorze A lub zbiór A obejmuje zbiór B .



Liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. Najmniejszą liczbą naturalną jest 0, natomiast nie ma największej liczby naturalnej. Każda następna liczba naturalna jest o jeden większa od poprzedniej. Rozmieszczenie liczb naturalnych na osi liczbowej przedstawia rysunek.



Pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi nie może znaleźć się inna liczba naturalna.

Działanie jest wykonalne w zbiorze wtedy, gdy elementami działania są liczby tego zbioru oraz otrzymany wynik jest liczbą tego zbioru. W zbiorze liczb naturalnych zawsze wykonalne są działania: dodawanie i mnożenie. Pozostałe działania są wykonalne pod pewnymi warunkami, np. odejmowanie tylko wtedy, gdy od większej liczby odejmujemy mniejszą lub równą, dzielenie – gdy dzielna jest wielokrotnością dzielnika, a dzielnik nie jest zerem.

Jednym z podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest zbiór liczb pierwszych, czyli takich, które dzielą się przez 1 i samą siebie. Liczby mające więcej niż dwa dzielniki nazywamy liczbami złożonymi. Liczby 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.

Liczbami pierwszymi są np.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Ćwiczenie 1.

Wyznacz największy wspólny dzielnik (NWD) i najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) liczb 132 i 220.

Rozwiązanie:

Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze.

$$\begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Obliczając NWD liczb 132 i 220, mnożymy przez siebie powtarzające się w obu liczbach (podkreślone) czynniki pierwsze.

$$\text{NWD}(132, 220) = 2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$$

Obliczając NWW liczb 132 i 220, mnożymy mniejszą z tych liczb przez te czynniki pierwsze drugiej liczby, które są niepodkreślone.

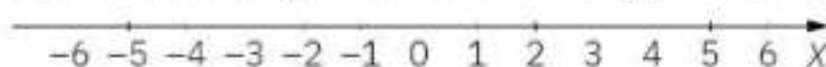
$$\text{NWW}(132, 220) = 132 \cdot 5 = 660$$

Liczby całkowite

Następnym zbiorem jest zbiór liczb całkowitych. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy symbolem $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Liczb całkowitych jest nieskończenie wiele. Nie istnieje ani najmniejsza, ani największa liczba całkowita. Każda następna liczba całkowita jest o jeden większa od poprzedniej. Rozmieszczenie liczb całkowitych na osi liczbowej przedstawia rysunek.



Pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi nie może znaleźć się inna liczba całkowita. W tym zbiorze zawsze wykonalne są działania: dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Dzielenie można wykonać tylko wtedy, gdy dzielna jest wielokrotnością dzielnika, a dzielnik nie jest zerem. Każda liczba naturalna jest jednocześnie liczbą całkowitą.

Liczby wymierne

Kolejnym zbiorem są liczby wymierne. Są to takie liczby, które można przedstawić

w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami całkowitymi i $n \neq 0$.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych oznaczamy jako $\mathbb{Q}$.

Liczbami wymiernymi są np. liczby: $-\frac{7}{8}$; $5\frac{2}{3}$; 0 ; -2 ; $1,25$; -3 ; 11 .

Liczb wymiernych jest nieskończenie wiele. Nie istnieje ani największa, ani najmniejsza liczba wymierna. Pomiedzy dwiema liczbami wymiernymi może znaleźć się inna liczba wymierna. W zbiorze liczb wymiernych wykonalne są działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (jeżeli dzielnik nie jest zerem).

Każdy ułamek zwykły można przedstawić w postaci dziesiętnej. Można go rozszerzyć tak, aby w mianowniku była liczba: 10, 100, 1000 itd., lub podzielić licznik przez mianownik.

Ćwiczenie 2.

Znajdź rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków.

a) $\frac{5}{8}$

Rozwiązanie:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000} = 0,625$$

b) $\frac{16}{33}$

Rozwiązanie:

$$\frac{16}{33} = 0,(48)$$

		0	4	8	4	8	...
	1	6	:	3	3		
-		0					
	1	6	0				
-	1	3	2				
		2	8	0			
-		2	6	4			
			1	6	0		
		-	1	3	2		
			2	8	0		
		-	2	6	4		
				1	6		

Liczby niewymierne

Liczby niewymierne to liczby, które mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe.

Z liczbami niewymiernymi spotykamy się, np. obliczając pierwiastki kwadratowe (lub sześciennie), bowiem nie zawsze potrafimy wskazać taką liczbę wymierną, której kwadrat (lub sześćcian) jest równy danej liczbie podpierwiastkowej.

Zbiór wszystkich liczb niewymiernych oznaczamy jako $\mathbb{Q}'$.

Liczbami niewymiernymi są np.: $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$; $0,102030\dots$; π .

Zbiór liczb wymiernych oraz zbiór liczb niewymiernych łącznie tworzą zbiór liczb **rzeczywistych**.

Oznacza się go literą $\mathbb{R}$.

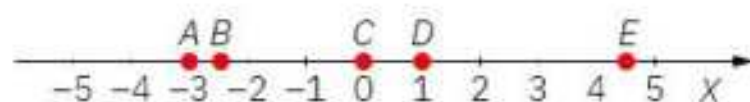
Każdej liczbie rzeczywistej można przyporządkować dokładnie jeden punkt na osi liczbowej, czyli prostej, na której ustalono dodatni zwrot, obrano punkt zerowy i ustalono jednostkę odległości.

Liczby odpowiadające zaznaczonym punktom na osi liczbowej nazywamy ich współrzędnymi.

Ćwiczenie 3.

Zaznacz na osi liczbowej punkty o współrzędnych: -3 ; $-2\frac{1}{2}$; 0 ; 1 ; $4,5$.

Rozwiązanie:



Punkt A ma współrzędną -3 , punkt B ma współrzędną $-2\frac{1}{2}$, punkt C ma współrzędną 0 , punkt D ma współrzędną 1 , punkt E ma współrzędną $4,5$.

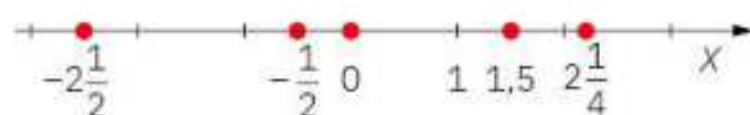
Porównując liczby, pamiętajmy, że każda liczba dodatnia jest większa od każdej liczby ujemnej. Również liczba zero jest większa od każdej liczby ujemnej. Z dwóch liczb ujemnych większa zaś jest ta liczba, która odpowiada punktowi leżącemu bliżej zera na osi liczbowej.

Ćwiczenie 4.

Uporządkuj rosnąco liczby: $-2\frac{1}{2}$; $1,5$; 0 ; $2\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

Rysujemy oś liczbową, obieramy jednostkę i zaznaczamy punkty o danych współrzędnych.

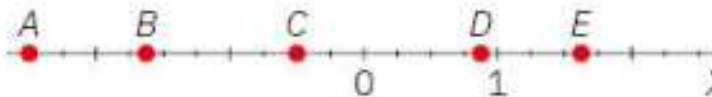
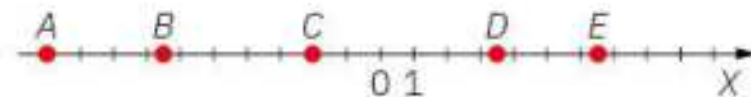


Porządkujemy je rosnąco: $-2\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} < 0 < 1,5 < 2\frac{1}{4}$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Spośród liczb: 6 ; $3\frac{1}{2}$; 0 ; $-\frac{8}{2}$; $-7,2$; 4 ; -8 ; $-2\frac{3}{3}$; 356 wypisz do zeszytu te, które są liczbami:
 - a) naturalnymi
 - b) całkowitymi dodatnimi
 - c) całkowitymi ujemnymi
2. Dane są liczby: $\sqrt{9}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{40}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Które z nich są liczbami niewymiernymi?
3. Czy długość przekątnej prostokąta o bokach 3 i 5 wyraża się liczbą niewymierną?
4. Które z liczb: $a = \frac{14}{60}$, $b = \frac{21}{28}$, $c = \frac{19}{16}$, $d = \frac{5}{11}$, mają rozwinięcie dziesiętne skończone?



5. Czy prawdą jest, że przybliżenie dziesiętne liczby $\sqrt{22}$ z dokładnością do jednej dziesiątej wynosi 4,7?
6. Zapisz w zeszycie podane liczby wymierne w postaci ułamków zwykłych: $-2\frac{1}{3}$; 0; $-1,25$; $3\frac{1}{5}$; $12\frac{2}{7}$; 12,24.
7. Podziel podane liczby na liczby pierwsze i liczby złożone.
11 17 18 101 111 375 1221
8. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie punkty, których współrzędne odpowiadają podanym liczbom. Do każdej z nich podaj liczbę przeciwną.
a) $-4\frac{1}{3}$; $3\frac{1}{2}$; 0; $-1\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{2}$ b) $1\frac{1}{6}$; $-1\frac{2}{3}$; 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$
9. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.
a)  b) 
10. Uporządkuj podane liczby:
a) od najmniejszej do największej: -3 ; 0; -2 ; 1; -4 ; 6; 66; -6 .
b) od największej do najmniejszej: 3; -4 ; 7; 9; -8 ; 0; -18 ; -19 .
11. Po wykonaniu działania $\sqrt{50} - (1 + \sqrt{2})$ otrzymano wynik, który z dokładnością do części setnych wynosi 4,65. Sprawdź poprawność tych obliczeń.
12. Dane są liczby: $\sqrt{2} - 1$; $\sqrt{2} - 1$; $1 - \sqrt{2}$; $\sqrt{8} - 2\sqrt{2}$. Sprawdź, które z nich są dodatnie.
13. Znajdź rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków.
a) $\frac{1}{3}$ b) $1\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{9}$
14. Liczby $a = 0,(1)$ i $b = 0,(3)$ przedstaw w zeszycie w postaci ułamków zwykłych i oblicz $a + b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. W zbiorze liczb $\left\{-2\frac{1}{2}; 3\frac{2}{7}; \sqrt{2}; -\frac{3}{4}; 8; \sqrt[3]{8}\right\}$ liczby wymierne to:
A. $-2\frac{1}{2}; 3\frac{2}{7}; -\frac{3}{4}; 8; \sqrt[3]{8}$ B. $-2\frac{1}{2}; 3\frac{2}{7}; -\frac{3}{4}; 8$
C. 8 D. $3\frac{2}{7}; 8; \sqrt[3]{8}$
2. Długość przekątnej prostokąta o bokach 5 cm i 12 cm jest równa:
A. $\sqrt{13}$ B. $8\sqrt{2}$ C. 13 D. $\sqrt[3]{18}$

3. Dwaj koledzy trenują na tej samej siłowni, pierwszy co trzy dni, a drugi co cztery. Spotkali się 2 września. Kiedy spotkają się ponownie?
A. 1 października B. 21 września C. 9 września D. 14 września
4. Które liczby uporządkowane są rosnąco?
A. $-12 < -2 < 0 < 4 < 11$ B. $-12 < 3 < -2 < 0 < 4$
C. $-2 < 0 < 4 < 7 < 6$ D. $-2 < 0 < -1 < 7$
5. Która z podanych liczb jest ujemna?
A. $a = \sqrt{7} - 3$ B. $b = 3 - \sqrt{7}$ C. $c = \sqrt{7} - (-3)$ D. $d = -(\sqrt{7} - 3)$
6. Rozwinięcia dziesiętne ułamków $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{7}$ to:
A. $\frac{7}{8} = 0,875$; $\frac{5}{7} = 0,(74286)$ B. $\frac{7}{8} = 0,875$; $\frac{5}{7} = 0,(714285)$
C. $\frac{7}{8} = 0,876$; $\frac{5}{7} = 0,(714285)$ D. $\frac{7}{8} = 0,885$; $\frac{5}{7} = 0,(75285)$

1.2. Działania w zbiorze liczb wymiernych

Przy wykonywaniu niektórych działań na liczbach wymiernych przydatne jest pojęcie wartości bezwzględnej.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Wartość bezwzględna liczby nieujemnej x jest równa tej samej liczbie x :

$$|2| = 2 \qquad |0,3| = 0,3 \qquad |0| = 0$$

Wartość bezwzględna liczby ujemnej to liczba do niej przeciwna:

$$|-3| = 3 \qquad |-0,7| = 0,7$$

Ćwiczenie 1.

Wyznacz wartość bezwzględną liczb: a) $-34,5$, b) $102\frac{2}{3}$, c) $-\frac{8}{9}$.

Rozwiązanie:

$$\text{a) } |-34,5| = 34,5 \quad \text{b) } \left|102\frac{2}{3}\right| = 102\frac{2}{3} \quad \text{c) } \left|-\frac{8}{9}\right| = \frac{8}{9}$$

Aby dodać dwie liczby o tych samych znakach, dodajemy ich wartości bezwzględne, a wynik zapisujemy z takim znakiem, jaki występował przy liczbach.



Aby dodać dwie liczby o **różnych znakach**, od większej wartości bezwzględnej odejmujemy mniejszą, a wynik zapisujemy z takim znakiem, jaki miała liczba o większej wartości bezwzględnej.

Ćwiczenie 2.

Oblicz.

a) $13 + 14$ b) $-31 - 11$ c) $-25 + 45$ d) $15 + (-60)$

Rozwiązanie:

a) $13 + 14 = 27$ b) $-31 - 11 = -(31 + 11) = -42$
c) $-25 + 45 = 45 - 25 = 20$ d) $15 + (-60) = -(60 - 15) = -45$



Mnożąc lub dzieląc dwie liczby o **jednakowych znakach**, w wyniku otrzymujemy liczbę dodatnią.

Mnożąc lub dzieląc dwie liczby o **różnych znakach**, w wyniku otrzymujemy liczbę ujemną.

Ćwiczenie 3.

Oblicz.

a) $5 \cdot 7$ b) $5 \cdot (-7)$ c) $(-5) \cdot 7$ d) $(-5) \cdot (-7)$
e) $35 : 7$ f) $35 : (-7)$ g) $(-35) : 7$ h) $(-35) : (-7)$

Rozwiązanie:

a) $5 \cdot 7 = 35$ b) $5 \cdot (-7) = -35$
c) $(-5) \cdot 7 = -35$ d) $(-5) \cdot (-7) = 35$
e) $35 : 7 = 5$ f) $35 : (-7) = -5$
g) $(-35) : 7 = -5$ h) $(-35) : (-7) = 5$

Przy dodawaniu i mnożeniu możemy stosować prawa:

- | | |
|--|---|
| 1. Prawo przemienności dodawania | $a + b = b + a$ |
| 2. Prawo przemienności mnożenia | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| 3. Prawo łączności dodawania | $a + (b + c) = (a + b) + c$ |
| 4. Prawo łączności mnożenia | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ |
| 5. Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ |
| 6. Prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania | $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ |

Elementem neutralnym dodawania jest 0. $a + 0 = a$

Elementem neutralnym mnożenia jest 1. $a \cdot 1 = a$

Przy obliczeniach w pamięci przydatna jest znajomość niektórych **cech podzielności**. Liczba całkowita jest podzielna przez:

- 2, gdy jej ostatnią cyfrą jest: 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3;
- 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4;
- 5, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr dzieli się przez 9;
- 10, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0;
- 25, gdy jej dwie ostatnie cyfry to 00 lub 25, lub 50, lub 75;
- 100, gdy jej dwie ostatnie cyfry są zerami.

Ułamki można skracać i rozszerzać.

Skrócić ułamek to znaczy podzielić licznik i mianownik przez tę samą liczbę różną od zera.

$$\frac{28}{34} = \frac{28:2}{34:2} = \frac{14}{17} \text{ lub } \frac{\cancel{28}^{14}}{\cancel{34}_{17}} = \frac{14}{17}$$

Rozszerzyć ułamek to znaczy pomnożyć licznik i mianownik przez tę samą liczbę różną od zera.

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{30}{42}$$

Przypomnijmy, jak wykonać działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych.

Ćwiczenie 4.

Wykonaj wskazane działania.

a) $4\frac{11}{15} + 2\frac{8}{15}$

b) $5 - 1\frac{2}{13}$

c) $\frac{4}{7} \cdot 1\frac{1}{6}$

d) $6\frac{1}{5} - 3\frac{4}{7}$

e) $2\frac{1}{2} \cdot \left(-2\frac{1}{5}\right)$

f) $5\frac{1}{2} : 8\frac{5}{9}$

Rozwiązanie:

a) $4\frac{11}{15} + 2\frac{8}{15} = 6\frac{19}{15} = 7\frac{4}{15}$

b) $5 - 1\frac{2}{13} = 4\frac{13}{13} - 1\frac{2}{13} = 3\frac{11}{13}$

c) $\frac{4}{7} \cdot 1\frac{1}{6} = \frac{\cancel{4}^2}{7} \cdot \frac{\cancel{7}^1}{\cancel{6}_3} = \frac{2}{3}$

d) $6\frac{1}{5} - 3\frac{4}{7} = 6\frac{7}{35} - 3\frac{20}{35} = 5\frac{42}{35} - 3\frac{20}{35} = 2\frac{22}{35}$

e) $2\frac{1}{2} \cdot \left(-2\frac{1}{5}\right) = \frac{\cancel{2}^1}{2} \cdot \left(-\frac{\cancel{11}^1}{\cancel{5}_1}\right) = -\frac{11}{2} = -5\frac{1}{2}$

f) $5\frac{1}{2} : 8\frac{5}{9} = \frac{11}{2} : \frac{77}{9} = \frac{\cancel{11}^1}{2} \cdot \frac{9}{\cancel{77}_7} = \frac{9}{14}$

Działania na ułamkach dziesiętnych możemy wykonać sposobem pisemnym.

Ćwiczenie 5.

Oblicz.

a) $1,234 + 50,73 + 6$ b) $3,7 - 0,989$ c) $8,03 \cdot 4,5$ d) $40 : 0,125$

Rozwiązanie:

a)	b)	c)	d)
$ \begin{array}{r} 1,234 \\ 50,730 \\ + 6,000 \\ \hline 57,964 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 3,700 \\ - 0,989 \\ \hline 2,711 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 8,03 \\ \cdot 4,5 \\ \hline 4015 \\ + 3212 \\ \hline 36,135 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 320 \\ 40000 : 125 \\ \hline 320 \\ - 375 \\ \hline 250 \\ - 250 \\ \hline 0 \end{array} $

Wykonując obliczenia, w których występują ułamki zwykłe i dziesiętne, możemy zamienić ułamki dziesiętne na ułamki zwykłe lub – o ile to możliwe – ułamki zwykłe na dziesiętne, a następnie wykonać działania zgodnie z kolejnością wykonywania działań.

Ćwiczenie 6.

Oblicz wartości wyrażeń.

a) $2,1 \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{9} \cdot 1,8$

b) $0,54 : \frac{3}{5} - \frac{1}{4} \cdot 0,1$

Rozwiązanie:

a) $2,1 \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{9} \cdot 1,8 = \frac{21^3}{10^5} \cdot \frac{2^1}{7^1} + \frac{4^2}{9^1} \cdot \frac{18^2}{10^5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$

b) $0,54 : \frac{3}{5} - \frac{1}{4} \cdot 0,1 = 0,54 : 0,6 - 0,25 \cdot 0,1 = 0,9 - 0,025 = 0,875$



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Oceń, które z równości są prawdziwe.

a) $14 - 6 : 2 = 11$

b) $4 - 4 \cdot 5 = 0$

c) $17 + 5 \cdot 4 = 37$

d) $8 + 6 : 3 = 7$

2. Określ, które z podanych zdań jest prawdziwe.

a) Jeżeli do liczby -6 dodam liczbę 6 , to otrzymam liczbę dodatnią.

b) Jeżeli do liczby -6 dodam liczbę większą od 6 , to otrzymam liczbę dodatnią.

3. Sprawdź, czy wartość wyrażenia jest obliczona poprawnie: $\frac{5 - [6 - (-8)]}{-4 - (-3 + 2)} = 3$.

4. Od liczby 4477 odejmij sumę liczb 547 i 453 pomnożoną przez 4 . Wykonaj działania w pamięci.

5. Wykonaj działania w zeszycie, stosując prawo łączności i przemienności.
- $77 + 15 + 23 + 7 + 5 + 23 + 14$
 - $35 + 38 + 15 + 11 + 122$
 - $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 2$
 - $20 + 64 + 5 + 8 + 17 + 36$
 - $67 + 48 - 14 - 17 + 83 + 16 - 13 - 20$
 - $2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 20$
6. Wynik jest liczbą dodatnią w przykładzie:
- $-7 - (-15)$
 - $5 - 6$
 - $-12 - (-10)$
 - $-3 - 2$
7. Z podanego zbioru liczb: 9822, 5710, 3365, 7075, 2511, 5228, 2200, 3555, 4215, 3069, 8112, 9302 wypisz do zeszytu liczby:
- podzielne przez 2
 - podzielne przez 4
 - podzielne przez 5
 - podzielne przez 9
8. Oblicz w pamięci, korzystając z prawa rozdzielności mnożenia względem odejmowania:
- $37 \cdot 5$
 - $96 \cdot 4$
 - $6 \cdot 999$
 - $70 \cdot 49$
9. Wykonaj działania w zeszycie.
- $22 + 10 - 12 + 18 - 5$
 - $15 - 37 + 45 - 63$
 - $32 + 13 - 32 + 13 - 26$
 - $-61 + 11 - 12 + 50 - 9$
 - $21 - (-37) + 42 + (-58)$
 - $-19 + (-11) - 12 + 50 + (-12)$
 - $-(-16) + 44 - 91 + 13 - (-91)$
 - $32 - 21 + (-25) - 60 + 5$
10. Wykonaj działania w zeszycie.
- $(-5) \cdot (-34)$
 - $(-20) \cdot 147$
 - $(-65) \cdot 4$
 - $(-84) : (-21)$
 - $18 : (-5)$
 - $(-125) : 20$
11. Oblicz w zeszycie.
- $(7 + 11) \cdot 3$
 - $(5 - 8) \cdot 6$
 - $(-3 + 7) \cdot (-5)$
 - $(25 - 5) : (12 - 10)$
 - $(72 : (-3)) : (14 - 6)$
 - $(-5) \cdot (30 - (7 - 3))$
12. Wykonaj działania w zeszycie.
- $2\frac{1}{2} + \left(-2\frac{1}{2}\right)$
 - $-3\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}$
 - $-12\frac{5}{7} + 5\frac{1}{14}$
 - $12\frac{3}{4} - 5\frac{5}{6}$
 - $6\frac{1}{6} - 8\frac{1}{6}$
 - $-4\frac{3}{4} - 6\frac{1}{8}$
 - $1\frac{7}{15} - \left(-25\frac{2}{5}\right)$
 - $\left(-2\frac{4}{13}\right) + \left(-4\frac{26}{39}\right)$
 - $-3\frac{3}{8} - \left(-12\frac{1}{8}\right)$

13. Oblicz w zeszycie.

a) $-6\frac{11}{30} + 16 - 7\frac{4}{9} + 15 - 9\frac{19}{30}$

b) $5\frac{7}{11} - 1\frac{5}{22} + 25\frac{7}{11} - 31\frac{3}{22}$

c) $3\frac{1}{6} + 3\frac{5}{9} - 4 + 13\frac{1}{3} - 2\frac{13}{18}$

d) $7\frac{3}{8} + 4\frac{3}{10} - 7\frac{3}{8} + 5\frac{1}{2} - \frac{4}{5}$

14. Wykonaj działania w zeszycie.

a) $6,8 - 3,52$

b) $-6,1 - (-3,7)$

c) $-9,28 + (-7,41)$

d) $4,2 - (-5,85)$

e) $-1,1 + 3,2$

f) $-7,5 - 32,1$

g) $0,5 \cdot (-1,9)$

h) $(-8,4) \cdot (-2,1)$

i) $(-12,8) \cdot (-10,5)$

j) $(-3,375) : 0,009$

k) $(-4,32) : (-3,6)$

l) $40,17 : (-1,3)$

15. Do iloczynu liczb $\left(-2\frac{4}{9}\right)$ i $\left(-\frac{1}{2}\right)$ dodaj kwadrat liczby $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

16. Oblicz w zeszycie iloczyn liczby $-1\frac{1}{4}$ przez iloraz liczb $12\frac{2}{5}$ i $-15\frac{1}{2}$.

17. Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb: $-2,5$; $-0,5$; $1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; 3 ?

18. Oblicz w zeszycie średnią temperaturę pierwszej dekady stycznia, wiedząc, że w ciągu tego okresu 4 razy temperatura wynosiła $-9,5^{\circ}\text{C}$, 2 razy $-11,5^{\circ}\text{C}$, 3 razy -15°C i raz -6°C .

19. Znajdź liczbę, której połowa stanowi wartość wyrażenia

$$1,5 + (-2,25) \cdot \frac{4}{9} - 2\frac{1}{2} : (-2) - 3.$$

20. Oblicz w zeszycie 0,2 wartości wyrażenia
$$\frac{(0,5 - 3) \cdot \left(4\frac{1}{2} - 5\right)}{\left(0,5 - \frac{2}{3}\right) : \frac{1}{3}}.$$

21. Oblicz w zeszycie liczbę, której 1,5 wynosi tyle, co $\left(-\frac{5}{11}\right)$ wartości liczbowej wyrażenia: $\left(-6,3 + 2\frac{1}{3} : \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{12}\right).$

22. Znajdź sumę iloczynów $(-4,5) \cdot \frac{5}{9}$ oraz $\left(-6\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right).$

23. Znajdź różnicę ilorazów $(-11,2) : 5\frac{3}{5}$ oraz $\left(-2\frac{1}{3}\right) : \left(-1\frac{2}{3}\right).$



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Wynikiem działania $\frac{32 - 18 + (-6)}{-19 + (-3) - 2}$ jest:

A. $-\frac{1}{3}$

B. $-\frac{5}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

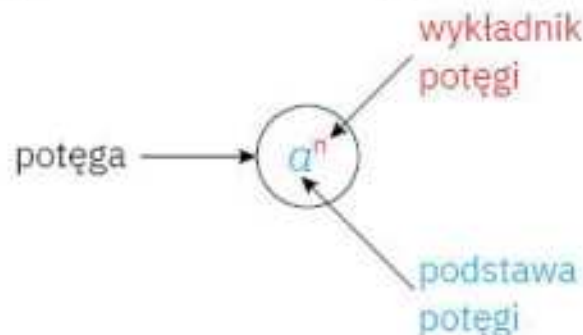
D. $\frac{5}{6}$

2. Które z liczb 2, 3, 4, 5, 9, 10 są dzielnikami liczby 24713280?
 A. 2, 5, 10 B. 2, 3, 4, 5 C. 2, 5, 9, 10 D. wszystkie
3. Wynikiem działania $\frac{(-3) \cdot (2-7) + (-8) : (-11+19)}{(64-32) : (-16)}$ jest:
 A. -3 B. -5 C. -7 D. -9
4. Jeżeli do iloczynu liczb $\left(-7\frac{3}{11}\right)$ i $\left(-5\frac{1}{2}\right)$ dodamy ich różnicę, to otrzymamy:
 A. $-14\frac{1}{31}$ B. $38\frac{5}{22}$ C. $17\frac{2}{3}$ D. $1\frac{5}{6}$
5. Średnia arytmetyczna liczb $1\frac{3}{7}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{4}$, 3 wynosi:
 A. 2 B. 5 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

1.3. Potęga o wykładniku całkowitym

Wykładnik naturalny

Mnożenie jednakowych czynników można zastąpić potęgowaniem.



$$a^0 = 1, \text{ dla } a \neq 0$$

Każda liczba, różna od zera, podniesiona do potęgi 0 jest równa 1.

$$a^1 = a$$

Każda liczba podniesiona do potęgi 1 jest tą samą liczbą.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}} = a^n, \text{ dla } n \geq 2$$

Iloczyn $a \cdot a$ zapisujemy a^2 i czytamy „ a do potęgi drugiej”. Podobnie $a \cdot a \cdot a$ oznaczamy a^3 i czytamy „ a do potęgi trzeciej”. Druga potęga liczby dodatniej a jest równa polu kwadratu o boku a , stąd wyrażenie a^2 czytamy „ a do kwadratu”. Ponieważ trzecia potęga liczby dodatniej a^3 jest równa objętości sześcianu o krawędzi a , to czytamy „ a do sześcianu”. Potęga liczby a o wykładniku naturalnym $n \geq 2$ jest iloczynem n czynników, z których każdy równy jest liczbie a .

Ćwiczenie 1.

Zapisz iloczyny o jednakowych czynnikach w postaci potęgi.

a) $(-1,1) \cdot (-1,1) \cdot (-1,1)$ b) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7}$ c) $(a+b) \cdot (a+b)$ d) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

Rozwiązanie:

a) $(-1,1) \cdot (-1,1) \cdot (-1,1) = (-1,1)^3$ b) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^5$
c) $(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2$ d) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$

Ćwiczenie 2.

Oblicz.

a) $(81,4)^0$ b) $\left(13\frac{4}{9}\right)^1$ c) $\left(-8\frac{3}{4}\right)^2$ d) 0^3 e) $(-1)^4$ f) 3^5 g) 2^6

Rozwiązanie:

a) $(81,4)^0 = 1$ b) $\left(13\frac{4}{9}\right)^1 = 13\frac{4}{9}$ c) $\left(-8\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{35}{4}\right) \cdot \left(-\frac{35}{4}\right) = \frac{1225}{16} = 76\frac{9}{16}$
d) $0^3 = 0$ e) $(-1)^4 = 1$ f) $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ g) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

Potęga liczby nieujemnej (o wykładniku naturalnym różnym od zera) jest zawsze liczbą nieujemną.

Potęga liczby ujemnej jest liczbą dodatnią, gdy wykładnik potęgi jest liczbą naturalną parzystą, zaś liczbą ujemną, gdy wykładnik potęgi jest liczbą naturalną nieparzystą.

$$(-2)^4 = 16 \quad (-2)^5 = -32 \quad \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$$

Własności potęg



Mnożąc potęgi o tej samej podstawie, podstawę pozostawiamy bez zmian, a wykładniki potęg dodajemy.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } n, m \in \mathbb{N}$$

Dzieląc potęgi o tej samej podstawie, podstawę pozostawiamy bez zmian, a wykładniki potęg odejmujemy.

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } n, m \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq m$$



Potęgując potęgę, podstawę pozostawiamy bez zmian, a wykładniki potęgi mnożymy.

$$(a^n)^m = a^{nm}, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } n, m \in \mathbb{N}$$

Potęgując iloczyn, podnosimy do potęgi każdy czynnik oddzielnie, a otrzymane wyniki mnożymy.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \text{ gdzie } a, b \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

Potęgując iloraz, podnosimy do potęgi osobno dzielną i dzielnik, a otrzymane wyniki dzielimy.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ gdzie } a, b \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

Ćwiczenie 3.

Wykonaj działania na potęgach.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 5^3 \cdot 5^4 & \text{b) } \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^l & \text{c) } 2^6 : 2^4 & \text{d) } \frac{x^7}{x^4}, x \neq 0 \quad \text{e) } (4^3)^2 \\ \text{f) } \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^5\right]^3 & \text{g) } 3^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 & \text{h) } (-4)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot 2^2 & \text{i) } 8^6 : 4^6 \quad \text{j) } \frac{12^3}{4^3} \end{array}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7 & \text{b) } \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^l = \left(\frac{5}{6}\right)^{k+l} \\ \text{c) } 2^6 : 2^4 = 2^{6-4} = 2^2 & \text{d) } \frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3, x \neq 0 \\ \text{e) } (4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6 & \text{f) } \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^5\right]^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{5 \cdot 3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{15} \\ \text{g) } 3^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(3 \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \text{h) } (-4)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot 2^2 = \left(-4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\right)^2 = (-1)^2 \\ \text{i) } 8^6 : 4^6 = (8 : 4)^6 = 2^6 & \text{j) } \frac{12^3}{4^3} = \left(\frac{12}{4}\right)^3 = 3^3 \end{array}$$

Wykładnik całkowity

Potęgi o wykładnikach całkowitych ujemnych stosujemy do zapisu wielkości mniejszych od jedności lub wielkości fizycznych.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Z powyższego wzoru wynika, że: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0$ i $b \neq 0$

Ćwiczenie 4.

Oblicz potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym.

a) 5^{-4} b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ c) $(0,21)^{-1}$ d) $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-2}$

Rozwiązanie:

a) $5^{-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$

c) $(0,21)^{-1} = \left(\frac{21}{100}\right)^{-1} = \frac{100}{21} = 4\frac{16}{21}$

d) $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{11}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{11}\right)^2 = \frac{16}{121}$

Ćwiczenie 5.

Zapisz podane liczby za pomocą potęgi o wykładniku ujemnym.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^3$ b) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^2$

Rozwiązanie:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \left(\frac{7}{3}\right)^{-3} = \left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}$

b) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{11}{5}\right)^2 = \left(-\frac{5}{11}\right)^{-2}$

Przy działaniach na potęgach o wykładnikach całkowitych wszystkie własności potęg są zachowane.

Porównując potęgi, zwracamy uwagę na ich podstawy i wykładniki.

Z dwóch potęg o tej samej podstawie większej od 1 większa jest ta, której wykładnik jest większy.

Z dwóch potęg o tej samej podstawie większej od 0 i mniejszej od 1 większa jest ta, której wykładnik jest mniejszy.



Ćwiczenie 6.

Porównaj potęgi o tych samych podstawach.

a) 2^3 i 2^4

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ i $\left(\frac{3}{5}\right)^4$

Rozwiązanie:

a) $2^3 < 2^4$, bo $8 < 16$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 > \left(\frac{3}{5}\right)^4$, bo $\frac{27}{125} > \frac{81}{625}$

Z dwóch potęg o dodatniej podstawie i tym samym wykładniku większa jest ta, której podstawa jest większa.



Ćwiczenie 7.

Porównaj potęgi o tych samych wykładnikach.

a) 2^3 i 3^3

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ i $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

Rozwiązanie:

a) $2^3 < 3^3$, bo $8 < 27$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 < \left(\frac{3}{4}\right)^3$, bo $\frac{8}{27} < \frac{27}{64}$

Notacja wykładnicza to zapis bardzo dużych lub bardzo małych liczb w postaci iloczynu liczby większej od 1 i mniejszej od 10 oraz potęgi liczby 10.



Ćwiczenie 8.

Zapisz liczby w notacji wykładniczej.

a) 3 800 000 000 000

b) 27 000 000

c) 0,000000156

d) 0,00000000000000072

Rozwiązanie:

a) $3\,800\,000\,000\,000 = 3,8 \cdot 10^{12}$

b) $27\,000\,000 = 2,7 \cdot 10^7$

c) $0,000000156 = 1,56 \cdot 10^{-7}$

d) $0,00000000000000072 = 7,2 \cdot 10^{-15}$

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Przedstaw w postaci jednej potęgi.

$$\text{a) } 4^7 \cdot 4^3; \quad (-1,2) \cdot (-1,2)^3; \quad \left(\frac{3}{11}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^4; \quad \left(2\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\text{b) } 3^2 \cdot 3^k; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^b; \quad (-x)^2 \cdot (-x)^3 \cdot (-x)^y, x \neq 0$$

$$(ab)^7 \cdot (ab)^x \cdot (ab)^y, ab \neq 0$$

$$\text{c) } \frac{(-2,3)^7}{(-2,3)^5}; \quad \left(\frac{3}{17}\right)^5 : \left(\frac{3}{17}\right)^3; \quad \frac{(-5)^x}{(-5)^y}; \quad a^{12} : a^9, a \neq 0$$

2. Oblicz w zeszycie.

$$\text{a) } 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\text{c) } (-1)^7 \cdot (-1)^8 \cdot (-1)^3$$

$$\text{d) } 9^{11} : 9^9$$

$$\text{e) } \left(3\frac{1}{2}\right)^{20} : \left(3\frac{1}{2}\right)^{18}$$

$$\text{f) } (-1,1)^5 : (-1,1)^3$$

$$\text{g) } 5^{11} \cdot 5^8 : 5^{16}$$

$$\text{h) } (-1,2)^7 : (-1,2)^5 \cdot (-1,2)^0$$

$$\text{i) } \left(-2\frac{7}{9}\right)^{12} \cdot \left(-2\frac{7}{9}\right)^7 : \left(-2\frac{7}{9}\right)^{18}$$

3. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

$$\text{a) } y^5 \cdot y^3$$

$$\text{b) } k^2 \cdot k \cdot k^3$$

$$\text{c) } \frac{z^5}{z^4}, z \neq 0$$

$$\text{d) } \frac{r^{15}}{r^{12}}, r \neq 0$$

$$\text{e) } d^7 \cdot d^8 : d^{12}, d \neq 0$$

$$\text{f) } \frac{x^3 \cdot x^5}{x^8}, x \neq 0$$

$$\text{g) } a^9 : a^7 \cdot a^3, a \neq 0$$

$$\text{h) } \frac{b^8 \cdot b^5}{b^{12} : b^2}, b \neq 0$$

4. Oblicz w zeszycie wartość wyrażenia $\frac{y^4 \cdot y^9}{y^{18} : y^{10}}$ dla $y = 0,2$.

5. Zapisz w zeszycie w postaci jednej potęgi.

$$\text{a) } (5^2)^3$$

$$\left[(-2)^3\right]^2$$

$$\left[(2,1)^7\right]^5$$

$$\text{b) } \left[\left(\frac{3}{4}\right)^8\right]^2$$

$$\left[\left(-\frac{8}{11}\right)^3\right]^4$$

$$\left[\left(2\frac{3}{5}\right)^2\right]^7$$

$$\text{c) } (b^2)^3$$

$$\left[(a^3)^2\right]^5$$

$$\left[(2k)^3\right]^2$$

$$\text{d) } \left[(x-y)^5\right]^2$$

$$(b^c)^d, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

$$\left\{\left[(-3)^2\right]^y\right\}^x$$

6. Oblicz w zeszycie iloraz sumy liczb $a = (3,6)^7 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^7 : 2^7$ i $b = 10^5 : (-22)^5 \cdot \left(2\frac{1}{5}\right)^5$ przez ich różnicę.

7. Wykonaj obliczenia w zeszycie.

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 6^4 - \left(-2\frac{1}{2}\right)^3 : \left(1\frac{1}{4}\right)^3$ b) $(4,5)^2 : (-1,5)^2 + (0,1)^4 : \left(\frac{1}{20}\right)^4$

c) $(3,2)^3 \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^3 + (-2,4)^2 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^2$ d) $\left(-7\frac{4}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^2 + (-2,5)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2$

8. Odległość Ziemi od Słońca wynosi około $1,5 \cdot 10^8$ km, a odległość Neptuna od Słońca – $4,5 \cdot 10^9$ km. Ile razy odległość Ziemi od Słońca jest mniejsza od odległości Neptuna od Słońca?

9. Zapisz podane wielkości w postaci notacji wykładniczej.

Masa cząsteczki wody – 0,000 000 000 000 000 000 000 000 03 kg

Masa protonu – 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 672 6 kg

Masa elektronu – 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 95 kg

10. Pamięć operacyjna polskiego komputera Odra 1024 miała pojemność 32 kilosłów. Jedno kilosłowo to 1024 bajty. Podaj pojemność pamięci operacyjnej w bajtach, używając potęgi liczby 2.

11. Jeżeli na pierwszym polu szachownicy położymy 2 ziarenka pszenicy, na drugim – 4 ziarenka, na trzecim – 8, a na każdym następnym dwa razy więcej niż na poprzednim, to ile ziaren położymy na ostatnim polu? Uwzględnij wszystkie 64 pola szachownicy. Wynik zapisz w zeszycie w postaci potęgi liczby 2.

12. Korzystając z własności działań na potęgach, oblicz w zeszycie.

a) $(-2)^3 \cdot (-2)^5$ b) $3^3 \cdot (-3)^3$ c) $\frac{2^5 \cdot 5^5}{10^3}$

d) $\left[(-1)^{11}\right]^2 : \left[(-1)^4\right]^3 \cdot (-1)^7$ e) $\left(1\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^7$ f) $\frac{35^4 : 7^4}{(5^3 : 5^2)^2}$

g) $(4 \cdot 4^2)^3 : (4^8 : 4^5)^2$ h) $\left[\left(1\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 : \left(\frac{4}{3}\right)^6$ i) $\frac{(-12)^8 \cdot (-12)^7}{(-12)^{14}}$

13. Oblicz w zeszycie.

a) $10^{-2} \cdot 10^{-4} \cdot 10^7$ b) $\left[3^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-2}$ c) $\left[(-5)^{-2} : (-5)^{-3}\right]^{-2}$

d) $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-3}\right]^{-11}$ e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} - (7,628 - 7)^0$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(1\frac{1}{2}\right)^4$

14. Oblicz w zeszycie wartość wyrażenia $\frac{8^{-4} : 2^{-2}}{(32^3 \cdot 16^{-2})^{-2}}$.
15. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej: $(-2)^{-2}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $(-2)^{-3}$.
16. Zapisz w zeszycie liczbę $5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-3}$ bez użycia potęg.
17. Działania wykonywane na przykładach a) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{15} \cdot \left(-2\frac{1}{4}\right)^{15}$ oraz b) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-3} : (2,5)^{-3}$ dały ten sam wynik równy 1. Czy oba działania wykonano poprawnie? Zapisz obliczenia w zeszycie.
18. Czy pole kwadratu o boku długości $6 \cdot 10^3$ cm jest równe polu prostokąta o bokach $3 \cdot 10^2$ cm i $1,2 \cdot 10^5$ cm? Zapisz obliczenia w zeszycie.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Działanie $\left(2\frac{1}{15}\right)^2 \cdot \left(2\frac{1}{15}\right)^7 \cdot \left(2\frac{1}{15}\right)^{12}$ zapisane w postaci jednej potęgi to:
- A. $\left(2\frac{1}{15}\right)^{20}$ B. $\left(2\frac{1}{15}\right)^{21}$ C. $\left(\frac{31}{15}\right)^{19}$ D. $\left(\frac{31}{15}\right)^{18}$
2. Jeżeli sprowadzimy wyrażenie $\frac{y^{13} : y^5}{y^2 \cdot y^{12}}$, $y \neq 0$ do najprostszej postaci, to otrzymamy:
- A. y^6 B. y^{12} C. y^{-6} D. y^{-12}
3. Światło porusza się w próżni z prędkością $3 \cdot 10^5$ km/s. Drogę od Słońca do Ziemi światło pokonuje w ciągu 8 minut 20 sekund. Odległość ta zapisana w notacji wykładniczej wynosi:
- A. $1,5 \cdot 10^8$ km B. $1,5 \cdot 10^9$ km C. $1,5 \cdot 10^7$ km D. $1,5 \cdot 10^{10}$ km
4. Obliczając wartość wyrażenia $\frac{35^{12} : 5^{12}}{(7^3 \cdot 7^2)^2}$, otrzymamy:
- A. 7 B. 14 C. 21 D. 49
5. Porządkując liczby: $(-5)^{-2}$; $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-3}$; $(-4)^{-3}$ malejąco, otrzymamy:
- A. $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-3} > \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} > (-5)^{-2} > (-4)^{-3}$ B. $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} > \left(-\frac{1}{8}\right)^{-3} > (-5)^{-2} > (-4)^{-3}$
- C. $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} > (-5)^{-2} > (-4)^{-3} > \left(-\frac{1}{8}\right)^{-3}$ D. $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} > (-4)^{-3} > (-5)^{-2} > \left(-\frac{1}{8}\right)^{-3}$

1.4. Pierwiastek arytmetyczny

Pierwiastkiem drugiego stopnia (kwadratowym) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , której kwadrat jest równy liczbie a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ bo } b^2 = a, a \geq 0, b \geq 0$$

Pierwiastkiem trzeciego stopnia (sześciennym) z liczby a nazywamy taką liczbę b , której sześćcian jest równy liczbie a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ bo } b^3 = a$$

Ćwiczenie 1.

Oblicz pierwiastki.

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt{144}$

c) $\sqrt{0,16}$

d) $\sqrt{\frac{9}{25}}$

e) $\sqrt[3]{8}$

f) $\sqrt[3]{-125}$

g) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

h) $\sqrt[3]{-0,064}$

Rozwiązanie:

a) $\sqrt{4} = 2$, bo $2^2 = 4$

b) $\sqrt{144} = 12$, bo $12^2 = 144$

c) $\sqrt{0,16} = 0,4$, bo $(0,4)^2 = 0,16$

d) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$, bo $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

e) $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$

f) $\sqrt[3]{-125} = -5$, bo $(-5)^3 = -125$

g) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, bo $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

h) $\sqrt[3]{-0,064} = -0,4$, bo $(-0,4)^3 = -0,064$

Z określenia pierwiastka wynika, że:

$$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0, \sqrt{b^2} = |b| \text{ oraz } (\sqrt[3]{c})^3 = \sqrt[3]{c^3} = c.$$



Własności pierwiastków



Pierwiastek z iloczynu jest równy iloczynowi pierwiastków tego samego stopnia każdego z czynników.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$
$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek z ilorazu jest równy ilorazowi pierwiastków tego samego stopnia dzielnej i dzielnika.

$$\sqrt{a:b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a}:\sqrt{b}, \quad a \geq 0, b > 0$$
$$\sqrt[3]{a:b} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}, \quad b \neq 0$$

Ćwiczenie 2.

Oblicz, stosując własności pierwiastków.

- | | | | |
|---------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $\sqrt{16 \cdot 25}$ | b) $\sqrt{25:36}$ | c) $\sqrt{98} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ | d) $\sqrt{1,21}$ |
| e) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ | f) $\sqrt[3]{64:27}$ | g) $\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{3}$ | h) $\sqrt[3]{0,027}$ |

Rozwiązanie:

- | | |
|---|---|
| a) $\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$ | b) $\sqrt{25:36} = \sqrt{25}:\sqrt{36} = 5:6 = \frac{5}{6}$ |
| c) $\sqrt{98} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{98 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$ | d) $\sqrt{1,21} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{100}} = \frac{11}{10} = 1,1$ |
| e) $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$ | f) $\sqrt[3]{64:27} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ |
| g) $\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(-9) \cdot 3} = \sqrt[3]{-27} = -3$ | h) $\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{3}{10} = 0,3$ |

Nie zawsze liczba znajdująca się pod pierwiastkiem jest kwadratem (sześcianiem) liczby wymiernej. Możemy wtedy tę liczbę zapisać jako iloczyn liczb, z których z co najmniej jednej można następnie obliczyć pierwiastek kwadratowy (sześcienny) będący liczbą wymierną. Tę czynność nazywamy **wylączaniem czynnika przed znak pierwiastka**.

Ćwiczenie 3.

Wylącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{720}$

c) $\sqrt[3]{40}$

d) $\sqrt[3]{-108}$

Rozwiązanie:

a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{720} = \sqrt{144 \cdot 5} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{-27 \cdot 4} = \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$

Przy wylączaniu czynnika przed znak pierwiastka można zastosować rozkład liczby na czynniki pierwsze.

Ćwiczenie 4.

Wylącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{250}$

b) $\sqrt[3]{96}$

Rozwiązanie:

a) $\sqrt{250}$

b) $\sqrt[3]{96}$

Rozkładamy liczbę na czynniki pierwsze i łączymy w pary liczby, które się powtarzają:

$$\begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rangle \\ \end{array}$$

Rozkładamy liczbę na czynniki pierwsze i łączymy w trójki liczby, które się powtarzają:

$$\begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} \\ \rangle \\ \rangle \\ \\ \\ \end{array}$$

$\sqrt{250} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{25 \cdot 10} = 5\sqrt{10}$

$\sqrt[3]{96} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[3]{8 \cdot 12} = 2\sqrt[3]{12}$

Czynnością odwrotną do wylączania czynnika przed znak pierwiastka jest **włączanie czynnika pod znak pierwiastka**.

Ćwiczenie 5.

Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $2\sqrt{21}$

b) $4\sqrt[3]{3}$

Rozwiązanie:

a) $2\sqrt{21} = \sqrt{2^2 \cdot 21} = \sqrt{4 \cdot 21} = \sqrt{84}$

b) $4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{64 \cdot 3} = \sqrt[3]{192}$

Pierwiastki będące liczbami niewymiernymi mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe. Zatem do obliczeń przyjmujemy szacunkową wartość tych pierwiastków z żadaną dokładnością.

Ćwiczenie 6.

Oszacuj wartości pierwiastków z dokładnością do jedności.

a) $\sqrt{13}$

b) $\sqrt[3]{18}$

Rozwiązanie:

a) $\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$, czyli $3 < \sqrt{13} < 4$

b) $\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{18} < \sqrt[3]{27}$, czyli $2 < \sqrt[3]{18} < 3$

Jeżeli w mianowniku ułamka znajduje się liczba niewymierna, należy ten ułamek przekształcić tak, aby w mianowniku znalazła się liczba wymierna. Tę czynność nazywamy **usuwaniem niewymierności z mianownika ułamka**.

Ćwiczenie 7.

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$

Rozwiązanie:

a) $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4^1 \cdot \sqrt{2}}{2_1} = 2\sqrt{2}$

b) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{6^1 \cdot \sqrt[3]{9}}{3_1} = 2\sqrt[3]{9}$



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Oblicz w zeszycie pierwiastki.

a) $\sqrt{0}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{0,81}$; $\sqrt{\frac{25}{36}}$; $\sqrt{\frac{169}{196}}$; $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; $\sqrt{3\frac{13}{36}}$

b) $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{0,125}$; $\sqrt[3]{-0,008}$; $\sqrt[3]{\frac{64}{729}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$; $\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$

2. Oblicz w zeszycie, stosując odpowiednią własność.

a) $(\sqrt{2})^2$ b) $(\sqrt{16})^2$ c) $(\sqrt{0,25})^2$ d) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$

e) $(\sqrt[3]{15})^3$ f) $(\sqrt[3]{125})^3$ g) $(\sqrt[3]{-8})^3$ h) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)^3$

3. Oblicz w zeszycie wartości wyrażeń arytmetycznych.

a) $\frac{\sqrt[3]{216} - \sqrt{64}}{\sqrt{49}}$ b) $\frac{\sqrt{0,64} \cdot \sqrt{6\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{8}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} - \sqrt{2\frac{1}{4}}}{3\sqrt{4} - \sqrt[3]{27}}$ d) $\sqrt{3\frac{22}{49}} + \frac{0,7}{\sqrt[3]{0,343}} - 1\frac{3}{7}$

4. Kwadrat i trójkąt mają równe pola. Podstawa trójkąta ma długość 10 cm, a wysokość odpowiadająca tej podstawie wynosi 5 cm. Oblicz w zeszycie długość boku kwadratu.
5. Sześcian i prostopadłościan mają równe objętości. Krawędzie prostopadłościanu mają długości: 4 cm, 6 cm, 9 cm. Oblicz w zeszycie długość krawędzi sześcianu.

6. Oblicz w zeszycie wartość wyrażenia
$$\frac{(\sqrt{3})^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - (\sqrt[3]{-2})^3}{\left(\sqrt{1\frac{4}{13}}\right)^2}.$$

7. Oblicz w zeszycie, stosując odpowiednie własności.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$	c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$	d) $\sqrt{2} : \sqrt{8}$
e) $\sqrt{8} : \sqrt{50}$	f) $\sqrt{\frac{1}{5}} : \sqrt{1\frac{1}{4}}$	g) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{3}}$	h) $\sqrt[3]{27} : 64$
i) $\sqrt[3]{125} : 8$	j) $\sqrt{0,2} \cdot \sqrt{1\frac{1}{4}}$	k) $\sqrt[3]{-10} : \sqrt[3]{0,01}$	l) $\sqrt[3]{-0,008} : (-0,001)$

8. Oblicz w zeszycie średnią geometryczną liczb a i b (czyli $\sqrt{a \cdot b}$).

a) $a = 3, b = 27$ b) $a = 8, b = 18$ c) $a = 5, b = 20$

9. Średnia geometryczna dwóch liczb wynosi 25. Jedna z nich to 125. Oblicz w zeszycie drugą z liczb.

10. Oblicz w zeszycie wartość wyrażenia $\sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt[3]{27}}}$.

11. Wykonaj działania w zeszycie.

a) $\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32})$	b) $\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{27} - \sqrt{3} + \sqrt{48})$
c) $\sqrt[3]{-2} \cdot (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{108})$	d) $\sqrt[3]{3} \cdot (\sqrt[3]{-9} - \sqrt[3]{72} + 2\sqrt[3]{-243})$

12. Oceń prawdziwość zdania: „Spośród liczb: $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$; $10 \cdot \sqrt{0,04}$; $\sqrt[3]{0,064}$; $25 \cdot \sqrt{\frac{1}{25}}$, najmniejszą jest $\sqrt[3]{0,064}$ ”.

13. Wykonaj w zeszycie działanie $\sqrt{\frac{1,6}{10}} + \sqrt[3]{\frac{2,7}{100}}$.

14. Wykonaj w zeszycie obliczenia zgodnie z prawami działań.

a) $(\sqrt{50} - 3\sqrt{8} + \sqrt{32}) : \sqrt{2}$	b) $(\sqrt{27} + \sqrt{243}) : \sqrt{3}$
c) $(4\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}) : \sqrt[3]{2}$	d) $(\sqrt[3]{625} + 2\sqrt[3]{320} - 5\sqrt[3]{40}) : \sqrt[3]{-5}$

15. Wylącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{12}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{98}$; $\sqrt{108}$; $\sqrt{128}$; $\sqrt{175}$; $\sqrt{500}$; $\sqrt{70000}$; $\sqrt{1,25}$; $\sqrt{0,72}$
b) $\sqrt[3]{135}$; $\sqrt[3]{162}$; $\sqrt[3]{243}$; $\sqrt[3]{432}$; $\sqrt[3]{625}$; $\sqrt[3]{648}$; $\sqrt[3]{1512}$; $\sqrt[3]{3456}$

16. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

- a) $2\sqrt{2}$ b) $4\sqrt[3]{3}$ c) $6\sqrt{2}$ d) $20\sqrt[3]{0,1}$
e) $5\sqrt{11}$ f) $-10\sqrt[3]{0,01}$ g) $0,2\sqrt{30}$ h) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{-4}$

17. Oblicz w zeszycie wartość wyrażenia $5\sqrt{2} + 6\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$.

18. Pomiedzy jakimi kolejnymi liczbami całkowitymi na osi liczbowej znajduje się każda z następujących liczb?

- a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{12}$
d) $\sqrt{90}$ e) $-\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{-10}$

19. Ile wynosi obwód prostokąta o bokach długości $a = (3 + \sqrt{5})$ cm i $b = 2$ cm?

20. Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

- a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ e) $\frac{8}{5\sqrt{8}}$



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Obliczając wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{0,81} : \sqrt{2\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{125}}$, otrzymamy:

- A. $\frac{2}{25}$ B. $\frac{3}{25}$ C. 0,25 D. 0,04

2. Iloczyn liczb $a = \sqrt{3} \cdot \left(2\sqrt{27} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{0,27} \right)$ i $b = \sqrt[3]{-4} \cdot \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} \right)$ wynosi:

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt[3]{5}$ D. 0

3. Wylączając czynnik przed znak pierwiastka z liczb $\sqrt{275}$ i $\sqrt[3]{832}$, otrzymamy:

- A. $5\sqrt{11}$ i $4\sqrt[3]{13}$ B. $4\sqrt{11}$ i $5\sqrt[3]{13}$ C. $5\sqrt{13}$ i $4\sqrt[3]{11}$ D. $4\sqrt{13}$ i $5\sqrt[3]{11}$

4. Obliczając wartość wyrażenia $5\sqrt{3} + 6\sqrt{27} + 3\sqrt{48}$, otrzymamy wynik równy:

- A. $17\sqrt{3}$ B. $28\sqrt{3}$ C. $35\sqrt{3}$ D. $45\sqrt{3}$

5. Który z warunków jest poprawny dla $a = -\sqrt{111}$?

- A. $10 < a < 11$ B. $-9 < a < -8$ C. $9 < a < 12$ D. $-11 < a < -10$

6. Usuwając niewymierność z mianownika ułamków $\frac{5}{\sqrt{11}}$ i $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$, otrzymamy:

- A. $\frac{\sqrt{11}}{11}$ i $\frac{\sqrt[3]{81}}{3}$ B. $\frac{5\sqrt{11}}{11}$ i $\frac{\sqrt[3]{81}}{3}$ C. $\frac{5\sqrt{11}}{11}$ i $\frac{\sqrt[3]{81}}{9}$ D. $\frac{\sqrt{11}}{11}$ i $\frac{\sqrt[3]{81}}{9}$

1.5. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych

Działania w zbiorze liczb rzeczywistych należy wykonywać w określonej kolejności. Najpierw potęgujemy i pierwiastkujemy, następnie mnożymy i dzielimy, a na końcu dodajemy i odejmujemy. Jeżeli w wyrażeniu występują nawiasy, to obliczenia zaczynamy od tych działań, które są w nawiasach.

Ćwiczenie 1.

Oblicz wartość liczbową wyrażen.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(-2\frac{1}{5} + 3\frac{3}{4} \right) - [1,3 - (-2,5)] & \text{b)} \frac{(-4)^3}{\sqrt{25} - \sqrt[3]{1000}} \\ \text{c)} \left(-7 + 6\frac{1}{3} \right) \cdot \left(9\frac{2}{5} - 11,8 \right) + 5,5 & \text{d)} -2 \cdot \left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - 2^2 : 1\frac{1}{3} \right) \end{array}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \left(-2\frac{1}{5} + 3\frac{3}{4} \right) - [1,3 - (-2,5)] = \left(-\frac{44}{20} + \frac{75}{20} \right) - 3,8 = 1,55 - 3,8 = -2,25 \\ \text{b)} \frac{(-4)^3}{\sqrt{25} - \sqrt[3]{1000}} = \frac{-64}{5 - 10} = 12\frac{4}{5} \\ \text{c)} \left(-7 + 6\frac{1}{3} \right) \cdot \left(9\frac{2}{5} - 11,8 \right) + 5,5 = \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot (-2,4) + 5,5 = 1,6 + 5,5 = 7,1 \\ \text{d)} -2 \cdot \left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - 2^2 : 1\frac{1}{3} \right) = -2 \cdot \left(\sqrt{\frac{25}{16}} - 4 \cdot \frac{3}{4} \right) = -2 \cdot \left(\frac{5}{4} - 3 \right) = -2 \cdot \left(-1\frac{3}{4} \right) = 3\frac{1}{2} \end{array}$$

Ćwiczenie 2.

Oblicz liczby a , b i c , a następnie uporządkuj je rosnąco.

$$a = \frac{\left(5\frac{3}{7} - 6,8 \right) : \frac{8}{35}}{0,4 \cdot \sqrt[3]{125}} \quad b = (-1,5 - 4,5) : \sqrt{\frac{1}{64}} + 2 \cdot 5^2 \quad c = 3 \cdot \left(1\frac{1}{3} \right)^3 - 9^0 \cdot 7\frac{1}{9}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{l} a = \frac{\left(5\frac{3}{7} - 6,8 \right) : \frac{8}{35}}{0,4 \cdot \sqrt[3]{125}} = \frac{-\frac{48}{35} \cdot \frac{35}{8}}{2} = -3 \\ b = (-1,5 - 4,5) : \sqrt{\frac{1}{64}} + 2 \cdot 5^2 = -6 \cdot 8 + 50 = 2 \\ c = 3 \cdot \left(1\frac{1}{3} \right)^3 - 9^0 \cdot 7\frac{1}{9} = 3 \cdot \frac{64}{27} - \frac{64}{9} = 0 \\ a < c < b \end{array}$$

Ćwiczenie 3.

Znajdź liczbę, której $\frac{3}{4}$ jest równe wartości liczbowej wyrażenia

$$\frac{(-1,3) \cdot 3 + 1,8 : (-0,6)}{(-0,2 + 0,1 \cdot 5) - (-2)}.$$

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia:

$$\frac{(-1,3) \cdot 3 + 1,8 : (-0,6)}{(-0,2 + 0,1 \cdot 5) - (-2)} = \frac{-3,9 - 3}{(-0,2 + 0,5) + 2} = \frac{-6,9}{2,3} = -3$$

Określamy niewiadomą: x – szukana liczba

Układamy i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{3}{4}x = -3 \quad | : \frac{3}{4}$$

$$x = -3 \cdot \frac{4}{3}$$

$$x = -4$$

Odpowiedź: Szukana liczba to -4 .



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Oblicz w zeszycie.

a) $-(-0,1)^3 - (-1,3)^2$

b) $-5\frac{5}{6} : \left(-3\frac{1}{3}\right) + \left(-5\frac{3}{4}\right) : 2\frac{7}{8}$

c) $\left(5\frac{2}{3} - 7\frac{1}{2}\right)^2 : 3\frac{2}{3}$

d) $\sqrt[3]{3,6 - (-4,4)} + \sqrt{3,6 - (-4,4)}$

2. Oblicz w zeszycie 125% wartości wyrażenia $\frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{5}}{-3} : 0,6$.

3. Sumę liczb $6,2$ i $-3,8$ pomnóż w zeszycie przez ich różnicę.

4. Oblicz w zeszycie średnią arytmetyczną liczb $5,5$; $4\frac{4}{5}$; $-3\frac{1}{2}$; $-2,3$; 4 .

5. Oblicz w zeszycie wartości liczbowe wyrażeń.

a) $7^0 + (-5)^2 - 2^3 - \sqrt{36}$

b) $(2,6)^{10} : \left(2\frac{3}{5}\right)^{10} - (\sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{8})$

c) $(2^{10} : 2^9 + 1) \cdot (\sqrt{81} - \sqrt{100})$

d) $2^3 + 3^2 + 4^1$

6. Oblicz w zeszycie.

$$\text{a) } \frac{-5,2 : 1,3 - (-\sqrt{4})}{1 + 0,4 \cdot 10}$$

$$\text{b) } \frac{0,3 \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right) - (-1,2) \cdot 3}{\frac{5}{6} : \left(-\sqrt{\frac{4}{9}}\right) + (0,5)^2}$$

7. Znajdź liczbę, której połowa jest równa wartości podanego wyrażenia

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(-2\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - 2\frac{1}{2} : (-2) + 3.$$

8. Oblicz w zeszycie, o ile liczba a jest mniejsza od liczby b , jeśli:

$$a = -2,8 : 1,4 + 1\frac{1}{5} \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right) \text{ i } b = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{4} + 1 : 1\frac{3}{5}.$$

9. Dane są liczby: $a = (-0,5) : \frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} \cdot (-0,8)$ oraz $b = -1\frac{1}{4} \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right) - \frac{2,1}{0,7}$.

Wykonaj w zeszycie zadania.

a) Oblicz, jakim procentem liczby a jest liczba b .

b) Oblicz, jakim procentem liczby b jest liczba a .

10. Oblicz w zeszycie iloczyn liczb m i n , jeśli $m = 0,4 - \frac{\sqrt{25}}{(-1)^3} \cdot \left[1,4 \cdot \frac{5}{14} - 0,1\right]$,
a $n = 9 \cdot 3\frac{2}{3} - \sqrt[3]{27}$.

11. Oblicz w zeszycie liczby a i b , a następnie porównaj je ze sobą.

$$a = \left(\sqrt{2\frac{1}{4}} - \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}\right) - \left(\sqrt{1\frac{11}{25}} - \sqrt[3]{\frac{64}{125}}\right) \quad b = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{9}}{\sqrt{4} + \sqrt{25}} : \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{8}$$

12. Oblicz w zeszycie iloraz liczby $x = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ przez $y = \frac{3^5 \cdot (3^3)^2}{9^5}$.

13. Oblicz w zeszycie.

$$\text{a) } \frac{(-0,2 - 1) \cdot 5}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 3}{0,3 - (-0,7)}$$

$$\text{b) } \left[\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} + 5^{-1} \right] \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \\ 5 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} - \frac{2}{13} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \frac{3}{2^1 + 1^2}\right]$$

14*. Oblicz w zeszycie liczbę, której 25% wynosi $\frac{5 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} - \frac{2}{13} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \frac{3}{2^1 + 1^2}\right]}{\left(1\frac{1}{3} - 3\right)^0}$.

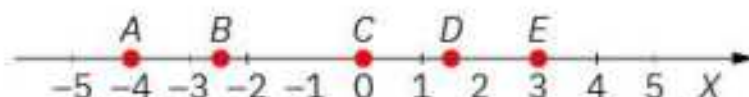


ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Liczbą dodatnią jest wartość wyrażenia:
A. $-3 - 2,5$ B. $5,8 - 5,85$
C. $-12,3 - (-10,7)$ D. $-7,3 - (-15,4)$
- Ile wynosi wartość wyrażenia $- \left(2\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} - \left(-2\frac{4}{27}\right)$?
A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $3\frac{26}{27}$ D. $\frac{11}{27}$
- Wskaż prawdziwy zapis.
A. $\frac{2+5}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}} = 49$ B. $\sqrt{25} + \sqrt{144} = \sqrt{179}$
C. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-7} = -2^7$ D. $\frac{3^4 \cdot 5^4}{15^3} = 15^7$
- Różnica iloczynów liczb $2,7$ i $-1\frac{2}{3}$ oraz $-1\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{3}$ wynosi:
A. $4,9$ B. $-4,1$ C. $-4,9$ D. $4,1$

1.6. Oś liczbowa i przedziały liczbowe

Wiemy już, że oś liczbowa to prosta, na której obrano punkt zerowy, ustalono dodatni zwrot i odcinek jednostkowy.



Każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada dokładnie jedna liczba rzeczywista (współrzędna tego punktu), a każdej liczbie rzeczywistej można przyporządkować dokładnie jeden punkt na osi liczbowej.

Punktowi A odpowiada liczba -4 , a punktowi D – liczba $1\frac{1}{2}$. Liczbie $-2,5$ przyporządkowany jest punkt B, a liczbie 3 – punkt E.

Przedział liczbowy to pewien podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, np. zbiór liczb większych od 2 . Takich liczb jest nieskończenie wiele i nie ma możliwości wymienienia wszystkich. Można jednak wskazać ten przedział na osi liczbowej.

Ćwiczenie 1.

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek.

a) $x > -3$

Rozwiązanie:



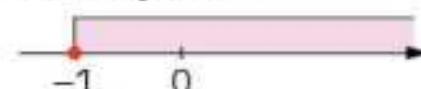
c) $x < 5$

Rozwiązanie:



b) $x \geq -1$

Rozwiązanie:



d) $x \leq 2$

Rozwiązanie:



Kółko zamalowane – liczba spełnia wskazany warunek (należy do przedziału).

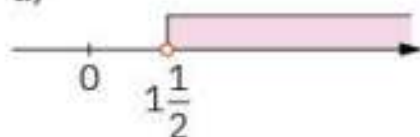
Kółko niezamalowane – liczba nie spełnia wskazanego warunku (nie należy do przedziału).

Po zaznaczeniu na osi liczbowej zbioru liczb możemy zapisać warunek, który one spełniają.

Ćwiczenie 2.

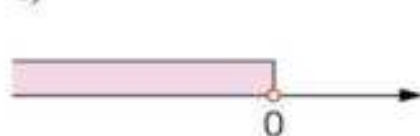
Zapisz warunek, który spełniają liczby z zaznaczonych na rysunkach zbiorów.

a)



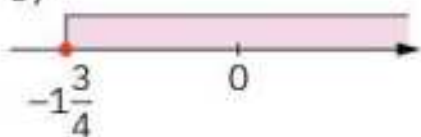
Rozwiązanie: $x > 1\frac{1}{2}$

c)



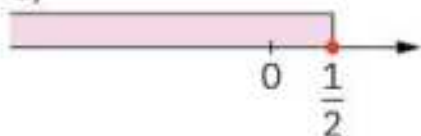
Rozwiązanie: $x < 0$

b)



Rozwiązanie: $x \geq -1\frac{3}{4}$

d)

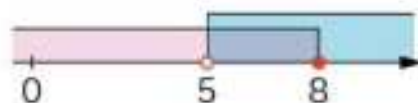


Rozwiązanie: $x \leq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3.

Zaznacz na osi liczbowej zbiór spełniający warunki $x > 5$ i $x \leq 8$.

Rozwiązanie:



Układ dwóch warunków bywa zapisywany z użyciem symbolu $\begin{cases} x > 5 \\ x \leq 8 \end{cases}$ lub w postaci warunku $5 < x \leq 8$ zwanego nierównością podwójną.

Należy pamiętać, że zwroty obu nierówności muszą być zgodne.

Warunek $5 < x \leq 8$ spełniają liczby większe od 5 i równocześnie niewiększe od 8. Tworzą one podzbiór zbioru liczb rzeczywistych zwany **przedziałem liczbowym**: $x \in (5, 8]$ – zapis ten czytamy: x należy do przedziału prawostronnie domkniętego od 5 do 8.

Jeżeli a i b należą do zbioru liczb rzeczywistych i $a < b$, wówczas wyróżniamy następujące rodzaje przedziałów:

Przedział domknięty $[a, b]$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x \leq b$.



Przedział otwarty (a, b) to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x < b$.



Przedział lewostronnie domknięty $[a, b)$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a \leq x < b$.



Przedział prawostronnie domknięty $(a, b]$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $a < x \leq b$.



Podobnie możemy określić przedziały nieograniczone:

Przedział otwarty nieograniczony $(a, +\infty)$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $x > a$.



Przedział lewostronnie domknięty nieograniczony $[a, +\infty)$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $x \geq a$.



Przedział otwarty nieograniczony $(-\infty, a)$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $x < a$.



Przedział prawostronnie domknięty nieograniczony $(-\infty, a]$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $x \leq a$.



Zapis $(a, +\infty)$ czytamy: przedział otwarty od a do nieskończoności, a zapis $(-\infty, a)$ czytamy: przedział otwarty od minus nieskończoności do a .

∞ – symbol nieskończoności, nie oznacza żadnej liczby.

Ćwiczenie 4.

Zaznacz na osi liczbowej przedziały.

Rozwiązanie: Na osi liczbowej zaznaczamy punkty, które wyznaczają zakres przedziału. Uwzględniamy to, czy dany punkt należy do przedziału (rysujemy kółko zamalowane), czy nie należy (rysujemy kółko niezamalowane).

a) $(-2; 5)$

Odpowiedź:



b) $(-4; 2)$

Odpowiedź:



c) $(0; 3)$

Odpowiedź:



d) $(-0,5; 4,5)$

Odpowiedź:



e) $(-5; \infty)$

Odpowiedź:



f) $(-\infty; \sqrt{2})$

Odpowiedź:



Sumą dwóch zbiorów liczb A i B (przedziałów A i B) nazywamy zbiór tych elementów (liczb), które należą do zbioru A lub należą do zbioru B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

Iloczynem zbiorów liczb A i B (przedziałów A i B) nazywamy zbiór tych elementów (liczb), które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B . Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

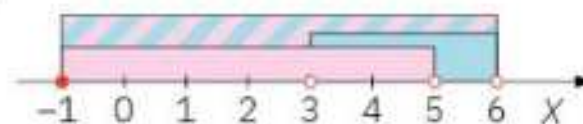
Ćwiczenie 5.

Wyznacz sumę i iloczyn przedziałów $(3, 6)$ i $(-1, 5)$.

Rozwiązanie:

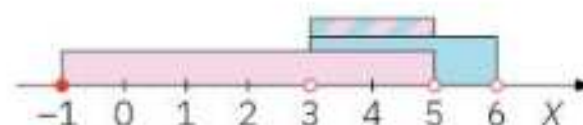
a) suma przedziałów: $(3, 6) \cup (-1, 5) = (-1, 6)$

Rysujemy na osi oba przedziały. Zaznaczamy ich sumę, czyli przedział, który zawiera elementy obu przedziałów.



b) iloczyn przedziałów: $(3, 6) \cap (-1, 5) = (3, 5)$

Rysujemy na osi oba przedziały. Zaznaczamy ich iloczyn, czyli część wspólną obu przedziałów.



Iloczyn przedziałów może nie zawierać ani jednej liczby. Mówimy wówczas o zbiorze pustym i oznaczamy go jako $\emptyset$, np. $(-2, 1) \cap (1, 3) = \emptyset$. Iloczyn przedziałów może być też zbiorem jednoelementowym i wówczas taki zbiór zapisujemy w nawiasach klamrowych, np. $(3, 5) \cap (5, +\infty) = \{5\}$.

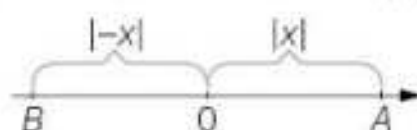
Suma przedziałów może zawierać wszystkie liczby rzeczywiste, np.:

$$(-\infty, 1) \cup (-2, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Wartość bezwzględna interpretujemy jako odległość punktu odpowiadającego danej liczbie na osi liczbowej od punktu odpowiadającego liczbie zera.

Na osi liczbowej dany jest punkt A o współrzędnej x i punkt B o współrzędnej $-x$. Długość odcinka AO jest równa długości odcinka OB : $AO = OB$.

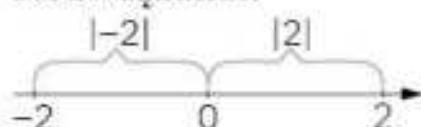
Z definicji wartości bezwzględnej wiemy, że wartość bezwzględna liczby nieujemnej x jest równa tej samej liczbie x ($|x| = x$), a wartość bezwzględna liczby ujemnej $-x$ to liczba do niej przeciwna ($|-x| = x$). Wynika stąd, że $|x| = |-x|$.



Ćwiczenie 6.

a) Rozwiąż równanie $|x| = 2$

Rozwiązanie:



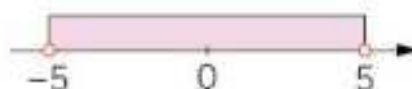
$|x| = 2$ dla $x = 2$ lub $x = -2$

Odpowiedź: Istnieją dwa punkty, których odległość od punktu zerowego wynosi 2.

Są to punkty o współrzędnych $A(2)$ i $B(-2)$.

b) Wskaż liczby spełniające warunek $|x| < 5$

Rozwiązanie:

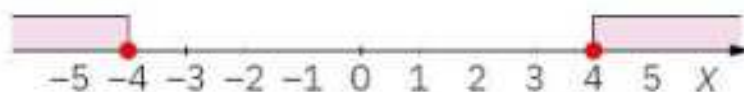


Szukamy na osi liczbowej takich punktów, których odległość na osi liczbowej od punktu zerowego jest mniejsza od 5: $x \in (-5, 5)$.

Odpowiedź: Podany warunek spełniają tylko liczby z przedziału $x \in (-5, 5)$.

c) Wskaż liczby spełniające warunek $|x| \geq 4$.

Rozwiązanie:



Szukamy na osi liczbowej takich punktów, których odległość na osi liczbowej od punktu zerowego jest większa bądź równa od 4: $x \geq 4$ lub $x \leq -4$.

Odpowiedź: Podany warunek spełniają tylko liczby z przedziału $x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie po 6 punktów, których odległość od punktu 0 jest:

a) większa od 2

b) mniejsza od 2

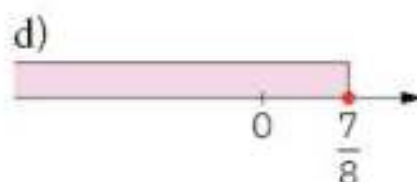
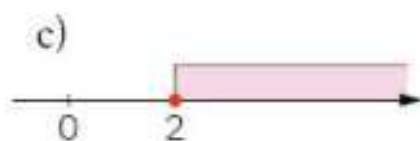
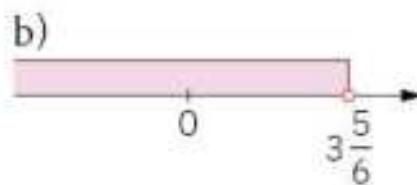
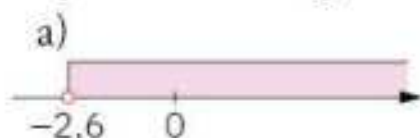
c) większa lub równa 2

d) mniejsza lub równa 2

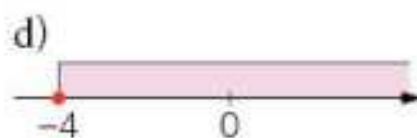
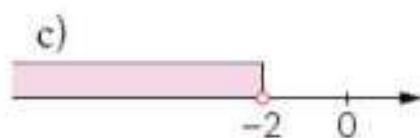
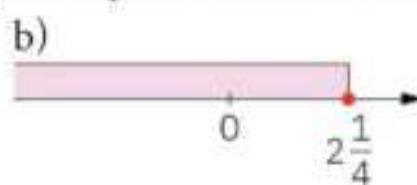
2. Zapisz w zeszycie przedział liczbowy i narysuj na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $x < -1,5$ b) $x \leq 2\frac{1}{2}$ c) $x > -3\frac{1}{3}$ d) $x \geq \frac{1}{4}$

3. Zapisz w zeszycie za pomocą przedziału liczbowego warunek, który spełniają liczby z zaznaczonego na rysunku zbioru.



4. Podaj po trzy przykłady liczb należących do przedziału zaznaczonego na osi.



5. Zapisz w zeszycie za pomocą symboli nierówności ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) i zaznacz na osi liczbowej przedziały liczbowe.

a) $(-3, 2)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $\langle -1, 4 \rangle$
d) $(1, \infty)$ e) $(-\infty, 3\frac{1}{2})$ f) $\langle \sqrt{2}, 4 \rangle$

6. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie wszystkie liczby, które nie spełniają podanego warunku.

a) $x > 4$ b) $x \leq 2$

Zapisz przedziały liczbowe, które spełniają liczby z zaznaczonych na rysunkach zbiorów.

7. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie zbiór liczb spełniających warunek.

a)	b)	c)	d)
$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x > -4 \\ x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x \leq 5 \\ x > -\sqrt{2} \end{cases}$

8. Przepisz do zeszytu i uzupełnij zapis według wzoru: Jeżeli $x > -4$ i $x < 7$, to $x \in (-4, 7)$.

a) Jeżeli $x > 2$ i $x \leq 7$, to ...	b) Jeżeli $x > -5$ i $x < 0$, to ...
c) Jeżeli $x \leq -1$ i $x \geq -4$, to ...	d) Jeżeli $x \geq -3$ i $x < 3$, to ...

9. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie iloczyn przedziałów.
- a) $\langle 0, 3 \rangle \cap \langle -2, 2 \rangle$ b) $(-\infty, 2) \cap \langle 1, 5 \rangle$
 c) $\langle -2, 4 \rangle \cap (-3, 6)$ d) $(-\infty, -1) \cap \langle -1, \infty)$
10. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie sumę przedziałów.
- a) $(-2, 4) \cup (1, 6)$ b) $\langle 2, 7 \rangle \cup (3, 5)$
 c) $(-\infty, -1) \cup \langle -3, 0 \rangle$ d) $(-\infty, 2) \cup (1, \infty)$
11. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie zbiór liczb spełniających podane warunki i zapisz go w postaci sumy przedziałów.
- a) $x < 5$ lub $x \geq 7$ b) $-5 < x \leq -2,5$ lub $x > 0$
 c) $x < \sqrt{2}$ lub $x > 4,5$ d) $-4 \leq x < 2$ lub $3 < x \leq 5$
12. Oblicz w zeszycie wartość bezwzględną wyrażeń.
- a) $|-5 + 12,5|$ b) $|-4 + 2\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} + 2|$
 c) $|7 + (-3)^3|$ d) $|1 - \sqrt[3]{-27}|$
13. Oblicz w zeszycie x , jeżeli:
- a) $|x| = 7$ b) $|x| = 0$ c) $|x| = 2\sqrt{2}$ d) $|x| = -3$
14. Używając znaku wartości bezwzględnej, zapisz w zeszycie warunek, jaki spełniają liczby należące do przedziału.
- a) $\langle -3, 3 \rangle$ b) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
 c) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ d) $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup \langle \sqrt{3}, \infty)$
15. Przedstaw na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek.
- a) $|x| \leq 2\sqrt{3}$ b) $|x| > 1\frac{1}{2}$ c) $2|x| \geq 10$ d*) $|x + 2| < 5$



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Do przedziału $(-\infty, -\pi)$ nie należy liczba:
 A. $-3,1$ B. $-3,3$ C. $-3,2$ D. -5
2. Zbiór liczb spełniających warunek $x \geq -3$ i $x < 5$ określa przedział liczbowy:
 A. $\langle -3, 5 \rangle$ B. $(-3, 5)$ C. $\langle -3, 5)$ D. $(-3, 5)$
3. Jeżeli $A = (-1, 3)$ i $B = \langle 3, \infty)$, to iloczyn tych przedziałów zapisujemy jako:
 A. $A \cap B = (-1, \infty)$ B. $A \cap B = \emptyset$ C. $A \cap B = \{3\}$ D. $A \cap B = (-1, 3)$
4. Zaznaczony na osi liczbowej przedział opisuje warunek:



- A. $|x| \leq 6$ B. $|x| > 6$ C. $|x| \geq 6$ D. $|x| < 6$

1.7. Własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych

Wśród usług oferowanych przez banki często pojawiają się takie terminy, jak: oszczędności, kredyty, lokaty, stopa procentowa, odsetki.

Stopa procentowa (oprocentowanie) to podana w procentach wysokość należnych odsetek. Zazwyczaj wysokość stopy procentowej podaje się w stosunku rocznym, czyli w okresie obejmującym rok. Oprocentowanie kapitału w banku może być dokonane na dwa sposoby: jako procent prosty lub jako procent składany. W wypadku obliczeń dotyczących procentu składanego wykorzystujemy własności potęgowania i pierwiastkowania.

Procent prosty

Sposób oprocentowania kapitału polegający na tym, że odsetki od kapitału za dany okres obliczeniowy nie są doliczane do kapitału i nie biorą udziału w oprocentowaniu w okresie następnym.

Procent składany

Sposób oprocentowania kapitału polegający na tym, że odsetki od kapitału za dany okres obliczeniowy są kapitalizowane, to znaczy doliczane do kapitału i wraz z kapitałem biorą udział w oprocentowaniu w okresie następnym.

Wzory przedstawiają, jak obliczać kapitał i odsetki przy oprocentowaniu prostym i składanym. We wzorach wprowadzono oznaczenia:

K_0 – kapitał początkowy

K_n – kapitał po n okresach oprocentowania

n – liczba okresów oprocentowania

$p\%$ – roczna stopa procentowa

t – czas oprocentowania

	Procent prosty	Procent składany
Kapitał po n okresach oprocentowania	$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p \cdot t \cdot n}{100} \right)$	$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p \cdot t}{100} \right)^n$

Ćwiczenie 1.

Klient zaciągnął w banku kredyt na rok w wysokości 10 000 zł. Roczna stopa procentowa pożyczki wynosi 12%. Oblicz, jaką kwotę klient będzie musiał zwrócić do banku.

Rozwiązanie:

I sposób

Obliczamy wysokość odsetek za cały rok:

$$d = 12\% \cdot 10\,000 \text{ zł} = 0,12 \cdot 10\,000 \text{ zł} = 1200 \text{ zł}$$

Obliczamy, jaką kwotę klient zwróci do banku:

$$10\,000 \text{ zł} + 1200 \text{ zł} = 11\,200 \text{ zł}$$

II sposób

Obliczamy kapitał po jednym okresie oprocentowania.

Ustalamy dane:

$$K_0 = 10\,000 \text{ (zł)}, p = 12 \text{ (\%)}, t = 1 \text{ (rok)}, K = ?$$

$$K = K_0 \left(1 + \frac{p \cdot t}{100} \right)$$

$$K = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{12 \cdot 1}{100} \right) = 11\,200$$

Odpowiedź: Klient musi zwrócić do banku 11 200 zł.

Ćwiczenie 2.

Klient umieścił w banku kwotę 30 000 zł na półrocznej lokacie (kapitalizacja odsetek następuje co pół roku). Roczna stopa procentowa lokaty wynosi 2%. Oblicz, jaką kwotę klient otrzyma po 1,5 roku.

Rozwiązanie:

Obliczamy kapitał po trzech okresach oprocentowania.

Ustalamy dane:

$$K_0 = 30\,000 \text{ (zł)}, p = 2 \text{ (\%)}, t = \frac{1}{2} \text{ (roku)}, n = 3, K_n = ?$$

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p \cdot t}{100} \right)^n = 30\,000 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{100} \right)^3 = 30\,909,03 \text{ (zł)}$$

Odpowiedź: Klient otrzyma 30 909,03 zł.

W zadaniach dotyczących kredytów i oszczędności możemy wyliczyć nie tylko odsetki, ale również wysokość kapitału, wielkość stopy procentowej czy długość trwania lokaty lub spłaty kredytu

Ćwiczenie 3.

Klient wpłacił do banku 20 000 zł na trzymiesięczną lokatę (kapitalizacja następuje co 3 miesiące). Po pół roku otrzymał 402 zł odsetek. Ile wynosiła roczna stopa procentowa tej lokaty?

Rozwiązanie:

Ustalamy dane:

$$K_0 = 20\,000 \text{ (zł)}, p = ? (\%), t = \frac{1}{4} \text{ (roku)}, n = 2,$$

$$O_n = ? \text{ (wysokość odsetek po } n \text{ okresach oprocentowania)}$$

$$O_n = K_0 \left(1 + \frac{p \cdot t}{100} \right)^n - K_0$$

$$402 = 20\,000 \left(1 + \frac{p \cdot \frac{1}{4}}{100} \right)^2 - 20\,000$$

$$\frac{20402}{20000} = \left(1 + \frac{p}{400} \right)^2$$

$$1,0201 = \left(1 + \frac{p}{400} \right)^2$$

$$\sqrt{1,0201} = 1 + \frac{p}{400}$$

$$p = 4 (\%)$$

Odpowiedź: Roczna stopa procentowa tej lokaty wynosiła 4%.

Własności potęgowania wykorzystujemy nie tylko w obliczeniach dotyczących procentu składanego, ale również w zadaniach dotyczących fizyki jądrowej.

Okres połowicznego rozpadu (T) to czas, po którym połowa ilości próbki danego izotopu promieniotwórczego ulega rozkładowi. Na przykład dla izotopu polonu $^{210}_{84}\text{Po}$ okres połowicznego rozpadu wynosi 138 dni. Oznacza to, że po upływie 138 dni z 1 grama polonu zostanie 0,5 grama pierwiastka, po upływie kolejnych 138 dni zostanie 0,25 grama itd. Okres połowicznego rozpadu pojawia się w prawie rozpadu promie-

niotwórczego zapisanym następująco: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie:

m_0 – początkowa ilość izotopu

m – ilość izotopu po upływie czasu t

T – okres połowicznego rozpadu ($T \neq 0$)

Ćwiczenie 4.

Po upływie 15 lat z próbki kobaltu o masie 10 gramów pozostało 1,25 grama. Oblicz okres połowicznego rozpadu T ($T \neq 0$) tego izotopu.

Rozwiązanie:

Ustalamy dane oraz układamy i rozwiązujemy równanie:

$$t = 15 \text{ (lat)}$$

$$m_0 = 10 \text{ (g)}$$

$$m = 1,25 \text{ (g)}$$

$$1,25 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{T}} \quad | :10$$

$$0,125 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{T}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{T}}$$

$$T = 5 \text{ (lat)}$$

Odpowiedź: Okres połowicznego rozpadu izotopu kobaltu wynosi 5 lat.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Pan Adamski otrzymał pożyczkę w wysokości 8500 zł, którą miał spłacić po roku. Oblicz w zeszycie kwotę, jaką zwrócił do banku, jeśli oprocentowanie tej pożyczki wynosiło 8% w skali roku.
2. Pani Aneta zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 2500 zł. Po roku pani Aneta, wpłacając kwotę 2725 zł, spłaciła kredyt wraz z odsetkami. Oblicz w zeszycie wysokość rocznej stopy procentowej tego kredytu.
3. Klient złożył 40 000 zł na lokacie na dwa lata. Stopa procentowa lokaty wynosiła 5% rocznie, a odsetki były kapitalizowane co sześć miesięcy. Oblicz w zeszycie wartość kapitału po dwóch latach. Jaka wartość odsetek została zgromadzona w tym czasie?
4. Pan Kowalski wpłacił na lokatę pewną kwotę pieniędzy. Po roku pan Kowalski otrzymał wraz z odsetkami 4243,60 zł. Oprocentowanie tej lokaty wynosiło 6% w skali rocznej, a odsetki były kapitalizowane co pół roku. Oblicz w zeszycie, jaką kwotę wpłacił pan Kowalski.
5. Pani Zielińska postanowiła założyć lokatę, wpłacając do banku 6000 zł na okres jednego roku. Ma do wyboru dwa rodzaje lokat:
 - lokata A – oprocentowanie w skali roku 4,1% i roczna kapitalizacja odsetek,
 - lokata B – oprocentowanie w skali roku 4% i kapitalizacja odsetek co pół roku.Którą lokatę powinna wybrać pani Zielińska, aby otrzymać większe odsetki?

6. Firma zdeponowała w banku pewną kwotę pieniędzy na 2 lata. Po tym okresie na koncie tej firmy było 2 164 864,32 zł. Oblicz w zeszycie, jaką kwotę zdeponowała firma, wiedząc, że roczna stopa procentowa wynosiła 4%, a odsetki były kapitalizowane co pół roku.
7. W dniu narodzin syna ojciec założył w banku lokatę w wysokości 10 000 zł, która została zakończona w momencie uzyskania przez syna pełnoletności. Oprocentowanie tej lokaty przez pierwsze 10 lat wynosiło 6% w skali roku, a następnie zostało obniżone do 5%. Ponadto wiadomo, że oprocentowanie już dalej się nie zmieniło, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Oblicz w zeszycie, jaką kwotę otrzyma syn w dniu swoich 18 urodzin.
8. Kapitał w wysokości 20 000 zł został złożony w banku na lokatę, której roczna stopa oprocentowania wynosi 4%. Jak długo trwała ta lokata, jeśli wiadomo, że kapitalizacja następowała co kwartał, a po zakończeniu lokaty uzyskano odsetki w wysokości 812,08 zł?
9. Pan Janusz wpłacił na lokatę z roczną kapitalizacją kwotę 100 000 zł. Po 4 latach kapitał powiększył się o 4060,40 zł odsetek. Ile wynosiła roczna stopa procentowa tej lokaty?
10. Bank oferuje dwie lokaty: pierwszą z kapitalizacją półroczną przy rocznej stopie 8% i drugą z kapitalizacją kwartalną przy rocznej stopie s . Dla jakiej wartości s oprocentowanie obu lokat w skali roku jest najbardziej zbliżone?
11. Okres połowicznego rozpadu plutonu wynosi 10 lat. Ile gramów plutonu pozostanie z próbki o masie 100 g po upływie 30 lat?
12. Oblicz w zeszycie, ile gramów próbki kobaltu o okresie połowicznego rozpadu wynoszącym 5 lat znajdowało się w sejfie laboratorium 50 lat temu, jeśli obecnie są tam 3 gramy kobaltu (izotop nie był wykorzystywany do innych doświadczeń).
13. Oblicz w zeszycie, po jakim czasie ulegnie rozpadowi $\frac{7}{8}$ początkowej masy pierwiastka promieniotwórczego, którego okres połowicznego rozpadu wynosi 6 godzin.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Do banku wpłacono 6000 zł na roczną lokatę o oprocentowaniu 2%. O ile wyższe byłyby odsetki, gdyby tę samą kwotę wpłacono na lokatę o takim samym rocznym oprocentowaniu, ale z półroczną kapitalizacją?
 A. o 120 zł B. o 42,40 zł C. o 0,60 zł D. o 60 zł



2. Na lokacie złożono 2000 zł przy rocznej stopie procentowej $p\%$. Odsetki naliczane są co kwartał. Po upływie roku wielkość kapitału na lokacie będzie równa:
- A. $2000\left(1 + \frac{4p}{100}\right)$ B. $2000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$ C. $2000\left(1 + \frac{p}{400}\right)$ D. $2000\left(1 + \frac{p}{400}\right)^4$
3. Firma wpłaciła na lokatę 0,5 mln zł, a po czterech miesiącach uzyskała 10 075,25 zł odsetek. Ile wynosiło roczne oprocentowanie tej lokaty, jeżeli była ona kapitalizowana miesięcznie?
- A. 0,5% B. 2% C. 6% D. 1%
4. Po jakim czasie zostanie 25% masy pierwiastka promieniotwórczego, dla którego czas połowicznego rozpadu wynosi 2 dni?
- A. po 2 dniach B. po 4 dniach C. po 6 dniach D. po 8 dniach

1.8. Zadania utrwalające

1. Przez które z liczb: 2, 3, 4, 5, 9, 10 dzielą się podane liczby?
- a) 648 b) 2220 c) 123456 d) 4113720
2. Rozłóż liczbę 720 na czynniki pierwsze.
3. Uzasadnij, że suma czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.
4. Które spośród ułamków: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}$ mają rozwinięcia dziesiętne skończone?
5. Między jakimi kolejnymi liczbami całkowitymi położona jest na osi liczbowej liczba $\sqrt{90}$?
6. Wykonaj działania w zeszycie.
- a) $(-5 + 2) \cdot (-3 - 6)$ b) $-(-5 - 4) + (-2 + 1) - (-4)$ c) $\frac{-7 + (-8) - (-3)}{2 - (-9) + (-5)}$
7. Oblicz w zeszycie wartość wyrażenia $\frac{\frac{6}{11} - \frac{15}{45}}{\frac{11}{3} - 2\frac{1}{2}} \cdot 2\frac{3}{4}$.
8. Uporządkuj liczby x, y, z w kolejności rosnącej.
- $x = \frac{1 - \frac{1}{8} \cdot 0,5}{\frac{7}{8} - \frac{8}{8 - 7}}$ $y = 2,6 \cdot 4\frac{6}{11} \cdot 3\frac{5}{13} \cdot (-0,25)$ $z = \left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot 1,5 \cdot \frac{24}{11} \cdot 2,75$
9. Podziel w zeszycie sumę liczb $-2\frac{4}{5}$ i $3\frac{2}{3}$ przez ich różnicę.
10. Oblicz w zeszycie wartość wyrażenia $\frac{a - b + 2c}{a + b + 3c}$ dla $a = 1\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{3}{8}$.

11. Oblicz w zeszycie.

a) $(-2)^3$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ d) $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-1}$ e) $(-0,25)^{-4}$

12. Zapisz w zeszycie podaną liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $4^2 \cdot 8$ b) $\frac{1}{16} \cdot 32$ c) $64^2 : 32^{-3}$ d) $(16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$

13. Liczbę 230 000 000 zapisz w zeszycie w notacji wykładniczej.

14. Oblicz w zeszycie wartość wyrażenia $\frac{27^{-3} : 3^{-2}}{(81^{-4} : 243^{-3})^2}$.

15. Zapisz w zeszycie w najprostszej postaci wyrażenie $\frac{(b^8 \cdot b^5)^{-2}}{(b^{12} : b^2)^{-3}}$, $b \neq 0$.

16. Oblicz w zeszycie wartości pierwiastków.

a) $\sqrt{144}$; $\sqrt{0,09}$; $\sqrt{\frac{169}{196}}$; $\sqrt{3\frac{13}{36}}$ b) $\sqrt[3]{216}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{0,125}$; $\sqrt[3]{-0,729}$; $\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$

17. Wykonaj działania w zeszycie.

a) $\sqrt{2} \cdot \left(2\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{24\frac{1}{2}} - \sqrt{50}\right)$ b) $\sqrt[3]{-2} \cdot \left(\sqrt[3]{13,5} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{62\frac{1}{2}}\right)$

18. Wylącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{98}$; $\sqrt{128}$; $\sqrt{175}$; $\sqrt{500}$; $\sqrt{1,25}$ b) $\sqrt[3]{162}$; $\sqrt[3]{432}$; $\sqrt[3]{625}$; $\sqrt[3]{3456}$

19. Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$ b) $\frac{5}{14\sqrt{7}}$ c) $\frac{9}{\sqrt[3]{9}}$

20. Oblicz w zeszycie.

a) $\left| \frac{7,2 - 8,1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \right|$ b) $14\frac{1}{2} \cdot 3,1 - 3,1 \cdot 4,5$

c) $\frac{\left(-4\frac{1}{5} + 3,4\right) : \frac{1}{20}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 0,04}$ d) $\left[\frac{1}{27} + \left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}\right] \cdot 3^2$

21. Oblicz w zeszycie, jakim procentem liczby n jest liczba m , jeśli: $m = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{50}}{\sqrt{2}} : \frac{1}{2}$

i $n = \frac{2^6 \cdot (5^3)^2}{10^5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

22. Znajdź liczbę, której $\frac{2}{5}$ jest równe wartości wyrażenia $\left[\frac{2}{17} - 3\frac{1}{3}\right]^0 + \sqrt{\sqrt{25} + \sqrt[3]{64}}$.
23. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie oraz zapisz w postaci przedziału liczbowego zbiór liczb spełniających podany warunek.
- a) $-1 \leq x \leq 3$ b) $-3 < x < 2$ c) $0 < x \leq 4$ d) $x > 2\frac{1}{2}$
24. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie sumę przedziałów.
- a) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ b) $(3, 5) \cup (3, \infty)$
 c) $(-5, 0) \cup (-1, 5)$ d) $(-2, 0) \cup (-4, -2)$
25. Zaznacz na osi liczbowej w zeszycie iloczyn przedziałów.
- a) $(-4, 2) \cap (2, \infty)$ b) $(-7, 0) \cap (-2, 2)$
 c) $(-\infty, -3) \cap (-4, -3)$ d) $(-\infty, -1) \cap (-3, \infty)$
26. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek. Zadanie rozwiąż w zeszycie.
- a) $|x| \leq 3\frac{1}{3}$ b) $|x| = 2,5$ c) $|x| > 0$ d) $|x| = -1$
- 27*. Pani Ewa chce ulokować w banku pieniądze na 10 lat. Może dokonać wyboru pomiędzy ofertami dwóch banków. Lokata w banku A jest oprocentowana w wysokości 2% rocznie, a odsetki są kapitalizowane co pół roku. Natomiast bank B oferuje 2,1% rocznie, ale odsetki są naliczane dopiero na koniec trwania lokaty. Ofertę którego banku powinna wybrać pani Ewa, aby uzyskać większe odsetki?
28. Pan Nowak założył lokatę w wysokości 30 000 zł. Po 18 miesiącach bank wypłacił mu 31 836,24 zł. Jakie jest oprocentowanie tej lokaty w skali roku, jeśli bank kapitalizuje odsetki co pół roku?
29. Pan Kowalski wpłacił 25 000 zł na lokatę z oprocentowaniem 4% w stosunku rocznym i kapitalizacją co pół roku, a pani Kowalska wpłaciła taką samą kwotę na lokatę z takim samym oprocentowaniem w stosunku rocznym, ale z kwartalną kapitalizacją odsetek. Oboje zamknęli lokaty po roku. Ile odsetek otrzymają z obu lokat razem?



WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

2.1. Wzory skróconego mnożenia

Wyrażeniami algebraicznymi nazywamy takie wyrażenia, w których obok liczb i znaków działań występują litery.

Ćwiczenie 1.

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

- a) liczbę o 1 mniejszą od iloczynu liczb x i y ,
- b) kwadrat sumy liczb a i b ,
- c) kwadrat różnicy liczb x i y ,
- d) różnicę sześcianów liczb c i d .

Rozwiązanie:

- a) $xy - 1$ b) $(a + b)^2$ c) $(x - y)^2$ d) $c^3 - d^3$

W budowie wszystkich wyrażen algebraicznych występują **jednomiany**, czyli wyrażenia, które są pojedynczymi liczbami, pojedynczymi literami lub iloczynami liczb i liter, np. -5 , $3x$, a , -9 , $1x^2y$. Wyrażenie, które powstaje przez dodawanie lub odejmowanie jednomianów, nazywamy **sumą algebraiczną**. Jednomiany, które dodajemy, to **wyrazy sumy**.

Ćwiczenie 2.

Wskaż wyrazy w sumie algebraicznej $-2x^2 + 7x - 5$.

Rozwiązanie:

Wyrazami tej sumy są jednomiany: $-2x^2$, $7x$, -5 .

Wyrażenia algebraiczne staramy się zapisywać w jak najprostszej postaci. Przekształcenie wyrażenia algebraicznego polegające na zastąpieniu wyrazów podobnych jednym wyrazem nazywamy redukcją wyrazów podobnych.

Ćwiczenie 3.

Zredukuj wyrazy podobne w wyrażeniu algebraicznym $2a - 3b + 1 + 4b - 5a + 2$.

Rozwiązanie:

Podkreślamy w jednakowy sposób i redukujemy wyrazy podobne.

$$\underline{2a} - \underline{3b} + 1 + \underline{4b} - \underline{5a} + 2 = -3a + b + 3$$

Wyrażenia algebraiczne można mnożyć.

Ćwiczenie 4.

Wykonaj mnożenie.

- a) $-3a(a - 2b - 1)$ b) $(4a - 2)(3 - 5a)$

Rozwiązanie:

$$a) -3a(a - 2b - 1) = -3a^2 + 6ab + 3a$$

$$b) (4a-2)(3-5a) = 12a - 20a^2 - 6 + 10a = \dots$$

Mnożenie niektórych wyrażeń algebraicznych możemy wykonywać szybciej, posługując się odpowiednimi wzorami.

Ćwiczenie 5.

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwe są wzory:

$$a) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$b) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Rozwiązanie:

$$a) (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$b) (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Kwadrat sumy

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratu pierwszego wyrażenia, podwojonego iloczynu pierwszego wyrażenia przez drugie i kwadratu drugiego wyrażenia.

Kwadrat różnicy

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy różnicy kwadratu pierwszego wyrażenia i podwojonego iloczynu pierwszego wyrażenia przez drugie plus kwadratu drugiego wyrażenia.

Ćwiczenie 6.

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$a) (x+3)^2$$

$$b) (4x+2)^2$$

$$c) (x-5)^2$$

$$d) \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right)^2$$

Rozwiązanie:

$$a) (x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$b) (4x+2)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 2 + 2^2 = 16x^2 + 16x + 4$$

$$c) (x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$d) \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{4}y + \left(\frac{1}{4}y\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{16}y^2$$

Ćwiczenie 7.

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest wzór $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Rozwiązanie:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$



Iloczyn sumy przez różnicę

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Iloczyn sumy przez różnicę jest równy różnicy kwadratów tych wyrażeń.

Ćwiczenie 8.

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\text{a) } (2+x)(2-x) \quad \text{b) } (x-3y)(x+3y)$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } (2+x)(2-x) = 2^2 - x^2 = 4 - x^2$$

$$\text{b) } (x-3y)(x+3y) = x^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$$



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Zapisz w zeszycie w postaci wyrażenia algebraicznego:
 - a) liczbę o 4 większą od podwojonej liczby x ,
 - b) liczbę o 1 mniejszą od kwadratu sumy liczb a i b ,
 - c) liczbę 5 razy większą od sześcianu liczby d ,
 - d) iloczyn sumy liczb x i y przez ich różnicę,
 - e) połowę kwadratu różnicy liczb c i d .
2. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci. Zapisz rozwiązanie w zeszycie.
 - a) $5x + 4y - 2x + y - 3$
 - b) $3a + a^2 - a + 2a^2$
 - c) $-4a + 2a^3 - 8 + 2a - 7a^3 + 10$
 - d) $\frac{3}{4}x - 2xy + 6y - 0,75x$
3. Wykonaj w zeszycie mnożenie i zredukuj wyrazy podobne (o ile to możliwe).
 - a) $-3(7x-2)$
 - b) $0,1a(100a-20b)$
 - c) $(x+3)(3x-2)$
 - d) $\left(\frac{5}{6}a - \frac{2}{3}\right)(-6a+3)$

4. Przedstaw wyrażenia w zeszycie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(1+a)^2$ b) $(2x+7)^2$ c) $(a+5ab)^2$
d) $(0,1a+20b)^2$ e) $(x^2+x)^2$ f) $(4y+\sqrt{2}x)^2$

5. Wykonaj potęgowanie w zeszycie.

a) $(y-8)^2$ b) $(10-x)^2$ c) $(15-2b)^2$
d) $\left(\frac{1}{3}x-6y\right)^2$ e) $(\sqrt{5}-2a)^2$ f) $(\sqrt{3}a-\sqrt{6}b)^2$

6. Przekształć w zeszycie wyrażenia na sumy algebraiczne.

a) $(a+1)(a-1)$ b) $\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)$
c) $(3x-2)(3x+2)$ d) $(0,6+10a)(0,6-10a)$
e) $(a+4)(4-a)$ f) $(5x+7y)(-5x+7y)$

7. Stosując odpowiedni wzór skróconego mnożenia, przedstaw w zeszycie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(a+\sqrt{3})^2$ b) $\left(\frac{2}{3}x+x^2\right)\left(x^2-\frac{2}{3}x\right)$
c) $(\sqrt{7}-2a)^2$ d) $(2a^2+3ab)^2$
e) $(5x^2-2y)(2y+5x^2)$ f) $\left(2\frac{1}{3}+\frac{1}{2}b\right)^2$

8. Wykonaj potęgowanie w zeszycie.

a) $(\sqrt{5}+2)^2$ b) $(4+\sqrt{3})^2$
c) $(2-\sqrt{11})^2$ d) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$
e) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{10})^2$ f) $(5\sqrt{2}-2\sqrt{6})^2$

9. Wykonaj działania w zeszycie.

a) $(6-\sqrt{5})(6+\sqrt{5})$ b) $(1+2\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})$
c) $(\sqrt{15}+\sqrt{11})(\sqrt{15}-\sqrt{11})$ d) $(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})$

10. Przepisz do zeszytu. W miejsce kropek wpisz odpowiednie wyrażenia.

a) $a^2+10a+25=(a+\dots)^2$ b) $9a^2+12ab+4b^2=(\dots+2b)^2$
c) $c^2-36=(c+\dots)(c-\dots)$ d) $b^2-16b+64=(b-\dots)^2$
e) $100a^2-80ab+16b^2=(\dots-4b)^2$ f) $81c^2-121d^2=(\dots-11d)(\dots+11d)$

- 11.** Przedstaw podane wyrażenia w zeszycie w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy dwóch wyrażeń.
 a) $x^2 + 4x + 4$ b) $4a^2 + 12ab + 9b^2$ c) $a^2 - 6a + 9$
 d) $36y^2 - 12y + 1$ e) $144 - 48b + 4b^2$ f) $25x^2 + xy + 0,01y^2$
- 12.** Przekształć w zeszycie różnicę kwadratów na iloczyn.
 a) $y^2 - x^2$ b) $a^2 - 121$ c) $\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{81}$
 d) $64x^2 - 196y^2$ e) $0,04 - 100y^2$ f) $a^2b^2 - 0,09a^2$
- 13.** Zapisz w zeszycie w postaci wyrażenia algebraicznego, a następnie przekształć do postaci sumy algebraicznej:
 a) pole kwadratu o boku o długości $2x - 3$,
 b) pole kwadratu o boku o długości $7x + 1$,
 c) pole prostokąta o bokach o długości $5x + 2$ oraz $5x - 2$.
- 14.** Zapisz w zeszycie w postaci wyrażenia algebraicznego iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, z których mniejsza jest równa $2n - 1$. Następnie przekształć je do postaci sumy algebraicznej.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- 1.** Wyrażenie $(6a - 5b)^2$ jest równe:
 A. $36a^2 - 25b^2$ B. $6a^2 - 60ab + 5b^2$
 C. $36a^2 - 60ab + 25b^2$ D. $36a^2 - 60ab - 25b^2$
- 2.** Kwadrat liczby $x = 2\sqrt{3} + 1$ wynosi:
 A. 13 B. $13 + 4\sqrt{3}$ C. 7 D. $17\sqrt{3}$
- 3.** Najprostszą postacią wyrażenia $\left(2a - \frac{1}{4}\right)\left(2a + \frac{1}{4}\right)$ jest:
 A. $4a^2 - \frac{1}{16}$ B. $2a^2 - \frac{1}{16}$ C. $4a^2 - \frac{1}{4}$ D. $2a^2 - \frac{1}{4}$
- 4.** Wyrażenie $0,04x^2 - 2xy + 25y^2$ można zapisać w postaci:
 A. $(0,01x - 5y)^2$ B. $(0,1x - 5y)^2$ C. $(0,02x - 5y)^2$ D. $(0,2x - 5y)^2$

2.2. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń algebraicznych

Wyrażenia algebraiczne możemy dodawać lub odejmować poprzez zastosowanie praw działań. W praktyce sprowadza się to do opuszczenia nawiasów i redukcji wyrazów podobnych.

Ćwiczenie 1.

Zapisz wyrażenia w jak najprostszej postaci.

$$\text{a) } (3a + b - 2) + (4 - a - 6b) \qquad \text{b) } (a - 3b + 10) - (-2a + b + 3)$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } (3a + b - 2) + (4 - a - 6b) = 3a + b - 2 + 4 - a - 6b = 2a - 5b + 2$$

$$\text{b) } (a - 3b + 10) - (-2a + b + 3) = a - 3b + 10 + 2a - b + 3 = 3a - 4b + 13$$

Jeżeli przed nawiasem, w którym występuje wyrażenie algebraiczne, jest znak $+$ (lub nie występuje żaden znak), to, opuszczając nawias, przy każdym wyrazie wyrażenia znak pozostawiamy bez zmiany.

Jeżeli przed nawiasem, w którym występuje wyrażenie algebraiczne, jest znak $-$, to, opuszczając nawias, przy każdym wyrazie wyrażenia znak zmieniamy na przeciwny.

Ćwiczenie 2.

Wykonaj działania.

$$\text{a) } (2 + x)^2 + (2 + x)(2 - x) \qquad \text{b) } 9 - (y - 3)^2$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } (2 + x)^2 + (2 + x)(2 - x) = 4 + 4x + x^2 + 4 - x^2 = 4x + 8$$

$$\text{b) } 9 - (y - 3)^2 = 9 - (y^2 - 6y + 9) = 9 - y^2 + 6y - 9 = -y^2 + 6y$$

Jeżeli w wyrażeniu algebraicznym w miejsce liter wstawimy dane liczby i wykonamy wskazane działania, to otrzymamy **wartość liczbową** tego **wyrażenia**.

Ćwiczenie 3.

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $5 - (2 + 3x)^2 + (2 - 3x)^2 + 24x$ dla $x = -1$.

Rozwiązanie:

Doprowadzamy wyrażenie algebraiczne do najprostszej postaci.

$$\begin{aligned} 5 - (2x + 3)^2 + (2 - 3x)^2 + 24x &= 5 - (4x^2 + 12x + 9) + (4 - 12x + 9x^2) + 24x = \\ &= 5 - 4x^2 - 12x - 9 + 4 - 12x + 9x^2 + 24x = 5x^2 \end{aligned}$$

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia $5x^2$ dla $x = -1$.

$$5 \cdot (-1)^2 = 5 \cdot 1 = 5$$



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Zapisz wyrażenia algebraiczne w zeszycie w jak najprostszej postaci.

a) $(2a + b) + (a - b)$

b) $(-a + 3, 2b - 0,1) + (0,1 - 0,5a + 0,8b)$

c) $(a - 2b) - (a - 1)$

d) $(4x^2 - x + 3) - (3x^2 + 2x - 1)$

e) $(3a + 8b - 5) + (-12a - 2b + 7)$

f) $(b^2 - 6b + 8) + (b^2 + 6b - 7)$

g) $(3b - a) - (a - 1) - (b + 3)$

h) $(1 + x^2 - x) - (-2 + x - x^2)$

2. Zapisz w zeszycie w jak najprostszej postaci, a następnie oblicz wartość liczbową dla $x = -1,5$.

a) $(2x - 3) + (-5x - 1) + (8 + 7x)$

b) $(7x + 6) - (-10 - 5x) - (4x + 2)$

c) $(x^2 - 3x + 1,25) + (x^2 + 4x - 2,25)$

d) $(4,8 - x - x^2) - (2,3 - x - 4x^2)$

e) $-(2x^3 + 3x^2 - x) - (-x^3 + 2x^2 - x) + (x^3 + 7x^2 - 4x)$

3. Przekształć wyrażenia algebraiczne w zeszycie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $(8x^2 - 5x + 1,3) + (x + 1)^2$

b) $(4 - y)^2 + (-y^2 + 4y - 3)$

c) $0,11 + (x - 0,1)(x + 0,1)$

d) $(7 - y)^2 - (3y^2 - 8y + 40)$

e) $(12x^2 - 5x + 2) - (6x + 1)^2$

f) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - \left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x - 6\right)$

4. Doprowadź wyrażenia algebraiczne do jak najprostszej postaci. Zapisz rozwiązanie w zeszycie.

a) $(6+a)^2 + (8+a)^2$

b) $(5-a)^2 + (a-3)^2$

c) $(4-a)(4+a) + (a-3)(a+3)$

d) $(2+a)^2 - (a+1)^2$

e) $(a-1)^2 - (7-a)^2$

f) $(10+a)(10-a) - (9+a)(9-a)$

5. Oblicz w zeszycie sumę kwadratów liczb $3n-1$ i $3n+1$.

6. Wykonaj działania w zeszycie, wykorzystując wzory skróconego mnożenia. Przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(x+\sqrt{2})^2 + (x-\sqrt{2})^2 - (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

b) $(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y) + (2\sqrt{3}x+4) - (x+\sqrt{3})^2$

c) $(\sqrt{6}+x)^2 - (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) + (x-\sqrt{6})^2$

7. Sprowadź do możliwie najprostszej postaci wyrażenie $(2a-1)(2a+1) - (1+a^2)$, a następnie oblicz w zeszycie jego wartość dla $a = \frac{1}{3}$.

8. Oblicz w zeszycie wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.

a) $(x+2y)^2 - (3+x)(3-x) - (x^2-9)$ dla $x = \frac{1}{2}$ i $y = -2$

b) $4x^2 + (2x+y)(y-2x) - (x-y)^2$ dla $x = -0,5$ i $y = \frac{1}{2}$

c) $-(x+2y)^2 + (x-3y)^2 - 5y^2$ dla $x = -4$ i $y = \frac{1}{4}$

9. Uzasadnij, że dla dowolnych wartości a wartość liczbową wyrażenia $(4a+1)^2 + (3a+2)(3a-2) - (1+5a)^2 + (2a+5)$ jest dodatnia.

10. Doprowadź wyrażenie $(2x+1)^2 + (\sqrt{5}+x)(x-\sqrt{5}) - (1+5x^2)$ do jak najprostszej postaci, a następnie oblicz w zeszycie jego wartość dla $x = 2$.

11. O ile mniejsze jest pole kwadratu o boku o długości x cm od pola kwadratu o boku o długości $(x+5)$ cm? Zapisz odpowiedź w zeszycie w postaci wyrażenia, doprowadź je do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $x = 8$ cm.

12. Kwadrat ma bok o długości a cm, a prostokąt ma jeden bok dłuższy o 2 cm od boku kwadratu, zaś drugi – o 2 cm krótszy. Która z tych figur ma większe pole i o ile?



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Najprostszą postacią wyrażenia algebraicznego $(2-a)^2 - (2+a)^2$ jest:
A. -4 B. $-4a$ C. $-8a$ D. -8
- Przekształcając wyrażenie algebraiczne $(x+4y)^2 + (y-4x)^2$ do jak najprostszej postaci, otrzymamy:
A. $17x^2 + 17y^2$ B. $-16xy$ C. $34x^2y^2$ D. $15x^2 + 15y^2$
- Wartość wyrażenia algebraicznego $(a+1)^2 + (3a-1)(3a+1) - 2a$ dla $a = -0,1$ wynosi:
A. 1 B. $-0,1$ C. -1 D. $0,1$
- Po doprowadzeniu wyrażenia algebraicznego $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + (2\sqrt{2}+1)^2 - (2\sqrt{2}-1)^2$ do najprostszej postaci otrzymamy:
A. 20 B. $8\sqrt{2}+1$ C. 0 D. $1-8\sqrt{2}$

2.3. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

Mnożąc sumę algebraiczną przez jednomian, mnożymy każdy składnik sumy przez dany jednomian i dodajemy otrzymane iloczyny.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ćwiczenie 1.

Wykonaj mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian.

$$\text{a) } 3(2a+3b-5c) \quad \text{b) } \frac{1}{2}a(-4x+6y-2) \quad \text{c) } -xy(5x+2y^2-7)$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } 3(2a+3b-5c) = 3 \cdot 2a + 3 \cdot 3b + 3 \cdot (-5c) = 6a + 9b - 15c$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}a(-4x+6y-2) = -2ax + 3ay - a$$

$$\text{c) } -xy(5x+2y^2-7) = -5x^2y - 2xy^3 + 7xy$$

Aby podzielić sumę algebraiczną przez liczbę, dzielimy każdy składnik sumy przez tę liczbę i otrzymane ilorazy dodajemy.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \text{ przy założeniu, że } c \neq 0$$

Ćwiczenie 2.

Wykonaj dzielenie sum algebraicznych przez liczbę.

a) $(5x + 10y - 15z) : 5$

b) $\frac{-2a + 3b}{-2}$

Rozwiązanie:

a) $(5x + 10y - 15z) : 5 = 5x : 5 + 10y : 5 - 15z : 5 = x + 2y - 3z$

b) $\frac{-2a + 3b}{-2} = \frac{-2a}{-2} + \frac{3b}{-2} = a - 1\frac{1}{2}b$

Mnożenie sumy algebraicznej przez sumę algebraiczną polega na mnożeniu każdego składnika pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy i dodaniu otrzymanych iloczynów.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Ćwiczenie 3.

Wykonaj mnożenie sum algebraicznych.

a) $(2x - y)(3x + 2y - z)$

b) $(2a + b)(3a - b)(a - b)$

Rozwiązanie:

a) $(2x - y)(3x + 2y - z) = 6x^2 + 4xy - 2xz - 3xy - 2y^2 + yz =$
 $= 6x^2 + xy - 2xz - 2y^2 + yz$

b) $(2a + b)(3a - b)(a - b) = (6a^2 - 2ab + 3ab - b^2)(a - b) = (6a^2 + ab - b^2)(a - b) =$
 $= 6a^3 - 6a^2b + a^2b - ab^2 - ab^2 + b^3 = 6a^3 - 5a^2b - 2ab^2 + b^3$

Wyrażenia algebraiczne przekształcamy, starając się zapisać je w jak najprostszej postaci. Podczas przekształcania stosujemy dodawanie sum algebraicznych, mnożenie sum algebraicznych, dzielenie sum algebraicznych przez liczbę oraz wzory skróconego mnożenia.

Ćwiczenie 4.

Przekształć wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci.

a) $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2) - \frac{a^4 - b^4}{2}$

b) $-[a^2 - (2ab - b^2)] + a(a + 2b)$

Rozwiązanie:

a) $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2) - \frac{a^4 - b^4}{2} = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - \frac{a^4}{2} + \frac{b^4}{2} =$
 $= a^4 - b^4 - 0,5a^4 + 0,5b^4 = 0,5a^4 + 1,5b^4$

b) $-[a^2 - (2ab - b^2)] + a(a + 2b) = -(a^2 - 2ab + b^2) + a^2 + 2ab =$
 $= -a^2 + 2ab - b^2 + a^2 + 2ab = 4ab - b^2$

Ćwiczenie 5.

Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i y wartość liczbową wyrażenia $-[-2xy + (x^2 + y^2)] + (x - y)^2$ jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} -[-2xy + (x^2 + y^2)] + (x - y)^2 &= -(-2xy + x^2 + y^2) + x^2 - 2xy + y^2 = \\ &= 2xy - x^2 - y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 0 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dla każdej liczby rzeczywistej x i y wartość liczbową tego wyrażenia jest równa 0. Liczba 0 jest liczbą naturalną.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Zapisz w zeszycie w postaci sumy algebraicznej.

a) $3(x - 7)$

b) $-4x^2(2x - y + 0,5z)$

c) $(5a - 3b - c) \cdot 2a$

d) $-\frac{1}{2}(3x^3 - 2x^2 + x)$

e) $(6ab + 3bc - ac) : 3$

f) $\frac{15x + 20y - 40z}{5}$

2. Opuść nawiasy i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych. Zapisz rozwiązanie w zeszycie.

a) $3(a - 5) + 4(7 - a)$

b) $1,5(ab + 2) - (ab - 2) \cdot 2$

c) $-\frac{2x^2 - 4y + xy}{2} + 2(0,5x^2 - y - xy)$

d) $-3(0,5xy + 2x) + (-3xy + 6x) : 3$

3. Zapisz w zeszycie w postaci sumy algebraicznej.

a) $2x(x - 1)(x + 2)$

b) $(x + 1)(x + 2)(x - 3)$

c) $3a(2 + a)^2$

d) $5b(1 - b)(1 + b)$

4. Dane są wyrażenia $A = (x + y)^2$, $B = (x + y)(y - x)$ i $C = (2x + y)(x - 2y)$. Wykonaj działania w zeszycie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $A + 2B$

b) $C - 3A$

c) $A \cdot B$

d) $\frac{1}{2}C + B$

5. Przekształć wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci, a następnie oblicz w zeszycie wartość liczbową wyrażenia dla wskazanych liczb.
- $(x+1)(x^2-x-1)-(1-x^3)$ dla $x=-2$
 - $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-\left(\frac{1}{16}x^4+1\right)$ dla $x=12,76$
 - $(2a+1)^2:2+2(a+1)(a-2)$ dla $a=-2,5$
 - $\frac{(5-a)(a-5)}{5}+5(1+0,04a^2)$ dla $a=0,125$
6. Długości boków pewnego prostokąta są równe $2a+3b$ oraz $3a+2b$. Oblicz w zeszycie obwód i pole tego prostokąta. Wynik podaj w najprostszej postaci sumy algebraicznej.
7. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość $x+1$ i $3x+5$. Oblicz w zeszycie pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej tego trójkąta.
8. Zapisz w zeszycie w postaci wyrażenia algebraicznego:
- długość boku trójkąta równobocznego o obwodzie $6x+12y$,
 - długość boku rombu o obwodzie $4a+8b+12c$,
 - długość prostokąta o obwodzie $6a+8b$ i szerokości $a+2b$.
9. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci. Rozwiązanie zapisz w zeszycie.
- $(a-b-c)(a+b+c)-(a^2-b^2-c^2)$
 - $(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$
10. Dane są liczby $a=\sqrt{2}+1$ i $b=2-\sqrt{2}$. Oblicz w zeszycie:
- a^2
 - $a \cdot b$
 - $2a^2+(a+b)^2$
 - $\frac{1}{2}(a-b)+b$
11. Uzasadnij, że liczba $\frac{(n+3)^2-(n+1)(n+5)}{2}$ jest liczbą parzystą dla dowolnej liczby naturalnej n .
12. Dane są liczby $a=2(2n-1)(n+1)-(2n^2-1) \cdot 2$ oraz $b=-(2n^2-1)^2+4n^4$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Zapisz w zeszycie różnicę liczb a i b w najprostszej postaci.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Przez które z podanych wyrażen algebraicznych należy pomnożyć sumę x^2-x+1 , aby otrzymać x^3+1 ?
- $x-1$
 - x^2+1
 - $x+1$
 - x^2+x



2. Najprostszą postacią wyrażenia algebraicznego $\frac{3x+6}{3} - \frac{2x-10}{2}$ jest:
 A. -4 B. 16 C. -3 D. 7
3. Wyrażenie $2x(x+2y)(x-y)$ zapisane w postaci sumy algebraicznej to:
 A. $2x^2 + 4xy$ B. $2x^3 + 2x^2y - 4xy^2$
 C. $x^2 + xy - 2y^2$ D. $2x^3 - 4x^2y^2$
4. Pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości $x+4$ i $2x+1$ wynosi:
 A. $x^2 + 4,5x + 2$ B. $2x^2 + 9x + 4$
 C. $x^2 + 9x + 4$ D. $(x+4)(2x+1)$

2.4. Wylączanie wspólnego czynnika poza nawias

Czynnością odwrotną do mnożenia sumy algebraicznej przez jednomian jest wylączanie wspólnego czynnika poza nawias.

Jeżeli wszystkie wyrazy sumy algebraicznej mają wspólny czynnik, to sumę tę możemy przedstawić w postaci iloczynu tego czynnika i pewnej prostszej sumy.

$$ab + ac = a(b + c)$$

Ćwiczenie 1.

Wylącz wspólny czynnik poza nawias.

a) $3x + 6y - 12z$ b) $y^2 + 2xy + y$ c*) $2a(a+b) - b(a+b)$

Rozwiązanie:

a) $3x + 6y - 12z = 3 \cdot x + 3 \cdot 2y - 3 \cdot 4z = 3(x + 2y - 4z)$

b) $y^2 + 2xy + y = y(y + 2x + 1)$

c*) $2a(a+b) - b(a+b) = (a+b)(2a-b)$

Umiejętność wylączania wspólnego czynnika można wykorzystać przy przekształcaniu wyrażen algebraicznych.

Ćwiczenie 2.

Przekształć wyrażenia algebraiczne do prostszej postaci.

a) $\frac{2a+4b}{2}$ b) $\frac{5x+15y}{5} - \frac{6y-9x}{3}$ c) $\frac{3a^2+6a+3}{3}$

Rozwiązanie:

a) $\frac{2a+4b}{2} = \frac{2(a+2b)}{2} = a+2b$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{5x+15y}{5} - \frac{6y-9x}{3} &= \frac{5(x+3y)}{5} - \frac{3(2y-3x)}{3} = \\ &= (x+3y) - (2y-3x) = x+3y-2y+3x = 4x+y \\ \text{c)} \quad \frac{3a^2+6a+3}{3} &= \frac{3(a^2+2a+1)}{3} = (a+1)^2 \end{aligned}$$

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



- Wyłącz jednomian poza nawias. Rozwiązanie zapisz w zeszycie.

a) $2x+4$	b) $0,3x-0,6z$	c) $-8a+12ab$
d) $2ab+4a^2b^2+6a^3b^3$	e) $\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}xy-\frac{4}{5}y$	f) $0,5a^4+5a^3+0,5a^2+5a$
- Wyłącz wspólny czynnik poza nawias. Rozwiązanie zapisz w zeszycie.

a) $3x(x+y)+2y(x+y)$	b) $3^n+x\cdot 3^{n+1}+y\cdot 3^{n+2}$
c) $2(a+1)-3b(a+1)$	d) $5^{10}\cdot a+5^9\cdot b+5^8\cdot c$
- Wyłącz wspólny czynnik poza nawias, a następnie oblicz w zeszycie wartości wyrażeń algebraicznych.

a) $12a+24b$	dla $a=0,8$ i $b=0,6$
b) $1,5a^2-6$	dla $a=-2$
c) $3a+9b-6c$	dla $a=1,5$, $b=2\frac{1}{3}$ i $c=3\frac{1}{2}$
- Zamień w zeszycie sumę na iloczyn, wyłączając poza nawias wskazany jednomian.

a) $-0,8x+0,6b-0,5$	jednomian $0,1$
b) $\frac{4}{7}x^2-\frac{3}{7}xy+\frac{2}{7}xy^2$	jednomian $\frac{1}{7}x$
c) $abc\sqrt{3}-2a^2bc+ab^2c$	jednomian abc
d) $-27xy+81x^2y^2-243x^3y^3$	jednomian $-27xy$
- Przepisz przykłady do zeszytu. W miejsce kropek wpisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.

a) $12xyz+6xz+3xy = \dots (4yz+2z+y)$
b) $\frac{1}{3}ab+\frac{2}{3}a-b = \dots (ab+2a-3b)$
c) $0,2a-0,4a^2-0,6a^3 = \dots (1-2a-3a^2)$
d) $-21x^2y^2+14xy-7 = \dots (3x^2y^2-2xy+1)$
- Zapisz w zeszycie sumę, która pozostanie po wyłączeniu poza nawias z wyrażenia $16a^2b^2c^2-8a^2bc^2+4ab^2c$ jednomianu:

a) $2a$	b) $4abc$	c) $8bc$
---------	-----------	----------

Wskaż sumę, z której nie można już wyłączyć wspólnego czynnika przed nawias.

7. Doprowadź wyrażenia algebraiczne do jak najprostszej postaci. Rozwiązanie zapisz w zeszycie.

a) $\frac{15a + 12b - 9c}{3}$

b) $\frac{10x^2 - 20xy + 10y^2}{2}$

c) $\frac{7x - 14xy + 7y}{7} - \frac{3x - 6xy}{3}$

d) $\frac{6 + 12a + 6a^2}{6} - \frac{8a^2 + 16a + 8}{8}$



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Który z jednomianów należy wyłączyć z sumy $-1,2ab + 2,4a^2b + 3,6ab^2$, aby w nawiasie pozostało $1 - 2a - 3b$?
A. $1,2ab$ B. $-1,2ab$ C. $1,2b$ D. ab
- Po wyłączeniu z sumy algebraicznej $-3m^4n^4 - 0,3m^2n^2 + 0,1mn$ jednomianu $-0,1mn$ w nawiasie otrzymamy:
A. $30m^3n^3 + 3mn - 1$ B. $-30m^3n^3 + 3mn - 1$
C. $30m^3n^3 - 3mn + 1$ D. $30m^3n^3 + 3mn$
- W którym przykładzie popełniono błąd?
A. $2(x - 4) = 2x - 8$ B. $-7(y - 1) = -7y + 7$
C. $\frac{1}{2}(b^2 - c) = \frac{1}{2}b^2 - c$ D. $-0,4a(a + b) = -0,4a^2 - 0,4ab$

2.5. Zadania utrwalające

- Przekształć w zeszycie wyrażenia na sumy algebraiczne.
a) $(1,5 + x)^2$ b) $\left(3x - 1\frac{1}{3}\right)^2$
c) $(4,2 - 5y)^2$ d) $\left(2\frac{1}{4} + 4y\right)^2$
e) $(-0,1 + 1,1x)(0,1 + 1,1x)$ f) $\left(\frac{1}{9} + x\right)\left(-\frac{1}{9} + x\right)$
- Stosując odpowiedni wzór skróconego mnożenia, przedstaw w zeszycie w postaci sumy algebraicznej.
a) $(-1 + x)^2$ b) $(y + 2)(-2 + y)$
c) $(2,2 + x)^2$ d) $(y - 1,6)^2$
e) $(3x^2 - 4x^3)(3x^2 + 4x^3)$ f) $(-y - 7)^2$

3. Wykonaj działania w zeszycie.

a) $(6 + \sqrt{5})(6 - \sqrt{5})$

b) $(\sqrt{11} - 7)^2$

c) $(3 + \sqrt{3})^2$

d) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$

e) $(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3})(5\sqrt{5} + 3\sqrt{3})$

f) $(10\sqrt{5} + 5\sqrt{10})^2$

4. Zapisz w zeszycie wyrażenia algebraiczne w jak najprostszej postaci.

a) $(5y + 2)^2 - (y - 3)^2$

b) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 1$

c) $(4x + 3)(3 - 4x) - (2x + 1)^2$

d) $(6xy + 8)^2 + (6 - 8xy)^2$

5. Sprowadź do możliwie najprostszej postaci wyrażenie algebraiczne:

$(a - 8)^2 + (a + 4)(a - 4) - (a + 2)^2$, a następnie oblicz w zeszycie jego wartość dla $a = -2$.

6. Oblicz w zeszycie różnicę kwadratów liczb $5n + 2$ i $5n - 2$.

7. Zapisz w zeszycie w postaci wyrażenia algebraicznego sumę kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, z których najmniejsza jest równa $2n - 1$. Następnie przekształć ją do jak najprostszej postaci.

8. Uzasadnij, że jeżeli do iloczynu dwóch kolejnych liczb całkowitych dodamy większą z nich, to otrzymamy kwadrat większej z tych liczb.

9. Uzasadnij, że dla dowolnych wartości a wartość liczbową wyrażenia

$5 + (1 - 2a)^2 - (a - 2)^2 - (5 + 3a^2)$ jest ujemna.

10. Sprawdź, czy równość $1 + (a + 3)(a + 3) - 14 = (2 + a)(a - 2) + 6a$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby a .

11. Opuść nawiasy i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych. Zapisz rozwiązanie w zeszycie.

a) $\left(x + 2y + 3\frac{1}{3}\right) \cdot 3 + 3\left(2\frac{1}{3} - 2x - y\right)$

b) $10(1,2ab + 2,2) - (-2,5ab + 3,5) \cdot 2$

c) $\frac{8x^2 - 6y + 4xy}{2} + (3x^2 - 6y - 12xy) : 3$

d) $-\frac{1}{2}(10x + 20x^2) - (10x^2 + 15x) : 5$

12. Zapisz w zeszycie w postaci sumy algebraicznej.

a) $x^2(2 - x)(3 + x)$

b) $(2x + 3)(x - 1)(2x - 3)$

c) $0,5c(4 + 2c)^2$

d) $9pq(9 - p)(9 + q)$

13. Przekształć wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci. Rozwiązanie zapisz w zeszycie.

a) $(x-1)(x^2+x+1)+(1+x^3)$ b) $(2x-3)(2x+3)(x^2-1)-(4x^4+9)$

c) $\frac{(3a+3)(a+1)}{3}-(a+1)(a-2)$ d) $\frac{(2-a)(2a+1)}{-1}-2(-1+a^2)$

14. Dane są liczby $a = x\sqrt{3} - 3$ i $b = -x\sqrt{3}$. Oblicz w zeszycie:

a) $2a + b$ b) $a \cdot 3b$ c) $(a+b)(a-b)$ d) $\frac{1}{3}(a+b)^2$

15. Dane są liczby $a = (2n^2 + 1) - (2n + 2)(n + 1)$ oraz $b = -(n - 1)^2 + n(n - 2)$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Zapisz w postaci sumy algebraicznej iloraz liczby a przez b .

16. Wylącz największy wspólny czynnik poza nawias. Zapisz rozwiązanie w zeszycie.

a) $25xy - 5x$ b) $\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y$
c) $-18a^2 + 9ab$ d) $7a^2b + 3,5a^2 - 0,5$
e) $1\frac{1}{4}xyz - \frac{3}{4}yz - \frac{1}{4}xz$ f) $a^4b^4 - a^3b^3 - a^2b^2 + ab$

17. Wylącz z sumy algebraicznej $-1,1xyz + 2,2xy - 3,3xz$ jednomian:

a) $0,1x$ b) $-x$

Zapisz rozwiązanie w zeszycie. Podaj przykłady dwóch innych jednomianów, które można wylączyć z tej sumy algebraicznej.

18. Przepisz przykłady do zeszytu. W miejsce kropek wpisz odpowiednie wyrażenia.

a) $-5,2x - 2,6xz + 3,9xy = \dots(4 + 2z - 3y)$

b) $22a - 44a^2 + 11a^3 = \dots(2 - 4a + a^2)$

19. Wylącz wspólny czynnik poza nawias, a następnie oblicz w zeszycie wartość wyrażenia algebraicznego.

a) $2a^2 + 4ab$ dla $a = 14,2$ i $b = 2,9$

b) $5a - 15b$ dla $a = -3,4$ i $b = 2,2$

20. Długości krawędzi pewnego prostopadłościanu są równe: $a + 2b$, $a + b$ oraz $2a + b$. Oblicz w zeszycie objętość tego prostopadłościanu. Wynik podaj w postaci sumy algebraicznej.



RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI LINIOWE

3.1. Równania równoważne

Za pomocą równań można opisać, a następnie rozwiązać wiele problemów matematycznych, chemicznych i fizycznych.



Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą to równanie, które można zapisać w postaci $ax + b = 0$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Jeśli po podstawieniu liczby w miejsce niewiadomej otrzymamy równość, to o tej liczbie powiemy, że spełnia dane równanie.

Ćwiczenie 1.

Sprawdź, czy podane liczby spełniają równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą $2x - 1 = x + 3$.

a) $x = 4$

Rozwiązanie:

$$L = 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

$$P = 4 + 3 = 7$$

$$L = P$$

Liczba 4 spełnia równanie:

$$2x - 1 = x + 3.$$

b) $x = 2$

Rozwiązanie:

$$L = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$P = 2 + 3 = 5$$

$$L \neq P$$

Liczba 2 nie spełnia równania:

$$2x - 1 = x + 3.$$

L – lewa strona równania; P – prawa strona równania

Każdą liczbę spełniającą równanie nazywamy **rozwiązaniem równania** lub **pierwiastkiem równania**.

Ćwiczenie 2.

Sprawdź, która z liczb: 1; 0; $-2,5$ jest rozwiązaniem równania $-3(x + 1) = 2 - x$.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy liczba 1 jest rozwiązaniem równania $-3(x + 1) = 2 - x$:

$$L = -3(1 + 1) = -6$$

$$P = 2 - 1 = 1$$

$$L \neq P$$

Odpowiedź: Liczba 1 nie jest rozwiązaniem tego równania, bo go nie spełnia.

Sprawdzamy, czy liczba 0 jest rozwiązaniem równania $-3(x + 1) = 2 - x$:

$$L = -3(0 + 1) = -3$$

$$P = 2 - 0 = 2$$

$$L \neq P$$

Odpowiedź: Liczba 0 nie jest rozwiązaniem tego równania, bo go nie spełnia.

Sprawdzamy, czy liczba $-2,5$ jest rozwiązaniem równania $-3(x + 1) = 2 - x$:

$$L = -3(-2,5 + 1) = 4,5$$

$$P = 2 - (-2,5) = 4,5$$

$$L = P$$

Odpowiedź: Liczba $-2,5$ jest rozwiązaniem tego równania, bo je spełnia.

Jedną z metod rozwiązywania równań jest **metoda równań równoważnych**. Pozwala ona przekształcić równanie w **równanie równoważne**, czyli takie, które ma ten sam zbiór rozwiązań. Aby sprawdzić poprawność wyniku, należy pod niewiadomą x do równania wyjściowego podstawić wynik. Po wykonaniu działań patrzymy, czy wartości po obu stronach równania są sobie równe.

Równanie równoważne możemy otrzymać w wyniku **przekształcenia** którejkolwiek ze stron równania poprzez opuszczenie nawiasów lub zredukowanie wyrazów podobnych (w taki sam sposób, jak podczas przekształcania wyrażeń algebraicznych).

Ćwiczenie 3.

Przekształć równanie do postaci równania równoważnego.

a) $2(x - 1) = 6$

Rozwiązanie:

$2 \cdot x - 2 \cdot 1 = 6$ – opuszczamy nawias (mnożymy każdy wyraz w nawiasie przez 2)

$2x - 2 = 6$ – otrzymujemy równanie równoważne

Sprawdzenie (fakultatywnie):

$2(x - 1) = 2x - 2$ – sprawdzamy równoważność równań

$2(1 - 1) = 2 \cdot 1 - 2$

b) $7x + 2 - 3x + 1 = -x - 5 + 3 + x$

Rozwiązanie:

$7x + 2 - 3x + 1 = -x - 5 + 3 + x$ – redukujemy wyrazy podobne

$4x + 3 = -2$ – otrzymujemy równanie równoważne

Aby otrzymać równanie równoważne, możemy także do obu stron równania **dodać** lub **odjąć** to samo wyrażenie.

Ćwiczenie 4.

a) Dodaj do obu stron równania $2x - 2 = 6$ tę samą liczbę. Sprawdź, czy liczba 4 jest rozwiązaniem tego równania.

Rozwiązanie:

$2x - 2 = 6 \mid + 2$ – do obu stron równania dodajemy 2

$2x - 2 + 2 = 6 + 2$ – redukujemy wyrazy podobne

$2x = 8$ – otrzymujemy równanie równoważne

Sprawdzenie:

Sprawdzamy, czy liczba 4 jest rozwiązaniem równania $2x - 2 = 6$

$L = 2 \cdot 4 - 2 = 8 - 2 = 6, P = 6, L = P$

Odpowiedź: Liczba 4 jest rozwiązaniem równania $2x - 2 = 6$.

b) Odejmij od obu stron równania $6x = 3x + 1$ to samo wyrażenie algebraiczne.

Rozwiązanie:

$6x = 3x + 1 \quad | -3x$ – od obu stron równania odejmujemy to samo wyrażenie $3x$

$6x - 3x = 3x + 1 - 3x$ – redukujemy wyrazy podobne

$3x = 1$ – otrzymujemy równanie równoważne

Dodawanie i odejmowanie od obydwu stron równania tego samego wyrażenia jest działaniem równoznacznym z **przenoszeniem** tego wyrażenia na drugą stronę równania ze **znakiem przeciwnym**.

Ćwiczenie 5.

Przenieś wyrazy równania tak, aby po lewej stronie znalazły się niewiadome.

a) $8x = 5x + 15$

Rozwiązanie:

$8x - 5x = 15$ – przenosimy wyraz $5x$ z prawej strony na lewą

$3x = 15$ – otrzymujemy równanie równoważne

b) $7x - 4 = 3$

Rozwiązanie:

$7x = 3 + 4$ – przenosimy liczbę -4 z lewej strony na prawą

$7x = 7$ – otrzymujemy równanie równoważne

Aby otrzymać równanie równoważne, możemy również obie strony równania **pomnożyć** lub **podzielić** przez taką samą liczbę różną od zera.

Ćwiczenie 6.

a) Pomnóż obie strony równania $\frac{1}{5}x = 2$ przez tę samą liczbę.

Rozwiązanie:

$\frac{1}{5}x = 2 \quad | \cdot 5$ – obie strony równania mnożymy przez 5

$\frac{1}{5}x \cdot 5 = 2 \cdot 5$ – wykonujemy mnożenie

$x = 10$ – otrzymujemy równanie równoważne

b) Podziel obie strony równania $-4x = 8$ przez tę samą liczbę.

Rozwiązanie:

$-4x = 8 \quad | : (-4)$ – obie strony równania dzielimy przez -4

$\frac{-4x}{-4} = \frac{8}{-4}$ – wykonujemy dzielenie

$x = -2$ – otrzymujemy równanie równoważne

Rozwiązanie równania polega na znalezieniu wszystkich liczb, które je spełniają, lub na pokazaniu, że takich liczb nie ma. Po rozwiązaniu równania warto sprawdzić, czy otrzymana liczba spełnia to równanie. Sprawdzenie ma na celu wykrycie błędów rachunkowych popełnionych w trakcie obliczeń.

Ćwiczenie 7.

Rozwiąż równanie $4(x+2)-(x-1)=17-x$.

Rozwiązanie:

$4x+8-x+1=17-x$ – opuszczamy nawiasy

$3x+9=17-x$ – redukujemy wyrazy podobne

$3x+x=17-9$ – przenosimy na lewą stronę równania wyraz $-x$, a na prawą stronę liczbę 9 (pamiętajmy o zmianie znaków)

$4x=8$; 4 – dzielimy obie strony równania przez 4

$x=2$ – otrzymujemy rozwiązanie równania

Sprawdzenie:

$$L=4 \cdot (2+2)-(2-1)=4 \cdot 4-1=15$$

$$P=17-2=15$$

$$L=P$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $4(x+2)-(x-1)=17-x$ jest liczba 2.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Które z podanych liczb spełniają poniższe równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą?

a) $7(x-1)+3=3x+4$ 5; 2; -1; -2

b) $-(x-10)+(9-x)=19$ 3; 1; 0; -3

c) $0,6(5-x)+1,2=-1,8-(x-2)$ 2; 6; -8; -10

d) $\frac{1}{4}x+9=3-\left(\frac{3}{4}-x\right)$ -9; 0; 6; 9

2. Sprawdź, czy podana liczba spełnia dane równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

a) $y-8=15-3y-30+6y+8$ -2

b) $-2,5(0,4y-0,8)=2(2-1,5y)$ 1

c) $-\frac{1}{3}y-2=3+\frac{1}{2}y$ -6

d) $3-\frac{2(y-1)}{6}+\frac{3y-2}{4}=0$ 4

3. Wskaż wśród podanych równań równania równoważne.

a) $5(x+1)=12-3x$

b) $x+15=20x$

c) $\frac{x}{5}+3=4x$

d) $5x-3-4x=4x+1-4x$

e) $5x-3=4x+1$

f) $5x+5=12-3x$

4. Rozwiąż równania w zeszycie. Sprawdź poprawność ich rozwiązania.
- a) $6x - 2 + x = 5x + 4$ b) $10 = 2 - 4y - y + 3$ c) $3 + 2(x - 1) = 1$
d) $4 - 3(5y + 1) = -29$ e) $5x - 8 = 0,8 + 4,6x$ f) $-y + 10,9 = 1,7y + 0,1$
5. Zapisz i rozwiąż w zeszycie odpowiednie równania.
- a) Liczba o 1,2 większa od x jest równa 15,5.
b) Suma liczby 6 i trzeciej części liczby y wynosi -4 .
c) Dwukrotność liczby x pomniejszona o 3,4 jest równa 21,8.
d) Różnica piątej części liczby y i liczby 2,8 jest równa liczbie 5.
6. Rozwiąż równania w zeszycie.
- a) $7(x - 5) + 2x = 1$ b) $\frac{1}{3}x + 4 - x = -5$
c) $0,3x - 1,8 = 1,5x - 2,4$ d) $-8(x - 2) - 2(x + 4) = -24$
e) $2\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}(x + 4) = 6$ f) $0,05 + 0,2(x + 2) = -0,15$



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Po przeniesieniu wyrazów równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą $9x - 2 = 4 + 6x$ tak, aby po lewej stronie znalazły się niewiadome, otrzymamy równanie:
- A. $15x = 2$ B. $3x = 2$
C. $15x = 6$ D. $3x = 6$
2. Rozwiązanie którego z równań jest liczbą naturalną?
- A. $3x + 1 = 10$ B. $5y + 2 = 3y - 4$
C. $6z = 7z + 1$ D. $a - 6 = -5\frac{1}{2}$
3. Liczba -6 jest rozwiązaniem równania:
- A. $5(1 - x) + 3 = -2x + 3$ B. $5(x - 1) + 15 = -2 + 3x$
C. $3(2x + 1) + 2 = 1 - (x - 2)$ D. $2 - (x + 3) = 1 + 3(x - 1)$
4. Rozwiązaniem równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą $\frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{2} + x\right) = -1$ jest liczba:
- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

3.2. Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą może mieć **jedno rozwiązanie**, **nieskończenie wiele rozwiązań** lub **nie mieć rozwiązań**.

Ćwiczenie 1.

Ustal, ile rozwiązań mają podane równania.

a) $-2(x-3)+5=1-(4+x)$

Rozwiązanie:

$$-2x+6+5=1-4-x \text{ - opuszczamy nawiasy}$$

$$-2x+11=-3-x \text{ - redukujemy wyrazy podobne}$$

$$-2x+x=-3-11 \text{ - przenosimy wyraz } -x \text{ na lewą stronę równania, a liczbę } 11 \text{ na prawą}$$

$$-x=-14 \mid \cdot (-1) \text{ - obliczamy } x$$

$$x=14$$

Odpowiedź: Równanie ma jedno rozwiązanie. Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór $\{14\}$.

b) $2(x+2)=2x+4$

Rozwiązanie:

$$2x+4=2x+4$$

$$2x-2x=4-4$$

$$0=0 \text{ - równość prawdziwa}$$

Odpowiedź: To równanie spełnia każda liczba rzeczywista. Zbiorem jego rozwiązań jest zbiór $\mathbb{R}$ - równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

c) $5x+1=x+2(1+2x)$

Rozwiązanie:

$$5x+1=5x+2$$

$$5x-5x=2-1$$

$$0=1 \text{ - równość nieprawdziwa}$$

Odpowiedź: Żadna liczba nie spełnia tego równania. Równanie nie ma rozwiązania - zbiorem rozwiązań tego równania jest zbiór pusty.

d) $-2(2-x)=-4+2x$

e) $3(x+1)-3x-(9-x)=x-6$

f) $3(0,1x-0,25)=4(1+0,125x)$

Równanie nazywamy **tożsamościowym**, jeśli zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb rzeczywistych.

Równanie nazywamy **sprzecznym**, jeśli zbiorem rozwiązań jest zbiór pusty.

Równanie nazywamy **oznaczonym**, jeśli ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż równania.

$$\text{a) } 2 - \frac{x-1}{2} = \frac{x}{3} + 4$$

Rozwiązanie:

$$2 - \frac{x-1}{2} = \frac{x}{3} + 4 \quad | \cdot 6 \text{ - mnożymy obie strony równania przez najmniejszy wspólny mianownik, czyli przez 6}$$

$$6 \cdot 2 - 6 \cdot \frac{x-1}{2} = 6 \cdot \frac{x}{3} + 6 \cdot 4 \text{ - wykonujemy działania}$$

$$12 - 3x + 3 = 2x + 24 \text{ - rozwiązujemy równanie}$$

$$-3x - 2x = 24 - 15$$

$$-5x = 9 \quad | : (-5)$$

$$x = -1\frac{4}{5}$$

$$\text{b) } 2\sqrt{3}x - 1 = \frac{1}{3}(5\sqrt{3}x + 4)$$

Rozwiązanie:

$$2\sqrt{3}x - 1 = \frac{1}{3}(5\sqrt{3}x + 4) \text{ - opuszczamy nawiasy}$$

$$2\sqrt{3}x - 1 = \frac{5\sqrt{3}x}{3} + \frac{4}{3} \quad | \cdot 3 \text{ - mnożymy obie strony przez 3}$$

$$6\sqrt{3}x - 3 = 5\sqrt{3}x + 4 \text{ - grupujemy wyrazy z niewiadomą po lewej stronie, a liczby po prawej stronie}$$

$$6\sqrt{3}x - 5\sqrt{3}x = 4 + 3 \text{ - wykonujemy wskazane działania}$$

$$\sqrt{3}x = 7 \quad | : \sqrt{3} \text{ - dzielimy obie strony równania przez } \sqrt{3}$$

$$x = \frac{7}{\sqrt{3}} \text{ - usuwamy niewymierność z mianownika}$$

$$x = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{c) } (x-2)^2 + 2x - 8 = (x+1)(x-1) - 1$$

Rozwiązanie:

$$(x-2)^2 + 2x - 8 = (x+1)(x-1) - 1 \text{ - stosujemy wzory skróconego mnożenia}$$

$$x^2 - 4x + 4 + 2x - 8 = x^2 - 1 - 1 \text{ - grupujemy wyrazy z niewiadomą po lewej stronie, a liczby po prawej stronie}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 2x - x^2 &= -1 - 1 - 4 + 8 - \text{wykonujemy wskazane działania} \\
 -2x &= 2 - \text{rozwiązujemy równanie} \\
 -2x &= 2 \quad | :(-2) \\
 x &= -1
 \end{aligned}$$

Podczas rozwiązywania zadań tekstowych metodą równań należy zachować właściwą kolejność wykonywania działań.

1. Dokładnie czytamy i analizujemy treść zadania, aby określić niewiadomą i ustalić zależności pomiędzy wielkościami opisanymi w zadaniu.
2. Zapisujemy w postaci równania związek pomiędzy niewiadomą a wielkościami występującymi w treści zadania.
3. Rozwiązujemy równanie.
4. Sprawdzamy, czy rozwiązanie równania spełnia warunki zadania.
5. Formułujemy odpowiedź.

Ćwiczenie 3.

Na pierwszej półce stało 2,5 razy więcej słoików niż na drugiej. Jeśli z pierwszej półki przestawimy na drugą 12 słoików, to na obu półkach będzie ich po tyle samo. Ile słoików początkowo stało na każdej z półek?

Rozwiązanie:

x – początkowa liczba słoików na drugiej półce (określamy niewiadomą)

$2,5x$ – liczba słoików na pierwszej półce

$2,5x - 12 = x + 12$ – układamy równanie i rozwiązujemy je

$$2,5x - x = 12 + 12$$

$$1,5x = 24 \quad | :1,5$$

$$x = 16$$

Sprawdzamy rozwiązanie równania z warunkami zadania:

16 – liczba słoików na drugiej półce

$2,5 \cdot 16 = 40$ – liczba słoików na pierwszej półce

$40 - 12 = 28$ – liczba słoików na pierwszej półce po zabraniu 12 słoików

$16 + 12 = 28$ – liczba słoików na drugiej półce po dostawieniu 12 słoików

Odpowiedź: Na pierwszej półce początkowo stało 40 słoików, a na drugiej 16.

Ćwiczenie 4.

Bilet ulgowy jest o 30% tańszy od biletu normalnego. Jaka jest cena każdego typu biletu, jeśli rachunek za dwa bilety normalne i trzy ulgowe wynosi 205 zł?

Rozwiązanie:

x – cena biletu normalnego w złotych (określamy niewiadomą)

$0,7x$ – cena biletu ulgowego stanowi 70% ceny biletu normalnego

$2x + 3 \cdot 0,7x = 205$ – układamy równanie i rozwiązujemy je

$$4,1x = 205$$

$$x = 50$$

Sprawdzamy rozwiązanie równania z warunkami zadania:

$$x = 50 \text{ (zł)} - \text{cena biletu normalnego (w złotych)}$$

$$0,7x = 35 \text{ (zł)} - \text{cena biletu ulgowego (w złotych)}$$

$$2 \cdot 50 + 3 \cdot 35 = 205 \text{ (zł)}$$

Odpowiedź: Cena biletu normalnego to 50 zł, a biletu ulgowego – 35 zł.

Ćwiczenie 5.

Woda morska jest 6-procentowym roztworem soli. Ile kilogramów wody słodkiej należy dolać do 50 kg wody morskiej, aby otrzymany roztwór zawierał 2% soli?

Rozwiązanie:

x – liczba określająca masę dolanej słodkiej wody w kilogramach (określamy nie-wiadomą)

$$6\% \cdot 50 - \text{masa soli w 50 kg wody morskiej}$$

$$50 + x - \text{masa 2-procentowego roztworu w kilogramach}$$

$$2\% \cdot (50 + x) - \text{masa soli (w kg) w 2-procentowym roztworze}$$

$$6\% \cdot 50 = 2\% \cdot (50 + x) - \text{układamy równanie}$$

$$0,06 \cdot 50 = 0,02 \cdot (50 + x) - \text{rozwiązujemy równanie}$$

$$3 = 1 + 0,02x$$

$$x = 100$$

Sprawdzamy rozwiązanie równania z warunkami zadania:

$$x = 100 \text{ kg} - \text{masa dolanej słodkiej wody}$$

$$6\% \cdot 50 \text{ kg} = 3 \text{ kg} - \text{masa soli w 50 kg wody morskiej}$$

$$2\% \cdot (50 + 100) \text{ kg} = 3 \text{ kg} - \text{masa soli w 2-procentowym roztworze}$$

Odpowiedź: W celu otrzymania 2-procentowego roztworu soli należy do 6-procentowego roztworu soli dolać 100 kg wody słodkiej.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Rozwiąż równania w zeszycie.

$$\text{a) } 0,3x - 2,6 = 1,5x + 2,2$$

$$\text{b) } 0,4 + 2,5x = 2,5x - 4$$

$$\text{c) } 0,6x - 2,2 = 5x + 1,1$$

$$\text{d) } -2x + 5 = 0,4x + 0,2$$

$$\text{e) } -2(x - 2,8) = 3,4x + 0,2$$

$$\text{f) } 0,2(5 + 0,3x) = 0,06x + 1$$

$$\text{g) } 6(0,1x - 0,2) = 3(x + 0,8)$$

$$\text{h) } 0,4(x - 6) = 0,2(3x + 5)$$

2. Rozwiąż równania w zeszycie.

$$\text{a) } \frac{y}{2} - \frac{y}{4} = 3 \quad \text{b) } \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 2 = x \quad \text{c) } \frac{x}{5} - \frac{x}{2} = 0,6$$

$$\text{d) } \frac{2x}{5} - \frac{1}{3} = \frac{x}{3} - \frac{2}{5} \quad \text{e) } \frac{2x}{3} - \frac{1}{30} = \frac{3x}{5} \quad \text{f) } \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 2 = 5$$

3. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $\frac{2}{3}x - 3 = \frac{2x + 10}{4}$

b) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+4}{3} = 2x$

c) $\frac{3}{4}x - \frac{4x+1}{2} + x = -\frac{3}{8}$

d) $\frac{5x-11}{4} - \frac{x-1}{10} = \frac{11x-1}{12}$

4. Rozwiąż równania w zeszycie. Przy rozwiązywaniu równania pamiętaj, że jeżeli w mianowniku wyniku pojawi się niewymierność, to należy ją usunąć.

a) $\sqrt{5x} - 1 = 4$

b) $\sqrt{3x} + 2 = 6$

c) $6 - 2\sqrt{10x} = 9 - 5\sqrt{10x}$

d) $\sqrt{2x} + 3 = \frac{1}{2}(6\sqrt{2x} - 10)$

5. Rozwiąż równania w zeszycie. Skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $5(x-2)^2 = x(5x+2) - 2$

b) $(2+3x)^2 = 9(x+1)^2 - 2$

c) $3 - (1-x)(1+x) = (x-1)^2 + 5$

d) $(x+2)^2 - 3(x-1)^2 = 2(1+x)(1-x)$

6. Maja i Agata postanowiły wykupić karnet do klubu fitness (zob. ilustracja obok). Agata odłożyła 3 razy więcej pieniędzy niż Maja. Jaką kwotą dysponuje każda z nich, jeżeli razem mają wystarczającą ilość pieniędzy na trzymiesięczny karnet?

Ceny karnetów



miesięczny – 60 zł



dwumiesięczny – 100 zł



trzymiesięczny – 140 zł

7. W pierwszym z dwóch naczyń jest dwa razy więcej wody niż w drugim. Oblicz w zeszycie, ile litrów wody było w każdym z nich, jeśli po przelaniu 12 litrów z pierwszego naczynia do drugiego w obu naczyniach znalazła się jednakowa objętość wody.

8. Pan Piotr ma 31 lat, a jego synowie odpowiednio 5 i 7 lat. Za ile lat pan Piotr będzie miał tyle lat, co obaj jego synowie razem? Oblicz w zeszycie.

9. Pięcioletnia Kasia jest o trzy lata starsza od Zosi i cztery razy młodsza od Magdy. Za ile lat Zosia i Kasia będą miały razem połowę lat Magdy? Oblicz w zeszycie.

10. Za napełnienie baku o pojemności 36 litrów benzyną bezolowową kierowca płaci 196,20 zł (zob. ilustracja obok). O ile mniej zapłaci za taką samą ilość benzyny po obniżce ceny paliwa o 5%?



11. W klasie Ia liczącej 30 osób dziewczęta stanowiły 40% uczniów. W nowym roku szkolnym, gdy klasa powiększyła się o kilku chłopców, dziewczęta stanowiły 37,5% wszystkich uczniów. Ile osób było w klasie w nowym roku szkolnym?

12. Ile kilogramów cukru należy dosypać do 50 kilogramów 10-procentowego syropu sporządzonego z tego cukru, aby jego stężenie wyniosło 20%? Oblicz w zeszycie.

13. Zakłady telewizyjne wyprodukowały 970 telewizorów w ciągu czterech miesięcy. W drugim miesiącu wyprodukowały o $\frac{1}{4}$ telewizorów więcej niż w pierwszym miesiącu. W trzecim miesiącu wyprodukowały o 40% więcej niż w pierwszym, zaś w czwartym miesiącu wykonały o 40 telewizorów więcej niż w pierwszym. Ile telewizorów wyprodukowano w każdym z tych miesięcy?
14. W księgarni pana Andrzeja słownik matematyczny jest o 2 zł droższy niż w księgarni pana Brunona. Jeśli pan Andrzej obniży cenę o 15%, a pan Brunon o 10%, to cena słownika w obu księgarniach będzie taka sama. Oblicz w zeszycie początkowe ceny słownika w obu księgarniach.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Równanie $2(x+3) - 4(2x-2) = -6x + 14$
A. nie ma rozwiązania.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.
- Która z wypowiedzi dotycząca równania $4 - 5(x+2) = -5x + 3$ jest prawdziwa?
A. Liczba 2 jest pierwiastkiem tego równania.
B. To równanie ma dwa pierwiastki.
C. To równanie jest sprzeczne.
D. To równanie jest tożsamościowe.
- Zdanie: „Suma trzech kolejnych liczb parzystych wynosi 174” można zapisać za pomocą równania (przy założeniu, że $x \in \mathbb{Z}$):
A. $2x + (2x+2) + (2x+4) = 174$
B. $x + (x+1) + (x+2) = 174$
C. $2x + (2x+1) + (2x+2) = 174$
D. $(x+2) + (x+2) + (x+2) = 174$
- Ile kilogramów wody należy odparować, aby z 6 kilogramów roztworu o stężeniu 2% otrzymać roztwór 5-procentowy?
A. 1,2 kg B. 3 kg C. 0,6 kg D. 3,6 kg



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Która liczba spełnia jednocześnie obie nierówności: $5x - 1 > 2x + 5$ i $-2(x - 1,5) \geq -5$?
A. -3 B. 0 C. 2,2 D. $6\frac{2}{3}$
2. Wśród nierówności $-2x + 4 \leq -8$; $\frac{1}{2}(x - 1) \geq \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}(x + 6) \leq x - 4\frac{2}{3}$ nierównościami równoważnymi są:
A. $\frac{1}{2}(x - 1) \geq \frac{5}{2}$ i $\frac{1}{3}(x + 6) \leq x - 4\frac{2}{3}$ B. $-2x + 4 \leq -8$ i $\frac{1}{3}(x + 6) \leq x - 4\frac{2}{3}$
C. $-2x + 4 \leq -8$ i $\frac{1}{2}(x - 1) \geq \frac{5}{2}$ D. wszystkie z podanych
3. Przedział $(6, +\infty)$ to zbiór rozwiązań nierówności:
A. $4x + 8 > 6x + 4$ B. $6x - 12 > 4x$
C. $2x - 6 < 4x + 6$ D. $10x + 24 < 6x$
4. Nierówność $2x - 3 > 4(x - 1) - x$ spełniają liczby:
A. mniejsze od 1 B. większe od 1
C. mniejsze od -1 D. większe od -1

3.4. Rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Wśród nierówności są też takie, które nie mają rozwiązań. Oznacza to, że nie spełnia ich żadna liczba rzeczywista. Nierówności te nazywamy **nierównościami sprzecznymi**. Istnieją również nierówności, które spełnia każda liczba rzeczywista. Nazywamy je **nierównościami tożsamościowymi**.

Ćwiczenie 1.

Ustal zbiór rozwiązań nierówności.

a) $2(x + 1) + x < 3(x - 2)$

Rozwiązanie:

$$2x + 2 + x < 3x - 6$$

$$2x + x - 3x < -6 - 2$$

$$0 < -8 - \text{zależność nieprawdziwa}$$

Odpowiedź: Podana nierówność jest spreczna.

b) $3(2x + 5) > 2(3x - 2)$

Rozwiązanie:

$$6x + 15 > 6x - 4$$

$$6x - 6x > -4 - 15$$

$$0 > -19 - \text{zależność prawdziwa}$$

Odpowiedź: Podana nierówność jest tożsamościowa.

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż nierówność $2x + \frac{2x-5}{7} \geq \frac{8x+7}{3}$. Zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

Rozwiązanie:

$$2x + \frac{2x-5}{7} \geq \frac{8x+7}{3} \quad | \cdot 21 - \text{obie strony nierówności mnożymy przez liczbę 21}$$

$$21 \cdot 2x + \cancel{21} \cdot \frac{2x-5}{\cancel{7}_1} \geq \cancel{21} \cdot \frac{8x+7}{\cancel{3}_1}$$

$$42x + 3(2x-5) \geq 7(8x+7)$$

$$42x + 6x - 15 \geq 56x + 49$$

$$48x - 15 \geq 56x + 49$$

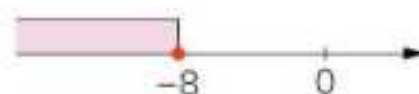
$$48x - 56x \geq 49 + 15$$

$$-8x \geq 64 \quad | :(-8)$$

$$x \leq -8$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności $2x + \frac{2x-5}{7} \geq \frac{8x+7}{3}$ są liczby z przedziału $(-\infty, -8]$.

Mnożąc lub dzieląc obie strony nierówności przez liczbę ujemną, pamiętaj o zmianie zwrotu nierówności.



Ćwiczenie 3.

Znajdź największą liczbę całkowitą, która nie spełnia podanych nierówności.

$$a) (3x-4)(5x+3) + (6x+3)(4x-3) > (6x-6)(8x+3) - (9x^2-10)$$

Rozwiązanie:

$$15x^2 + 9x - 20x - 12 + 24x^2 - 18x + 12x - 9 > 48x^2 + 18x - 48x - 18 - 9x^2 + 10$$

$$39x^2 - 17x - 21 > 39x^2 - 30x - 8$$

$$39x^2 - 17x - 39x^2 + 30x > 21 - 8$$

$$13x > 13 \quad | :13$$

$$x > 1$$

$$x \in (1, +\infty)$$

Odpowiedź: Liczba 1 jest największą liczbą całkowitą, która nie należy do zbioru rozwiązań tej nierówności.

$$b) 5(x+1) \geq -9 + 3(x-1)$$

Rozwiązanie:

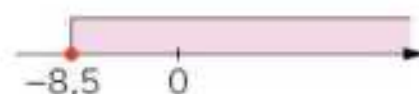
$$5x + 5 \geq -9 + 3x - 3$$

$$2x \geq -17 \quad | :2$$

$$x \geq -8,5$$

$$x \in [-8,5, +\infty)$$

Odpowiedź: Największą liczbą całkowitą, która nie należy do zbioru rozwiązań tej nierówności, jest -9.



Nierówności wykorzystujemy także do rozwiązywania zadań z treścią.

Ćwiczenie 4.

Ekspedientka wydała resztę monetami dwuzłotowymi i pięciozłotowymi. Ile mogło być monet każdego rodzaju, jeśli monet dwuzłotowych było o 4 więcej niż pięciozłotowych, a reszta nie przekraczała 25 zł?

Rozwiązanie:

x – liczba monet pięciozłotowych w reszcie (określamy niewiadomą)

$x + 4$ – liczba monet dwuzłotowych

$5x$ – kwota reszty w monetach pięciozłotowych

$2(x + 4)$ – kwota reszty w monetach dwuzłotowych

$5x + 2(x + 4) \leq 25$ – układamy i rozwiązujemy nierówność

$$5x + 2x + 8 \leq 25$$

$$7x \leq 17 \quad |:7$$

$$x \leq 2\frac{3}{7}$$

Z rozwiązania wynika, że liczba monet pięciozłotowych to 2 lub 1 (bierzemy pod uwagę tylko liczby naturalne).

Sprawdzamy rozwiązanie nierówności z warunkami zadania:

2 – liczba monet pięciozłotowych

$2 + 4 = 6$ – liczba monet dwuzłotowych

$2 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 22$ – wydana reszta

$$22 \leq 25$$

1 – liczba monet pięciozłotowych

$$5 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 15$$

$$15 \leq 25$$

Odpowiedź: Ekspedientka wydała 2 monety pięciozłotowe i 6 monet dwuzłotowych lub 1 monetę pięciozłotową i 5 monet dwuzłotowych.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Rozwiąż nierówności w zeszycie.

a) $2(x + 1) + 3(2 + x) \geq -12$

b) $4(x - 5) - 2(x - 1) < 13$

c) $3x - 2[2x - 3(x + 5)] \geq 6x - 11$

d) $3(x - 4) \leq 24 - 2(x + 3)$

e) $5(x + 1) \geq -9 + 3(x - 1)$

f) $1 - 6x < 5x - 2[4(3x - 1) - 3x]$

2. Ustal zbiór rozwiązań nierówności.

a) $3(2x - 5) \geq 2(3x + 1)$

b) $3(x - 1) - 2x < 4 - (3 - x)$

- c) $2(x-5) + 8(x+15) > 5(2x+5)$
 d) $30 - 3(3x+5) < 11x + 4(10-5x)$
 e) $4 - 3[x - 2(2x+3)] < 2(5x+9) - x$
 f) $2[2x - 3(x+5)] > 3x - 5(x+40)$

3. Rozwiąż nierówności w zeszycie. Zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

- a) $x + 0,5x - 4 < 2x$ b) $3 - (x-4) \geq \frac{1}{2}x + 7$
 c) $\frac{x-5}{3} \leq -1$ d) $-0,1(10x-3) \geq x-0,1$
 e) $\frac{1}{5}x - 0,6x < 1$ f) $\frac{1}{3}x - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) \geq -2$

4. Rozwiąż nierówności w zeszycie. Zapisz rozwiązanie w postaci przedziału liczb.

- a) $\frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{4} > \frac{1}{12}$ b) $\frac{x-2}{2} + \frac{x+3}{5} < \frac{3}{10}$
 c) $\frac{x+3}{3} - \frac{x-7}{2} \geq 3$ d) $\frac{x-1}{5} > \frac{x+2}{6} + \frac{7}{15}$
 e) $\frac{x-3}{7} - \frac{x-2}{4} \leq \frac{5}{7}$ f) $\frac{3x-2}{5} - x \geq -1$

5. Rozwiąż nierówności w zeszycie.

- a) $(9x-3)(4x-5) - (8x-2)(3x-6) < (6x-2)(2x-3) - 41$
 b) $2(x+5) - 3(x-1) > (3x+5)(2x-3) - (3x+6)(2x-4)$
 c) $(10x+9)^2 - (8x+7)^2 \leq (6x+5)^2 + 5$
 d) $(8x+2)^2 - (8x+5)(8x-5) \geq (2x+3)^2 - (2x-10)(2x+10)$

6. Znajdź największą liczbę całkowitą, która nie spełnia nierówności $3(x-1) + 4 \geq 2(x+2) - 2$.

7. Podaj największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{6} \leq \frac{2-x}{18} - 1.$$

8. Laweta musi przewieźć samochody osobowe o masie 1200 kg każdy. Ile samochodów można maksymalnie załadować na tę lawetę (zob. ilustracja obok), jeśli będzie ona jechała przez wiadukt o nośności 18 ton? (nośność wiaduktu – dopuszczalne obciążenie)



Masa własna: 3,5 t
 Ładowność: 16 t

9. Barka rzeczna o wyporności 110 ton i masie własnej 11 ton przewozi kontenery, z których każdy waży 7 ton. Ile maksymalnie kontenerów można jeszcze załadować na tę barkę, jeśli na pokładzie jest ich już 11? (wyporność barki rzecznej – łączna masa pustej barki i jej maksymalnego ładunku)
10. Do klubu jeździeckiego należy 8 dziewcząt i 25 chłopców. Ile dziewcząt powinno się jeszcze zgłosić, aby stanowiły one przynajmniej 40% wszystkich członków?
11. Zosia odkłada do skarbonki po 12 zł tygodniowo, a Marysia, która ma już zaoszczędzone 35 zł, odkłada tygodniowo po 9 zł. Po ilu tygodniach Zosia będzie miała więcej pieniędzy niż Marysia? Oblicz w zeszycie.
12. Klient, który wpłacił do banku 5000 zł na dwie lokaty terminowe, zniszczył otrzymane potwierdzenia. Jakie musi być oprocentowanie drugiej lokaty, jeżeli klient pamięta, że po roku ma otrzymać ponad 470 zł odsetek z obu lokat razem? Pamiętaj, że podane oprocentowanie to oprocentowanie w skali roku.



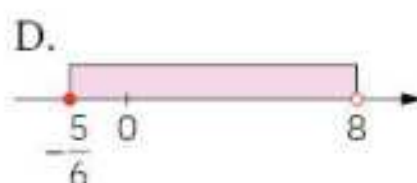
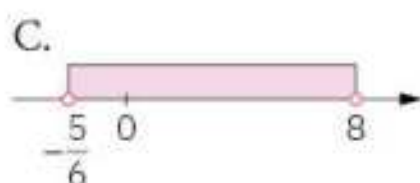
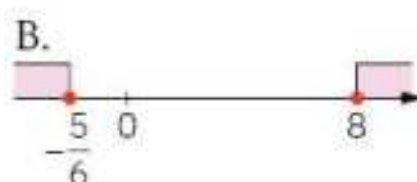
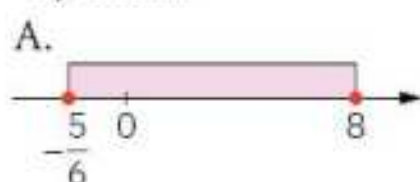
13. Wyznacz trzycyfrową liczbę naturalną, której cyfra dziesiątek jest dwa razy większa od cyfry jedności, cyfra setek jest o 4 większa od cyfry dziesiątek, a suma cyfr tej liczby jest mniejsza od 11.
14. Maciek ma mniej niż 50 zł w monetach jednozłotowych, dwuzłotowych i pięciozłotowych. Są tam cztery monety pięciozłotowe, a monet dwuzłotowych jest o 7 więcej niż monet jednozłotowych. Ile maksymalnie może mieć Maciek monet jednozłotowych, a ile dwuzłotowych? Oblicz w zeszycie.
15. W tabeli przedstawiono liczbę punktów uzyskanych przez zawodnika w czterech rundach gry (w sumie rund było pięć). Ile punktów minimum musi otrzymać w V rundzie, aby średnia punktów zdobytych przez niego w turnieju wynosiła powyżej 80?

Numer rundy	Liczba punktów
I	82
II	84
III	78
IV	79
V	?

16. Długości dwóch kolejnych boków prostokąta są liczbami naturalnymi, przy czym jeden z boków jest o 7 cm dłuższy od drugiego. Znajdź w zeszycie długości boków prostokąta, jeśli jego obwód ma mniej niż 29 cm.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $x + 2 > 5 + 4(3 - x)$ jest:
A. 3 B. 0 C. 5 D. 4
2. Zbiór wszystkich liczb naturalnych spełniających nierówność $3(2x - 4) - 4(4 - x) \leq 3(2x - 3) - 5(2x - 13)$ to:
A. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ B. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ C. $\{7, 8, 9\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. Zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie nierówności:
 $0,1x + 0,25(12 - x) > 0,15 \cdot 12$ i $-(9x + 2) + 3(x - 1) < 0$, przedstawiony jest na rysunku:



4. Klub, który wygrał 20 meczów w koszykówkę, a przegrał 31, ma jeszcze do rozegrania 30 spotkań. Ile meczów (minimalnie) musi wygrać, aby liczba wygranych meczów stanowiła więcej niż 50% liczby wszystkich spotkań? Jeśli przez x oznaczmy liczbę meczów, które musi jeszcze wygrać, to sytuację przedstawioną w zadaniu opisuje nierówność:
- A. $\frac{20+x}{81} > \frac{1}{2}$ B. $\frac{20+x}{81} < \frac{1}{2}$ C. $\frac{20+x}{61} > \frac{1}{2}$ D. $\frac{20+x}{51} > \frac{1}{2}$

3.5. Zadania utrwalające

1. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $2x - 1 = \frac{1}{2}x + 3,5$

b) $9x + 3 = -2 - x$

c) $-2 + 1,25x = 0,5x + 1$

d) $0,8x - 1,3 = 1,4x - 2,05$

e) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{6} - \frac{x}{2}$

f) $2 - 2\frac{1}{4}x = \frac{x-4}{4} - 2x + \frac{1}{2}$

2. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $5x - (x+1)^2 = 5 - x^2$

b) $(x-3)^2 + 5x - 2 = 4 - (1+x)(1-x)$

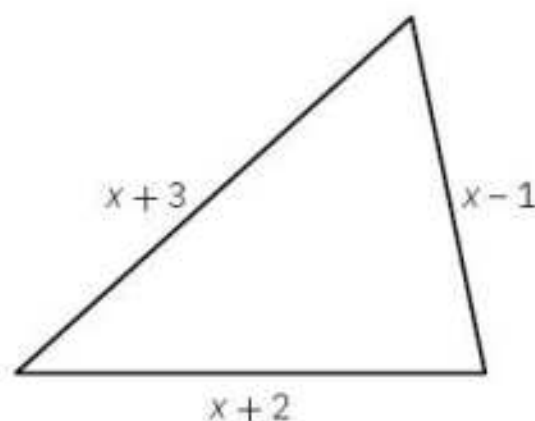
c) $2(2\sqrt{7}x - 1) = 3\sqrt{7}x + 5$

d) $\sqrt{3}x + 3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{3}x - 18)$

3. Rozwiązaniem równania $3a(x+1) - 2(x-3) = 4a - x$ jest liczba 1. Wyznacz w zeszycie liczbę a .

4. Na pomalowanie pokoju przeznaczono cztery sześciolitrowe puszki farby. Oblicz w zeszycie, ile puszek o pojemności 1,5 l należałoby kupić, aby pomalować ten sam pokój.

5. Obwód trójkąta przedstawionego na rysunku wynosi 10 cm. Oblicz w zeszycie długość najkrótszego boku tego trójkąta.

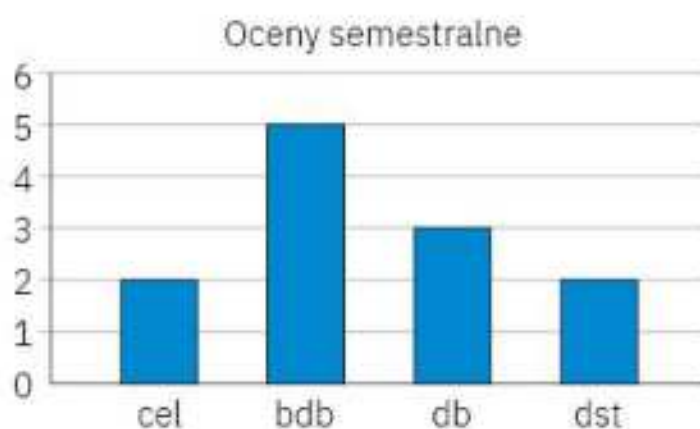


6. W czterech klasach pierwszych jest łącznie 112 uczniów. W klasie Ib jest o 2 uczniów więcej niż w klasie Ia. W klasie Ic jest o jednego ucznia mniej niż w klasie Ia, a w Id – o 4 więcej niż w Ic. Ilu uczniów jest w każdej klasie?

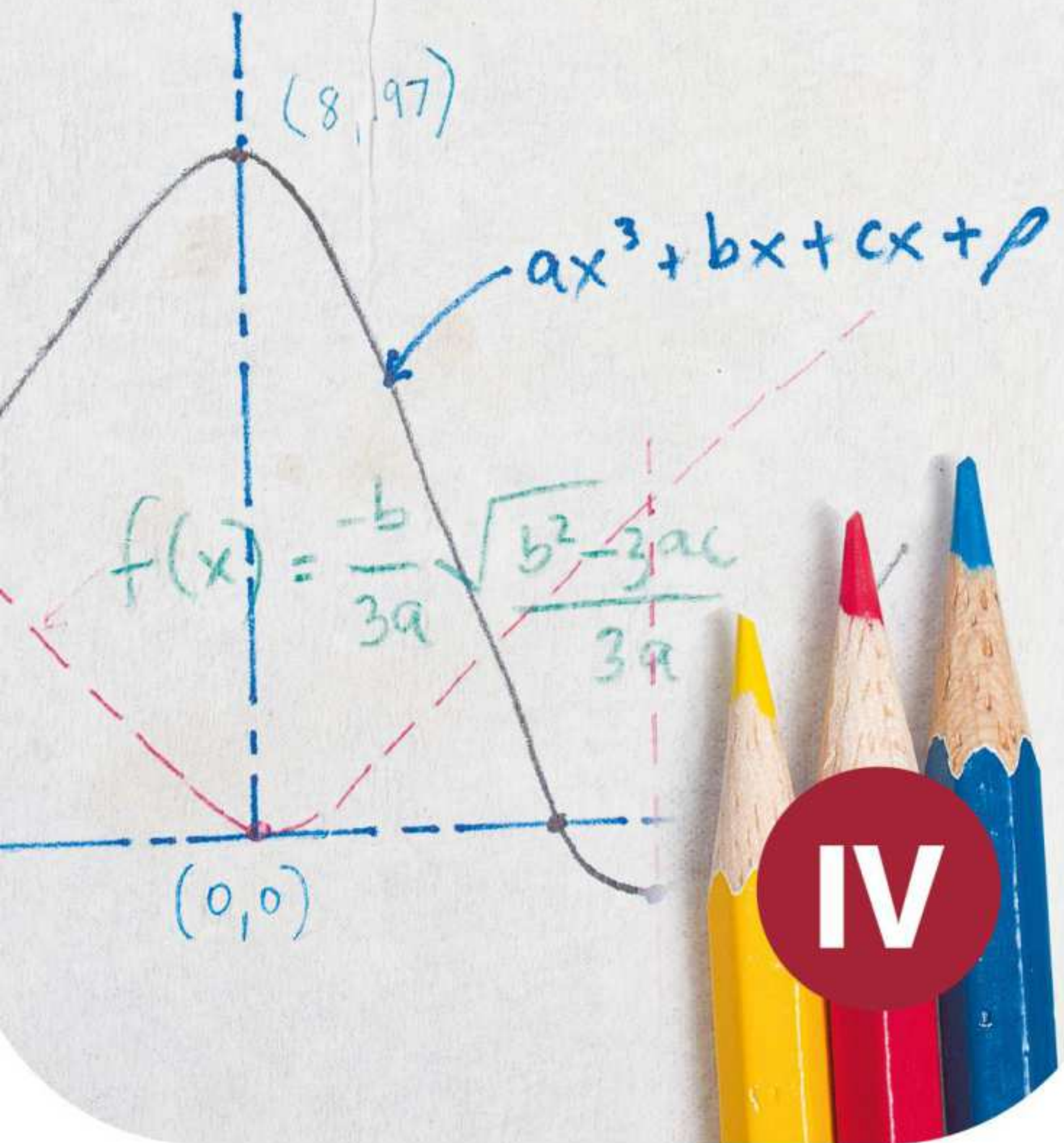
7. Przy zakupie komputera wpłacono 40% jego ceny, a resztę rozłożono na 10 rat po 150 zł. Oblicz w zeszycie cenę komputera.

8. Koszt zakupu przewodnika i atlasu wynosi 65 zł. Po podwyżce ceny atlasu o 40%, a przewodnika o 30%, łączna cena książek wzrosła o 22 zł. Oblicz w zeszycie cenę każdej z książek przed podwyżką.

9. Cenę pewnego towaru obniżono najpierw o 10%, a następnie o 20%. Ile wynosiła początkowa cena towaru, jeśli obecnie kosztuje on 1440 zł?
10. Świeże grzyby zawierają 90% wody. Ze 170 kg świeżych grzybów otrzymano grzyby suszone o zawartości 15% wody. Ile kilogramów grzybów suszonych otrzymano?
11. Rozwiąż nierówności w zeszycie.
- a) $5x - 16 > 3x - 16$ b) $-9 + 2x < 5x - 33$
 c) $0,8x + 1,5 \leq 0,4x - 1,7$ d) $\frac{1}{3}x - 1 \geq 3(x + 1) - x$
 e) $\frac{2(x-1)}{3} - x < \frac{2x+1}{2} + 3$ f) $\frac{x+3}{2} - x > \frac{x-2}{3} - \frac{3x-1}{6}$
12. Dla jakich wartości x wartość wyrażenia $2(x-3) + 10 - (5x-3) + 2x$ jest liczbą dodatnią?
13. Rozwiąż w zeszycie podane nierówności i zaznacz rozwiązania na osi liczbowej.
- a) $2(x-1) + 3x \leq 3(x+2) + 6$ b) $\frac{2x-6}{3} - \frac{8x-12}{4} < -1$
14. Podaj trzy liczby całkowite, które należą do zbioru rozwiązań obu nierówności jednocześnie: $4(2x+1) \leq 3(3x-1)$ oraz $0,5 - \frac{x-1}{5} \geq \frac{x+2}{10} - 4$.
15. Rozwiąż w zeszycie nierówność $2(x+2) - 3(x-1) + 8 > 3x - 1$.
- a) Wypisz wszystkie liczby naturalne należące do zbioru jej rozwiązań.
 b) Ile liczb całkowitych większych od -5 należy do zbioru rozwiązań?
 c) Podaj najmniejszą liczbę nieparzystą, która nie spełnia tej nierówności.
16. Ile jest wszystkich liczb naturalnych spełniających jednocześnie obie nierówności: $\frac{3(x-2)}{2} - \frac{x+3}{3} - \frac{1}{6} > x$ oraz $0,05x + 0,04(x-50) \leq 0,7$?
17. Rozwiąż w zeszycie nierówności: $\frac{1}{12} - \frac{x-1}{3} < \frac{x+1}{2} - \frac{2x-9}{4}$ oraz $\frac{5(2x+1) - 2(4x+6)}{2} \leq 4 - \frac{3(4-x) + 2(1+x)}{3}$. Zaznacz na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających jednocześnie obie nierówności. Ile jest wśród nich liczb całkowitych?
18. Na diagramie przedstawiono rozkład ocen semestralnych pewnego ucznia, nie uwzględniający przedmiotu, z którego oceny nie zostały jeszcze wystawione. Jaką ocenę uczeń musiałby dostać z tego przedmiotu, aby jego średnia wynosiła powyżej 4,65?



19. Na trening piłki ręcznej przyszło 6 osób, a ich średnia wieku wynosiła 16 lat. Gdy dołączył do nich trener, średni wiek wszystkich osób był większy niż 20 lat. Ile lat może mieć trener?
20. Obwód trójkąta równoramiennego wynosi ponad 35 cm, a jego ramiona są trzy razy dłuższe od podstawy. Oblicz w zeszycie możliwe długości ramion tego trójkąta.



FUNKCJE

4.1. Pojęcie funkcji i sposoby jej określania

Codziennie spotykamy się z różnego rodzaju przyporządkowaniami między elementami dwóch zbiorów. Na przykład: każdy uczeń ma przypisany numer w dzienniku lekcyjnym, a każde państwo w Europie – swoją stolicę.



Na planie trasy rajdu rowerowego zaznaczono miejscowości, w których przewidziano noclegi, a także długości codziennych tras.

W tabeli przedstawiono:

x – numer kolejnego dnia rajdu

y – długość trasy pokonywanej w poszczególnych dniach (w kilometrach)

x	I	II	III	IV	V
y	25	35	31	27	21

Jeśli dane są dwa niepuste zbiory X oraz Y i jeśli każdemu elementowi zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru Y , to takie przyporządkowanie nazywamy funkcją określoną na zbiorze X o wartościami w zbiorze Y .

Każdy dzień rajdu ma przyporządkowaną określoną liczbę – długość trasy do przebycia. Oznacza to, że dla każdego dnia określono funkcję ze zbioru numerów kolejnych dni rajdu do zbioru możliwych długości tras (w kilometrach).

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy – argumentami funkcji.

Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji. Elementy zbioru Y , które są przyporządkowane elementom zbioru X , tworzą zbiór wartości funkcji (ZW). Zbiór wartości jest podzbiorem przeciwdziedziny funkcji.

Ćwiczenie 1.

Wyjaśnij, które przyporządkowanie z podanych jest funkcją, a które nie.

a)

Tygodniowy rozkład zajęć w szkole							
dzień tygodnia	pon.	wt.	śr.	czw.	pt.	sob.	niedz.
liczba godzin	7	6	7	7	6	0	0

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy w tabeli każdemu elementowi ze zbioru zawierającego dni tygodnia podporządkowano dokładnie jedną wartość oznaczającą liczbę godzin lekcyjnych.

Odpowiedź: W tabeli przedstawiono funkcję, która każdemu dniowi tygodnia przyporządkowuje liczbę lekcji.

b) Każdej matce przyporządkowujemy jej dziecko.

Rozwiązanie:

Zastanawiamy się, czy każdej matce można przyporządkować tylko jedno dziecko.

Odpowiedź: To przyporządkowanie nie przedstawia funkcji, ponieważ niektóre matki mają dwoje lub więcej dzieci.

c) Każdy obywatel Polski ma przydzielony numer identyfikacyjny PESEL.

Rozwiązanie:

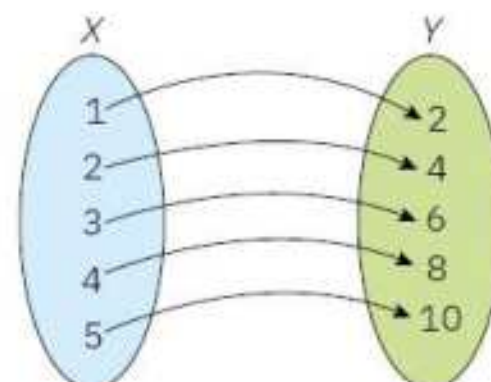
Zastanawiamy się, czy każdy obywatel może mieć przydzielony tylko jeden numer PESEL.

Odpowiedź: To przyporządkowanie jest funkcją, która każdemu obywatelowi Polski przyporządkowuje dokładnie jeden numer PESEL.

Przyporządkowanie opisane słownie możemy zilustrować za pomocą grafu i tabeli.

Przykład: Każdej liczbie naturalnej większej od 0 i mniejszej od 6 jest przyporządkowana liczba dwa razy od niej większa.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10



To przyporządkowanie jest funkcją.

Argumentowi $x = 3$ została przyporządkowana wartość $y = 6$. Funkcja przyjmuje wartość $y = 4$ dla argumentu $x = 2$.

Zapis $f(5) = 10$ czytamy: wartość funkcji f dla argumentu 5 jest równa 10.

Dziedziną powyższej funkcji jest zbiór $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a zatem argumentami funkcji są liczby: 1, 2, 3, 4, 5.

Zbiorem wartości jest zbiór $ZW = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, a zatem wartościami funkcji są liczby: 2, 4, 6, 8, 10.

Ćwiczenie 2.

Na podstawie grafu:

a) Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

Rozwiązanie:

Dziedzinę funkcji tworzą wszystkie elementy zbioru X , a zbiór wartości funkcji tworzą wszystkie elementy zbioru Y .

Odpowiedź: Dziedziną funkcji jest zbiór

$X = \{11, 22, 33, 44, 55\}$, a zbiór wartości to $ZW = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Odczytaj wartości funkcji dla argumentów 22 i 44.

Rozwiązanie:

W zbiorze X znajdujemy liczbę 22, a następnie odczytujemy liczbę znajdującą się w zbiorze Y , która odpowiada liczbie 22. Podobnie postępujemy, odczytując wartość funkcji dla argumentu 44.

Odpowiedź: Wartość funkcji dla argumentu 22 wynosi 2, a dla argumentu 44 to 4.

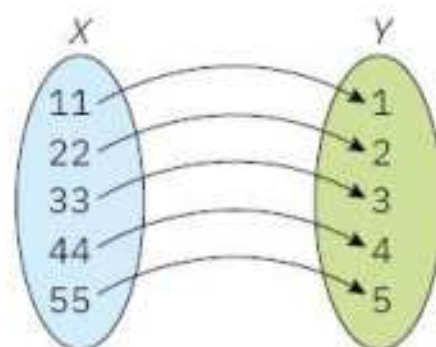
c) Podaj, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 5.

Rozwiązanie:

W zbiorze Y znajdujemy liczbę 5, a następnie odczytujemy liczbę znajdującą się w zbiorze X , której odpowiada liczba 5.

Odpowiedź: Funkcja przyjmuje wartość równą 5 dla argumentu wynoszącego 55.

Funkcje określamy za pomocą opisu słownego, tabeli, grafu, a także wzoru lub wykresu.



Ćwiczenie 3.

Funkcję opisaną słownie przedstaw za pomocą tabeli, wzoru i wykresu.

Każdej liczbie naturalnej nie większej od 5 przyporządkuj liczbę większą od niej o 1.

Rozwiązanie:

tabela

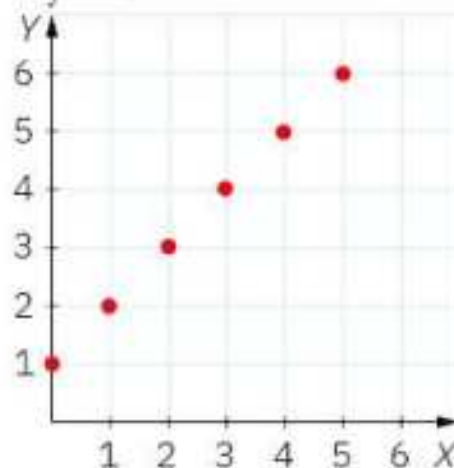
x	0	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	5	6

wzór

$$y = x + 1, x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Wykres funkcji sporządzamy w układzie współrzędnych. Jest on zbiorem wszystkich punktów o współrzędnych (x, y) . Pierwsza współrzędna (odcięta x) tych punktów jest elementem dziedziny funkcji, a ich druga współrzędna (rzędna y) jest równa wartości funkcji dla danego argumentu x .

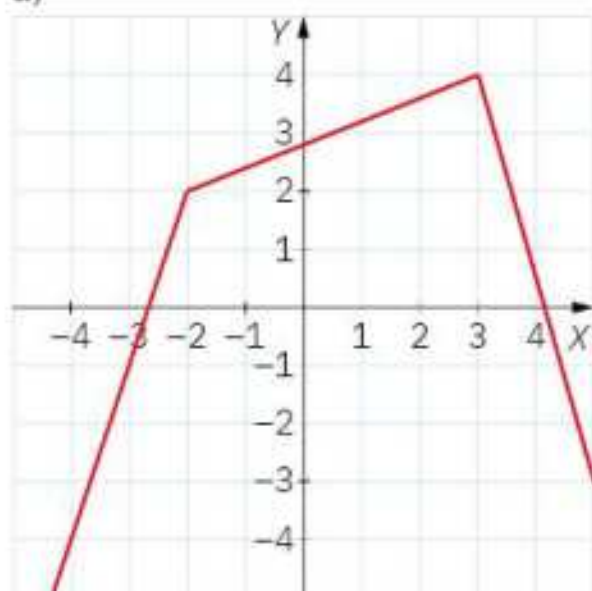
wykres



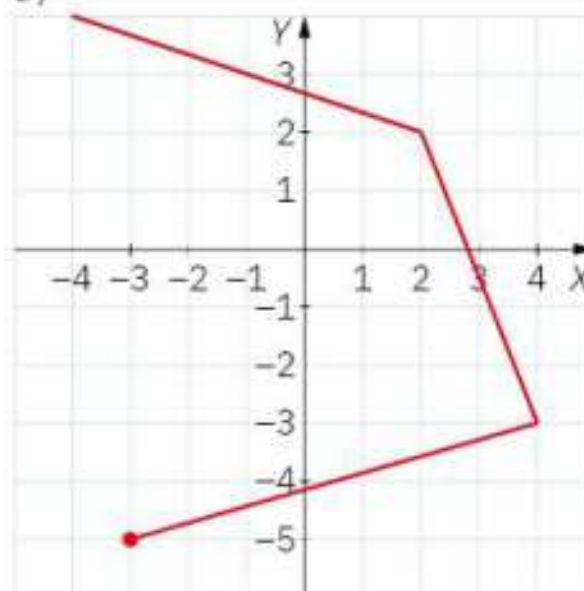
Ćwiczenie 4.

Określ, czy narysowane zbiory punktów są wykresami funkcji.

a)



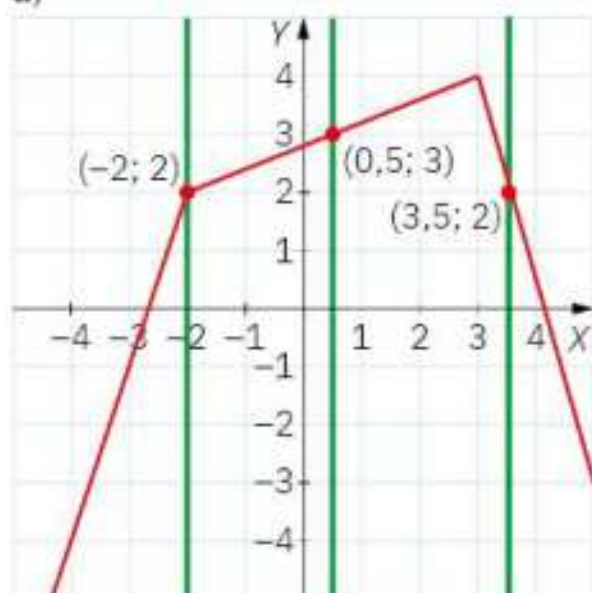
b)



Rozwiązanie:

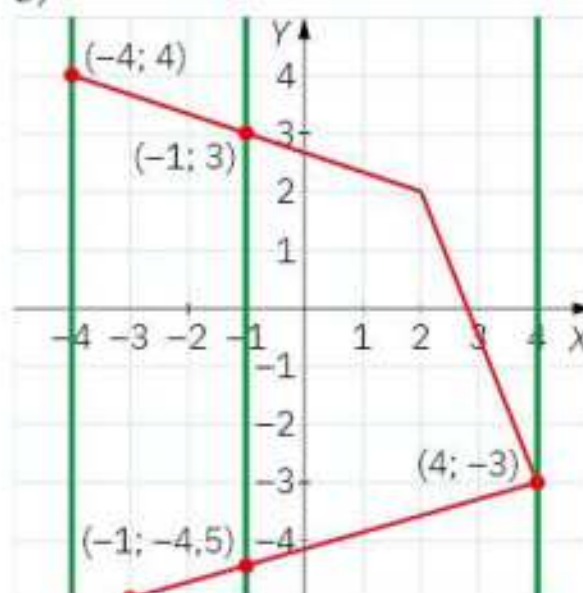
Przyporządkowanie jest funkcją, gdy każdemu elementowi ze zbioru X przyporządkowany jest tylko jeden element zbioru Y . Aby sprawdzić, czy narysowany zbiór punktów jest wykresem funkcji, rysujemy proste równoległe do osi Y , przecinające wykres. Dla uproszczenia możemy zaznaczyć tylko wybrane z nich. Następnie sprawdzamy, w ilu punktach każda z narysowanych prostych równoległych przecina czerwone linie przedstawione w przykładach. W ten sposób wyznaczamy dla elementu zbioru X przyporządkowany mu element zbioru Y .

a)



Każda z narysowanych prostych przecina czerwoną linię tylko w jednym punkcie. (Danemu elementowi zbioru X przyporządkowany jest tylko jeden element zbioru Y). Przedstawiony na rysunku zbiór punktów jest wykresem funkcji.

b)



Niektóre z narysowanych prostych przecinają czerwoną linię w jednym punkcie, ale inne przecinają ją w dwóch punktach. Na przykład możemy odczytać, że liczbie $x = -1$ przyporządkowane są dwie wartości: $y = -4,5$ oraz $y = 3$. Przedstawiony na rysunku zbiór punktów nie jest więc wykresem funkcji.

Ćwiczenie 5.

Funkcję f określoną wzorem $f(x) = -3x + 1$ na zbiorze $X = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$ przedstaw za pomocą tabeli i grafu.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartości funkcji dla podanych w dziedzinie argumentów.

$$f(-3) = -3 \cdot (-3) + 1 = 10$$

$$f(-2) = -3 \cdot (-2) + 1 = 7$$

$$f(0) = -3 \cdot 0 + 1 = 1$$

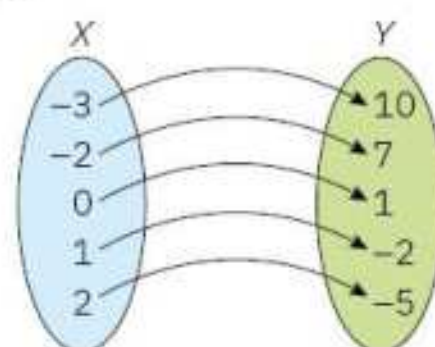
$$f(1) = -3 \cdot 1 + 1 = -2$$

$$f(2) = -3 \cdot 2 + 1 = -5$$

tabela

x	-3	-2	0	1	2
y	10	7	1	-2	-5

graf



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Określ, czy dane przyporządkowanie jest funkcją.

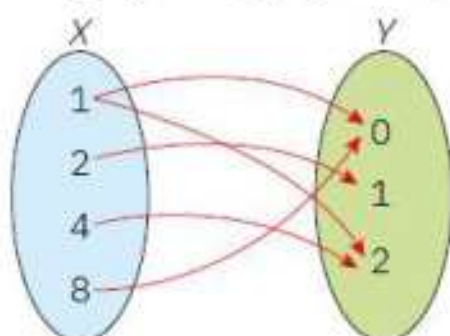
a) Każdemu uczniowi twojej klasy przyporządkowano liczbę jego rodzeństwa.

b)

x	-3	-2	-1	0	-1	2
y	2	-1	0	-1	-2	-3

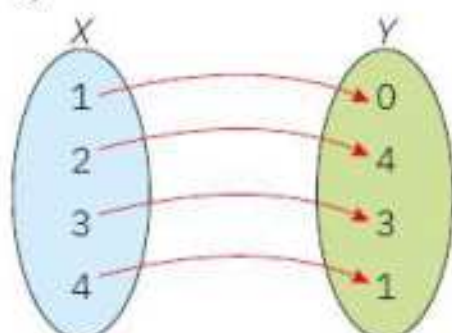
c) Odległości przebytej przez samochód przypisano czas potrzebny do jej przejechania (przy stałej prędkości).

d)

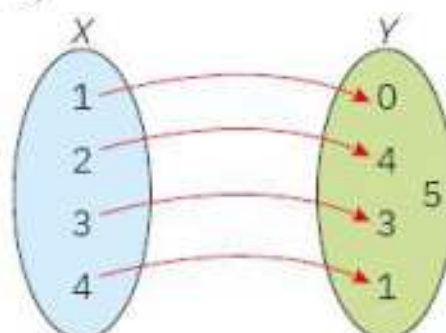


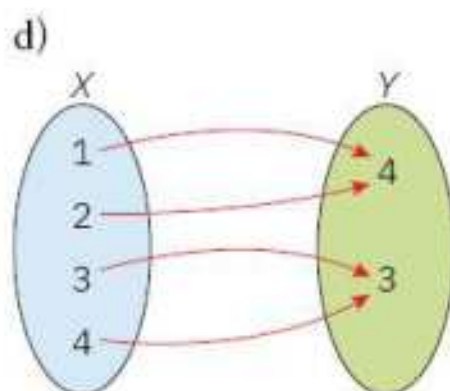
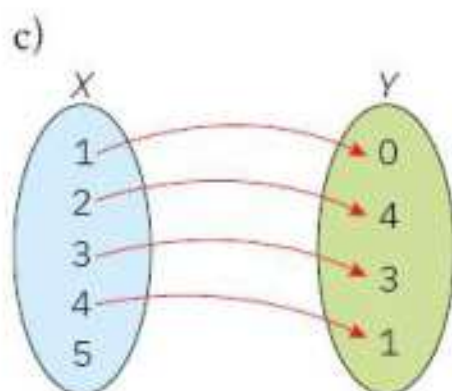
2. Grafy przedstawiają pewne przyporządkowania. Które z tych przyporządkowań nie jest funkcją? Wyjaśnij dlaczego.

a)



b)



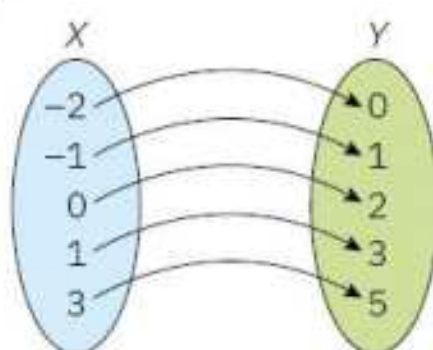


3. Podaj po trzy przykłady przyporządkowań, które:
a) są funkcjami; b) nie są funkcjami.
4. Narysuj w zeszycie graf funkcji przedstawionej w tabeli. Podaj wzór tej funkcji, dziedzinę oraz jej zbiór wartości.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

5. Podane funkcje opisz za pomocą wzorów w zeszycie. Określ dziedzinę i zbiór wartości każdej z nich.

a)



b)

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

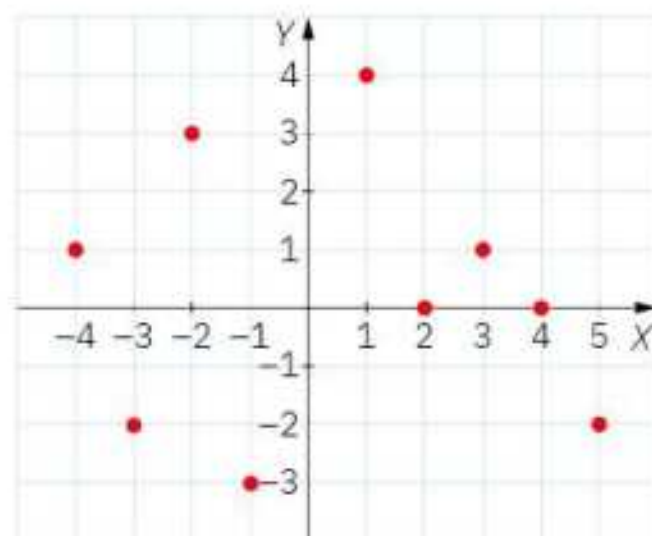
6. Funkcje określono, podając ich opisy słowne. Sporządź w zeszycie tabele i wykresy dla tych funkcji.
- a) Każdej liczbie całkowitej ujemnej większej od -8 przyporządkowano liczbę do niej przeciwną.
- b) Każdej liczbie naturalnej większej od 0 i mniejszej od 10 przyporządkowano resztę z dzielenia tej liczby przez 3.
7. W tabeli przedstawiono liczbę dni w każdym miesiącu roku przestępnego.

miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
liczba dni	31	29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

- a) Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.
- b) Odczytaj wartość funkcji dla argumentu VI.
- c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 30?

8. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji.

- a) Sporządź w zeszycie tabelę tej funkcji.
 b) Ile elementów należy do dziedziny tej funkcji?
 c) Czy punkt $(2, -1)$ należy do wykresu tej funkcji?
 d) Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 3?
 e) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość -2 ?



9. Mamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = 2x + 1$. Oblicz w zeszycie.

- a) $f(-5)$ b) $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ c) $f(0)$ d) $f(3)$ e) $f(2,5)$ f) $f\left(2\frac{5}{6}\right)$

10. Podaj brakujące współrzędne następujących punktów wykresu funkcji $y = x - 3$:
 $A = (-4, \dots)$, $B = (2, \dots)$, $C = (5, \dots)$, $D = (\dots, 4)$, $E = (\dots, 0)$, $F = (\dots, -10)$.

11. Przedstaw w zeszycie w postaci wykresu funkcję, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- dla argumentu $x = 1$ funkcja przyjmuje wartość 2;
- funkcja przyjmuje wartość 5 dla argumentów $x = -4$ i $x = 4$;
- do wykresu funkcji należą punkty $K = (-3, 2)$ i $M = (0, 3)$,
- dziedzina ma tylko pięć argumentów.

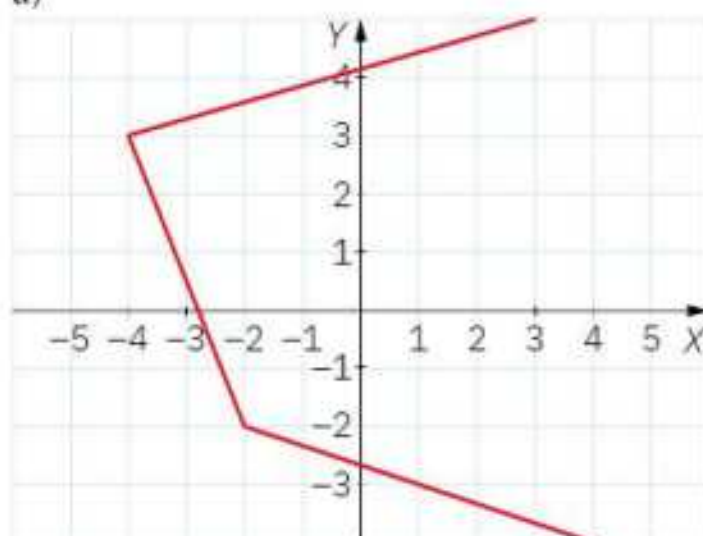
Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

12. Przerysuj tabelę do zeszytu, następnie uzupełnij ją i sprawdź, czy opisuje ona funkcję. Jeżeli tak, sporządź wykres tej funkcji.

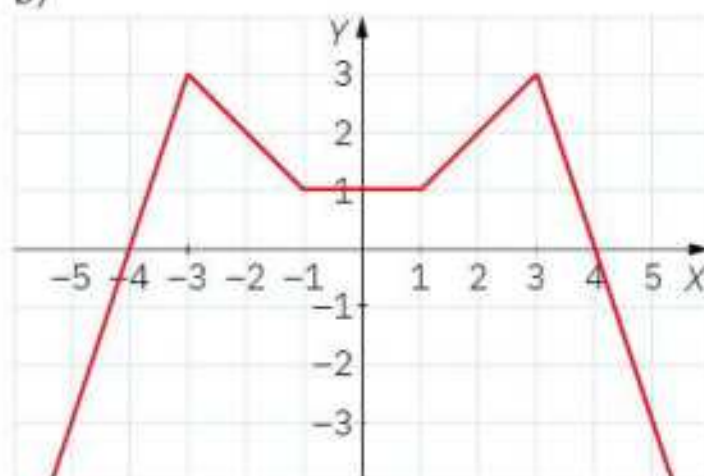
x	-8		-4		2		6
$y = \frac{1}{2}x + 1$		-2		0		3	

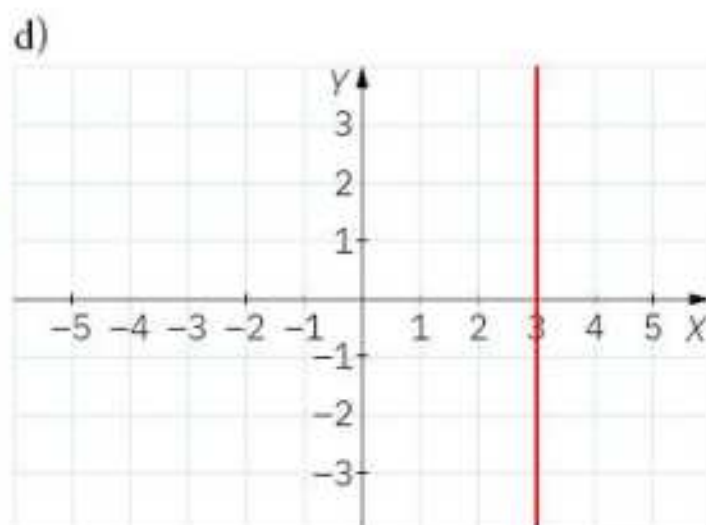
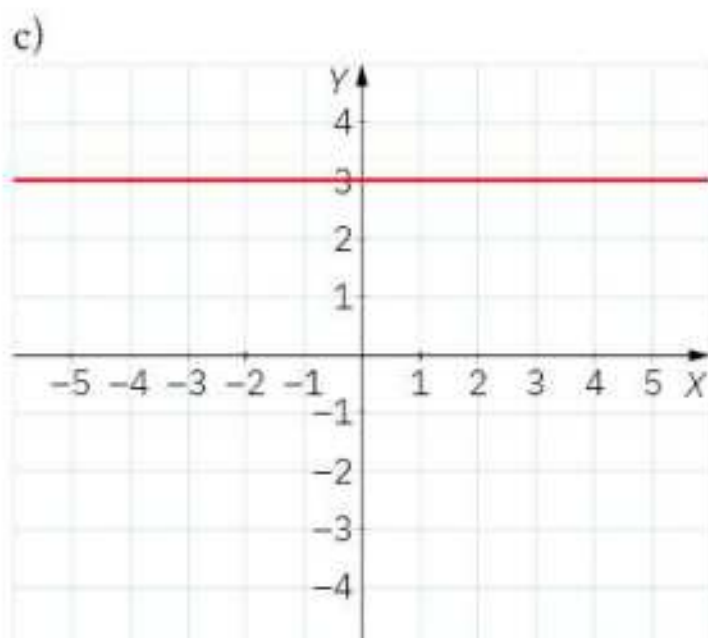
13. Rozstrzygnij, czy podane linie są wykresami funkcji.

a)



b)





ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

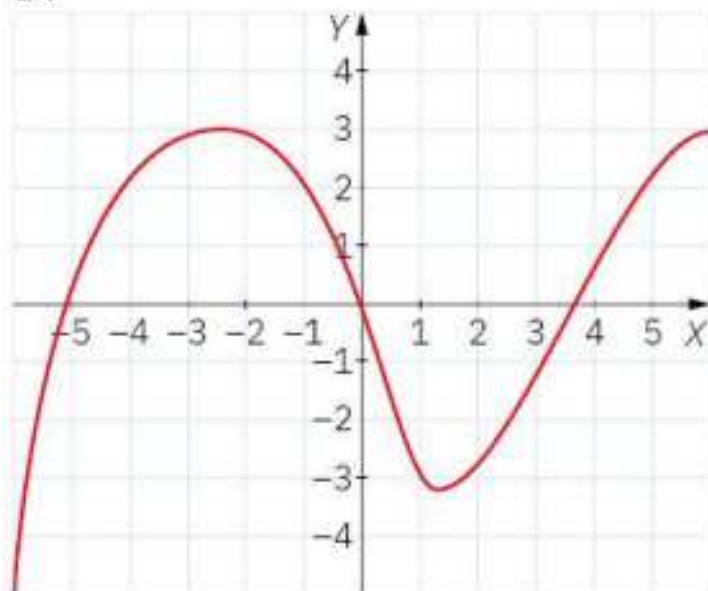
1. Wskaż przyporządkowanie, które nie jest funkcją.

A. Każdej liczbie całkowitej większej od -5 i mniejszej od 5 przyporządkowano jej wartość bezwzględną.

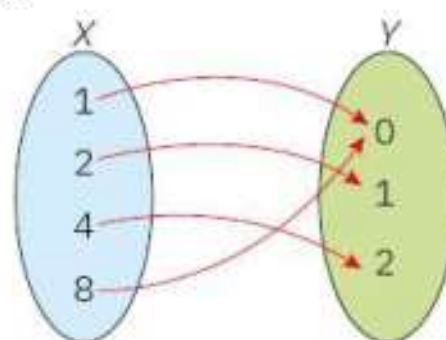
B.

x	-2	1	0	1	2
y	2	1	0	-1	-2

D.



C.



2. Pewna funkcja jest opisana za pomocą tabeli.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	2	0	-2	-4

Które zdanie opisujące tę funkcję jest fałszywe?

- A. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 B. Wartość funkcji dla argumentu 2 wynosi -4 .
 C. Funkcja przyjmuje wartość równą 2 dla argumentu -1 .
 D. Wykres tej funkcji tworzy 10 punktów.

3. Pewna funkcja f jest opisana za pomocą wzoru $f(x) = -x^2 + 4$, a jej dziedziną jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dla funkcji tej prawdziwy jest zapis:

A. $f(3) = 1$ B. $f(1) = 3$ C. $f(4) = -4$ D. $f(5) = -6$

4. Który wzór opisuje funkcję przedstawioną za pomocą tabeli?

x	-2	-0,5	1,5	3
y	-5	-2	2	5

A. $y = \frac{1}{2}x - 2$ B. $y = -\frac{1}{2}x + 2$ C. $y = -2x + 1$ D. $y = 2x - 1$

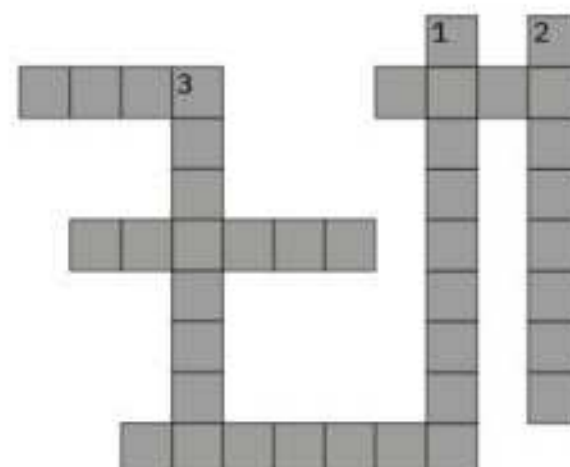
5. Przerysuj krzyżówkę do zeszytu i rozwiąż ją.

Poziomo:

Sposoby opisywania funkcji.

Pionowo:

1. Zbiór, na którym jest określona funkcja.
2. Element dziedziny funkcji.
3. Przyporządkowanie, które każdemu elementowi jednego zbioru przyporządkowuje dokładnie jeden element drugiego zbioru.



4.2. Dziedzina, wartość funkcji i miejsca zerowe

W matematyce zazwyczaj zajmujemy się funkcjami liczbowymi, czyli takimi, których dziedziny i zbiory wartości są zbiorami liczbowymi.

Kiedy określamy funkcję za pomocą wzoru i nie podajemy jej dziedziny, to przyjmujemy, że dziedziną tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb, dla których wzór ten ma sens liczbowy (wszystkie działania we wzorze dadzą się dla nich wykonać).

Ćwiczenie 1.

Określ dziedzinę funkcji.

a) $h(x) = (2x + 1)^2$

Rozwiązanie:

Dziedzina jest zbiór liczb rzeczywistych, ponieważ dowolną liczbę można podnieść do kwadratu.

Dziedzinę tej funkcji możemy zapisać symbolicznie jako: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Rozwiązanie:

Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby 1, ponieważ dla tego argumentu wartość $x - 1$ jest równa 0, a dzielenie przez 0 jest działaniem niewykonalnym.

Dziedzinę tej funkcji (zbiór liczb rzeczywistych bez liczby 1) możemy zapisać symbolicznie jako: $D_f: x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

c) $g(x) = \sqrt{x}$

Rozwiązanie:

Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, ponieważ nie istnieją pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych.

Dziedzinę tej funkcji możemy zapisać symbolicznie jako: $D_f: x \in \langle 0, \infty \rangle$.

Ćwiczenie 2.

Narysuj tabelę oraz wykres funkcji danej wzorem.

a) $f(x) = -x + 2$ dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b) $f(x) = -x + 2$ dla $x \in \mathbb{R}$

Podaj zbiór wartości dla każdej funkcji.

Rozwiązanie:

a) Obliczamy wartości funkcji dla podanych argumentów:

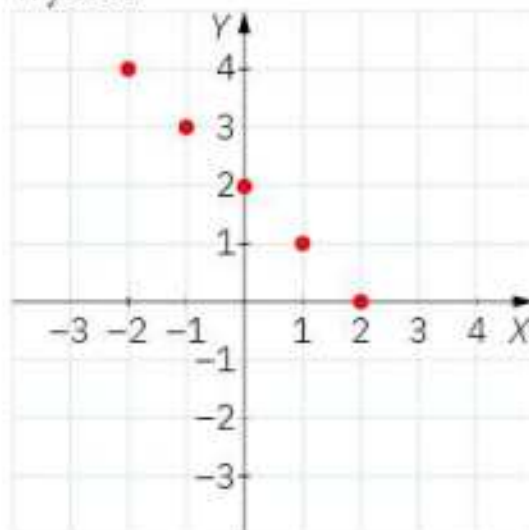
$$f(-2) = 4, f(-1) = 3, f(0) = 2, f(1) = 1, f(2) = 0$$

tabela

x	-2	-1	0	1	2
y	4	3	2	1	0

Odpowiedź: Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -x + 2$ dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ jest zbiór $ZW = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

wykres



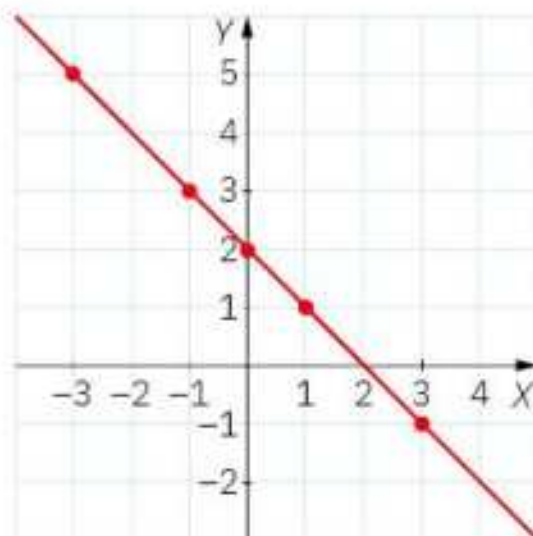
b) $f(x) = -x + 2$ dla $x \in \mathbb{R}$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych, w którym jest nieskończenie wiele liczb. Nie możemy obliczyć wartości funkcji dla wszystkich argumentów należących do tego zbioru. Obliczamy wartość funkcji dla dowolnych argumentów ze zbioru $\mathbb{R}$ i sporządzamy tabelę częściową.

x	-3	-1	0	1	3
y	5	3	2	1	-1

Rysujemy prostą przechodzącą przez punkty zaznaczone w układzie współrzędnych. Prosta jest wykresem funkcji $f(x) = -x + 2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Ponieważ dziedziną i zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór $(-\infty, \infty)$, wykres funkcji jest prostą, a nie odcinkiem z wyraźnie zaznaczonymi zamalowanymi kółeczkiem punktami na jego końcach.



Odpowiedź: Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -x + 2$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest zbiór $ZW = \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 3.

Narysuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x \in (-\infty, -1) \\ 2, & x \in (-1, 1) \\ x+3, & x \in (2, \infty) \end{cases}$.

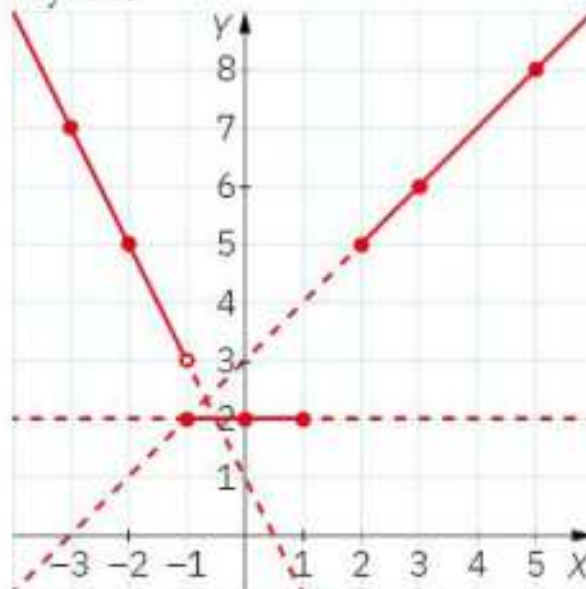
Rozwiązanie:

Sporządzamy tabele wartości funkcji dla dowolnych argumentów należących do każdego z tych przedziałów liczbowych.

tabele

$x, x \in (-\infty, -1)$	-3	-2	-1,5
$f(x) = -2x + 1$	7	5	4
$x, x \in (-1, 1)$	-1	0	1
$f(x) = 2$	2	2	2
$x, x \in (2, \infty)$	2	3	5
$f(x) = x + 3$	5	6	8

wykres



Rysujemy kolejno każdy z wykresów funkcji, dla których sporządziliśmy tabele częściowe w podanych we wzorze funkcji przedziałach liczbowych. I tak wykres funkcji z pierwszej tabeli rysujemy w przedziale $(-\infty, -1)$ – jest to półprosta bez punktu o współrzędnych $(-1, 3)$. Podany punkt zaznaczamy jest na wykresie kółeczkiem niezamalowanym.

Następnie rysujemy wykres funkcji z drugiej tabeli w przedziale $(-1, 1)$ – jest to odcinek. Punkty $(-1, 2)$ oraz $(1, 2)$ należą do wykresu funkcji, dlatego zaznaczamy je kółeczkiem zamalowanym.

Na końcu rysujemy wykres funkcji z trzeciej tabeli w przedziale $(2, \infty)$ – jest to półprosta, do której należy punkt $(2, 5)$ – oznaczony kółeczkiem zamalowanym.

Wykres funkcji f składa się z trzech narysowanych części.

Ćwiczenie 4.

Oblicz argument, dla którego:

a) wartość funkcji $f(x) = \frac{x+6}{2}$ wynosi $\frac{2}{3}$;

b) wartość funkcji $g(x) = \sqrt{x-3}$ wynosi 2.

Rozwiązanie:

a) $f(x) = \frac{2}{3}$

$$\frac{x+6}{2} = \frac{2}{3}$$

$$x = -4\frac{2}{3}$$

Odpowiedź: Wartość funkcji f wynosi

$$\frac{2}{3} \text{ dla argumentu } -4\frac{2}{3}.$$

Rozwiązanie:

b) $g(x) = 2$

$$\sqrt{x-3} = 2$$

$$x-3 = 4$$

$$x = 7$$

Odpowiedź: Wartość funkcji g wynosi 2 dla argumentu 7.

Ćwiczenie 5.

Sporządź tabelę funkcji $f(x) = x^2 - 4$, $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Odczytaj argumenty, dla których wartość funkcji jest równa 0. Podaj argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, oraz te, dla których przyjmuje wartości ujemne.

Rozwiązanie:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

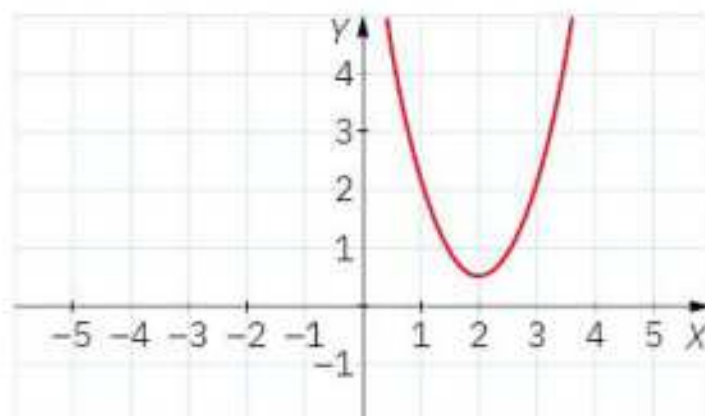
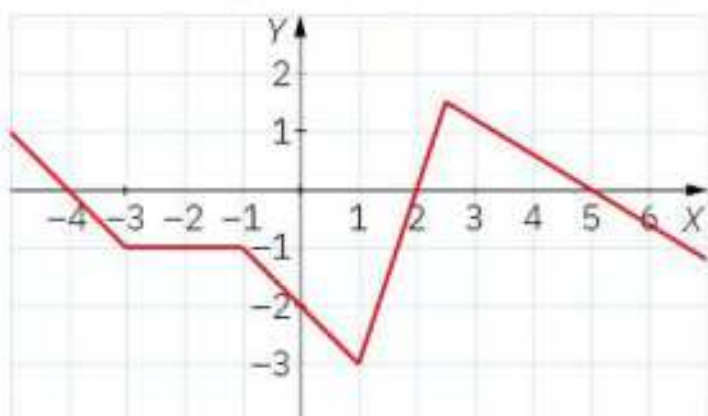
Argumenty, dla których wartość funkcji jest równa 0: $x = -2$ i $x = 2$.

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: $x = -3$ i $x = 3$.

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: $x = -1$, $x = 0$ i $x = 1$.

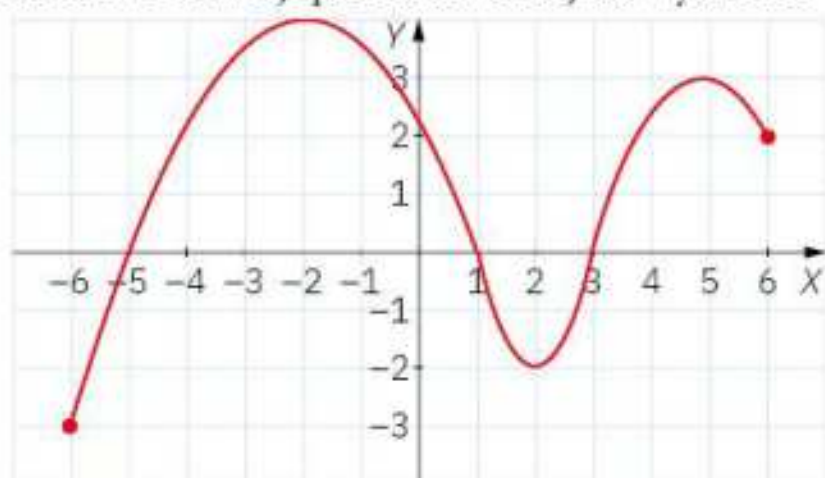
Każdy argument, dla którego wartość funkcji liczbowej jest równa zero, nazywamy miejscem zerowym (x_0) funkcji.

Funkcja może mieć wiele miejsc zerowych, ale może również nie mieć żadnych miejsc zerowych – jak na wykresach poniżej.



Ćwiczenie 6.

Wyznacz miejsca zerowe funkcji przedstawionej na wykresie.



Rozwiązanie:

Znajdujemy punkty wspólne wykresu z osią X i odczytujemy ich współrzędne. Są to punkty: $(-5, 0)$, $(1, 0)$ oraz $(3, 0)$. Miejsca zerowe funkcji (czyli współrzędne x , inaczej odcięte punktów, w których wykres przecina oś X) to argumenty: $x = -5$, $x = 1$ i $x = 3$.

Ćwiczenie 7.

Oblicz miejsce zerowe funkcji danej wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{2x+5}$, dla $x \in \left(-2\frac{1}{2}, \infty\right)$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy argument, dla którego wartość funkcji f jest równa zero:

$$f(x) = 0$$

$$\sqrt{2x+5} = 0$$

$$2x+5=0$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

Sprawdzamy, czy obliczony argument x należy do dziedziny funkcji:

$$-2\frac{1}{2} \in \left(-2\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \sqrt{2x+5}$ jest argument $x = -2\frac{1}{2}$.

b) $f(x) = \begin{cases} 3x-7, & x \leq -2 \\ -4x+5, & x > -2 \end{cases}$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy argument, dla którego wartość funkcji $f(x) = \begin{cases} 3x-7, & x \leq -2 \\ -4x+5, & x > -2 \end{cases}$ jest równa zero.

Rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$, przyrównując do 0 wyrażenie $3x - 7$.

$$3x - 7 = 0 \text{ dla } x \leq -2$$

$$x = 2\frac{1}{3}$$

Sprawdzamy, że $2\frac{1}{3} \notin (-\infty, -2)$, dlatego liczba $2\frac{1}{3}$ nie jest miejscem zerowym funkcji f .

Rozwiązujemy równanie, które przyjmuje teraz postać $f(x) = 0$

$$-4 + 5 = 0 \text{ dla } x \leq -2$$

$$x = 1\frac{1}{4}$$

Sprawdzamy, że $1\frac{1}{4} \in (-2, \infty)$, dlatego liczba $1\frac{1}{4}$ jest miejscem zerowym funkcji f .

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \begin{cases} 3x-7, & x \leq -2 \\ -4x+5, & x > -2 \end{cases}$ jest argument $x = 1\frac{1}{4}$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Określ dziedzinę podanych funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

b) $f(x) = 3x^2 - 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

2. Narysuj w zeszycie wykres funkcji $f(x) = -x + 2$ i podaj jej zbiór wartości, jeśli funkcja f określona jest na:

a) zbiorze $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$;

b) zbiorze liczb naturalnych;

c) zbiorze liczb rzeczywistych;

d) przedziale $(-3, 5)$.

3. Narysuj w zeszycie wykres funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty, -1) \\ 1, & x \in (0, 2) \\ -x+1, & x \in (3, \infty) \end{cases}$

4. Oblicz w zeszycie wartość funkcji $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \in (-\infty, -1) \\ -x, & x \in (-1, 2) \\ x-3, & x \in (2, \infty) \end{cases}$ dla argumentów: $-3, 2$ oraz 3 .

5. Oblicz w zeszycie argument, dla którego:

a) wartość funkcji $g(x) = 3x - 1$ wynosi 2 ;

b) wartość funkcji $f(x) = x^2 + 2$ wynosi $4\frac{1}{4}$.

6. Podaj miejsca zerowe funkcji określonej za pomocą tabeli.

a)

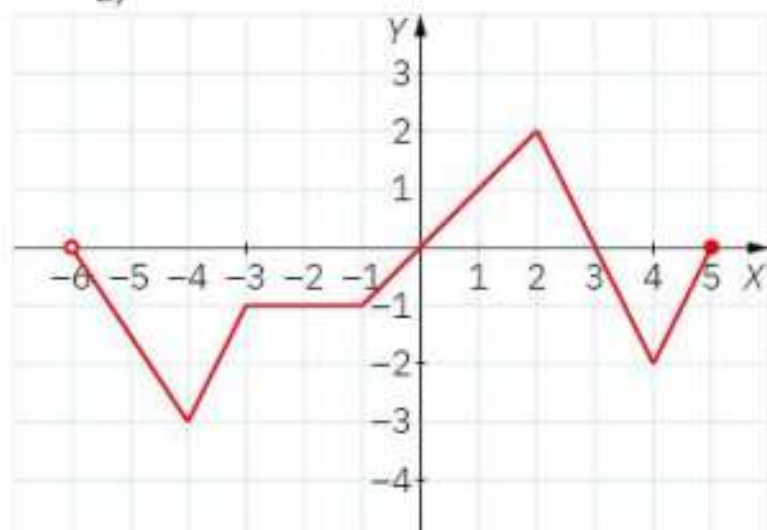
x	0	2	6	8	10
y	2	0	6	0	10

b)

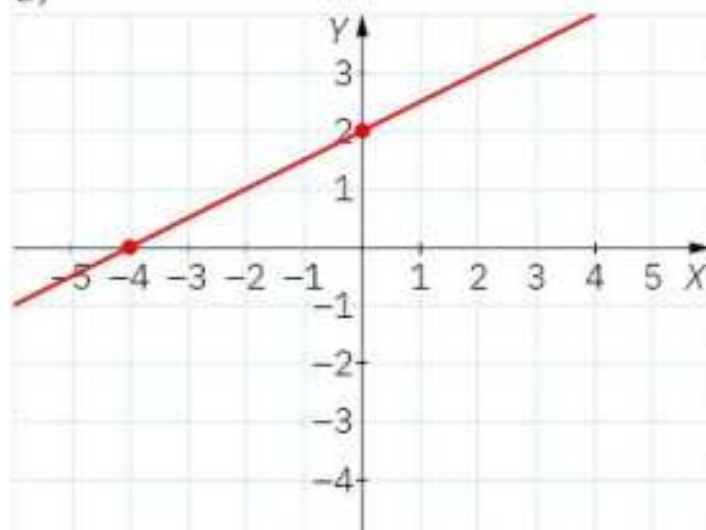
x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	0

7. Odczytaj miejsca zerowe funkcji przedstawionej na wykresie (o ile istnieją).

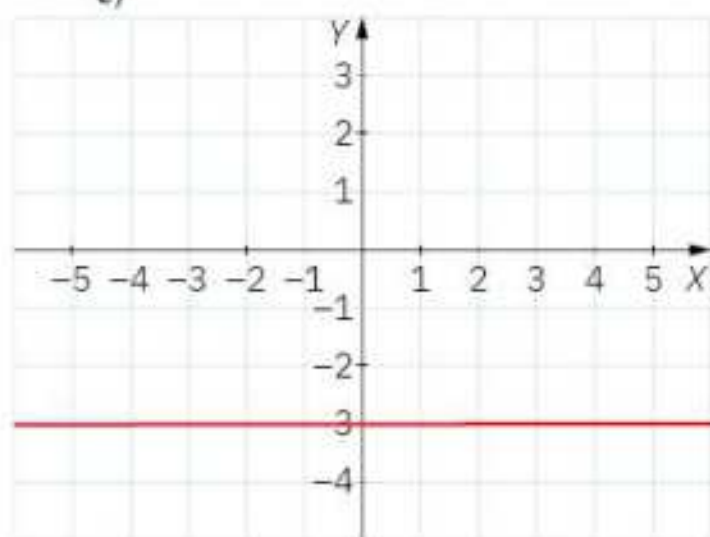
a)



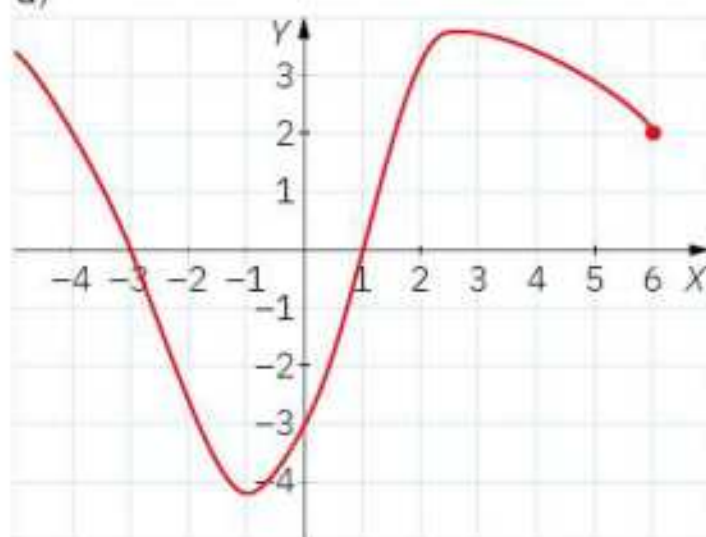
b)



c)

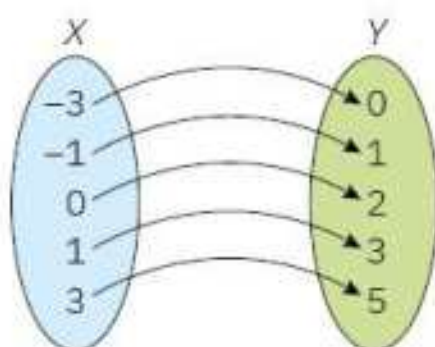


d)

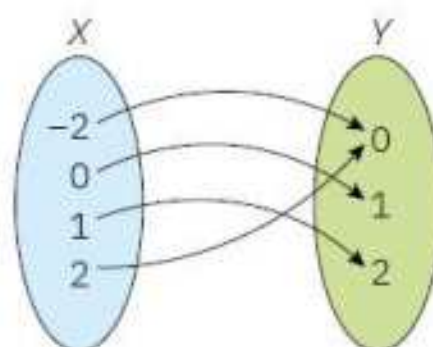


8. Podaj miejsca zerowe funkcji określonej grafem.

a)



b)



9. Oblicz w zeszycie miejsca zerowe funkcji danej wzorem.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 2$

c) $f(x) = \frac{2x+7}{5}$

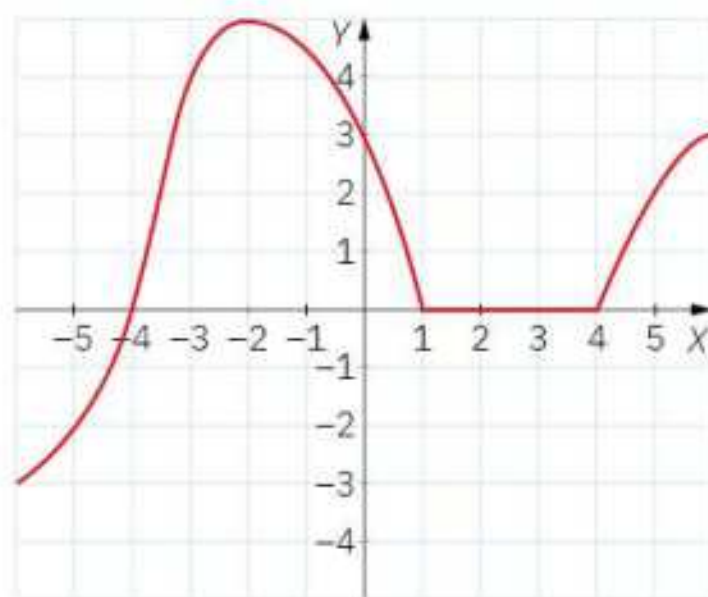
d) $f(x) = \sqrt{x-2}$

e) $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}$

f) $f(x) = \frac{-3x+1}{3}$

10. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji.

- a) Ile miejsc zerowych ma dana funkcja?
- b) Jaką wartość przyjmuje funkcja dla argumentu $x = -3$, a jaką dla argumentu $x = 0$?
- c) Dla jakiego argumentu x funkcja ta przyjmuje wartość $y = -2$?



11. Podaj przykład funkcji określonej na zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ tak, aby:

- a) miała jedno miejsce zerowe;
- b) miała trzy miejsca zerowe;
- c) nie miała miejsc zerowych.

12. Funkcja jest określona wzorem $f(x) = 3x - 2$. Wykonaj zadanie w zeszycie.

- a) Sprawdź, czy punkt $P = (1, 2)$ należy do wykresu tej funkcji.
- b) Oblicz wartość funkcji dla argumentu 4.
- c) Oblicz miejsce zerowe funkcji.
- d) Oblicz, dla jakiego argumentu wartość funkcji jest równa 7.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

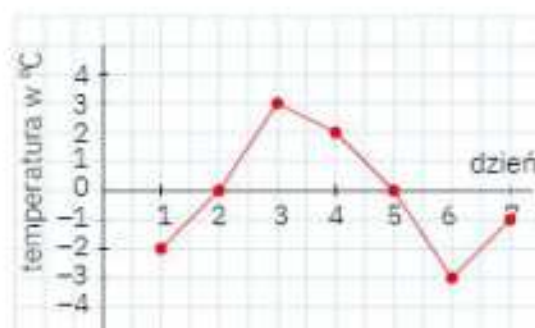


- 1. Dziedzina funkcji $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ jest zbiór:
A. $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ B. $\mathbb{R} - \{2\}$ C. $\mathbb{R}$ D. $\{-2, 2\}$
- 2. Miejscem zerowym funkcji $f(x) = -3x + 6$ jest liczba:
A. 0 B. 2 C. 6 D. -3
- 3. Dla argumentu $\frac{1}{3}$ wartość funkcji określonej wzorem $f(x) = -3x + 2$ wynosi:
A. -1 B. 1 C. -7 D. 3
- 4. Funkcja określona wzorem $g(x) = \sqrt{x+1}$ przyjmuje wartość 3 dla argumentu:
A. 2 B. 0 C. 8 D. 3

4.3. Odczytywanie własności funkcji z wykresu. Dziedzina funkcji, zbiór wartości i monotoniczność funkcji

Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu to umiejętność, którą często wykorzystujemy w życiu codziennym.

Na wykresie przedstawiono zmiany temperatury zanotowane od 1 do 7 marca.

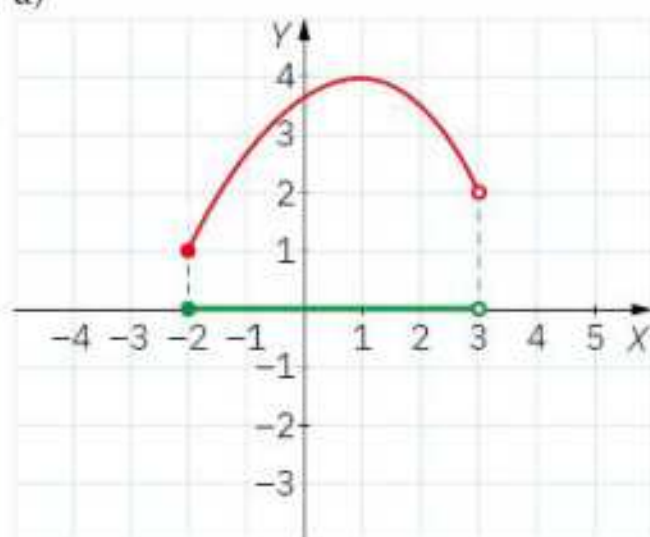


Na podstawie tego wykresu możemy stwierdzić, że w podanych dniach temperatury znajdowały się w przedziale od -3°C do 3°C . Zauważamy również, że temperatura od 1 do 3 marca rosła, następnie od 3 do 6 marca spadała, a między 6 a 7 marcem – znów rosła.

Ćwiczenie 1.

Odczytaj z wykresu dziedzinę funkcji.

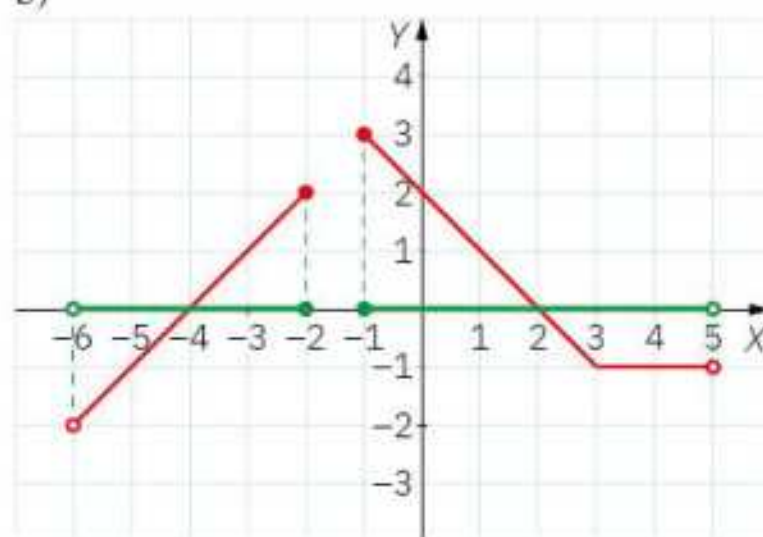
a)



Rozwiązanie:

Dziedziną tej funkcji jest przedział liczbowy $\langle -2, 3 \rangle$.

b)



Rozwiązanie:

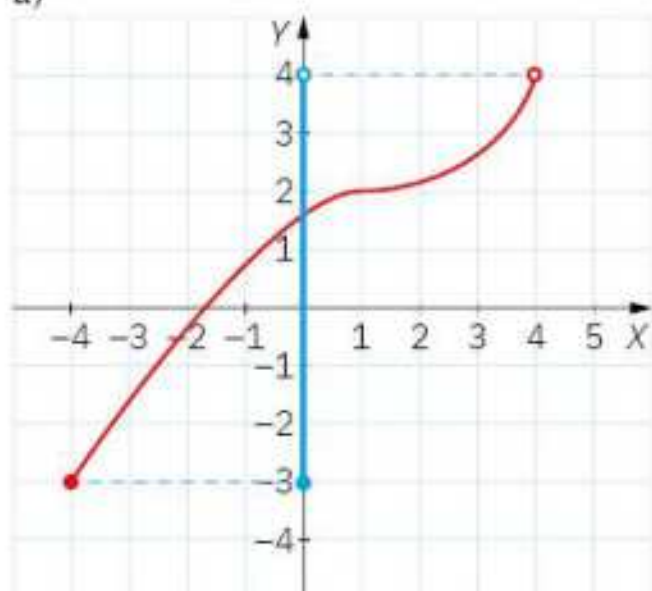
Dziedziną tej funkcji jest suma przedziałów liczbowych $(-6, -2) \cup (-1, 5)$.

Dziedzinę funkcji odczytujemy na osi X – są to wszystkie argumenty x , którym możemy przyporządkować punkt na wykresie.

Ćwiczenie 2.

Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji.

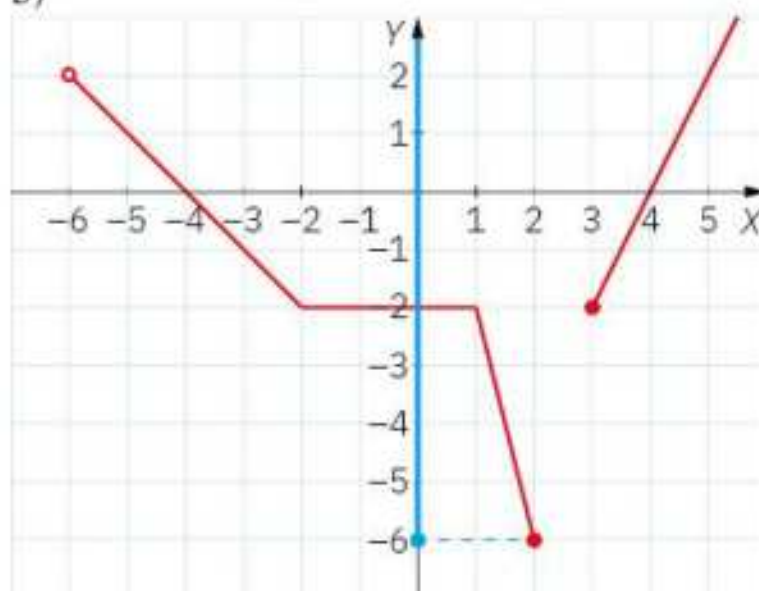
a)



Rozwiązanie:

Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział liczbowy $\langle -3, 4 \rangle$.

b)



Rozwiązanie

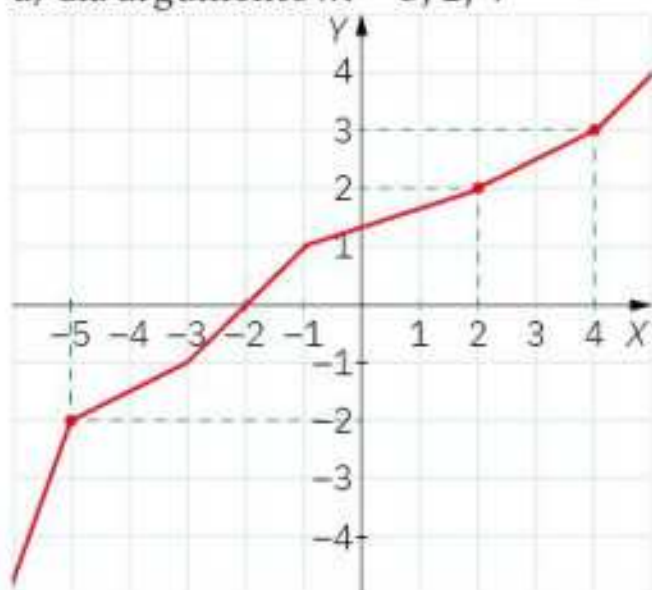
Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział liczbowy $\langle -6, 2 \rangle \cup \langle -2, \infty \rangle = \langle -6, \infty \rangle$.

Zbiór wartości odczytujemy na osi Y – są to wszystkie wartości y , którym możemy przyporządkować punkt na wykresie funkcji.

Ćwiczenie 3.

Odczytaj z wykresu wartości funkcji:

a) dla argumentów: $-5, 2, 4$

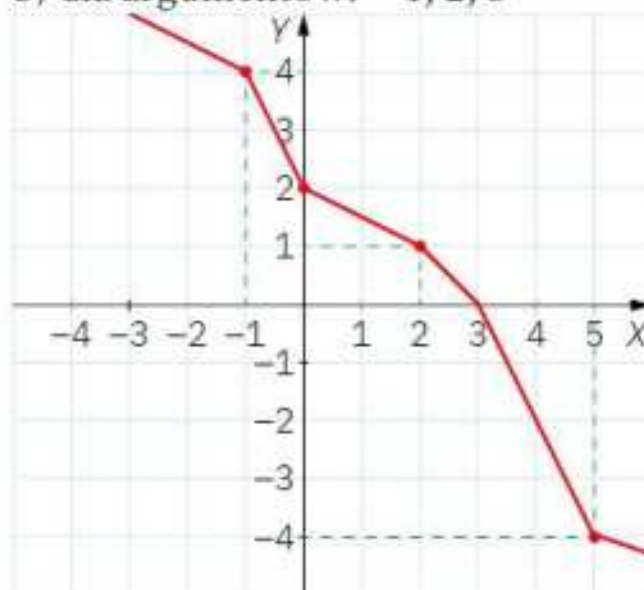


Rozwiązanie:

$$f(-5) = -2, f(2) = 2, f(4) = 3$$

Zauważamy, że dla tej funkcji, gdy argumenty rosną, to wartości też rosną.

b) dla argumentów: $-1, 2, 5$

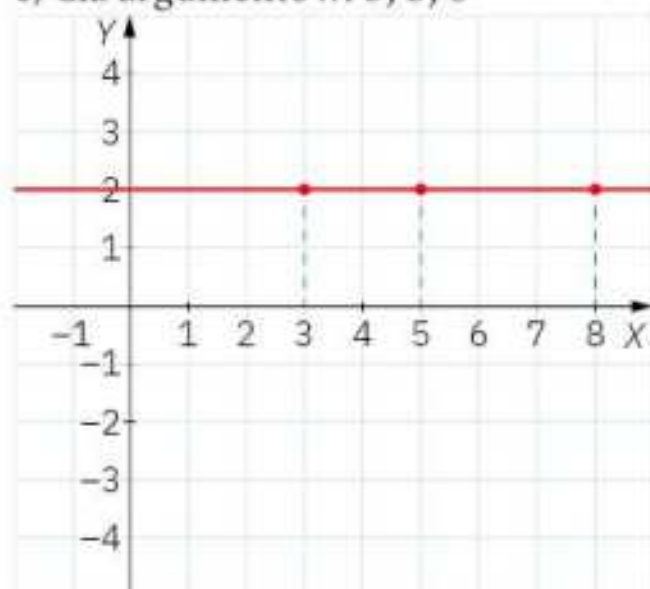


Rozwiązanie:

$$f(-1) = 4, f(2) = 1, f(5) = -4$$

Zauważamy, że dla tej funkcji, gdy argumenty rosną, to wartości maleją.

c) dla argumentów: 3, 5, 8



Rozwiązanie:

$$f(2) = 2, f(3) = 2, f(6) = 2$$

Zauważamy, że dla tej funkcji argumenty rosną, a wartości są sobie równe.



Funkcję nazywamy **rosnącą**, gdy wraz ze wzrostem argumentów zwiększają się jej wartości.

Możemy zapisać symbolicznie:

Funkcję nazywamy rosnącą, gdy dla każdego $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D_f$) jest spełniony warunek $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcję nazywamy **malejącą**, gdy wraz ze wzrostem argumentów jej wartości się zmniejszają.

Możemy zapisać symbolicznie:

Funkcję nazywamy malejącą, gdy dla każdego $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D_f$) jest spełniony warunek $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcję nazywamy **stałą**, gdy dla wszystkich argumentów przyjmuje ona tę samą wartość.

Możemy zapisać symbolicznie:

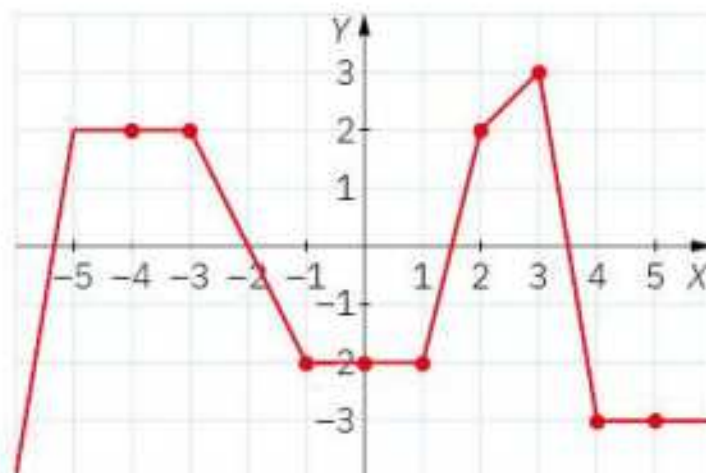
Funkcję nazywamy stałą, gdy dla każdego x ($x \in D_f$) jest spełniony warunek $f(x) = \text{const.}$

const. (z łac. *constans*) — oznaczenie wielkości stałej

Funkcje malejące, rosnące, stałe w całej swojej dziedzinie nazywamy monotonicznymi.

Ćwiczenie 4.

Na podstawie wykresu funkcji sporządź tabelę dla wybranych argumentów.



Rozwiązanie:

Sporządzamy tabelę dla argumentów zaznaczonych na wykresie.

x	-4	-3	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	2	-2	-2	-2	2	3	-3	-3

Wraz ze wzrostem argumentów x wartości y tej funkcji maleją, są sobie równe lub rosną. Funkcja ta nie jest więc monotoniczna w całej swojej dziedzinie. W przypadku takiej funkcji określamy przedziały (zwane przedziałami monotoniczności), w których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała, a o samej funkcji mówimy, że jest monotoniczna przedziałami.

Dla funkcji przedstawionej na wykresie możemy powiedzieć, że:

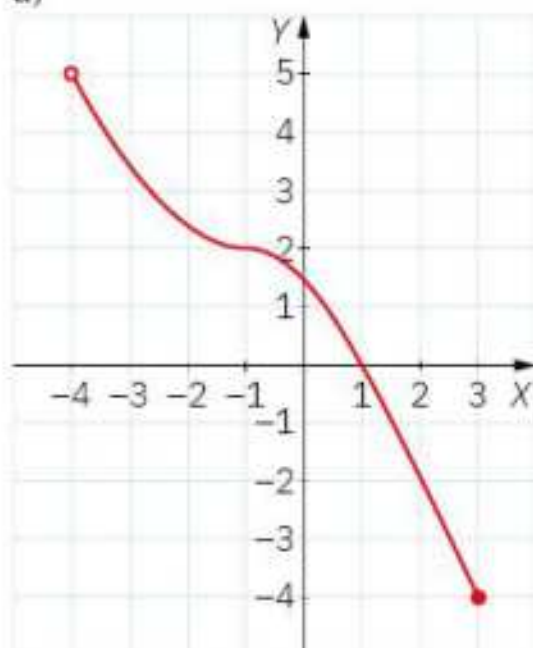
- funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -5)$ i $(1, 3)$;
- funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-3, -1)$ i $(3, 4)$;
- funkcja jest stała w każdym z przedziałów: $(-5, -3)$, $(-1, 1)$ i $(4, \infty)$.

Określając przedziały monotoniczności funkcji, najczęściej podajemy tak zwane maksymalne przedziały monotoniczności, czyli przedziały domknięte (o ile to możliwe).

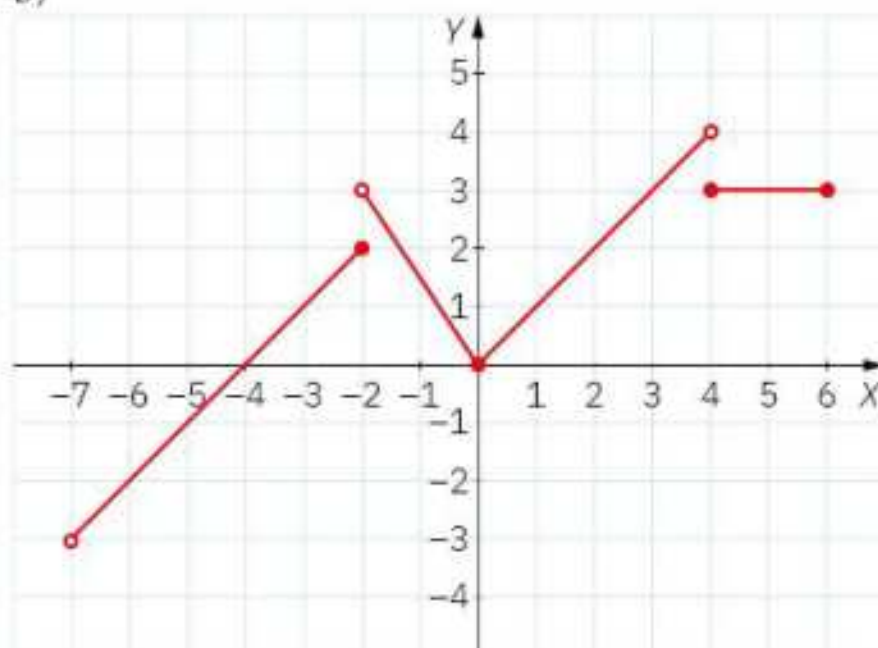
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Odczytaj z wykresu dziedzinę funkcji.

a)

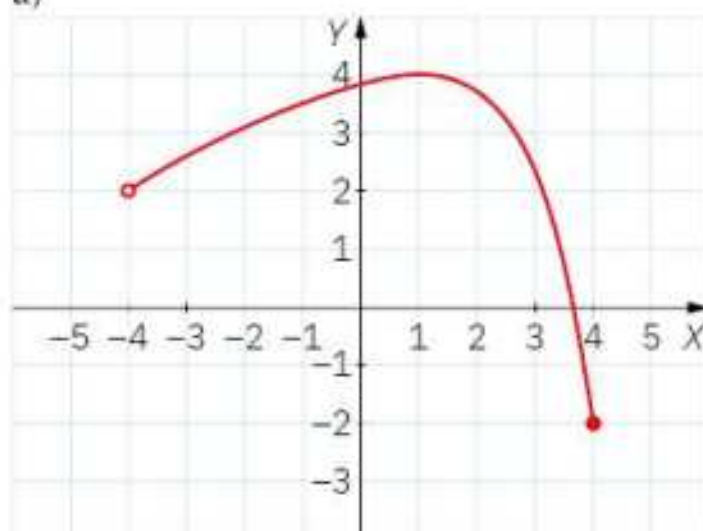


b)

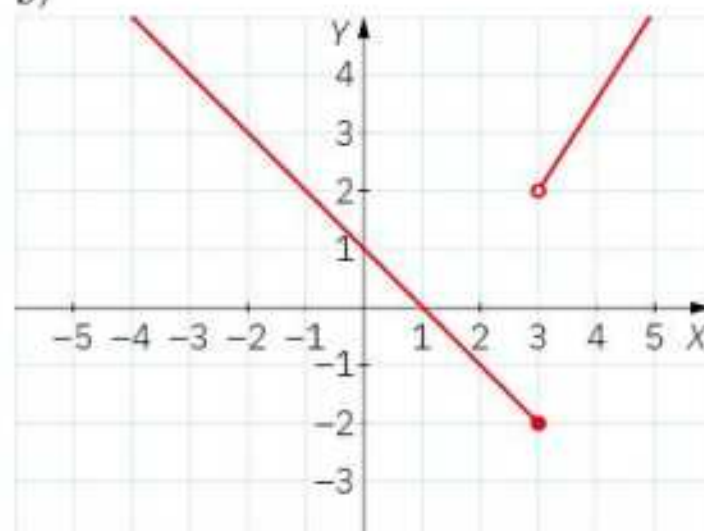


2. Zapisz w zeszycie w postaci przedziału liczbowego zbiór wartości funkcji przedstawionej na wykresie.

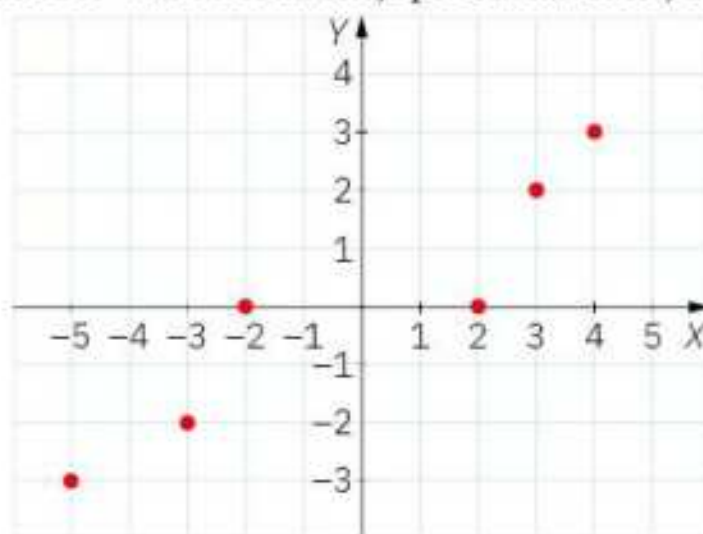
a)



b)

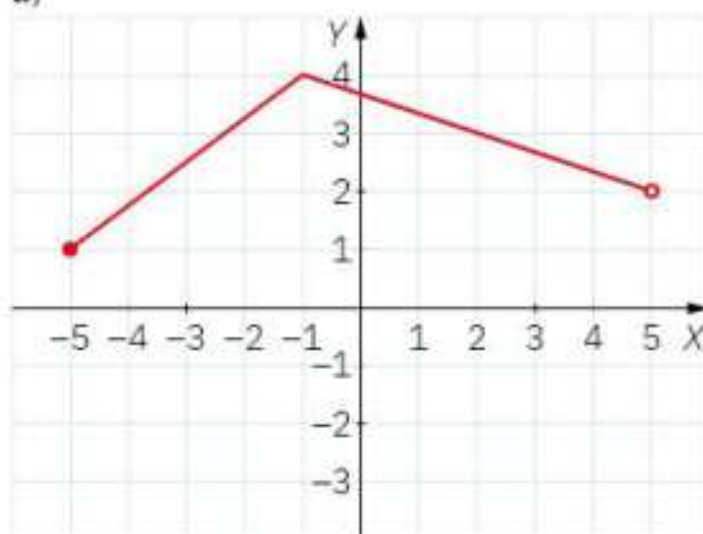


3. Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji przedstawionej za pomocą wykresu.

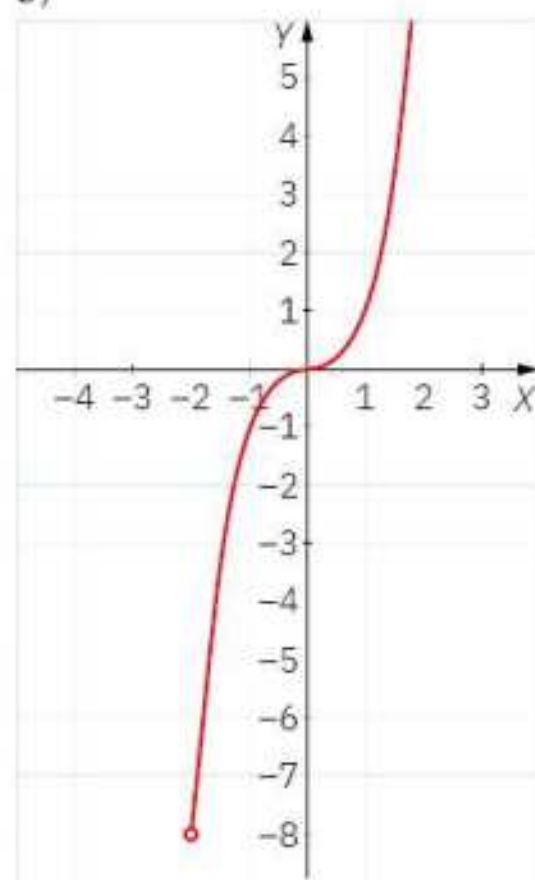


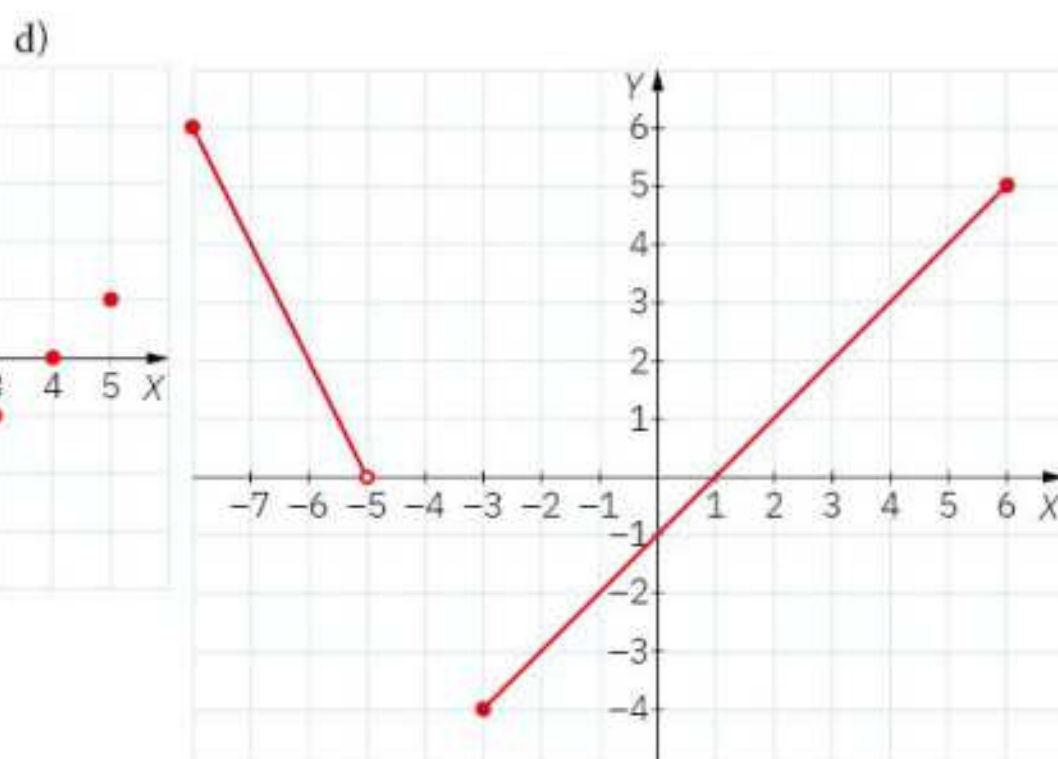
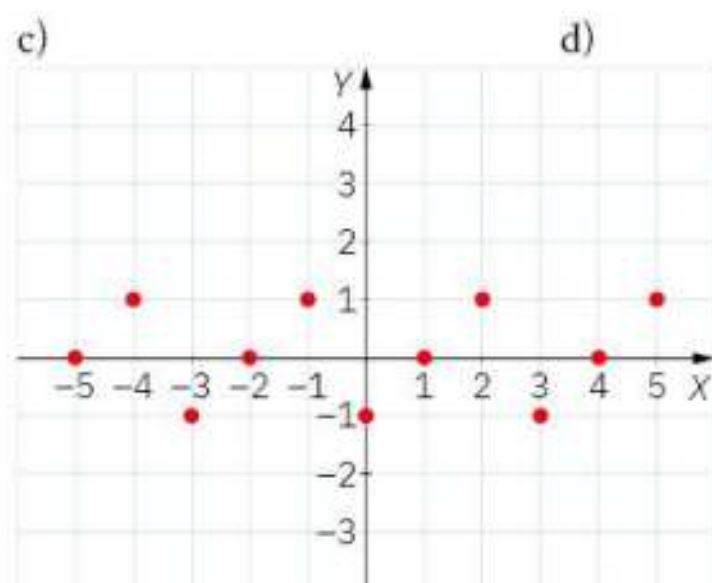
4. Odczytaj z wykresu dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

a)

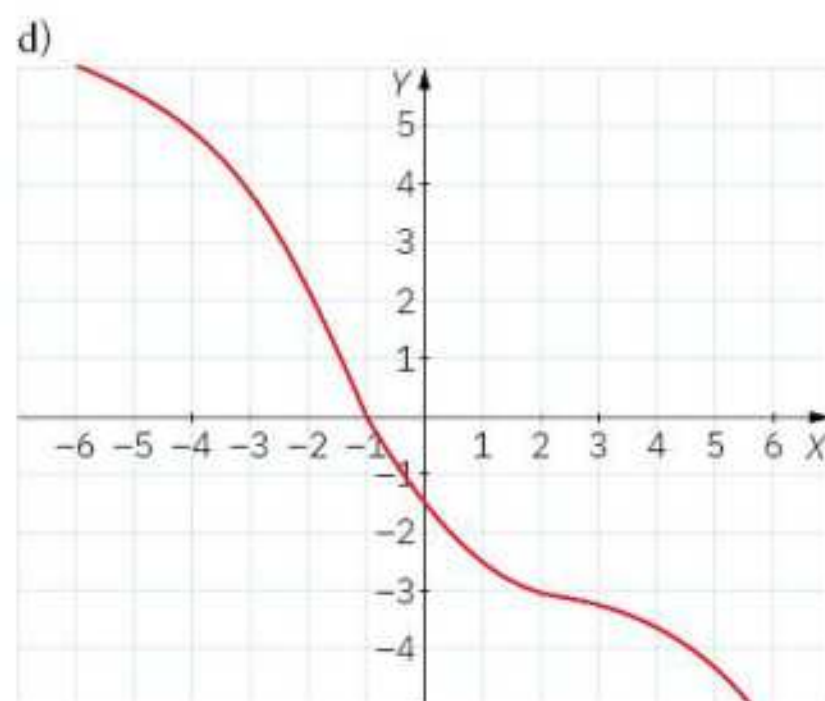
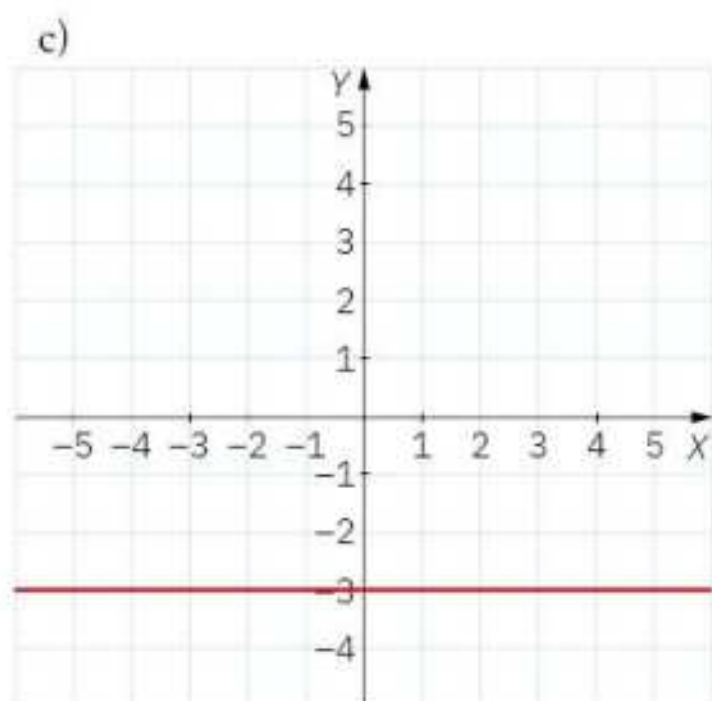
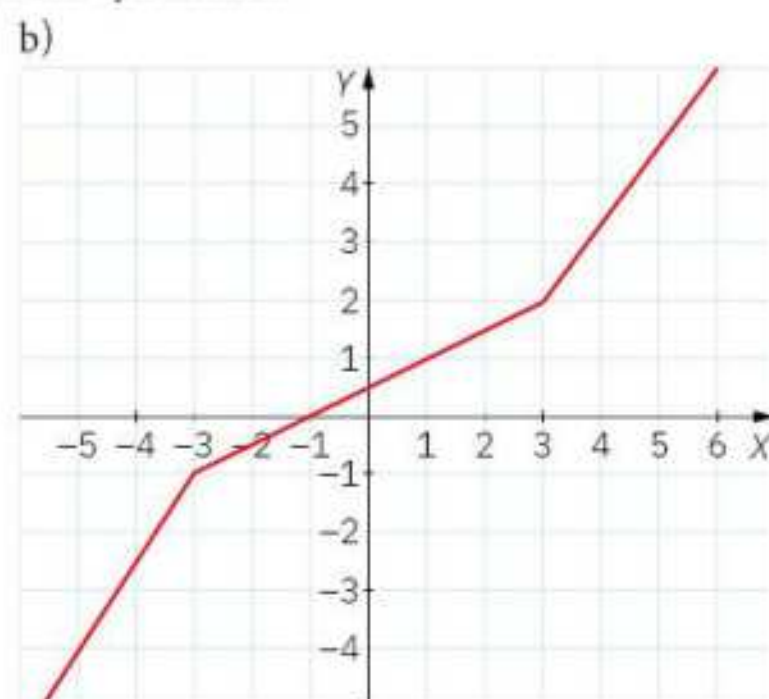
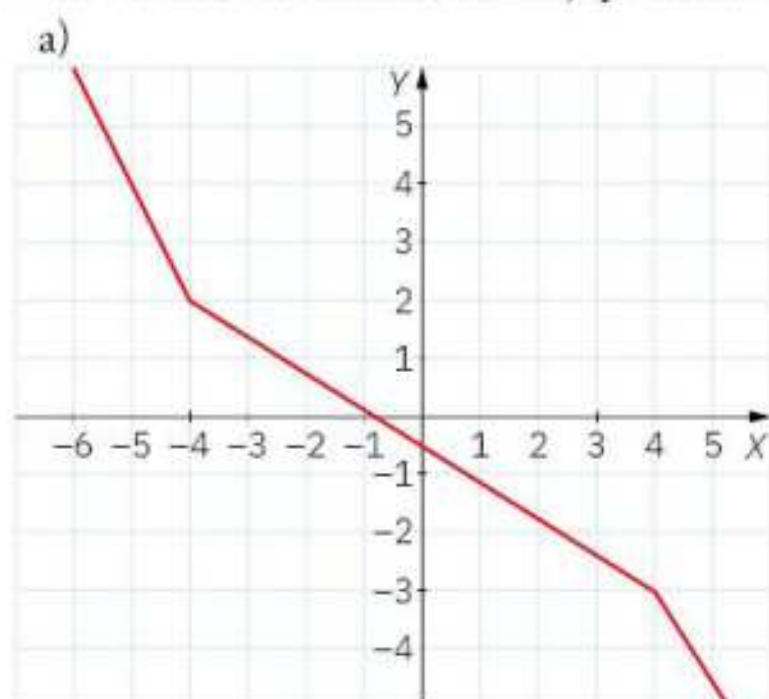


b)



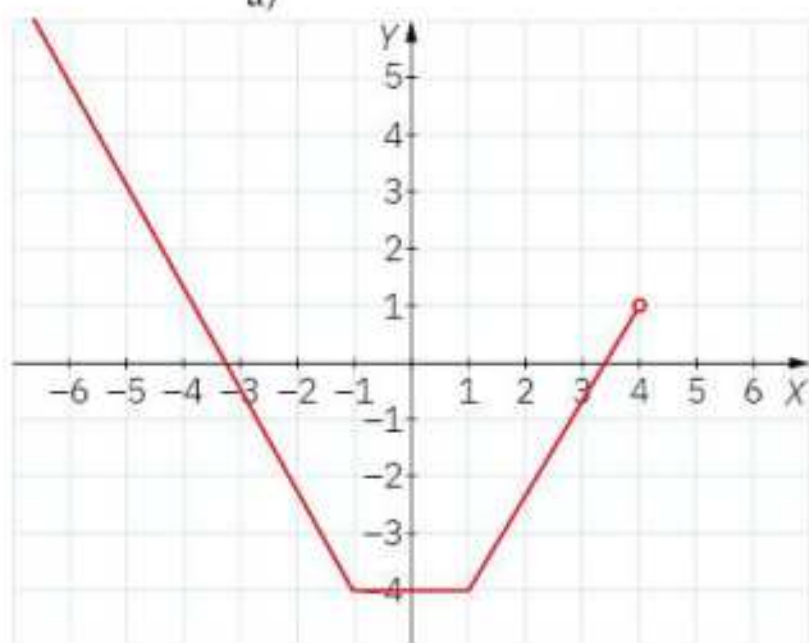


5. Określ monotoniczność funkcji przedstawionych na rysunkach.

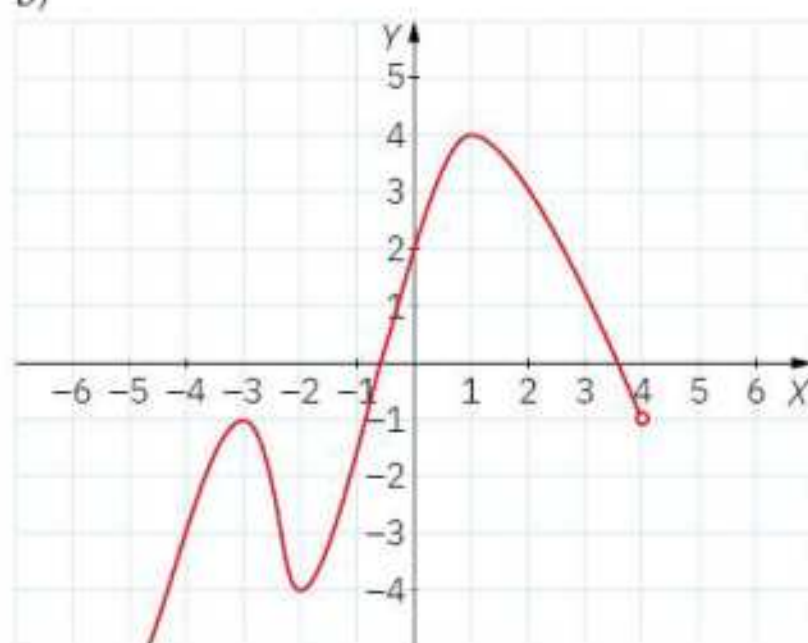


6. Na podstawie wykresu ustal maksymalne przedziały argumentów, w których funkcja jest rosnąca.

a)

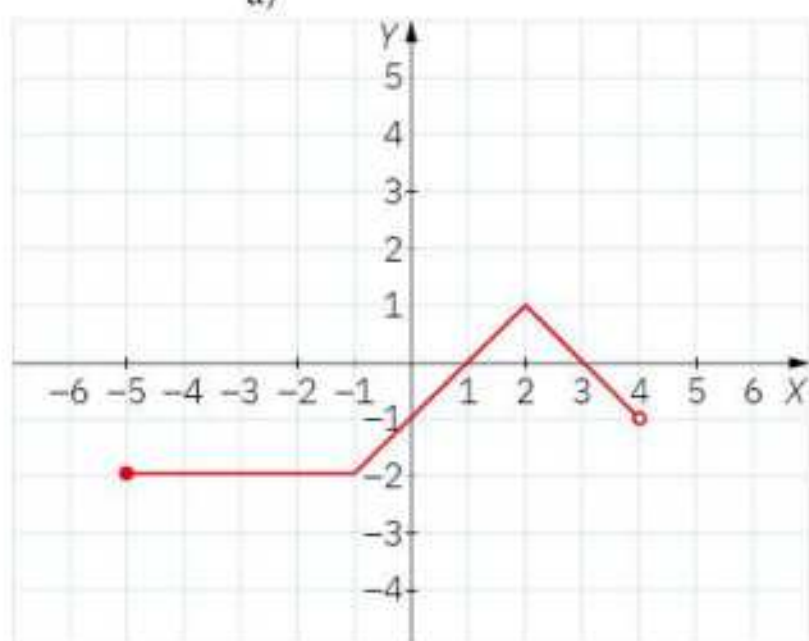


b)

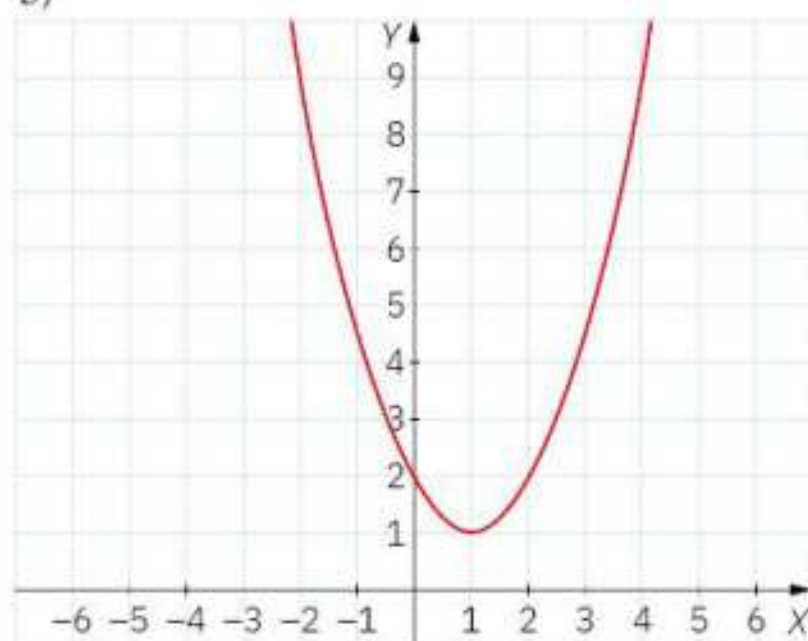


7. Określ maksymalne przedziały argumentów, w których funkcja przedstawiona na wykresie jest malejąca.

a)

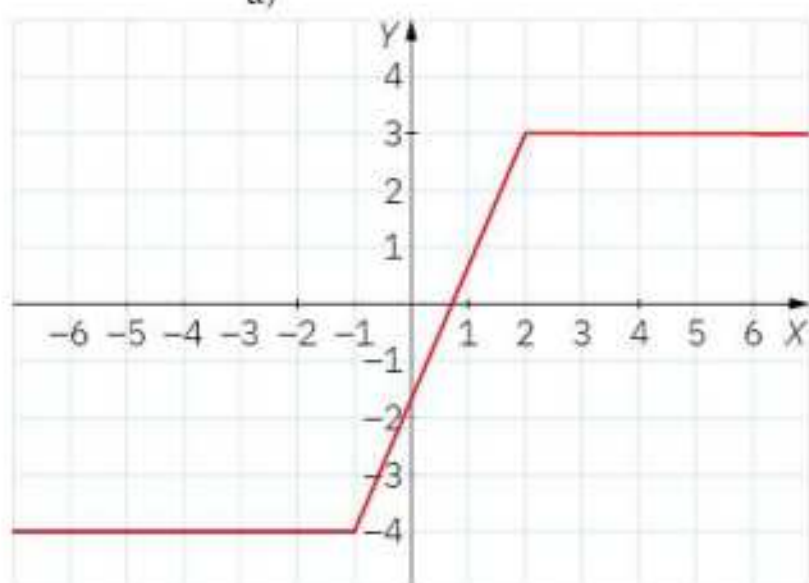


b)

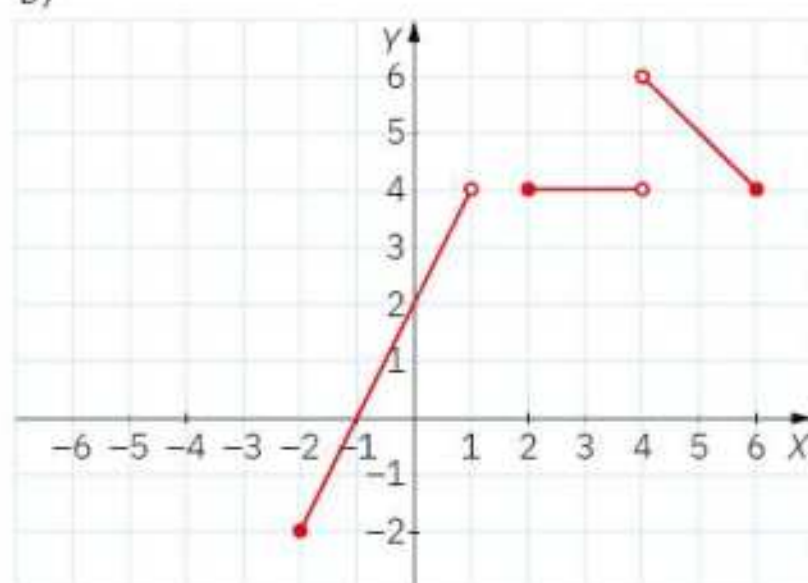


8. Zapisz maksymalne przedziały argumentów, w których funkcja przedstawiona na wykresie jest stała.

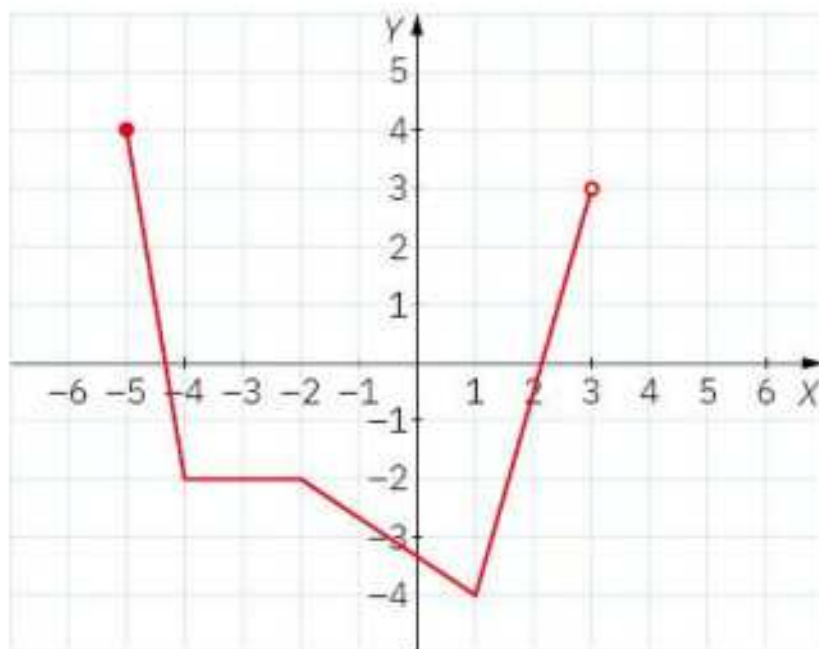
a)



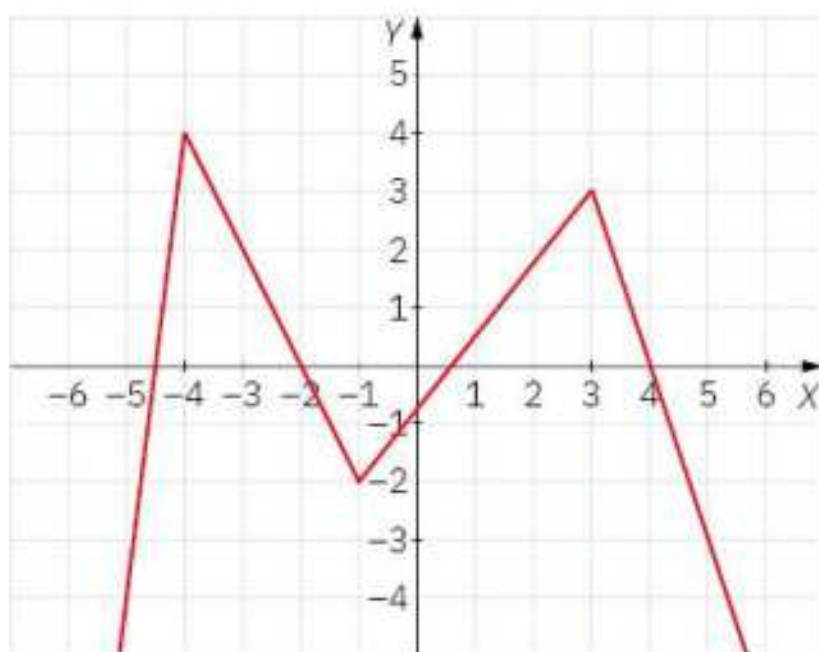
b)



9. Ustal maksymalne przedziały argumentów, w których funkcja przedstawiona na wykresie jest:
- rosnąca,
 - malejąca,
 - stała.



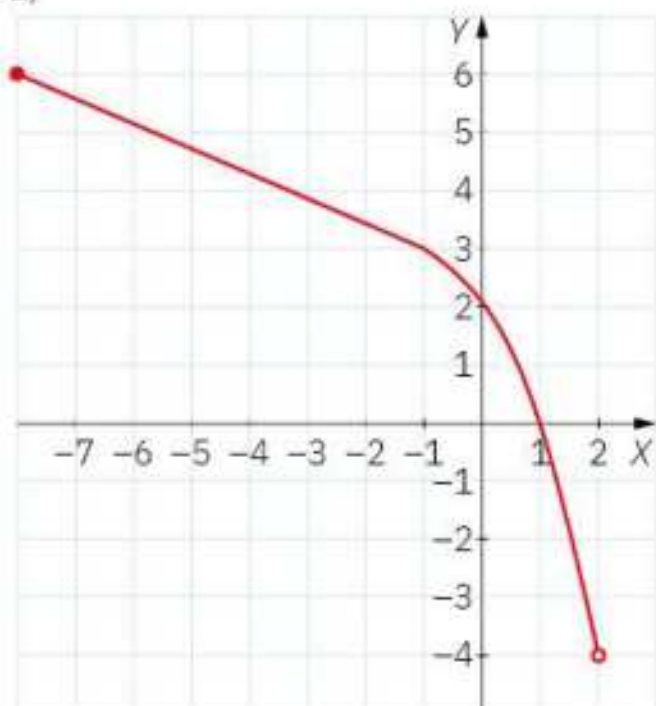
10. Na podstawie wykresu funkcji określ:
- dziedzinę funkcji,
 - zbiór wartości,
 - przedziały jej monotoniczności.



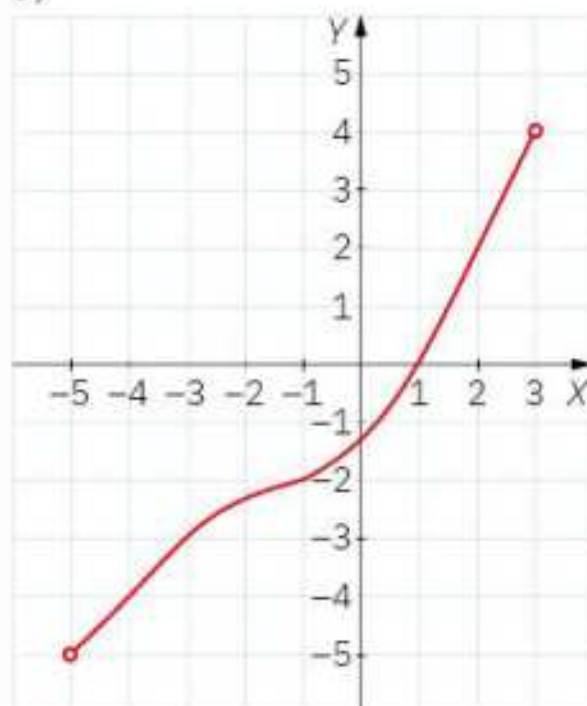
ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Przyporządkuj dziedzinę funkcji do odpowiedniego wykresu.

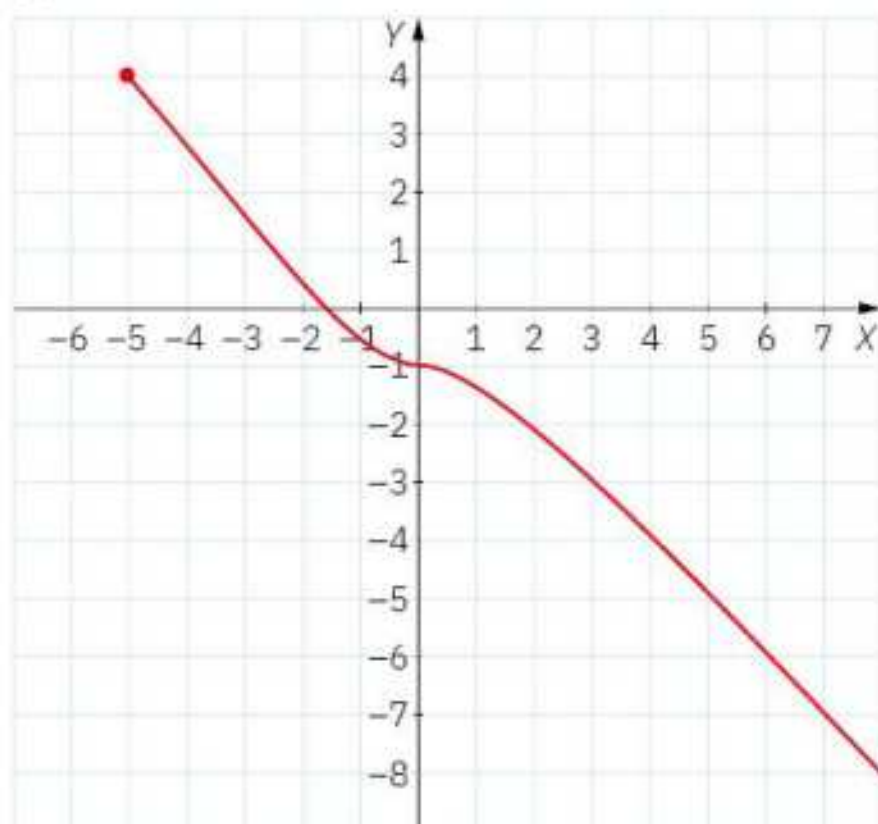
a)



b)



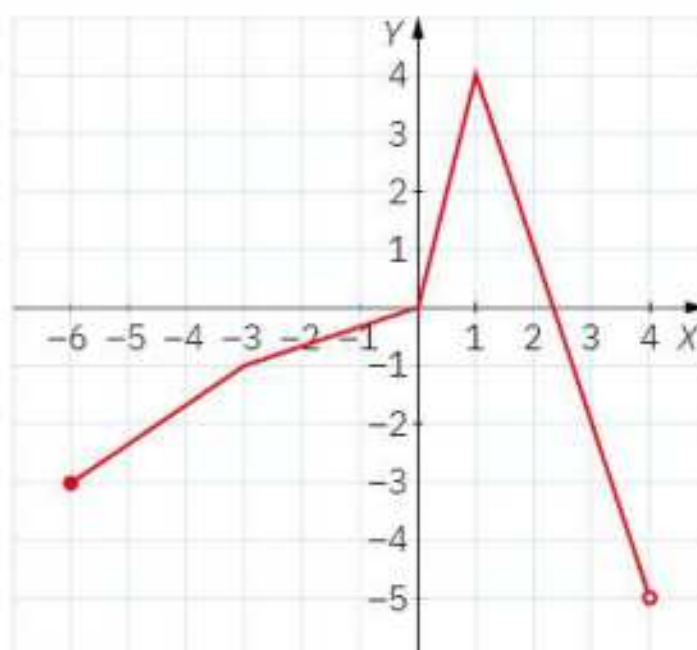
c)



- I. $D_f = (-5, 3)$
 II. $D_f = \langle -5, +\infty \rangle$
 III. $D_f = \langle -8, 2 \rangle$

- A. a – I, b – II, c – III
 B. a – II, b – III, c – I
 C. a – I, b – III, c – II
 D. a – III, b – I, c – II

2. Wskaż zdanie fałszywe.



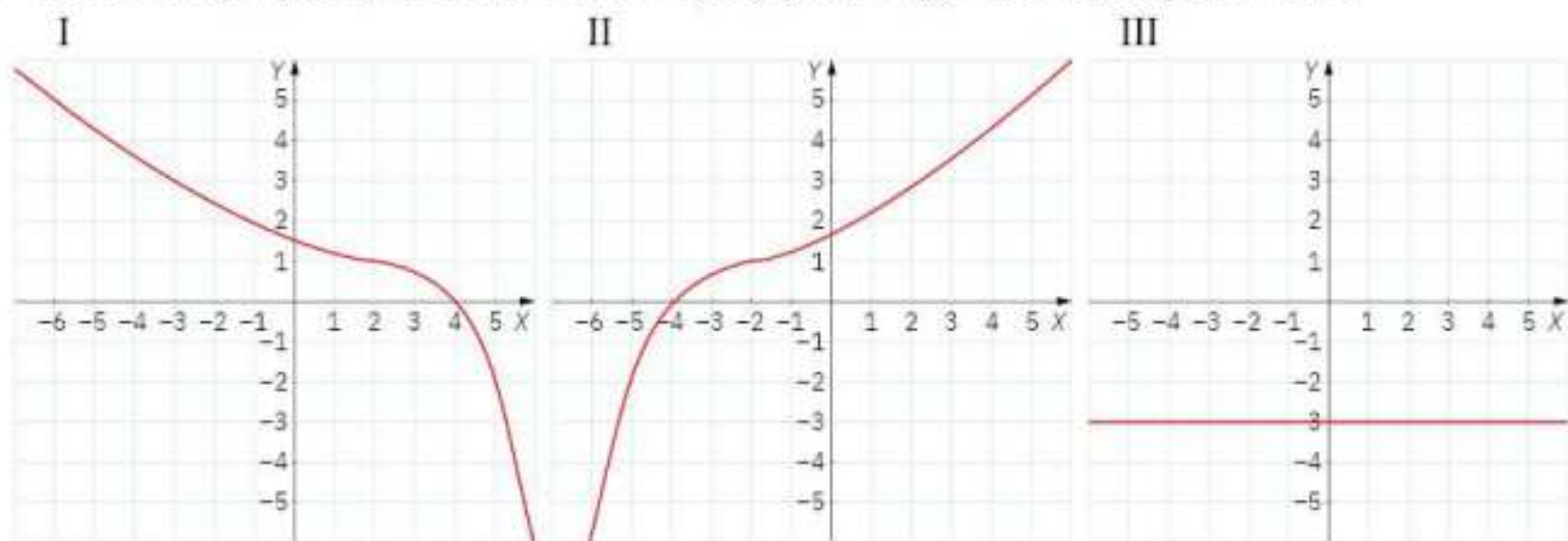
- A. Dla argumentu $x = -3$ funkcja przyjmuje wartość $y = -1$.
 B. Funkcja przyjmuje wartość 0 dla argumentów $x = 0$ i $x = 2$.
 C. Do wykresu funkcji należą punkty $(1, 4)$ i $(4, -5)$.
 D. Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -6, 4 \rangle$, a zbiorem wartości – przedział $\langle -5, 4 \rangle$.

3. Funkcja określona tabelą jest:

x	-5	0	-3	4	-1	2
y	5	0	3	-4	1	-2

- A. rosnąca
 B. malejąca
 C. stała
 D. nie można stwierdzić

4. Przeanalizuj wykresy i oceń, która z dotyczących je wypowiedzi jest prawdziwa.



- A. I – funkcja rosnąca, II – funkcja malejąca, III – funkcja stała
- B. I – funkcja malejąca, II – funkcja stała, III – funkcja rosnąca
- C. I – funkcja stała, II – funkcja rosnąca, III – funkcja malejąca
- D. I – funkcja malejąca, II – funkcja rosnąca, III – funkcja stała

4.4. Odczytywanie własności funkcji z wykresu – ciąg dalszy

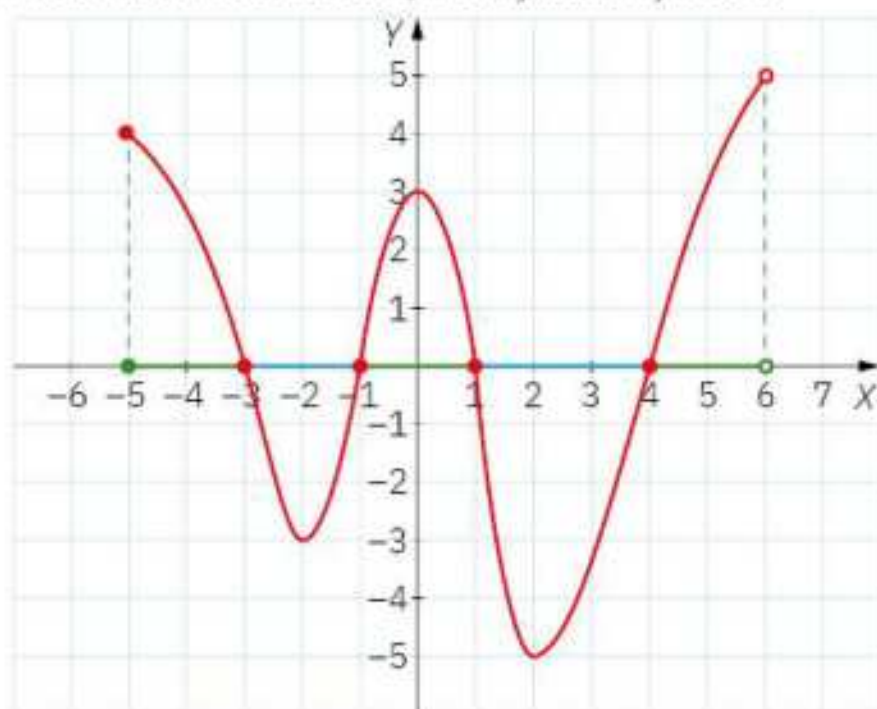
Na wykresie przedstawiono zmiany temperatury zanotowane w ciągu doby. Pomiar zaczęto o godzinie 18.00 19 lutego, a zakończono o godzinie 21.00 20 lutego.



Na podstawie tego wykresu możemy stwierdzić, że temperatura wyniosła 0°C 19 lutego o godzinie 21.00 i 20 lutego o 12.00. Temperatura ujemna utrzymywała się między godziną 21.00 a 12.00. W pozostałych godzinach, czyli od 18.00 do 21.00 oraz od 12.00 do 18.00 temperatura była wyższa od zera.

Ćwiczenie 1.

Wyznacz miejsca zerowe funkcji przedstawionej na wykresie. Dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie, a dla jakich ujemne?

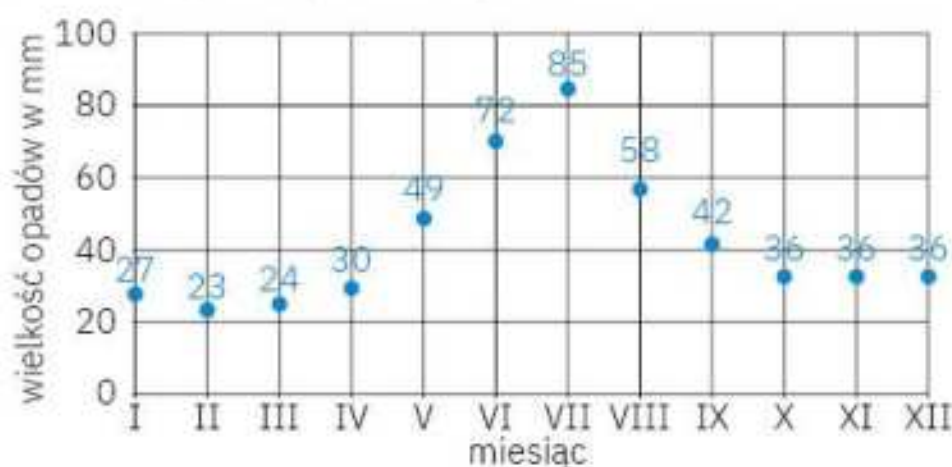


Rozwiązanie:

- Miejsca zerowe tej funkcji to argumenty: $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ i $x = 4$.
- Kolorem zielonym zaznaczono argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie. Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in \langle -5, -3 \rangle$ lub $x \in (-1, 1)$, lub $x \in (4, 6)$.
- Kolorem niebieskim zaznaczono argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne. Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (-3, -1)$ lub $x \in (1, 4)$.

Na wykresie przedstawiono wysokość opadów w ciągu poszczególnych miesięcy pewnego roku.

Na podstawie tego wykresu możemy stwierdzić, że najwyższe opady zanotowano w lipcu (85 mm, czyli 85 l/m² na dobę), a najniższe w lutym (23 mm). Od lutego do lipca wielkość opadów rosła. Od lipca do października ich wielkość malała, po czym ustabilizowała się i osiągnęła wartość 36 mm. Średnia wysokość opadów w miesiącu w tym roku kalendarzowym wyniosła 43,2 mm. Miesięczne wysokości opadów były wyższe od średniej od maja do sierpnia.

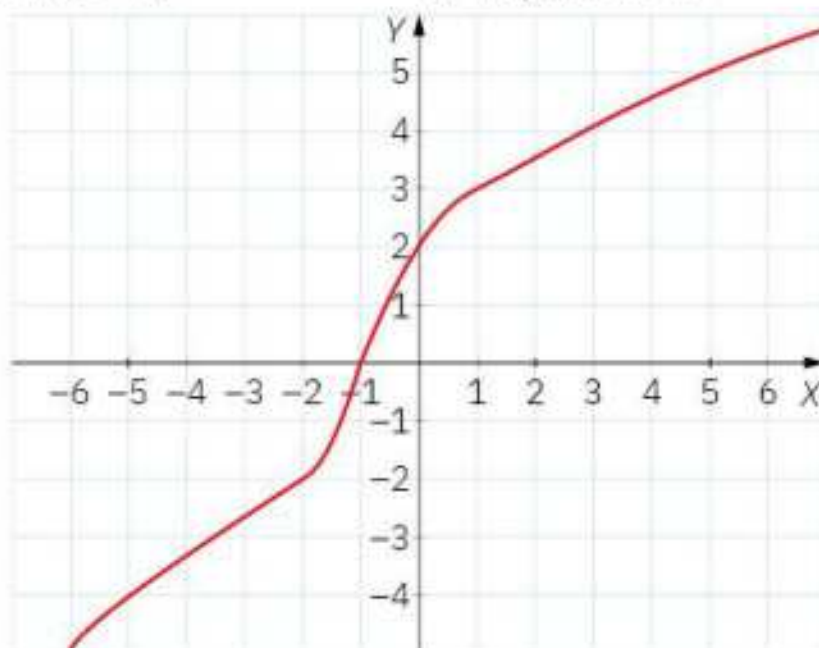


Ćwiczenie 2.

Na podstawie wykresu podaj argumenty, dla których wartości funkcji są:

a) co najwyżej równe -2 ,

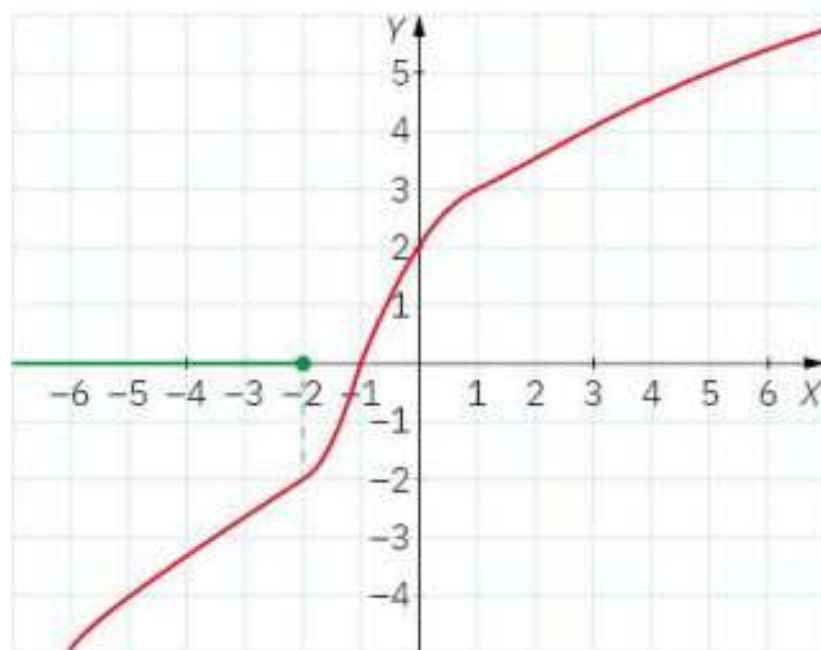
b) większe od 3 .



Rozwiązanie:

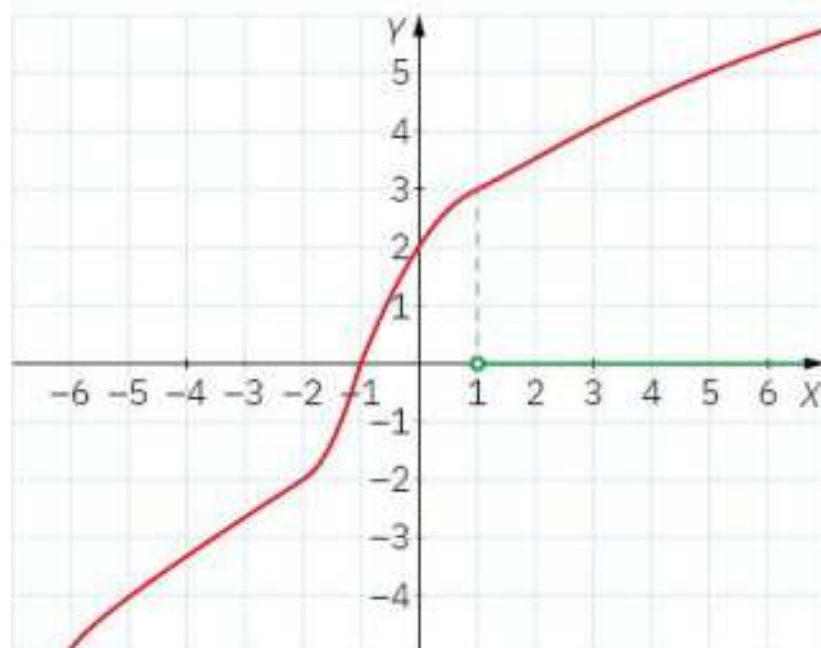
a)

Odpowiedź: Wartości funkcji są co najwyżej równe -2 dla $x \in (-\infty, -2]$.



b)

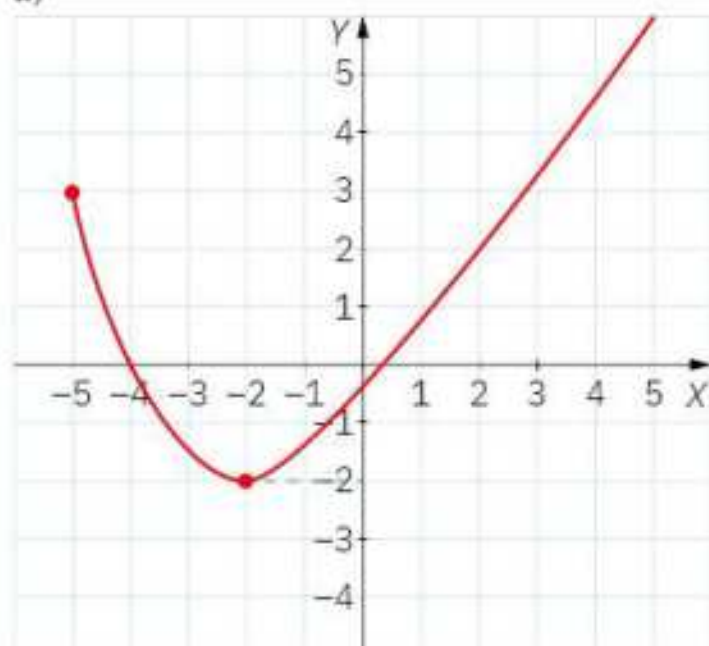
Odpowiedź: Wartości funkcji są większe od 3 dla $x \in (1, \infty)$.



Ćwiczenie 3.

Odczytaj z wykresu największą i najmniejszą wartość funkcji.

a)

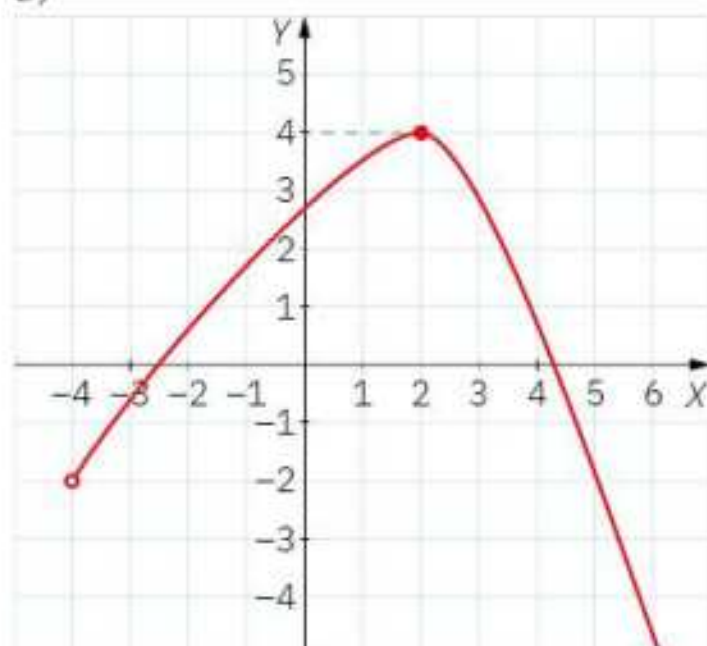


Rozwiązanie:

Funkcja nie osiąga wartości największej.

Wartość najmniejsza: $y_{\min} = -2$.

b)



Rozwiązanie:

Wartość największa: $y_{\max} = 4$.

Funkcja nie osiąga wartości najmniejszej.

Ćwiczenie 4.

Podaj największą i najmniejszą wartość funkcji określonej tabelą.

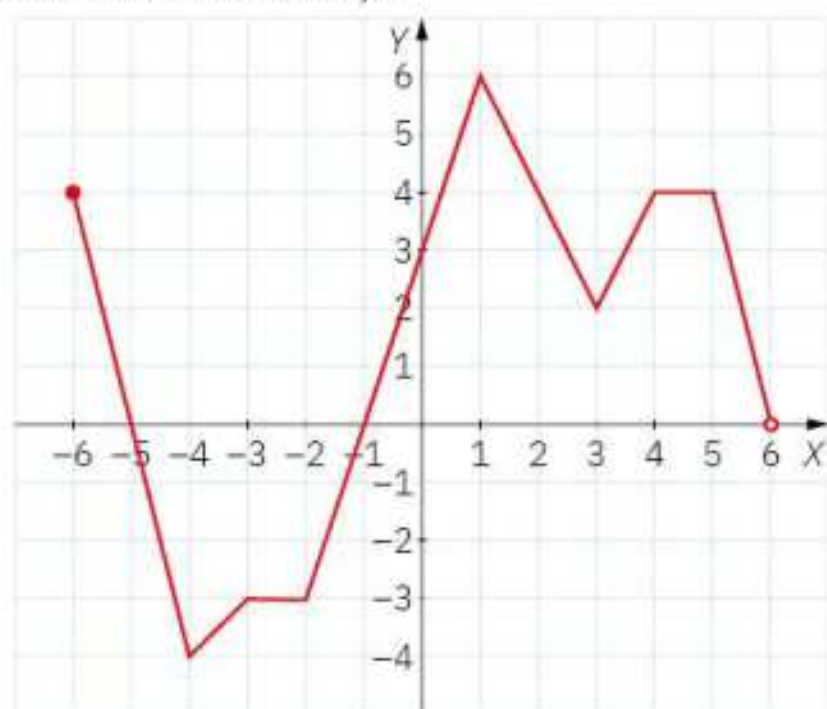
x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

Rozwiązanie:

Wartość największa to $y_{\max} = 4$, a wartość najmniejsza to $y_{\min} = -4$.

Ćwiczenie 5.

Odczytaj z wykresu własności funkcji.



Rozwiązanie:

a) Dziedzina funkcji $D_f: x \in \langle -6, 6 \rangle$.

b) Zbiór wartości funkcji ZW: $y \in \langle -4, 6 \rangle$.

c) Miejsca zerowe funkcji: $x = -5$ i $x = -1$.

d) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: $x \in \langle -6, -5 \rangle$ lub $x \in (-1, 6)$.

e) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: $x \in (-5, -1)$.

f) Przedziały monotoniczności funkcji:

– funkcja rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -4, -3 \rangle$, $\langle -2, 1 \rangle$ i $\langle 3, 4 \rangle$;

– funkcja malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -6, -4 \rangle$, $\langle 1, 3 \rangle$ i $\langle 5, 6 \rangle$;

– funkcja stała w każdym z przedziałów: $\langle -3, -2 \rangle$ i $\langle 4, 5 \rangle$.

g) Największa wartość funkcji: $y = 6$ dla $x = 1$.

h) Najmniejsza wartość funkcji: $y = -4$ dla $x = -4$.

Czasami argumenty i wartości funkcji nazywa się zmiennymi: argument – zmienną niezależną, a wartość – zmienną zależną. Zmienna może przyjmować różne wartości.

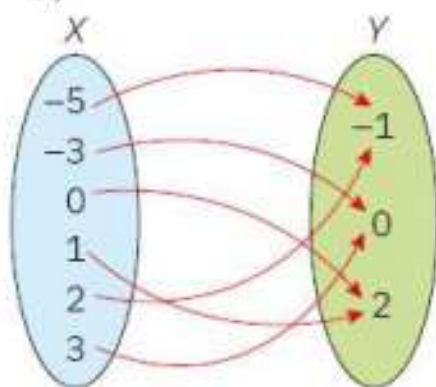
Wielkości przyjmujące zawsze tę samą wartość nazywamy stałymi.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

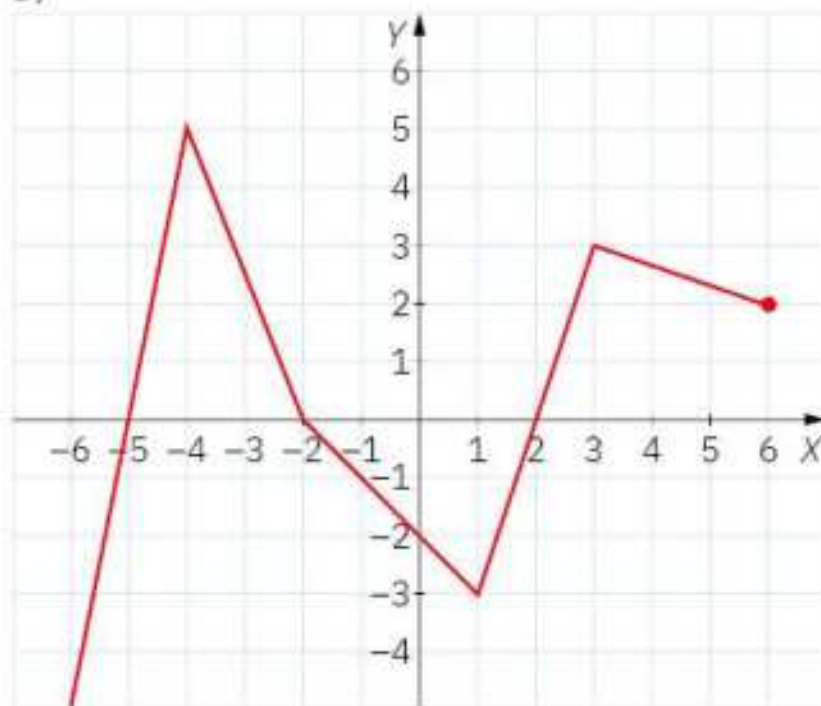


1. Dla każdej z poniższych funkcji podaj jej miejsca zerowe i określ, dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

a)



b)

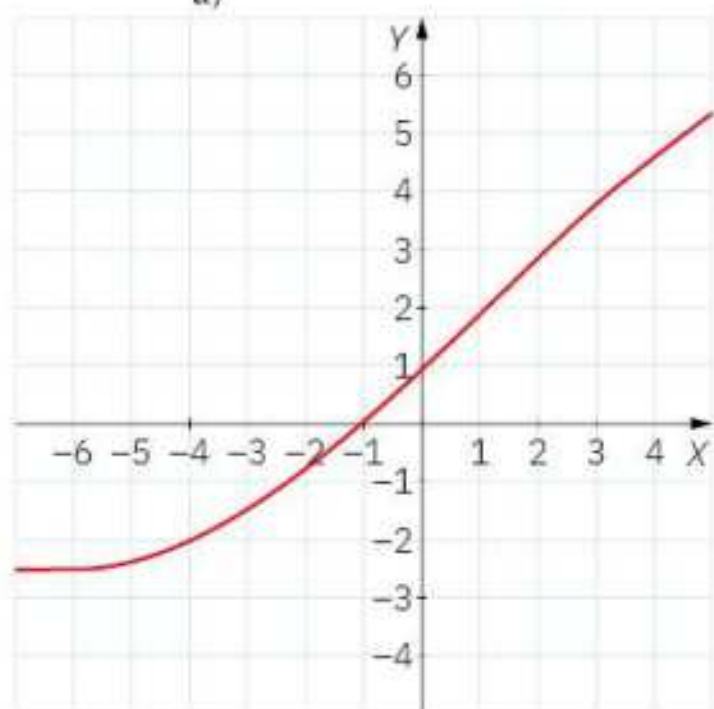


c)

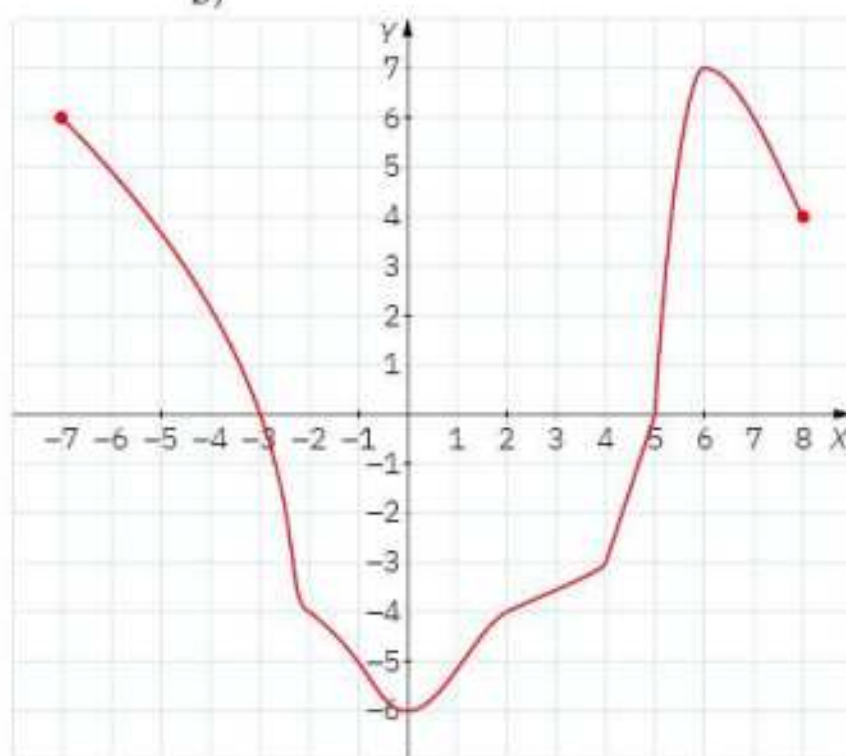
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	-1	-4	-9

2. Określ, dla jakich argumentów funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje wartości dodatnie.

a)

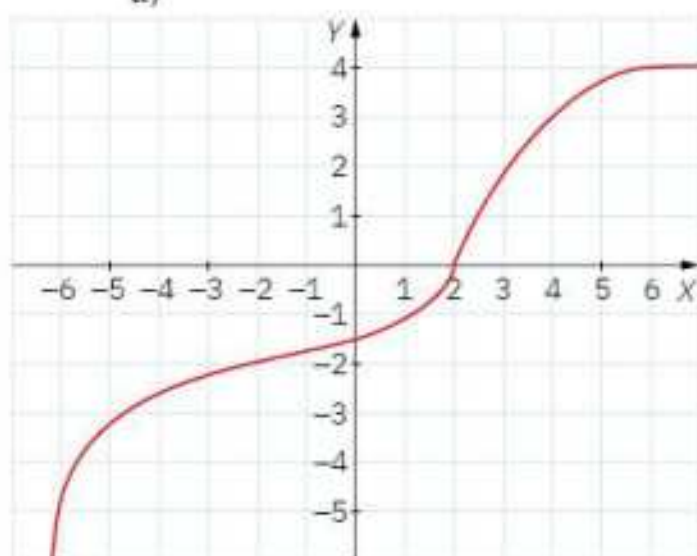


b)

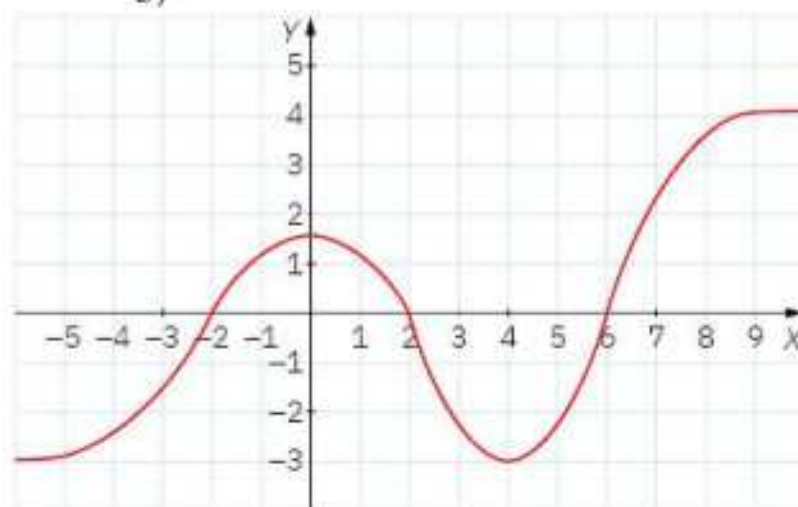


3. Podaj przedziały argumentów, dla jakich funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje wartości ujemne.

a)



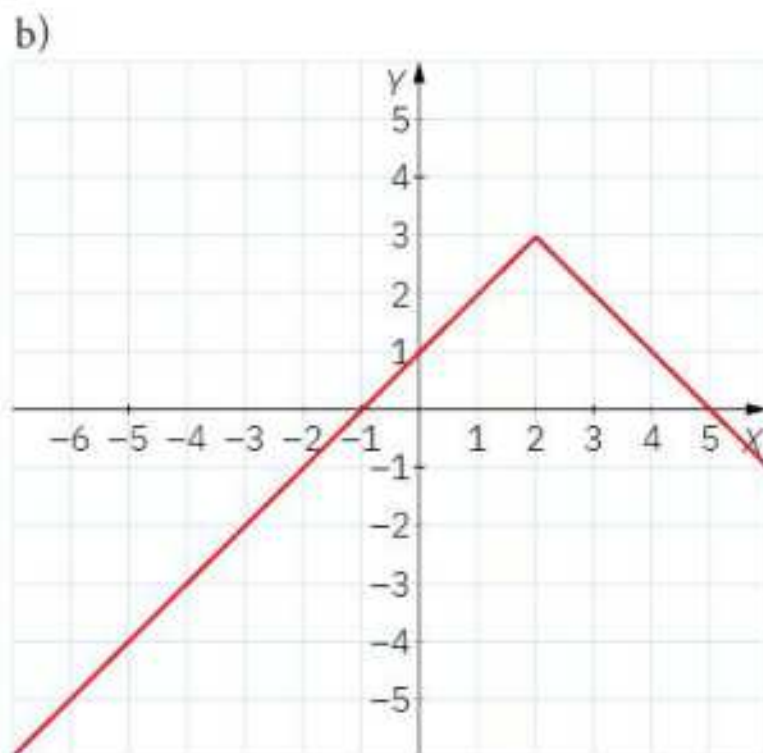
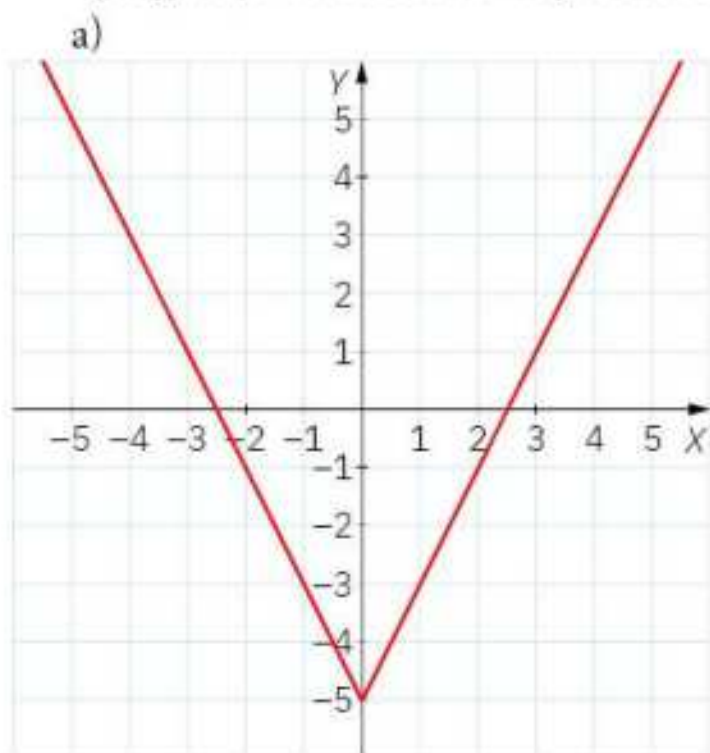
b)



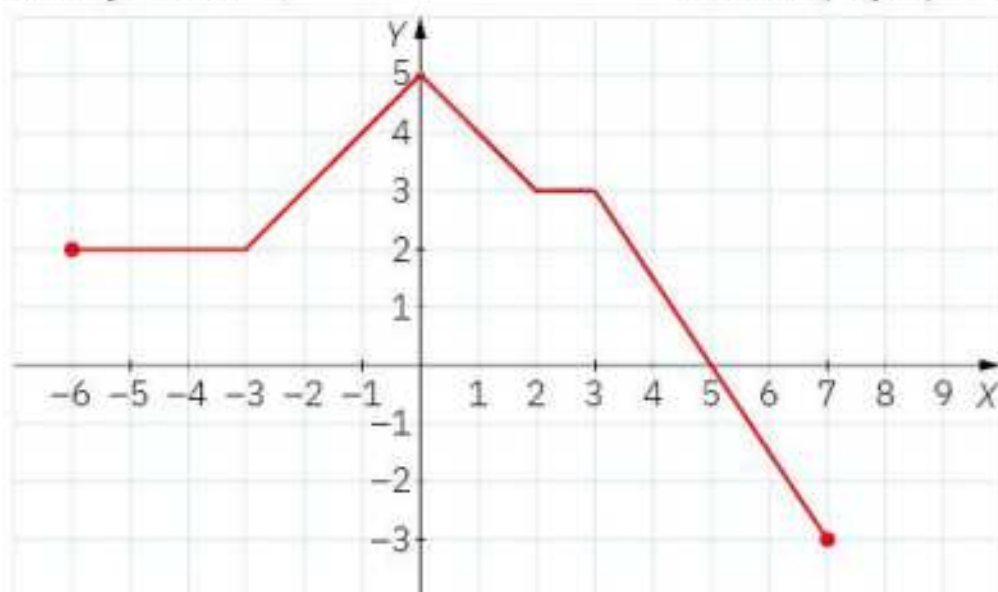
4. Narysuj w zeszycie wykres funkcji, która przyjmuje:

- a) tylko wartości dodatnie,
b) tylko wartości ujemne.

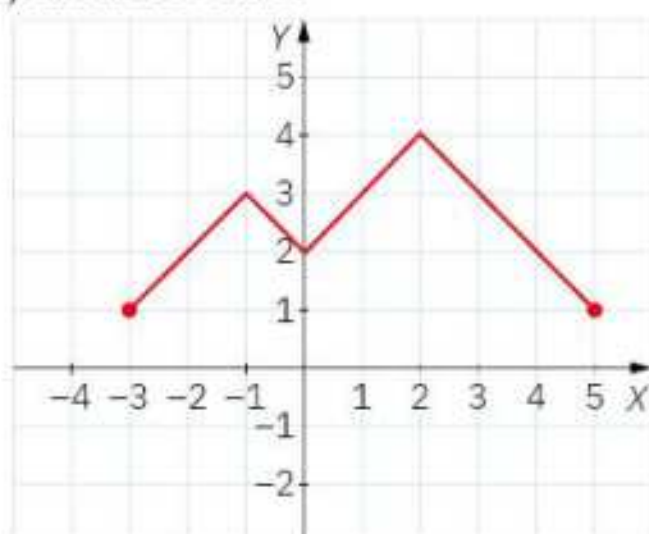
5. Podaj przedziały argumentów, dla jakich funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje wartości nie większe niż -1 .



6. Określ, dla jakich argumentów wartości funkcji przedstawionej na wykresie są:
a) większe od 4, b) co najwyżej równe 3.

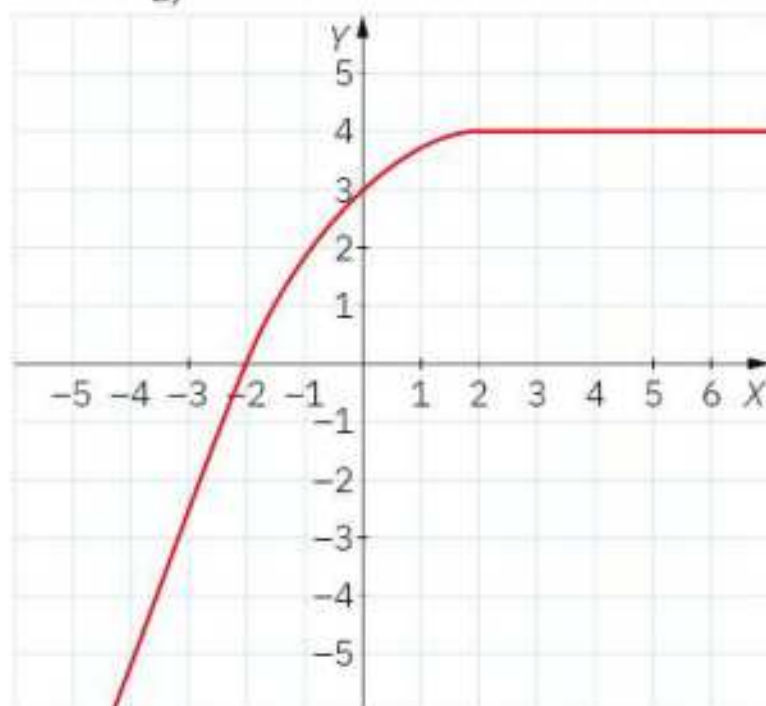


7. Odczytaj z wykresu przedziały argumentów, dla których wartość funkcji jest większa od 2 i mniejsza lub równa 3.

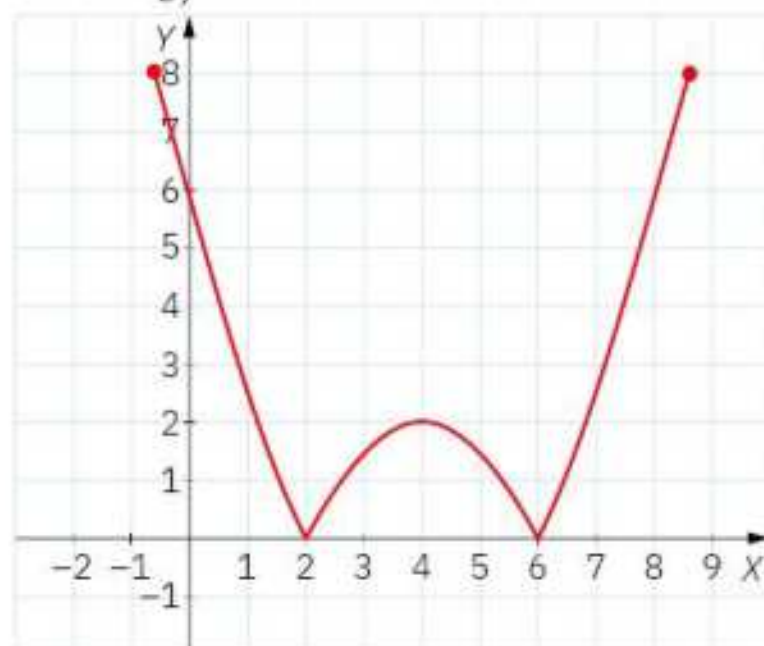


8. Odczytaj z wykresu największą i najmniejszą wartość funkcji (o ile istnieje).

a)

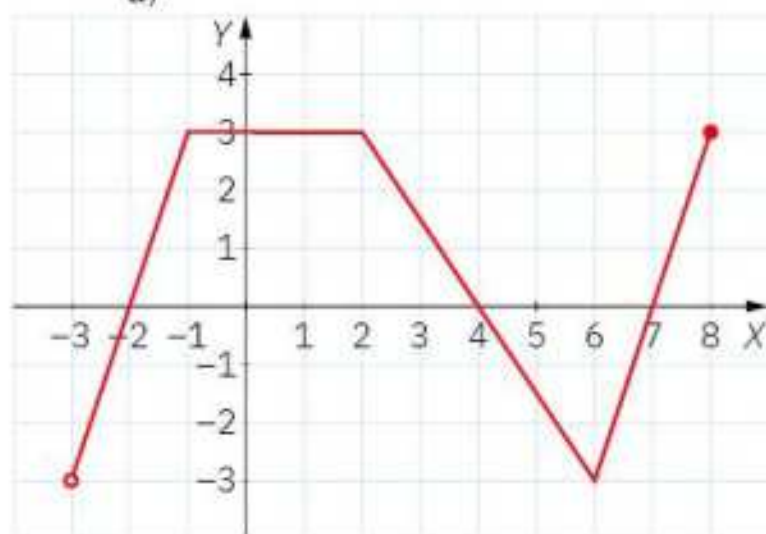


b)

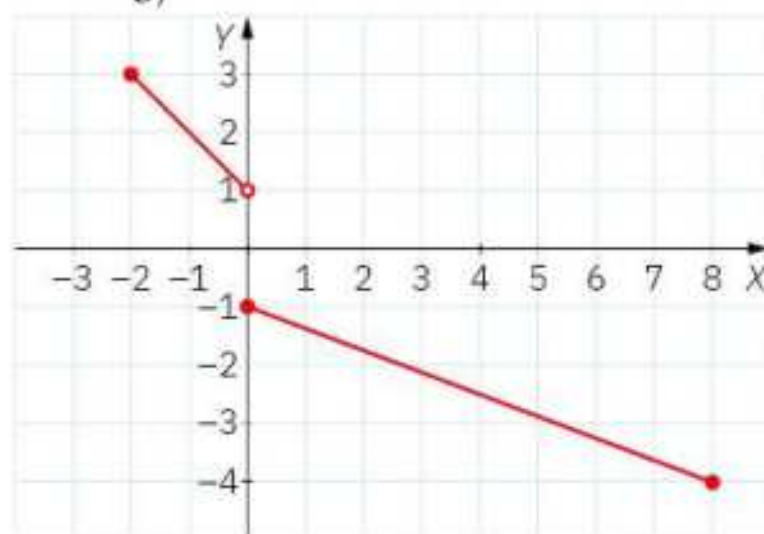


9. Odczytaj z wykresu największą i najmniejszą wartość funkcji oraz podaj argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.

a)



b)

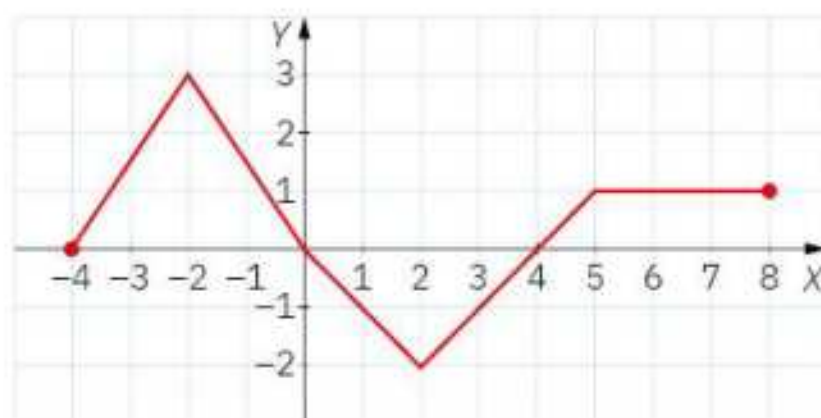


10. Podaj największą wartość funkcji przedstawionej na wykresie:

a) w przedziale $(-4, -2)$,

b) w przedziale $(0, 6)$,

c) w całej dziedzinie funkcji.



11. Narysuj w zeszycie wykres funkcji, która przyjmuje:

a) wartość największą i najmniejszą,

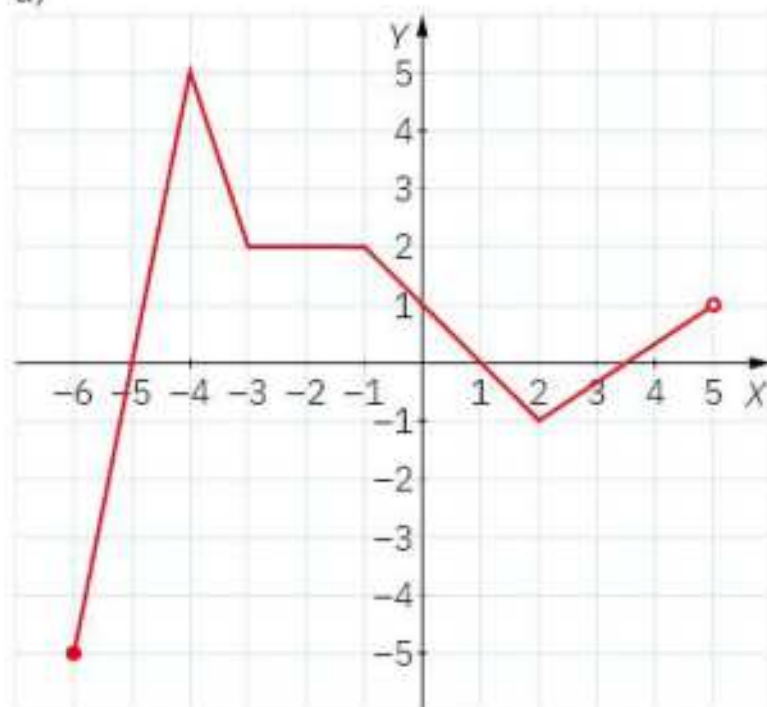
b) tylko wartość największą spośród najmniejszej i największej,

c) tylko wartość najmniejszą spośród najmniejszej i największej.

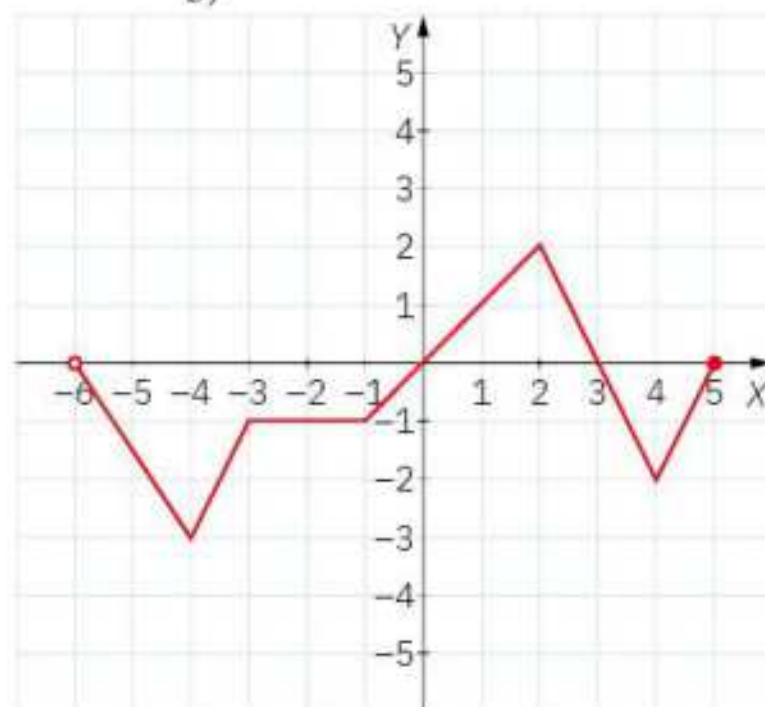
12. Funkcja określona jest wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \in (-\infty, -1) \\ 2, & x \in (0, 2) \end{cases}$. Sporządź wykres tej funkcji i opisz w zeszycie jej własności.

13. Opisz w zeszycie własności funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunkach.

a)



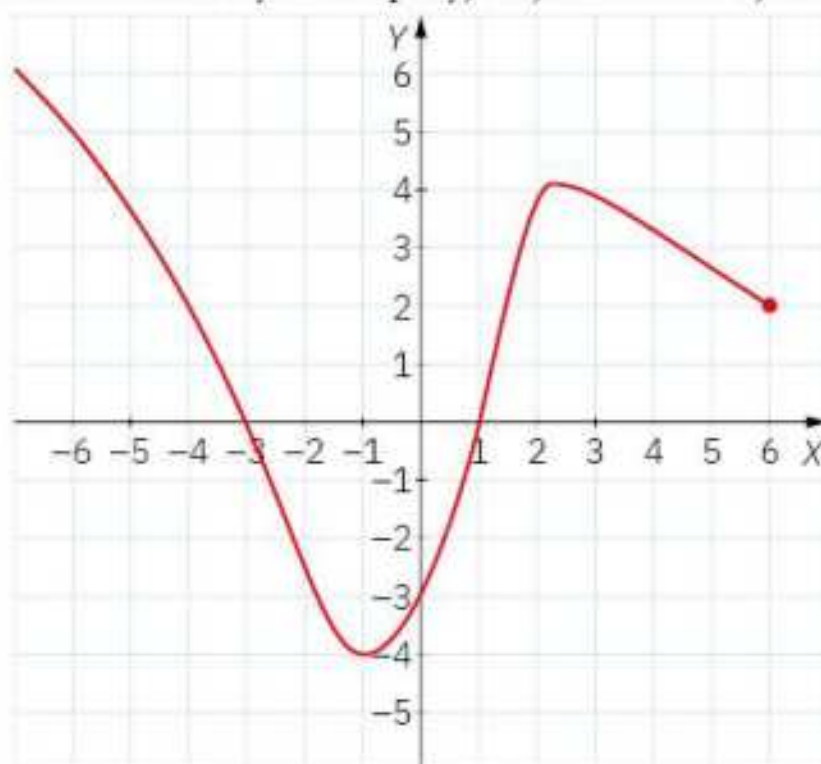
b)



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE



1. Funkcja przedstawiona na wykresie przyjmuje wartości ujemne w przedziale:



A. $\langle -3, 1 \rangle$

B. $\langle -3, 1 \rangle$

C. $\langle -3, 1 \rangle$

D. $\langle -3, 1 \rangle$

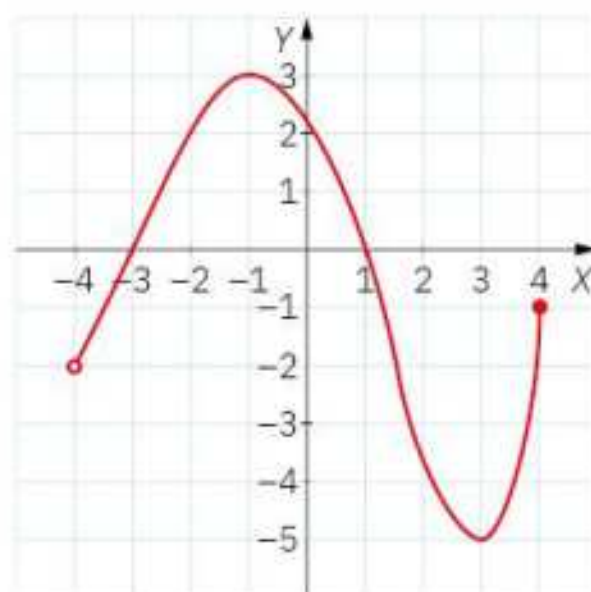
2. Dla jakich argumentów funkcja opisana tabelą przyjmuje wartości dodatnie?

x	-5	$-4\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	0,4	2	$2\frac{1}{4}$	3	$3\frac{1}{2}$	5	5,3	8	9	10
y	2	4	8	2	-0,3	-0,4	-0,5	2	4	8	-1	-2	2	4	8

- A. $-5, -4\frac{1}{2}, -3\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 8, 9, 10$ B. $-5, -4\frac{1}{2}, -3\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, 3, 3\frac{1}{2}, 8, 9, 10$
 C. $-5, -4\frac{1}{2}, -3\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, 3, 3\frac{1}{2}$ D. $2\frac{1}{4}, 3, 3\frac{1}{2}, 8, 9, 10$
3. Funkcję przedstawiono za pomocą tabeli. Wskaż, które z opisujących ją zdań jest fałszywe.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	0	3	0	4

- A. Funkcja ma dwa miejsca zerowe.
 B. Punktem wspólnym wykresu funkcji i osi Y jest punkt $(0, 3)$.
 C. Największa wartość funkcji jest równa 4.
 D. Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.
4. Wśród zdań opisujących funkcję przedstawioną na wykresie wskaż zdanie prawdziwe.



- A. Funkcja przyjmuje wartość największą dla argumentu równego 3.
 B. Dla argumentów z przedziału $(-3, 1)$ wartości funkcji są dodatnie.
 C. Wartość najmniejsza funkcji jest równa -5.
 D. Wartości funkcji są mniejsze od 2 dla $x \in (-2, 0)$.

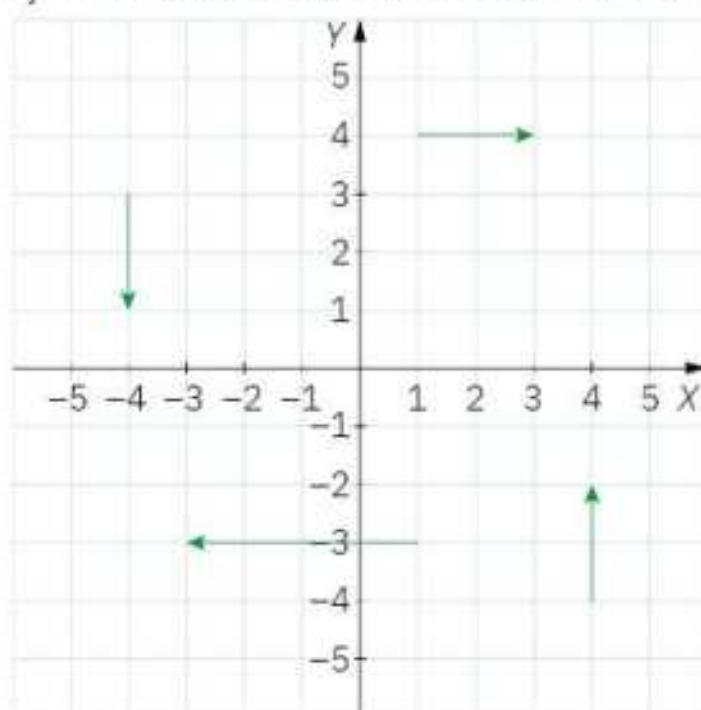
4.5. Przesuwanie wykresów funkcji

Wykres dowolnej funkcji możemy przesuwać w poziomie i w pionie. Wartości, o jakie przesuwamy wykres funkcji, zapisujemy za pomocą wektora.

Ćwiczenie 1.

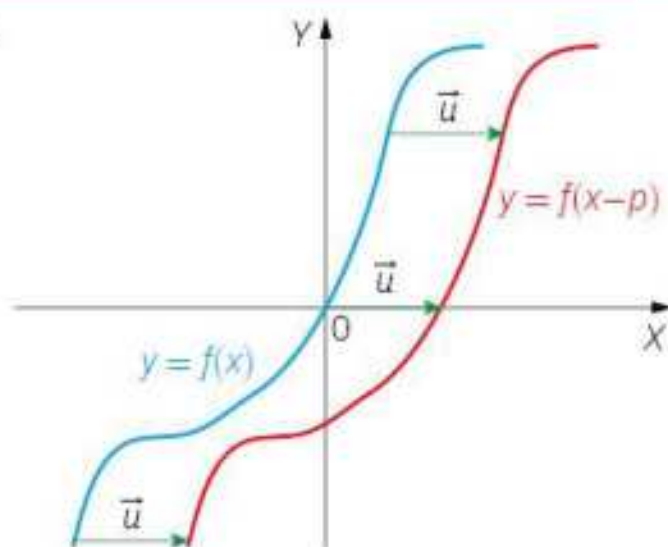
Przyporządkuj narysowanym w układzie współrzędnych wektorom ich nazwy $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, jeśli:

- wektor $\vec{a} = [2, 0]$ oznacza przesunięcie o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi X,
- wektor $\vec{b} = [-4, 0]$ oznacza przesunięcie o 4 jednostki w lewo wzdłuż osi X,
- wektor $\vec{c} = [0, 3]$ oznacza przesunięcie o 3 jednostki w górę wzdłuż osi Y,
- wektor $\vec{d} = [0, -2]$ oznacza przesunięcie o 2 jednostki w dół wzdłuż osi Y.



W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, 0]$ powstaje wykres funkcji $y = f(x - p)$, $p \in \mathbb{R}$.

Wektor $\vec{u} = [p, 0]$ nazywamy wektorem przesunięcia.



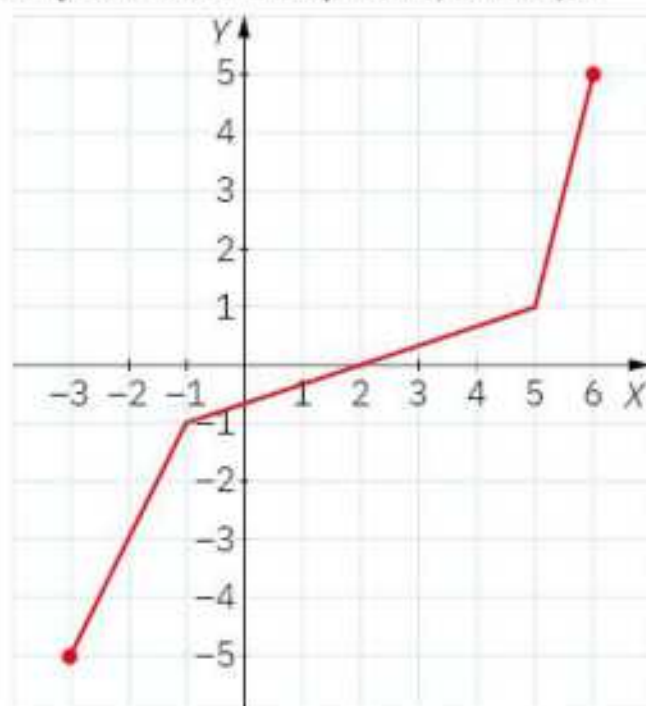
Ćwiczenie 2.

Przesuń wykres narysowanej funkcji $y = f(x)$:

a) o 3 jednostki w lewo,

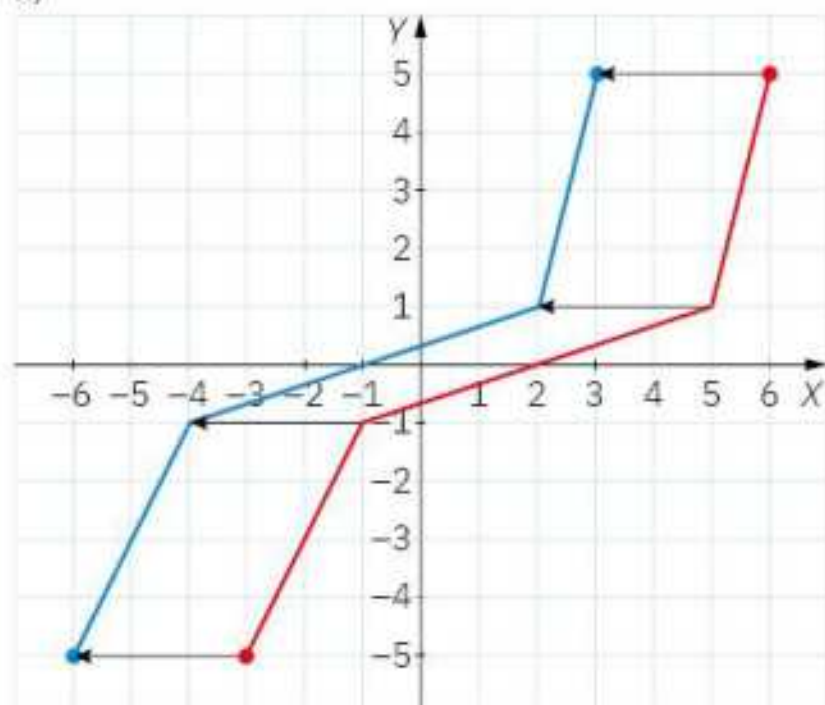
b) o 2 jednostki w prawo.

Zapisz wektor przesunięcia i wzór otrzymanej funkcji.



Rozwiązanie:

a)

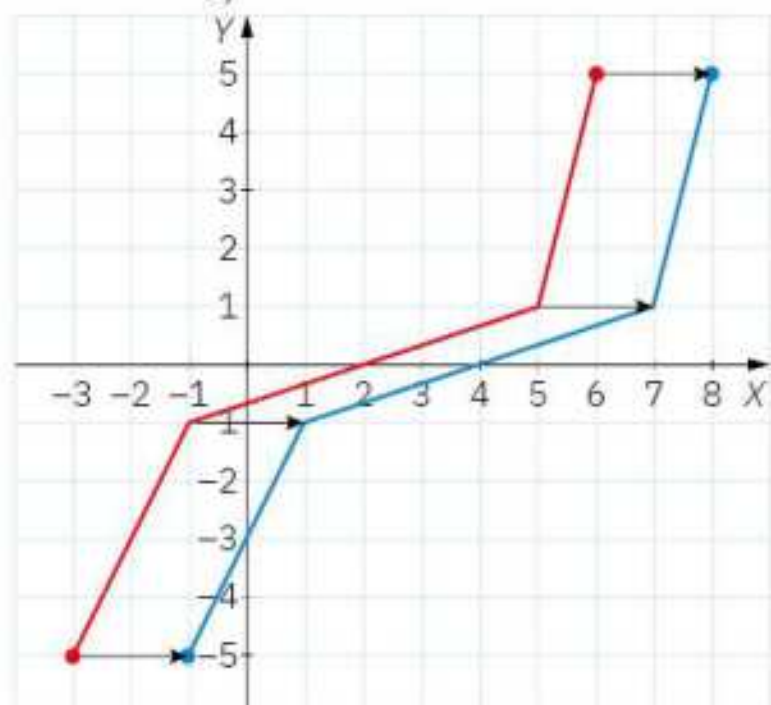


Odpowiedź:

Funkcja została przesunięta
o wektor $[-3, 0]$.

Wzór otrzymanej funkcji
to $y = f(x + 3)$.

b)



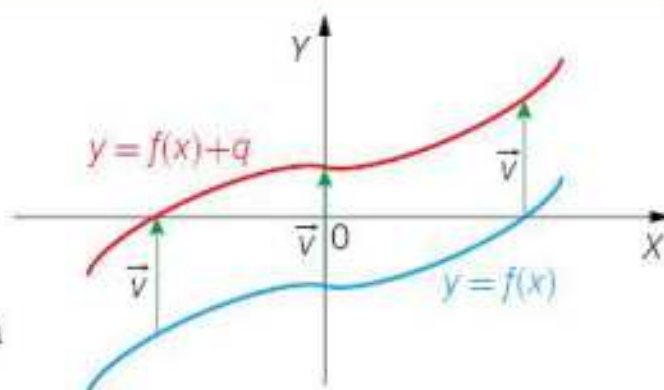
Odpowiedź:

Funkcja została przesunięta
o wektor $[2, 0]$.

Wzór otrzymanej funkcji
to $y = f(x - 2)$.

W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [0, q]$ powstaje wykres funkcji $y = f(x) + q, q \in \mathbb{R}$.

Wektor $\vec{v} = [0, q]$ nazywamy wektorem przesunięcia.



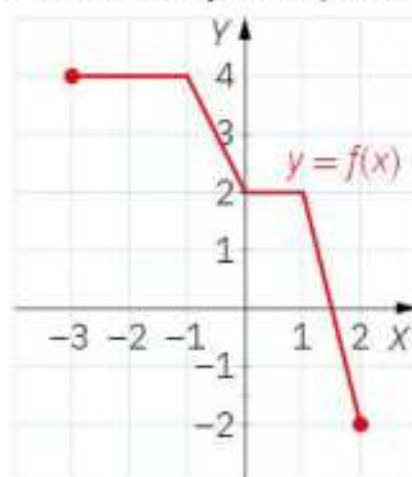
Ćwiczenie 3.

Przesuń wykres narysowanej funkcji $y = f(x)$:

a) o 1 jednostkę do góry,

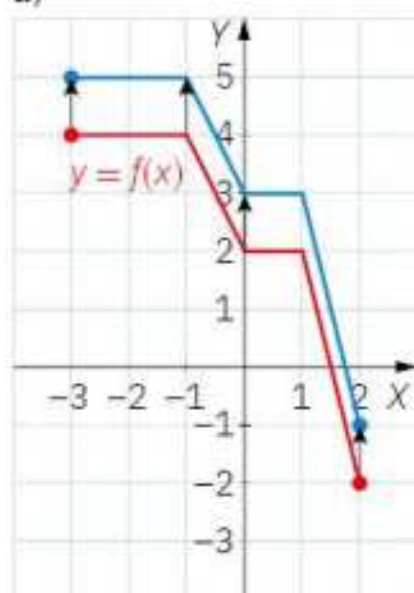
b) o 2 jednostki w dół.

Zapisz wektor przesunięcia i wzór otrzymanej funkcji.



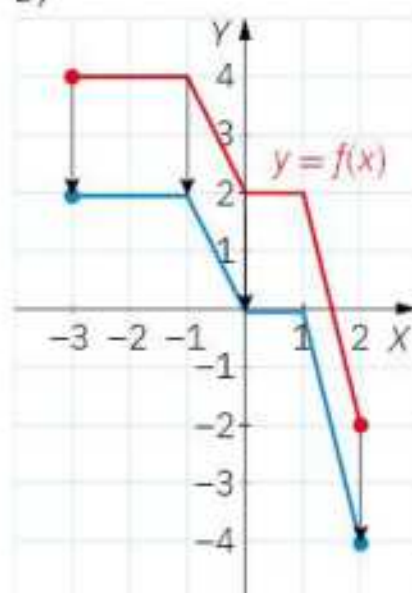
Rozwiązanie:

a)



Odpowiedź: Wykres funkcji został przesunięty o wektor $[0, 1]$. Wzór otrzymanej funkcji to $y = f(x) + 1$.

b)



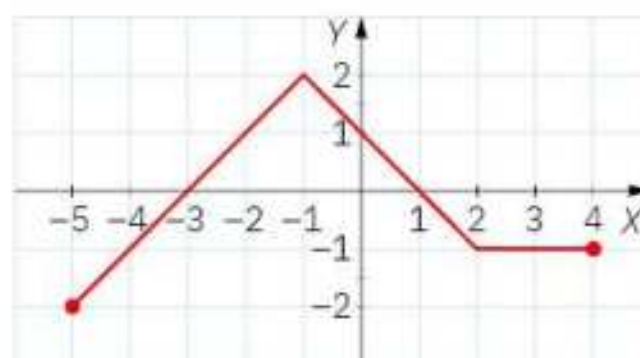
Odpowiedź: Wykres funkcji został przesunięty o wektor $[0, -2]$. Wzór otrzymanej funkcji to $y = f(x) - 2$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Przesuń ten wykres:

- a) o 3 jednostki w prawo,
- b) o 2 jednostki w lewo,
- c) o 4 jednostki w górę,
- d) o 1 jednostkę w dół.

Narysuj w zeszycie odpowiednie wykresy.



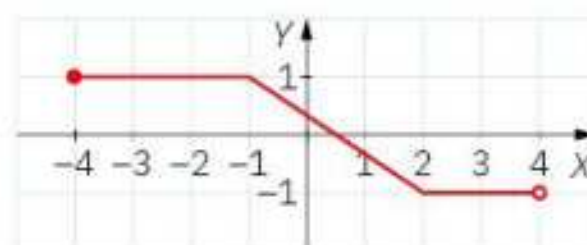
2. Podaj współrzędne wektora przesunięcia wykresu funkcji, jeśli przesunięto wykres o:

- a) 4 jednostki w dół,
- b) 7 jednostek w prawo,
- c) 5 jednostek w górę,
- d) 6 jednostek w lewo.

3. Wykres funkcji $y = f(x)$ przesunąć o wektor:

- a) $[-4, 0]$
- b) $[2, 0]$
- c) $[0, 3]$
- d) $[0, -5]$

Zadanie wykonaj w zeszycie.



4. Zapisz w zeszycie wektor, o jaki przesunięto wykres funkcji $y = f(x)$, jeśli otrzymana funkcja ma wzór:

- a) $y = f(x) + 9$
- b) $y = f(x - 11)$
- c) $y = f(x + 7)$
- d) $y = f(x) - 8$

5. Zapisz w zeszycie wzór funkcji, którą otrzymamy, przesuając wykres funkcji $y = f(x)$ o:

- a) 2 jednostki w dół,
- b) 9 jednostek w prawo,
- c) 7 jednostek w górę,
- d) 11 jednostek w lewo.

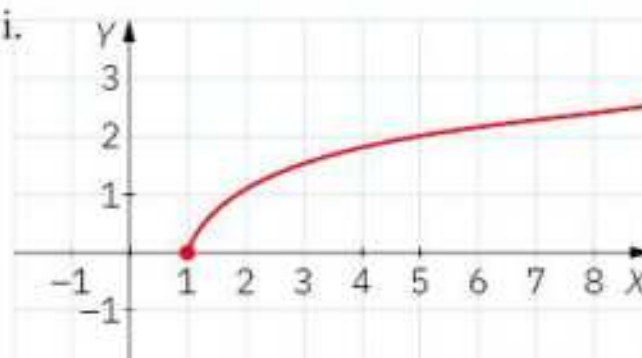
6. Zapisz w zeszycie wzór funkcji, którą otrzymamy, przesuując wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor:

- a) $[5, 0]$
- b) $[-\sqrt{2}, 0]$
- c) $[0, \sqrt[3]{3}]$
- d) $[0, -2\frac{1}{2}]$

7. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.

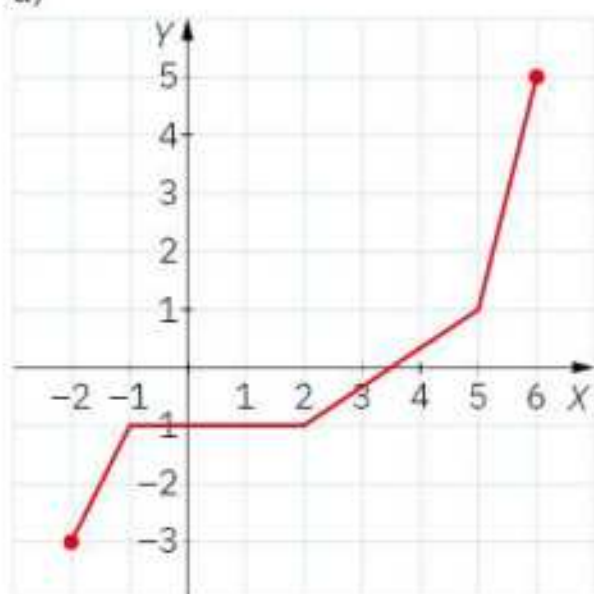
Naszkiej w zeszycie wykres podanej funkcji.

- a) $y = f(x - 3)$
- b) $y = f(x) - 3$
- c) $y = f(x) + 4$
- d) $y = f(x + 2)$

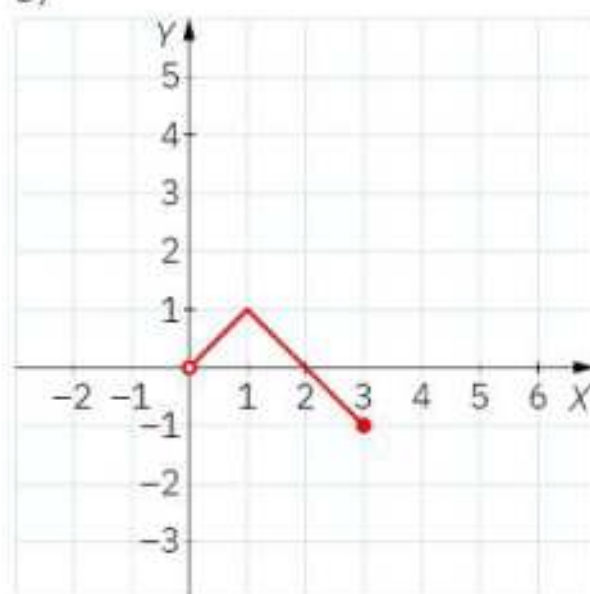


8. Każdy z narysowanych wykresów funkcji $y = f(x)$ przesun najpierw o wektor $[2, 0]$, a następnie otrzymany wykres przesun o wektor $[0, 3]$. Zapisz w zeszycie wzór otrzymanej funkcji.

a)



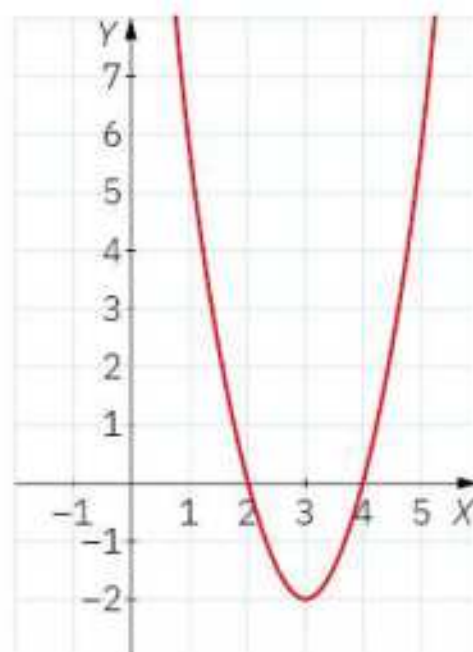
b)



9. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Przesun wykres tej funkcji:

- a) najpierw o wektor $[-3, 0]$, a następnie otrzymany wykres przesun o wektor $[0, -2]$,
b) najpierw o wektor $[0, -2]$, a następnie otrzymany wykres przesun o wektor $[-3, 0]$.

Zapisz w zeszycie wzory funkcji otrzymanych w wyniku tych przesunięć. Czy zauważyłeś/zauważyłaś jakąś zależność pomiędzy nimi?



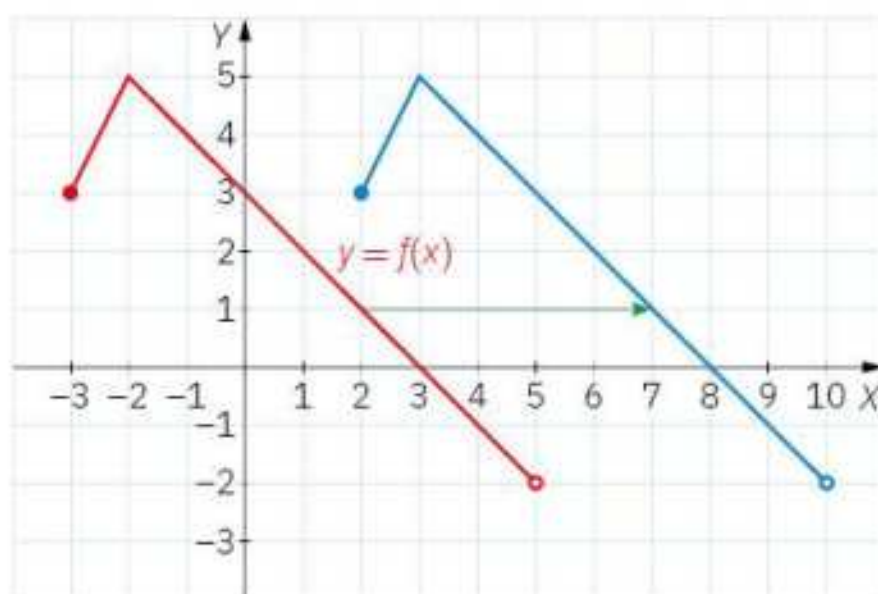
ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Wykres funkcji przesunięto o 4 jednostki w dół. Wektor tego przesunięcia to:
A. $[4, 0]$ B. $[0, 4]$ C. $[-4, 0]$ D. $[0, -4]$

2. Wykres funkcji $y = f(x)$ przesunięto tak jak na rysunku.

Funkcja otrzymana po przesunięciu ma wzór:

- A. $y = f(x+5)$
B. $y = f(x)-5$
C. $y = f(x-5)$
D. $y = f(x)+5$

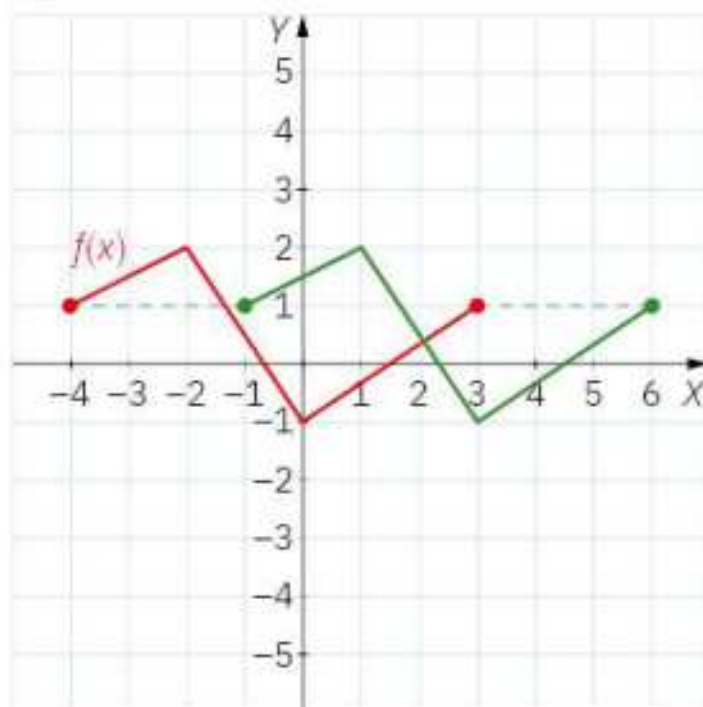


3. Wykres funkcji $y = f(x)$ przesunięto o pewien wektor, otrzymując funkcję o wzorze $y = f(x + 2)$. Wektor tego przesunięcia to:

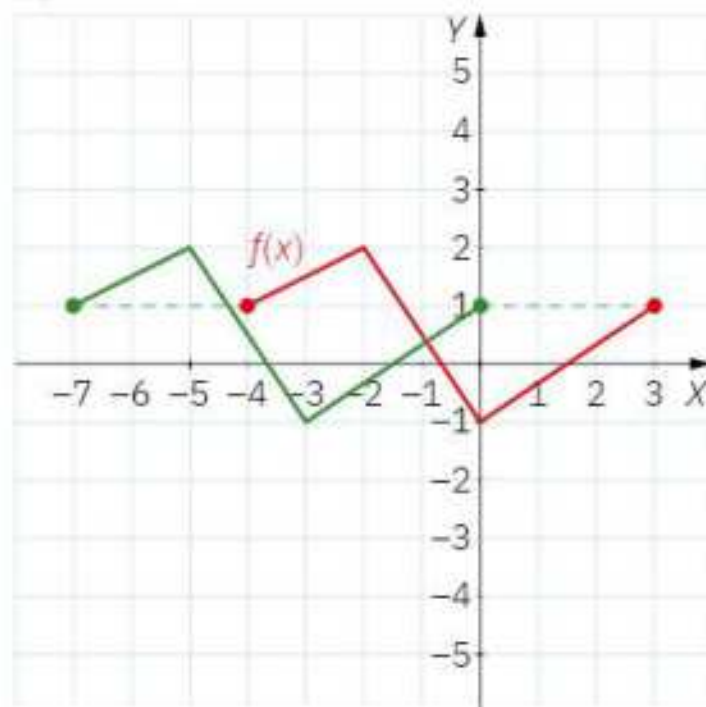
A. $[2, 0]$ B. $[0, 2]$ C. $[-2, 0]$ D. $[0, -2]$

4. Przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[-3, 0]$ ilustruje rysunek:

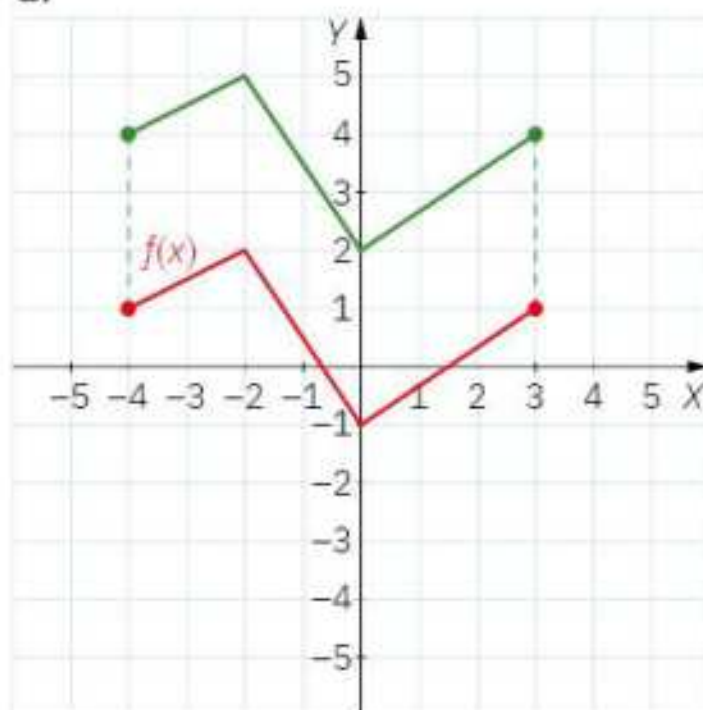
A.



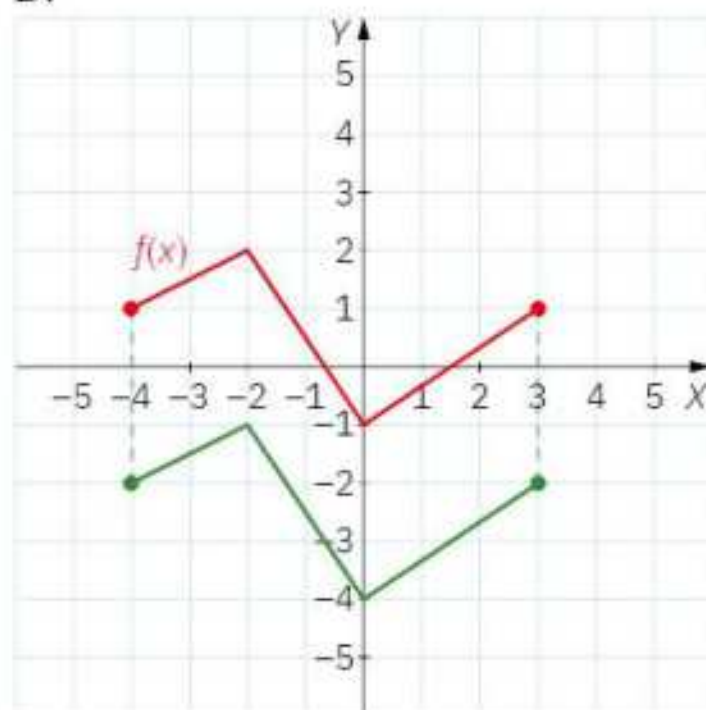
B.



C.



D.



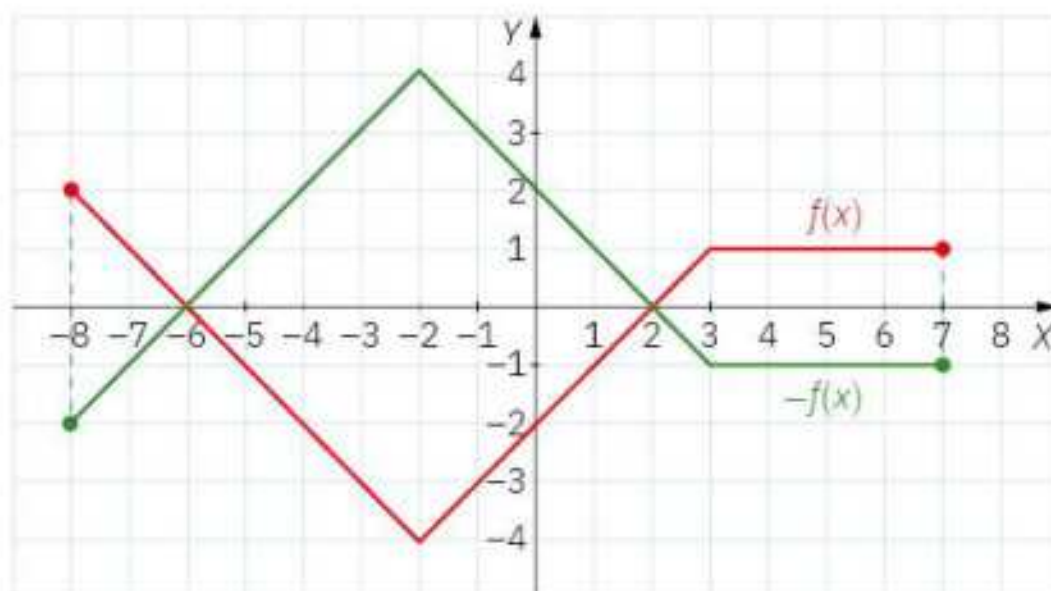
5. Wykres funkcji $y = f(x)$ przesunięto o wektor $[0, -1]$. Funkcja otrzymana po przesunięciu wykresu ma wzór:

A. $y = f(x + 1)$ B. $y = f(x) - 1$ C. $y = f(x - 1)$ D. $y = f(x) + 1$

4.6. Przekształcanie wykresów funkcji

Wykres dowolnej funkcji możemy przekształcać przez symetrię względem osi X oraz względem osi Y .

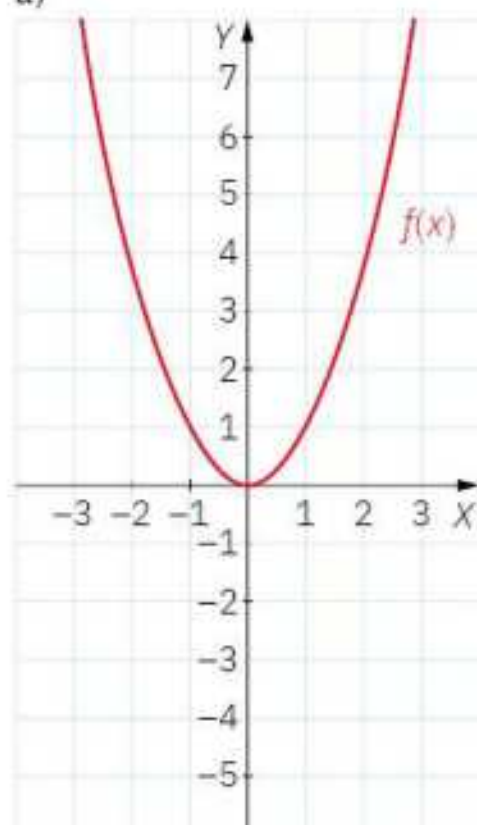
W wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi X powstaje wykres funkcji $y = -f(x)$. Mówimy, że wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = -f(x)$ są symetryczne względem osi X .



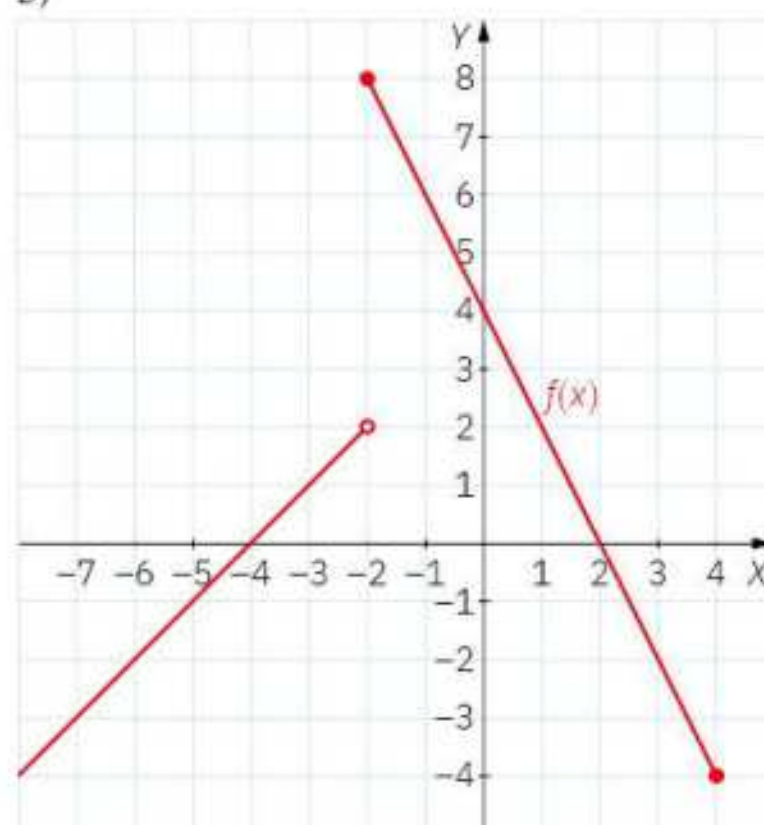
Ćwiczenie 1.

Mamy daną funkcję $y = f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji symetryczny do danego względem osi X .

a)

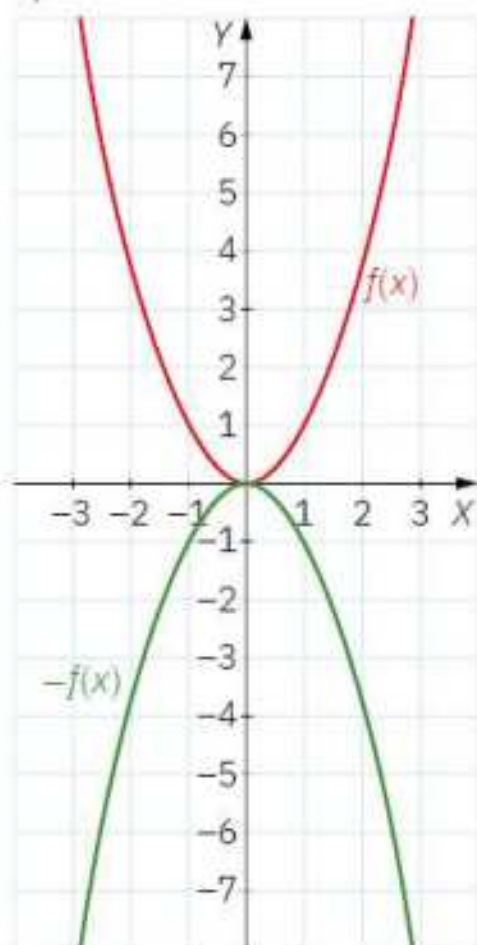


b)

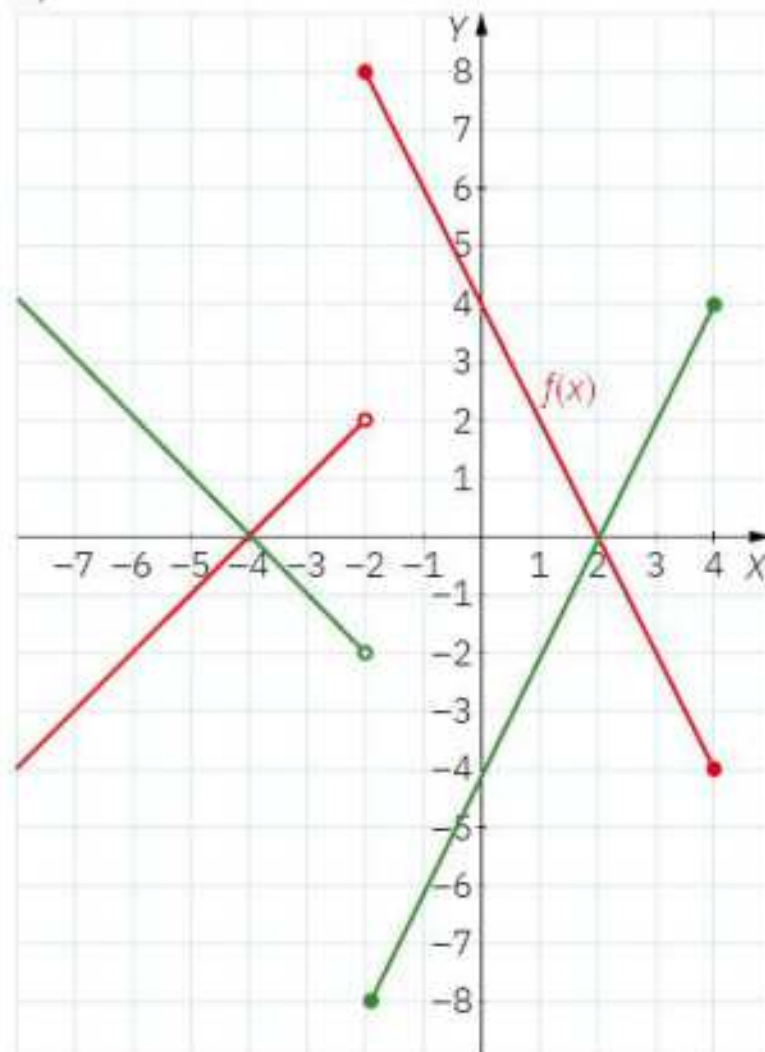


Rozwiązanie:

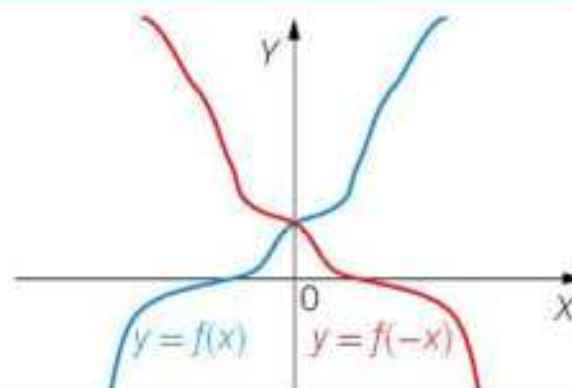
a)



b)



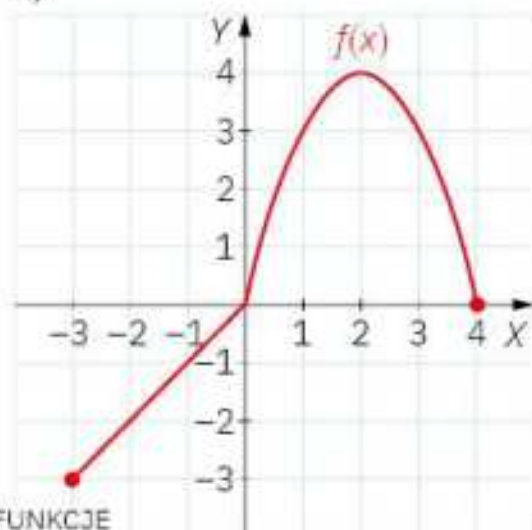
W wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi Y powstaje wykres funkcji $y = f(-x)$. Mówimy, że wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ są symetryczne względem osi Y .



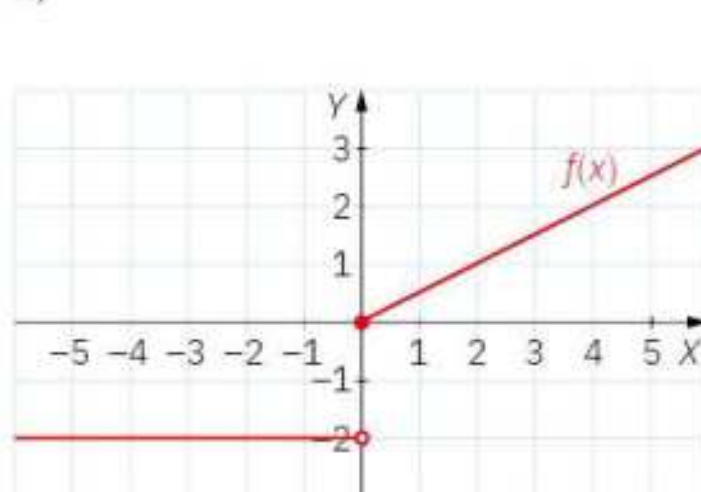
Ćwiczenie 2.

Mamy daną funkcję $y = f(x)$. Narysuj wykres funkcji symetryczny do danego względem osi Y .

a)

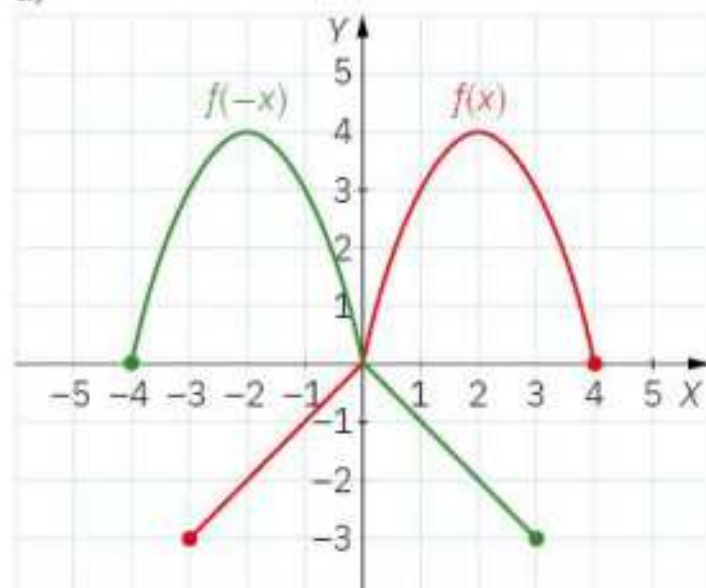


b)

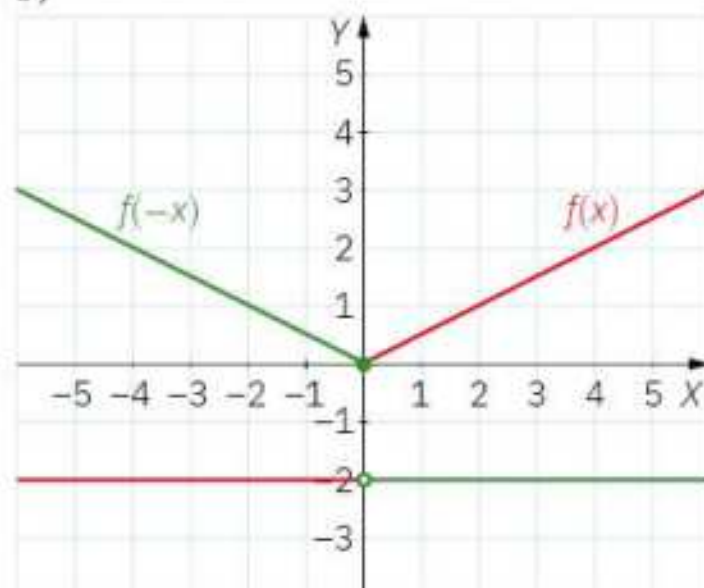


Rozwiązanie:

a)



b)

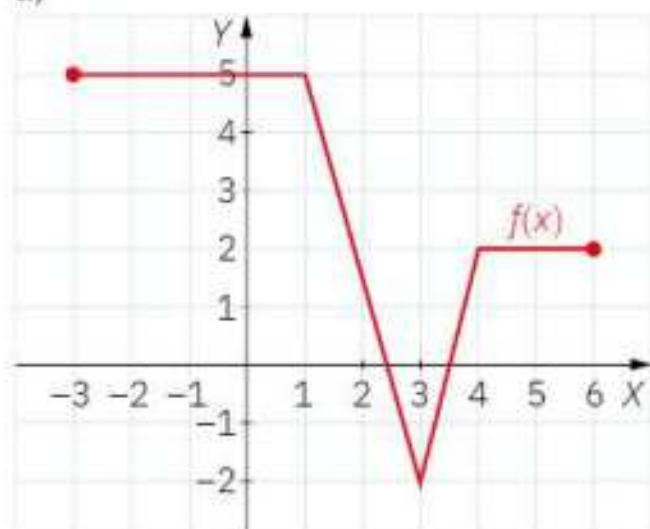


ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

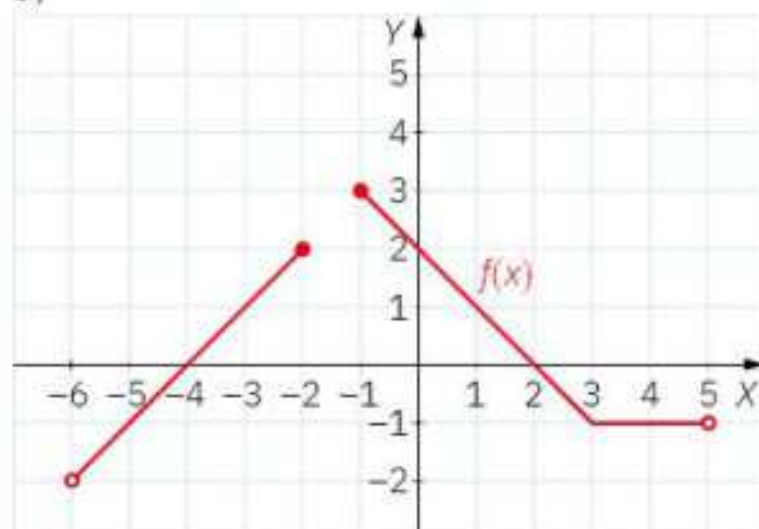


1. Narysuj w zeszycie wykres funkcji symetryczny do danego względem osi X .

a)

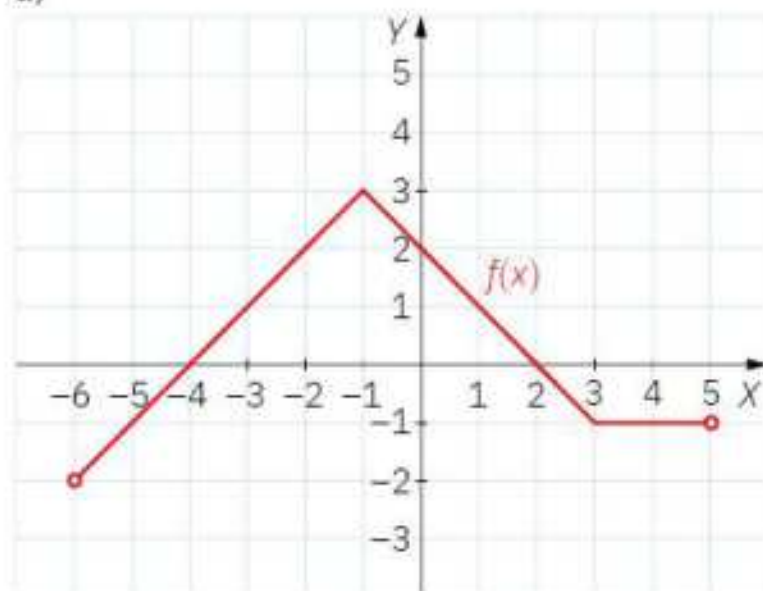


b)

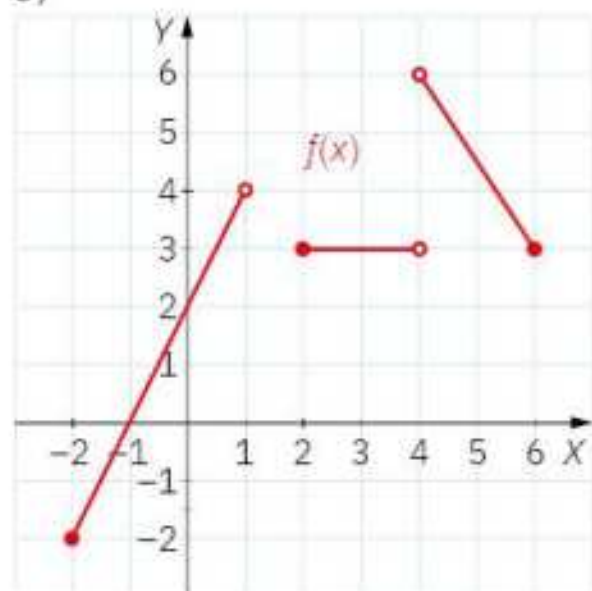


2. Narysuj w zeszycie wykres funkcji symetryczny do danego względem osi Y .

a)



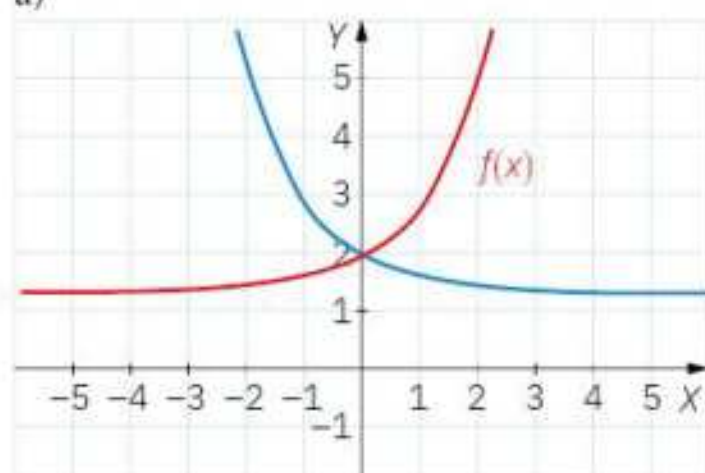
b)



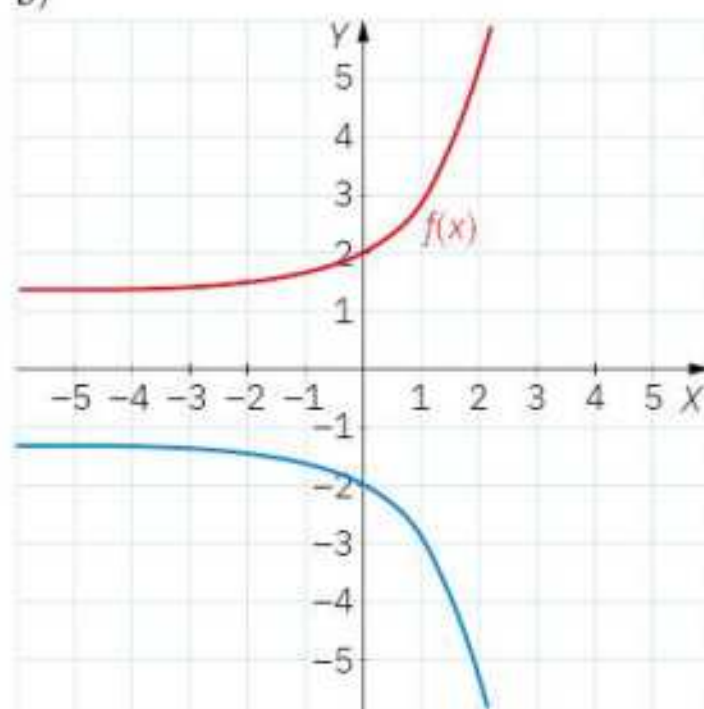
3. Wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcono przez symetrię względem jednej z osi układu współrzędnych.

Zapisz w zeszycie wzór funkcji, której wykres otrzymano.

a)



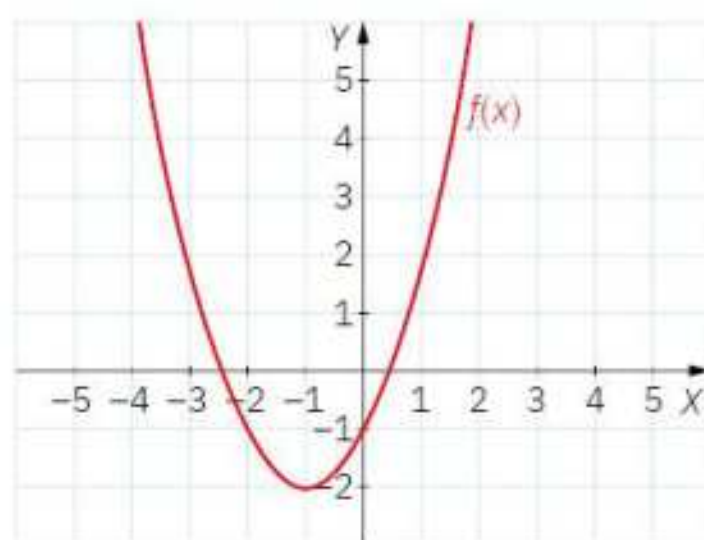
b)



4. Wykres danej funkcji $y = f(x)$ przekształć przez symetrię względem odpowiedniej osi układu współrzędnych, aby otrzymać wykres funkcji:

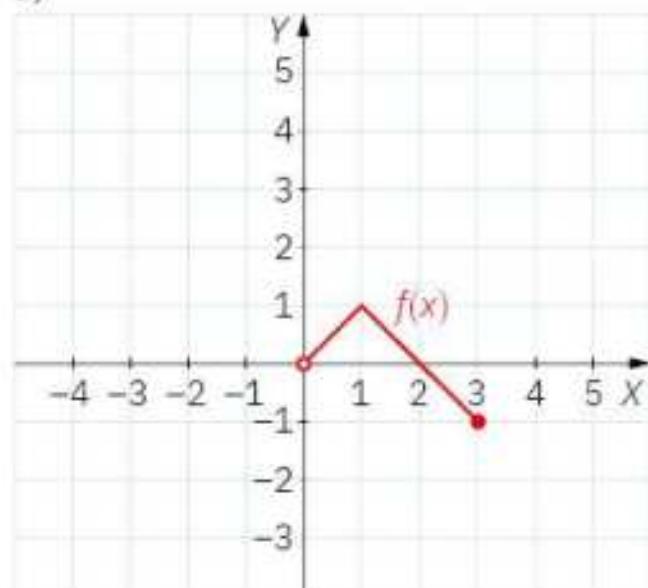
a) $g(x) = -f(x)$

b) $h(x) = f(-x)$

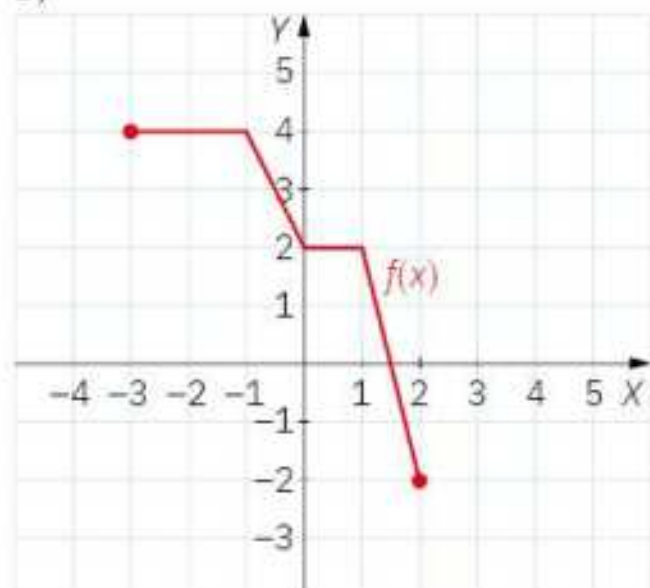


5. Wykres danej funkcji przekształć przez symetrię względem osi X , a następnie otrzymany wykres przekształć względem osi Y .

a)



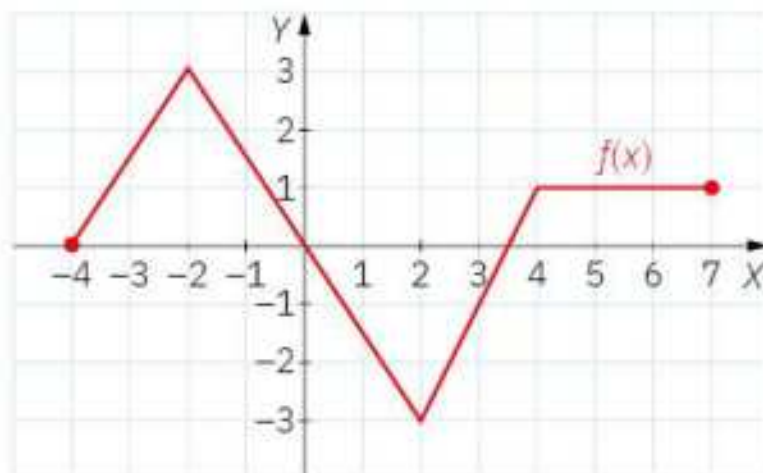
b)



6. Wykres danej funkcji $y = f(x)$ przekształcono przez symetrię względem osi X , a następnie otrzymany wykres przekształcono przez symetrię względem osi Y . Zapisz w zeszycie wzór funkcji otrzymanej w wyniku tych przekształceń.

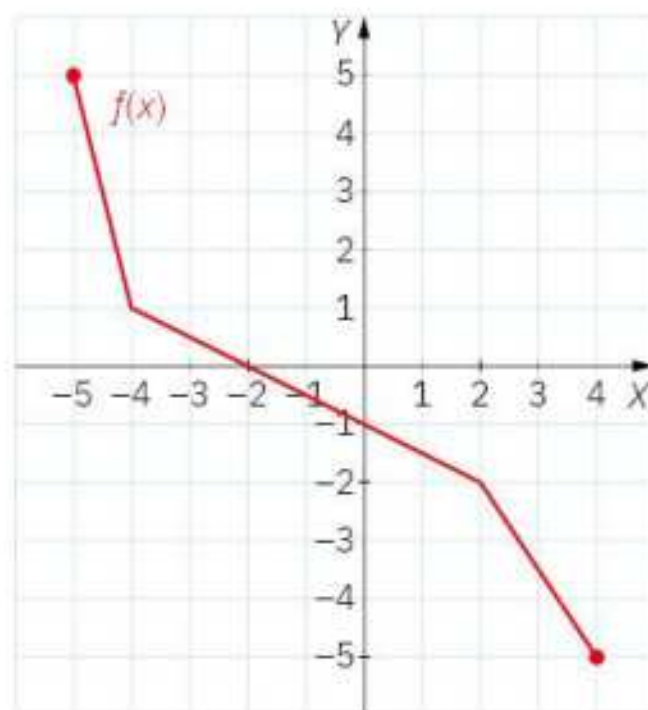
7. Wykres danej funkcji przesunąć o wektor $[0, -2]$, a następnie otrzymany wykres przekształcić przez symetrię względem osi Y .

Wykonaj zadanie w zeszycie.



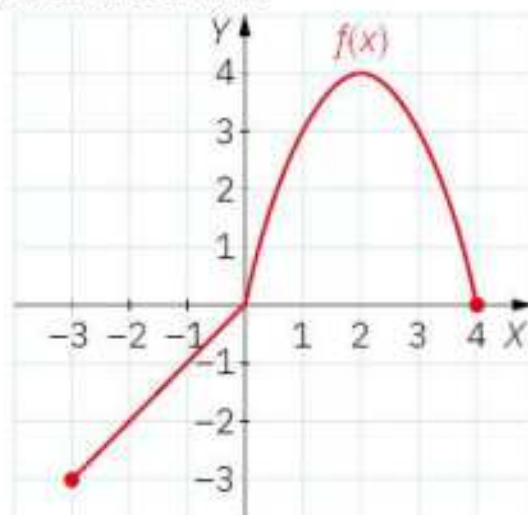
8. Wykres danej funkcji przekształcić przez symetrię względem osi X , a następnie otrzymany wykres przesunąć o wektor $[2, 0]$.

Wykonaj zadanie w zeszycie.



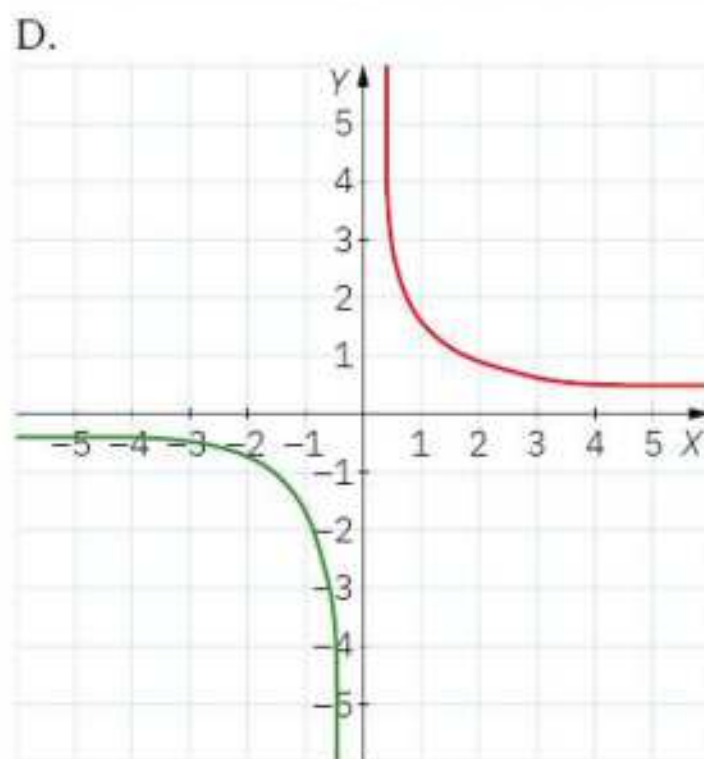
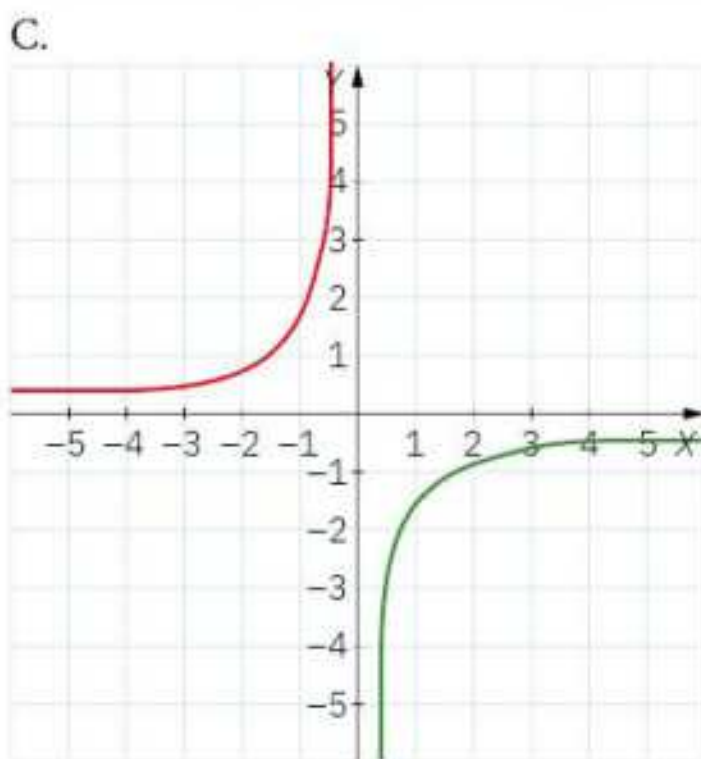
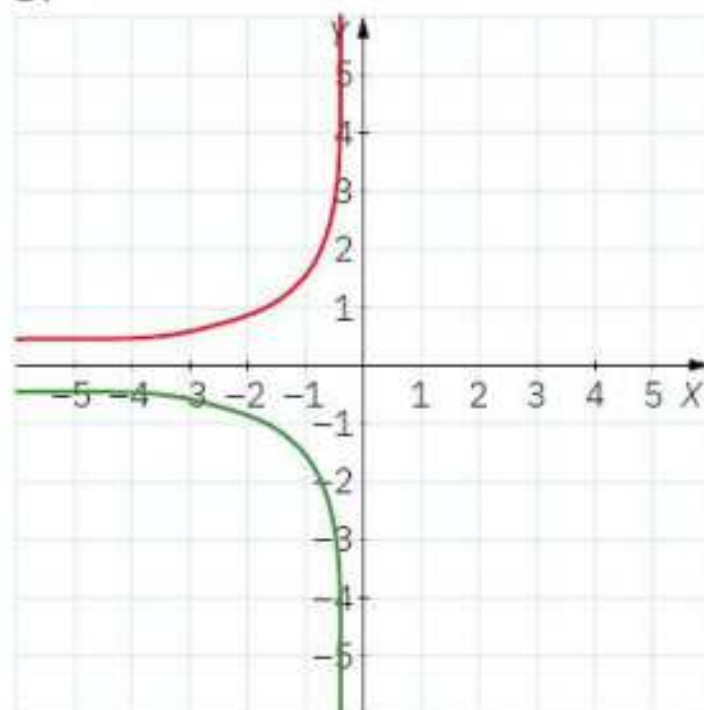
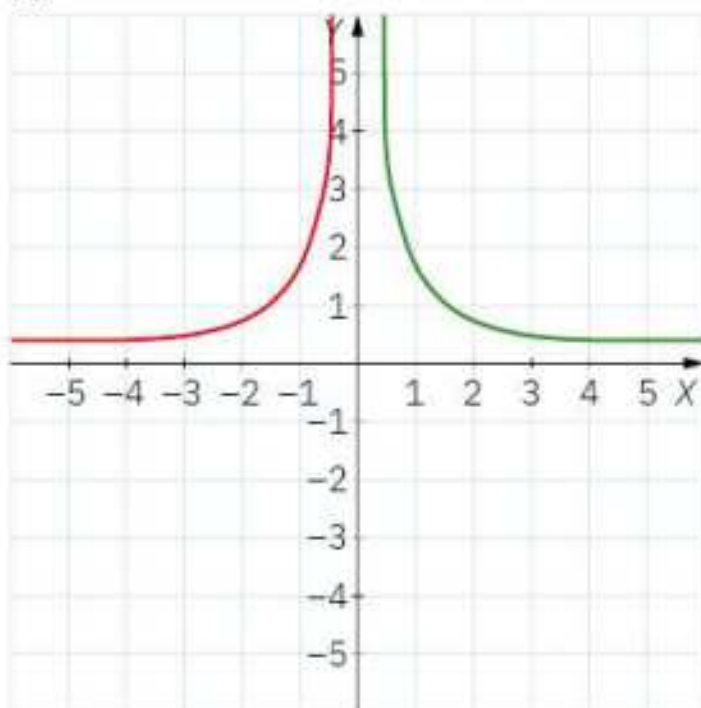
9. Wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcono w następujący sposób:
- przesunięto o wektor $[3, 0]$, a następnie otrzymany wykres przekształcono przez symetrię względem osi X ;
 - przekształcono przez symetrię względem osi Y , a następnie otrzymany wykres przesunięto o wektor $[0, 3]$.

Wykonaj przekształcenia oraz zapisz w zeszycie wzór funkcji, której wykres otrzymano po tych przekształceniach.

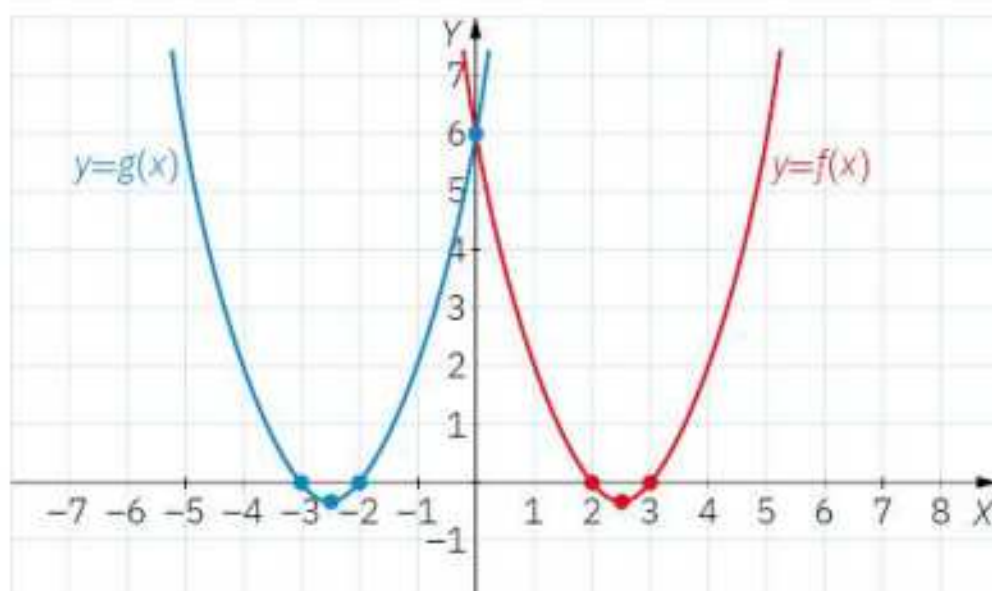


ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcono, otrzymując wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Przekształceniem, które wykonano, jest:
 - przesunięcie o wektor $[p, 0]$
 - symetria względem osi X
 - przesunięcie o wektor $[0, q]$
 - symetria względem osi Y
- Który rysunek przedstawia wykresy funkcji symetryczne względem osi X ?



3. W jaki sposób przekształcono wykres funkcji $y = f(x)$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x)$?



- A. Przekształcono przez symetrię względem osi X .
B. Przesunięto o wektor $[p, 0]$.
C. Przesunięto o wektor $[0, q]$.
D. Przekształcono przez symetrię względem osi Y .
[p, q] to oznaczenia współrzędnych wektora.
4. Dane są funkcje: $y = f(x)$, $h(x) = f(-x)$ i $g(x) = -f(x)$. Wskaż wśród podanych zdanie prawdziwe.
- A. Wykresy funkcji $f(x)$ i $h(x)$ są symetryczne względem osi X .
B. Wykresy funkcji $f(x)$ i $g(x)$ są symetryczne względem osi Y .
C. Wykresy funkcji $h(x)$ i $g(x)$ są symetryczne względem osi X .
D. Wykresy funkcji $f(x)$ i $h(x)$ są symetryczne względem osi Y .

4.7. Funkcja liniowa i jej własności

Wiemy już, czym jest funkcja i jakie są sposoby jej opisu. Potrafimy wymienić także własności funkcji liczbowej.

Ćwiczenie 1.

Narysuj w jednym układzie współrzędnych funkcje określone wzorami:

a) $f(x) = x$, $g(x) = 3x$, $h(x) = \frac{1}{2}x$

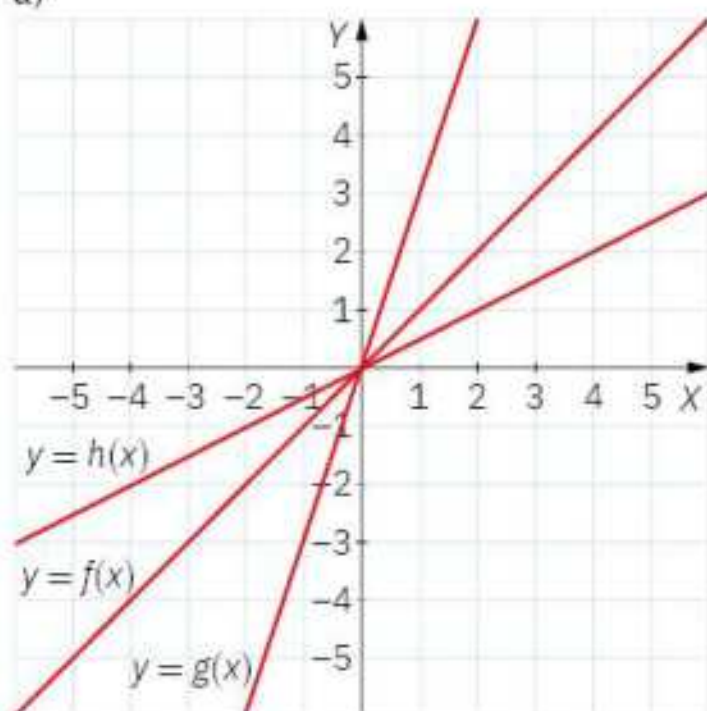
b) $f(x) = -x$, $g(x) = -2x$, $h(x) = -\frac{1}{3}x$

c) $f(x) = 0$

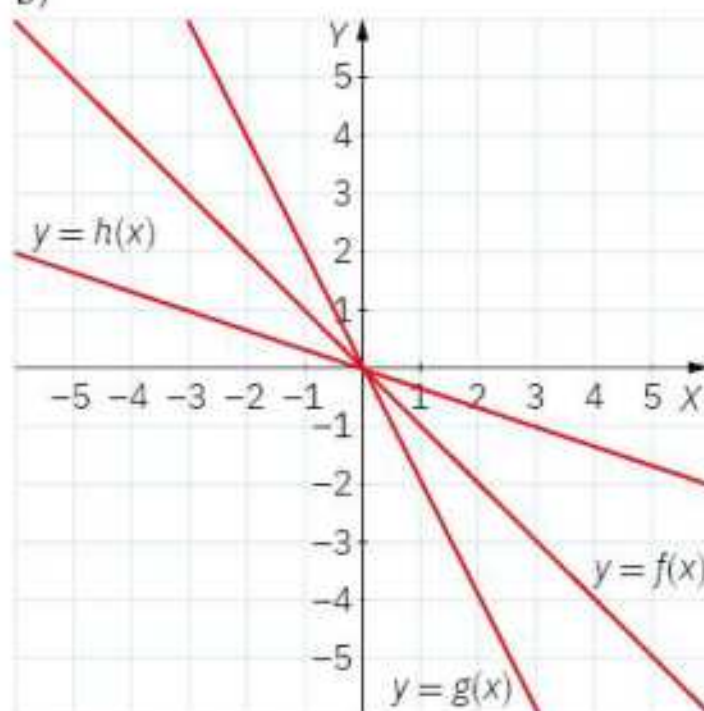
Rozwiązanie:

Zaznaczamy przykładowe punkty należące do wykresu funkcji i rysujemy proste.

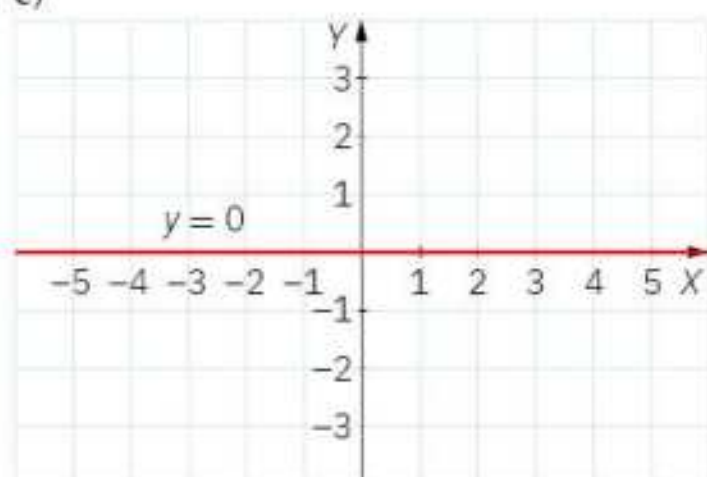
a)



b)



c)



Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax$ ($a \neq 0$) nazywamy proporcjonalnością prostą. Jej wykresem jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych.

Jeśli $a > 0$, wtedy prosta leży w I i III ćwiartce układu współrzędnych.

Jeśli $a < 0$, wtedy prosta leży w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Jeśli $a = 0$, prosta pokrywa się z osią X .

Oś X nazywamy inaczej osią odciętych, a oś Y – osią rzędnych. Dla punktu P o współrzędnych (x, y) przyjmujemy, że x to odcięta punktu, a y – jego rzędna.



Funkcją liniową nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Na przykład: $f(x) = 7x - 3$, $f(x) = 3\sqrt{2}$, $f(x) = 9$, $f(x) = \pi + 2x$.

Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, zaś liczbę b – wyrazem wolnym.

Ćwiczenie 2.

Podaj wartość współczynnika kierunkowego a oraz wyrazu wolnego b dla określonych funkcji.

a) $f(x) = 3x - 4$

Rozwiązanie: $a = 3, b = -4$

c) $f(x) = \sqrt{2}$

Rozwiązanie: $a = 0, b = \sqrt{2}$

b) $f(x) = \frac{3-2x}{3}$

Rozwiązanie: $a = -\frac{2}{3}, b = 1$

d) $f(x) = 1,5 - x$

Rozwiązanie: $a = \dots, b = \dots$

Ćwiczenie 3.

Funkcja liniowa jest określona wzorem: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

a) Sporządź wykres tej funkcji.

b) Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

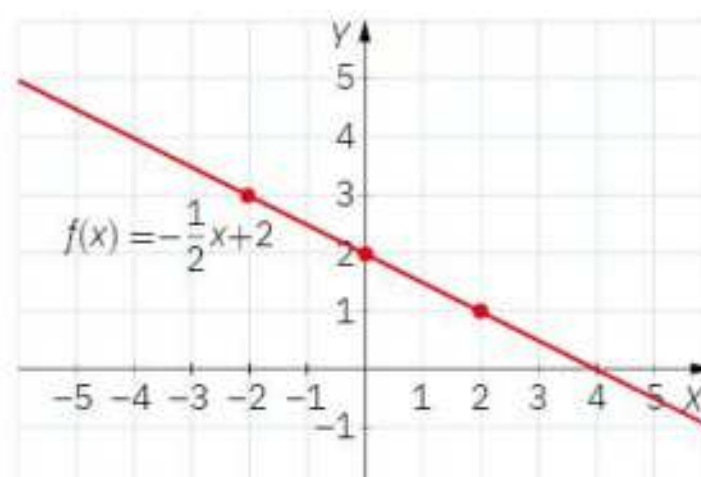
c) Oblicz miejsce zerowe funkcji.

d) Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią Y .

Rozwiązanie:

a) Sporządzamy tabelę wartości funkcji dla dowolnych argumentów i rysujemy wykres funkcji.

x	-2	0	2
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$	3	2	1



b) Odpowiedź: Dziedziną funkcji jest $D = \mathbb{R}$, a zbiór wartości to: $ZW = \mathbb{R}$.

c) Obliczamy miejsce zerowe funkcji: ($y = 0$).

$$-\frac{1}{2}x + 2 = 0$$

$$x = 4$$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji jest $x = 4$.

d) Obliczamy współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią Y ($x = 0$).

$$f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$$

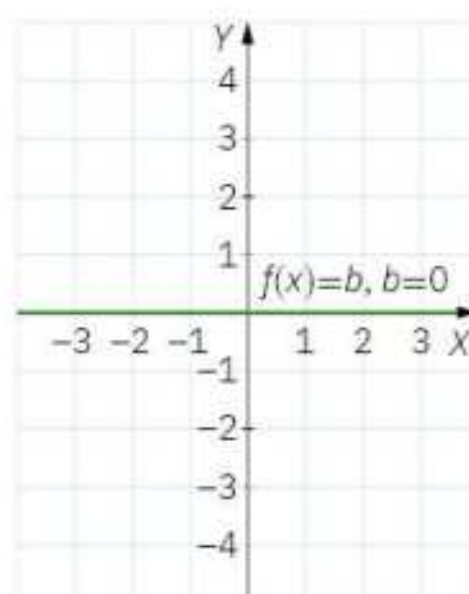
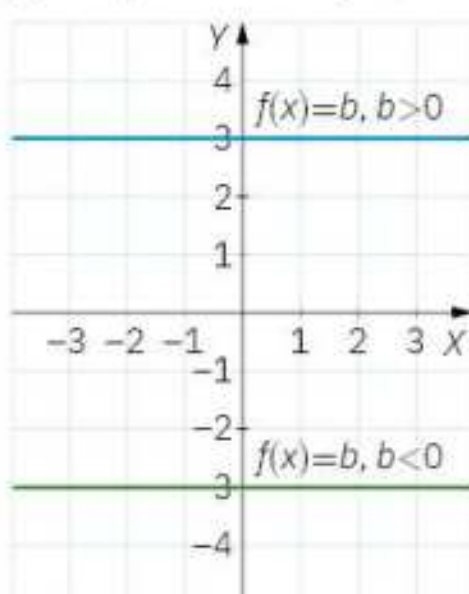
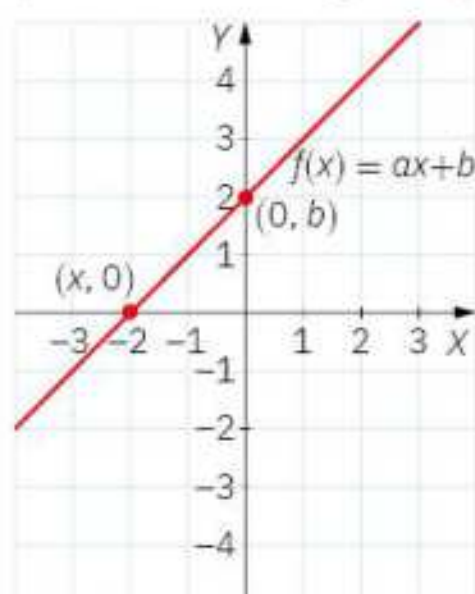
Odpowiedź: Współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią Y to $(0, 2)$.

Aby wyznaczyć miejsce zerowe funkcji $f(x) = ax + b$, musimy przyrównać jej wartość do liczby 0: $ax + b = 0$, skąd $ax = -b$.

– Jeśli $a \neq 0$, wtedy funkcja liniowa ma jedno miejsce zerowe równe: $x = -\frac{b}{a}$.

– Jeśli $a = 0$, $b \neq 0$, wtedy funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych.

– Jeśli $a = 0$, $b = 0$, wtedy funkcja liniowa ma nieskończenie wiele miejsc zerowych (każda liczba rzeczywista jest jej miejscem zerowym).



Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór $\mathbb{R}$.

Zbiorem wartości funkcji liniowej jest zbiór $\mathbb{R}$ dla $a \neq 0$.

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ jest prosta. Wzór tej funkcji nazywa się równaniem prostej, natomiast współczynnik a – współczynnikiem kierunkowym prostej.

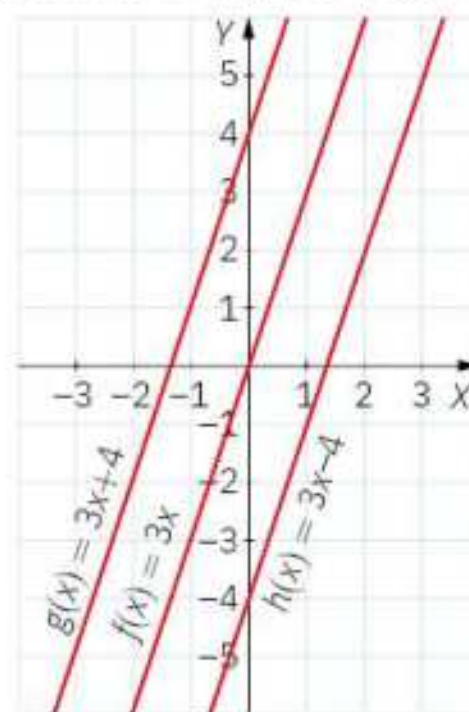
Ćwiczenie 4.

Dla funkcji $f(x) = 3x$, $g(x) = 3x + 4$ oraz $h(x) = 3x - 4$ określ wartości współczynników a i b . Sporządź wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych.

Rozwiązanie:

$f(x) = 3x$	$a = 3$	$b = 0$
$g(x) = 3x + 4$	$a = 3$	$b = 4$
$h(x) = 3x - 4$	$a = 3$	$b = -4$

Wykresy funkcji liniowych (np. $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$) są prostymi równoległymi wtedy, gdy funkcje mają jednakowe współczynniki kierunkowe ($a_1 = a_2$).



Ćwiczenie 5.

Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostą równoległą do prostej, która jest wykresem funkcji opisanej wzorem $y = -\frac{2}{3}x - 5$ i do której należy punkt $A = (3, -3)$.

Rozwiązanie:

$a_2 = a_1 = -\frac{2}{3}$ – określamy wartość współczynnika a dla funkcji liniowej

$y = -\frac{2}{3}x + b$ – zapisujemy równanie funkcji, której wykres jest prostą równoległą do prostej będącej wykresem danej funkcji

$-3 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + b$ – wyznaczamy wartość współczynnika b , wiedząc, że do wykresu funkcji należy punkt A o współrzędnych $x = 3$ i $y = -3$

$b = -1$ – obliczamy wartość współczynnika b

Odpowiedź: Wykres funkcji określonej wzorem $y = -\frac{2}{3}x - 1$ jest prostą równoległą do prostej, która jest wykresem funkcji $y = -\frac{2}{3}x - 5$ i należy do niego punkt $A = (3, -3)$.

Ćwiczenie 6.

Dla funkcji $f(x) = 2x - 3$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ określ wartości współczynników a i b . Sporządź wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych.

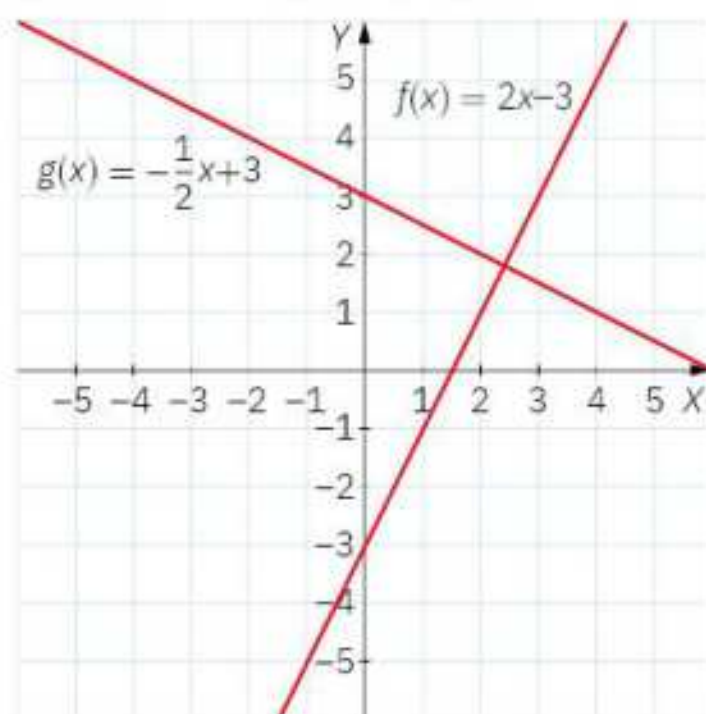
Rozwiązanie:

$$f(x) = 2x - 3 \quad a = 2 \quad b = -3$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \quad a = -\frac{1}{2} \quad b = 3$$

Wykresy funkcji liniowych (np. $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$) są prostymi prostopadłymi wtedy, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek:

$$a_1 \cdot a_2 = -1 \quad (\text{inaczej: } a_1 = -\frac{1}{a_2}).$$



Ćwiczenie 7.

Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostą prostopadłą do prostej, która jest wykresem funkcji opisanej wzorem: $y = -\frac{2}{5}x + 6$ i do której należy punkt $A = (2, 3)$.

Rozwiązanie:

$a_1 = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$ – obliczamy wartość współczynnika a funkcji linowej, której wykres jest prostą prostopadłą do prostej będącej wykresem danej funkcji

$3 = \frac{5}{2} \cdot 2 + b$ – wyznaczamy wartość współczynnika b , wiedząc, że do prostej, która jest wykresem funkcji, należy punkt A o współrzędnych $x = 2$ i $y = 3$.

$b = -2$ – obliczamy wartość współczynnika b

Odpowiedź: Wykres funkcji: $y = \frac{5}{2}x - 2$ jest prostą prostopadłą do prostej, która jest wykresem funkcji określonej wzorem $y = -\frac{2}{5}x + 6$ i należy do niego punkt $A = (2, 3)$.

Ćwiczenie 8.

Dane są funkcje: $f(x) = -x + 5$, $g(x) = 2x + 5$ oraz $h(x) = 5$.

a) Podaj wartości współczynników a i b oraz sporządź wykresy podanych funkcji w jednym układzie współrzędnych.

b) Określ monotoniczność funkcji.

c) Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osią Y .

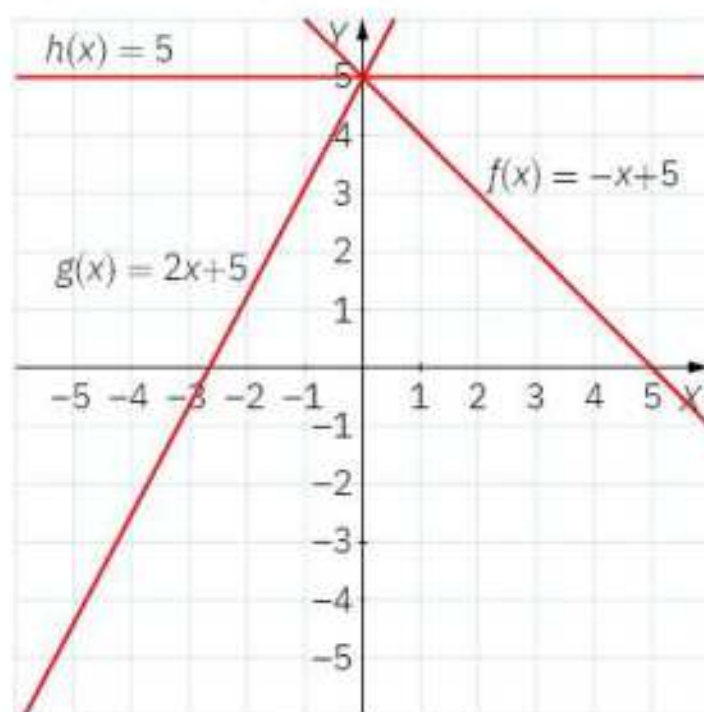
Rozwiązanie:

a)

$$f(x) = -x + 5 \quad a = -1 \quad b = 5$$

$$g(x) = 2x + 5 \quad a = 2 \quad b = 5$$

$$h(x) = 5 \quad a = 0 \quad b = 5$$



b)

Funkcja $f(x) = -x + 5$ jest funkcją malejącą, ponieważ wraz ze wzrostem argumentów zmniejszają się jej wartości.

Funkcja $g(x) = 2x + 5$ jest funkcją rosnącą, ponieważ wraz ze wzrostem argumentów zwiększają się jej wartości.

Funkcja $h(x) = 5$ jest funkcją stałą, ponieważ wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji są sobie równe.

Warto zauważyć, że monotoniczność funkcji f , g i h jest różna, ponieważ różne są ich współczynniki kierunkowe (wartość współczynnika b pozostaje taka sama dla wszystkich trzech funkcji).

c)

$$f(x) = -x + 5 \quad f(0) = -0 + 5 = 5$$

współrzędne punktu (0, 5)

$$g(x) = 2x + 5 \quad g(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$$

współrzędne punktu (0, 5)

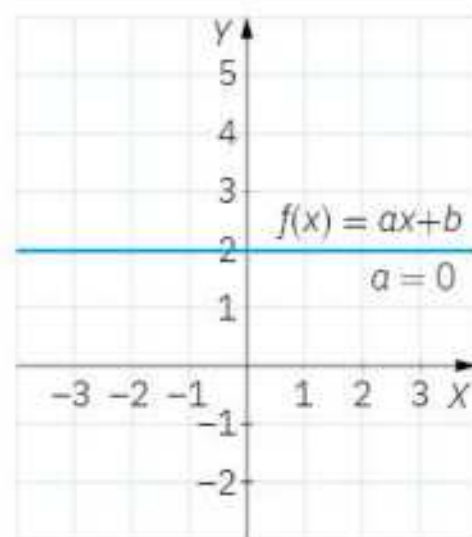
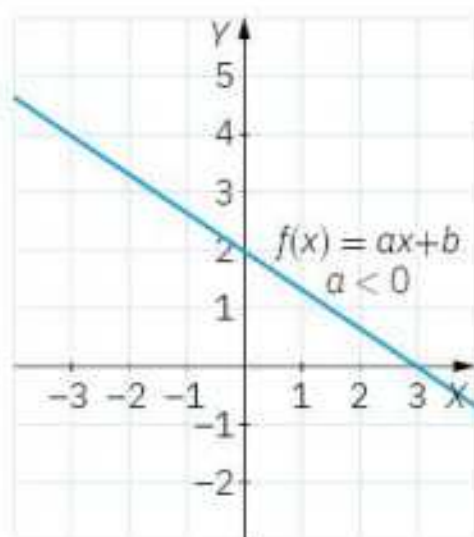
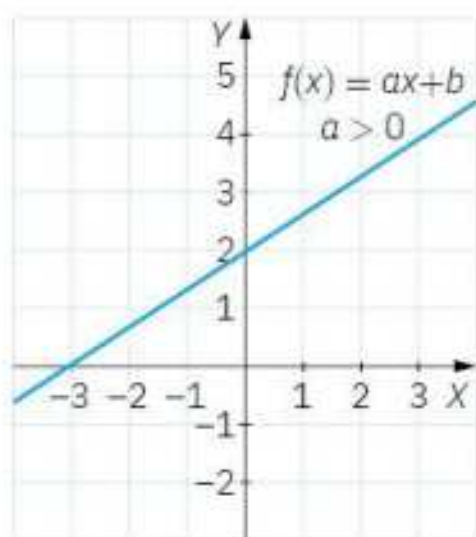
$$h(x) = 5 \quad h(0) = 5$$

współrzędne punktu (0, 5)

Wykresy wszystkich funkcji przecinają oś Y w punkcie (0, 5), a więc w punkcie (0, b).

Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś Y w punkcie (0, b).

- Jeżeli $a > 0$, to funkcja liniowa jest funkcją rosnącą.
- Jeżeli $a < 0$, to funkcja liniowa jest funkcją malejącą.
- Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa jest funkcją stałą.



Ćwiczenie 9.

a) Odczytaj z wykresu przedział, w którym funkcja $f(x) = 5x - 7$ przyjmuje wartości dodatnie.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, dla których punktów na osi X wykres znajduje się powyżej tej osi.

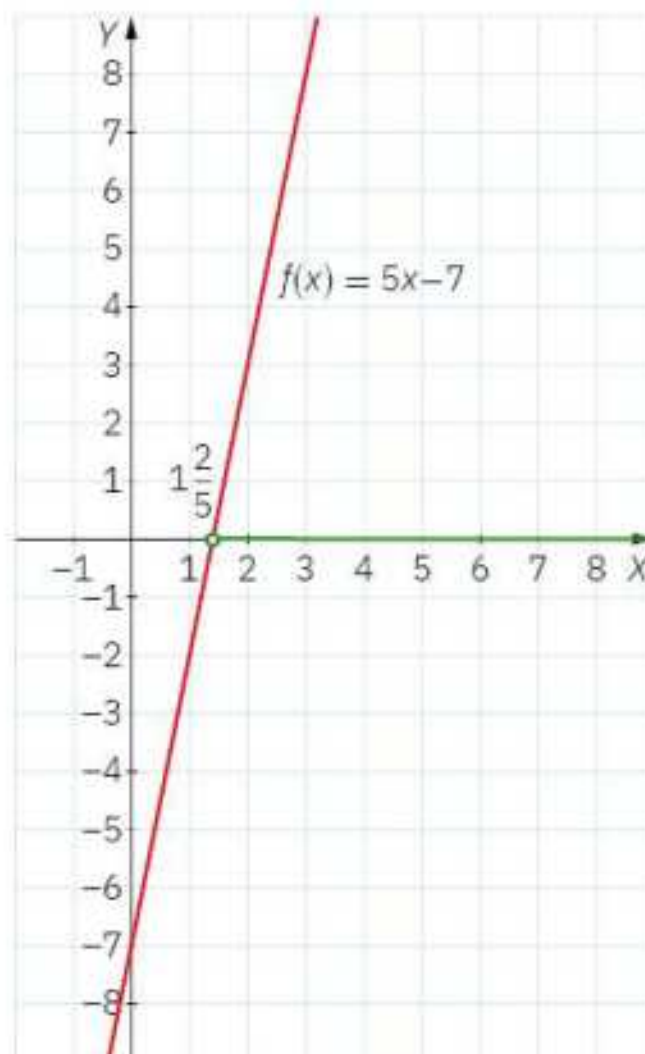
Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $\left(1\frac{2}{5}, \infty\right)$.

b) Odczytaj z wykresu przedział, w którym funkcja $f(x) = 5x - 7$ przyjmuje wartości ujemne.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, dla których punktów na osi Y wykres znajduje się poniżej osi X .

Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów z przedziału $\left(-\infty, 1\frac{2}{5}\right)$.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Podaj wartości współczynników a i b dla funkcji liniowych określonych wzorami:

a) $f(x) = 4x - 9$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{2} + 2x}{4}$ c) $f(x) = 5 + x$

d) $f(x) = 0$ e) $f(x) = \frac{1}{2}$ f) $f(x) = 3x$

2. Napisz w zeszycie wzór funkcji liniowej (podany jest współczynnik kierunkowy a oraz wyraz wolny b).

a) $a = 3, b = 5$ b) $a = 0, b = \sqrt{3}$ c) $a = 0,2, b = 0$

d) $a = 0, b = 0$ e) $a = \frac{3}{5}, b = \frac{1}{5}$ f) $a = \sqrt{5}, b = 2\sqrt{5}$

3. Dane są funkcje liniowe: $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = -4$ oraz $h(x) = -2 - 4x$. Czy punkt $A = (0, 5, -4)$ należy do wykresów tych funkcji? Jeżeli tak, to do których?

4. Wyznacz miejsca zerowe podanych funkcji.

a) $f(x) = 2x + 7$ b) $f(x) = 5$ c) $f(x) = 0,5 - x$

d) $f(x) = 9x$ e) $f(x) = \frac{3x - 4}{6}$ f) $f(x) = 0$

5. Oblicz w zeszycie współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Narysuj wykres każdej z podanych funkcji.

a) $f(x) = -2x + 4$ b) $f(x) = -2$ c) $f(x) = 3 + x$

d) $f(x) = 9x$ e) $f(x) = \frac{x - 6}{2}$ f) $f(x) = -x$

6. Funkcja f określona jest podanym wzorem. Narysuj w zeszycie wykres tej funkcji, oblicz jej miejsca zerowe i określ monotoniczność.

a) $f(x) = 5 + x$ b) $f(x) = -2x - 2$ c) $f(x) = \frac{6 - 3x}{3}$

7. Podaj wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostą równoległą do prostej będącej wykresem funkcji określonej podanym wzorem i do której należy dany punkt A .

a) $f(x) = 3x + 4, A = (1, 5)$

b) $f(x) = -x + 4, A = (0, 1)$

c) $f(x) = 7, A = (-2, -1)$

8. Dane są funkcje liniowe: $f(x) = 6 - 4x$, $f(x) = 4x - 1$, $f(x) = 4x - 8$ i $f(x) = -4 + 2$. Wskaż wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostą równoległą do prostej będącej wykresem funkcji $f(x) = 8 + 4x$ i której miejscem zerowym jest 2.

9. Podaj wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostą prostopadłą do prostej będącej wykresem funkcji określonej podanym wzorem i do której należy dany punkt A .

a) $f(x) = 4x, A = (2, 1)$

b) $f(x) = 2 - x, A = (0, 5)$

c) $f(x) = 6 - \frac{1}{2}x, A = (-2, 2)$

10. Oblicz w zeszycie wartość współczynnika b funkcji opisanej równaniem $y = -3x + b$, której wykres przecina oś rzędnych w punkcie $A = (0, 5)$.

11. Oblicz w zeszycie współczynnik kierunkowy, jeśli wiadomo, że wykres funkcji opisanej równaniem $y = ax - 4$ przechodzi przez punkt:

a) $A = (4, 8)$ b) $A = (-0,5; 1)$ c) $A = \left(\frac{1}{3}, -6\right)$

12. Narysuj w zeszycie wykres funkcji określonej podanym wzorem. Następnie podaj argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie, oraz te, dla których przyjmuje wartości ujemne.

a) $f(x) = 3x - 6$ b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ c) $f(x) = -4$

13. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$. Wykonaj polecenia w zeszycie.

a) Wyznacz miejsce zerowe funkcji f .

b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $-\frac{2}{3}$.

c) Podaj argument, dla którego wartości funkcji f jest równa 5.

d) Określ, czy funkcja f jest rosnąca, czy malejąca.

14. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = -2 + 4x$. Wykonaj w zeszycie.

a) Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

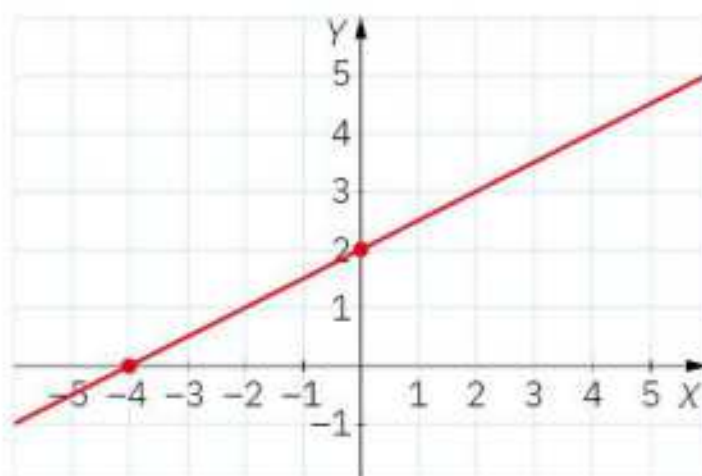
b) Sporządź wykres funkcji f .

c) Sprawdź rachunkowo i graficznie (wykonując odpowiedni rysunek), który spośród punktów: $A = (1,5; 4)$, $B = (-3, 10)$, $C = \left(-\frac{1}{4}, 3\right)$ należy do wykresu funkcji.

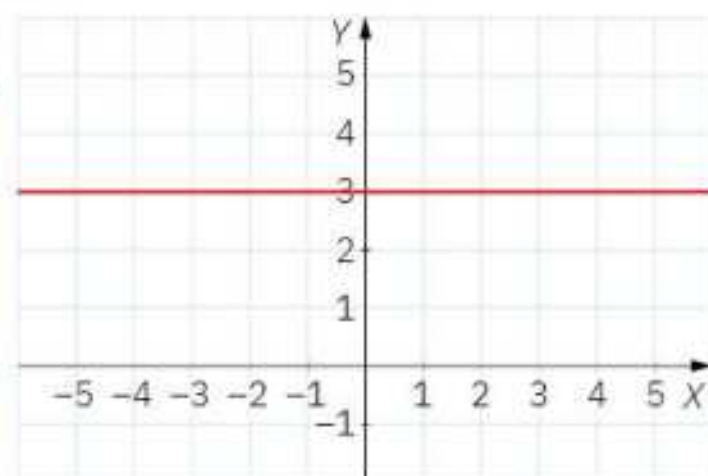
d) Wymień argumenty x , dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

15. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji liniowych.

I.



II.



Określ te funkcje za pomocą wzoru i odczytaj z wykresu:

- a) miejsce zerowe (o ile istnieje),
- b) współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią rzędnych,
- c) dla jakich argumentów x funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

- 16.** Narysuj w zeszycie w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = x - 6$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$. Następnie oblicz:
- a) współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji z osią X ,
 - b) współrzędne punktu, w którym wykresy tych funkcji się przecinają,
 - c*) pole trójkąta ograniczonego osią odciętych i wykresami funkcji.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

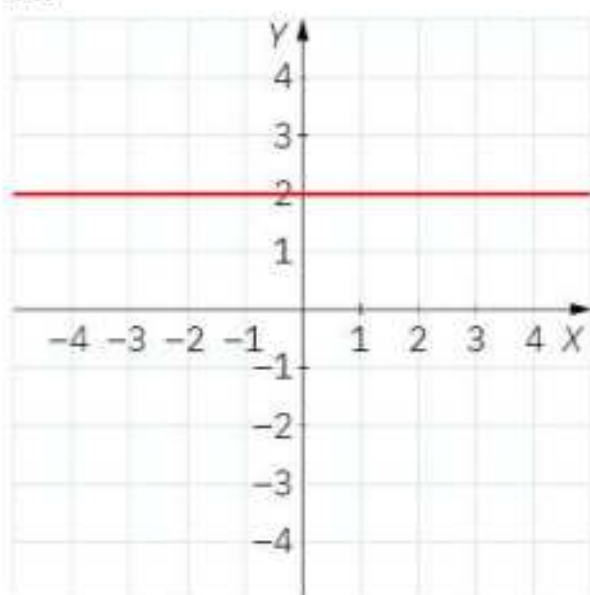
- 1.** Do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = -2 + 4$ nie należy punkt o współrzędnych:
- A. (0, 4) B. (3, 10) C. $(\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$ D. $(\frac{1}{2}, 3)$
- 2.** Funkcja f wyrażona wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x - 5$ przyjmuje wartość -6 dla argumentu:
- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -5
- 3.** Wśród funkcji liniowych określonych wzorami:
- a) $f(x) = -4x - 4$ b) $f(x) = -2$ c) $f(x) = -2 + \sqrt{2}x$
- d) $f(x) = 0,3x - 0,3$ e) $f(x) = \frac{6x-1}{12}$ f) $f(x) = 3 + (2 - \pi)x$

funkcje rosnące zostały wymienione w podpunktach:

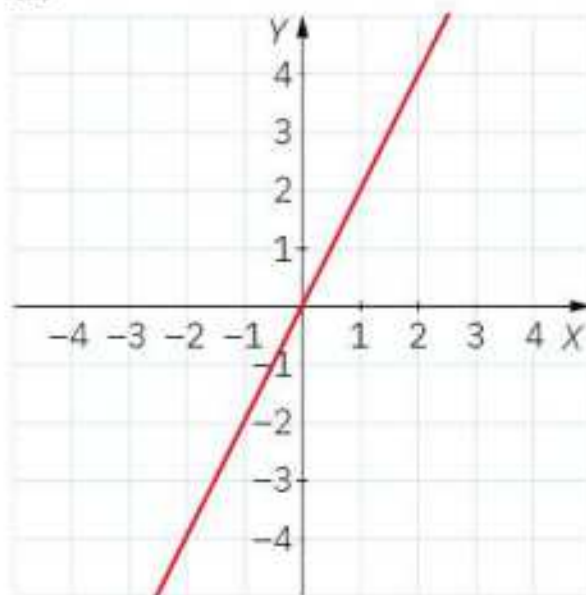
- A. a, f B. c, d, e C. a, c, d D. a, e, f
- 4.** Wśród wykresów funkcji liniowych $f(x) = 2x + 4$, $f(x) = 4$, $f(x) = 2x$ oraz $f(x) = \frac{8x-12}{4}$ prostymi równoległymi są proste będące wykresami funkcji:
- A. $f(x) = 2x + 4$ i $f(x) = 4$ B. $f(x) = 2x + 4$, $f(x) = 2x$ i $f(x) = \frac{8x-12}{4}$
- C. $f(x) = 4$ i $f(x) = 2x$ D. $f(x) = 2x + 4$, $f(x) = 4$ i $f(x) = 2x$
- 5.** Wśród wykresów funkcji liniowych $f(x) = -\frac{3}{4}x - 9$, $f(x) = -\frac{4}{3}x + 1$, $f(x) = 4x$ oraz $f(x) = \frac{4}{3}x + 1$ prostymi prostopadłymi są proste będące wykresami funkcji:
- A. $f(x) = -\frac{3}{4}x - 9$ i $f(x) = -\frac{4}{3}x + 1$ B. $f(x) = -\frac{3}{4}x - 9$ i $f(x) = 4x$
- C. $f(x) = -\frac{3}{4}x - 9$ i $f(x) = \frac{4}{3}x + 1$ D. $f(x) = -\frac{4}{3}x + 1$ i $f(x) = \frac{4}{3}x + 1$

6. Wartość funkcji opisanej wzorem $y = 2x + b$ dla argumentu 0,5 wynosi -4 . Współczynnik b tej funkcji jest równy:
 A. 2 B. -5 C. -4 D. 0,5
7. Liczba $x = -1$ jest miejscem zerowym funkcji $y = ax + 3$. Wartość współczynnika kierunkowego tej funkcji jest równa:
 A. -3 B. 1 C. -1 D. 3
8. Wartości funkcji $f(x) = 2$ i $g(x) = -\frac{2x+6}{5}$ są równe dla argumentu:
 A. -8 B. 2 C. -2 D. 8
9. Wykres funkcji $f(x) = 2x + 2$ przedstawiono na rysunku:

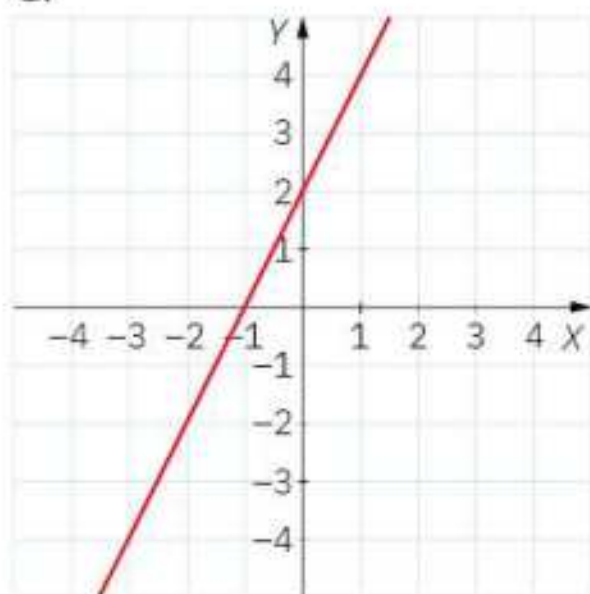
A.



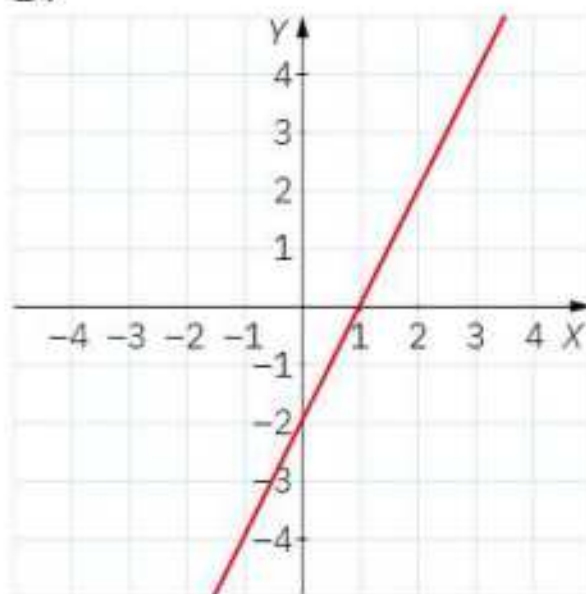
B.



C.

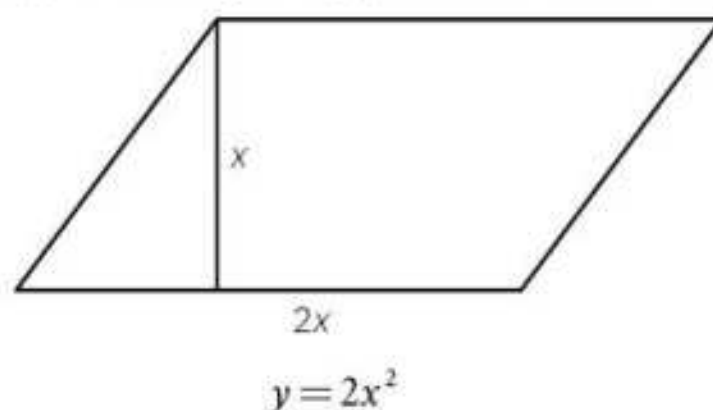
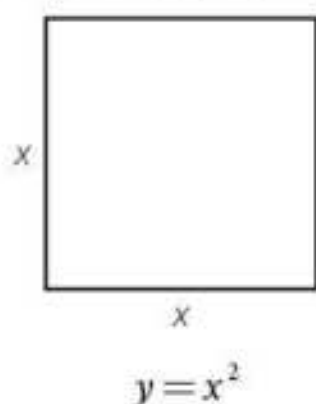


D.



4.8. Wykres funkcji kwadratowej

Gdy dowolnej liczbie dodatniej x przyporządkujemy pole kwadratu o boku długości x lub pole równoległoboku, w którym bok jest dwa razy dłuższy od wysokości x opuszczonej na ten bok, otrzymamy przykłady funkcji, które nazywamy jednomianami kwadratowymi.



Jednomianem kwadratowym nazywamy funkcję określoną wzorem $y = ax^2$, $x \in \mathbb{R}$, gdzie a jest stałą liczbą rzeczywistą różną od zera, zwaną współczynnikiem jednomianu.

Ćwiczenie 1.

Naszkiej w jednym układzie współrzędnych wykresy podanych jednomianów kwadratowych:

a) $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$

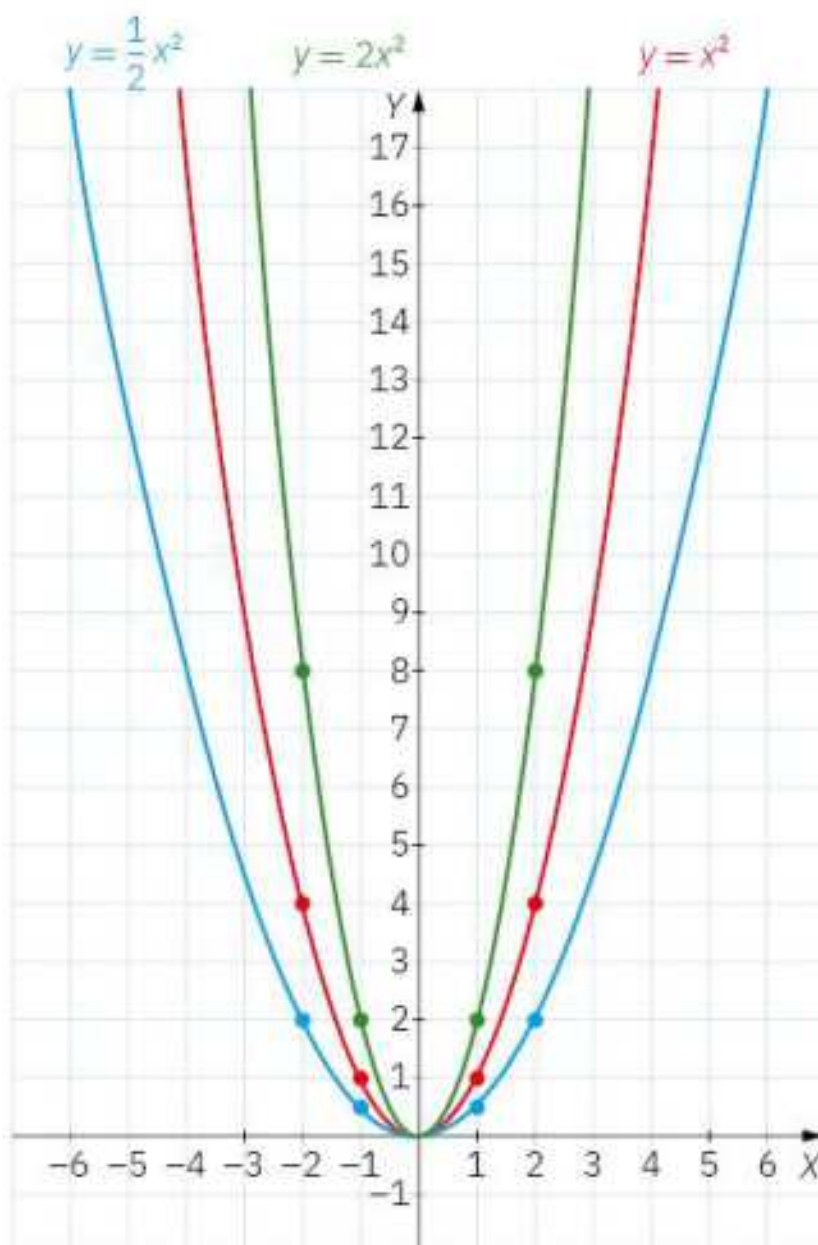
b) $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$

Rozwiązanie:

a) Rysujemy tabelę:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

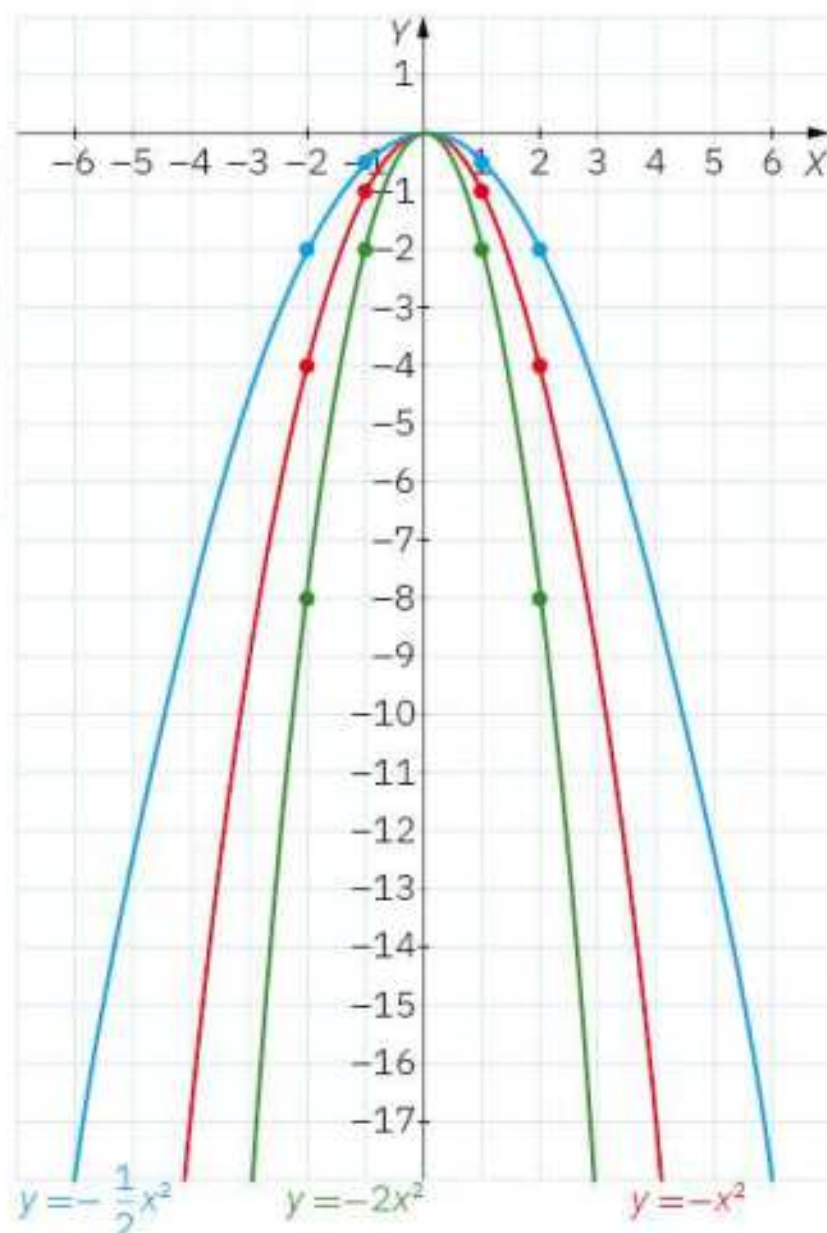
W zależności od współczynnika a zmienia się kształt wykresu funkcji kwadratowej. Zwiększenie współczynnika a dla $a > 0$ powoduje, że parabola się zwęża, a zmniejszenie współczynnika powoduje, że parabola się rozszerza.



b) Rysujemy tabelę:

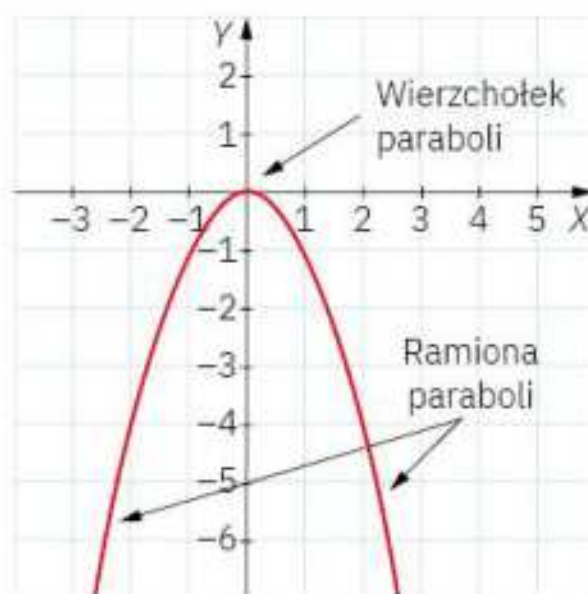
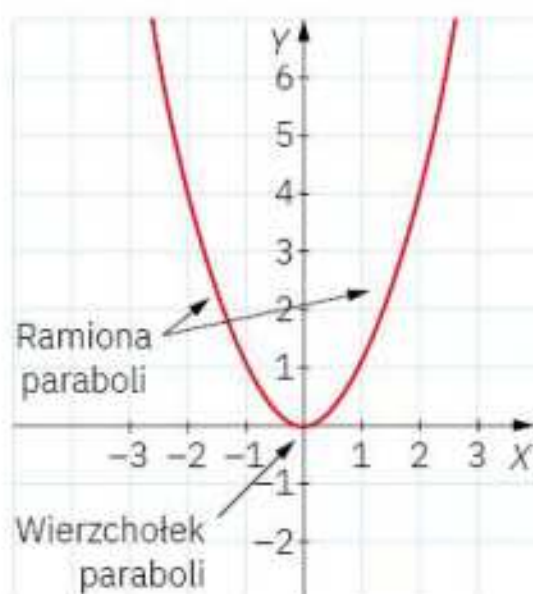
x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

Zwiększenie współczynnika a dla $a < 0$ powoduje, że parabola się rozszerza, a zmniejszenie współczynnika powoduje, że parabola się zwęża.



Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = ax^2$, układamy najpierw jej częściową tabelę, obierając kilka liczb x i obliczając odpowiadające im wartości funkcji. W tabeli warto umieścić argumenty dodatnie, ujemne oraz $x = 0$. Następnie w układzie współrzędnych zaznaczamy punkty, które odpowiadają parom współrzędnych wziętym z tabeli. Kilka zaznaczonych w ten sposób punktów łączymy krzywą (jak na rysunkach w ćwiczeniu 1.), przedłużamy ją i otrzymujemy szkic wykresu funkcji $f(x) = ax^2$.

Wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2$, $a \neq 0$ jest krzywa zwana parabolą.



Do wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2$ należy punkt $(0, 0)$ będący wierzchołkiem paraboli.

Wierzchołek dzieli parabolę na dwie części zwane ramionami paraboli.

Ramiona paraboli skierowane są w górę dla $a > 0$, zaś w dół dla $a < 0$.

Ćwiczenie 2.

Sporządź wykres funkcji i omów jej własności.

a) $y = 3x^2$

Rozwiązanie:

Aby sporządzić wykres, rysujemy tabelę częściową.

x	-2	-1	0	1	2
y	12	3	0	3	12

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łącząc punkty krzywą (jak na rysunku), szkicujemy przechodzący przez nie wykres. Następnie wydłużamy powstałą krzywą.

Dziedzina funkcji: $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości funkcji: $ZW = \langle 0, +\infty \rangle$

Miejsce zerowe: $x = 0$.

Monotoniczność funkcji:

w przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja jest malejąca, zaś w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ – rosnąca.

Funkcja osiąga najmniejszą wartość równą 0 dla argumentu 0.

Funkcja nie przyjmuje wartości największej.

b) $y = -x^2$

Rozwiązanie:

Dziedzina funkcji: $D_f = \mathbb{R}$

Zbiór wartości funkcji: $ZW = (-\infty, 0]$

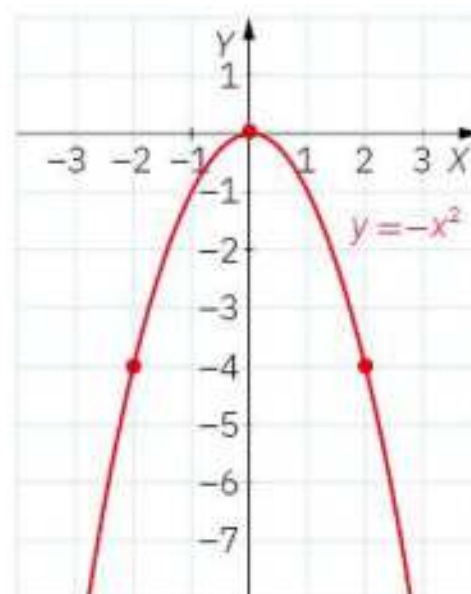
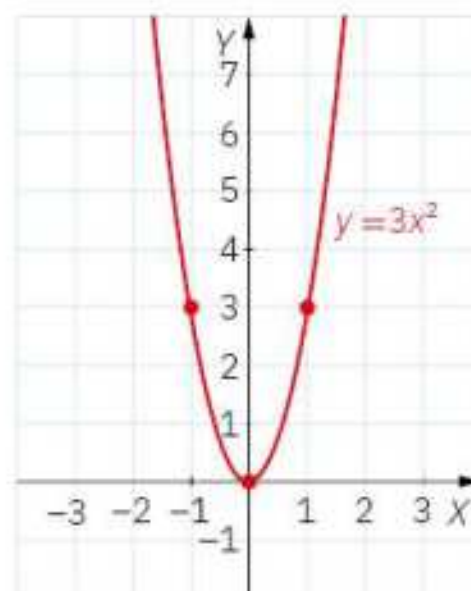
Miejsce zerowe: $x = 0$

Monotoniczność funkcji:

w przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja jest rosnąca, zaś w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ – malejąca.

Funkcja osiąga największą wartość równą 0 dla argumentu 0.

Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Podaj wartości współczynnika a dla jednomianu kwadratowego określonego wzorem:

a) $f(x) = 7x^2$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = 2,3x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x^2$

e) $f(x) = -x^2$

f) $f(x) = 4\sqrt{3}x^2$

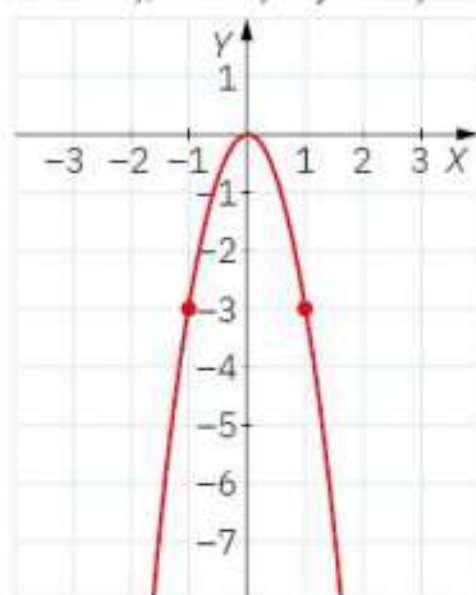
2. Podaj wzór jednomianu kwadratowego, dla którego wartość współczynnika a wynosi:
- a) 8 b) $-3\frac{3}{4}$ c) 2,5 d) -6 e) 1

3. Napisz w zeszycie wzór jednomianu kwadratowego, do którego wykresu należy punkt:
- a) $A = (-4, 16)$ b) $B = (1, -3)$ c) $C = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ d) $D = (-\sqrt{2}, -8)$

4. Poniższa tabela jest częściową tabelą jednomianu kwadratowego $y = ax^2$ (częściową tabelę funkcji sporządzamy, gdy dziedzina funkcji jest nieskończona). Oblicz współczynnik a . Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij brakujące liczby.

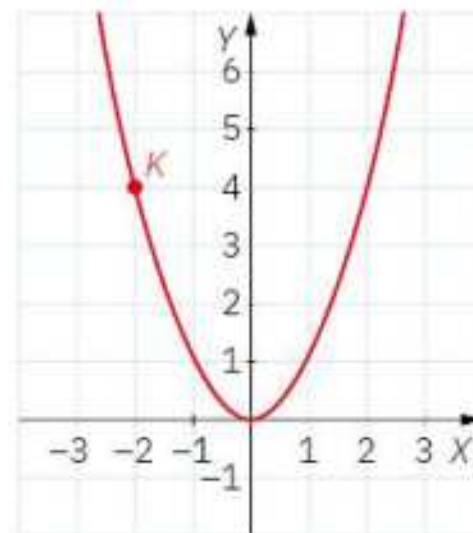
x	0	$\frac{1}{2}$	-0,2	$1\frac{1}{3}$	2		
y	0	0,5	0,08			2	0,98

5. Narysuj w zeszycie wykres jednomianu kwadratowego.
- a) $y = 4x^2$ b) $y = -0,5x^2$ c) $y = -2x^2$ d) $y = 0,25x^2$
6. Określ, jak skierowane są ramiona paraboli – w górę czy w dół – bez rysowania wykresu funkcji o wzorze:
- a) $f(x) = 0,1x^2$ b) $f(x) = -4x^2$ c) $f(x) = -\frac{7}{8}x^2$ d) $f(x) = 3,2x^2$
7. Podaj wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest przedstawiony na rysunku.



8. Wyznacz brakujące współrzędne punktów: $A = (-1, \dots)$, $B = (2, \dots)$, $C = (\sqrt{2}, \dots)$, $D = (\dots, 36)$, $E = (\dots, -1)$, $F = (\dots, 400)$, w taki sposób, aby te punkty należały do wykresu funkcji $y = 4x^2$. Czy zadanie ma w każdym wypadku rozwiązanie, a jeśli tak, to czy tylko jedno?

9. Punkt K należy do wykresu funkcji $y = ax^2$. Odczytaj z wykresu współrzędne punktu K , oblicz współczynnik a i zapisz w zeszycie wzór, którym określona jest ta funkcja.

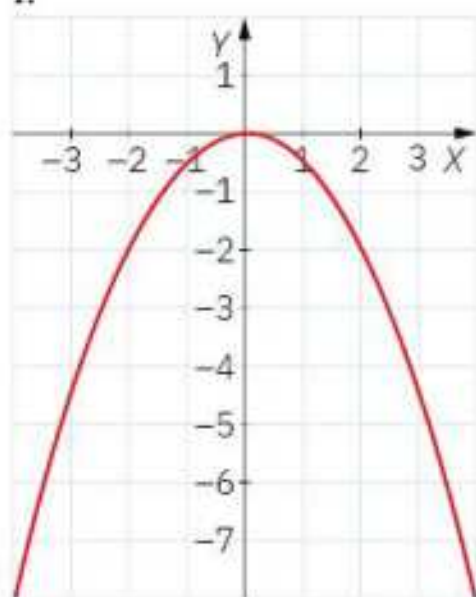


10. Na rysunkach przedstawiono wykresy jednomianów kwadratowych. Odczytaj z wykresu:

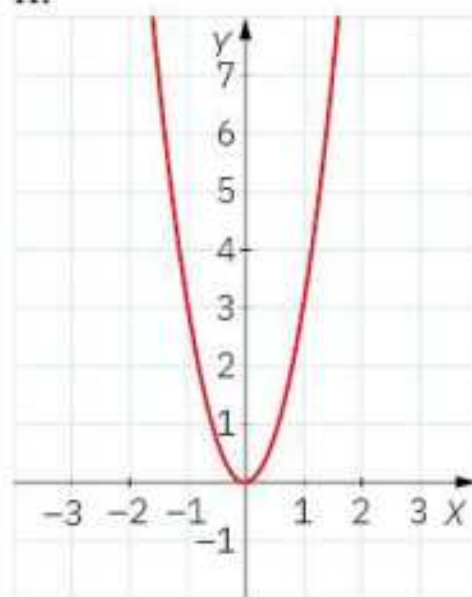
- miejsca zerowe,
- współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią rzędną,
- dla jakich argumentów x jednomian kwadratowy przyjmuje wartości dodatnie,
- największą i najmniejszą wartość jednomianu kwadratowego.

Określ każdy z tych jednomianów za pomocą wzoru.

I.

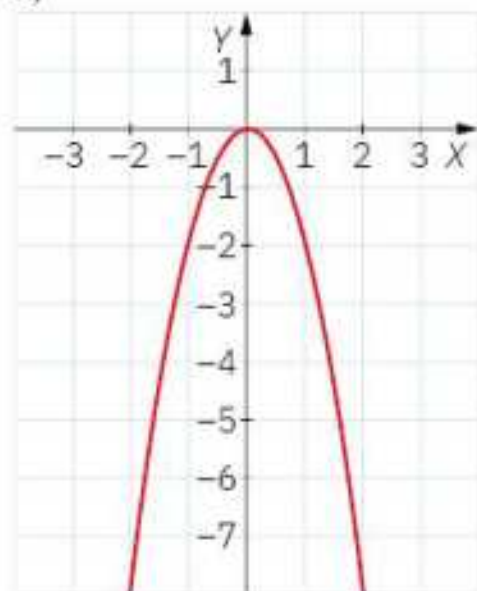


II.

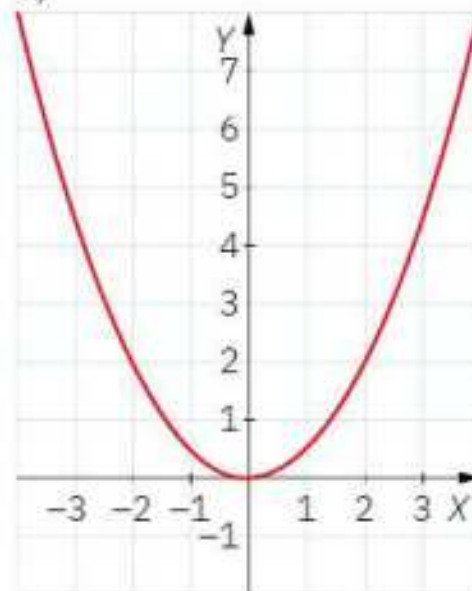


11. Omów własności jednomianu kwadratowego na podstawie jego wykresu.

a)



b)



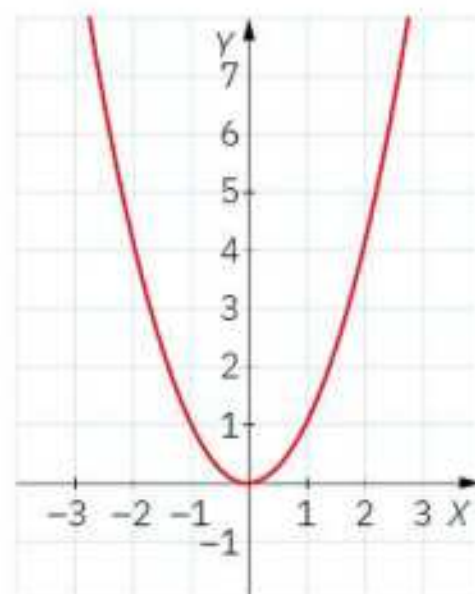
12. Funkcja jest określona wzorem $f(x) = -3x^2$. Wykonaj polecenia w zeszycie.

- Sprawdź, czy punkt $P = (1, -3)$ należy do wykresu tej funkcji.
- Oblicz wartość funkcji dla argumentu 4.
- Oblicz, dla jakiego argumentu wartość funkcji jest równa -12 .

13. Korzystając z wykresu, ustal przedziały argumentów, w których jednomian kwadratowy jest:

- a) rosnący,
- b) malejący.

14. Podaj przykład jednomianu kwadratowego malejącego w przedziale $(-\infty, 0)$ i rosnącego w przedziale $(0, +\infty)$.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Funkcje określone są za pomocą wzorów:

a) $f(x) = -3x^2$ b) $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ c) $f(x) = 2x^2$

d) $f(x) = 0$ e) $f(x) = 1,5x^2$ f) $f(x) = \frac{x^2}{2}$

Jednomianami kwadratowymi są funkcje wymienione w podpunktach:

- A. wszystkich z podanych B. a, c, e C. a, c, e, f D. a, e, f

2. Do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2$ nie należy punkt o współrzędnych:

- A. $(-2, 2)$ B. $(-2, -2)$ C. $(0, 0)$ D. $(2, -2)$

3. Wskaż wśród podanych zdanie fałszywe.

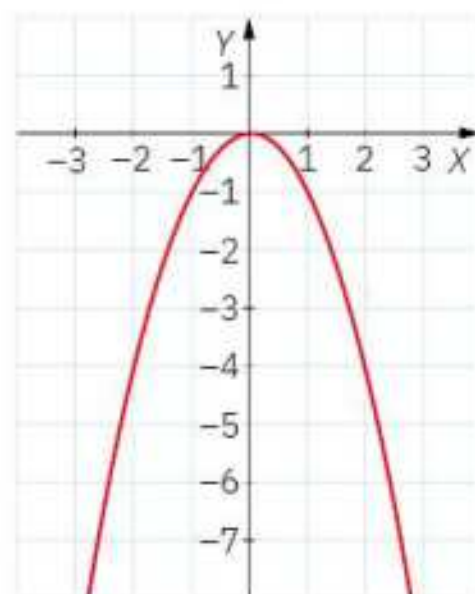
- A. Wykresem jednomianu kwadratowego jest parabola.
- B. Dziedziną jednomianu kwadratowego jest zbiór liczb rzeczywistych.
- C. Jednomian kwadratowy ma jedno miejsce zerowe.
- D. Zbiorem wartości jednomianu kwadratowego jest zbiór liczb nieujemnych.

4. Funkcja kwadratowa, która jest malejąca w przedziale $(0, +\infty)$, określona jest wzorem:

A. $f(x) = 5x^2$ B. $f(x) = -1,2x^2$ C. $f(x) = 0,3x^2$ D. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

5. Rysunek przedstawia wykres pewnego jednomianu kwadratowego. Które z podanych zdań jest fałszywe?

- A. Funkcja nie osiąga wartości najmniejszej.
- B. Funkcja jest stała w przedziale $(0, +\infty)$.
- C. Funkcja rośnie w przedziale $(-\infty, 0)$.
- D. Miejsce zerowe funkcji to $x = 0$.



4.9. Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej

Część pierwsza



Funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, gdzie a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$ nazywamy funkcją kwadratową (trójmianem kwadratowym) w postaci **ogólnej**.

Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Liczy a, b, c to współczynniki liczbowe funkcji kwadratowej.

Ćwiczenie 1.

Odczytaj współczynniki liczbowe a, b i c funkcji kwadratowej określonej wzorem:

a) $y = 2x^2 + 3x - 1$

b) $y = -4x^2 + x$

c) $y = 6x^2 - 2$

Rozwiązanie:

a) $a = 2, b = 3, c = -1$

b) $a = -4, b = 1, c = 0$

c) $a = 6, b = 0, c = -2$



Funkcję kwadratową w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ można przedstawić w postaci **kanonicznej** $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $p = \frac{-b}{2a}$,

$$q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Liczbę $b^2 - 4ac$ oznaczamy symbolem Δ (delta) i nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ jest parabola o wierzchołku

w punkcie o współrzędnych: $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$.

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej ułatwia szkicowanie jej wykresu.

Ćwiczenie 2.

Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji $y = 4x^2 - 2x - 3$. Zapisz tę funkcję w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie:

Obliczamy współrzędną p wierzchołka paraboli: $p = \frac{-(-2)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$.

Obliczamy współrzędną q wierzchołka paraboli:

$$q = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - 3 = -3\frac{1}{4}.$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne $\left(\frac{1}{4}, -3\frac{1}{4}\right)$.

Wzór funkcji zapisany w postaci kanonicznej jest następujący: $y = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - 3\frac{1}{4}$.

Ćwiczenie 3.

Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = -3(x-2)^2 + 7$.

a) Zapisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

b) Oblicz współrzędne punktu przecięcia wykresu tej funkcji z osią Y .

Rozwiązanie:

a) Przekształcamy wzór funkcji, korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$f(x) = -3(x^2 - 4x + 4) + 7 = -3x^2 + 12x - 5$$

W postaci ogólnej funkcja ta ma wzór $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$.

b) Obliczamy wartość funkcji dla argumentu $x = 0$.

$$f(0) = -3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 5 = -5$$

Współrzędne punktu przecięcia z osią y wynoszą $(0, -5)$.

Punkt przecięcia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ z osią y ma współrzędne $(0, c)$.

Ćwiczenie 4.

Dla funkcji określonej wzorem $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 - 1$:

a) podaj współrzędne wierzchołka paraboli,

b) określ, jak skierowane są ramiona paraboli (w górę czy w dół),

c) naszkicuj wykres tej funkcji i odczytaj największą lub najmniejszą wartość tej funkcji.

Rozwiązanie:

a) Wierzchołek paraboli ma współrzędne $(-2, -1)$.

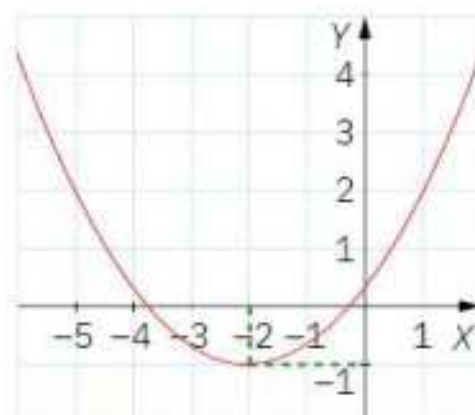
b) Ramiona paraboli są skierowane w górę.

c) Najmniejsza wartość tej funkcji wynosi -1 .

Aby sporządzić wykres funkcji, układamy najpierw jej częściową tabelę.

x	-4	-2	0	1
y	1	-1	1	$3,5$

Następnie zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty odpowiadające parom współrzędnych wziętym z tabeli i łączymy je krzywą (jak na rysunku). Następnie wydłużamy powstałą krzywą, szkicując wykres.



Ćwiczenie 5.

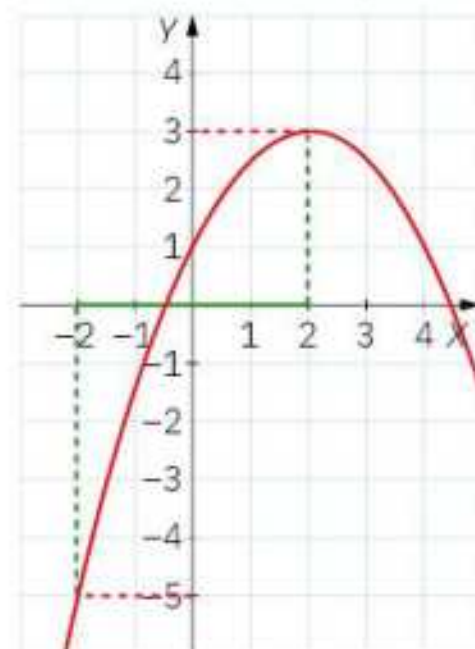
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ i określ jej zbiór wartości w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

Rozwiązanie:

Ustalamy wierzchołek paraboli, punkt przecięcia z osią Y oraz określamy, jak skierowane są jej ramiona. Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Odczytujemy z wykresu wartości funkcji w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$

$$ZW = \langle -5, 4 \rangle.$$



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

- Podaj współczynniki liczbowe a , b i c funkcji kwadratowej określonej wzorem:
 - $y = x^2 + x + 1$
 - $y = -\frac{2}{3}x^2 + x$
 - $y = 1\frac{4}{9}x^2 + 3$
 - $y = 0,4x^2 + 1,3x - 0,1$
- Napisz w zeszycie wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że jej współczynniki liczbowe to:
 - $a = 3$, $b = -2$, $c = 0$
 - $a = -3$, $b = 2$, $c = 0$
 - $a = 2,3$, $b = 0$, $c = -0,7$
 - $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = 0$
- Sprowadź do postaci kanonicznej funkcję podaną w postaci ogólnej.
 - $y = x^2 - 2x + 3$
 - $y = 16x^2 + 24x + 4$
 - $y = 9x^2 - 6x - 9$
 - $y = -3x^2 - 24x + 2$
- Sprowadź do postaci ogólnej funkcję podaną w postaci kanonicznej.
 - $y = (x + 2)^2 + 1$
 - $y = 2(x - 2)^2 - 3$
 - $y = -3(x + 5)^2 - 2$
 - $y = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 + 10$
- Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej zapisz w zeszycie w postaci ogólnej i podaj wartości współczynników a , b , c .
 - $y = (x + 1)^2 + 3$
 - $y = (x - 4)^2 + 5$
 - $y = -6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$
 - $y = -0,1(x - 0,2)^2$

6. Określ, jak (w górę czy w dół) skierowane są ramiona paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej:

a) $y = 8x^2 - 2x + 7$

b) $y = -x^2 - x$

c) $y = 0,1 + (x + 1)^2$

d) $y = -\frac{1}{2}(x + 4)^2$

7. Dla paraboli będącej wykresem danej funkcji kwadratowej podaj współrzędne punktu przecięcia z osią Y oraz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę w zeszycie.

a) $y = x^2 + 2x - 3$

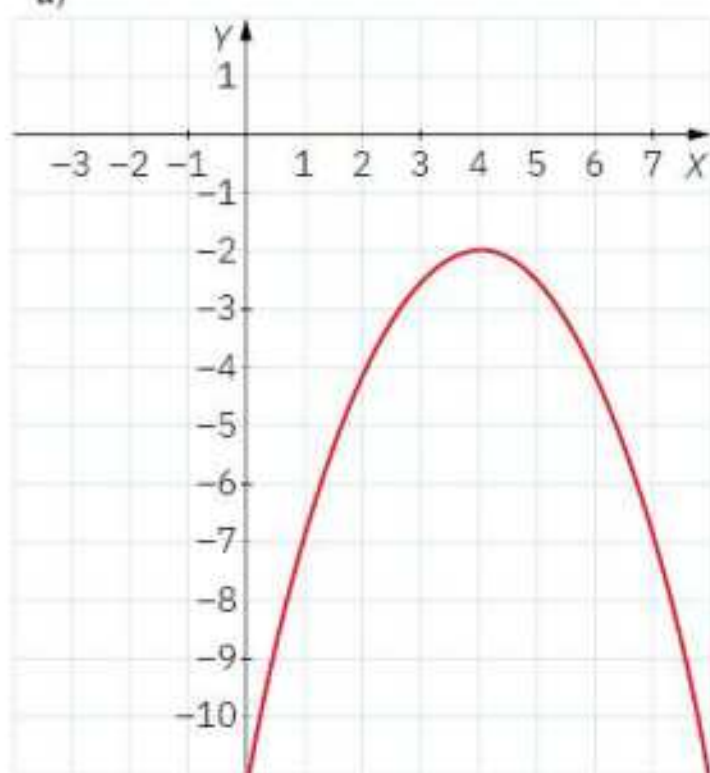
b) $y = 5x^2 - 4x + 2$

c) $y = -x^2 - 2x$

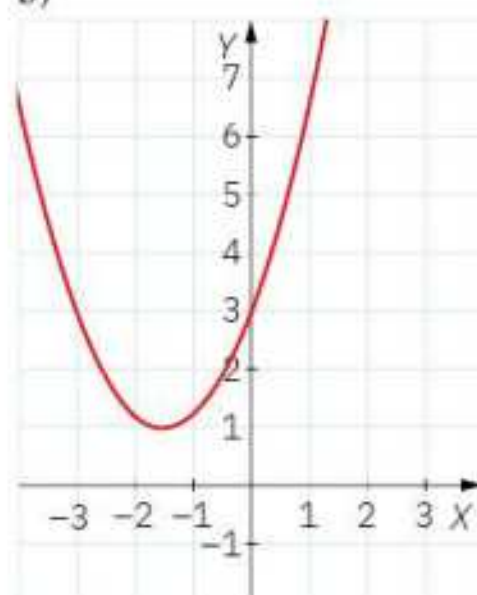
d) $y = -x^2 + 6$

8. Podaj współrzędne wierzchołka danej paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej.

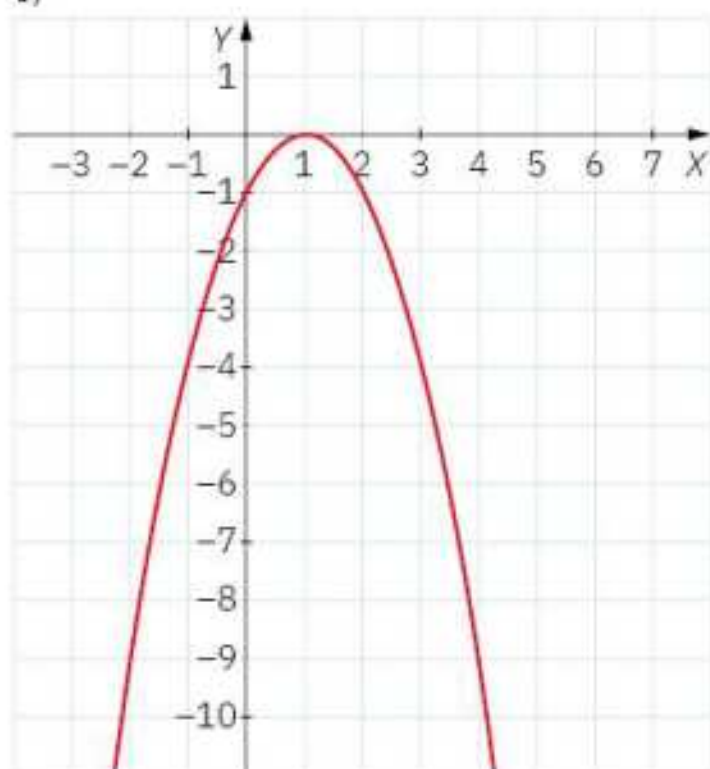
a)



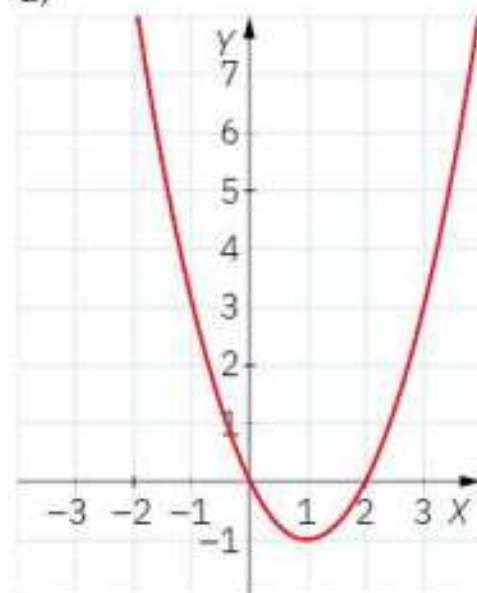
b)



c)



d)



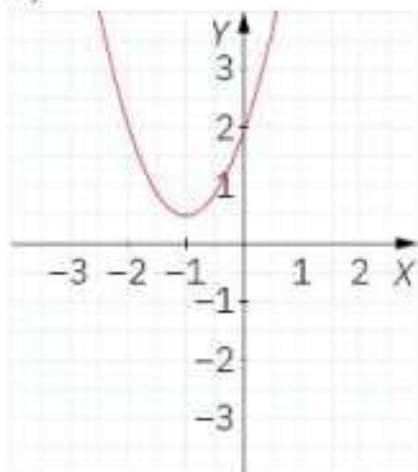
Część druga

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ jest równa liczbie punktów wspólnych wykresu tej funkcji i osi X .

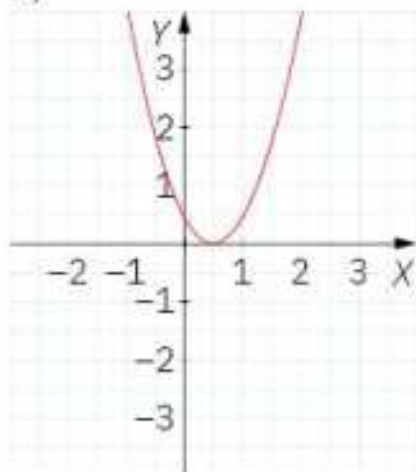
Ćwiczenie 6.

Odczytaj miejsca zerowe funkcji kwadratowych, których wykresy przedstawiono na rysunkach.

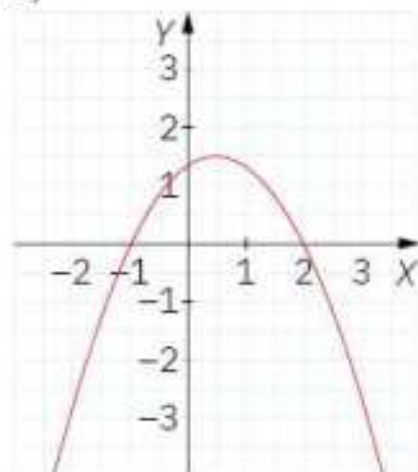
a)



b)



c)



Odczytywanie miejsc zerowych z wykresu nie zawsze jest możliwe. Dlatego do wyznaczania miejsc zerowych x_1 , x_2 funkcji kwadratowej wykorzystujemy wzory:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\text{pamiętaj, że } \Delta = b^2 - 4ac)$$

Ćwiczenie 7.

Wyznacz miejsca zerowe funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $g(x) = 2x^2 - 8x + 8$

c) $h(x) = -x^2 + 3x - 5$

Rozwiązanie:

a) Odczytujemy współczynniki funkcji f : $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji f :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - 4}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + 4}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$.

b) Odczytujemy współczynniki funkcji g : $a = 2$, $b = -8$, $c = 8$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji g :

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-(-8)}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Funkcja g ma jedno miejsce zerowe: $x_1 = x_2 = 2$.

c) Odczytujemy współczynniki funkcji h : $a = -1$, $b = 3$, $c = -5$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji h :

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -11$$

$\sqrt{\Delta}$ nie istnieje, ponieważ Δ jest liczbą ujemną.

Funkcja h nie ma miejsc zerowych.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ zależy od znaku wyróżnika trójmianu kwadratowego $\Delta = b^2 - 4ac$.

– Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$,
 $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

– Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

– Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Gdy istnieją różne miejsca zerowe x_1 i x_2 funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, to możemy zapisać ją w postaci **iloczynowej** za pomocą wzoru $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. Jeśli natomiast istnieje jedno miejsce zerowe x_0 , to wzorem postaci iloczynowej jest $y = a(x - x_0)^2$.

Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, to nie można jej zapisać w postaci iloczynowej.

Ćwiczenie 8.

Funkcję kwadratową podaną w postaci ogólnej przedstaw, o ile to możliwe, w postaci iloczynowej.

a) $y = -2x^2 + 4x + 30$

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość wyróżnika:

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 30 = 256 \qquad \sqrt{\Delta} = 16$$

$\Delta > 0$, więc możliwe jest przedstawienie tej funkcji w postaci iloczynowej.

Obliczamy x_1 i x_2 :

$$x_1 = \frac{-4 - 16}{2 \cdot (-2)} = 5 \qquad x_2 = \frac{-4 + 16}{2 \cdot (-2)} = -3$$

Funkcja $y = -2x^2 + 4x + 30$ w postaci iloczynowej ma wzór $y = -2(x - 5)(x + 3)$.

b) $y = x^2 - 8x + 16$

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość wyróżnika:

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$$

$\Delta = 0$, więc możliwe jest przedstawienie tej funkcji w postaci iloczynowej.

$$x_0 = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = 4$$

Funkcja $y = x^2 - 8x + 16$ w postaci iloczynowej ma wzór $y = (x - 4)^2$.

$$c) y = 3x^2 + x + 5$$

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość wyróżnika:

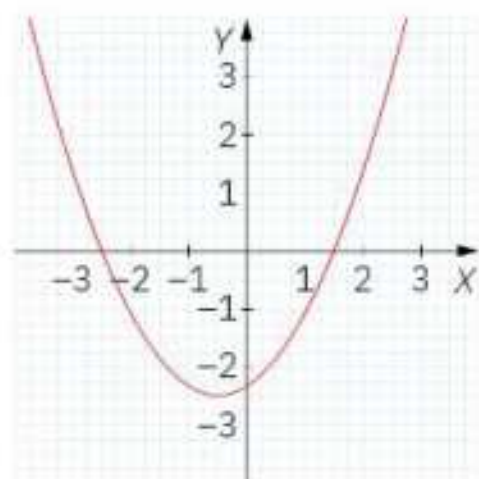
$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -59$$

$\Delta < 0$, więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, czyli nie można zapisać jej w postaci iloczynowej.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji kwadratowej.



2. Określ, ile miejsc zerowych ma dana funkcja kwadratowa.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = 10x^2 - 1,1x + 0,3$

d) $f(x) = x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$

3. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieją):

a) $f(x) = x^2 + 15x + 36$

b) $f(x) = 8x^2 - 4x + 0,5$

c) $f(x) = -x^2 - 2$

d) $f(x) = -1,25x^2 + 13x - 5$

4. Funkcję kwadratową podaną w postaci ogólnej przedstaw, o ile to możliwe, w postaci iloczynowej.

a) $y = x^2 - 4x - 96$

b) $y = 2x^2 + 6x + 4,5$

c) $y = -7x^2 + 5x - 1$

d) $y = 1,5x^2 - 3x + 1,8$

5. Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej. Podaj jej postać ogólną.

a) $y = (x - 11)(x - 3)$

b) $y = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + 1\frac{1}{3}\right)$

c) $y = 0,2(x - 3)^2$

d) $y = \frac{1}{2}(x + 8)(x - 6)$

6. Na podstawie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej podaj miejsca zerowe tej funkcji.

a) $y = 6(x - 3)(x - 1)$

b) $y = -(x - 4)(x + 2)$

c) $y = 2\frac{1}{3}(x + 0,2)(x - 1,1)$

d) $y = -1,6\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$

7. Znając współczynnik a oraz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, zapisz ją w zeszycie w postaci iloczynowej.

a) $a = 1, x_1 = 5, x_2 = 7$

b) $a = -5, x_1 = -2, x_2 = -12$

c) $a = 0,3, x_1 = x_2 = 9$

8. Dana jest funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej. Zapisz ją w zeszycie w postaci iloczynowej (o ile to możliwe).

a) $y = (x + 2)^2 - 6\frac{1}{4}$

b) $y = -(x - 4)^2 + 1$

c) $y = 2(x - 0,5)^2 - \frac{1}{2}$

d) $y = -3(x + 8)^2 - 8$

9. Funkcja kwadratowa określona jest w postaci iloczynowej. Zapisz ją w zeszycie w postaci kanonicznej.

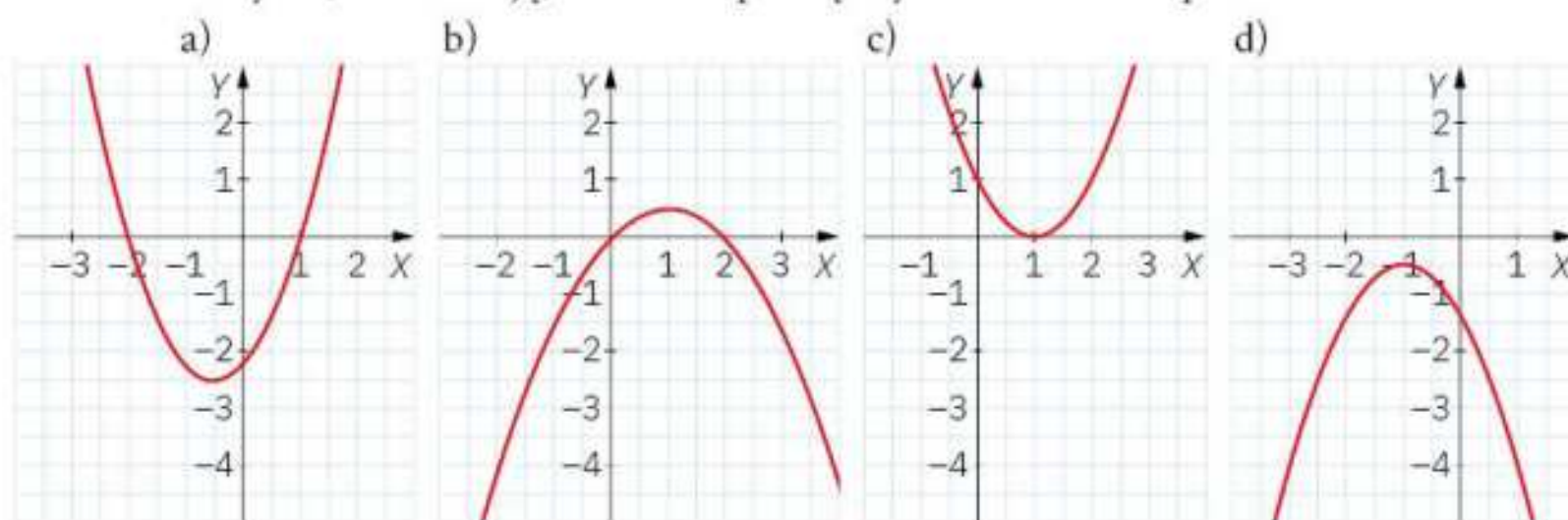
a) $y = (x - 4)(x + 2)$

b) $y = -1,1(x + 1)(x - 3)$

c) $y = 5(x - 12)(x - 6)$

d) $y = -0,2(x - 5)(x - 3)$

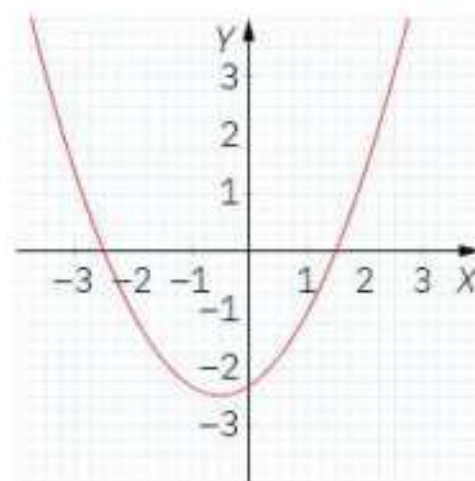
10. Na podstawie poniższych wykresów funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ określ znaki współczynników liczbowych a, b, c , znak wyróżnika, znak miejsc zerowych (o ile istnieją) i znaki współrzędnych wierzchołka paraboli.



11. Odczytaj z wykresu funkcji kwadratowej f odpowiednie dane i podaj:

a) miejsca zerowe funkcji f ,

b) współrzędne wierzchołka paraboli.



12. Oblicz w zeszycie współrzędne punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem danej funkcji.

a) $y = x^2 + 4x - 21$

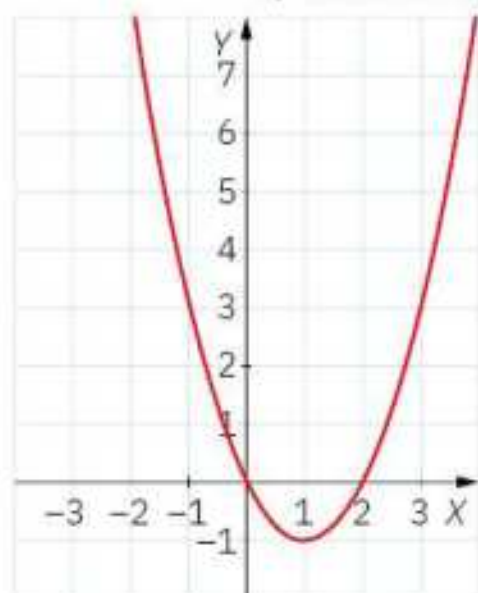
b) $y = 2x^2 + 14x + 20$

c) $y = -4x^2 + 3x - 1$

13. Z wykresu funkcji kwadratowej odczytaj zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje:

a) wartości dodatnie,

b) wartości ujemne.



14. Znajdź miejsca zerowe funkcji $y = -x^2 - x + 6$. Oblicz w zeszycie współrzędne wierzchołka jej wykresu oraz współrzędne punktów jej przecięcia z osiami układu współrzędnych. Narysuj jej wykres.

15. Sporządź w zeszycie szkic wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = (x + 3)^2 - 1$. Następnie podaj:

a) zbiór wartości tej funkcji,

b) zbiór, w którym funkcja osiąga wartości ujemne,

c) miejsca zerowe,

d) zbiór, w którym funkcja jest malejąca.

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Liczba -2 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej:

A. $f(x) = x^2 + x - 2$

B. $f(x) = x^2 - x + 2$

C. $f(x) = -x^2 + x$

D. $f(x) = x^2 + x + 6$

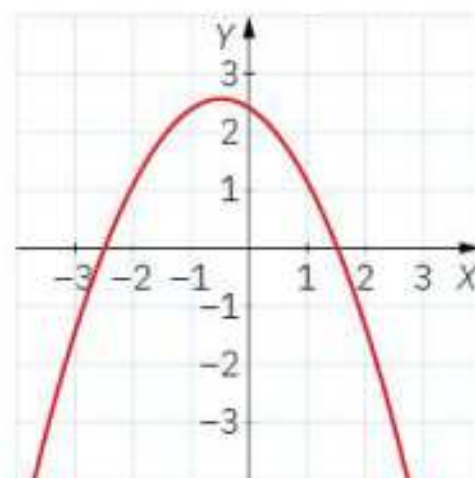
2. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej przedstawionej na rysunku możemy stwierdzić, że:

A. $a > 0$ i $\Delta > 0$

B. $a > 0$ i $\Delta < 0$

C. $a < 0$ i $\Delta > 0$

D. $a < 0$ i $\Delta < 0$



3. Funkcja kwadratowa $f(x) = 7x^2 + 5x - 3$:
- A. ma dwa miejsca zerowe B. ma jedno miejsce zerowe
C. nie ma miejsc zerowych D. nie da się określić, czy ma miejsca zerowe.
4. Funkcja kwadratowa $y = -10x^2 - 20x + 30$ w postaci iloczynowej ma zapis:
- A. $y = -10(x+1)(x-3)$ B. $y = 10(x-1)(x+3)$
C. $y = 10(x+1)(x-3)$ D. $y = -10(x-1)(x+3)$
5. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = -7(x+2)(x-3)$ są liczby:
- A. -2 i 3 B. 2 i -3 C. -7 , 2 i -3 D. 0 , -2 i 3

4.10. Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej

Wzór funkcji kwadratowej można określić na podstawie informacji dotyczących tej funkcji lub jej wykresu.

W tym rozdziale dowiesz się, w jaki sposób wyznaczyć wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

Ćwiczenie 1.

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, mając ją daną:

a) w postaci kanonicznej: $f(x) = 3(x-5)^2 + 7$

b) w postaci iloczynowej: $f(x) = -2(x-4)(x+5)$

Rozwiązanie:

a) wykonujemy przekształcenia:

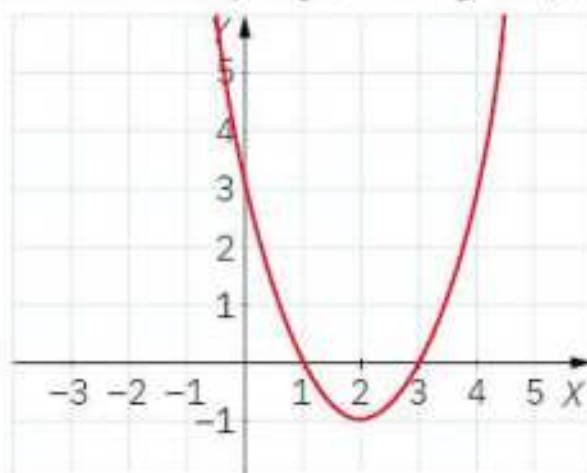
$$f(x) = 3(x-5)^2 + 7 = 3(x^2 - 10x + 25) + 7 = 3x^2 - 30x + 82$$

b) wykonujemy przekształcenia:

$$f(x) = -2(x-4)(x+5) = -2(x^2 + x - 20) = -2x^2 - 2x + 40$$

Ćwiczenie 2.

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej na podstawie jej wykresu.



Rozwiązanie:

Wykres funkcji kwadratowej w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$ przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, c)$, zatem $c = 3$.

Wzór funkcji f to $f(x) = ax^2 + bx + 3$. Miejscami zerowymi są $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Podstawiając te liczby do wzoru $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, otrzymujemy $f(x) = a(x - 1)(x - 3)$.

Ponieważ punkt $(0, 3)$ należy do wykresu, zatem $3 = a(0 - 1)(0 - 3)$, skąd $a = 1$.

Wzór funkcji w postaci iloczynowej przekształcamy do postaci ogólnej:

$f(x) = 1(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$, z czego wynika, że $b = -4$.

Szukany wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej to $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Ćwiczenie 3.

Jednym z dwóch różnych miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + bx + 2$ jest odcięta punktu o współrzędnych $(2, 0)$. Oblicz współczynnik b i zapisz wzór tej funkcji.

Rozwiązanie:

Wstawiamy współrzędne punktu będącego miejscem zerowym do wzoru funkcji i obliczamy współczynnik b .

$$0 = -3 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2$$

$$2b = 10$$

$$b = 5$$

Zapisujemy wzór funkcji: $f(x) = -3x^2 + 5x + 2$.

Ćwiczenie 4.

Wiedząc, że funkcja $f(x) = x^2 - 5x + c$ osiąga wartość najmniejszą równą $-\frac{1}{4}$, oblicz wartość współczynnika c i zapisz wzór tej funkcji.

Rozwiązanie:

Funkcja osiąga wartość najmniejszą dla rzędnej wierzchołka paraboli, która jest wy-

kresem tej funkcji kwadratowej, zatem $y_w = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot c \quad \frac{-25 + 4c}{4} = -\frac{1}{4} \quad -25 + 4c = -1$$

$$4c = 24 \quad c = 6$$

Zapisujemy wzór funkcji: $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

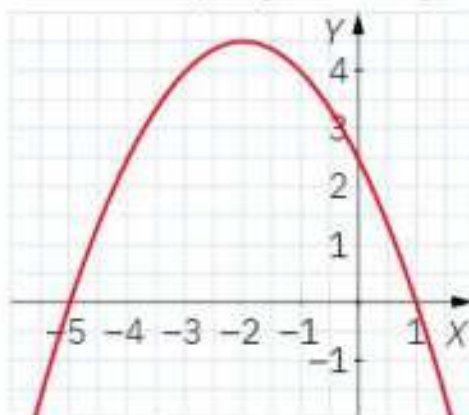
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, mając dany wzór.

$$\text{a) } f(x) = (x - 1)^2 + 3 \quad \text{b) } f(x) = -2(x - 5)(x + 2) \quad \text{c) } f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}$$



2. Jednym z dwóch różnych miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx - 3$ jest odcięta punktu o współrzędnych $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Oblicz w zeszycie współczynnik b i zapisz wzór tej funkcji.
3. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej na podstawie jej wykresu.



4. Wiedząc, że funkcja $f(x) = 2x^2 - 3x + c$ osiąga wartość najmniejszą równą $-6\frac{1}{8}$, oblicz w zeszycie wartość współczynnika c i zapisz wzór tej funkcji.
5. Funkcja $f(x) = ax^2 + 6x - 9$ osiąga wartość najmniejszą równą -12 . Oblicz w zeszycie wartość współczynnika a i zapisz wzór funkcji.
6. Wiedząc, że funkcja $f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x + c$ osiąga wartość największą w punkcie $\frac{25}{32}$, a jej wykres przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $\left(0, \frac{3}{4}\right)$, oblicz w zeszycie wartość współczynników a i c tej funkcji. Zapisz jej wzór.
7. Dana jest funkcja w postaci iloczynowej $f(x) = a(x+5)(x-7)$. Wiedząc, że jej wykres przecina oś Y w punkcie $(0, 35)$, oblicz w zeszycie wartość współczynnika a i zapisz wzór funkcji w postaci ogólnej.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Dana jest funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej $f(x) = 2(x-3)^2 + 9$. Postać ogólna tej funkcji jest następująca:

A. $f(x) = 2x^2 - 6x + 12$

B. $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$

C. $f(x) = 2x^2 - 12x + 27$

D. $f(x) = 2x^2 - 6x + 81$

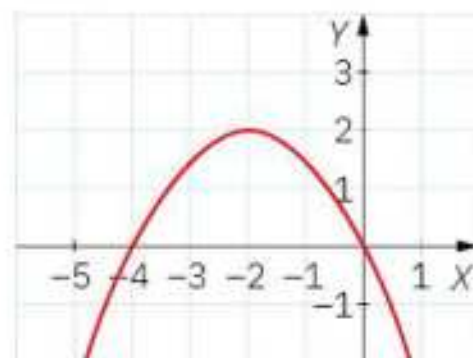
2. Wykres przedstawia funkcję kwadratową opisaną wzorem:

A. $f(x) = -2x^2 - 2x$

B. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

C. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$

D. $f(x) = -2x^2 - x$



3. Wiedząc, że jednym z dwóch różnych miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + bx + 30$ jest odcięta punktu o współrzędnych $(5, 0)$, możemy stwierdzić, że współczynnik b wynosi:
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
4. Jeżeli funkcja $f(x) = x^2 - 19x + c$ osiąga wartość najmniejszą równą $-6\frac{1}{4}$, to współczynnik c jest równy:
- A. 24 B. 36 C. 48 D. 84

4.11. Wartość najmniejsza i największa funkcji kwadratowej

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, w całej swojej dziedzinie $\mathbb{R}$, ma wartość najmniejszą równą rzędnej wierzchołka paraboli będącej jej wykresem, gdy $a > 0$, oraz wartość największą, gdy $a < 0$. Dla $a > 0$ funkcja kwadratowa nie ma wartości największej, a dla $a < 0$ nie ma wartości najmniejszej. Sprawdźmy, co się stanie, gdy zawężymy dziedzinę do przedziału domkniętego. Potrzebny będzie do tego wzór na obliczenie współrzędnej x

wierzchołka paraboli: $p = \frac{-b}{2a}$.

Ćwiczenie 1.

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji:

- a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ w przedziale $\langle -3, 2 \rangle$
 b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ w przedziale $\langle -4, 0 \rangle$

Rozwiązanie:

a) Sprawdzamy, czy odcięta wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f należy do przedziału $\langle -3, 2 \rangle$:

$$p = \frac{-(-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \text{ - to znaczy, że odcięta należy do przedziału } \langle -3, 2 \rangle.$$

Ramiona paraboli będącej wykresem tej funkcji są skierowane do góry, więc najmniejsza wartość funkcji f jest równa: $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{8}$.

Obliczamy wartości funkcji w końcach przedziału $\langle -3, 2 \rangle$.

Największą wartością funkcji jest większa z liczb $f(-3)$ i $f(2)$.

$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 - (-3) + 1 = 22 \qquad f(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 7$$

Odpowiedź: Największa wartość osiągnięta przez funkcję f w przedziale $\langle -3, 2 \rangle$ jest równa 22.

b) Sprawdzamy, czy odcięta wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f należy do przedziału $\langle -4, 0 \rangle$:

$$p = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 - \text{to znaczy, że nie należy do przedziału } \langle -4, 0 \rangle.$$

Obliczamy wartości funkcji w końcach przedziału $\langle -4, 0 \rangle$.

Największej i najmniejszej wartości szukamy wśród liczb $f(-4)$ i $f(0)$.

$$f(-4) = -(-4)^2 + 2 \cdot (-4) + 3 = -21 \quad f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

Odpowiedź: Największa wartość osiągnięta przez funkcję f w przedziale $\langle -4, 0 \rangle$ jest równa 3, a najmniejsza to -21 .



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Sprawdź, czy dana funkcja osiąga wartość największą, czy najmniejszą. Ile wynosi ta wartość i dla jakiego argumentu jest osiągnięta?

a) $y = -4x^2 - 4x + 5$

b) $y = 2x^2 - 44x + 250$

c) $y = x^2 - 28x + 196$

d) $y = -0,2x^2 + 8x - 100$

2. Narysuj w zeszycie wykres podanej funkcji i odczytaj jej największą lub najmniejszą wartość w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

a) $y = (x + 1)^2 + 1$

b) $y = -(x + 1)^2 - 1$

c) $y = (x - 1)^2 + 1$

d) $y = -(x - 1)^2 - 1$

3. Oblicz w zeszycie największą i najmniejszą wartość osiąganą przez funkcję kwadratową zapisaną w postaci ogólnej w przedziale $\langle -3, 1 \rangle$.

a) $y = x^2 - 4x + 2$

b) $y = 0,5x^2 + \frac{1}{2}x - 10$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 0,4$

d) $y = -\frac{1}{5}x^2 - 0,6x - \frac{4}{5}$

4. Współczynnik a pewnej funkcji kwadratowej wynosi 2, a jej miejsca zerowe są równe $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Ile wynosi wartość największa i najmniejsza tej funkcji w przedziale $\langle -3, 2 \rangle$?

5. Oblicz w zeszycie największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma wynosi 12.

6. Oblicz w zeszycie najmniejszą wartość iloczynu dwóch liczb, których różnica wynosi 6.

7. Oblicz w zeszycie najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale domkniętym A , gdy:

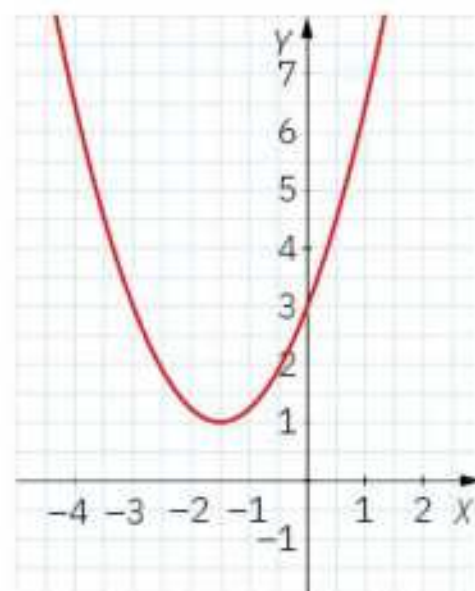
a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ i $A = \langle -1, 3 \rangle$

b) $f(x) = -1,5x^2 - 6x + 1$ i $A = \langle -3, 2 \rangle$

c) $f(x) = x^2 + 5x - 7$ i $A = \langle -2, 6 \rangle$

d) $f(x) = -x^2 - 10x$ i $A = \langle 0, 5 \rangle$

1. Funkcja $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$ przyjmuje wartość największą w punkcie:
 A. $\left(-1\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ B. $\left(-1\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ C. $\left(1\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ D. $\left(1\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$
2. Wartość najmniejszą, wynoszącą $1\frac{11}{16}$, przyjmuje w przedziale $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ funkcja:
 A. $y = x^2 + x + 1$ B. $y = -x^2 - x + 2$ C. $y = x^2 + x - 2$ D. $y = -x^2 - x - 1$
3. Najmniejsza wartość osiągnięta w przedziale $\langle -3, 0 \rangle$ przez funkcję, której wykres przedstawiono na rysunku, wynosi:
 A. 6
 B. 4
 C. 1
 D. 3



4.12. Zagadnienia geometryczne i fizyczne

Część pierwsza

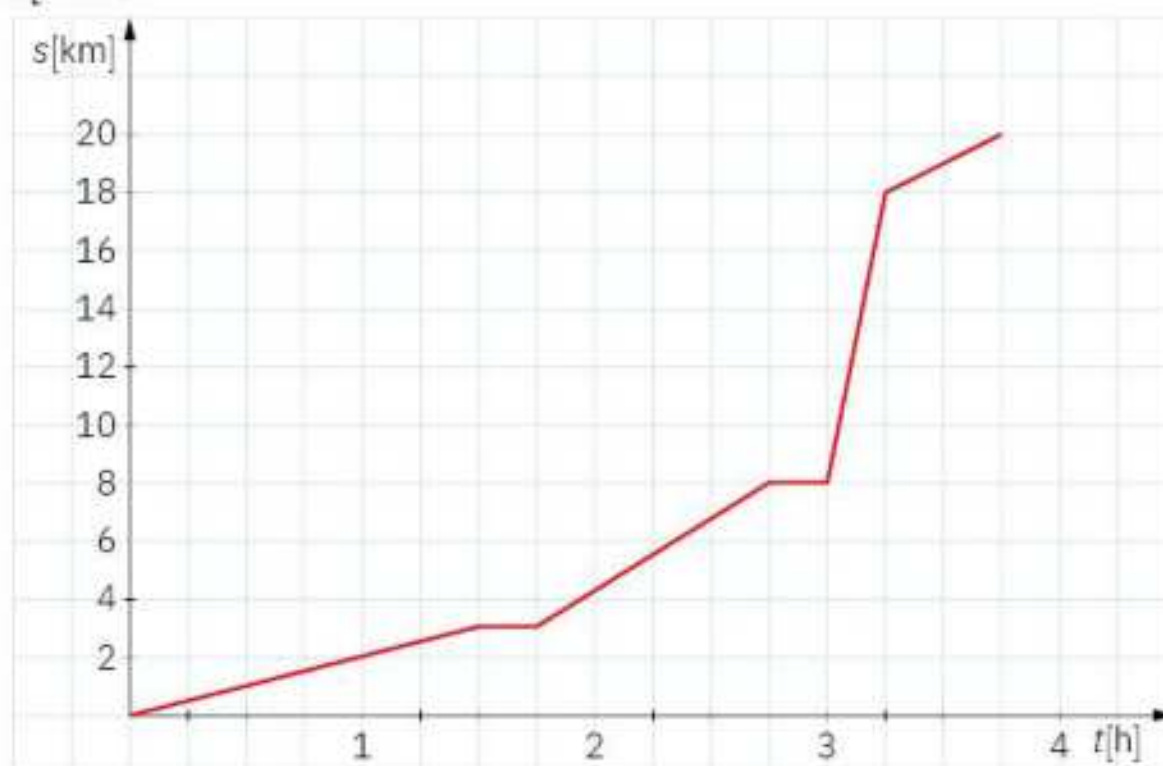
Wiele zależności z życia codziennego można przedstawić za pomocą funkcji liniowej. Niektóre z nich zapisujemy z zastosowaniem wzorów, np.: zamianę temperatury ze stopni Celsjusza na Kelwina, zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnym czy koszt zakupu waluty w kantorze. Inne łatwiej przedstawić na wykresie, np.: długość przebytej przez turystę drogi czy zmianę temperatury w ciągu miesiąca.

Ćwiczenie 1.

Turysta wyruszył na wędrowkę ze schroniska A do schroniska B. Pierwszy etap drogi prowadzący przez przełęcz przeszedł w ciągu 90 minut ze średnią prędkością $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Następnie odpoczywał przez 15 minut, po czym pięciokilometrowy odcinek drogi do przystanku autobusowego pokonał w ciągu godziny. Na autobus czekał kwadrans, a przez kolejne 15 minut przejechał nim 10 km. Z przystanku szedł do schroniska B przez pół godziny z prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Narysuj w układzie współrzędnych wykres drogi s przebytej przez turystę w zależności od czasu t .

Rozwiązanie:



Jednostkę obrano w taki sposób, aby można było czytelnie zaznaczyć na wykresie wszystkie etapy podróży.

I etap

$s = v \cdot t = 2 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 90 \text{ min} = 2 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5 \text{ h} = 3 \text{ km}$ – na podstawie danych obliczamy długość trasy I etapu podróży. Na wykresie zaznaczamy odpowiedni punkt o współ-

rzędnych: $\begin{cases} t = 1,5 \text{ h} \\ s = 3 \text{ km} \end{cases}$.

II etap

Do czasu trwania wycieczki doliczamy 15 min, czyli $\frac{1}{4} \text{ h}$ – czas trwania odpoczynku, podczas którego turysta nie przebył żadnej drogi. Na wykresie zaznaczamy

punkt o współrzędnych: $\begin{cases} t = 1\frac{3}{4} \text{ h} \\ s = 3 \text{ km} \end{cases}$.

III etap

Podczas kolejnego etapu turysta pokonał 5 km (dodajemy 5 km do dotychczas przebytej drogi 3 km) w czasie godziny (dodajemy 1 h do dotychczasowego czasu trwania

wycieczki, czyli $1\frac{3}{4} \text{ h}$). Na wykresie zaznaczamy punkt o współrzędnych: $\begin{cases} t = 2\frac{3}{4} \text{ h} \\ s = 8 \text{ km} \end{cases}$.

IV etap

Turysta czekał na autobus 15 min i w tym czasie nie przebył żadnej drogi (wartość s się nie zmienia). Dodajemy kwadrans do dotychczasowego czasu ($t = 2\frac{3}{4} \text{ h} + \frac{1}{4} \text{ h}$).

Zaznaczamy punkt o współrzędnych: $\begin{cases} t = 3 \text{ h} \\ s = 8 \text{ km} \end{cases}$.

V etap

Do dotychczasowego czasu wędrówki dodajemy kwadrans ($t = 3 \text{ h} + \frac{1}{4} \text{ h}$), podczas którego turysta pokonał autobusem 10 km (do dotychczasowej drogi przebytej w czasie wędrówki $s = 10 \text{ km}$ dodajemy jeszcze 8 km). Zaznaczamy na wykresie punkt

o współrzędnych $\begin{cases} t = 3\frac{1}{4} \text{ h} \\ s = 18 \text{ km} \end{cases}$.

VI etap

Obliczamy drogę, jaką pokonał turysta z przystanku do schroniska B. Do dotychczas przebytej drogi $s = 18 \text{ km}$ dodajemy 2 km. Do dotychczasowego czasu trwania wędrówki $t = 3\frac{1}{4} \text{ h}$ dodajemy pół godziny, czyli $\frac{2}{4} \text{ h}$. Zaznaczamy na wykresie

punkt o współrzędnych: $\begin{cases} t = 3\frac{3}{4} \text{ h} \\ s = 20 \text{ km} \end{cases}$.

b) Jak długo trwała podróż?

Rozwiązanie:

Odczytujemy z wykresu czas trwania podróży.

Odpowiedź: Podróż trwała 3 godziny 45 minut.

c) Ile kilometrów turysta przeszedł pieszo, a ile przejechał autobusem?

Rozwiązanie:

Sumujemy drogę, jaką turysta przeszedł pieszo: $3 \text{ km} + 5 \text{ km} + 2 \text{ km} = 10 \text{ km}$

Odpowiedź: Turysta pieszo przeszedł 10 km, a autobusem przejechał 10 km.

d) Ile wyniosła średnia prędkość jego podróży?

Rozwiązanie:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{20 \text{ km}}{3\frac{3}{4} \text{ h}} = \frac{20 \text{ km}}{\frac{15}{4} \text{ h}} = 20 \cdot \frac{4 \text{ km}}{15 \text{ h}} = \frac{16 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 5\frac{1}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: Turysta podróżował ze średnią prędkością równą $5\frac{1}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

e) Z jaką prędkością jechał autobusem?

Rozwiązanie:

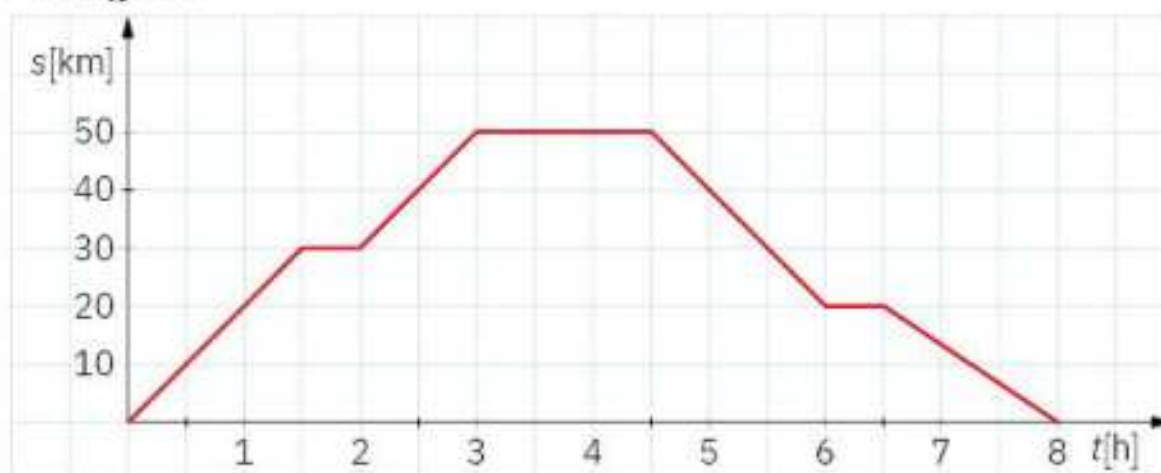
$$v = \frac{s}{t} = \frac{10 \text{ km}}{\frac{1}{4} \text{ h}} = 10 \cdot 4 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: Turysta podróżował autobusem z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ćwiczenie 2.

Na wykresie przedstawiono zależność drogi, jaką pokonała grupa rowerzystów podczas wycieczki z ośrodka wczasowego nad jezioro i z powrotem, od czasu, w ja-

kim to nastąpiło.



Przeanalizuj wykres i odpowiedz na poniższe pytania.

- Jak długo trwała wycieczka?
- Ile razy grupa robiła postój i jak długo w sumie trwał odpoczynek?
- Po jakim czasie od momentu wyjechania z ośrodka rowerzyści wyruszyli w drogę powrotną?
- Ile wynosiła średnia prędkość podróży w drodze nad jezioro, a ile – w drodze powrotnej?
- Jak długo rowerzyści przebywali nad jeziorem?

Odpowiedź:

- | | |
|---------------------------------|---|
| a) 8 godzin | b) 3 razy, dwie i pół godziny |
| c) po 4 godzinach i 30 minutach | d) $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}, 16 \frac{2}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$ |
| e) 1 godzinę 30 minut | |

Ćwiczenie 3.

Wzór, który umożliwia zamianę temperatury wyrażonej w stopniach Celsjusza na temperaturę w stopniach Kelwina, to: $t(K) = t(C) + 273,15$, czyli $y = x + 273,15$, jeżeli przyjmiemy, że y to temperatura mierzona w kelwinach (K), a x jest temperaturą w stopniach Celsjusza ($^{\circ}\text{C}$).

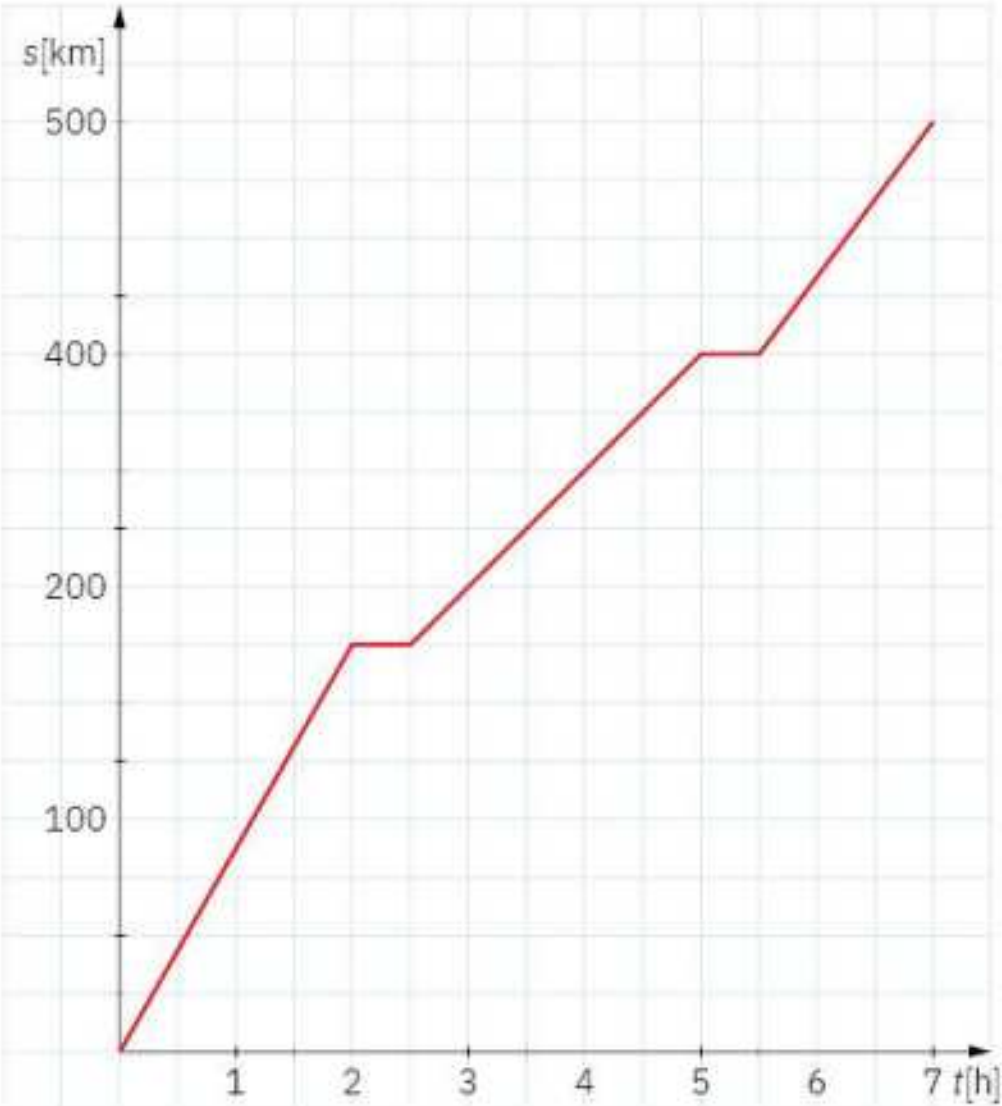
- Wyraź w kelwinach temperaturę: 28°C , 10°C , 0°C , -15°C , -27°C .
- Oblicz, jakiej temperaturze w stopniach Celsjusza odpowiada: 0 kelwinów, 150 kelwinów.
- Podaj wzór pozwalający zamienić temperaturę wyrażoną w kelwinach na temperaturę w stopniach Celsjusza.

Rozwiązanie:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a) $y = 28 + 273,15 = 299,15$, | $y = 10 + 273,15 = 283,15$, |
| $y = 0 + 273,15 = 273,15$, | $y = -15 + 273,15 = 258,15$, |
| $y = -27 + 273,15 = 246,15$ | |
- b) $0 = x + 273,15$, czyli $x = -273,15$
 $150 = x + 273,15$, czyli $x = -123,15$
- c) $t(C) = t(K) - 273,15$

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Koszt przejazdu taksówką oblicza się w sposób następujący: opłata stała wynosi 4,20 zł, a każdy rozpoczęty kilometr kosztuje 2,20 zł.
 - a) Napisz w zeszycie wzór wyrażający koszt y przejazdu x kilometrów (przy założeniu, że $x \geq 1$).
 - b) Oblicz w zeszycie, ile zapłaci klient, który przejedzie taksówką: 2,2 km, 9 km lub 14,6 km.
 - c) Ile kilometrów maksymalnie można przejechać taksówką za 13 zł?
- 2*. Motocyklista jedzie autostradą ze stałą prędkością $110 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Napisz w zeszycie wzór funkcji, która przyporządkowuje liczbie godzin jazdy t liczbę przebytych kilometrów s . Określ dziedzinę tej funkcji (przyjmij, że motocyklista może jechać maksymalnie przez 5 godzin) i narysuj jej wykres.
3. Wzór, który pozwala zamienić temperaturę wyrażoną w stopniach Celsjusza na stopnie Fahrenheita, to: $y = (x \cdot 1,8 + 32)^\circ\text{F}$, gdzie y jest temperaturą wyrażoną w $^\circ\text{F}$, a x to temperatura wyrażona w $^\circ\text{C}$.
 - a) Wyraż w stopniach Fahrenheita temperaturę: 22°C , 13°C , 0°C , -5°C , -17°C .
 - b) Oblicz w zeszycie, jakiej temperaturze w stopniach Celsjusza odpowiada: -4°F , 50°F .
 - c) Podaj wzór pozwalający zamienić temperaturę w stopniach Fahrenheita na temperaturę w stopniach Celsjusza.
4. Wykres przedstawia zależność drogi s przebytej przez wczasowicza jadącego samochodem od czasu t jego jazdy.
 - a) Ile kilometrów pokonał wczasowicz do momentu pierwszego postoju?
 - b) Ile razy kierowca zatrzymał się i jak długo w sumie trwały postoje?
 - c) Oblicz w zeszycie prędkość auta w ciągu pierwszych dwóch godzin jazdy.
 - d) Ile czasu trwała cała podróż i jaka odległość została podczas niej pokonana?
 - e) Jaka była średnia prędkość samochodu podczas całej podróży? (Wynik zaokrąglaj do $0,1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$).

5. Prędkość v rozchodzenia się dźwięku w powietrzu zależy od temperatury t powietrza i wyrażona jest wzorem: $v = (331 + 0,6 \cdot t) \frac{\text{m}}{\text{s}}$, gdzie t oznacza wartość temperatury w stopniach Celsjusza. Oblicz w zeszycie, ile wynosi prędkość dźwięku w każdej z podanych temperatur: 28°C , 10°C , 0°C , -7°C , -19°C .

W temperaturze 15°C przy normalnym ciśnieniu prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu jest równa $340,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1225 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

6. Kiedyś firmy telekomunikacyjne uzależniały wysokość opłat od liczby impulsów. Pewna firma telekomunikacyjna oferowała swoim klientom dwa warianty miesięcznych opłat za usługi telefoniczne:
I wariant – każdy impuls to koszt 57 groszy, brak opłaty stałej,
II wariant – każdy impuls kosztuje 22 grosze, opłata stała wynosi 37,8 zł.
Wykonaj polecenia w zeszycie.
a) Dla każdej z opcji napisz wzór określający wysokość miesięcznej opłaty za telefon (w złotych) w zależności od liczby wykorzystanych w miesiącu impulsów.
b) Która oferta jest korzystniejsza przy wykorzystaniu 50 impulsów, a która przy wykorzystaniu 200 impulsów?
c) Oblicz, przy jakiej liczbie impulsów klient zapłaci tyle samo w każdym z wariantów.
7. Iza ma na koncie 250 zł. Przez rok będzie wpłacała na nie 30 zł miesięcznie. Napisz w zeszycie wzór określający wysokość oszczędności rozumianych jako funkcja czasu oszczędzania. Sporządź odpowiednią tabelę. Po ilu miesiącach Iza zgromadzi więcej niż 510 zł? Jaki będzie stan jej oszczędności po pół roku, a jaki po roku?
8. W zbiorniku o pojemności 300 litrów znajdowało się 40 litrów wody. Po odkręceniu kranu w ciągu minuty objętość wody zwiększa się o 5 litrów. Napisz w zeszycie wzór określający zależność objętości wody w zbiorniku od czasu t (w minutach), kiedy kran jest odkręcony. Podaj dziedzinę tej funkcji i narysuj jej wykres. Po jakim czasie zbiornik się napelni?
9. W pełnym baku pewnego samochodu jest 40 litrów benzyny. Samochód ten zużywa 5,2 litra benzyny na 100 km. Napisz w zeszycie wzór określający ilość pozostałego w baku paliwa w zależności od przejechanej drogi s . Na przejechanie ilu kilometrów wystarczy pełny bak paliwa? Wynik zaokrąglaj do 1 km.

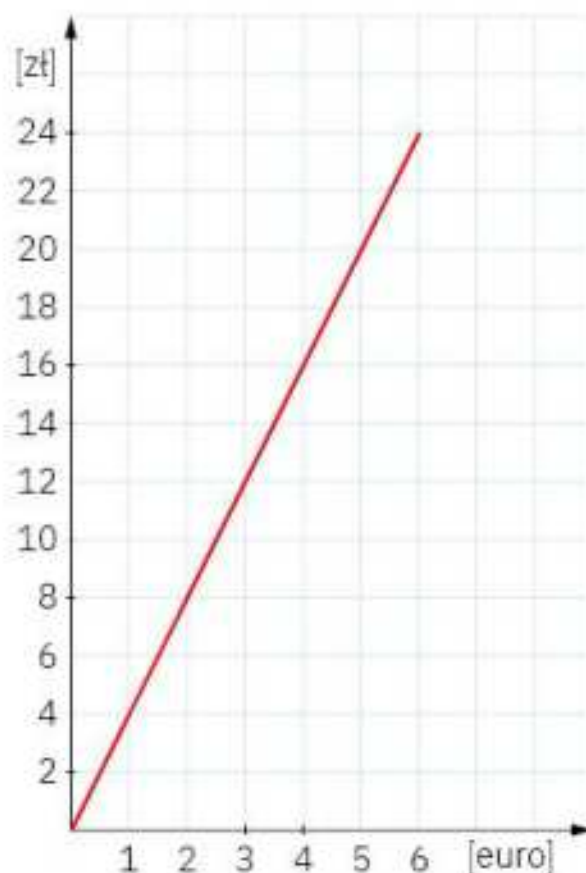
ZADANIA SPRAWDZAJĄCE



Informacja do zadań 1.—2.

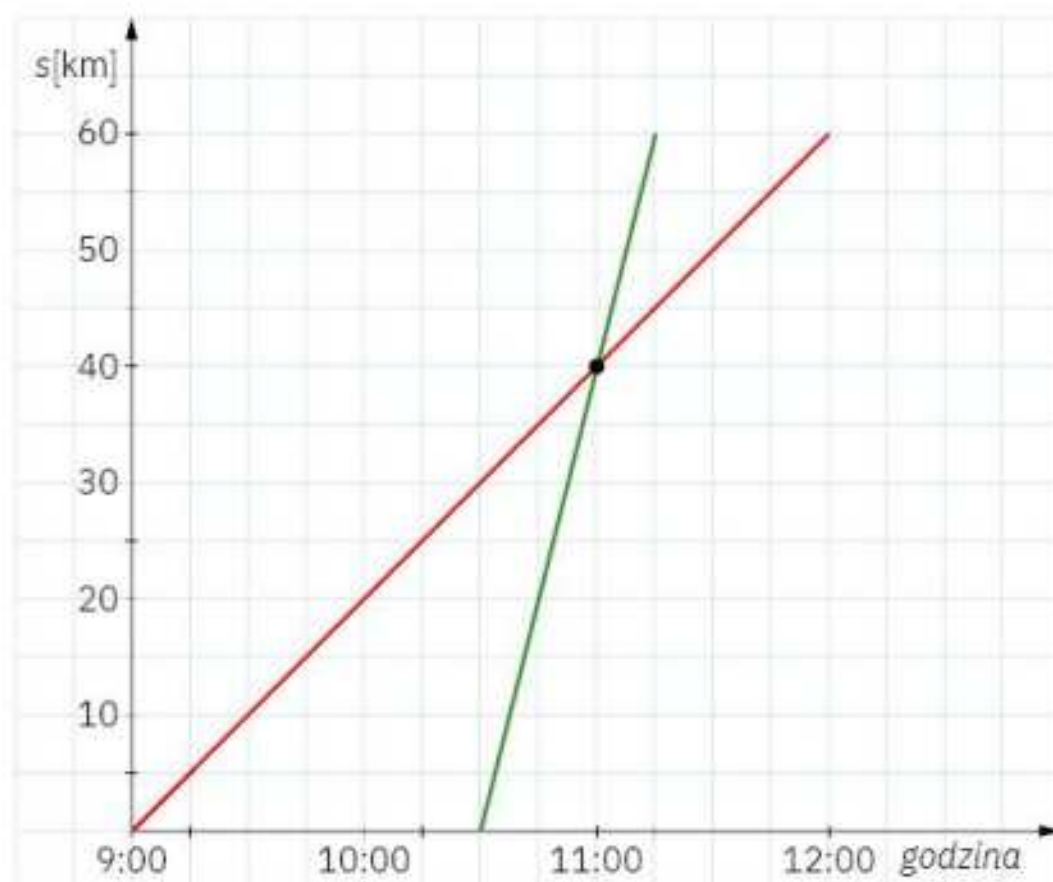
Wykres przedstawia kurs euro wobec złotówki. Przeanalizuj go, a następnie wybierz poprawne odpowiedzi do zadań.

1. Za 1 euro należy zapłacić:
A. 2 zł
B. 4 zł
C. 0,40 zł
D. 40 zł
2. Za 50 zł można kupić:
A. 12,50 euro
B. 125 euro
C. 200 euro
D. 20 euro



Informacja do zadań 3.—5.

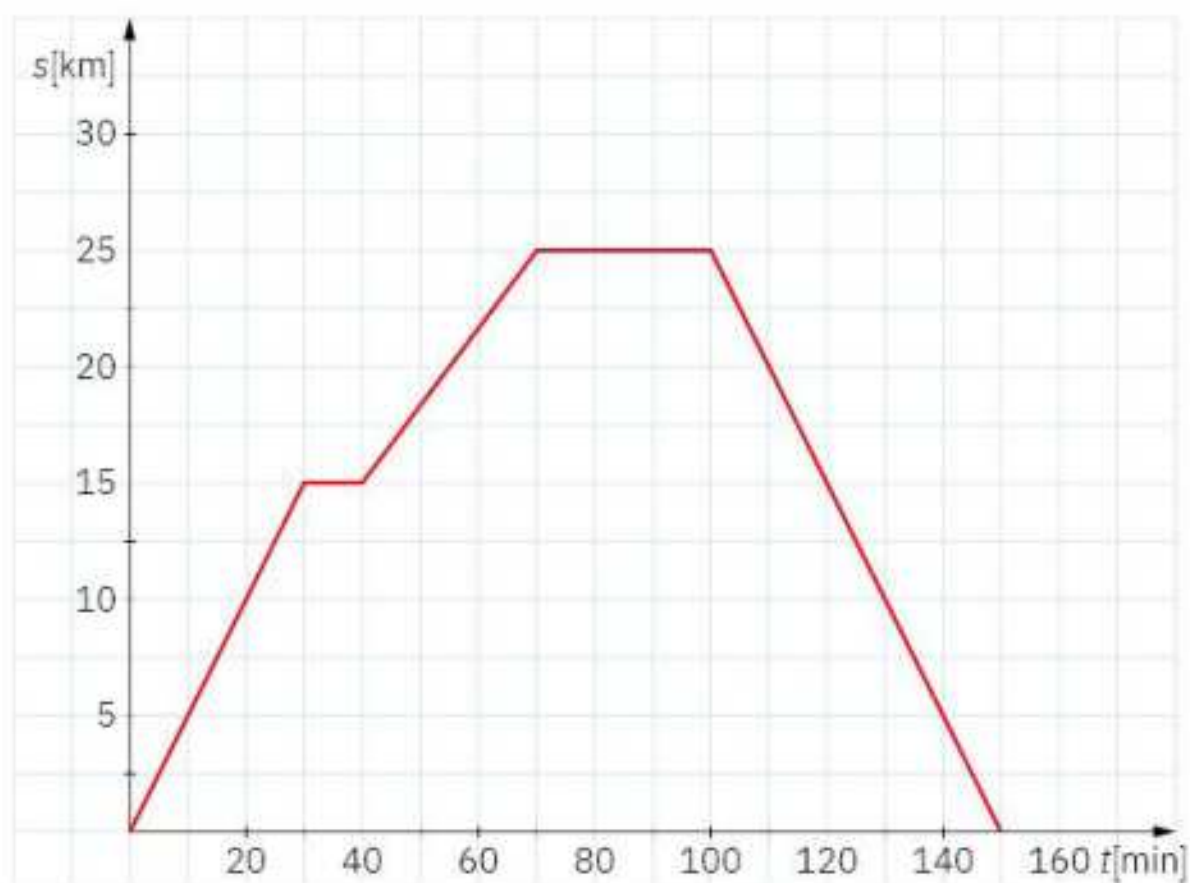
Wykres przedstawia przebieg podróży rowerzysty i motocyklisty jadących z Celestynowa do Adamowa. Obaj jechali cały czas ze stałą prędkością. Rowerzysta wyjechał o godzinie 9.00, a motocyklista – półtorej godziny później. Na podstawie wykresu wskaż poprawne odpowiedzi.



3. Motocyklista dogonił rowerzystę w odległości:
 A. 20 km od Celestynowa B. 20 km od Adamowa
 C. 50 km od Celestynowa D. 30 km od Adamowa
4. Z jaką prędkością jechał rowerzysta?
 A. $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B. $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C. $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D. $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
5. Od chwili spotkania z motocyklistą rowerzysta jechał jeszcze:
 A. 2 h B. 0,5 h C. 1 h D. 3 h

Informacja do zadań 6.—8.

Wykres przedstawia przebieg wycieczki rowerowej. Wskaż poprawne odpowiedzi.



6. Rowerzyści przejechali łącznie:
 A. 50 km B. 25 km C. 15 km D. 140 km
7. Łączny czas postojów podczas wycieczki wyniósł:
 A. 10 min B. 0,5 h C. 20 min D. 40 min
8. Przez pierwsze pół godziny rowerzyści jechali z prędkością:
 A. $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B. $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C. $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D. $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Część druga

Niektóre zależności w życiu codziennym możemy opisać za pomocą funkcji kwadratowych.

Ćwiczenie 4.

Ze szczytu wieży o wysokości 245 m strącono do fosy kamień.

a) Oblicz, jak długo spadał kamień.

b) Po ilu sekundach od momentu strącenia kamienia usłyszano jego uderzenie o wodę? Przyjmij, że prędkość rozchodzenia się dźwięku wynosi $330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Obliczenia wykonaj z dokładnością do 0,1 s.

Rozwiązanie:

a) Kamień ma pokonać drogę $s = 245 \text{ m}$.

Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym wyraża się wzorem $s = \frac{gt^2}{2}$, a przyjmując, że przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, otrzymujemy równanie:

$$245 = \frac{10t^2}{2}$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$490 = 10t^2 \quad t^2 - 49 = 0 \quad t_1 = 7, \quad t_2 = -7$$

Liczba -7 nie może być rozwiązaniem zadania, ponieważ jest ujemna, z czego wynika, że kamień spadał 7 sekund.

b) Dźwięk uderzenia kamienia o wodę musi pokonać drogę 245 m.

Wzór na drogę w ruchu jednostajnym to $s = vt$, gdzie v jest prędkością rozchodzenia się dźwięku i wynosi $330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Otrzymujemy równanie: $245 = 330 t$

$$t = \frac{245}{330} = 0,74 \approx 0,7 \text{ s.}$$

Uderzenie kamienia o wodę usłyszano po $7 + 0,7 = 7,7$ sekundach od momentu strącenia kamienia.

Ćwiczenie 5.

Konstrukcja nośna przęsła mostu ma kształt paraboli będącej wykresem funkcji o równaniu

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 5$$

Oblicz długość przęsła mostu oraz długość mostu składającego się z 5 przęseł (przyjmij, że betonowe podpory postawione są w miejscach, w których wskazana parabola przecina oś X). Wymiary podaj w metrach.



Rozwiązanie:

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 5$:

$$-\frac{1}{20}x^2 + 5 = 0 \quad | \cdot (-20)$$

$$x^2 - 100 = 0$$

$$x_1 = 10, x_2 = -10$$

Obliczamy długość przęsła mostu, to jest odległość między miejscami zerowymi funkcji:

$$10 - (-10) = 20$$

Obliczamy długość mostu składającego się z 5 przęseł:

$$5 \cdot 20 = 100$$

Odpowiedź: Długość przęsła mostu wynosi 20 m, a długość mostu składającego się z 5 przęseł to 100 m.



Ćwiczenie 6.

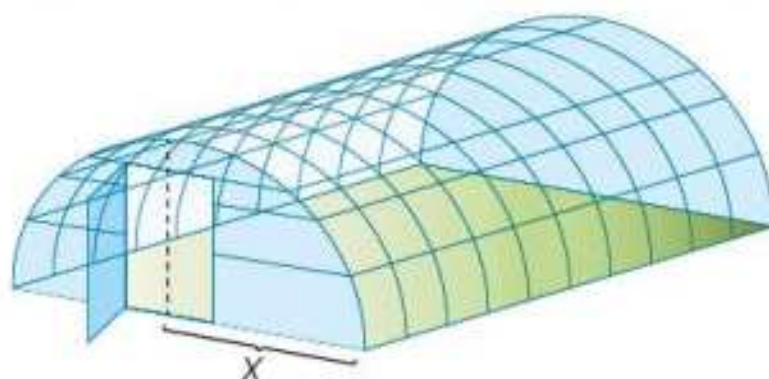
„Pomyśl sobie jakąś liczbę dodatnią. Oblicz jej kwadrat, do którego dodaj czterokrotność pomyślanej liczby. Otrzymany wynik podziel przez pomyślaną liczbę, a potem pomnóż przez 100. Następnie odejmij 400, a wynik pomnóż przez pomyślaną liczbę. Podaj mi wynik, który otrzymałeś/otrzymałaś, a ja powiem ci, jaką liczbę pomyślałeś/pomyślałaś”.

Wykonaj ćwiczenie dla dowolnej liczby. Następnie uzasadnij, dlaczego możliwe jest poprawne wskazanie liczby pomyślanej.



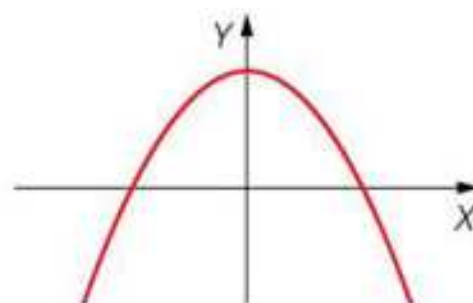
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Tor lotu piłeczki wyrzuconej w górę z boiska opisuje funkcja $f(x) = -1,125x^2 + 3x$. Oblicz w zeszycie:
 - a) maksymalną wysokość, na jaką wzniosła się piłeczka,
 - b) w jakiej odległości od miejsca wyrzucenia upadła.
2. Tunel foliowy jest rozpięty na prętach w kształcie łuku paraboli będącej wykresem funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ (przyjmij, że podpory, stanowiące stelaż tunelu, ustawione są w miejscach, w których wskazana parabola przecina oś X). Wymiary podaj w metrach.

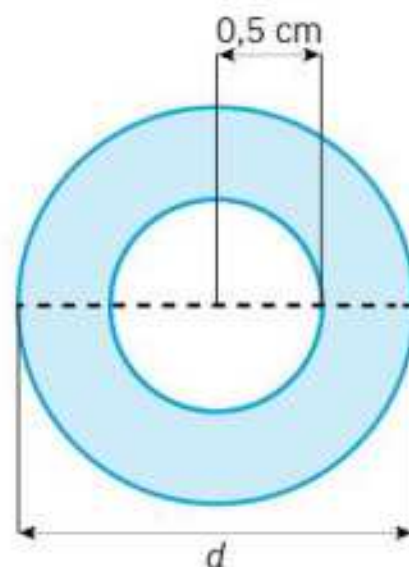


Oblicz w zeszycie:

- a) maksymalną wysokość tunelu,
- b) pole powierzchni podłogi tunelu, który ma długość 10 m.



- 3. Spośród wszystkich możliwych prostokątów o obwodzie 24 cm wskaż ten, który ma największe pole.
- 4. Liczbę 100 przedstaw w postaci różnicy dwóch liczb tak, aby suma ich kwadratów była możliwie najmniejsza.
- 5. Obwód prostokąta jest równy 72 cm. Jakie długości powinny mieć jego boki, aby pole kwadratu zbudowanego na przekątnej tego prostokąta było możliwie najmniejsze?
- 6. Suma długości przekątnych rombu wynosi 14 cm. Oblicz w zeszycie długości przekątnych, dla których pole tego rombu jest największe.
- 7. Siatką ogradzano z trzech stron prostokątne place, graniczące z murem z czwartej strony. Jakie największe pole może mieć taki plac, jeśli na ogrodzenie każdego z nich zużywano siatkę o długości 100 m? Oblicz w zeszycie wymiary tego placu.
- 8. Pole powierzchni pierścienia, będącego projektem podkładki pod śrubę (zob. ilustracja), wynosi $\pi \text{ cm}^2$. Oblicz w zeszycie zewnętrzną średnicę tego pierścienia.
- 9. Długości boków trójkąta prostokątnego to kolejne liczby naturalne. Wyznacz długości boków tego trójkąta.
- 10. Arkusz blachy ma kształt trapezu, w którym wysokość i krótsza podstawa są równe. Pole tego trapezu wynosi 35 dm^2 , a długość dłuższej podstawy jest o 4 dm większa od długości krótszej podstawy. Oblicz w zeszycie długości podstaw trapezu.
- 11. Kamień rzucony pionowo do góry z prędkością v po t sekundach osiąga wysokość s zależną od czasu t według wzoru $s = vt - \frac{gt^2}{2}$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim (przyjmij, że $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).
 - a) Oblicz w zeszycie, po ilu sekundach kamień rzucony z prędkością $60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ osiągnie wysokość 100 m.
 - b) Oblicz w zeszycie, po ilu sekundach kamień rzucony z prędkością $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ spadnie na ziemię.



12. „Pomyśl sobie jakąś liczbę dodatnią. Oblicz jej kwadrat i dodaj do niego dwukrotność pomyślanej liczby. Do otrzymanego wyniku dodaj 1, a następnie z otrzymanej sumy wyciągnij pierwiastek kwadratowy. Podaj mi wynik, który otrzymałeś/otrzymałaś, a ja powiem ci, jaką liczbę pomyślałeś/pomyślałaś”.
- Wykonaj obliczenia dla dowolnej liczby. Następnie uzasadnij, dlaczego możliwe jest poprawne wskazanie liczby pomyślanej.



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Liczbę 30 rozłożono na takie dwa składniki, których suma kwadratów jest najmniejsza. Te składniki to:
A. 15 i 15 B. 25 i 5 C. 20 i 10 D. 11 i 19
- Jeśli suma dwóch liczb wynosi 6, to najmniejsza wartość sumy kwadratów tych liczb wynosi:
A. 3 B. 6 C. 9 D. 18
- Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych wynosi 110. Najmniejsza z tych liczb to:
A. -7 B. 0 C. 5 D. 35
- Długość krótszego boku prostokąta, którego obwód wynosi 20 cm, a pole 24 cm^2 , to:
A. 4 cm B. 5 cm C. 6 cm D. 8 cm
- Marcin ma kawałek drutu o długości 1 m. Chce wykonać z niego szkieletowy model prostopadłościanu o możliwie największej objętości. Chłopiec przyjął, że długość jednej z krawędzi wyniesie 5 cm. Pozostałe wymiary tego prostopadłościanu to:
A. 5 cm i 15 cm B. 10 cm i 10 cm C. 1 cm i 19 cm D. 4 cm i 16 cm

Wskazówka: Objętość prostopadłościanu o krawędziach długości a , b , c wyraża się wzorem $V = abc$.

- Suma pól powierzchni dwóch kół, których promienie różnią się od siebie o 50 cm, wynosi $233\pi \text{ dm}^2$. Długość promienia większego koła jest równa:
A. 8 dm B. 13 dm C. 1 m D. 5 dm

4.13. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$

W rajdzie charytatywnym wzięli udział piesi turyści, grupa rowerowa, zespół motocyklistów oraz drużyna samochodowa. Każda z grup miała do pokonania trasę o długości 20 km. Piesi maszerowali z szybkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, rowerzyści jechali z szybkością $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, motocykliści $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a kierowcy samochodów $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Obliczenia przedstawiono w tabeli.

x – średnia prędkość (w kilometrach na godzinę)

y – czas podróży (w godzinach)

$x \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$	4	10	40	60
$y [\text{h}]$	5	2	0,5	$\frac{1}{3}$

Analizując tabelę, można zauważyć, że prędkość rośnie tyle razy, ile maleje czas. Czas potrzebny na przebycie trasy jest więc odwrotnie proporcjonalny do prędkości.

O dwóch wielkościach dodatnich albo ujemnych mówimy, że są odwrotnie proporcjonalne, jeśli wraz ze wzrostem jednej druga maleje tyle samo razy.

Związek między dwiema wielkościami, których iloczyn jest stały, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną** i zapisujemy w postaci $x \cdot y = a$, gdzie a jest liczbą różną od zera, zwaną współczynnikiem proporcjonalności.

Ćwiczenie 1.

Sprawdź, czy wielkości x i y podane w tabeli są odwrotnie proporcjonalne. Jeżeli tak, określ współczynnik proporcjonalności.

a)

x	0,1	0,25	0,5	1	2	2,5
y	100	40	20	10	5	4

Rozwiązanie:

Aby wielkości x i y były odwrotnie proporcjonalne, ich iloczyn $x \cdot y$ musi być stały.

$$0,1 \cdot 100 = 10 \quad 5 \cdot 20 = 10 \quad 2 \cdot 5 = 10$$

$$0,25 \cdot 40 = 10 \quad 1 \cdot 10 = 10 \quad 2,5 \cdot 4 = 10$$

Odpowiedź: Iloczyn liczb x i y jest stały (w każdym wypadku wynosi tyle samo), więc podane wielkości są odwrotnie proporcjonalne. Współczynnik proporcjonalności dla podanych wielkości to $a = 10$.

b)

x	-5	-4	-2,5	-0,4	0,2	0,5
y	-2	-2,5	-4	-25	50	20

c)

x	2	3	5	7,5	9	15
y	15	10	6	4	3	2

Zależność pomiędzy wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi zapisaną w postaci funkcji można wyrazić równaniem $y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$.

Ćwiczenie 2.

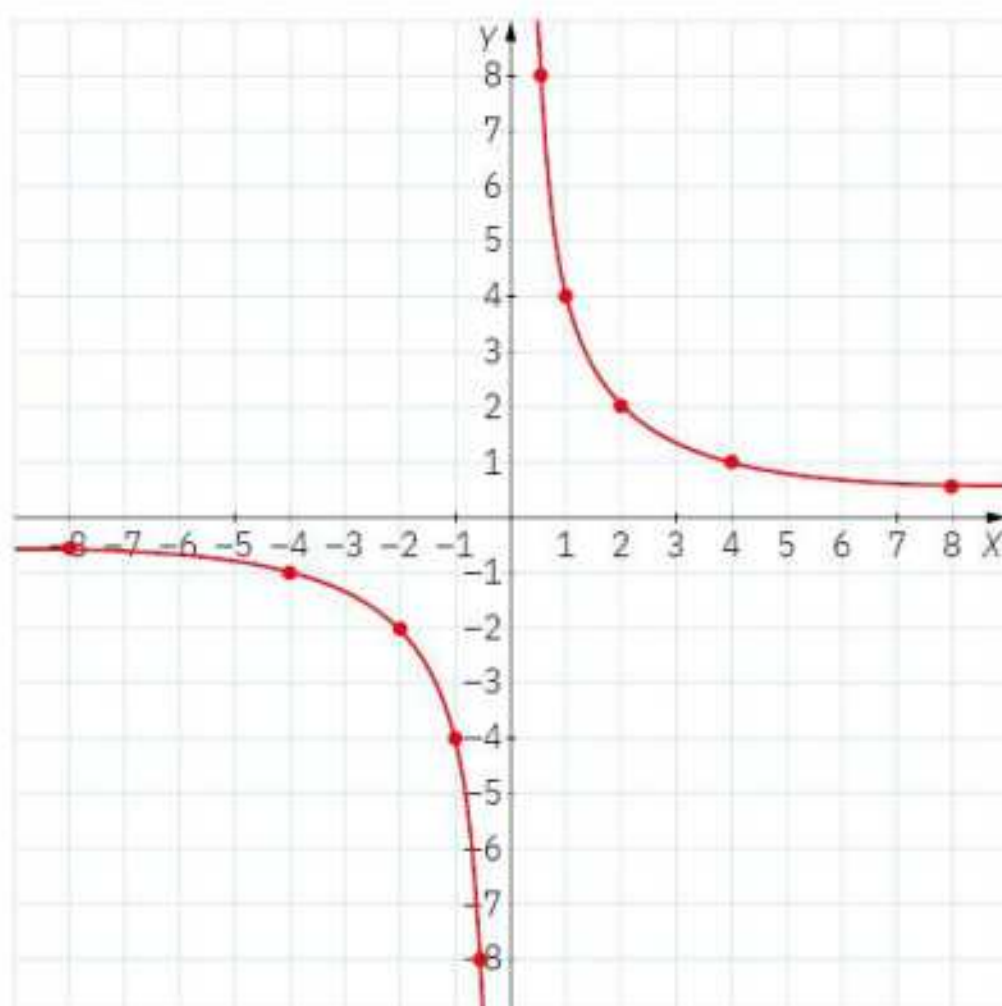
W układzie współrzędnych zaznacz wszystkie pary liczb (x, y) spełniające podane równania.

a) $x \cdot y = 4$

Przekształcamy równanie do postaci $y = \frac{4}{x}$, $x \neq 0$.

Sporządzamy częściową tabelę funkcji dla wybranych argumentów (ponieważ jest ich nieskończenie wiele), a następnie zaznaczamy odpowiednie punkty w układzie współrzędnych i łączymy je krzywą (jak na rysunku), szkicując wykres danej funkcji.

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$



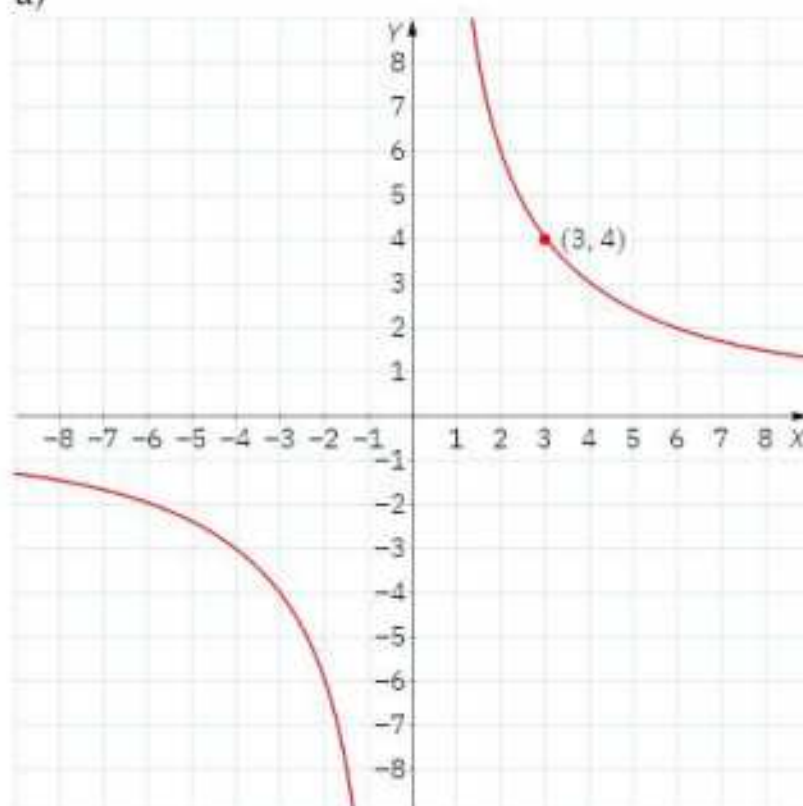
b) $x \cdot y = -4$

Wykresem funkcji $y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$ jest krzywa zwana hiperbolą. Każdą z części hiperboli nazywamy jej gałęzią.

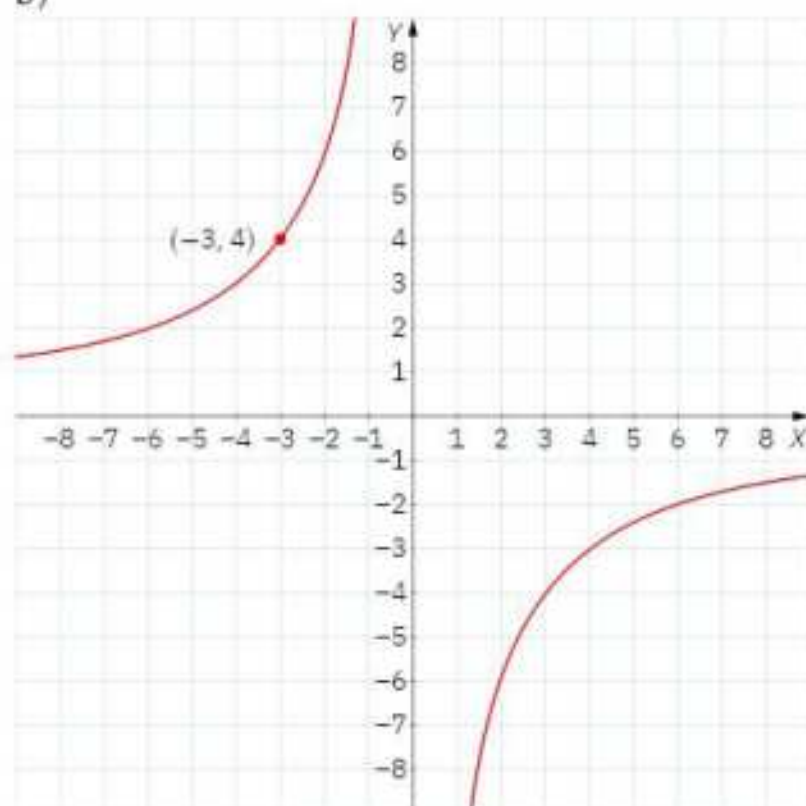
Ćwiczenie 3.

Na podstawie podanego wykresu proporcjonalności odwrotnej ustal jej wzór. Omów własności tej funkcji.

a)



b)



Rozwiązanie:

a) Do wykresu proporcjonalności odwrotnej należy punkt o współrzędnych $(3, 4)$, czyli $x = 3$, $y = 4$.

Współczynnik proporcjonalności dla podanych wielkości to $a = 3 \cdot 4 = 12$.

Daną proporcjonalność odwrotną możemy opisać równaniem $y = \frac{12}{x}$.

Własności funkcji $y = \frac{12}{x}$

Dziedzina funkcji: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Zbiór wartości funkcji: $ZW = \mathbb{R} - \{0\}$

Miejsca zerowe: funkcja nie ma miejsc zerowych

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: $x \in (0, +\infty)$

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: $x \in (-\infty, 0)$

Przedziały monotoniczności funkcji: funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

Największa (najmniejsza) wartość funkcji: funkcja nie osiąga ani największej, ani najmniejszej wartości

Punkty przecięcia z osią X : wykres funkcji nie przecina osi X

Punkty przecięcia z osią Y : wykres funkcji nie przecina osi Y



b) Do wykresu proporcjonalności odwrotnej należy punkt $(-3, 4)$.

Współczynnik proporcjonalności dla podanych wielkości: ...

Daną proporcjonalność odwrotną można opisać wzorem: ...

Własności funkcji ...

Dziedzina funkcji: ...

Zbiór wartości funkcji: ...

Miejsca zerowe: ...

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: ...

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: ...

Przedziały monotoniczności funkcji: ...

Największa (najmniejsza) wartość funkcji: ...

Punkty przecięcia z osią X : ...

Punkty przecięcia z osią Y : ...

Gałęzie hiperboli (wykresu proporcjonalności odwrotnej) znajdują się w I i III ćwiartce układu współrzędnych, gdy $a > 0$, oraz w II i IV ćwiartce układu współrzędnych, gdy $a < 0$.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Sprawdź, czy wielkości podane w tabeli są odwrotnie proporcjonalne. Jeżeli tak, to określ ich współczynnik proporcjonalności.

a)

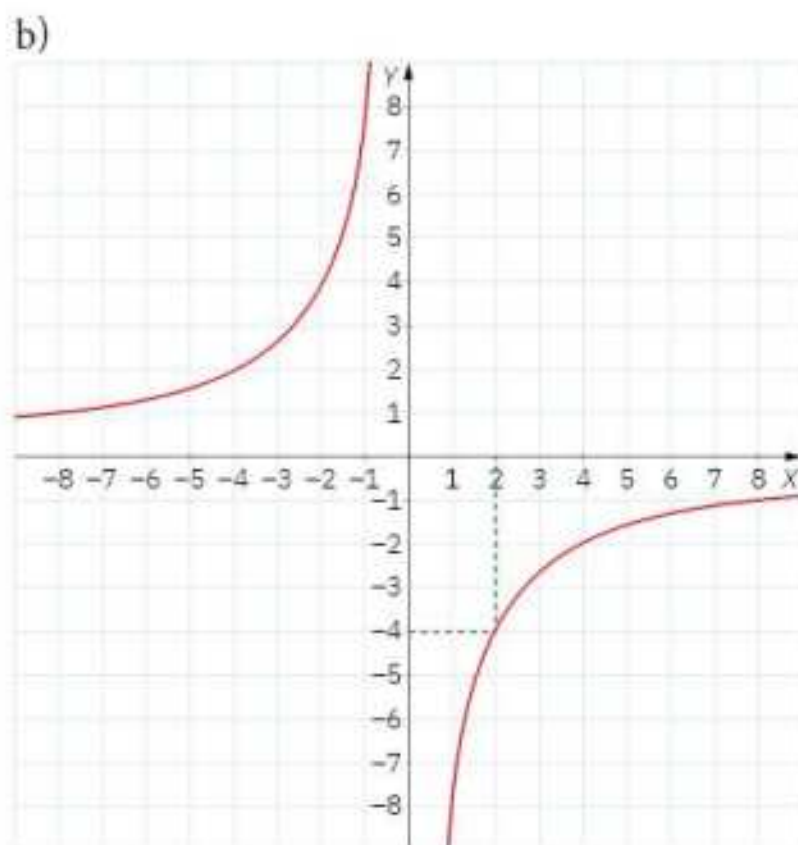
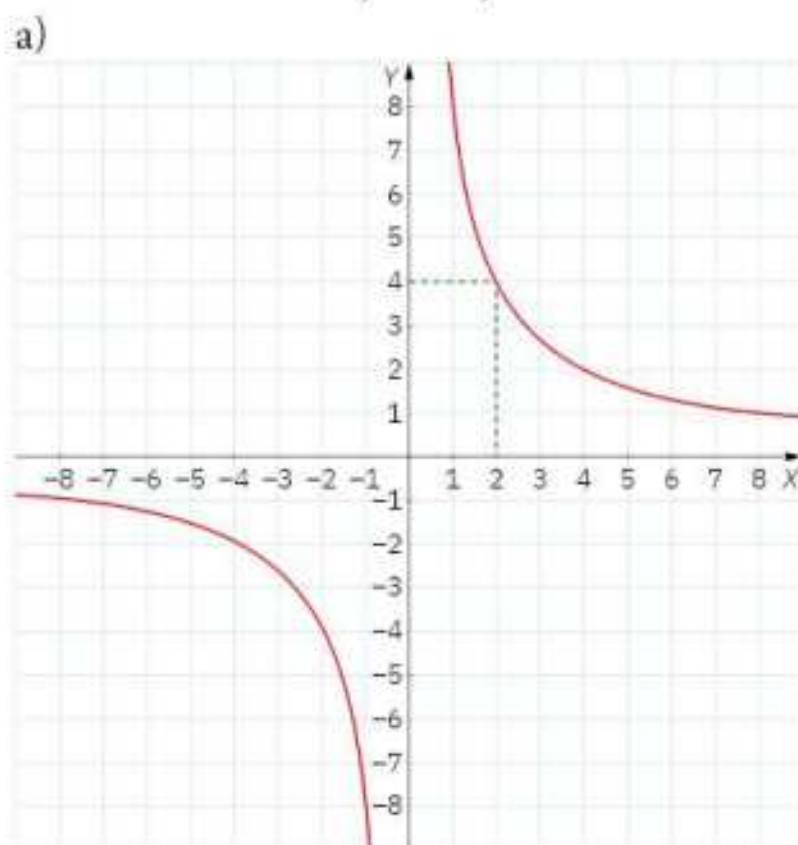
x	0,1	0,2	0,4	0,5	1,25
y	10	20	40	50	1,6

b)

x	-3	-2	-1	1,2	1,5	2
y	-2	-3	-6	5	4	3

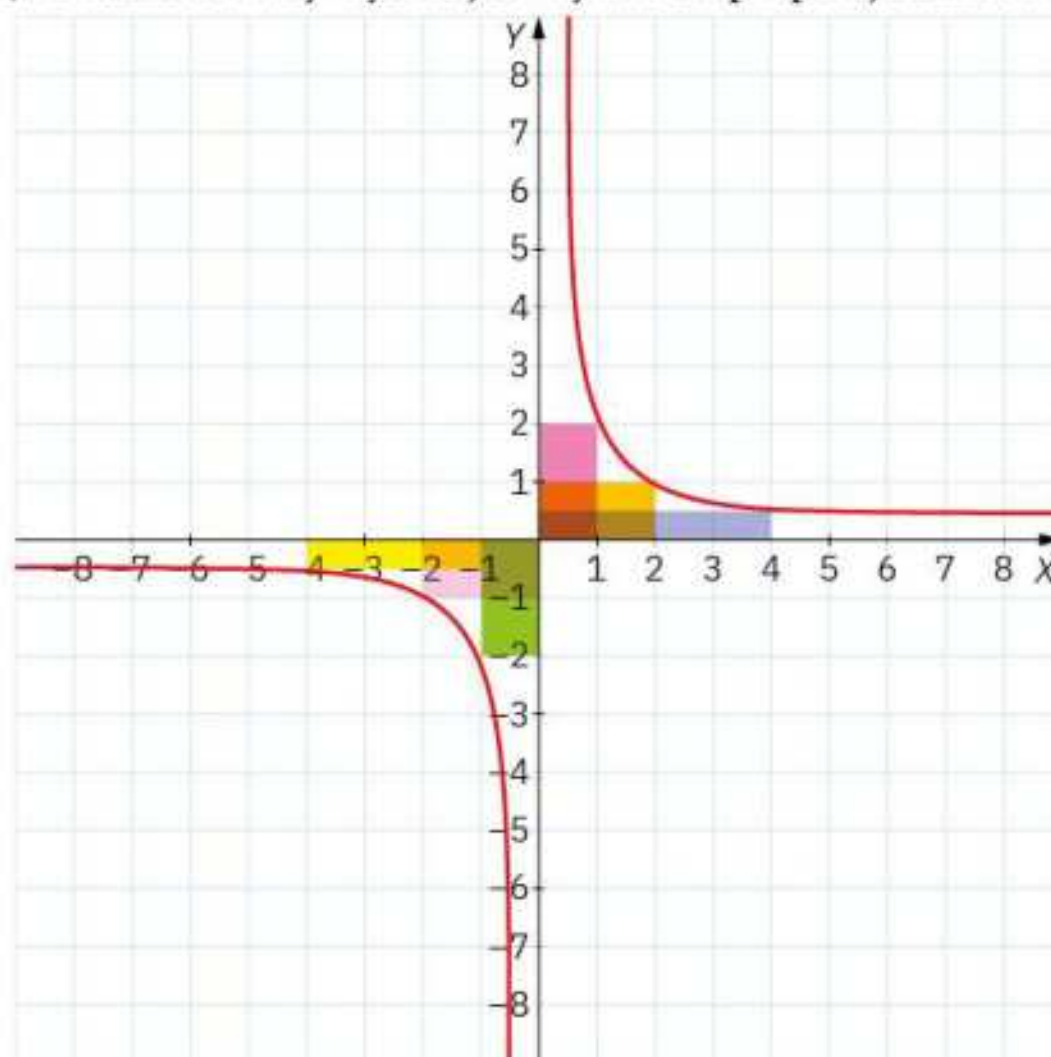
2. Sok wiśniowy rozlano do 240 butelek o pojemności 0,5 litra każda.
 - a) Ile butelek o pojemności 0,25 l potrzeba, aby pomieścić tę samą ilość soku wiśniowego?
 - b) Jaka powinna być pojemność butelek, żeby tą samą ilością soku można było napelnić 320 butelek?
3. Samochód osobowy jadący ze średnią prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokonuje pewną drogę w czasie 2 godz. 15 min. W jakim czasie pokona tę trasę motorowerzysta jadący ze średnią prędkością $40,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Z jaką prędkością należy jechać, aby tę samą drogę przebyć w 3 godziny?

4. Wiadomo, że sześciu robotników może wykonać pewną pracę w ciągu 12 dni. Ile czasu zabrałoby wykonanie tej pracy trzem robotnikom? Ilu robotników należałoby zatrudnić, gdyby praca miała być wykonana w ciągu 8 dni? Zakładamy, że dzienna wydajność każdego robotnika jest taka sama.
5. Do wykresu funkcji należą punkty o współrzędnych: $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(12, 1)$. Ustal, czy należą one do wykresu proporcjonalności odwrotnej.
6. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, a współczynnik proporcjonalności wynosi 6. Podaj wartość argumentu x , jeśli wartość y jest równa 2.
7. Narysuj w zeszycie wykres danej proporcjonalności odwrotnej i wypisz jej własności.
- a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{-3}{x}$
8. Na podstawie podanego wykresu proporcjonalności odwrotnej ustal jej wzór. Omów własności tej funkcji.



9. Narysuj w zeszycie wykres funkcji $y = \frac{-2}{x}$.
- a) Określ dziedzinę tej funkcji.
- b) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?
- c) Dla jakiego argumentu wartość funkcji wynosi 8?
10. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$, a następnie odczytaj z niego:
- a) wartość funkcji f dla argumentu $x = -4$,
- b) dla jakiego argumentu x funkcja f przyjmuje wartość 10,
- c) jaka jest najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$.

11. Na rysunku przedstawiono różne prostokąty. Co możesz powiedzieć o ich polach, wiedząc, że naszkicowany wykres jest wykresem proporcjonalności odwrotnej?



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

- Wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi nie są:
 - Ilość towaru zakupionego za określoną kwotę w stosunku do ceny tego towaru.
 - Liczba osób na przyjęciu i wielkość kawałka tortu przypadającego na każdą osobę.
 - Wzrost człowieka i jego waga.
 - Grubość książki i liczba jednakowych książek, które można postawić na półce.
- Tabela ma przedstawiać proporcjonalność odwrotną. Który podpunkt zawiera poprawne uzupełnienie wartości tabeli?

x	1	x_1	5	x_2
y	y_1	5	y_2	2

- $x_1 = 5, x_2 = 2, y_1 = 1, y_2 = 5$
- $x_1 = 2,5, x_2 = 1, y_1 = 2, y_2 = 10$
- $x_1 = 4, x_2 = 10, y_1 = 20, y_2 = 4$
- $x_1 = 10, x_2 = 4, y_1 = 0,5, y_2 = 2,5$

3. Jeśli pewną kwotę pieniędzy rozdzielimy równo pomiędzy 4 osoby, to każda z nich dostanie po 60 zł. Jeśli tę samą kwotę podzielimy równo pomiędzy 3 osoby, to każda z nich otrzyma:
- A. 70 zł B. 80 zł C. 90 zł D. 100 zł
4. Zapas żywności w pensjonacie dla 20 osób wystarczy na 15 dni. Na ile dni wystarczyłoby zapasów, jeśli liczba wczasowiczów wzrosłaby o 10 osób? (Zakładamy, że racje żywieniowe pozostaną takie same.)
- A. 10 B. 20 C. 15 D. 30
5. Rowerzysta jadący z prędkością $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokonał pewną trasę w półtorej godziny. W jakim czasie przejedzie ten odcinek motocyklista poruszający się z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- A. 0,5 h
B. 36 minut
C. 40 minut
D. w czasie trzy razy krótszym niż rowerzysta
6. Wzór proporcjonalności odwrotnej, której współczynnik proporcjonalności jest równy 8, ma postać:
- A. $y = 8x$ B. $y = 8 : x$ C. $y = \frac{x}{8}$ D. $x = 8y$
7. Do wykresu funkcji $y = \frac{5}{x}$ nie należy punkt o współrzędnych:
- A. $(-2; -2,5)$ B. $\left(-\frac{1}{2}; -10\right)$ C. $\left(0,1; \frac{1}{5}\right)$ D. $(0,25; 20)$
8. Do wykresu pewnej funkcji należy punkt o współrzędnych $(-6, -2)$. Współczynnik proporcjonalności odwrotnej wynosi:
- A. 3 B. 12 C. -12 D. -3

4.14. Zadania utrwalające

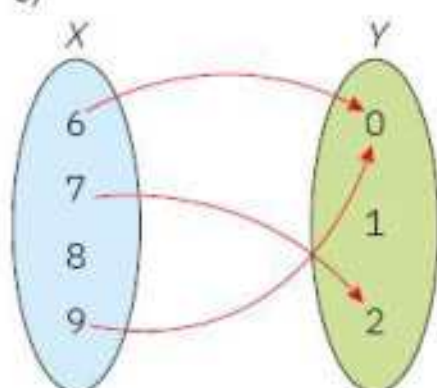
1. Wskaż przyporządkowanie, które nie jest funkcją. Uzasadnij swój wybór.

a)

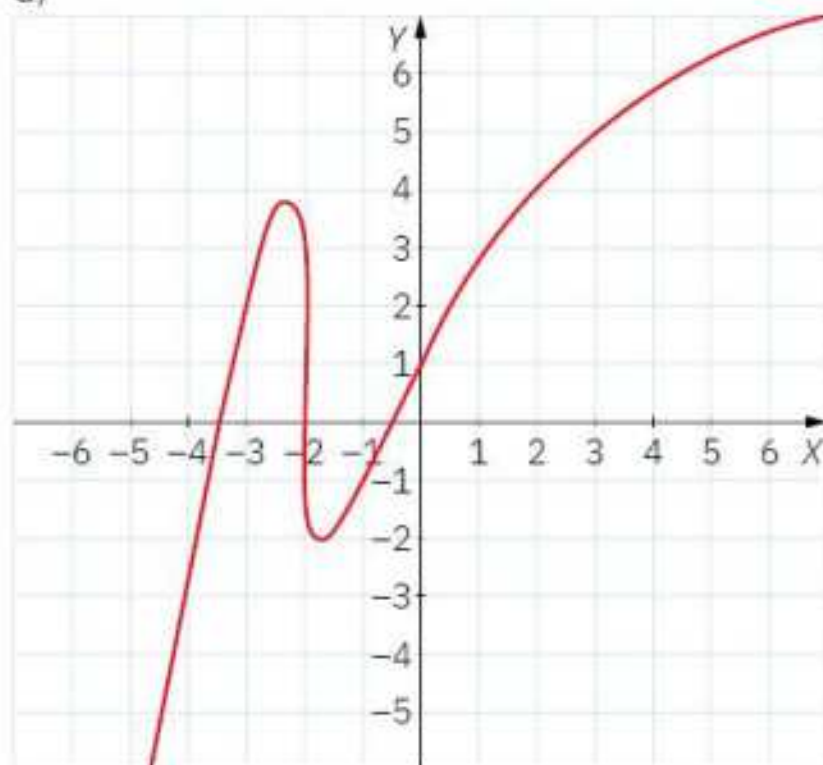
x	-4	-2	0	2	4
y	4	2	0	2	4

- b) Każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowano liczbę większą o trzy.

c)



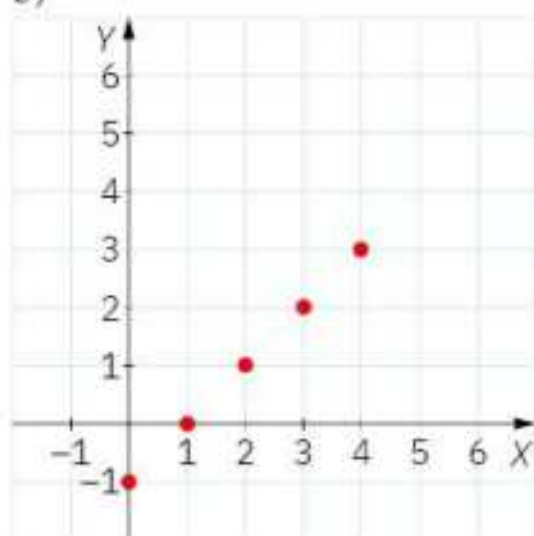
d)



2. Pewną funkcję zamierzano opisać na cztery różne sposoby: słownie, za pomocą wykresu, tabeli oraz wzoru. Wśród podanych wskaż opis, który przedstawia inną funkcję niż pozostałe.

- a) Każdej liczbie naturalnej dodatniej mniejszej od 6 przyporządkowano liczbę mniejszą od niej o jeden.

b)



c)

x	1	2	3	4	5
y	0	1	2	3	4

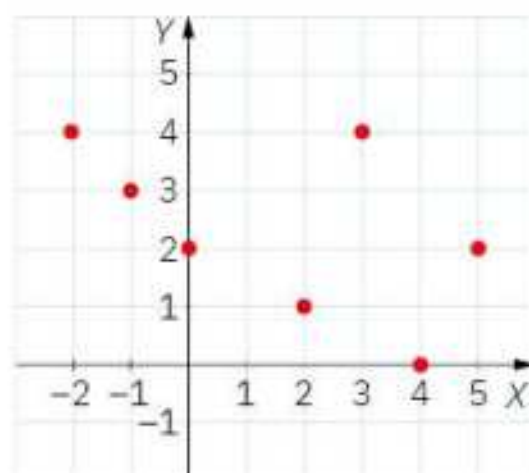
d) $y = x - 1, x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3. Określ dziedzinę podanej funkcji.

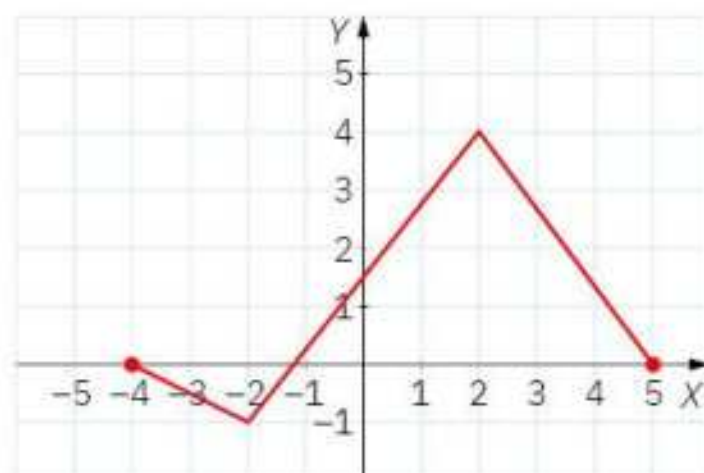
a) $f(x) = \frac{x^2}{3}$ b) $f(x) = \frac{2}{x+2}$ c) $f(x) = \sqrt{4x-4}$

4. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji. Wykonaj polecenia w zeszycie.

- a) Sporządź tabelę do tej funkcji.
- b) Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji.
- c) Czy punkt $(-1, 3)$ należy do wykresu tej funkcji?
- d) Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 4?
- e) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 2?

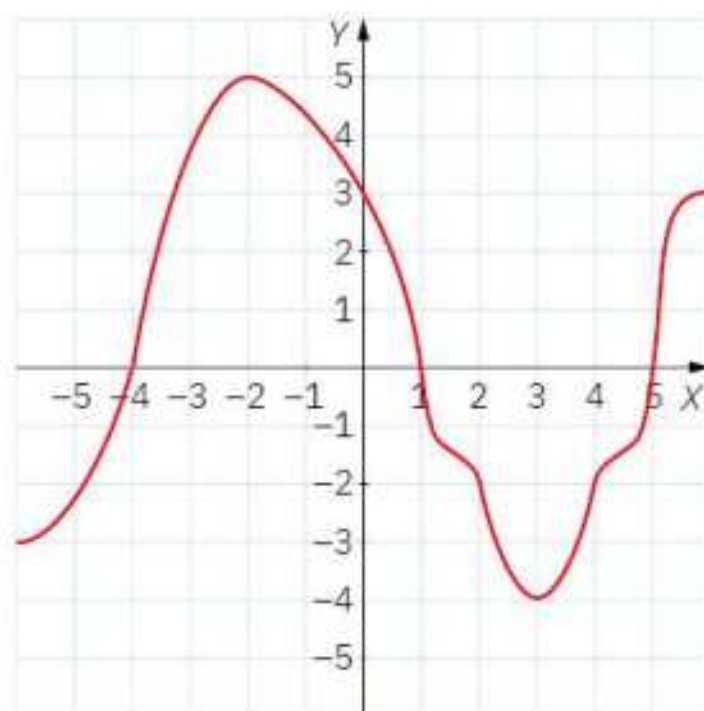


5. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji. Podaj jej wartość najmniejszą i największą oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości.



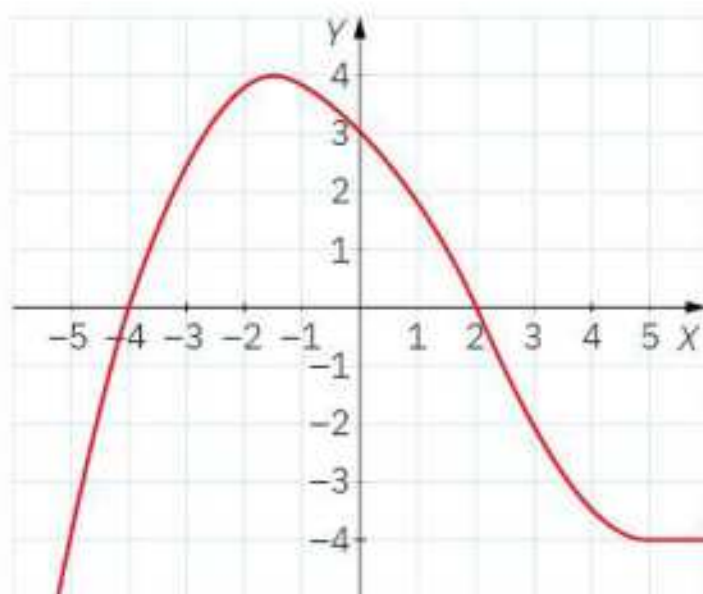
6. Z wykresu funkcji odczytaj:

- a) dziedzinę funkcji,
- b) zbiór wartości,
- c) miejsca zerowe,
- d) przedziały argumentów, w których funkcja jest:
 - rosnąca,
 - malejąca,
 - stała,
- e) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- f) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.



- 7.** Pewna funkcja jest określona wzorem $f(x) = \frac{3}{2}x - 3$.
- Oblicz w zeszycie współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych i narysuj wykres tej funkcji.
 - Podaj wartość funkcji f dla argumentu $-\frac{2}{3}$.
 - Dla jakiego argumentu wartość funkcji f jest równa 9?
 - Określ, czy funkcja f jest rosnąca czy malejąca.
 - Podaj przedział, w którym funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.
- 8.** Napisz w zeszycie wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $A = (2, 2)$ i jest:
- prostą równoległą,
 - prostą prostopadłą
- do prostej będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x + 5$.
- 9.** Narysuj w zeszycie w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = 2x + 3$ oraz $g(x) = -x - 1$.
- Wyznacz miejsca zerowe obu tych funkcji.
 - Sprawdź, dla jakiego argumentu wartości obu funkcji są równe.
- 10.** Funkcja jest określona wzorem $f(x) = -x - 3$.
- Podaj współrzędne przecięcia wykresu tej funkcji z osią Y .
 - Oblicz w zeszycie miejsce zerowe funkcji.
 - Sprawdź, czy punkt $(2, -5)$ należy do wykresu tej funkcji.
 - Określ jej monotoniczność.
- 11.** Dane są funkcje: $f(x) = \frac{x-5}{2}$, $g(x) = 2x + 5$ oraz $h(x) = -0,5x + 1$. Ich wykresami są proste. Wskaż wśród nich tę, która jest:
- równoległa do prostej będącej wykresem funkcji $y = -\frac{x}{2} + 5$,
 - prostopadła do prostej będącej wykresem funkcji $y = -\frac{x}{2} + 1$.
- 12.** Wśród danych funkcji: $f(x) = -3x - 3$, $g(x) = 3x - 3$ oraz $h(x) = 3 - 3x$, wskaż tę, której wykres przechodzi przez punkty: $A = (2, 3)$ oraz $B = (1, 0)$.
- 13.** Dane są funkcje: $h(x) = 2x - 4$, $f(x) = 1 - x^2$ oraz $g(x) = -x - 1$. Sprawdź, do wykresu której z tych funkcji nie należy punkt $K = (1, -2)$.

- 14.** Odczytaj z wykresu funkcji współrzędne punktów przecięcia się tego wykresu z osią X i osią Y .

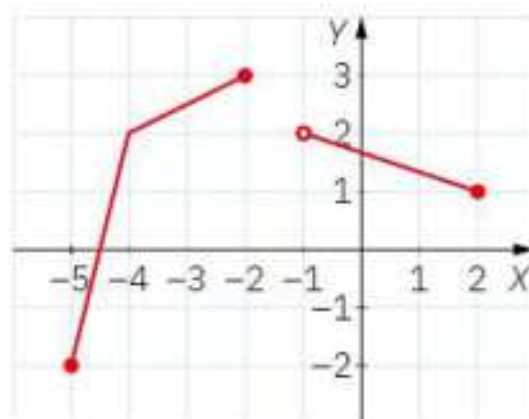


- 15.** Wykres funkcji $y = f(x)$ przesunięto o pewien wektor. Zapisz w zeszycie współrzędne tego wektora, jeśli otrzymany po przesunięciu wykres to wykres funkcji określonej wzorem:

a) $y = f(x + 4)$ b) $y = f(x - 7)$ c) $y = f(x) - 4$ d) $y = f(x) + 3$

- 16.** Wykres funkcji $y = f(x)$ przesunąć o wektor:

- a) $[-3, 0]$
 b) $[0, -2]$
 c) $[0, 3]$
 d) $[5, 0]$



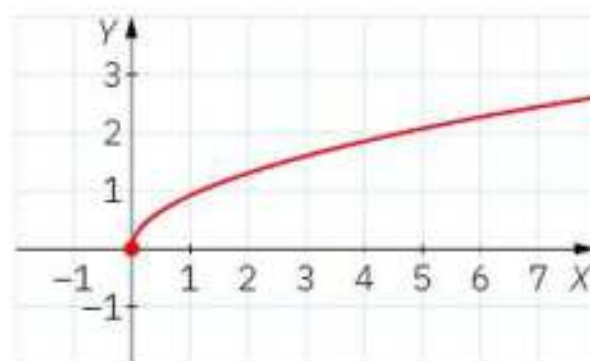
Wykonaj zadanie w zeszycie.

- 17.** Zapisz w zeszycie wzór funkcji, którą otrzymamy, przesuając wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor:

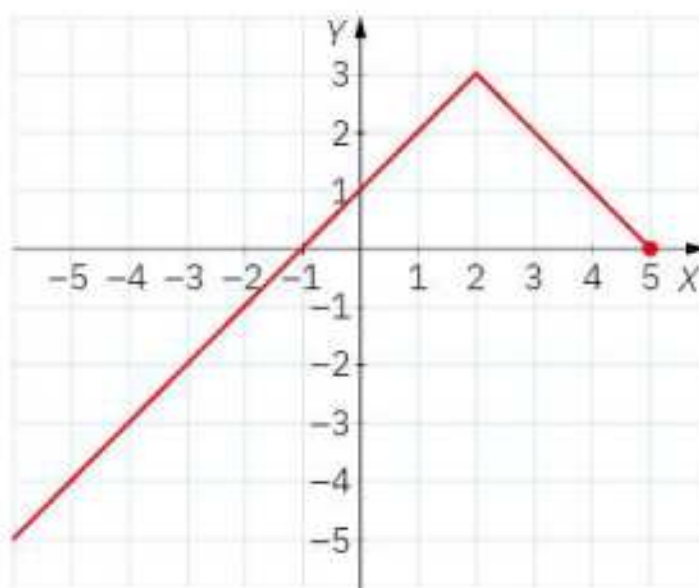
a) $[4, 0]$ b) $[-8, 0]$ c) $[0, -6]$ d) $[0, 6]$

- 18.** Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicuj w zeszycie wykresy funkcji:

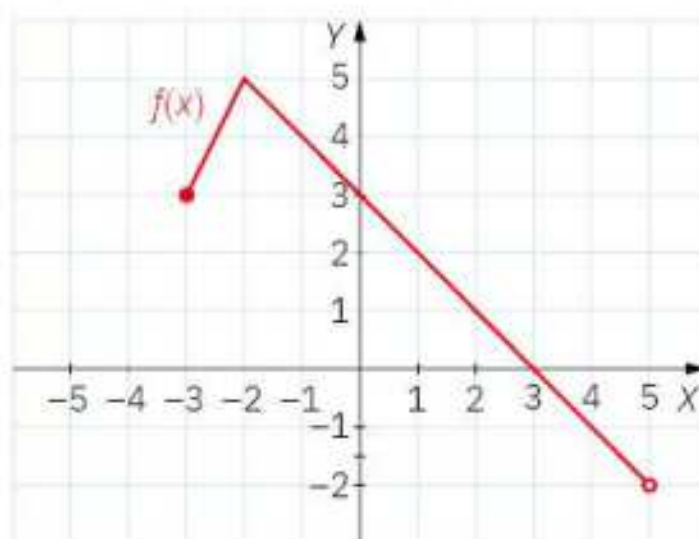
- a) $y = f(x - 3)$
 b) $y = f(x + 2)$
 c) $y = f(x) + 4$
 d) $y = f(x) - 3$



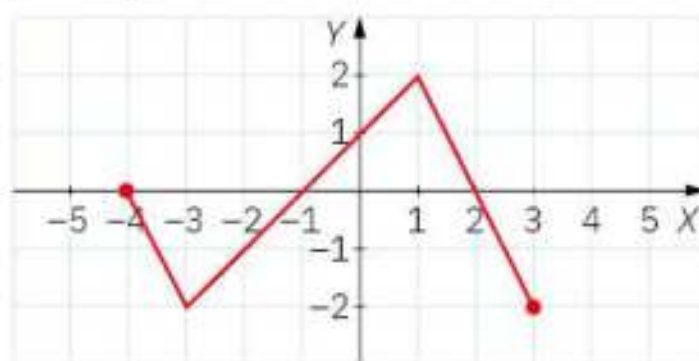
- 19.** Narysuj w zeszycie wykres funkcji symetryczny do danego na rysunku względem:
 a) osi Y ,
 b) osi X .



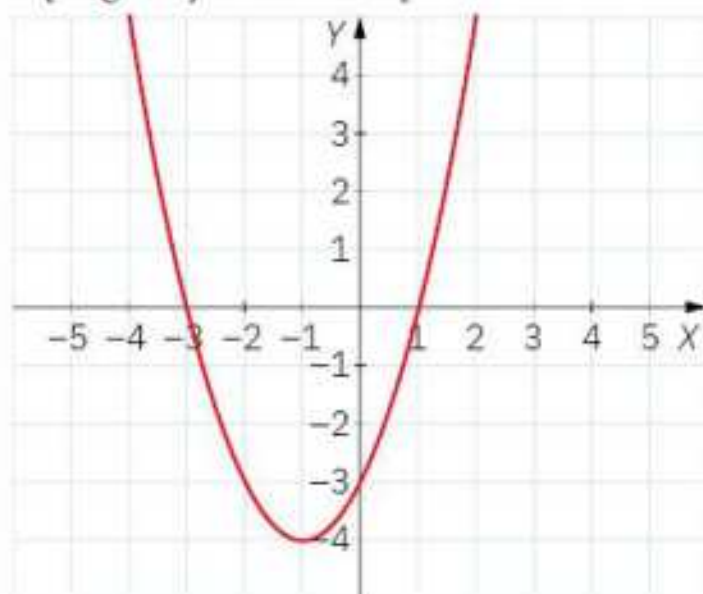
- 20.** Wykres danej funkcji przekształć w zeszycie przez symetrię względem osi X , a następnie otrzymany wykres przekształć względem osi Y .



- 21.** Wykres funkcji $y = f(x)$ przekształć w zeszycie w następujący sposób:
 a) przesunąć o wektor $[0, 2]$, a następnie otrzymany wykres przekształcić przez symetrię względem osi Y .
 b) przekształcić przez symetrię względem osi X , a następnie otrzymany wykres przesunąć o wektor $[-2, 0]$.



22. Współczynniki funkcji kwadratowej $f(x) = -2x + 6 + 3x^2$ wynoszą:
A. $a = 3, b = 2, c = 6$
B. $a = 3, b = -2, c = 6$
C. $a = 6, b = 3, c = -2$
D. $a = -2, b = 6, c = 3$
23. Narysuj w zeszycie wykres funkcji $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
24. Odczytaj z wykresu funkcji kwadratowej jej miejsca zerowe oraz współrzędne punktu przecięcia się tego wykresu z osią Y.



25. Zapisz w postaci kanonicznej wzory podanych funkcji kwadratowych.
a) $f(x) = x^2 + 2x + 5$
b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
c) $f(x) = 2x^2 + 12x + 17$
26. Zapisz w postaci ogólnej wzory podanych funkcji kwadratowych.
a) $f(x) = (x + 8)^2 - 2$
b) $f(x) = 2(x - 2)^2 - 9$
c) $f(x) = -(x + 2)^2 + 13$
27. Oblicz w zeszycie współrzędne wierzchołków wykresów poniższych funkcji.
a) $f(x) = x^2 - x + 10$
b) $f(x) = 5x^2 - 2x + 15$
c) $f(x) = -3x^2 + 5x - 7$
28. Narysuj w zeszycie wykres funkcji $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$ oraz podaj jej wartości na końcach tego przedziału.

29. Oblicz w zeszycie miejsca zerowe poniższych funkcji.

a) $f(x) = 2x^2 - 6x - 36$

b) $f(x) = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{3}{4}$

c) $f(x) = 12(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{5})$

30. Zapisz w zeszycie wzór poniższych funkcji w postaci iloczynowej (o ile to możliwe).

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = 4x^2 - 11x + 2,5$

c) $f(x) = -5x^2 + 12x - 9$

31. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, mając podany wzór.

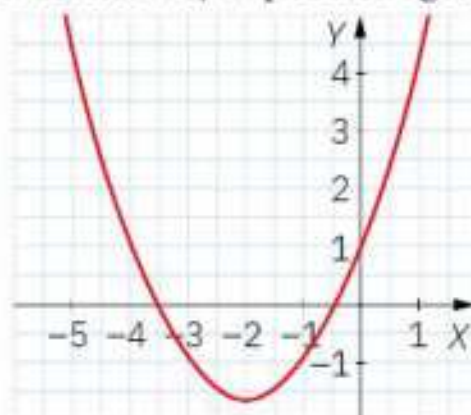
a) $f(x) = (x + 2)^2 - 3$

b) $f(x) = 2(x - 1)(x + 7)$

c) $f(x) = -5(x + 8)^2 - 13$

32. Funkcja kwadratowa $f(x) = -3x^2 + bx + \frac{1}{3}$ ma jedno z różnych miejsc zerowych w punkcie o odciętej równej $\frac{1}{6}$. Oblicz w zeszycie współczynnik b i zapisz wzór tej funkcji.

33. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej na podstawie jej wykresu.



34. Oblicz w zeszycie najmniejszą i największą wartość danych funkcji kwadratowych w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$.

a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$

b) $f(x) = -3x^2 - 6x - 1$

c) $f(x) = x^2 + 6x + 4$

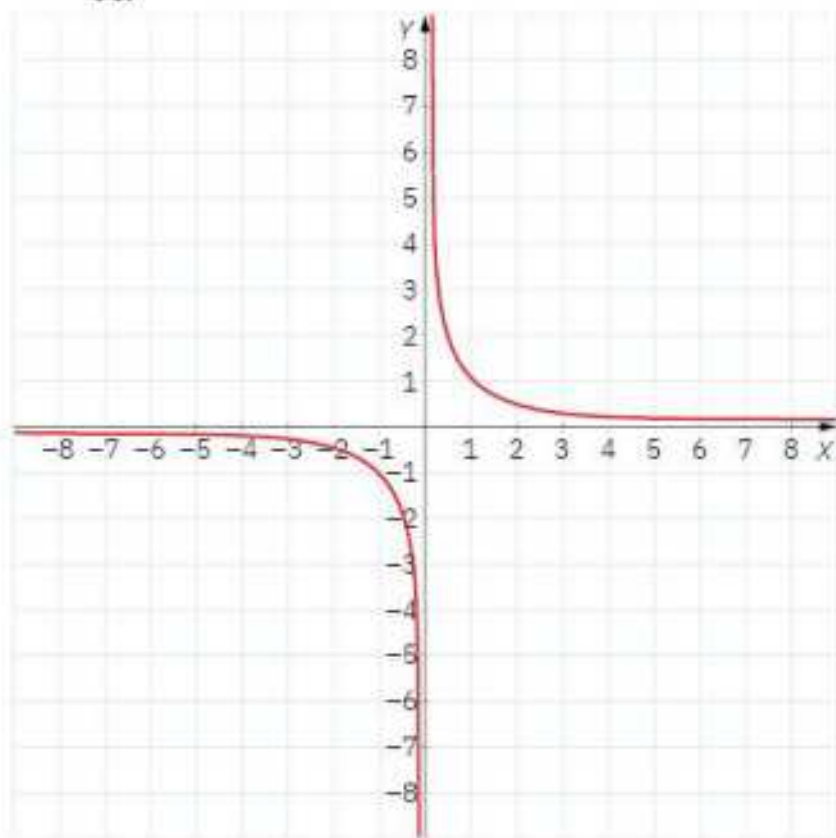
35. Wyznacz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma wynosi 36.

36. Długość siatki ogrodzeniowej wynosi 75 metrów. Oblicz w zeszycie, jakie maksymalne wymiary może mieć prostokątna działka, którą można ogrodzić tą siatką, uwzględniając 5 metrów zajęte przez bramę z furtką.

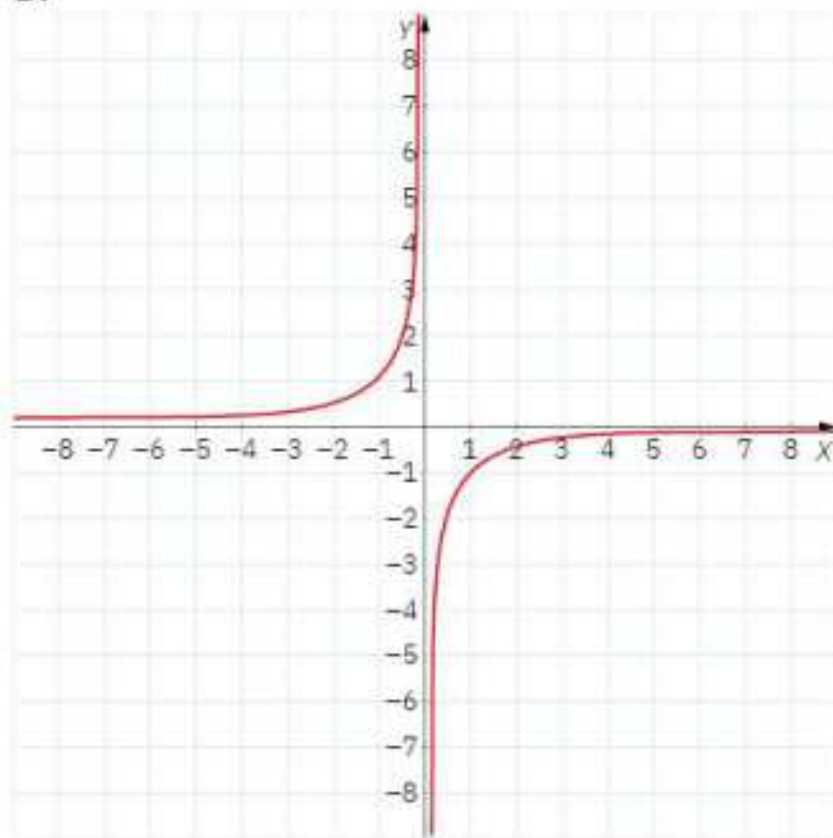
37. Wokół prostokątnego stawu w parku, wzdłuż brzegu, ułożono chodnik o szerokości x . Oblicz w zeszycie tę szerokość, wiedząc, że staw ma wymiary 10 m na 20 m, a pole powierzchni chodnika wynosi 99 m^2 .

38. Na którym z rysunków przedstawiono wykres funkcji $y = -\frac{1}{x}$?

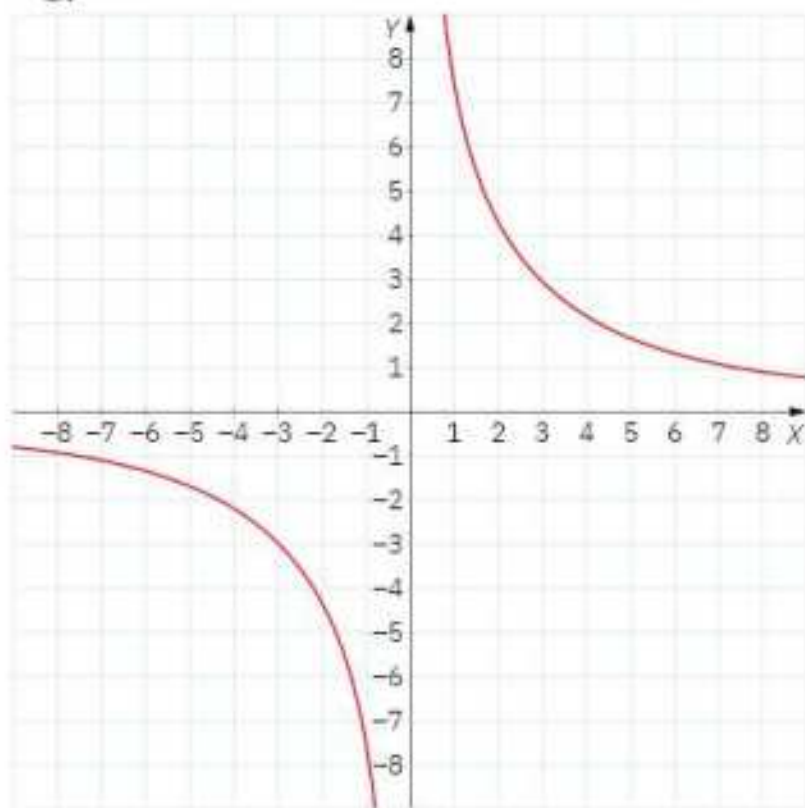
A.



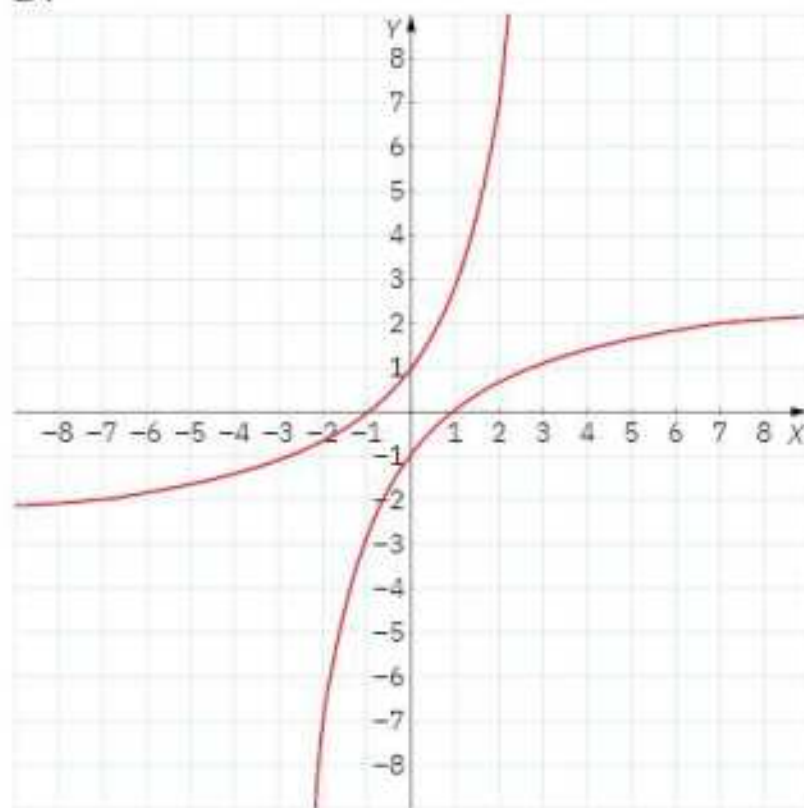
B.



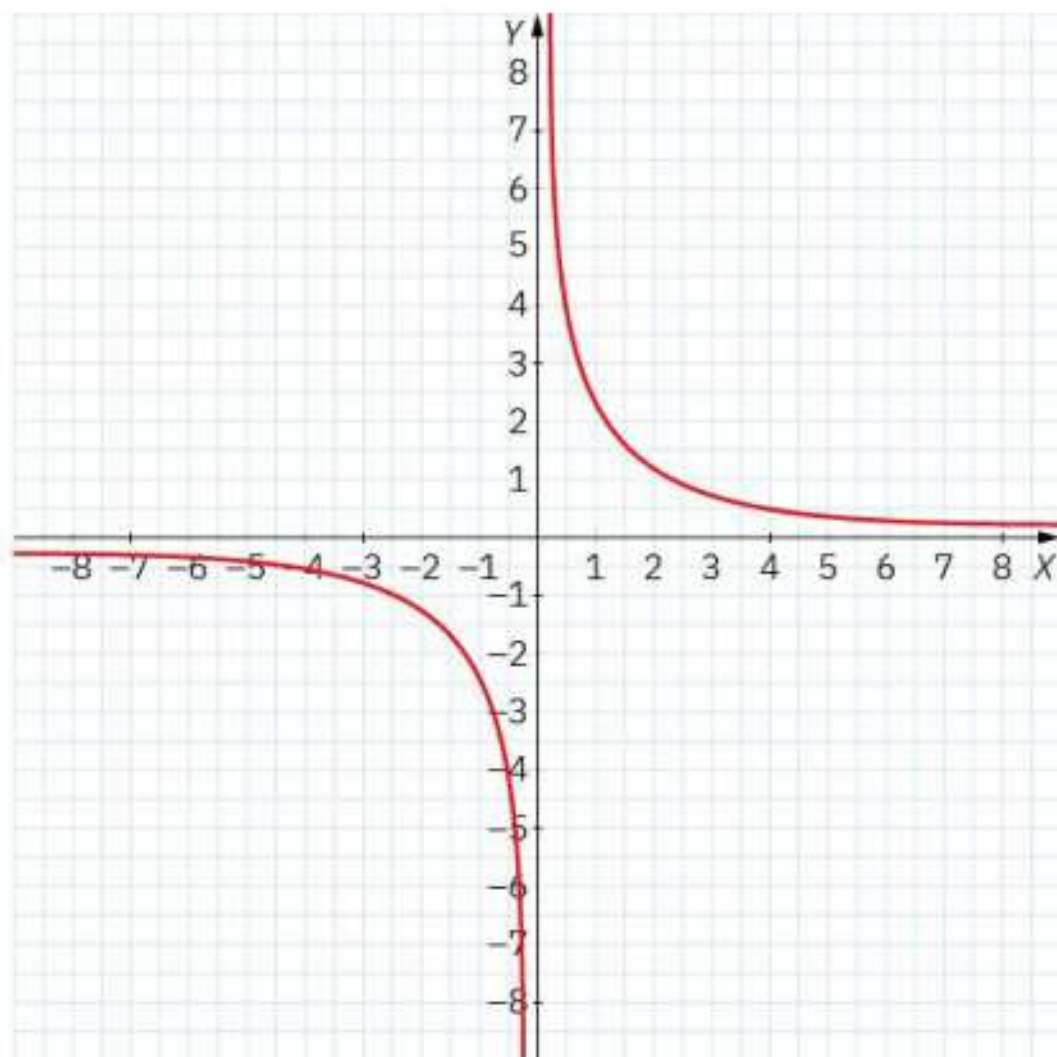
C.



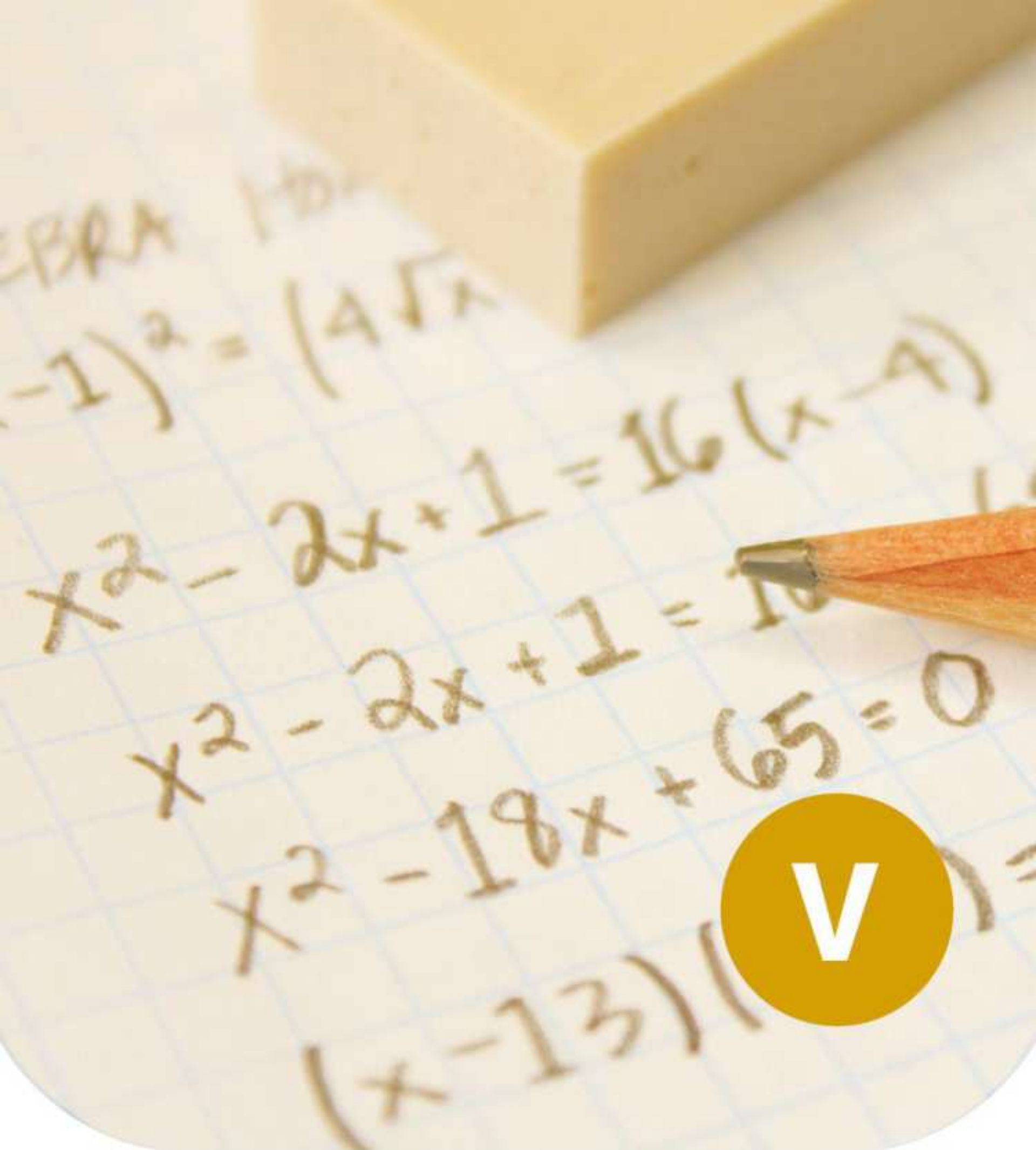
D.



39. Które zdanie dotyczące funkcji danej na wykresie jest prawdziwe?



- A. Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
- B. Funkcja ta przyjmuje tylko wartości ujemne.
- C. Dla argumentu $x = 0,5$ funkcja przyjmuje wartość 4.
- D. Funkcja ma jedno miejsce zerowe.



RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

5.1. Równanie kwadratowe

Na wcześniejszych etapach nauki omawialiśmy równania w postaci $ax + b = 0$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Są to tzw. równania liniowe – równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Teraz poznamy równania drugiego stopnia z jedną niewiadomą, zwane także równaniami kwadratowymi.



Równanie drugiego stopnia z jedną niewiadomą to równanie, które można zapisać w postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b i c są liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Ćwiczenie 1.

Spośród zapisanych równań wybierz równania kwadratowe.

- a) $9x^2 - 90 = 0$ b) $16x^3 - 25x^2 = 0$ c) $x - 3 = 0$
d) $x^2 - 125x + 4 = 0$ e) $x^2 + 49x^4 = 0$ f) $8 - x + x^2 = 0$

Odpowiedź: Równania kwadratowe są wymienione w punktach: a, d, f.

O liczbie powiemy, że spełnia równanie kwadratowe (czyli jest pierwiastkiem równania), jeśli po podstawieniu tej liczby w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań otrzymamy równość prawdziwą.

Ćwiczenie 2.

Sprawdź, czy równanie $x^2 + 5x + 6 = 0$ spełniają liczby: -3 , -2 lub 0 .

Rozwiązanie:

a) -3

$$L = (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6 = 0$$

$$P = 0$$

$$L = P$$

Odpowiedź: Liczba -3 spełnia równanie.

b) -2

$$L = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0$$

$$P = 0$$

$$L = P$$

Odpowiedź: Liczba -2 spełnia równanie.

c) 0

$$L = 0^2 + 5 \cdot 0 + 6 = 6$$

$$P = 0$$

$$L \neq P$$

Odpowiedź: Liczba 0 nie spełnia równania.



Każda liczba spełniająca dane równanie kwadratowe jest rozwiązaniem tego równania. Rozwiązanie równania kwadratowego polega na znalezieniu wszystkich liczb, które to równanie spełniają, lub wykazaniu, że takich liczb nie ma.

Ćwiczenie 3.

Rozwiąż równania.

a) $(x+3)(3x-4)=0$

Rozwiązanie:

$$(x+3)(3x-4)=0$$

$$x+3=0 \quad \text{lub} \quad 3x-4=0 \quad \text{porównujemy każdy z czynników do zera}$$

$$x=-3 \quad \text{lub} \quad x=\frac{4}{3} \quad \text{rozwiązujemy każde z równań liniowych}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $(x+3)(3x-4)=0$ są liczby -3 i $\frac{4}{3}$.

b) $3x^2=0$

Rozwiązanie:

$$3x^2=0 : 3 \quad \text{dzielimy obie strony równania przez 3}$$

$$x^2=0$$

$$x=0$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $3x^2=0$ jest liczba 0.

c) $x^2-49=0$

Rozwiązanie:

$$(x+7)(x-7)=0 \quad \text{zamieniamy sumę algebraiczną na iloczyn, stosując wzór skróconego mnożenia } a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$x+7=0 \quad \text{lub} \quad x-7=0 \quad \text{porównujemy każdy z czynników do zera}$$

$$x=-7 \quad \text{lub} \quad x=7 \quad \text{rozwiązujemy każde z równań liniowych}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $x^2-49=0$ są liczby -7 i 7 .

d) $2x^2+5=0$

Rozwiązanie:

$$2x^2+5=0 \quad \text{wyznaczamy } x^2$$

$$2x^2=-5$$

$$x^2=-\frac{5}{2}$$

Odpowiedź: Kwadrat każdej liczby jest liczbą nieujemną, więc równanie $2x^2+5=0$ nie ma rozwiązania.

Powyższe przykłady pokazały nam, że są takie równania kwadratowe, które mają dwa rozwiązania, takie, które mają tylko jedno rozwiązanie, i takie, które nie mają rozwiązania.

Ćwiczenie 4.

Rozwiąż równanie.

a) $7x^2 - 14x = 0$

Rozwiązanie:

$$7x(x-2)=0$$

$$\begin{array}{llll} x=0 & \text{lub} & x-2=0 & \text{wyłączamy wspólny czynnik przed nawias} \\ x=0 & \text{lub} & x=2 & \text{porównujemy każdy z czynników do zera} \end{array}$$

rozwiązujemy każde z równań liniowych

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $7x^2 - 14x = 0$ są liczby 0 i 2.

b) $(x+4)^2 = 25$

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{llll} x+4=\sqrt{25} & \text{lub} & x+4=-\sqrt{25} & \text{korzystamy z własności kwadratu liczby} \\ x+4=5 & \text{lub} & x+4=-5 & \text{rozwiązujemy każde z równań liniowych} \\ x=1 & \text{lub} & x=-9 & \end{array}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $(x+4)^2 = 25$ są liczby -9 i 1 .

c) $25x^2 + 10x + 1 = 0$

Rozwiązanie:

$$(5x+1)^2 = 0 \quad \text{zamieniamy sumę algebraiczną na iloczyn, stosując wzór}$$
$$\text{skróconego mnożenia } a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$5x+1=0 \quad \text{rozwiązujemy równanie}$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $25x^2 + 10x + 1 = 0$ jest liczba $-\frac{1}{5}$.

d) $x^2 - 6x - 7 = 0$

Rozwiązanie:

$$(x^2 - 6x + 9) - 16 = 0 \quad \text{zapisujemy liczbę } -7 = 9 - 16$$

$$(x-3)^2 = 16 \quad \text{stosujemy wzór skróconego mnożenia } a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$x-3=4 \quad \text{lub} \quad x-3=-4 \quad \text{rozwiązujemy równania}$$

$$x=7 \quad \text{lub} \quad x=-1$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $x^2 - 6x - 7 = 0$ są liczby -1 i 7 .

Podczas rozwiązywania równań kwadratowych możemy skorzystać z własności funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Aby rozwiązać równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, należy znaleźć miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Liczba miejsc zerowych zależy od znaku wyróżnika (Δ).

Ćwiczenie 5.

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2x - 8 = 0$

Rozwiązanie:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 \quad \text{obliczamy wartość wyróżnika } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6 \quad \text{obliczamy } \sqrt{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{obliczamy miejsca zerowe: } x_1 \text{ i } x_2$$

$$x_1 = \frac{2 - 6}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{2 + 6}{2} = 4$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $x^2 - 2x - 8 = 0$ są liczby -2 i 4 .

b) $x^2 - 2x + 8 = 0$

Rozwiązanie:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 - 32 = -28 \quad \text{obliczamy wartość wyróżnika } \Delta = b^2 - 4ac$$

Ponieważ $\Delta < 0$, funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Odpowiedź: Równanie kwadratowe $x^2 - 2x + 8 = 0$ nie ma rozwiązania.

c) $x^2 - 8x + 16 = 0$

Rozwiązanie:

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0 \quad \text{obliczamy wartość wyróżnika } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad \text{obliczamy miejsce zerowe}$$

$$x_0 = \frac{8}{2} = 4$$

Gdy $\Delta = 0$, funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe.

Odpowiedź: Równanie kwadratowe $x^2 - 8x + 16 = 0$ ma jedno rozwiązanie. Jest nim liczba 4 .

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

- ma dwa rozwiązania, gdy $\Delta > 0$,
- ma jedno rozwiązanie, gdy $\Delta = 0$,
- nie ma rozwiązania, gdy $\Delta < 0$.



Ćwiczenie 6.

Rozwiąż równanie.

$$a) (x-4)^2 = 15 - 9x$$

Rozwiązanie:

$$x^2 - 8x + 16 - 15 + 9x = 0$$

sprowadzamy równanie do najprostszej postaci

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$

obliczamy wartość wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$

Odpowiedź: Ponieważ $\Delta < 0$, więc równanie kwadratowe $(x-4)^2 = 15 - 9x$ nie ma rozwiązania.

$$b) \frac{x-1}{x} = \frac{x-4}{2}, \text{ gdzie } x \neq 0$$

Rozwiązanie:

$$2(x-1) = x(x-4)$$

sprowadzamy równanie do najprostszej postaci

$$2x - 2 = x^2 - 4x$$

$$-x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 36 - 8 = 28$$

obliczamy wartość wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

obliczamy $\sqrt{\Delta}$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{-2} = 3 + \sqrt{7}$$

obliczamy miejsca zerowe: x_1 i x_2

$$x_1 = \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{-2} = 3 + \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 2\sqrt{7}}{-2} = 3 - \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{7}}{-2} = 3 - \sqrt{7}$$

Odpowiedź: Zbiór rozwiązań równania $\frac{x-1}{x} = \frac{x-4}{2}$ to: $\{3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}\}$.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Rozwiąż równania w zeszycie.

$$a) x^2 - 9 = 0$$

$$b) 16x^2 - 25 = 0$$

$$c) x^2 - 3 = 0$$

$$d) 5x^2 = 125$$

$$e) x^2 + 49 = 0$$

$$f) 8 - x^2 = 0$$

2. Rozwiąż równania w zeszycie.

$$a) x^2 - 3x = 0$$

$$b) 5x^2 + 12x = 0$$

$$c) -7x + 14x^2 = 0$$

$$d) 9x^2 = x$$

$$e) 4x^2 - 5x = 10x$$

$$f) 6x^2 + 8x = x^2 - 13x$$

3. Które z liczb: $-36, -6, 0, 6, 36$, są rozwiązaniami równania $6x^2 - 216x = 0$?

4. Dane są równania: $x^2 + 4 = 0$; $5x - 10x^2 = 0$; $2x^2 + 4x = 0$ oraz $3x^2 - 12 = 0$. Które z nich jednocześnie spełniają liczby -2 i 2 ?

5. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
d) $25 - 10x + x^2 = 0$ e) $9x^2 - 30x + 25 = 0$ f) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

6. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $x^2 + 8x + 12 = 0$ c) $x^2 + 12x + 36 = 0$
d) $x^2 - 8x + 15 = 0$ e) $x^2 - 2x + 5 = 0$ f) $2x^2 + 12x - 14 = 0$

7. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $x^2 - x = 30$ b) $3x^2 = 10x - 3$ c) $2x^2 + 15x = 4 - 2x^2$
d) $5 - 4x = x^2$ e) $x^2 - 2x - 35 = 2x^2 + 14x$ f) $5x^2 = 4 - x$

8. Ułóż i zapisz w zeszycie równanie kwadratowe, którego zbiór rozwiązań to:

a) $\{2, 3\}$ b) $\{4\}$ c) $\{-5, 8\}$
d) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ e) $\{-6, 6\}$ f) $\{0, 7\}$

9. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $(x-1)^2 = 36$ b) $(x-3)^2 - 25 = 0$ c) $x(x-2) + 3(x-2) = 0$
d) $5(2x+3) - 4x(2x+3) = 0$ e) $7(x+5) = x(x+5)$ f) $(7-x)^2 = 4x^2$

10. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $x^2 = x(7-x)$ b) $x^2 - 2 + x = 4x - x^2 - 3$
c) $9x^2 - 12x = -4 + (x+1)^2$ d) $(3x-1)^2 - 4x^2 = 9 - 3x$
e) $(x+3)^2 - 3x^2 = (x+4)^2$ f) $9 = (x-2)(x+6)$

11. Oblicz w zeszycie współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ i $g(x) = x^2 + 9x + 1$.

Wskazówka: Rozwiąż równanie $f(x) = g(x)$. Współrzędne punktów wspólnych to $(x, f(x))$ lub $(x, g(x))$, $x \in D_f, D_g$

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Zbiór liczb $\{-1, 3\}$ jest rozwiązaniem równania:

A. $(x-1)(x+3) = 0$ B. $(x+1)(x+3) = 0$
C. $(x+1)(x-3) = 0$ D. $(x-1)(x-3) = 0$

2. Rozwiązaniem równania $(x - \sqrt{3})^2 = 0$ jest liczba:

A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. 3 D. -3

3. Równanie kwadratowe $x^2 + 12x + c = 0$ ma jedno rozwiązanie tylko wtedy, gdy c jest równe:

A. 6 B. -6 C. 36 D. -36



4. Suma pierwiastków równania kwadratowego $x^2 - 7x + 10 = 0$ wynosi:
A. 7 B. -7 C. 10 D. -10
5. Iloczyn pierwiastków równania kwadratowego $2x^2 - 5x - 3 = 0$ wynosi:
A. 2 B. -3 C. 1,5 D. -1,5
6. O równaniu $x^2 - x + 1 = 0$ powiemy, że
A. ma dwa rozwiązania. B. ma jedno rozwiązanie.
C. nie ma rozwiązań D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.
7. Równanie $x(2x - 1) = 5(2x - 1)$ ma:
A. dwa rozwiązania ujemne. B. dwa rozwiązania dodatnie.
C. dwa rozwiązania różnych znaków. D. jedno rozwiązanie.

5.2. Nierówność kwadratowa

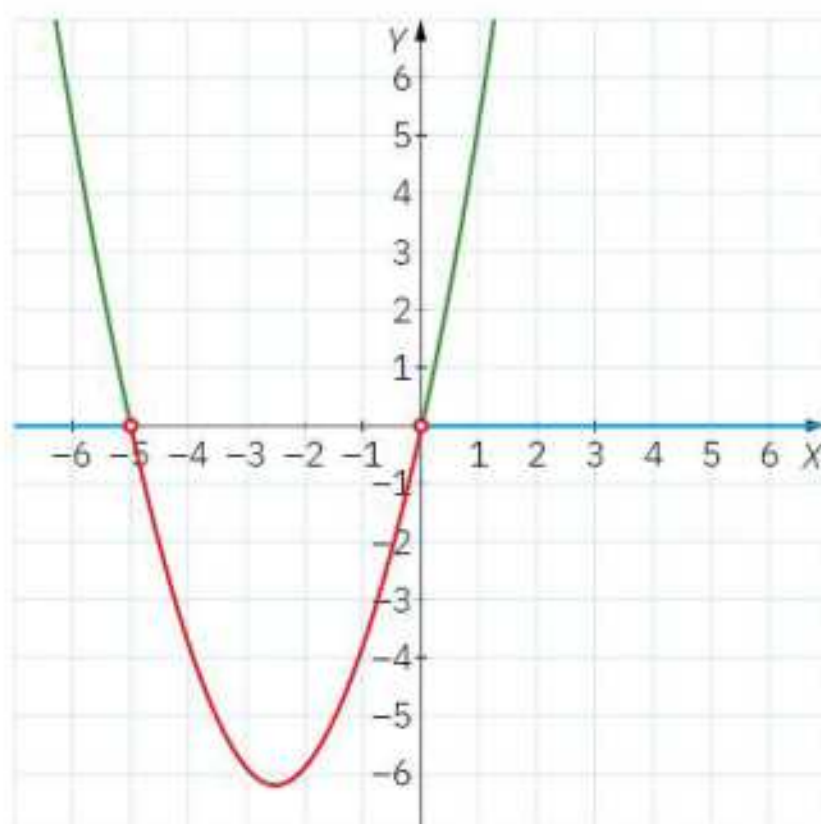


Każda z nierówności w postaci: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$, gdzie $a \neq 0$, jest nierównością kwadratową.

Do rozwiązywania nierówności kwadratowych stosuje się wiedzę dotyczącą funkcji kwadratowej i równań kwadratowych.

Ćwiczenie 1.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = x(x + 5)$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów x wartości funkcji są dodatnie.



Rozwiązanie:

Odczytujemy z wykresu te argumenty, dla których punkty wykresu funkcji leżą powyżej osi X .
 $y > 0$ dla $x \in (-\infty, -5) \cup (0, \infty)$

Ćwiczenie 2.

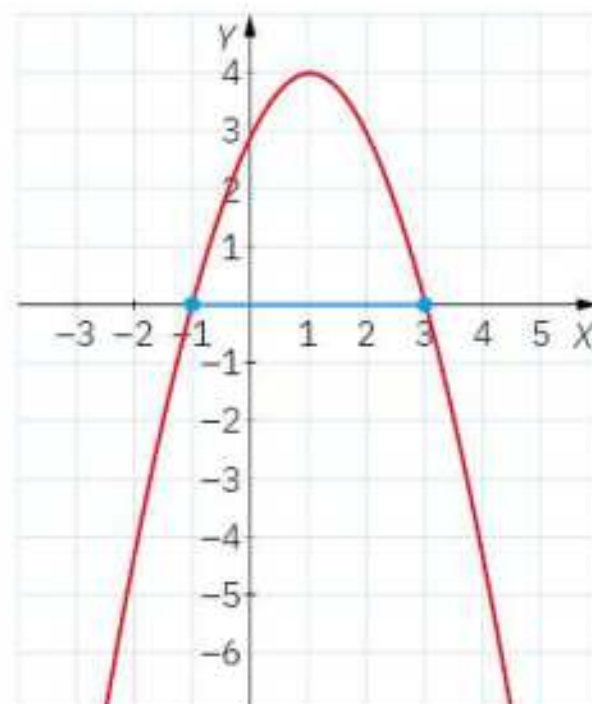
Narysuj wykres funkcji $y = -(x+1)(x-3)$ i odczytaj z niego, dla jakich argumentów x wartości funkcji są nieujemne.

Rozwiązanie:

Miejskami zerowymi funkcji są liczby -1 i 3 , a współrzędne p, q wierzchołka $W(p, q)$ paraboli są równe $p = \frac{-1+3}{2} = 1$ i $q = f(1) = -(1+1)(1-3) = 4$.

Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty: $(-1, 0)$, $(3, 0)$ i $(1, 4)$, a następnie rysujemy parabolę. Odczytujemy z wykresu te argumenty, dla których wartości funkcji są większe lub równe 0.

$y \geq 0$ dla $x \in \langle -1, 3 \rangle$



Ćwiczenie 3.

Rozwiąż nierówność.

a) $(x-2)(x+1) < 0$

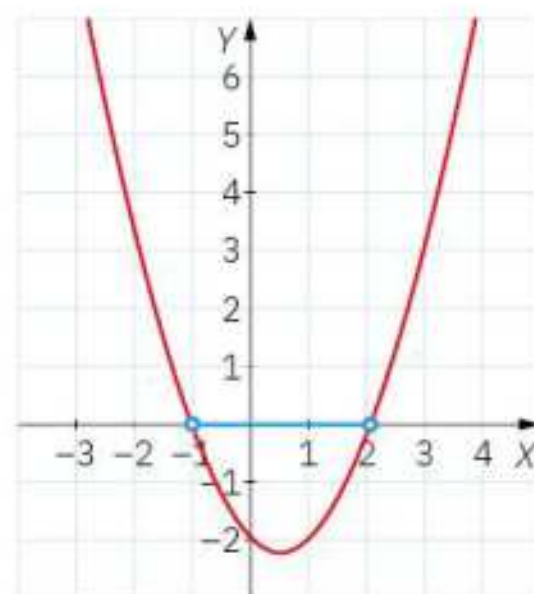
Rozwiązanie:

$(x-2)(x+1) = 0$ – obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej

$x = 2$ lub $x = -1$

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = (x-2)(x+1)$.

Odczytujemy z wykresu argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: $x \in (-1, 2)$.



b) $9 - x^2 \geq 0$

Rozwiązanie:

$9 - x^2 = 0$ – obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej

$(3-x)(3+x) = 0$

$x = 3$ lub $x = -3$

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = 9 - x^2$.

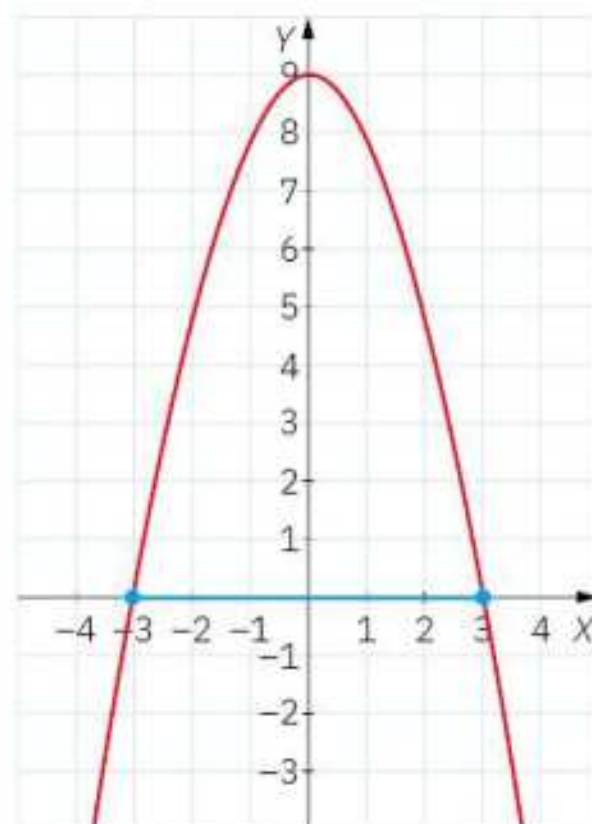
Odczytujemy z wykresu argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne: $x \in \langle -3, 3 \rangle$.

c) $x^2 - 4x + 5 \leq 0$

Rozwiązanie:

$x^2 - 4x + 5 \leq 0$ – obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieją)

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$



Ponieważ $\Delta < 0$, funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Sprawdzamy, czy możemy odczytać z wykresu argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie. Takich argumentów nie ma, a zatem nierówność nie ma rozwiązania.

$$d) -2x^2 + 6x + 1 > x(5 - 4x)$$

Rozwiązanie:

$-2x^2 + 6x + 1 > 5x - 4x^2$ – sprowadzamy nierówność do najprostszej postaci

$$-2x^2 + 6x + 1 - 5x + 4x^2 > 0$$

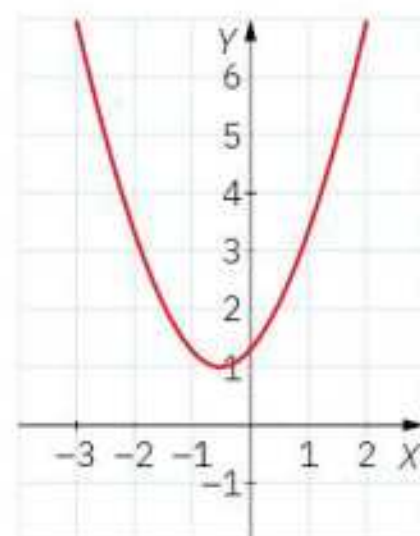
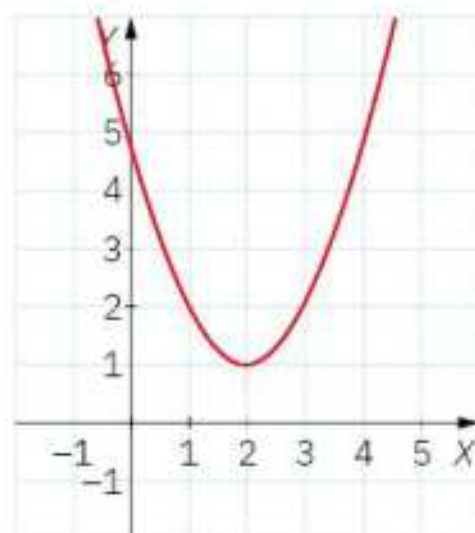
$2x^2 + x + 1 > 0$ – obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieją)

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7$$

Ponieważ $\Delta < 0$, funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = 2x^2 + x + 1$.

Odczytujemy z wykresu argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: $x \in \mathbb{R}$.

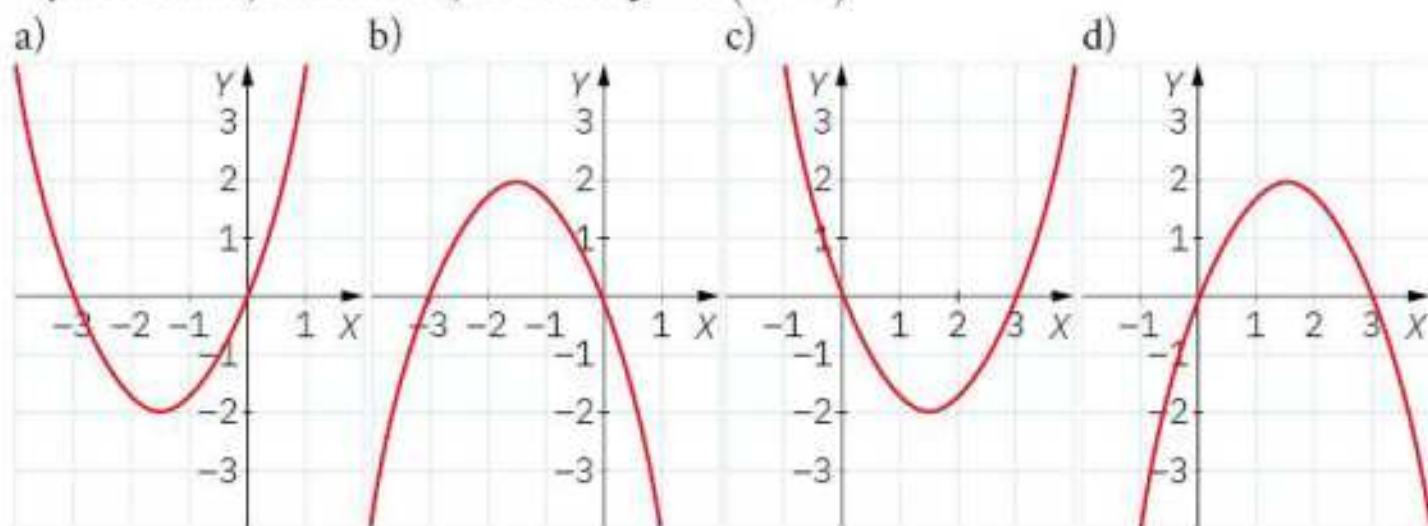


Podczas rozwiązywania nierówności kwadratowej najpierw obliczamy miejsca zerowe odpowiedniej funkcji kwadratowej (o ile istnieją) i rysujemy jej wykres. Następnie odczytujemy z wykresu zbiór argumentów spełniających daną nierówność.



ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

1. Wśród wykresów funkcji kwadratowych wskaż ten, na którym przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $y = x(x + 3)$.



2. Wyznacz argumenty, dla których funkcja $f(x) = x^2 - 3x + 2$ przyjmuje wartości nieujemne.

3. Rozwiąż nierówności w zeszycie.

a) $x(x-2) > 0$ b) $x(x+5) < 0$ c) $-(x-1)(x+7) < 0$
d) $x^2 + 8x \leq 0$ e) $x^2 - 121 \geq 0$ f) $3 - x^2 < 0$

4. Rozwiąż nierówności w zeszycie.

a) $x^2 > \frac{4}{25}$ b) $72 \leq 2x^2$ c) $(x+1)^2 < 16$
d) $x^2 \geq 9x$ e) $-3x^2 < 2x$ f) $81 < (x-3)^2$

5. Rozwiąż nierówności w zeszycie.

a) $x^2 + 3x + 2 > 0$ b) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ c) $-4x^2 - 3x - 7 < 0$
d) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$ e) $x^2 - x + 1 < 0$ f) $-2x^2 + 9x + 5 > 0$

6. Podaj największą liczbę pierwszą, która jest rozwiązaniem nierówności $x^2 - 2x - 24 < 0$.

7. Wymień wszystkie liczby naturalne spełniające jednocześnie nierówności: $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$ i $x^2 + 3x - 4 < 0$.

8. Wymień wszystkie liczby całkowite spełniające jednocześnie nierówności: $-x^2 - 8x \geq 0$ i $x^2 - 2x - 3 > 0$.

9. Uzasadnij, że nie ma liczb rzeczywistych spełniających nierówność $-6x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

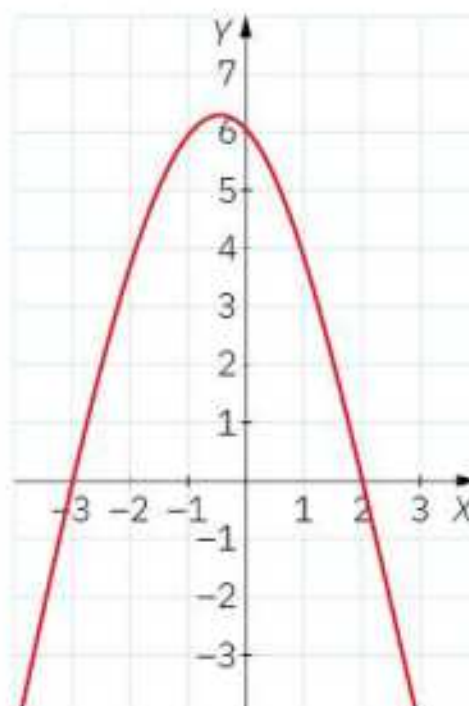
10. Rozwiąż nierówności w zeszycie.

a) $(2x-3)^2 > (x+2)^2$ b) $1 - x(5-4x) \geq 2x(x-3)$

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

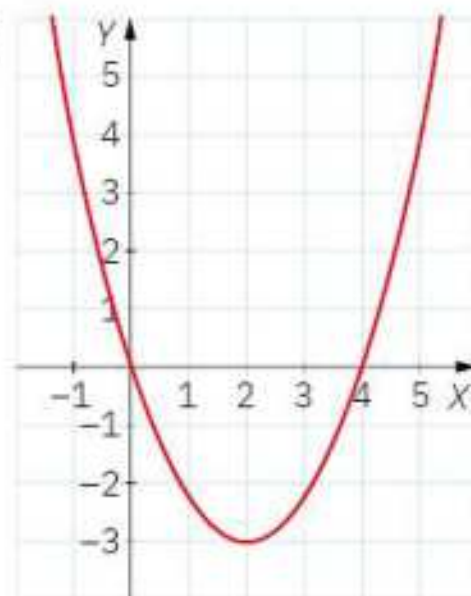
1. Wykres której funkcji przedstawiono na poniższym rysunku?

A. $y = 2(x-2)(x+3)$
B. $y = -(x-2)(x+3)$
C. $y = -2(2-x)(x+3)$
D. $y = 2(x-3)(x+2)$



2. Na rysunku znajduje się wykres funkcji kwadratowej przydatny do rozwiązania nierówności:

- A. $\frac{3}{4}x^2 - 3x < 0$
 B. $\frac{3}{4}x^2 + 3x < 0$
 C. $-\frac{3}{4}x^2 + 3x < 0$
 D. $-\frac{3}{4}x^2 - 3x < 0$



3. Zbiór liczb $\langle 1, 5 \rangle$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:
 A. $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ B. $x^2 \geq 0$ C. $x^2 - 1 > 0$ D. $x^2 \leq 25$
4. Rozwiązaniem nierówności $(x-3)^2 > 0$ nie jest liczba:
 A. -3 B. 0 C. 3 D. $\sqrt{3}$
5. Największą liczbą całkowitą ujemną spełniającą nierówność $x^2 > -9x$ jest:
 A. -9 B. -10 C. -1 D. -8
6. Ile liczb naturalnych spełnia nierówność $(x-1)(2x-13) \leq 0$?
 A. dwie B. pięć C. sześć D. siedem
7. Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem rozwiązań nierówności:
 A. $(x-7)^2 > 0$ B. $(8-x)^2 < 0$ C. $-3(x+1)^2 \leq 0$ D. $x^2 + x - 6 > 0$

5.3. Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych

Równania i nierówności kwadratowe są pomocne przy rozwiązywaniu zadań tekstowych.

Ćwiczenie 1.

W turnieju siatkówki, w którym każda z drużyn miała rozegrać po jednym meczu z każdym z pozostałych zespołów, odbyło się 15 meczów. Oblicz, ile drużyn brało udział w tym turnieju.

Rozwiązanie:

Oznaczamy niewiadomą i układamy równanie:

x – liczba drużyn, gdzie $x \in \mathbb{N}$

$\frac{x(x-1)}{2}$ – liczba rozegranych meczów

$\frac{x(x-1)}{2} = 15$ rozwiązujemy równanie

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 1 + 120 = 121$$

$$\sqrt{\Delta} = 11$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1 - 11}{2} = -5 \quad \text{liczba } -5 \text{ nie spełnia warunków zadania}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{1 + 11}{2} = 6$$

Sprawdzamy, czy rozwiązanie równania spełnia warunki zadania:

6 – liczba wszystkich drużyn

5 – liczba drużyn, z którymi może rozegrać mecz każda z drużyn.

$6 \cdot 5$ – liczba par drużyn, które rozgrywają

$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ – liczba rozegranych meczów (po wyeliminowaniu powtórzeń)

Odpowiedź: W turnieju brało udział 6 drużyn.

Ćwiczenie 2.

Wymień wielokąty, w których liczba przekątnych jest większa od liczby boków pomnożonej przez 4.

Rozwiązanie:

Oznaczamy niewiadomą i układamy nierówność:

x – liczba boków, $x \in \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

$\frac{x(x-3)}{2}$ – wzór na liczbę przekątnych w wielokącie

$\frac{x(x-3)}{2} > 4x$ sprowadzamy nierówność do najprostszej postaci

$$x^2 - 3x > 8x$$

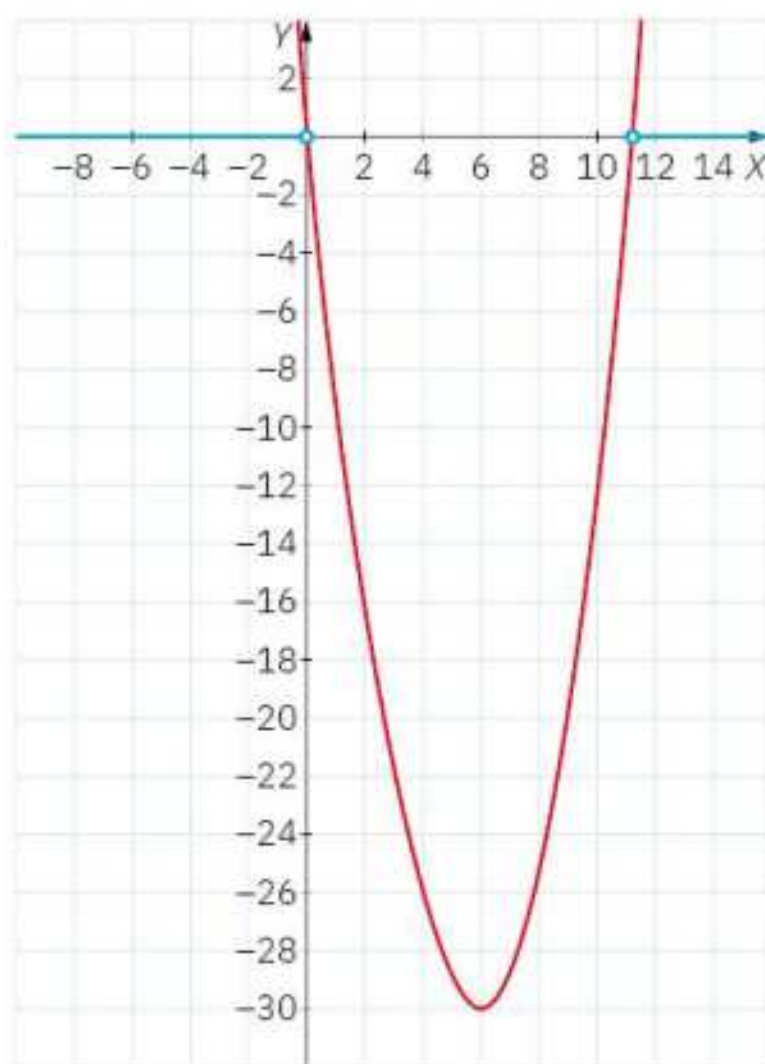
$$x^2 - 11x > 0$$

$x(x-11) = 0$ obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej

$$x = 0 \text{ lub } x = 11$$

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = x^2 - 11x$

Odczytujemy z wykresu argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: $x^2 - 11x > 0$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (11, +\infty)$ i $x \in \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$.



Sprawdzamy rozwiązanie równania z warunkami zadania:

12 – liczba boków wielokąta (większa od 11)

$4 \cdot 12 = 48$ – liczba boków wielokąta pomnożona przez 4

$$\frac{12 \cdot (12 - 3)}{2} = 54$$

$$54 > 48$$

Odpowiedź: Są to wszystkie wielokąty o liczbie boków większej od 11.

Ćwiczenie 3.

Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe, których suma cyfr jest równa 7, a kwadrat tych liczb jest nie większy niż 1156.

Rozwiązanie:

Oznaczamy niewiadomą i układamy nierówność:

x – cyfra dziesiątek i $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$7 - x$ – cyfra jedności

$10x + (7 - x) = 9x + 7$ – liczba dwucyfrowa

$(9x + 7)^2 \leq 1156$ sprowadzamy nierówność do najprostszej postaci

$$81x^2 + 126x - 1107 \leq 0 \quad | :9$$

$9x^2 + 14x - 123 \leq 0$ obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej

$$\Delta = 14^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-123) = 4624$$

$$\sqrt{\Delta} = 68$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-14 - 68}{18} = -4\frac{5}{9}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-14 + 68}{18} = 3$$

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = 9x^2 + 14x - 123$.

Odczytujemy z wykresu argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie:

$$x \in \left\langle -4\frac{5}{9}, 3 \right\rangle.$$

Ponieważ $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, otrzymujemy:

$$x \in \{1, 2, 3\}.$$

Wyznaczamy liczby:

$$x = 1; 7 - x = 7 - 1 = 6,$$

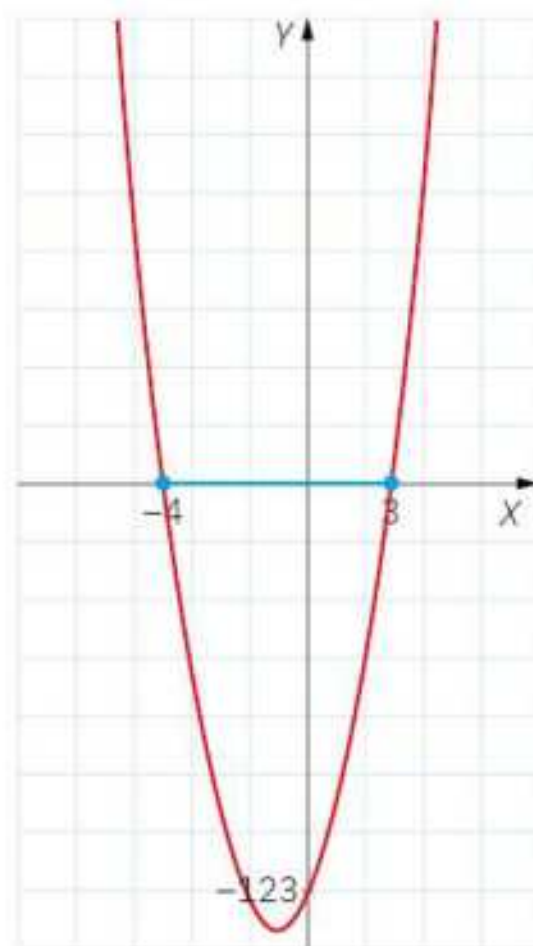
liczba 16

$$x = 2; 7 - x = 7 - 2 = 5,$$

liczba 25

$$x = 3; 7 - x = 7 - 3 = 4,$$

liczba 34



Sprawdzamy rozwiązanie nierówności z warunkami zadania:

Dla liczby 16:

$$1 + 6 = 7 - \text{suma cyfr}$$

$$16^2 = 256$$

$$256 \leq 1156$$

Dla liczby 25:

$$2 + 5 = 7 - \text{suma cyfr}$$

$$25^2 = 625$$

$$625 \leq 1156$$

Dla liczby 34:

$$3 + 4 = 7 - \text{suma cyfr}$$

$$34^2 = 1156$$

$$1156 \leq 1156$$

Odpowiedź: Szukane liczby to 16, 25 i 34.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA



1. Odcinek długości 1 m podzielono na dwie części w ten sposób, że stosunek krótszej części tego odcinka do dłuższej jest równy stosunkowi dłuższej części do długości całego odcinka. Oblicz w zeszycie długość dłuższej części odcinka.
2. Przekątne rombu o boku długości 50 cm pozostają w stosunku 3 : 4. Ile wynoszą długości tych przekątnych?
3. Pewien wielokąt wypukły ma 104 przekątne. Oblicz w zeszycie, ile wierzchołków ma ten wielokąt.
4. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest o 4 cm większa od długości krawędzi podstawy, a pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe 230 cm^2 . Oblicz w zeszycie wysokość tego graniastosłupa.
Wskazówka: Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości h wyraża się wzorem $P = 2a^2 + 4ah$.
5. Wyznacz liczbę, której kwadrat jest o 1 mniejszy od jej dwukrotności.
6. Suma dwóch liczb wynosi 15, a ich iloczyn to 44. Wyznacz te liczby.
7. Długość prostokątnego trawnika o polu 104 m^2 jest o 5 m większa od jego szerokości. Podaj wymiary tego trawnika.
8. Różnica długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynosi 31 cm, a długość jego przeciwprostokątnej to 41 cm. Oblicz w zeszycie długości przyprostokątnych tego trójkąta.
9. Oblicz w zeszycie, ile jest wielokątów wypukłych, w których liczba przekątnych jest mniejsza od liczby boków pomnożonej przez 3.

10. Maciek zapytany o to, ile ma lat, odpowiedział: „Jeśli liczbę lat, jaką ukończyłem, pomnożymy przez liczbę o 38 od niej mniejszą i do wyniku dodamy 360, to otrzymamy liczbę ujemną”. Ile lat ma Maciek?
11. Suma dwóch prostopadłych boków prostokąta wynosi 7 cm. Wyznacz długości tych boków tak, aby pole tego prostokąta było mniejsze od 10 cm^2 i większe od 6 cm^2 .
12. W pewnym graniastosłupie prawidłowym czworokątnym długości krawędzi wyrażają się liczbami naturalnymi. Ponadto wiadomo, że długość krawędzi bocznej jest o 4 cm mniejsza od długości krawędzi podstawy, a pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest nie większe niż 70 cm^2 . Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.
13. Dwie drogi przecinają się pod kątem prostym. Dwaj motocykliści ruszyli ze skrzyżowania w tym samym momencie, jadąc z prędkościami $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, każdy inną drogą. Po jakim czasie odległość mierzona między nimi w linii prostej będzie wynosiła co najmniej 60 km?



ZADANIA SPRAWDZAJĄCE

1. Równanie $x(x+2) - 7(x+1) = 0$ ma
 A. dwa rozwiązania dodatnie. B. dwa rozwiązania ujemne.
 C. jedno rozwiązanie. D. dwa rozwiązania różnych znaków.
2. Wielokąt wypukły, który ma 20 przekątnych, to
 A. siedmiokąt. B. ośmiokąt. C. jedenastokąt. D. dziesięciokąt.
3. Różnica długości przeciwprostokątnej i dłuższej przyprostokątnej trójkąta prostokątnego wynosi 1 cm, a różnica długości przeciwprostokątnej i krótszej przyprostokątnej tego trójkąta jest równa 8 cm. Długość przeciwprostokątnej wynosi:
 A. 11 cm B. 12 cm C. 13 cm D. 14 cm
4. Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych wynosi 265. Szukane liczby to:
 A. -11 i -12 B. -11 i 12 C. 11 i 12 D. 121 i 144
5. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ jest zbiór:
 A. $(0, 2)$ B. $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
 C. $\langle 0, 2 \rangle$ D. $\mathbb{R}$
6. Zbiór pusty jest zbiorem rozwiązań nierówności:
 A. $x^2 \leq 0$ B. $10x^2 \geq 0$ C. $-5x^2 - 1 > 0$ D. $x^2 + 2x \leq -1$

7. Zbiór liczb z przedziału $(-\infty, -11) \cup (11, \infty)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:
 A. $(x-11)(x+11) > 0$ B. $(11-x)^2 < 0$
 C. $-3(11+x)^2 \leq 0$ D. $-(x+11)(x-11) \leq 0$
8. Suma długości przekątnych rombu o polu równym 24 cm^2 wynosi 14 cm. Długości tych przekątnych są równe:
 A. 3 cm i 4 cm B. 6 cm i 8 cm C. 12 cm i 2 cm D. 4 cm i 10 cm

5.4. Zadania utrwalające

1*. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $16x^2 - 33x = -2$

b) $-x^2 - 36 = 15x$

c) $7x^2 - 1 = 5x - 2$

d) $(x+2)^2 + 4 = 5(x+2)$

e) $\frac{x}{3x+2} = \frac{1}{x}, x \neq 0, x \neq -\frac{2}{3}$

f) $\frac{x+5}{x-2} = \frac{x}{2x+1}, x \neq 2, x \neq -\frac{1}{2}$

2. Rozwiąż nierówności w zeszycie.

a) $x^2 < 9x - 8$

b) $x^2 - 2x > -30$

c) $2x^2 - 28x + 98 \leq 0$

d) $-4x^2 < 0$

e) $x^2 - 7x + 18 \geq 6$

f) $0 \leq (-x+3)(2x+1)$

3. Oblicz w zeszycie sumę pierwiastków równania.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $8x^2 + 6x - 9 = 0$

d) $3x^2 - x - 4 = 0$

4. Oblicz w zeszycie iloczyn pierwiastków równania.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $3x^2 + 13x - 10 = 0$

d) $10x^2 - 37x + 7 = 0$

5. Rozwiąż równania w zeszycie.

a) $(3x-2)^2 - x^2 = 1 + 2x$

b) $(x-3)^2 - (x-1)^2 = -(x-2)^2$

c) $2(x-1)(x-2) = 2(x+1)(2x-3) - 5(x-1)^2$

d) $(x+3)^2 - 6x = (x-1)^2 - (x+4)(x-4)$

6. Rozwiąż nierówności w zeszycie.

a) $(2x-3)(5-x) \geq 0$

b) $(3x+2)^2 < 7(3x+2)$

c) $(3x-1)^2 - 4(2-x)^2 \leq 0$

d) $27 - (x-6)^2 \leq x^2 - (x+3)^2$

7. Wyznacz zbiór dodatnich rozwiązań nierówności.

a) $(2x-1)^2 \geq 4$

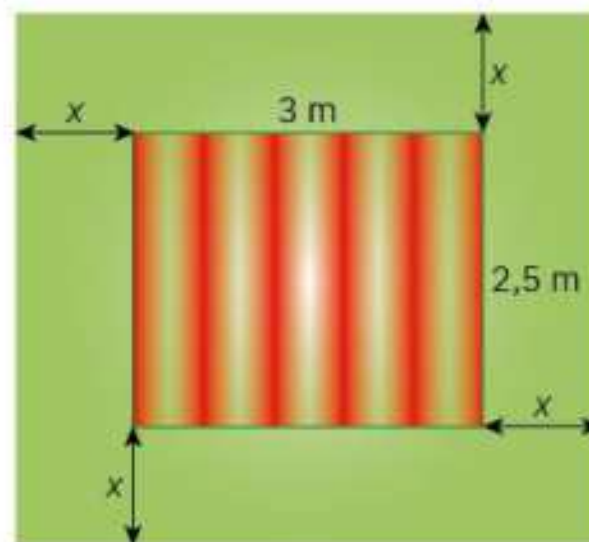
b) $x^2 - 15 \leq -2x$

8. Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność.

a) $53x - 260 > 2x^2$

b) $2x(x-2) \leq x^2 + x$

9. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze spełniające nierówność.
 a) $x^2 - 14x + 13 < 0$ b) $2x(7-x) - 7(7-x) \geq 0$
10. Dane są funkcje $f(x) = -3x^2 - x + 2$ oraz $g(x) = -3x + 1$. Oblicz w zeszycie współrzędne punktów wspólnych tych funkcji.
- 11*. Funkcje f i g określone są wzorami: $f(x) = x^2 - 8x$ oraz $g(x) = 2x + 11$. Wyznacz zbiór argumentów x , dla których funkcja f przyjmuje wartości większe od funkcji g .
 Wskazówka. Jeśli wykres funkcji f leży powyżej wykresu funkcji g , to funkcja f przyjmuje wartości większe od funkcji g , czyli $f(x) > g(x)$, $x \in D_f, D_g$.
- 12*. Funkcje f i g określone są wzorami $f(x) = 2x^2 - 10x + 7$ oraz $g(x) = -x^2 - x + 1$. Wyznacz zbiór argumentów x , dla których funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja g .
13. W 2017 roku w pewnej fabryce produkowano 8000 aparatów telefonicznych miesięcznie. W styczniu 2018 roku nastąpił wzrost produkcji o pewien procent. W lutym 2018 roku produkcja w tym zakładzie wzrosła o taki sam procent, jak w styczniu, i do następnego miesiąca utrzymywała się na tym samym poziomie. Wówczas okazało się, że w marcu 2018 roku wyprodukowano 9680 aparatów. Oblicz w zeszycie, o ile procent wzrosła produkcja w styczniu.
14. Jeżeli długość jednego z boków kwadratu zwiększymy dwukrotnie, a długość drugiego boku zmniejszymy o 2 cm, to otrzymamy prostokąt o polu większym od pola tego kwadratu o 12 cm^2 . Wyznacz długość boku tego kwadratu.
15. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 7 cm dłuższa od drugiej i o 1 cm krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz w zeszycie długości boków tego trójkąta.
16. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych wynosi 245. Wyznacz te liczby.
17. Długości przekątnych rombu różnią się o 4 cm, a bok tego rombu ma długość 10 cm. Oblicz w zeszycie długości przekątnych.
18. Na rysunku przedstawiono projekt prostokątnego trawnika. Na jego środku znajduje się rabata kwiatowa o wymiarach 3 m na 2,5 m. Z każdej strony rabaty jest pas trawy o tej samej szerokości. Oblicz w zeszycie szerokość tego pasa, wiedząc, że powierzchnia zajęta przez rabatę to $\frac{1}{3}$ powierzchni całego trawnika.

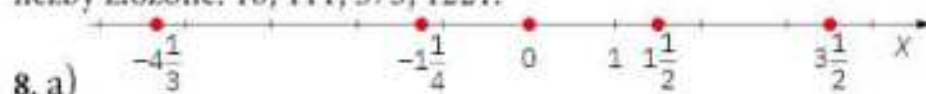


19. Rozłóż liczbę 31 na takie dwa składniki, których iloczyn wynosi 168.
20. Oblicz w zeszycie współrzędne punktów należących do wykresu funkcji $y = x^2 + 3x - 5$, których rzędna jest o 3 większa od odciętej.
21. Różnica długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynosi 2 dm, a przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość 10 dm. Oblicz w zeszycie długości przyprostokątnych.
22. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 5, a kwadrat tej liczby jest nie większy niż 529. Wyznacz wszystkie liczby spełniające ten warunek.
23. Długości boków trójkąta prostokątnego są kolejnymi liczbami parzystymi. Wyznacz długości boków tego trójkąta.
24. Na spotkanie do klubu szachowego przyszło n osób. Wszyscy obecni przywitali się poprzez uścisk dłoni. Ile osób uczestniczyło w spotkaniu, jeśli liczba wszystkich uścisków dłoni jest równa 66?
25. W młynie było x worków mąki, każdy o masie x kg. Po sprzedaniu 50 worków okazało się, że w młynie pozostało 975 kg mąki. Ile kilogramów mąki było początkowo w młynie?

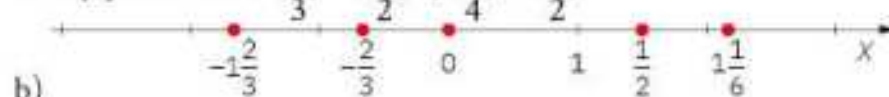
I LICZBY RZECZYWISTE

1.1. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

1. a) 6; 0; 4; 356, b) 6; 4; 356, c) $-8; -\frac{8}{2}; -2\frac{3}{3}$. 2. $\sqrt{5}; \sqrt{40}; \sqrt{13}; \sqrt{\frac{1}{3}}$. 3. $d = \sqrt{34}$, tak. 4. $b = \frac{21}{28} = 0,75$, $c = \frac{19}{16} = 1,1875$. 5. $\sqrt{22} = 4,690... \approx 4,7$, tak. 6. $-\frac{7}{3}; \frac{0}{17}; -\frac{5}{4}; \frac{16}{5}; \frac{86}{7}; \frac{306}{25}$. 7. liczby pierwsze: 11, 17, 101, liczby złożone: 18, 111, 375, 1221.



liczby przeciwne: $4\frac{1}{3}; -3\frac{1}{2}; 0; 1\frac{1}{4}; -1\frac{1}{2}$,



liczby przeciwne: $-1\frac{1}{6}; 1\frac{2}{3}; 0; -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$.

9. a) $A = -2\frac{1}{2}$, $B = -1\frac{5}{8}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{7}{8}$, $E = 1\frac{5}{8}$, b) $A = -10$, $B = -6\frac{1}{2}$, $C = -2$, $D = 3\frac{1}{2}$, $E = 6\frac{1}{2}$.

10. a) $-6 < -4 < -3 < -2 < 0 < 1 < 6 < 66$, b) $9 > 7 > 3 > 0 > -4 > -8 > -18 > -19$.

11. Poprawny wynik działania wynosi 4,66. 12. $\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1$. 13. a) $\frac{1}{3} = 0,(3)$, b) $1\frac{1}{4} = 1,25$, c) $\frac{1}{2} = 0,5$,

d) $\frac{2}{9} = 0,(2)$. 14. $a = 0, (1) = \frac{1}{9}$, $b = 0, (3) = \frac{1}{3}$, $a + b = \frac{4}{9}$, $a \cdot b = \frac{1}{27}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$. Z.S.: 1. A. 2. C. 3. D. 4. A. 5. A. 6. B.

1.2. Działania w zbiorze liczb wymiernych

1. a), c). 2. b). 3. tak. 4. 477. 5. a) 164, b) 221, c) 80 000, d) 150, e) 150, f) 2600. 6. a). 7. a) 9822; 5710; 5228; 2200; 8112; 9302, b) 5228; 2200; 8112, c) 5710; 3365; 7075; 2200; 3555; 4215, d) 2511; 3555; 3069.

8. a) $(40 - 3) \cdot 5 = 185$, b) $(100 - 4) \cdot 4 = 384$, c) $6 \cdot (1000 - 1) = 5994$, d) $70 \cdot (50 - 1) = 3430$. 9. a) 33, b) -40, c) 0, d) -21, e) 42, f) -4, g) 73, h) -69. 10. a) 170, b) -2940, c) -260, d) 4, e) -3,6, f) -6,25. 11. a) 54,

b) -18, c) -20, d) 10, e) -3, f) -130. 12. a) 0, b) $4\frac{1}{4}$, c) $-7\frac{9}{14}$, d) $6\frac{11}{12}$, e) -2, f) $-10\frac{7}{8}$, g) $26\frac{13}{15}$, h) $-6\frac{38}{39}$,

i) $8\frac{3}{4}$. 13. a) $7\frac{5}{9}$, b) $-1\frac{1}{11}$, c) $13\frac{1}{3}$, d) 9. 14. a) 3,28, b) -2,4, c) -16,69, d) 10,05, e) 2,1, f) -39,6, g) -0,95,

h) 17,64, i) 134,4, j) -375, k) 1,2, l) -30,9. 15. $1\frac{1}{3}$. 16. 1. 17. 0,8. 18. $-11,2^\circ\text{C}$. 19. -2,5. 20. -0,5. 21. $-1\frac{1}{12}$.

22. $-\frac{1}{10}$. 23. -3,4. Z.S.: 1. A. 2. D. 3. C. 4. B. 5. A.

1.3. Potęga o wykładniku całkowitym

1. a) 4^{10} ; $(-1,2)^4$; $\left(\frac{3}{11}\right)^9$; $\left(2\frac{1}{2}\right)^{11}$, b) 3^{2+k} ; $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}$; $(-x)^{5+y}$; $(ab)^{7+x+y}$, c) $(-2,3)^2$; $\left(\frac{3}{17}\right)^2$; $(-5)^{x-y}$; a^3 . 2. a) 512,

b) $\frac{1}{3125}$, c) 1, d) 81, e) $12\frac{1}{4}$, f) 1,21, g) 125, h) 1,44, i) $-2\frac{7}{9}$. 3. a) y^8 , b) k^6 , c) z , d) r^3 , e) d^3 , f) 1, g) a^5 , h) b^3 .

4. 0,00032. 5. a) 5^6 ; $(-2)^6$; $(2,1)^{35}$, b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{16}$; $\left(-\frac{8}{11}\right)^{12}$; $\left(2\frac{3}{5}\right)^{14}$, c) b^6 ; a^{30} ; $(2k)^6$, d) $(x-y)^{10}$; $b^{c \cdot d}$; $(-3)^{2 \cdot x \cdot y}$.

6. $a = 1$, $b = -1$, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{0}{2} = 0$. 7. a) 9, b) 25, c) 100, d) 194. 8. 30. 9. $3 \cdot 10^{-26}$ kg; $1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg;

$9,1095 \cdot 10^{-31}$ kg. 10. 2^{15} . 11. 2^{64} . 12. a) 256, b) -729, c) 100, d) -1, e) 128, f) 25, g) 64, h) 1, i) -12. 13. a) 10,

b) 16, c) $\frac{1}{25}$, d) 1, e) $\frac{7}{9}$, f) $21\frac{1}{16}$. 14. 16. 15. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} < (-2)^{-3} < (-2)^{-2} < \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$. 16. 50670,302.
17. $a=1$, $b=-1$, nie. 18. tak, $P=3,6 \cdot 10^7 \text{ cm}^2$. Z.S.: 1. B. 2. C. 3. A. 4. D. 5. A.

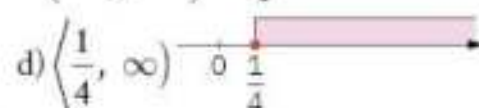
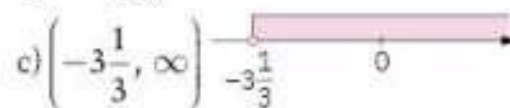
1.4. Pierwiastek arytmetyczny

1. a) 0; 7; 11; 0,2; 0,9; $\frac{5}{6}$; $\frac{13}{14}$; $3\frac{1}{3}$; $1\frac{5}{6}$, b) 1; 2; 4; -3; 0,5; -0,2; $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{6}$; $-1\frac{2}{3}$. 2. a) 2, b) 16, c) 0,25, d) $\frac{2}{3}$, e) 15, f) 125, g) -8, h) $\frac{1}{64}$. 3. a) $-\frac{2}{7}$, b) 1, c) -1, d) $1\frac{3}{7}$. 4. 5 cm. 5. 6 cm. 6. $4\frac{1}{3}$. 7. a) 4, b) 6, c) 3, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{2}{5}$, f) $\frac{2}{5}$, g) 1, h) $\frac{3}{4}$, i) $2\frac{1}{2}$, j) $\frac{1}{2}$, k) -10, l) 2. 8. a) 9, b) 12, c) 10. 9. 5. 10. 2. 11. a) 6, b) 36, c) 0, d) -27.
12. prawda. 13. 0,7. 14. a) 3, b) 12, c) 10, d) -3. 15. a) $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $7\sqrt{2}$; $6\sqrt{3}$; $8\sqrt{2}$; $5\sqrt{7}$; $10\sqrt{5}$; $100\sqrt{7}$; $0,5\sqrt{5}$; $0,6\sqrt{2}$, b) $3\sqrt[3]{5}$; $3\sqrt[3]{6}$; $3\sqrt[3]{9}$; $6\sqrt[3]{2}$; $5\sqrt[3]{5}$; $6\sqrt[3]{3}$; $6\sqrt[3]{7}$; $12\sqrt[3]{2}$. 16. a) $\sqrt{8}$, b) $\sqrt[3]{192}$, c) $\sqrt{72}$, d) $\sqrt[3]{800}$, e) $\sqrt{275}$, f) $\sqrt[3]{-10}$, g) $\sqrt{1,2}$, h) $\sqrt[3]{-\frac{1}{16}}$. 17. $32\sqrt{2}$. 18. a) $2 < \sqrt{6} < 3$, b) $1 < \sqrt{3} < 2$, c) $-4 < -\sqrt{12} < -3$, d) $9 < \sqrt{90} < 10$, e) $-2 < -\sqrt[3]{4} < -1$, f) $-3 < \sqrt[3]{-10} < -2$. 19. $(10 + 2\sqrt{5}) \text{ cm}$. 20. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, b) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$, c) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, d) $\sqrt[3]{9}$, e) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.
Z.S.: 1. B. 2. D. 3. A. 4. C. 5. D. 6. B.

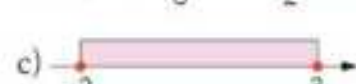
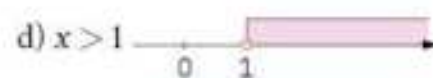
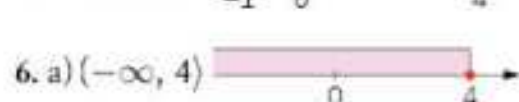
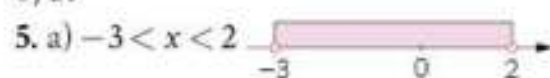
1.5. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych

1. a) -1,689, b) $-\frac{1}{4}$, c) $\frac{11}{12}$, d) $2 + 2\sqrt{2}$. 2. $\frac{5}{16}$. 3. 24. 4. 1,7. 5. a) 12, b) 2, c) -3, d) 21. 6. a) $-\frac{2}{5}$, b) -2,8. 7. 8.8. $6\frac{1}{2}$. 9. a) $66\frac{2}{3}\%$, b) 150%. 10. 72. 11. $a < b$. 12. $\frac{7}{3}$. 13. a) 10, b) $1\frac{2}{3}$. 14*. 28. Z.S.: 1. D. 2. A. 3. C. 4. B.

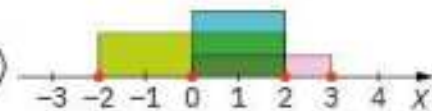
1.6. Oś liczbowa i przedziały liczbowe

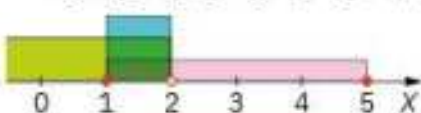


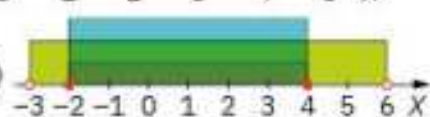
3. a) $(-2, 6, \infty)$, b) $(-\infty, 3\frac{5}{6})$, c) $(2, \infty)$, d) $(-\infty, \frac{7}{8})$. 4. np.: a) 1; 2; 3, b) -2; 0; 1, c) -5; -4; -3, d) -3; 0; 5.

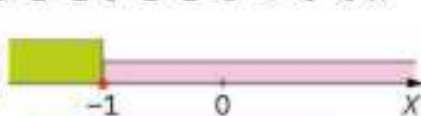


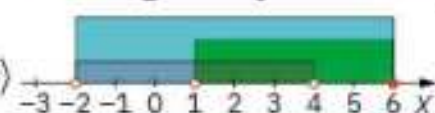
8. a) $x \in (2, 7)$, b) $x \in (-5, 0)$, c) $x \in (-4, -1)$, d) $x \in (-3, 3)$.

9. a) $\langle 0, 3 \rangle \cap \langle -2, 2 \rangle = \langle 0, 2 \rangle$ 

b) $\langle -\infty, 2 \rangle \cap \langle 1, 5 \rangle = \langle 1, 2 \rangle$ 

c) $\langle -2, 4 \rangle \cap \langle -3, 6 \rangle = \langle -2, 4 \rangle$ 

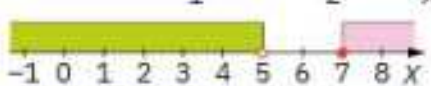
d) $\langle -\infty, -1 \rangle \cap \langle -1, \infty \rangle = \{-1\}$ 

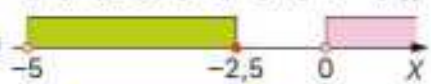
10. a) $\langle -2, 4 \rangle \cup \langle 1, 6 \rangle = \langle -2, 6 \rangle$ 

b) $\langle 2, 7 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle = \langle 2, 7 \rangle$ 

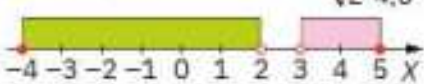
c) $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -3, 0 \rangle = \langle -\infty, 0 \rangle$ 

d) $\langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle = R$ 

11. a) $\langle -\infty, 5 \rangle \cup \langle 7, \infty \rangle$ 

b) $\langle -5, -2,5 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$ 

c) $\langle -\infty, \sqrt{2} \rangle \cup \langle 4,5; \infty \rangle$ 

d) $\langle -4, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$ 

12. a) 7,5, b) 0, c) 20, d) 4. 13. a) -7, 7, b) 0, c) $-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}$, d) nie ma rozwiązania. 14. a) $|x| \leq 3$, b) $|x| < \sqrt{2}$, c) $|x| > 2$, d) $|x| \geq \sqrt{3}$.

15. a) $\langle -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \rangle$ 

b) $\langle -\infty, -1\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 1\frac{1}{2}, \infty \rangle$ 

c) $\langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 5, \infty \rangle$ 

d*) $\langle -7, 3 \rangle$ 

Z.S.: 1. A. 2. C. 3. B. 4. D.

1.7. Własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych

1. 9180 zł. 2. 9%. 3. 44 152,52 zł, 4152,52 zł. 4. 4000 zł. 5. lokatę A. 6. 2 mln. 7. 26 458,98 zł. 8. 1 rok. 9. 1%. 10. 7,9%. 11. 12,5 g. 12. 3072 gramy. 13. 18 godzin. Z.S.: 1. C. 2. D. 3. C. 4. B.

1.8. Zadania utrwalające

1. a) 2; 3; 4; 9, b) 2; 3; 4; 5; 10, c) 2; 3; 4, d) 2; 3; 4; 5; 9; 10. 2. $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

3. $2n+1+2n+3+2n+5+2n+7=8n+16=8(n+2); n \in N$. 4. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$. 5. $9 < \sqrt{90} < 10$. 6. a) 27, b) 12,

c) -2, 7. $\frac{1}{2}$. 8. z, y, x. 9. $-\frac{13}{97}$. 10. 8. 11. a) -8, b) 4, c) -27, d) $\frac{4}{11}$, e) 256. 12. a) 2^7 , b) 2, c) 2^{27} , d) 2^{20} . 13. $2,3 \cdot 10^8$.

14. $\frac{1}{243}$. 15. b^4 . 16. a) 12; 0,3; $\frac{13}{14}$; $\frac{11}{6}$, b) 6; -3; 0,5; -0,9; $-\frac{5}{3}$. 17. a) 7, b) -2. 18. a) $7\sqrt{2}; 8\sqrt{2}; 5\sqrt{7}; 10\sqrt{5}$;

$0,5\sqrt{5}$, b) $3\sqrt[3]{6}$; $6\sqrt[3]{2}$; $5\sqrt[3]{5}$; $12\sqrt[3]{2}$. 19. a) $\frac{\sqrt{5}}{15}$, b) $\frac{5\sqrt{7}}{98}$, c) $3\sqrt[3]{3}$. 20. a) 5,4, b) 31, c) -80, d) 3. 21. 80%. 22. 10.

23. a) $\langle -1, 3 \rangle$

c) $(0, 4)$

b) $\langle -3, 2 \rangle$

d) $\left(2\frac{1}{2}, \infty\right)$

24. a) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R}$

b) $\langle 3, 5 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle = \langle 3, \infty \rangle$

c) $\langle -5, 0 \rangle \cup \langle -1, 5 \rangle = \langle -5, 5 \rangle$

d) $\langle -2, 0 \rangle \cup \langle -4, -2 \rangle = \langle -4, 0 \rangle$

25. a) $\langle -4, 2 \rangle \cap \langle 2, \infty \rangle = \emptyset$

b) $\langle -7, 0 \rangle \cap \langle -2, 2 \rangle = \langle -2, 0 \rangle$

c) $\langle -\infty, -3 \rangle \cap \langle -4, -3 \rangle = \langle -4, -3 \rangle$

d) $\langle -\infty, -1 \rangle \cap \langle -3, \infty \rangle = \langle -3, -1 \rangle$

26. a) $x \in \left\langle -3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3} \right\rangle$

b) $x = -2,5$ lub $x = 2,5$

c) $\mathbb{R} - \{0\}$

d) brak rozwiązania.

27.* bank A. 28. 4%. 29. 2025,10 zł.

II WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

2.1. Wzory skróconego mnożenia

1. a) $2x+4$, b) $(a+b)^2-1$, c) $5d^3$, d) $(x+y)(x-y)$, e) $\frac{(c-d)^2}{2}$. 2. a) $3x+5y-3$, b) $2a+3a^2$, c) $-5a^3-2a+2$,

d) $6y-2xy$. 3. a) $-21x+6$, b) $10a^2-2ab$, c) $3x^2+7x-6$, d) $-5a^2+6,5a-2$. 4. a) $1+2a+a^2$, b) $4x^2+28x+49$, c) $a^2+10a^2b+25a^2b^2$, d) $0,01a^2+4ab+400b^2$, e) $x^4+2x^3+x^2$, f) $16y^2+8\sqrt{2}xy+2x^2$.

5. a) $y^2-16y+64$, b) $100-20x+x^2$, c) $225-60b+4b^2$, d) $\frac{1}{9}x^2-4xy+36y^2$, e) $5-4\sqrt{5}a+4a^2$,

f) $3a^2-6\sqrt{2}ab+6b^2$. 6. a) a^2-1 , b) $\frac{1}{4}-b^2$, c) $9x^2-4$, d) $0,36-100a^2$, e) $16-a^2$, f) $49y^2-25x^2$.

7. a) $a^2+2\sqrt{3}a+3$, b) $x^4-\frac{4}{9}x^2$, c) $7-4\sqrt{7}a+4a^2$, d) $4a^4+12a^3b+9a^2b^2$, e) $25x^4-4y^2$, f) $5\frac{4}{9}+2\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}b^2$.

8. a) $9+4\sqrt{5}$, b) $19+8\sqrt{3}$, c) $15-4\sqrt{11}$, d) $9-6\sqrt{2}$, e) $110+60\sqrt{2}$, f) $74-40\sqrt{3}$. 9. a) 31, b) -11, c) 4, d) 30.

10. a) $(a+5)^2$, b) $(3a+2b)^2$, c) $(c+6)(c-6)$, d) $(b-8)^2$, e) $(10a-4b)^2$, f) $(9c-11d)(9c+11d)$. 11.

a) $(x+2)^2$, b) $(2a+3b)^2$, c) $(a-3)^2$, d) $(6y-1)^2$, e) $(12-2b)^2$, f) $(5x+0,1y)^2$. 12. a) $(y-x)(y+x)$,

b) $(a-11)(a+11)$, c) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{9}\right)$, d) $(8x-14y)(8x+14y)$, e) $(0,2-10y)(0,2+10y)$.

$$f) (ab - 0,3a)(ab + 0,3a).$$

$$13. a) (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9, b) (7x + 1)^2 = 49x^2 + 14x + 1, c) (5x + 2)(5x - 2) = 25x^2 - 4.$$

$$14. (2n - 1)(2n + 1) = 4n^2 - 1. \text{ Z.S.: 1. C. 2. B. 3. A. 4. D.}$$

2.2. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń algebraicznych

$$1. a) 3a, b) -1,5a + 4b, c) 1 - 2b, d) x^2 - 3x + 4, e) -9a + 6b + 2, f) 2b^2 + 1, g) 2b - 2a - 2, h) 2x^2 - 2x + 3.$$

$$2. a) 4x + 4; -2, b) 8x + 14; 2, c) 2x^2 + x - 1; 2, d) 3x^2 + 2,5; 9,25, e) 2x^2 - 2x; 7,5. 3. a) 9x^2 - 3x + 2,3, b) -4y + 13, c) x^2 + 0,1, d) -2y^2 - 6y + 9, e) -24x^2 - 17x + 1, f) x^2 - 2x + 2.$$

$$4. a) 2a^2 + 28a + 100, b) 2a^2 - 16a + 34, c) 7, d) 2a + 3, e) 12a - 48, f) 19. 5. 18n^2 + 2. 6. a) x^2 + 6, b) 1 - 3y^2, c) x^2 + 15. 7. 3a^2 - 2, -1\frac{2}{3}. 8. a) x^2 + 4xy + 4y^2; 12\frac{1}{4}, b) 2xy - x^2; -\frac{3}{4}, c) -10xy; 10. 9. 1, 1 > 0. 10. 4x - 5;$$

$$3. 11. 10x + 25; 105 \text{ cm}^2. 12. \text{kwadrat o } 4 \text{ cm}^2. \text{ Z.S.: 1. C. 2. A. 3. D. 4. B.}$$

2.3. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

$$1. a) 3x - 21, b) -8x^3 + 4x^2y - 2x^2z, c) 10a^2 - 6ab - 2ac, d) -1\frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x, e) 2ab + bc - \frac{1}{3}ac,$$

$$f) 3x + 4y - 8z. 2. a) -a + 13, b) -0,5ab + 7, c) -2\frac{1}{2}xy, d) -2,5xy - 4x. 3. a) 2x^3 + 2x^2 - 4x, b) x^3 - 7x - 6,$$

$$c) 12a + 12a^2 + 3a^3, d) 5b - 5b^3. 4. a) 3y^2 + 2xy - x^2, b) -x^2 - 9xy - 5y^2, c) -x^4 + 2xy^3 - 2x^3y + y^4, d) -1,5xy. 5. a) 2x^3 - 2x - 2; -14, b) -2; -2, c) 4a^2 - 3,5; 21,5, d) 2a; 0,25. 6. 10a + 10b, 6a^2 + 13ab + 6b^2.$$

$$7. 10x^2 + 32x + 26. 8. a) 2x + 4y, b) a + 2b + 3c, c) 2a + 2b. 9. a) -2bc, b) 2ab + 2ac + 2bc. 10. a) 3 + 2\sqrt{2}, b) \sqrt{2}, c) 15 + 4\sqrt{2}, d) 1,5. 11. 2, jest to liczba parzysta. 12. 2n - 4n^2 + 1. Z.S.: 1. C. 2. D. 3. B. 4. A.$$

2.4. Wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias

$$1. a) 2(x + 2), b) 0,3(x - 2z), c) -4a(2 - 3b), d) 2ab(1 + 2ab + 3a^2b^2), e) \frac{1}{5}(x + 3xy - 4y),$$

$$f) 0,5a(a^3 + 10a^2 + a + 10). 2^*. a) (x + y)(3x + 2y), b) 3^n(1 + 3x + 9y), c) (a + 1)(2 - 3b), d) 5^8(25a + 5b + c).$$

$$3. a) 12(a + 2b); 24, b) 1,5(a^2 - 4); 0, c) 3(a + 3b - 2c); 4,5. 4. a) 0,1(-8x + 6b - 5), b) \frac{1}{7}x(4x - 3y + 2y^2),$$

$$c) abc(\sqrt{3} - 2a + b), d) -27xy(1 - 3xy + 9x^2y^2). 5. a) 3x(4yz + 2z + 3y), b) \frac{1}{3}(ab + 2a - 3b),$$

$$c) 0,2a(1 - 2a - 3a^2), d) -7(3x^2y^2 - 2xy + 1). 6. a) 8ab^2c^2 - 4abc^2 + 2b^2c, b) 4abc - 2ac + b,$$

$$c) 2a^2bc - a^2c + 0,5ab; 4abc - 2ac + b. 7. a) 5a + 4b - 3c, b) 5x^2 - 10xy + 5y^2, c) y, d) 0. Z.S.: 1. B. 2. A. 3. C.$$

2.5 Zadania utrwalające

$$1. a) 2,25 + 3x + x^2, b) 9x^2 - 8x + 1\frac{7}{9}, c) 17,64 - 42y + 25y^2, d) 5\frac{1}{16} + 18y + 16y^2, e) 1,21x^2 - 0,01,$$

$$f) x^2 - \frac{1}{81}. 2. a) x^2 - 2x + 1, b) y^2 - 4, c) 4,84 + 4,4x + x^2, d) y^2 - 3,2y + 2,56, e) 9x^4 - 16x^6, f) y^2 + 14y + 49.$$

$$3. a) 31, b) 60 - 14\sqrt{11}, c) 12 + 6\sqrt{3}, d) 30 - 12\sqrt{6}, e) 98, f) 750 + 500\sqrt{2}. 4. a) 24y^2 + 26y - 5, b) x^4,$$

$$c) -20x^2 - 4x + 8, d) 100x^2y^2 + 100. 5. a^2 - 20a + 44; 88. 6. 40n. 7. 2n - 1, 2n + 1, 2n + 3 - trzy kolejne liczby naturalne nieparzyste, 12n^2 + 12n + 11. 8. n, n + 1 - dwie kolejne liczby całkowite,$$

$$n(n + 1) + (n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2. 9. -3 < 0. 10. L = a^2 + 6a - 4, P = a^2 + 6a - 4, L = P.$$

$$11. a) 17 - 3x + 3y, b) 17ab + 15, c) 5x^2 - 5y - 2xy, d) -8x - 12x^2. 12. a) 6x^2 - x^3 - x^4, b) 4x^3 - 4x^2 - 9x + 9,$$

$$c) 8c + 8c^2 + 2c^3, d) 729pq + 81p^2q^2 - 81p^3q - 9p^2q^2. 13. a) 2x^3, b) -13x^2, c) 3a + 3, d) -3a. 14. a) x\sqrt{3} - 6,$$

$$b) -9x^2 + 9x\sqrt{3}, c) -6x\sqrt{3} + 9, d) 3. 15. 4n + 1. 16. a) 5x(5y - 1), b) \frac{1}{2}(x + 3y), c) -9a(2a - b),$$

$$d) 0,5(14a^2b + 7a^2 - 1), e) \frac{1}{4}z(5xy - 3y - x), f) ab(a^3b^3 - a^2b^2 - ab + 1). 17. a) 0,1x(-11yz + 22y - 33z),$$

$$b) -x(1,1yz - 2,2y + 3,3z), \text{ np. } 1,1x, -1,1x. 18. a) -1,3x(4 + 2z - 3y), b) 11a(2 - 4a + a^2). 19. a) 2a(a + 2b); 568, b) 5(a - 3b); -50. 20. 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3.$$

III RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI LINIOWE

3.1. Równania równoważne

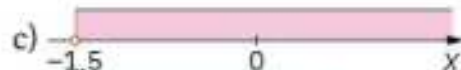
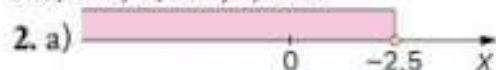
1. a) 2, b) 0, c) -10, d) 9. 2. a) nie spełnia, b) spełnia, c) spełnia, d) nie spełnia. 3. a i f, b i c, d i e. 4. a) 3, b) -1, c) 0, d) 2, e) 22, f) 4. 5. a) $x + 1,2 = 15,5$; 14,3, b) $6 + \frac{1}{3}y = -4$; -30, c) $2x - 3,4 = 21,8$; 12,6, d) $\frac{1}{5}y - 2,8 = 5$; 39. 6. a) 4, b) 13,5, c) 0,5, d) 3,2, e) $5\frac{1}{7}$, f) -3. Z.S.: 1. D. 2. A. 3. B. 4. C.

3.2. Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

1. a) -4, b) równanie sprzeczne, c) $-\frac{3}{4}$, d) 2, e) 1, f) równanie tożsamościowe, g) -1,5, h) -17. 2. a) 12, b) 4,8, c) -2, d) -1, e) 0,5, f) 3,6. 3. a) 33, b) -1, c) -0,5, d) 11. 4. a) $\sqrt{5}$, b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$, d) $2\sqrt{2}$. 5. a) 1, b) -0,5, c) 2, d) 0,1. 6. Maja: 35 zł, Agata: 105 zł. 7. pierwsze naczynie: 48 l, drugie naczynie: 24 l. 8. za 19 lat. 9. za 2 lata. 10. 9,81 zł. 11. 32. 12. 6,25 kg. 13. 200, 250, 280, 240. 14. 34 zł, 36 zł. Z.S.: 1. D. 2. C. 3. A. 4. D.

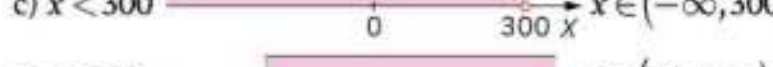
3.3. Nierówności równoważne

1. a) nie, b) tak, c) tak.



3. a) $x \leq 2$, b) $x \geq -3\frac{1}{2}$, c) $x < 13,25$, d) $x > -2,3$. 4. a) $x < 3$, b) $x > 6$, c) $x \geq -35$, d) $x \leq 12$, e) $x < -6$,

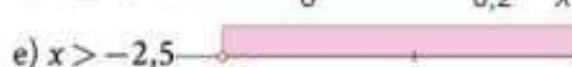
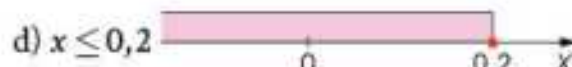
f) $x > 10$. 5. a) $x + 4 < 11$; $x < 7$, b) $y - 15 > 3$; $y > 18$, c) $2z > 0$; $z > 0$, d) $\frac{1}{3}t < 0$; $t < 0$.



Z.S.: 1. C. 2. C. 3. B. 4. A.

3.4. Rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

1. a) $x \geq -4$, b) $x < 15,5$, c) $x \leq 41$, d) $x \leq 6$, e) $x \geq -8,5$, f) $x < 1$. 2. a) nierówność sprzeczna, b) nierówność tożsamościowa, c) nierówność tożsamościowa, d) nierówność tożsamościowa, e) nierówność sprzeczna, f) nierówność tożsamościowa.



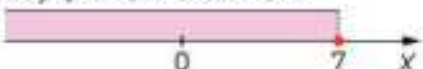
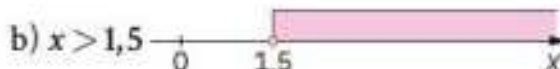
4. a) $x \in \left(-1\frac{2}{7}, +\infty\right)$, b) $x \in (-\infty, 1)$, c) $x \in (-\infty, 9)$, d) $x \in (30, +\infty)$, e) $x \in (-6, +\infty)$, f) $x \in (-\infty, 18)$.

5. a) $x < -2$, b) $x < 2$, c) $x \leq -\frac{1}{4}$, d) $x \geq 4$. 6. 0. 7. -4. 8. 12. 9. co najwyżej 3. 10. co najmniej 9. 11. po 12.

12. wyższe niż 10%. 13. 400 lub 621. 14. co najwyżej: 5 monet po 1 zł, 12 monet po 2 zł. 15. 78. 16. 3 cm i 10 cm lub 2 cm i 9 cm, lub 1 cm i 8 cm. Z.S.: 1. D. 2. D. 3. C. 4. A.

3.5. Zadania utrwalające

1. a) 3, b) -0,5, c) 4, d) 1,25, e) 2, f) 5. 2. a) 2, b) 4, c) $\sqrt{7}$, d) $-3\sqrt{3}$. 3. -2,5. 4. 16. 5. 1 cm. 6. 1a - 27, 1b - 29, 1c - 26, 1d - 30. 7. 2500 zł. 8. 25 zł, 40 zł. 9. 2000 zł. 10. 20 kg. 11. a) $x > 0$, b) $x > 8$, c) $x \leq -8$, d) $x \leq -2,4$, e) $x \geq -3,125$, f) $x < 6$. 12. $x < 7$.

13. a) $x \leq 7$  b) $x > 1,5$ 

14. $x \in \langle 7, 15 \rangle$, np. 8, 10, 11. 15. $x < 4$, a) 0, 1, 2, 3, b) 8, c) 5. 16. $x > 25$, $x \leq 30$; 5.

17. $x > -7$, $x \leq 4,25$; 11. 

18. celującą. 19. więcej niż 44 lata. 20. po więcej niż 15 cm.

IV FUNKCJE

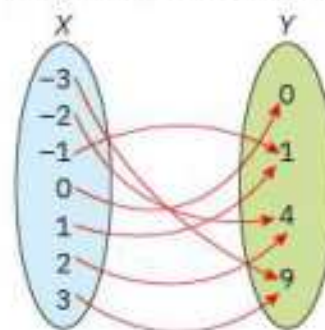
4.1. Pojęcie funkcji i sposoby jej określania

1. a) jest, b) nie jest, c) jest, d) nie jest. 2. c) ponieważ elementowi 5 nie przyporządkowano żadnej liczby.

3. a) np. każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowano jej drugą potęgę, każdej liczbie całkowitej przyporządkowano jej wartość bezwzględną, każdej liczbie naturalnej przyporządkowano liczbę dwa razy większą, b) np. każdej liczbie naturalnej nieparzystej mniejszej od 10 przyporządkowano jej dzielniki, każdemu nauczycielowi przyporządkowano klasę, w której uczy, każdej planecie przyporządkowano jej księżyc.

4. $y = x^2$, $D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $ZW = \{0, 1, 4, 9\}$

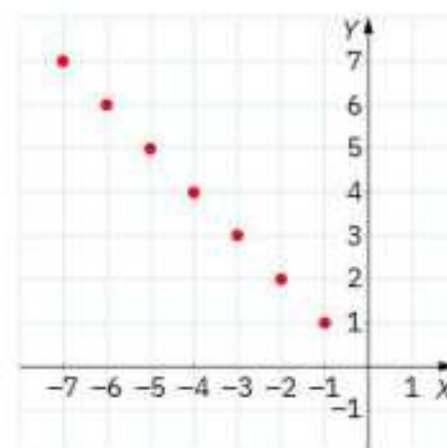
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



5. a) $y = x + 2$, $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$, $ZW = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, b) $y = 3x$, $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $ZW = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

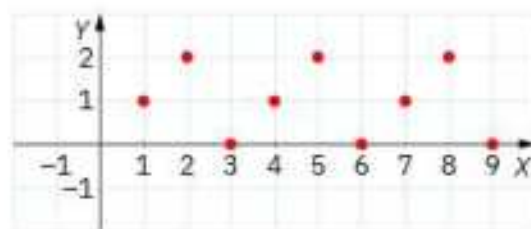
6. a)

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	7	6	5	4	3	2	1



b)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	2	0	1	2	0	1	2	0

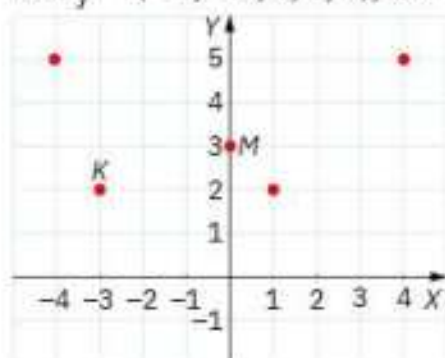


7. a) $D_f = \{I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII\}$, $ZW = \{29, 30, 31\}$, b) 30, c) IV, VI, IX, XI.

8. a)

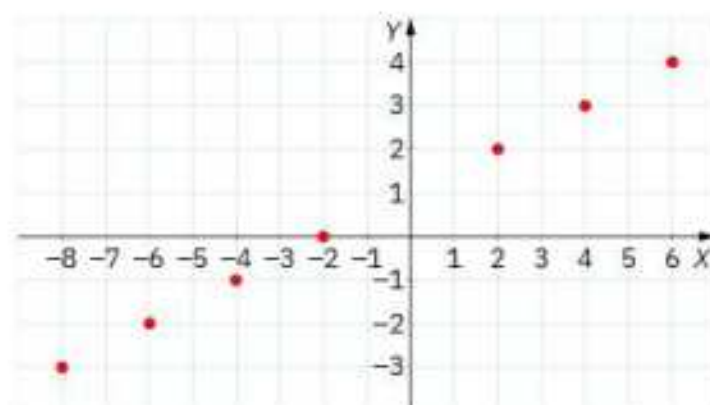
x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
y	1	-2	3	-3	4	0	1	0	-2

b) 9, c) nie, d) 1, e) dla -3 i 5.

9. a) -9, b) $\frac{1}{2}$, c) 1, d) 7, e) 6, f) $6\frac{2}{3}$.10. $A = (-4, -7)$, $B = (2, -1)$, $C = (5, 2)$, $D = (7, 4)$, $E = (3, 0)$, $F = (-7, -10)$.11. $D_f = \{-4, -3, 0, 1, 4\}$, $ZW = \{2, 3, 5\}$ 

12.

x	-8	-6	-4	-2	2	4	6
$y = \frac{1}{2}x + 1$	-3	-2	-1	0	2	3	4



13. a) nie jest, b) jest, c) jest, d) nie jest. Z.S.: 1. B. 2. D. 3. B. 4. D.

5.

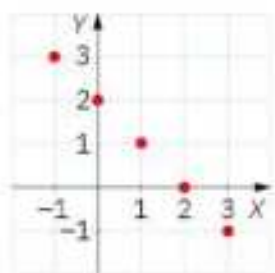
								¹ D		² A	
								W	Z	Ó	R
G	R	A	³ F						I		G
			U						E		U
			N						D		M
	W	Y	K	R	E	S			Z		E
			C						I		N
			J						N		T
	T	A	B	E	L	K	A				

4.2. Dziedzina, wartość funkcji i miejsca zerowe

1. a) $D_f = \mathbb{R}$, b) $D_f = \mathbb{R}$, c) $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, d) $D_f = \langle 1, \infty \rangle$, e) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, f) $D_f = \mathbb{R}$.

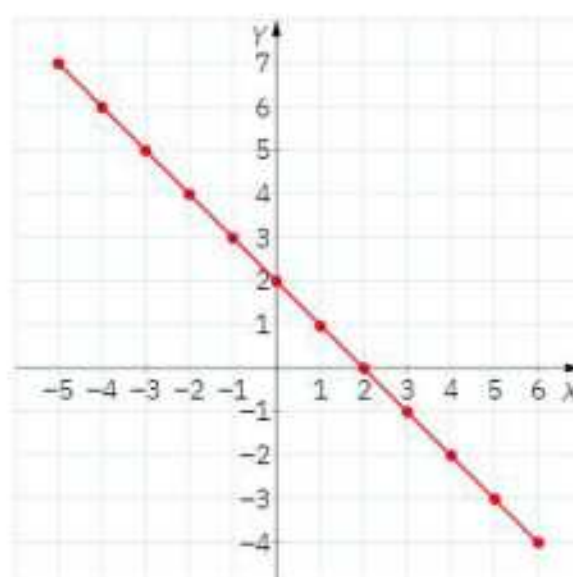
2. a) $ZW = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

x	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	-1



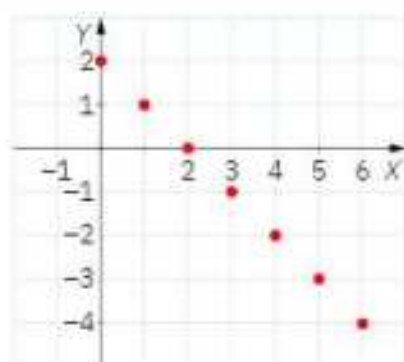
c) $ZW = \mathbb{R}$

x	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	-1



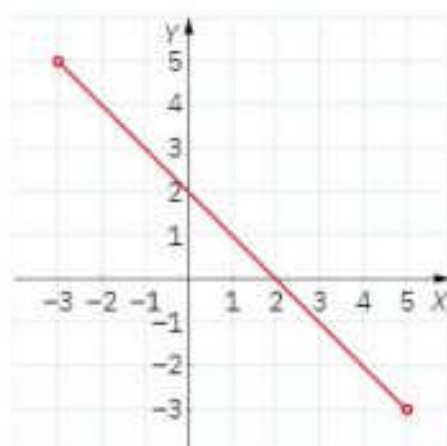
b) $ZW = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

x	0	1	2	3	4
y	2	1	0	-1	-2

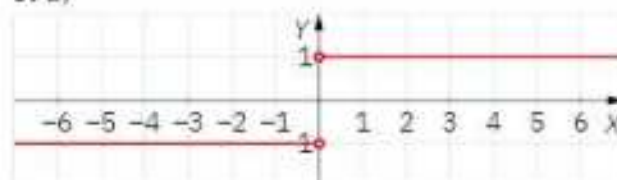


d) $ZW = (-3, 5)$

x	-2	0	1	2	4
y	4	2	1	0	-2



3. a)



b)



4. $f(-3) = 0$, $f(2) = -2$, $f(3) = 0$. 5. a) $x = 1$, b) $x = 1\frac{1}{2}$, $x = -1\frac{1}{2}$. 6. a) $x = 2$, $x = 8$, b) $x = 4$. 7. a) $x = 0$, $x = 3$, $x = 5$, b) $x = -4$, c) brak miejsc zerowych, d) $x = -3$, $x = 1$. 8. a) $x = -3$, b) $x = -2$, $x = 2$. 9. a) $x = 2$, b) $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$, c) $x = -3, 5$, d) $x = 2$, e) $x = 2\frac{2}{3}$, f) $x = \frac{1}{3}$. 10. a) nieskończenie wiele, b) $f(-3) = 4$, $f(0) = 3$, c) $x = -5$.

11. a)

x	0	1	2	3	4
y	2	3	4	5	0

c)

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

b)

x	0	1	2	3	4
y	0	1	0	3	0

12. a) nie, b) $y = 10$, c) $x = \frac{2}{3}$, d) $x = 3$. Z.S.: 1. A. 2. B. 3. B. 4. C.

4.3. Odczytywanie własności funkcji z wykresu. Dziedzina funkcji, zbiór wartości i monotoniczność funkcji

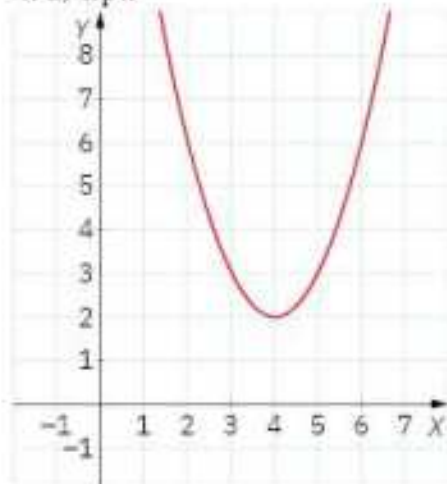
1. a) $D_f = (-4, 3]$, b) $D_f = (-7, 6]$. 2. a) $ZW = (-2, 4]$, b) $ZW = (-2, \infty)$. 3. $D_f = \{-5, -3, -2, 2, 3, 4\}$, $ZW = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$. 4. a) $D_f = (-5, 5]$, $ZW = (1, 4]$, b) $D_f = (-2, \infty)$, $ZW = (-8, \infty)$, c) $D_f = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $ZW = \{-1, 0, 1\}$, d) $D_f = (-8, -5) \cup (-3, 6]$, $ZW = (-4, 6]$.

5. a) funkcja malejąca, b) funkcja rosnąca, c) funkcja stała, d) funkcja malejąca. 6. a) $(1, 4]$, b) $(-\infty, -3]$ i $(-2, 1]$. 7. a) $(2, 4]$, b) $(-\infty, 1]$. 8. a) $(-\infty, -1]$ i $(2, \infty)$, b) $(2, 4]$. 9. a) $(1, 3]$, b) $(-5, -4]$ i $(-2, 1]$, c) $(-4, -2]$. 10. a) $D_f = \mathbb{R}$, b) $ZW = (-\infty, 4]$, c) funkcja rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -4]$ i $(-1, 3]$, funkcja malejąca w każdym z przedziałów: $(-4, -1]$ i $(3, \infty)$. Z.S.: 1. D. 2. C. 3. B. 4. D.

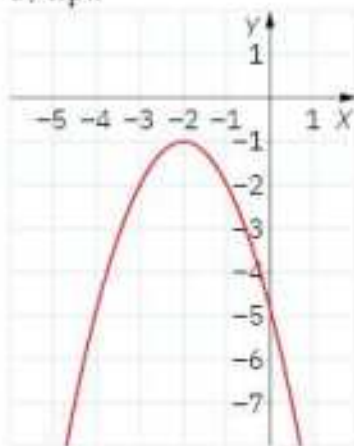
4.4. Odczytywanie własności funkcji z wykresu – ciąg dalszy

1. a) miejsce zerowe: -3 i 3 , wartości dodatnie dla argumentów 0 i 1 , wartości ujemne dla argumentów -5 i 2 , b) miejsce zerowe: $-5, -2, 2$, wartości dodatnie dla $x \in (-5, -2)$ i $x \in (2, 6]$, wartości ujemne dla $x \in (-\infty, -5)$ i $x \in (-2, 2)$, c) miejsce zerowe: 0 , wartości dodatnie dla argumentów: $-3, -2, -1$, wartości ujemne dla argumentów: $1, 2, 3$. 2. a) $x \in (-1, \infty)$, b) $x \in (-7, -3]$, $x \in (5, 8]$. 3. a) $x \in (-\infty, 2)$, b) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, 6]$.

4. a) np.:

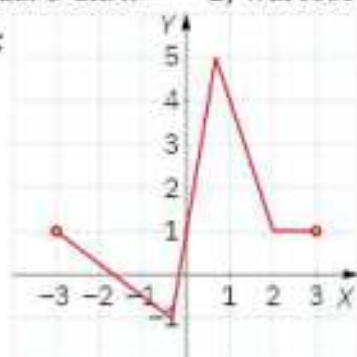


b) np.:

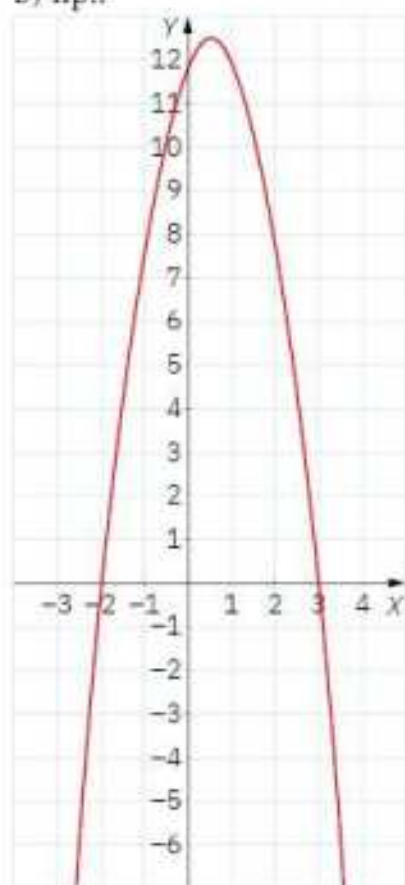


5. a) $x \in (-2, 2]$, b) $x \in (-\infty, -2]$. 6. a) $x \in (-1, 1]$, b) $x \in (-6, -2] \cup (2, 7]$. 7. $x \in (-2, 0) \cup (0, 1) \cup (3, 4]$. 8. a) wartość największa: 4 , wartość najmniejsza: nie istnieje, b) wartość największa: 8 , wartość najmniejsza: 0 . 9. a) wartość największa: 3 dla $x \in (-1, 2) \cup \{8\}$, wartość najmniejsza: -3 dla $x = 6$, b) wartość największa: 3 dla $x = -2$, wartość najmniejsza: -4 dla $x = 8$. 10. a) $y = 3$, b) $y = 1$, c) $y = 3$.

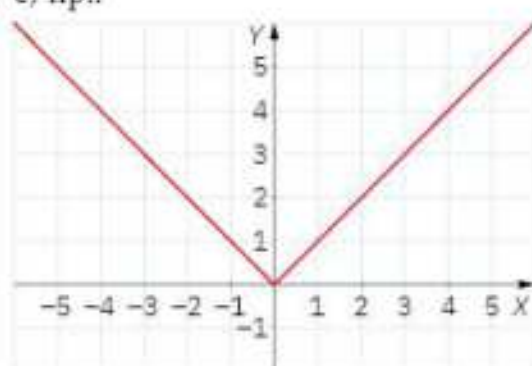
11. a) np.:



b) np.:



c) np.:

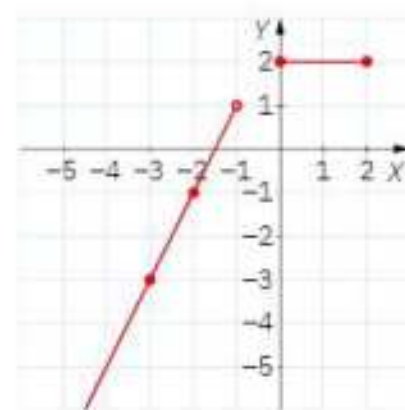


12. $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, 2)$, $ZW = (-\infty, 1) \cup \{2\}$, miejsca zerowe:

$x = -1\frac{1}{2}$, wartości dodatnie dla $x \in (-1\frac{1}{2}, -1) \cup (0, 2)$, wartości ujemne

dla $x \in (-\infty, -1\frac{1}{2})$, funkcja rosnąca dla $x \in (-\infty, -1)$, funkcja stała dla

$x \in (0, 2)$, wartość największa $y = 2$ dla $x \in (0, 2)$, wartość najmniejsza nie istnieje.



13. a) $D_f = (-6, 5)$, $ZW = (-5, 5)$, miejsca zerowe: $x = -5$, $x = 1$, $x = 3\frac{1}{2}$, wartości dodatnie dla

$x \in (-5, 1) \cup (3\frac{1}{2}, 5)$, wartości ujemne dla $x \in (-6, -5) \cup (1, 3\frac{1}{2})$, funkcja rosnąca w każdym z prze-

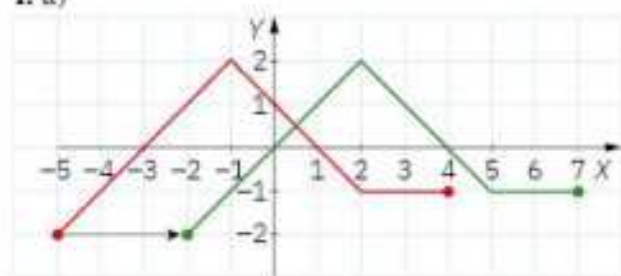
działów: $(-6, -4)$ i $(2, 5)$, funkcja malejąca w każdym z przedziałów: $(-4, -3)$ i $(-1, 2)$, funkcja stała

w przedziale: $(-3, -1)$, wartość największa $y = 5$ dla $x = -4$, wartość najmniejsza $y = -5$ dla $x = -6$,

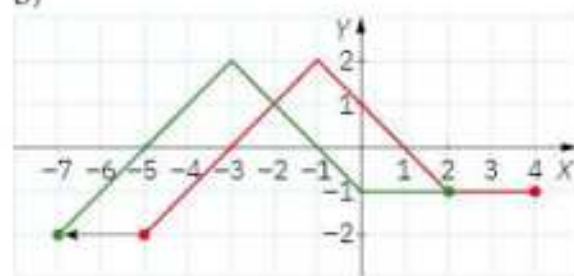
b) $D_f = (-6, 5)$, $ZW = (-3, 2)$, miejsca zerowe: $x = 0$, $x = 3$, $x = 5$, wartości dodatnie dla $x \in (0, 3)$, wartości ujemne dla $x \in (-6, 0) \cup (3, 5)$, funkcja rosnąca w każdym z przedziałów: $(-4, -3)$, $(-1, 2)$ i $(4, 5)$, funkcja malejąca w każdym z przedziałów: $(-6, -4)$ i $(2, 4)$, funkcja stała w przedziale $(-3, -1)$, wartość największa $y = 2$ dla $x = 2$, wartość najmniejsza $y = -3$ dla $x = -4$. Z.S.: 1. D. 2. B. 3. D. 4. C.

4.5. Przesuwanie wykresów funkcji

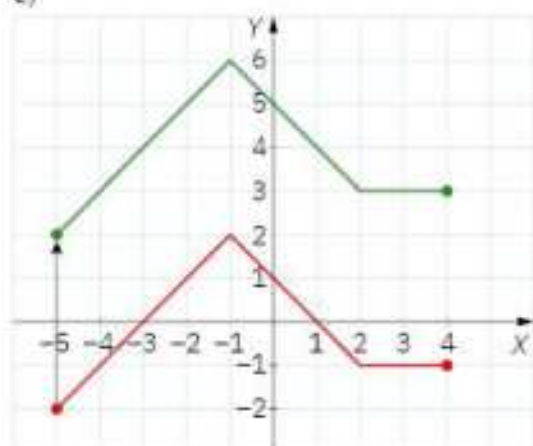
1. a)



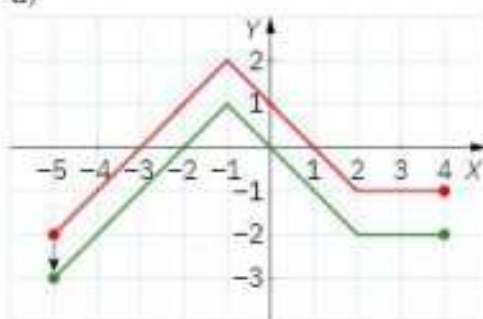
b)



c)



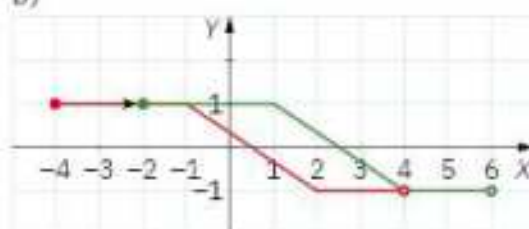
d)

2. a) $[0, -4]$, b) $[7, 0]$, c) $[0, 5]$, d) $[-6, 0]$.

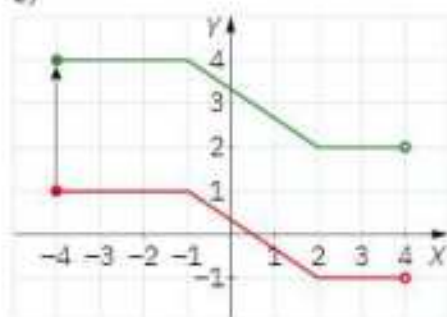
3. a)



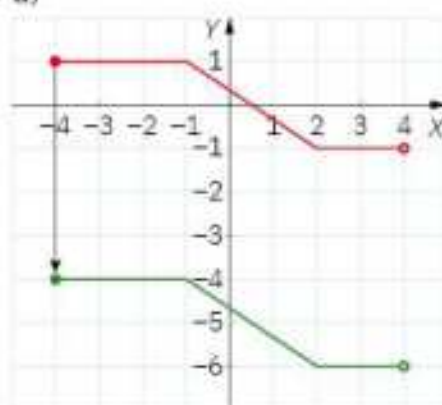
b)



c)

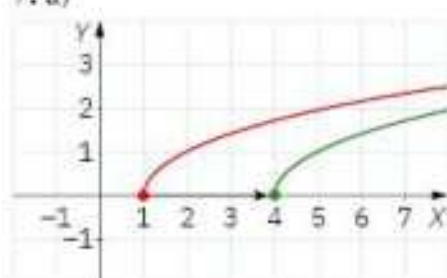


d)

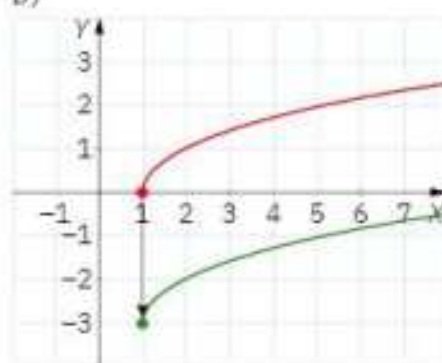


4. a) $[0, 9]$, b) $[11, 0]$, c) $[-7, 0]$, d) $[0, -8]$. 5. a) $y = f(x) - 2$, b) $y = f(x - 9)$, c) $y = f(x) + 7$,
 d) $y = f(x + 11)$. 6. a) $y = f(x - 5)$, b) $y = f(x + \sqrt{2})$, c) $y = f(x) + \sqrt[3]{3}$, d) $y = f(x) - 2\frac{1}{2}$.

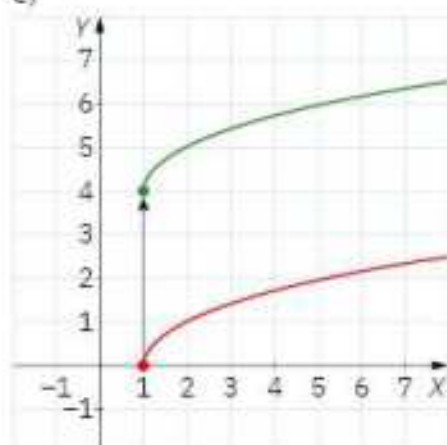
7. a)



b)



c)

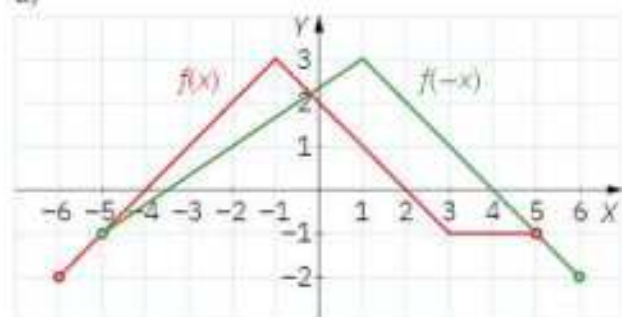


d)

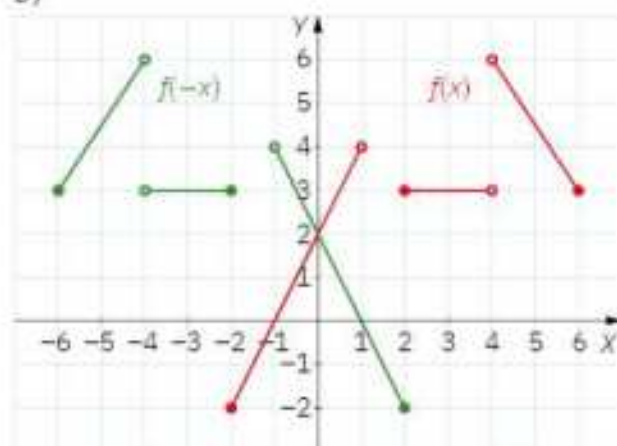


2.

a)



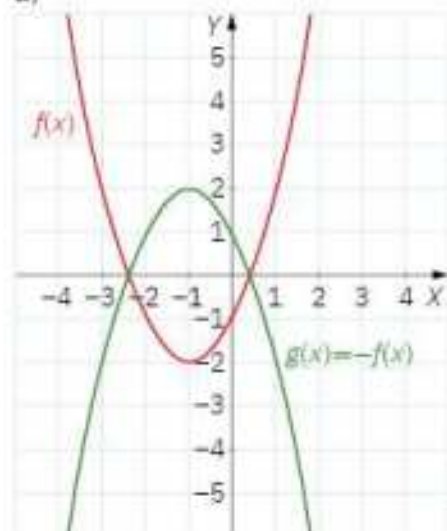
b)



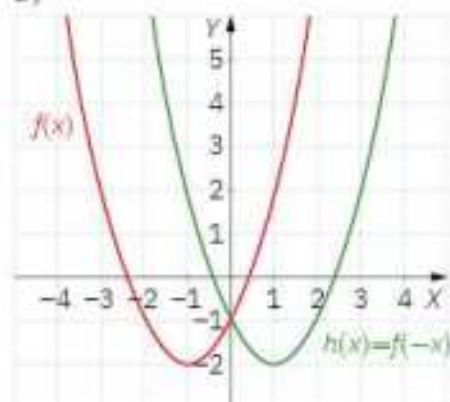
3. a) $y = f(-x)$, b) $y = -f(x)$.

4.

a)

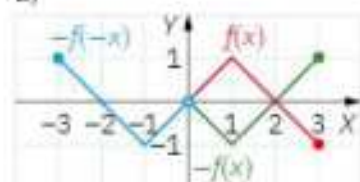


b)

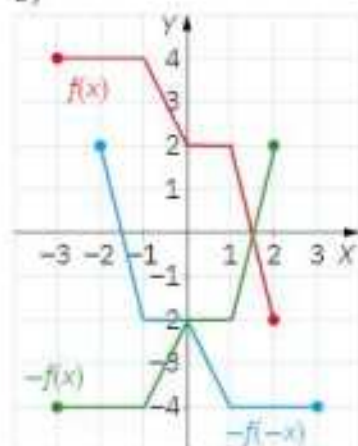


5.

a)

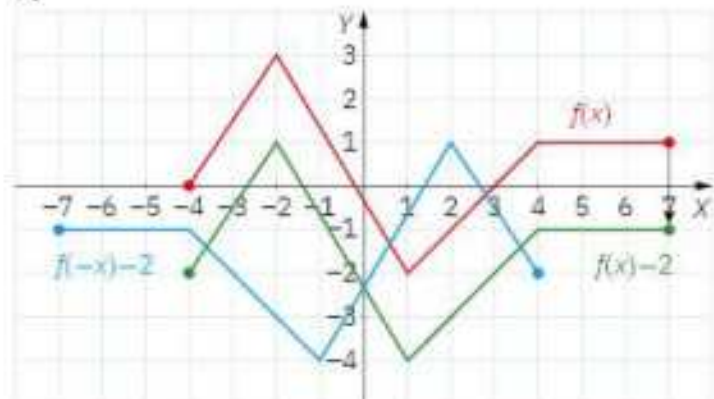


b)

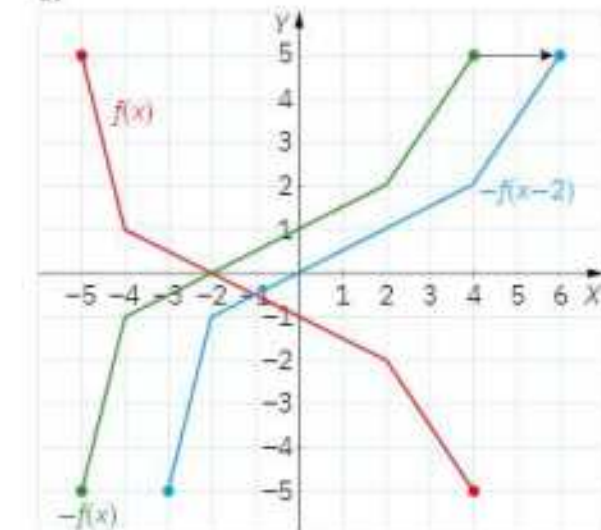


6. $y = -f(-x)$.

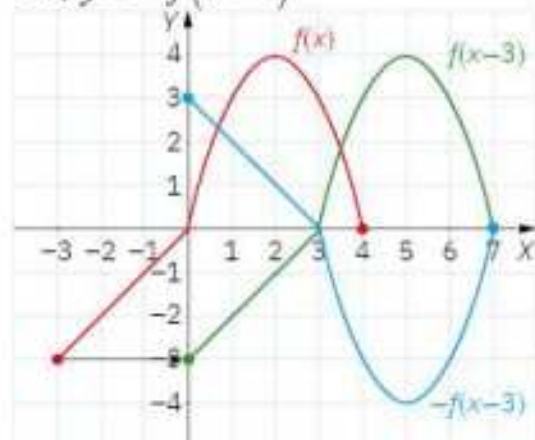
7.



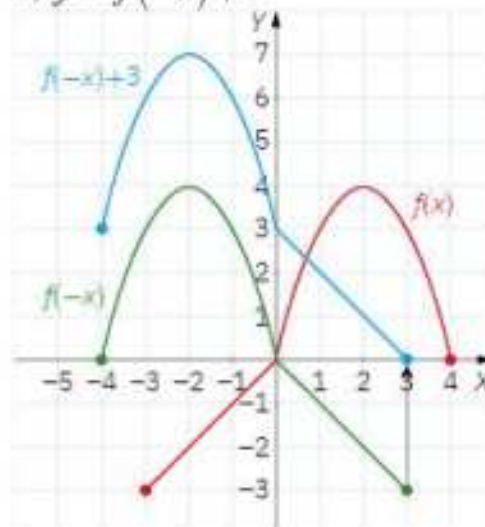
8.



9. a) $y = -f(x-3)$



b) $y = f(-x) + 3$



Z.S.: 1. B. 2. B. 3. D. 4. D.

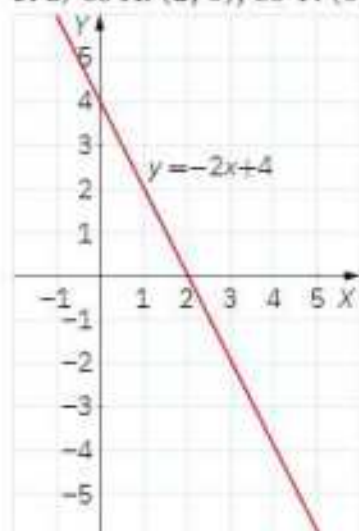
4.7. Funkcja liniowa i jej własności

1. a) $a = 4, b = -9$, b) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{4}$, c) $a = 1, b = 5$, d) $a = 0, b = 0$, e) $a = 0, b = \frac{1}{2}$, f) $a = 3, b = 0$.

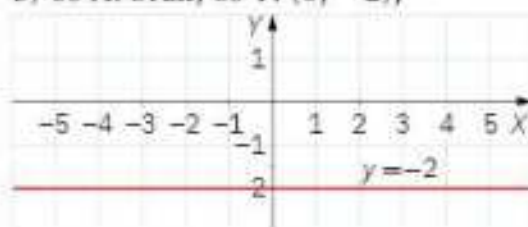
2. a) $f(x) = 3x + 5$, b) $f(x) = \sqrt{3}$, c) $f(x) = 0,2x$, d) $f(x) = 0$, e) $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$, f) $f(x) = \sqrt{5}x + 2\sqrt{5}$.

3. $g(x), h(x)$. 4. a) $x = -3,5$, b) brak, c) $x = 0,5$, d) $x = 0$, e) $x = 1\frac{1}{3}$, f) $x \in \mathbb{R}$.

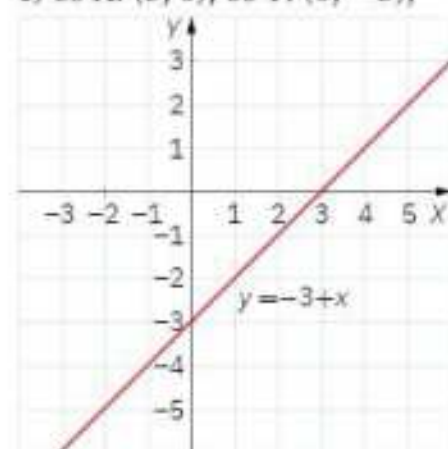
5. a) oś X: $(2, 0)$, oś Y: $(0, 4)$,



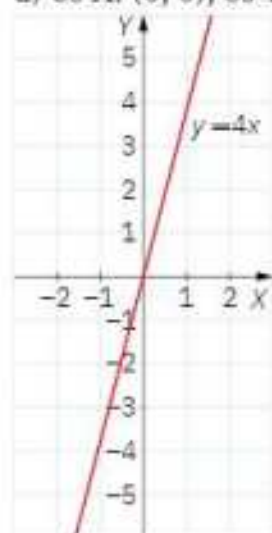
b) oś X: brak, oś Y: $(0, -2)$,



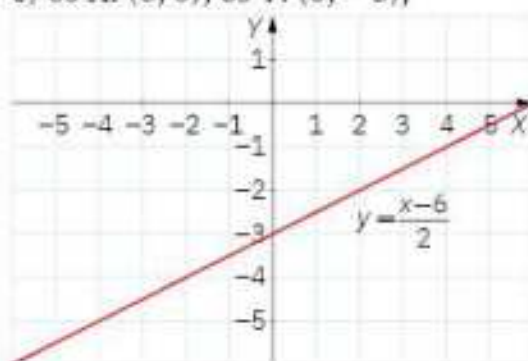
c) oś X: $(3, 0)$, oś Y: $(0, -3)$,



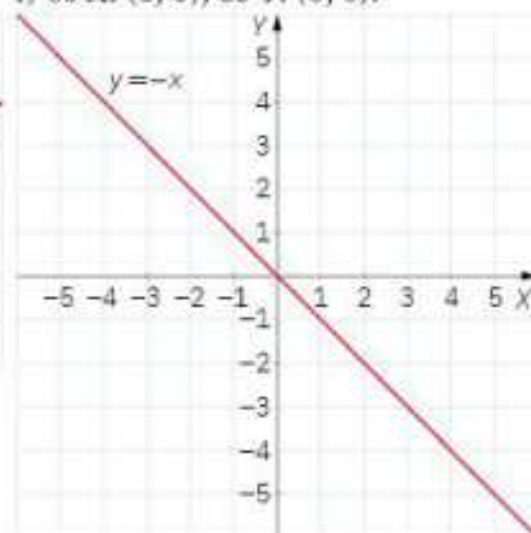
d) oś X: $(0, 0)$, oś Y: $(0, 0)$,



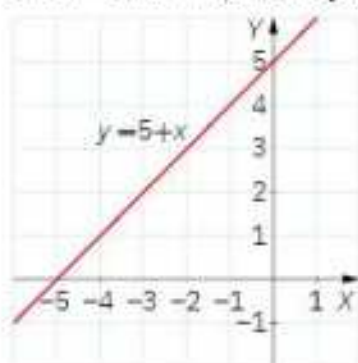
e) oś X: $(6, 0)$, oś Y: $(0, -3)$,



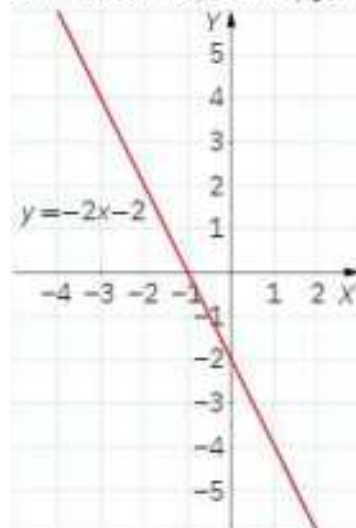
f) oś X: $(0, 0)$, oś Y: $(0, 0)$.



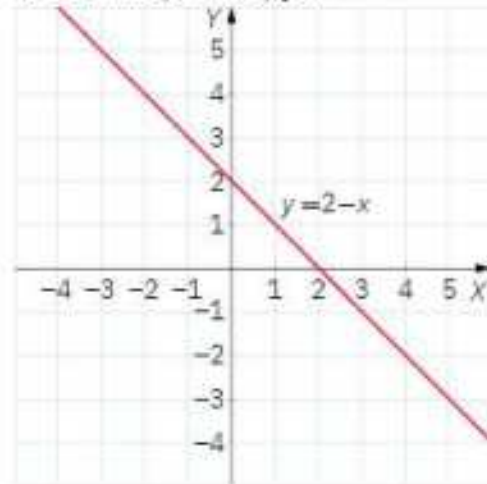
6. a) -5 , funkcja rosnąca,



b) -1 , funkcja malejąca,



c) 2 , funkcja malejąca.

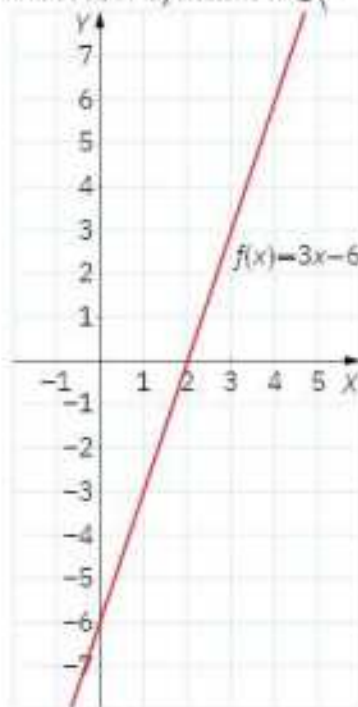


7. a) $f(x) = 3x + 2$, b) $f(x) = -x + 1$, c) $f(x) = -1$. 8. $f(x) = 4x - 8$. 9. a) $g(x) = -\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$, b) $g(x) = x + 5$,

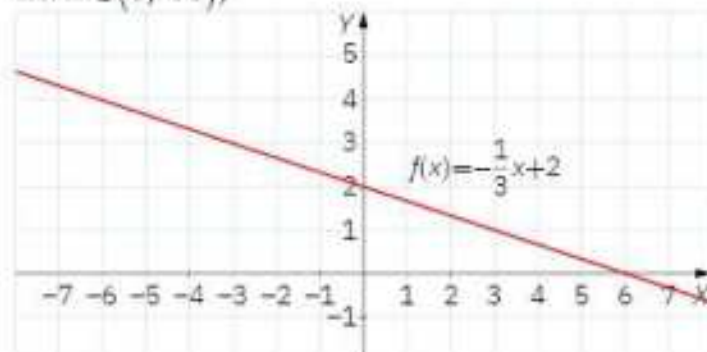
c) $g(x) = 2x + 6$. 10. $b = 5$. 11. a) $a = 3$, b) $a = -10$, c) $a = -6$.

12. a) wartości dodatnie: $x \in (2, \infty)$,

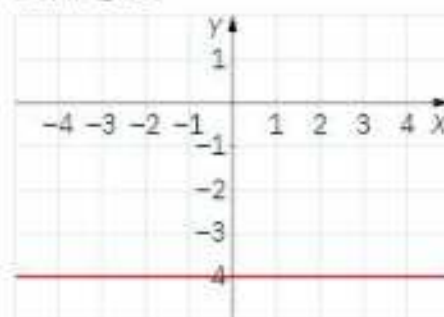
wartości ujemne: $x \in (-\infty, 2)$,



b) wartości dodatnie: $x \in (-\infty, 6)$, wartości ujemne: $x \in (6, \infty)$,



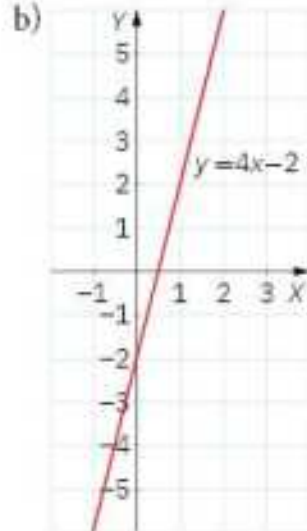
c) wartości dodatnie: nie przyjmuje, wartości ujemne: $x \in \mathbb{R}$.



13. a) $x = 2$, b) $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 4$, c) $x = -1\frac{1}{3}$, d) funkcja malejąca.

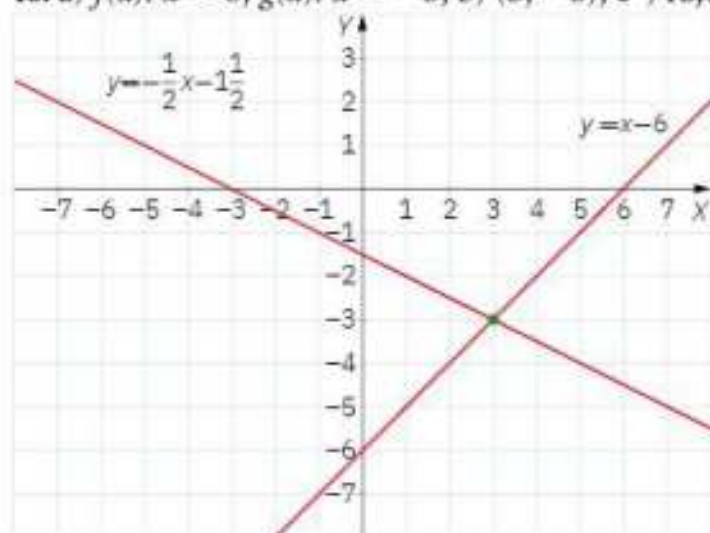
14. a) oś $X: \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, oś $Y: (0, -2)$,

b) c) A , d) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.



15. I. $y = \frac{1}{2}x + 2$, a) $x = -4$, b) $(0, 2)$, c) $x \in (-4, \infty)$; II. $y = 3$, a) brak, b) $(0, 3)$, c) $x \in \mathbb{R}$.

16. a) $f(x): x = 6$, $g(x): x = -3$, b) $(3, -3)$, c) $13,5$.



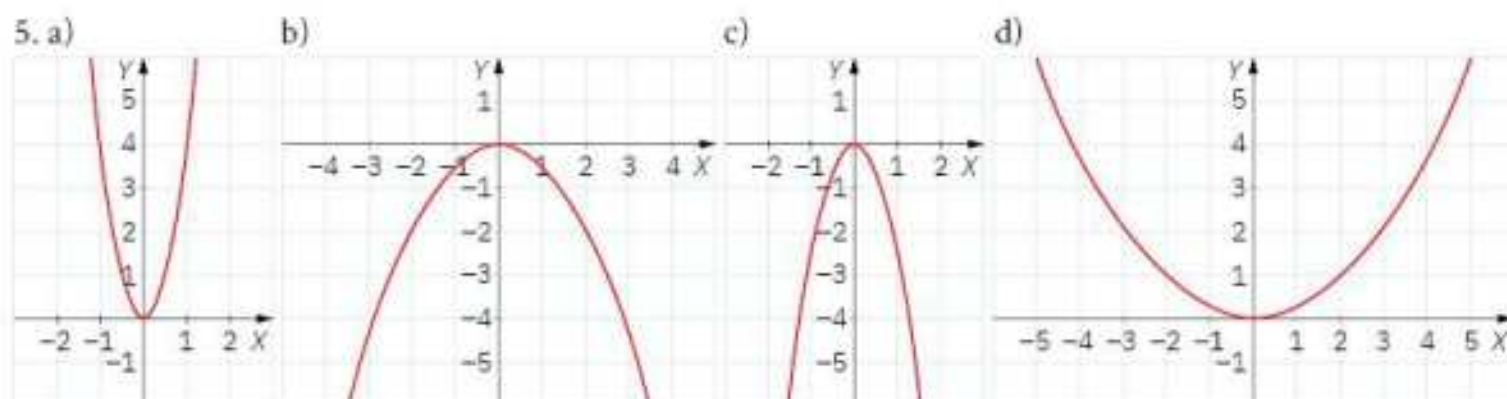
Z.S.: 1. B. 2. C. 3. B. 4. B. 5. C. 6. B. 7. D. 8. A. 9. C.

4.8. Wykres funkcji kwadratowej

1. a) 7, b) 1, c) 2,3, d) $\frac{1}{5}$, e) -1, f) $4\sqrt{3}$. 2. a) $f(x) = 8x^2$, b) $f(x) = -3\frac{3}{4}x^2$, c) $f(x) = 2,5x^2$, d) $f(x) = -6x^2$, e) $f(x) = x^2$. 3. a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = -3x^2$, c) $f(x) = 4x^2$, d) $f(x) = -4x^2$.

4. a = 2

x	0	$\frac{1}{2}$	-0,2	$1\frac{1}{3}$	2	1	0,7
y	0	0,5	0,08	$3\frac{5}{9}$	8	2	0,98



6. a) do góry, b) do dołu, c) do dołu, d) do góry. 7. $f(x) = -3x^2$. 8. $A = (-1, 4)$, $B = (2, 16)$, $C = (\sqrt{2}, 8)$, $D = (3, 36)$ lub $D = (-3, 36)$, E nie istnieje, $F = (10, 400)$ lub $F = (-10, 400)$. 9. $K = (-2, 4)$, $f(x) = x^2$.

10. I. a) $x_0 = 0$, b) $(0, 0)$, c) nie przyjmuje, d) największa 0, najmniejszej nie przyjmuje, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$;

II. a) $x_0 = 0$, b) $(0, 0)$, c) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, d) największej nie przyjmuje, najmniejsza 0, $f(x) = 2x^2$. 11. a) ramiona paraboli do dołu, miejsce zerowe 0, rosnąca w $(-\infty, 0)$, malejąca w $(0, +\infty)$, $ZW = (-\infty, 0)$, b) ramiona paraboli do góry, miejsce zerowe 0, rosnąca w $(0, +\infty)$, malejąca w $(-\infty, 0)$, $ZW = (0, +\infty)$. 12. a) tak,

b) $f(4) = -48$, c) dla $x = 2$ lub dla $x = -2$. 13. a) $(0, +\infty)$, b) $(-\infty, 0)$. 14. np. $f(x) = 5x^2$. Z.S.: 1. C. 2. A.

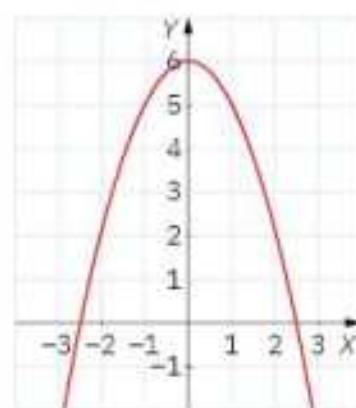
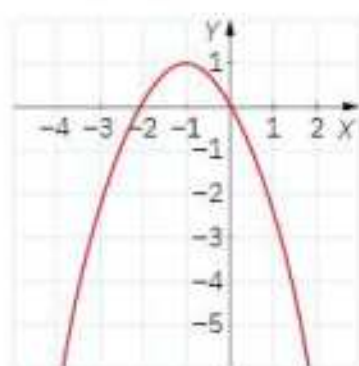
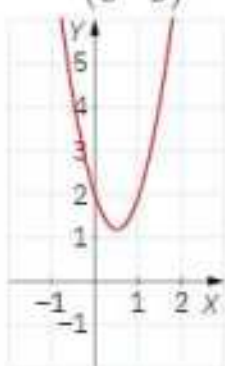
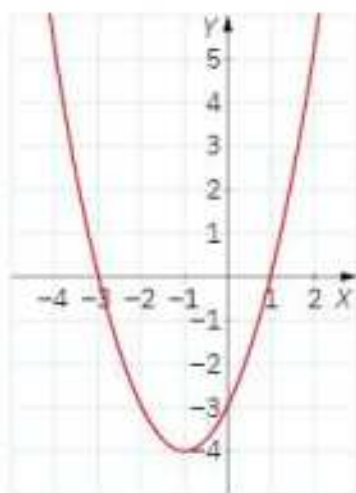
3. D. 4. B. 5. B.

4.9. Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej

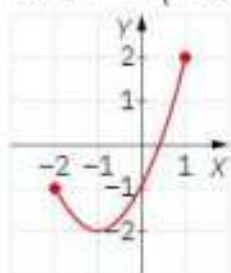
Część pierwsza

1. a) $a=1, b=1, c=1$, b) $a=-\frac{2}{3}, b=1, c=0$, c) $a=1\frac{4}{9}, b=0, c=3$, d) $a=0,4, b=1,3, c=-0,1$.
2. a) $f(x)=3x^2-2x$, b) $f(x)=-3x^2+2x$, c) $f(x)=2,3x^2-0,7$, d) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$. 3. a) $y=(x-1)^2+2$,
b) $y=16\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-5$, c) $y=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-10$, d) $y=-3(x+4)^2+50$.
4. a) $y=x^2+4x+5$, b) $y=2x^2-8x+5$, c) $y=-3x^2-30x-77$, d) $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+2$.
5. a) $y=x^2+2x+4, a=1, b=2, c=4$, b) $y=x^2-8x+21, a=1, b=-8, c=21$, c) $y=-6x^2-6x-\frac{1}{2}$,
 $a=-6, b=-6, c=-\frac{1}{2}$, d) $y=-0,1x^2+0,04x-0,004, a=-0,1, b=0,04, c=-0,004$. 6. a) do góry,
b) do dołu, c) do góry, d) do dołu.

7. a) $-3, (-1, -4)$ b) $2, \left(\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5}\right)$ c) $0, (-1, 1)$ d) $6, (0, 6)$



8. a) $(4, -2)$, b) $\left(-1\frac{1}{2}, 1\right)$, c) $(1, 0)$, d) $(1, -1)$. 9. a) $y=(x-3)^2-5, ZW=(-5, +\infty)$,
b) $y=0,5(x+1)^2-2,5, ZW=(-2,5, +\infty)$, c) $y=-5\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}, ZW=\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$,
d) $y=-10x^2+3, ZW=(-\infty, 3)$.
10. $ZW=(-2, 2)$



11. $f(x)=8(x+4)^2-2$, malejąca w $(-\infty, -4)$, rosnąca w $(-4, +\infty)$. Z.S.: 1. C. 2. C. 3. B. 4. A. 5. A. 6. D.

Część druga

1. $x_1=-2\frac{1}{2}, x_2=1\frac{1}{2}$. 2. a) dwa, b) dwa, c) zero, d) jedno. 3. a) $x_1=-12, x_2=-3$, b) $x_0=\frac{1}{4}$, c) nie ma,
d) $x_1=10, x_2=\frac{2}{5}$. 4. a) $y=(x+8)(x-12)$, b) $y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$, c) nie da się, d) nie da się. 5. a) $y=x^2-14x+33$,
b) $y=-9x^2-9x+4$, c) $y=0,2x^2-1,2x+1,8$, d) $y=\frac{1}{2}x^2+x-24$. 6. a) $x_1=3, x_2=1$, b) $x_1=4, x_2=-2$,
c) $x_1=-0,2, x_2=1,1$, d) $x_1=-\frac{1}{4}, x_2=-\sqrt{2}$. 7. a) $f(x)=(x-5)(x-7)$, b) $f(x)=-5(x+2)(x+12)$,

c) $f(x) = 0,3(x-9)^2$. 8. a) $y = (x+4,5)(x-0,5)$, b) $y = -(x-5)(x-3)$, c) $y = 2x(x-1)$, d) nie da się.

9. a) $y = (x-1)^2 - 9$, b) $y = -1,1(x-1)^2 + 4,4$, c) $y = 5(x-9)^2 - 45$, d) $y = -0,2(x-4)^2 + 0,2$.

10. a) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $\Delta > 0$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_w < 0$, $y_w < 0$,

b) $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$, $\Delta > 0$, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$, $x_w > 0$, $y_w > 0$,

c) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $\Delta = 0$, $x_0 > 0$, $x_w > 0$, $y_w = 0$,

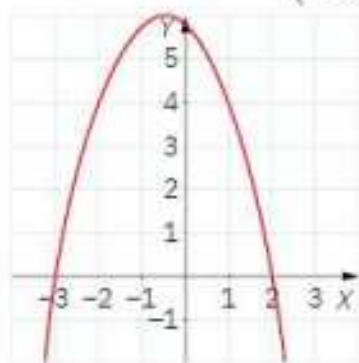
d) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, $\Delta < 0$, x_1 brak, x_2 brak, $x_w < 0$, $y_w < 0$.

11. a) $x_1 = -2\frac{1}{2}$, $x_2 = 1\frac{1}{2}$, b) $\left(-\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$. 12. a) $(-7, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -21)$, $(-2, -25)$,

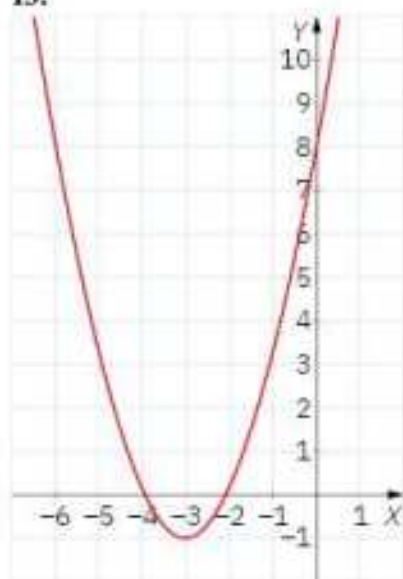
b) $(-5, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 20)$, $\left(-3\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}\right)$, c) brak z osi X , $(0, -1)$, $\left(\frac{3}{8}, -\frac{7}{16}\right)$. 13. a) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,

b) $x \in (0, 2)$.

14. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $\left(-\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}\right)$, $(-3, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 6)$.



15.



a) $ZW = \langle -1, +\infty \rangle$,

b) $x \in (-4, -2)$,

c) $x_1 = -4$, $x_2 = -2$,

d) $x \in \langle -\infty, -3 \rangle$.

Z.S.: 1. A. 2. C. 3. A. 4. D. 5. A.

4.10. Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej

1. a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$, b) $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$, c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$. 2. $b = -5$, $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

3. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\frac{1}{2}$. 4. $c = -5$, $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$. 5. $a = 3$, $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$. 6. $c = \frac{3}{4}$, $a = -2$,

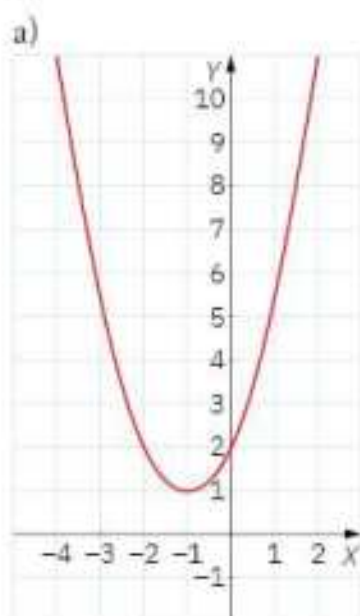
$f(x) = -2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$. 7. $a = -1$, $f(x) = -x^2 + 2x + 35$. Z.S.: 1. C. 2. B. 3. C. 4. D.

4.11. Wartość najmniejsza i największa funkcji kwadratowej

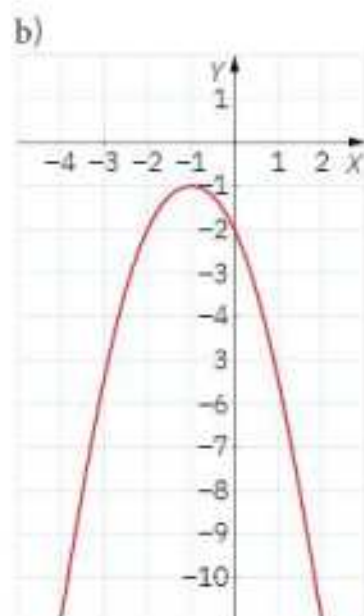
1. a) największą, $y_w = 6$, $x_w = -\frac{1}{2}$, b) najmniejszą, $y_w = 8$, $x_w = 11$, c) najmniejszą, $y_w = 0$, $x_w = 14$, d) naj-

większą, $y_w = -20$, $x_w = 20$.

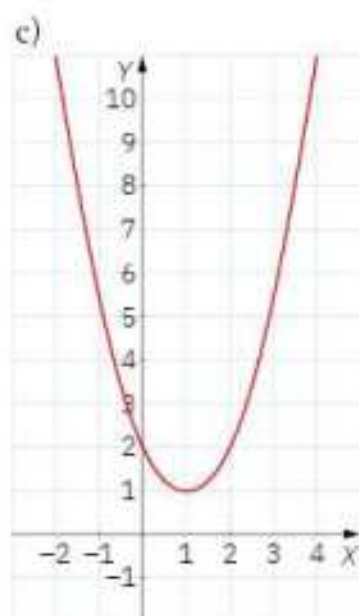
2.



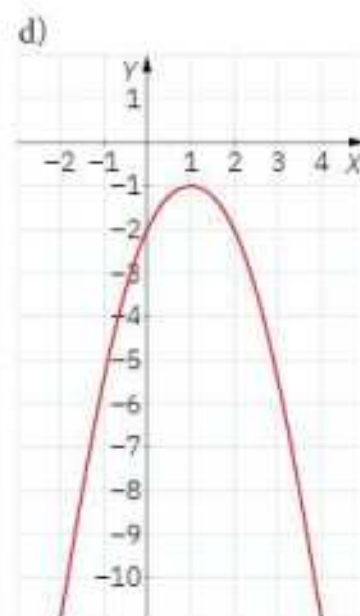
najmniejsza 1
największa 10



najmniejsza -10
największa -1



najmniejsza 1
największa 10



najmniejsza -10
największa -1

3. a) największa 23, najmniejsza -1, b) największa -7, najmniejsza $-10\frac{1}{8}$, c) największa 6,4, najmniejsza $-\frac{4}{15}$, d) największa $-\frac{7}{20}$, najmniejsza $-\frac{8}{5}$. 4. największa 12, najmniejsza $-12\frac{1}{2}$. 5. 36. 6. -9. 7. a) największa 7, najmniejsza 3, b) największa 7, najmniejsza -17, c) największa 59, najmniejsza -13, d) największa 0, najmniejsza -75. Z.S.: 1. D. 2. B. 3. C.

4.12. Zagadnienia geometryczne i fizyczne

Część pierwsza

1. a) $y = 2,2x + 2$, b) 6,84 zł, 21,80 zł, 34,12 zł, c) 5 km.

2*. $s = 110 \cdot t, t \in (0, 5)$.

3. a) $71,6^\circ\text{F}; 55,4^\circ\text{F}; 32^\circ\text{F}; 23^\circ\text{F}; 1,4^\circ\text{F}$, b) $-20^\circ\text{C}; 10^\circ\text{C}$, c) $x = \frac{5}{9}(y - 32)$.

4. a) 175 km, b) 2 razy po 0,5 godziny, c) $87,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, d) 7 godzin, 500 km,

e) $71,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 5. $347,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 337 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 331 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 326,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 319,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

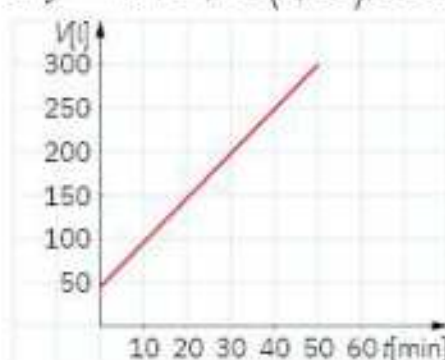
6. a) I wariant: $y = 0,57x$, II wariant: $y = 37,8 + 0,22x$, gdzie x - liczba wykorzystanych impulsów, b) 50 impulsów - I wariant, 200 impulsów - II wariant, c) 108 impulsów.

7. $y = 250 + 30x$, gdzie x - liczba miesięcy; po 9 miesiącach,

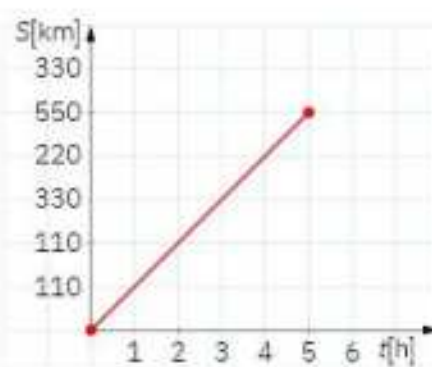
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	mies.	mies.	mies.	mies.	mies.	mies.	mies.	mies.	mies.	mies.	mies.	mies.
y	280	310	340	370	400	430	460	490	520	550	580	610

430 zł, 610 zł.

8. $y = 40 + 5t, t \in (0, 52)$, 52 minuty.



9. $y = 40 - 0,052s$, 769 km. Z.S.: 1. B. 2. A. 3. B. 4. D. 5. C. 6. A. 7. D. 8. C.



Część druga

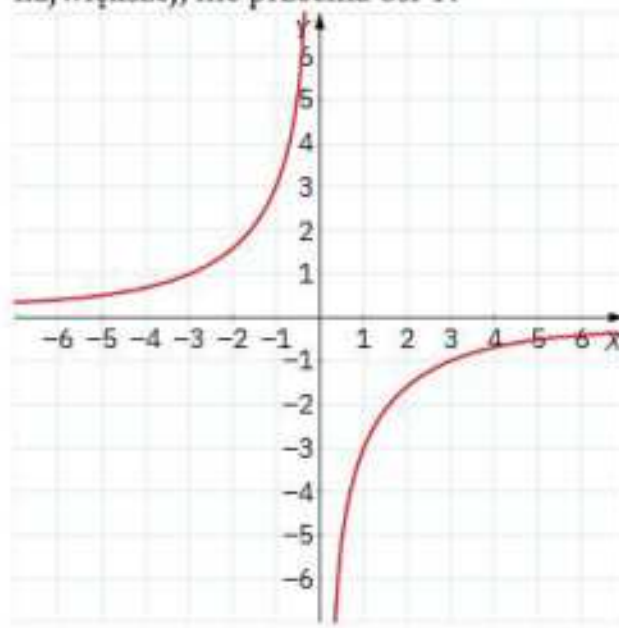
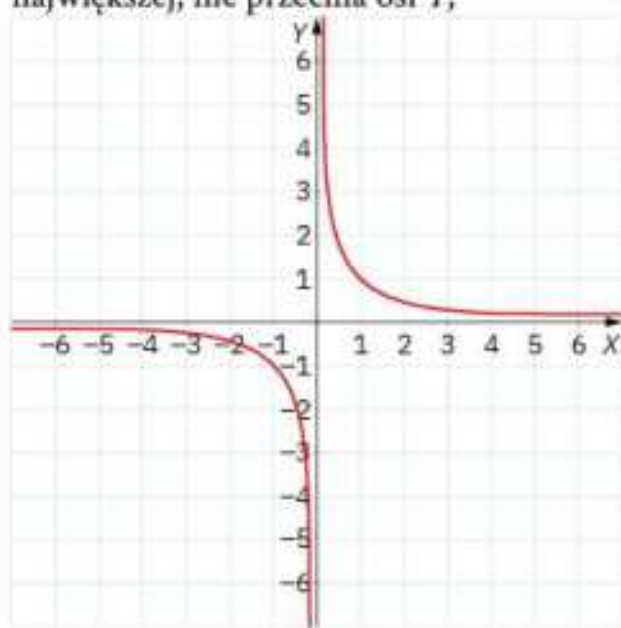
1. a) 2, b) $2\frac{2}{3}$. 2. a) 2 m, b) 40 m^2 . 3. kwadrat o boku 6 cm. 4. 150 i 50. 5. po 18 cm. 6. po 7 cm. 7. 25 m na 50 m. 8. $d = \sqrt{5} \text{ cm}$. 9. 3, 4, 5. 10. 9 dm, 5 dm. 11. a) 2 s i po 10 s, b) 4 s. 12. $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = x+1$.
Z.S.: 1. A. 2. D. 3. C. 4. A. 5. B. 6. B.

4.13. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$

1. a) nie, b) tak, $a = 6$. 2. a) 480, b) 0,375 litra. 3. 4 godziny, $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 4. 24 dni, 9 robotników. 5. tak.

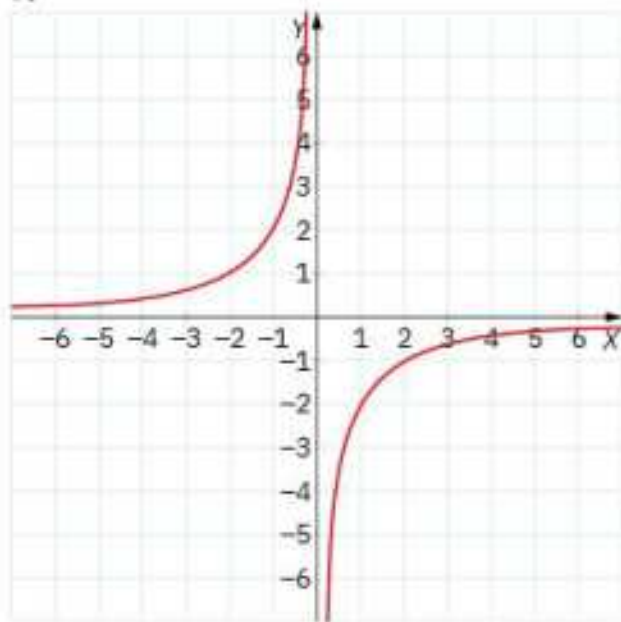
6. $y = \frac{6}{x}$, $x = 3$.

7. a) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $ZW = \mathbb{R} - \{0\}$, brak miejsc zerowych, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, nie osiąga wartości ani najmniejszej, ani największej, nie przecina osi Y ,
b) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $ZW = \mathbb{R} - \{0\}$, brak miejsc zerowych, rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, nie osiąga wartości ani najmniejszej, ani największej, nie przecina osi Y .



8. a) $y = \frac{8}{x}$, b) $y = -\frac{8}{x}$.

9.

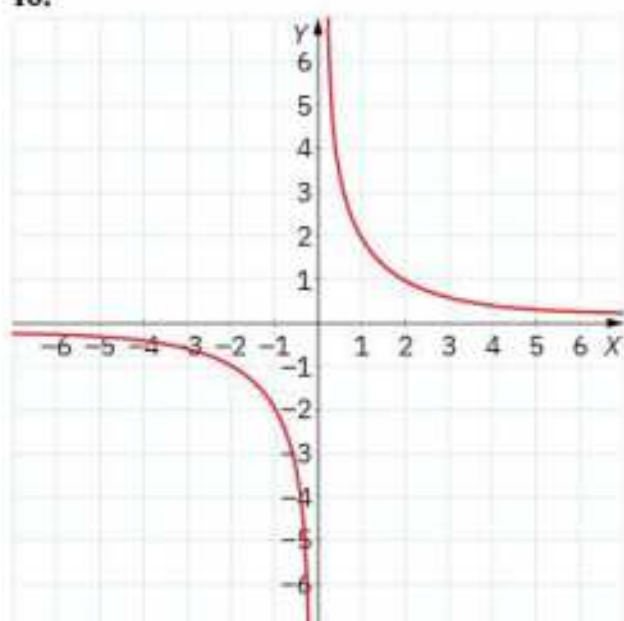


a) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$,

b) dla $x \in (0, +\infty)$,

c) $-\frac{1}{4}$.

10.



- a) $-\frac{1}{2}$,
b) $\frac{1}{5}$,
c) $\frac{1}{2}$.

11. Są takie same. Z.S.: 1. C. 2. C. 3. B. 4. A. 5. B. 6. B. 7. C. 8. B.

4.14. Zadania utrwalające

1. c) liczbie 8 nie przyporządkowano żadnej liczby, d) liczbie -2 przyporządkowano więcej niż jedną liczbę.
2. b) wykres. 3. a) $x \in \mathbb{R}$, b) $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, c) $x \in \langle 1, \infty \rangle$.

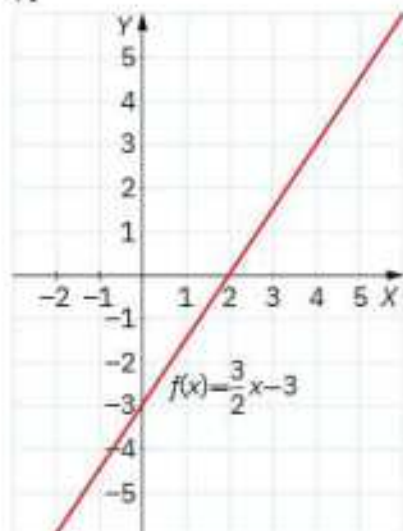
4. a)

x	-2	-1	0	2	3	4	5
y	4	3	2	1	4	0	2

b) tak, c) 0, d) 0 i 5, e) $D_f = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$, $ZW = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

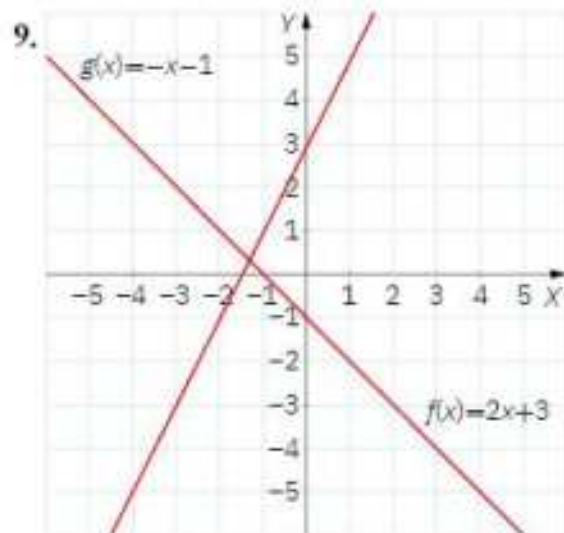
5. największa: $y = 4$ dla $x = 2$, najmniejsza: $y = -1$ dla $x = -2$. 6. a) $D_f = \mathbb{R}$, b) $ZW = \mathbb{R}$, c) $x = -4$,
 $x = 1$, $x = 5$, d) rosnąca w przedziałach $(-\infty, -2)$ i $\langle 3, \infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$, stała - nie
jest, e) wartości dodatnie: $x \in (-4, 1) \cup (5, \infty)$, f) wartości ujemne: $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 5)$.

7.



- a) oś X: $(2, 0)$, oś Y: $(0, -3)$,
b) $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -4$,
c) $x = 8$,
d) funkcja rosnąca,
e) $x \in (2, \infty)$.

8. a) $y = 2x - 2$, b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

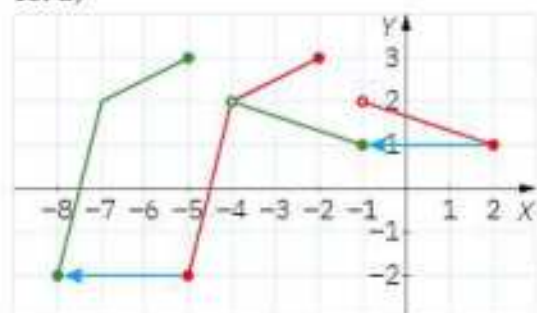


a) $f(x): x = -\frac{3}{2}$, $g(x): x = -1$,

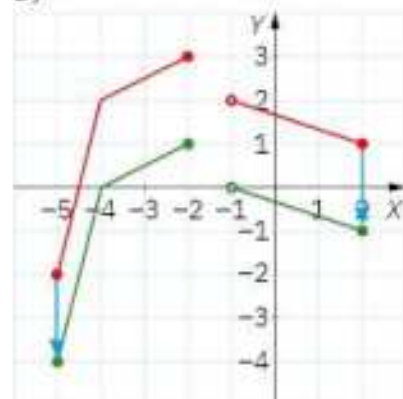
b) $x = -\frac{4}{3}$.

10. a) $(0, -3)$, b) $x = -3$, c) tak, d) funkcja malejąca. 11. a) $h(x)$, b) $g(x)$. 12. $g(x)$. 13. $f(x)$. 14. oś $X: (-4, 0)$, $(2, 0)$, oś $Y: (0, 3)$. 15. a) $[-4, 0]$, b) $[7, 0]$, c) $[0, -4]$, d) $[0, 3]$.

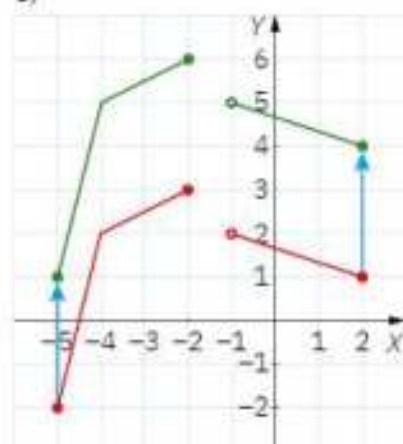
16. a)



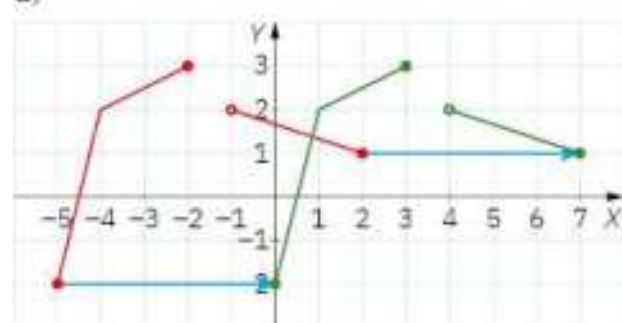
b)



c)

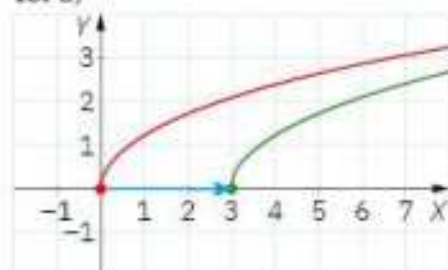


d)

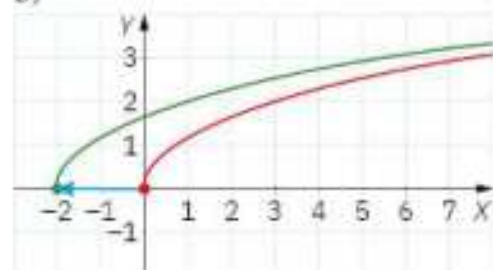


17. a) $y = f(x-4)$, b) $y = f(x+8)$, c) $y = f(x)-6$, d) $y = f(x)+6$.

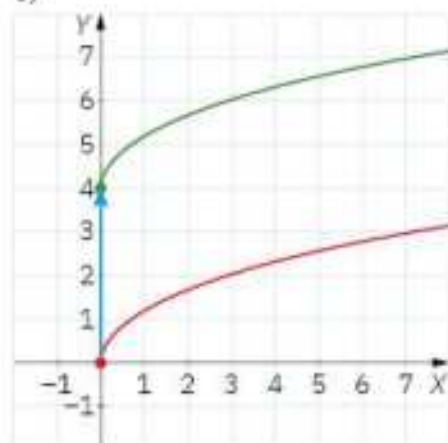
18. a)



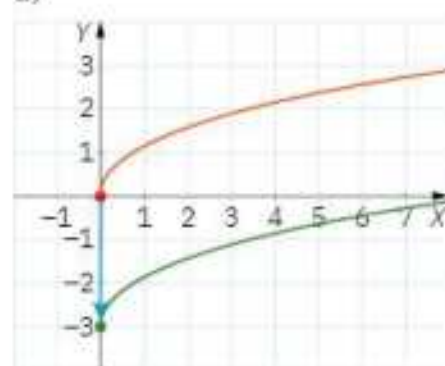
b)



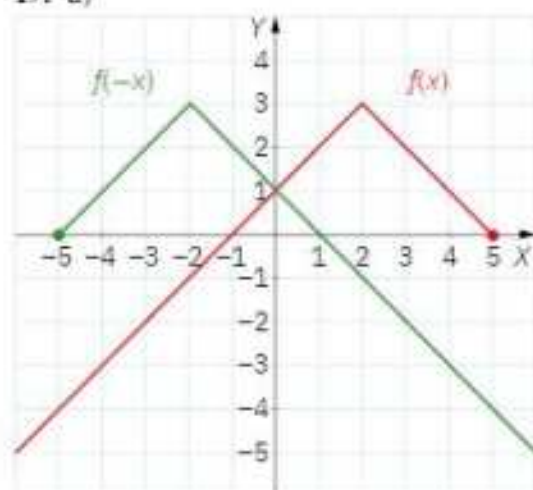
c)



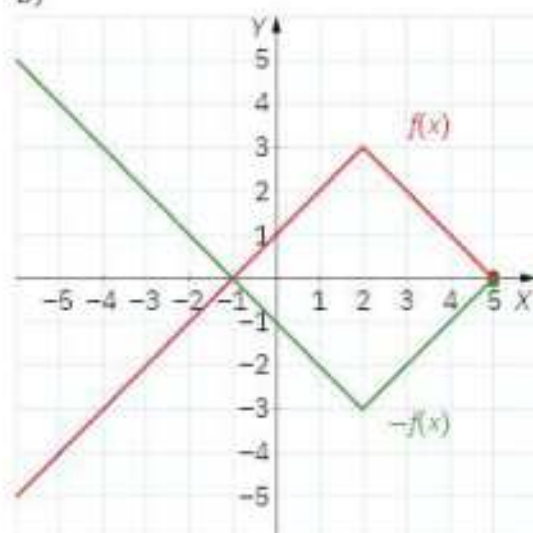
d)



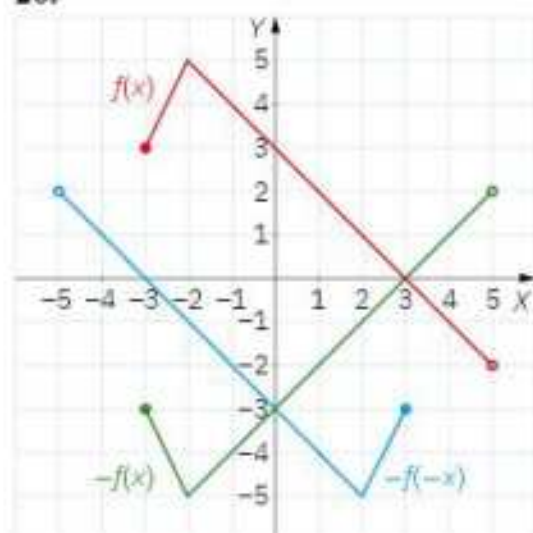
19. a)



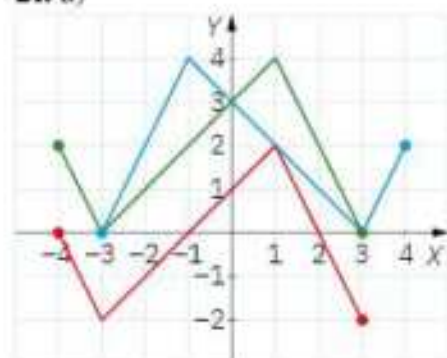
b)



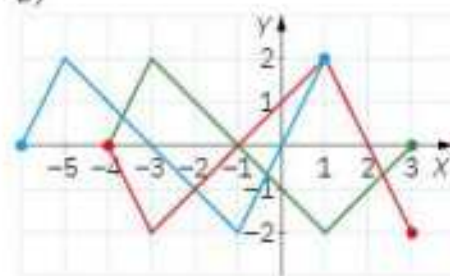
20.



21. a)

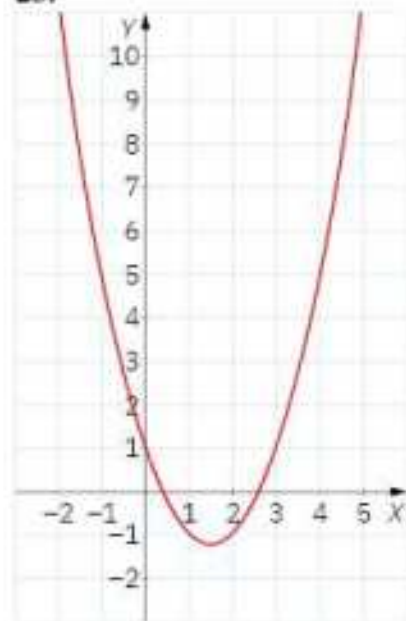


b)



22. B.

23.

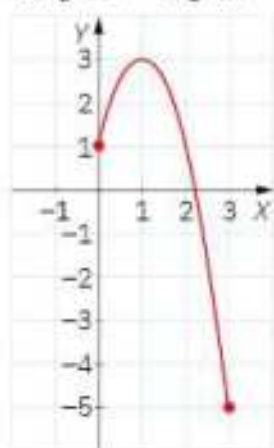


24. $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $(0, -3)$. 25. a) $f(x) = (x+1)^2 + 4$, b) $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, c) $f(x) = 2(x+3)^2 - 1$.

26. a) $f(x) = x^2 + 16x + 62$, b) $f(x) = 2x^2 - 8x - 1$, c) $f(x) = -x^2 - 4x + 9$. 27. a) $\left(\frac{1}{2}, 9\frac{3}{4}\right)$, b) $\left(\frac{1}{5}, 14\frac{4}{5}\right)$,

c) $\left(\frac{5}{6}, -4\frac{11}{12}\right)$.

28. $f(0) = 1$, $f(3) = -5$.



29. a) $x_1 = -3$, $x_2 = 6$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, c) $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{2}$.

30. a) $f(x) = (x-1)^2$, b) $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - 2\frac{1}{2}\right)$, c) nie da się.

31. a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$, b) $f(x) = 2x^2 + 12x - 14$, c) $f(x) = -5x^2 - 80x - 333$.

32. $b = -1\frac{1}{2}$, $f(x) = -3x^2 - 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$. 33. $f(x) = \frac{4}{7}x^2 + 2\frac{2}{7}x + 1$. 34. a) największa 33, najmniejsza 1,

b) największa 2, najmniejsza -46 , c) największa 31, najmniejsza -4 . 35. 324. 36. 20 m na 20 m. 37. 1,5 m.

38. B. 39. C.

V RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

5.1. Równanie kwadratowe

1. a) $x = -3$ lub $x = 3$, b) $x = -1\frac{1}{4}$ lub $x = 1\frac{1}{4}$, c) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$, d) $x = -5$ lub $x = 5$, e) brak rozwią-

zań, f) $x = -2\sqrt{2}$ lub $x = 2\sqrt{2}$. 2. a) $x = 0$ lub $x = 3$, b) $x = -2\frac{2}{5}$ lub $x = 0$, c) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$, d) $x = 0$ lub

$x = \frac{1}{9}$, e) $x = 0$ lub $x = 3\frac{3}{4}$, f) $x = -4\frac{1}{5}$ lub $x = 0$. 3. 0, 36. 4. $3x^2 - 12 = 0$. 5. a) $x = -1$, b) $x = 3$, c) $x = -\frac{1}{2}$,

d) $x = 5$, e) $x = 1\frac{2}{3}$, f) $x = 1$. 6. a) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, b) $x_1 = -6$, $x_2 = -2$, c) $x = -6$, d) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, e) brak

rozwiązań, f) $x_1 = -7$, $x_2 = 1$. 7. a) $x_1 = -5$, $x_2 = 6$, b) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 3$, c) $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{1}{4}$, d) $x_1 = -5$, $x_2 = 1$,

e) $x_1 = -8 - \sqrt{29}$, $x_2 = -8 + \sqrt{29}$, f) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. 8. a) np. $(x-2)(x-3) = 0$, b) np. $(x-4)^2 = 0$,

c) np. $x^2 - 3x - 40 = 0$, d) np. $9x^2 - 12x + 4 = 0$, e) np. $x^2 - 36 = 0$, f) np. $x^2 - 7x = 0$. 9. a) $x_1 = -5$,

$x_2 = 7$, b) $x_1 = -2$, $x_2 = 8$, c) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, d) $x_1 = -1\frac{1}{2}$, $x_2 = 1\frac{1}{4}$, e) $x_1 = -5$, $x_2 = 7$, f) $x_1 = -7$, $x_2 = 2\frac{1}{3}$.

10. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 3,5$, b) $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, c) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 1\frac{1}{2}$, d) $x_1 = -1$, $x_2 = 1,6$, e) brak rozwiązań,

f) $x_1 = -7$, $x_2 = 3$. 11. $(-1, -7)$, $(6, 91)$. Z.S.: 1. C. 2. A. 3. C. 4. A. 5. D. 6. C. 7. B.

5.2. Nierówność kwadratowa

1. a. 2. $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. 3. a) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, b) $x \in (-5, 0)$, c) $x \in (-\infty, -7) \cup (1, \infty)$, d) $x \in (-8, 0)$, e) $x \in (-\infty, -11) \cup (11, \infty)$, f) $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. 4. a) $x \in \left[-\infty, -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \infty\right]$, b) $x \in (-\infty, -6) \cup (6, \infty)$, c) $x \in (-5, 3)$, d) $x \in (-\infty, 0) \cup (9, \infty)$, e) $x \in \left[-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup (0, \infty)$, f) $x \in (-\infty, -6) \cup (12, \infty)$. 5. a) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$, b) $x \in (1, 3)$, c) $x \in \mathbb{R}$, d) $x \in \{5\}$, e) brak rozwiązań, f) $x \in \left[-\frac{1}{2}, 5\right]$. 6. 5. 7. 0. 8. $x \in \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$. 9. Parabola naszkicowana

w celu rozwiązania tej nierówności nie przecina osi X i ma ramiona skierowane do dołu, stąd wynika, że nie ma argumentów, dla których wartości tej funkcji byłyby liczbami nieujemnymi.

10. a) $x \in \left[-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup (5, \infty)$, b) $x \in \mathbb{R}$. Z.S.: 1. B. 2. A. 3. A. 4. C. 5. B. 6. C. 7. C.

5.3. Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych

1. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ m. 2. 60 cm, 80 cm. 3. 16. 4. 9 cm. 5. 1. 6. 4 i 11. 7. 8 m na 13 m. 8. 9 cm i 40 cm. 9. pięć. 10. 19. 11. $a, b \in (1, 2) \cup (5, 6)$. 12. 5 cm, 5 cm, 1 cm. 13. $\frac{2}{3}$ h. Z.S.: 1. D. 2. B. 3. C. 4. C. 5. D. 6. C. 7. D. 8. B.

5.4. Zadania utrwalające

1. a) $x_1 = \frac{1}{16}$; $x_2 = 2$, b) $x_1 = -12$; $x_2 = -3$, c) brak rozwiązań, d) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$, e) $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$; $x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, f) $x_1 = \frac{-13-\sqrt{149}}{2}$; $x_2 = \frac{-13+\sqrt{149}}{2}$. 2. a) $x \in (1, 8)$, b) $x \in \mathbb{R}$, c) $x = 7$, d) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, e) $x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$, f) $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$. 3. a) 3, b) -4, c) $-\frac{3}{4}$, d) $\frac{1}{3}$. 4. a) -4, b) 6, c) $-3\frac{1}{3}$, d) 0,7. 5. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 2, d) $1\frac{2}{3}$. 6. a) $x \in \left(1\frac{1}{2}, 5\right)$, b) $x \in \left(-\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}\right)$, c) $x \in (-3, 1)$, d) $x \in (-\infty, 0) \cup (18, \infty)$. 7. a) $x \in \left(1\frac{1}{2}, \infty\right)$, b) $x \in (0, 3)$. 8. a) $x \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$, b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 9. a) $x \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$, b) $x \in \{5, 7\}$. 10. $(1, -2)$, $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$. 11. $x \in (-\infty, -1) \cup (11, \infty)$. 12. $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. 13. 10%. 14. 6 cm. 15. 5 cm, 12 cm, 13 cm. 16. 8, 9, 10. 17. 12 cm, 16 cm. 18. 1 m. 19. 24 i 7. 20. $(-4, -1)$, $(2, 5)$. 21. 6 dm, 8 dm. 22. 23, 14. 23. 6, 8, 10. 24. 12. 25. 4225 kg.