

Nowość

NOWA MATeMATyka

3

PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM

ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

ZMIANY
W PODSTAWACH
2024



podręcznik w pełni
dostosowany

**nowa
era**

NOWA MATeMATyka

3 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

WOJCIECH BABIAŃSKI
LECH CHAŃKO
JOANNA CZARNOWSKA
GRZEGORZ JANOCHA
DOROTA PONCZEK
JOLANTA WESOŁOWSKA

NOWA MATEMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym i rozszerzonym, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Edwarda Tutaja, dr Barbary Barańskiej, dr hab. Anny Cegieli.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2026

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/3/2026/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* (2024) autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2026
ISBN 978-83-267-5401-2

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Elżbieta Bagińska-Stawiarz, Urszula Cielniak, Ewa Kowalik, Katarzyna Radzimińska, Renata Sawicka, Agnieszka Trzpil-Gajek

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne stron działowych i infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

Projekt okładki: Maciej Galiński

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

Ilustracje na infografikach: Krzysztof Mrawiński (współrzędne geograficzne, s. 97), Aleksandra Szpunar (wykresy, s. 69, 298)

Mapa: Zespół kartograficzny Nowa Era (s. 97)

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobyłka

Fotografia na okładce: Getty Images/Photodisc/Jorg Greuel.

Fotografie: Agencja Gazeta: Cezary Aszkiełowicz s. 24; **BE&W:** Alamy Stock Photo – Gunter Kirsch s. 97 (zamek Czocha), IanDagnall Computing s. 148, Jesse Kraft s. 135, Remo Savisaar s. 289, Urbanmyth s. 217, Witold Skrypczak s. 97 (zamek w Czersku); **Getty Images:** Corbis/Fuse s. 293, DigitalVision/Tuul & Bruno Morandi s. 9, iStock Unreleased/ewg3D s. 97 (zamek w Niedzicy), iStock/Getty Images Plus – Alberto Gagliardi s. 205, AndrewScherbackov s. 18, Photodisc/Digital Vision s. 259; **Shutterstock:** Alexey Boldin s. 298 (smartwatch), Andriy Baidak s. 73, Brester Irina s. 69, Dmitry Demkin s. 151 (słoneczniki), f11photo s. 260 (miasto nocą), Ian 2010 s. 151 (słonecznik), Marcin Krzyzak s. 97 (zamek w Ogrodzieńcu), Maridav s. 298 (bieg), Marzolino s. 260 (Leibniz), Nicku s. 260 (Newton), oriontrail s. 22, Pecold s. 97 (zamek w Gniewie), Photerkop s. 15.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Spis treści

R ▶ 1. Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

– [przypomnij sobie](#) 10

R 1.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta 11

R 1.2. Kąt obrotu 15

R 1.3. Miara łukowa kąta 19

R 1.4. Funkcje okresowe 22

R 1.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus 25

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste – [dowiedz się więcej](#) 29

R 1.6. Wykres funkcji tangens 30

Wykres funkcji cotangens – [dowiedz się więcej](#) 33

R 1.7. Przekształcenia wykresu funkcji 34

Inne przekształcenia wykresów funkcji sinus i cosinus – [dowiedz się więcej](#) .. 39

R 1.8. Tożsamości trygonometryczne 41

Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych – [dowiedz się więcej](#) 45

R 1.9. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów 46

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów – dowody

– [dowiedz się więcej](#) 50

R 1.10. Wzory redukcyjne 51

R 1.11. Równania trygonometryczne (1) 55

Suma i różnica sinusów, suma i różnica cosinusów – [dowiedz się więcej](#) 58

R 1.12. Równania trygonometryczne (2) 59

Funkcje odwrotne – [dowiedz się więcej](#) 62

Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych – [dowiedz się więcej](#) 63

Powtórzenie 65

Zadania z kontekstem realistycznym 70

Sposób na zadanie 71

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym 72

▶ 2. Geometria analityczna

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne

– [przypomnij sobie](#) 74

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych 75

Prosta w układzie współrzędnych – [przypomnij sobie](#) 78

2.2. Środek odcinka 79

R	2.3.	Odległość punktu od prostej	83
		Pole trójkąta w układzie współrzędnych – dowiedz się więcej	87
	2.4.	Okrąg w układzie współrzędnych	88
		Okrąg wpisany w trójkąt – dowiedz się więcej	92
	2.5.	Wzajemne położenie dwóch okręgów	93
	2.6.	Wzajemne położenie okręgu i prostej	98
R	2.7.	Układy równań drugiego stopnia	103
R	2.8.	Działania na wektorach	107
R	2.9.	Wektory – zastosowania	113
	2.10.	Symetria osiowa	116
	2.11.	Symetria środkowa	120
		Zbiory punktów o danej własności – dowiedz się więcej	123
		Powtórzenie	125
		Zadania z kontekstem realistycznym	128
		Sposób na zadanie	129
		Przed obowiązkową maturą z matematyki	130
		Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	134
►	3.	Ciągi	
	3.1.	Pojęcie ciągu	136
	3.2.	Sposoby określania ciągu	139
	3.3.	Ciągi monotoniczne (1)	143
	3.4.	Ciągi określone rekurencyjnie	147
R	3.5.	Ciągi monotoniczne (2)	152
	3.6.	Ciąg arytmetyczny (1)	154
	3.7.	Ciąg arytmetyczny (2)	158
	3.8.	Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	161
	3.9.	Ciąg geometryczny (1)	165
	3.10.	Ciąg geometryczny (2)	168
	3.11.	Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	171
	3.12.	Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania	175
		Ciągi liczb całkowitych – dowiedz się więcej	178
	3.13.	Procent składany	179
R	3.14.	Granica ciągu	185
R	3.15.	Ciągi rozbieżne	188
R	3.16.	Obliczanie granic ciągów (1)	190
R	3.17.	Obliczanie granic ciągów (2)	194
		Ciągi ograniczone – dowiedz się więcej	198

R	3.18.	Szereg geometryczny	199
		Indukcja matematyczna – dowiedz się więcej	204
		Powtórzenie	206
		Zadania z kontekstem realistycznym	210
		Sposób na zadanie	211
		Przed obowiązkową maturą z matematyki	212
		Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	216

R ► 4. Rachunek różniczkowy

R	4.1.	Granica funkcji w punkcie	218
R	4.2.	Obliczanie granic funkcji	221
R	4.3.	Granice jednostronne	225
R	4.4.	Granice niewłaściwe	227
R	4.5.	Granica funkcji w nieskończoności	231
		Asymptoty ukośne – dowiedz się więcej	235
R	4.6.	Ciągłość funkcji	236
R	4.7.	Własności funkcji ciągłych	240
R	4.8.	Pochodna funkcji w punkcie	243
R	4.9.	Funkcja pochodna	247
R	4.10.	Działania na pochodnych	250
R	4.11.	Pochodna funkcji złożonej	254
R	4.12.	Interpretacja fizyczna pochodnej	257
R	4.13.	Monotoniczność funkcji	261
R	4.14.	Ekstrema funkcji	265
R	4.15.	Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji	269
R	4.16.	Zagadnienia optymalizacyjne	272
R	4.17.	Szkicowanie wykresu funkcji	278
		Szkicowanie wykresów funkcji wymiernych – dowiedz się więcej	281
		Powtórzenie	283
		Zadania z kontekstem realistycznym	286
		Sposób na zadanie	287
		Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	288

► 5. Statystyka

	5.1.	Średnia arytmetyczna	290
		Skala centylowa – dowiedz się więcej	294
	5.2.	Mediana i dominanta	295
	5.3.	Średnia ważona	299
		Odchylenie standardowe – dowiedz się więcej	302

Rozkład normalny – dowiedz się więcej	304
Powtórzenie	305
Zadania z kontekstem realistycznym	308
Sposób na zadanie	309
Przed obowiązkową maturą z matematyki	310
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	314
Indeks	355
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	358
Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne	359

Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Fioletowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

- R** Temat w całości obowiązujący w zakresie rozszerzonym.
- D** Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.
-  Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu warto skorzystać z kalkulatora, oraz tematów ze wszystkimi takimi zadaniami.
- *** Oznaczenie trudniejszych zadań.

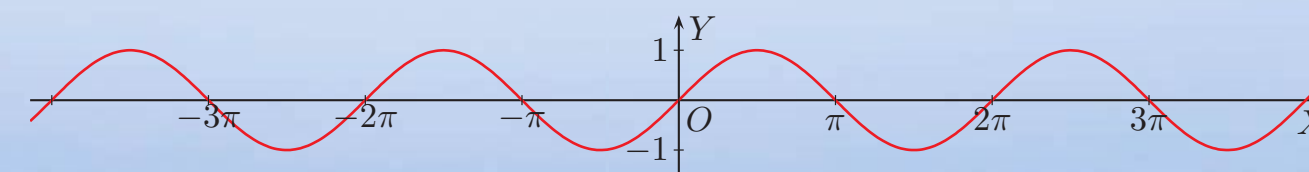
7. Zadania mniej typowe.

Sekcja **Przypomnij sobie** zawiera nieobowiązkowe powtórzenie przydatnych wiadomości przed wybranymi lekcjami.

Sekcja **Dowiedz się więcej** zawiera materiał nieobowiązkowy, rozszerzający treści z poprzedzających ją lekcji.

1 Funkcje trygonometryczne

Omawiane w tym rozdziale funkcje trygonometryczne mogą stanowić model służący do opisu niektórych zjawisk powtarzających się okresowo. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres jednej z funkcji trygonometrycznych – funkcji sinus. Wykres ten nazywamy sinusoidą.



Mont Saint-Michel [czyt. mą sę miszel] w czasie odpływu. Podnoszenie się i opadanie poziomu oceanów jest zjawiskiem powtarzającym się okresowo.



Przypomnij sobie

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Niech α będzie kątem ostrym trójkąta prostokątnego (rysunek obok). Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.

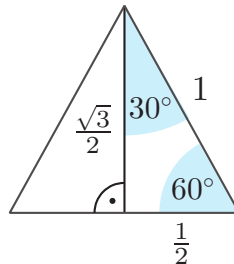
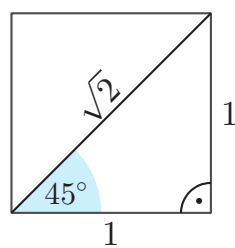
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinus i tangens kąta α definiujemy następująco:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α .

Podane w tabeli wartości można wyznaczyć, korzystając z poniższych rysunków.



α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

1. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych długościach przyprostokątnych.

- a) 3, 4 b) 9, 12 c) 5, 12 d) 1, 2

2. W trójkącie prostokątnym dane są długość przeciwprostokątnej c oraz sinus kąta ostrego α . Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

- a) $c = 10$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $c = 25$, $\sin \alpha = 0,28$

3. W trójkącie prostokątnym dane są tangens kąta ostrego α oraz długość boku a leżącego naprzeciwko kąta α . Oblicz obwód tego trójkąta. Wyznacz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

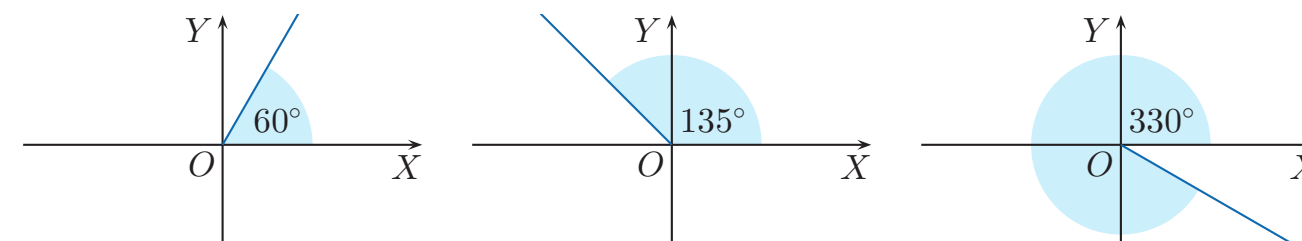
- a) $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$, $a = 10$ b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $a = 2$

D 4. Uzasadnij, że między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α zachodzi podana zależność.

- a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
 b) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ d) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

R 1.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

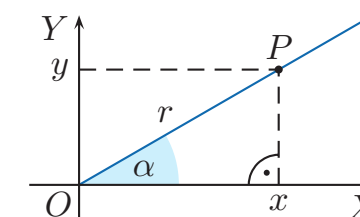
Rozpatrujemy kąty umieszczone w układzie współrzędnych w taki sposób, że wierzchołkiem kąta jest początek układu, a ramię początkowe kąta zawiera dodatnią półoś OX . Kąt jest odłożony od ramienia początkowego do ramienia końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara oraz może przyjmować miarę od 0° do 360° .



Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α oraz niech $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$



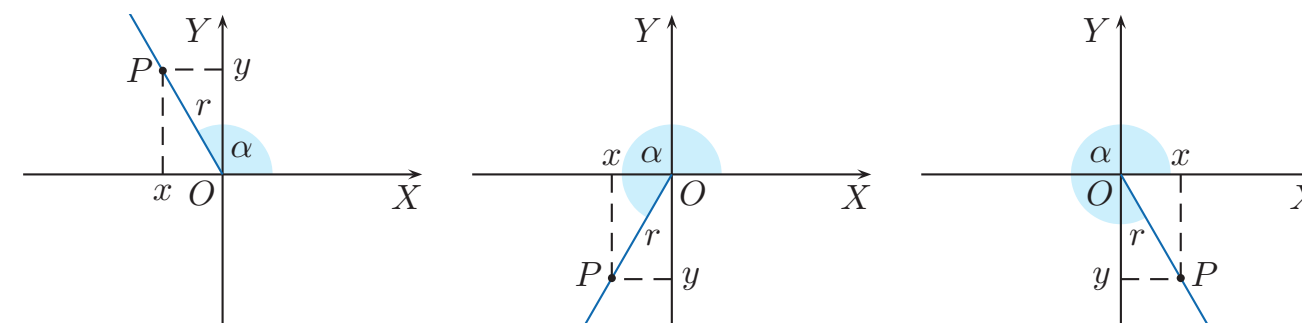
Ćwiczenie 1

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P . Narysuj ten kąt i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych.

- a) $P(4, 3)$ b) $P(2, 3)$ c) $P(\sqrt{5}, 2)$ d) $P(1, 2\sqrt{2})$

Podane wyżej wzory posłużyły w klasie II do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$. Teraz definicję tę możemy rozszerzyć na dowolny kąt $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ]$.

Na rysunkach poniżej ramię końcowe kąta leży odpowiednio w II, III i IV ćwiartce układu współrzędnych.

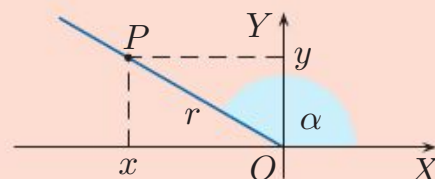


Definicja

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ]$ i niech $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$



Uwaga. Definiuje się też funkcję $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$ ($y \neq 0$).

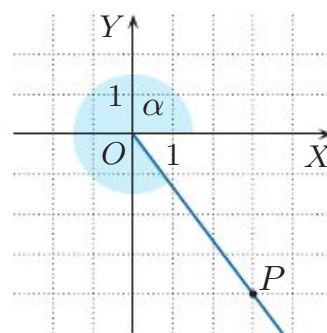
Każdy ze stosunków $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ zależy wyłącznie od położenia ramienia końcowego kąta, a nie zależy od położenia punktu P na tym ramieniu.

Nie określamy wartości funkcji tangens dla 90° i 270° .

Przykład 1

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(3, -4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \\ r &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \sin \alpha &= -\frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} \end{aligned}$$



Ćwiczenie 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P . Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych.

- a) $P(-4, 3)$ b) $P(8, -6)$ c) $P(-1, -3)$ d) $P(-2, -6)$

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 210° .

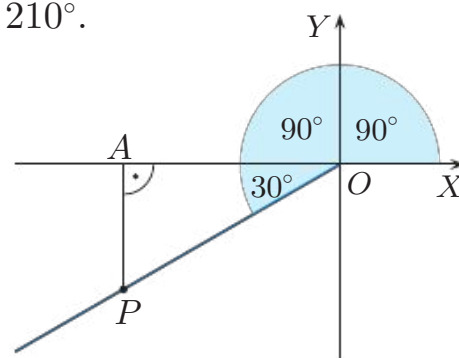
Zauważmy, że $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$.

Rozpatrzmy trójkąt POA o kątach 30° , 60° , 90° i boku $|OP| = 1$ (rysunek obok). Wówczas:

$$|AP| = \frac{1}{2}, \quad |AO| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 210° ma współrzędne $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, a stąd:

$$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta: a) 135° , b) 225° , c) 300° .

W zależności od tego, w której ćwiartce układu współrzędnych jest położone ramię końcowe kąta α , wartości $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ są dodatnie lub ujemne.

dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$	dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$
$\sin \alpha > 0$	$\sin \alpha > 0$
$\cos \alpha < 0$	$\cos \alpha > 0$
$\operatorname{tg} \alpha < 0$	$\operatorname{tg} \alpha > 0$
dla $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$	dla $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$
$\sin \alpha < 0$	$\sin \alpha < 0$
$\cos \alpha < 0$	$\cos \alpha > 0$
$\operatorname{tg} \alpha > 0$	$\operatorname{tg} \alpha < 0$

Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że:

- a) $\sin \alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$,
b) $\cos \alpha > 0$ dla $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ) \cup (270^\circ; 360^\circ]$,
c) $\operatorname{tg} \alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (180^\circ; 270^\circ)$.

Zadania

1. Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

- a) $P(5, 12)$ b) $P(-5, -12)$ c) $P(\sqrt{3}, -1)$ d) $P(-\sqrt{3}, -1)$

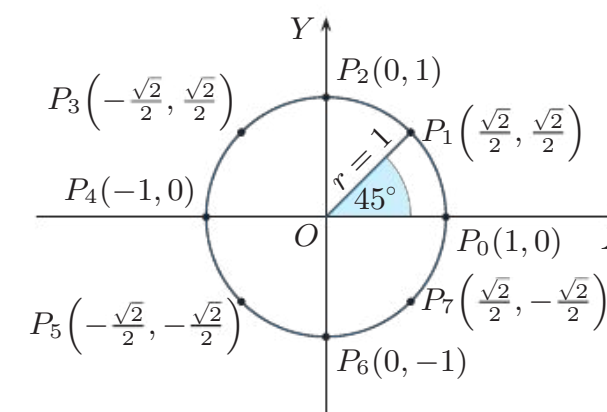
2. Uzasadnij, że jeśli punkt $P(x, y)$ należy do okręgu jednostkowego oraz leży na ramieniu kąta α , to $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$.

Okrąg o promieniu 1 i środku w punkcie $O(0, 0)$ nazywamy **okręgiem jednostkowym**.

3. Na rysunku obok przedstawiono okrąg jednostkowy oraz zaznaczono punkty $P_0, \dots, P_7$.

- a) Podaj miarę kąta α_i , do którego ramienia końcowego należy punkt P_i dla $i = 0, 1, \dots, 7$.

- b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

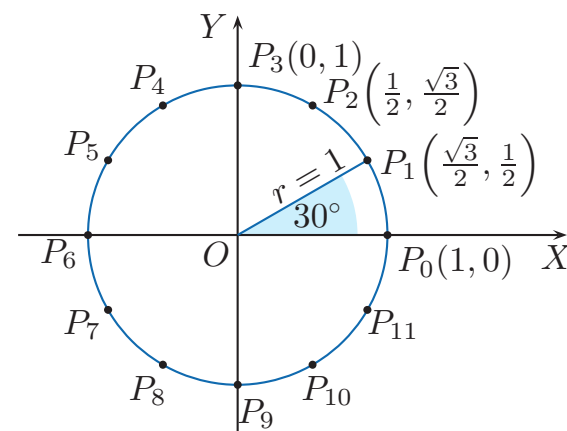


α	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\sin \alpha$	?	?	?	?	?	?	?	?	?
$\cos \alpha$	?	?	?	?	?	?	?	?	?
$\operatorname{tg} \alpha$	?	?	$\times$	?	?	?	$\times$	?	?

4. Oblicz.

- a) $\sin^2 315^\circ + \cos^2 135^\circ$ b) $\operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{tg} 225^\circ$ c) $\sin 225^\circ + \cos^3 315^\circ$

5. a) Na okręgu jednostkowym o środku w początku układu współrzędnych zaznaczono dwanaście punktów wyznaczonych przez ramiona końcowe kątów, których miary są wielokrotnościami 30° (rysunek obok). Podaj współrzędne punktów $P_4, \dots, P_{11}$.
b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.



α	30°	60°	120°	150°	210°	240°	300°	330°
$\sin \alpha$	?	?	?	$\frac{1}{2}$	?	?	?	?
$\cos \alpha$	?	?	?	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?	?	?
$\operatorname{tg} \alpha$	?	?	?	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	?	?	?	?

6. Oblicz.

a) $\sin^2 300^\circ + \cos^2 150^\circ$ c) $\cos 330^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \operatorname{tg} 330^\circ$

b) $\frac{\cos 120^\circ}{\sin^2 330^\circ} + \frac{\operatorname{tg} 150^\circ}{\operatorname{tg} 210^\circ}$ d) $\frac{\cos^2 150^\circ \operatorname{tg} 210^\circ \operatorname{tg} 135^\circ}{\sin^2 150^\circ + \cos^2 210^\circ}$

7. W której ćwiartce układu współrzędnych leży ramię końcowe kąta α spełniającego podane warunki?

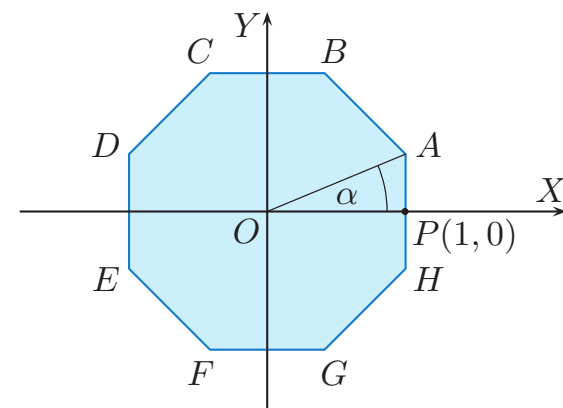
- a) $\sin \alpha > 0$ i $\cos \alpha < 0$ c) $\sin \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha > 0$
b) $\operatorname{tg} \alpha < 0$ i $\cos \alpha > 0$ d) $\cos \alpha < 0$ i $\sin \alpha \cos \alpha > 0$

8. Punkt $P\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ leży na ramieniu końcowym kąta 15° . Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ dla podanego kąta α .

- a) $\alpha = 165^\circ$ b) $\alpha = 195^\circ$ c) $\alpha = 345^\circ$ d) $\alpha = 75^\circ$

9. W układzie współrzędnych umieszczono ośmiokąt foremny tak jak na rysunku obok.

- a) Oblicz długość boku tego ośmiokąta.
b) Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów POA oraz POC .



R 1.2. Kąt obrotu

W życiu codziennym często spotykamy przykłady obrotów, np. obrót koła roweru, koła samochodu czy obrót wskazówek zegara.

Niech półprosta OA zawiera dodatnią półoś OX układu współrzędnych.

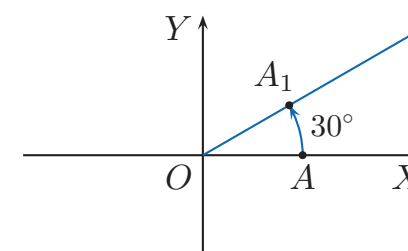
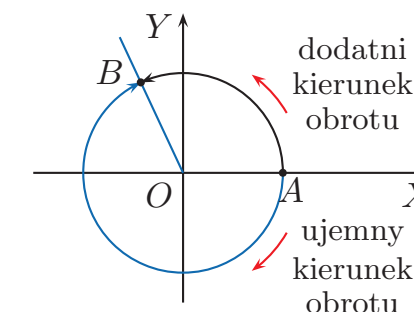
Kątem obrotu AOB nazywamy kąt, o jaki należy obrócić półprostą OA wokół punktu O , tak aby pokryła się ona z półprostą OB . Półprostą OA nazywamy **ramieniem początkowym** kąta obrotu, a półprostą OB – **ramieniem końcowym**.

Uwaga. Zamiast „kąt obrotu” mówimy krótko „kąt”.

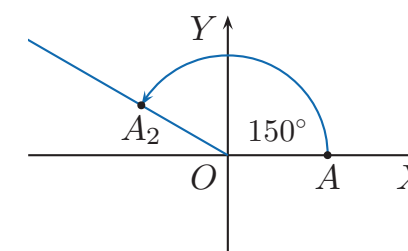
Przyjmujemy, że:

- **dodatni kierunek obrotu** to kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara,
- **ujemny kierunek obrotu** to kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara.

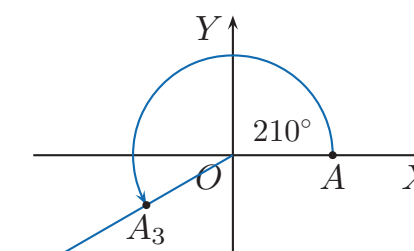
Piszemy krótko „obróć o kąt $-\alpha$ ”, gdy wykonano obrót o kąt $\alpha > 0$ w kierunku ujemnym.



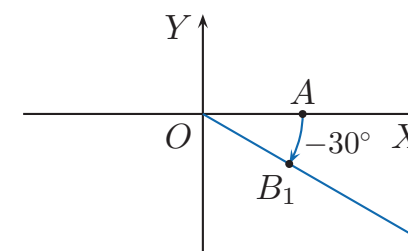
Półprosta OA po obrocie o 30° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_1 .



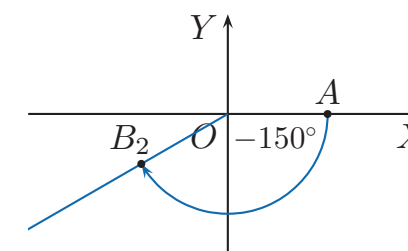
Półprosta OA po obrocie o 150° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_2 .



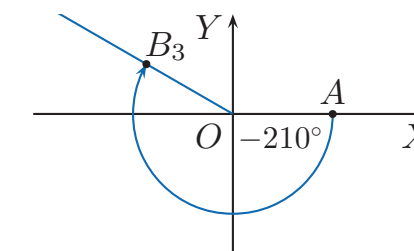
Półprosta OA po obrocie o 210° wokół punktu O pokryje się z półprostą OA_3 .



Półprosta OA po obrocie o -30° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_1 .



Półprosta OA po obrocie o -150° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_2 .

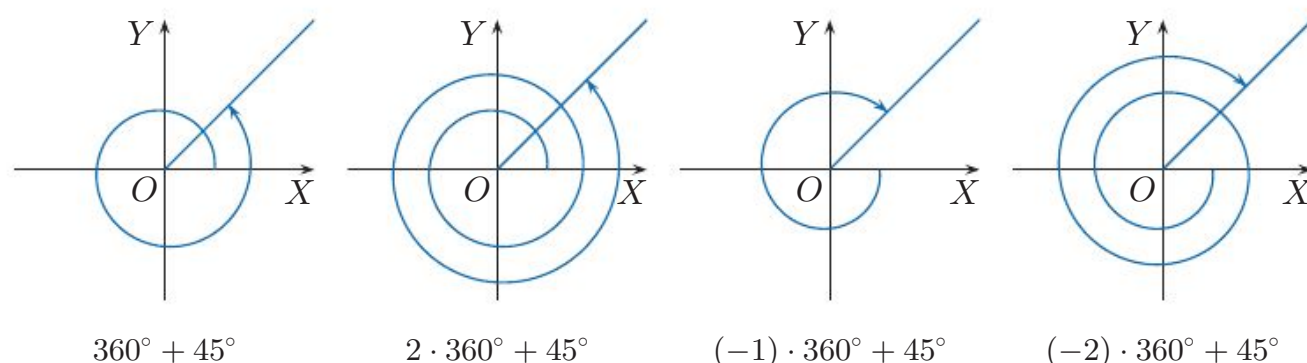


Półprosta OA po obrocie o -210° wokół punktu O pokryje się z półprostą OB_3 .

Przykład 1

Rozpatrzmy kąt AOB przedstawiony na rysunku obok. Półprosta OA pokryje się z półprostą OB nie tylko po obrocie wokół początku układu współrzędnych o kąt 45° , lecz także po obrocie na przykład o kąty:

$$\begin{aligned} 360^\circ + 45^\circ &= 405^\circ & (-1) \cdot 360^\circ + 45^\circ &= -315^\circ \\ 2 \cdot 360^\circ + 45^\circ &= 765^\circ & (-2) \cdot 360^\circ + 45^\circ &= -675^\circ \end{aligned}$$



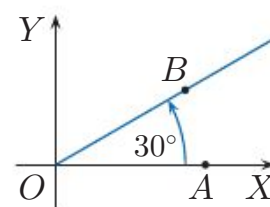
Ogólnie, aby półprosta OA pokryła się z półprostą OB , należy obrócić ją wokół początku układu współrzędnych o kąt równy $k \cdot 360^\circ + 45^\circ$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Kąty o mierze $k \cdot 360^\circ + 45^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, mają więc wspólne ramię końcowe.

Ćwiczenie 1

O które z podanych kątów można obrócić półprostą OA na rysunku obok, tak aby pokryła się ona z półprostą OB ?

390° , 750° , 1100° , 1470° , -330° , -690° , -1050° , -1400°



Ćwiczenie 2

Podaj przykłady trzech kątów, których ramiona końcowe pokrywają się z ramieniem końcowym kąta α .

- a) $\alpha = 80^\circ$ b) $\alpha = 560^\circ$ c) $\alpha = -50^\circ$ d) $\alpha = -320^\circ$

Przykład 2

Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbb{Z}$.

- a) $1400^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 320^\circ$ c) $-700^\circ = -2 \cdot 360^\circ + 20^\circ$
b) $730^\circ 10' = 2 \cdot 360^\circ + 10^\circ 10'$ d) $-1080^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 0^\circ$

Ćwiczenie 3

Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbb{Z}$.

- a) 850° c) -695° e) $1439^\circ 30'$ g) $-710^\circ 15'$
b) 1413° d) -3590° f) $-1079^\circ 25'$ h) $630^\circ 20'$

Definicje funkcji trygonometrycznych podane w poprzednim temacie można uogólnić na dowolny kąt $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbb{Z}$.

Definicja

Dla kąta $\alpha + k \cdot 360^\circ$ takiego, że $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$ oraz $k \in \mathbb{Z}$, przyjmujemy:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{dla } \alpha \neq 90^\circ \text{ i } \alpha \neq 270^\circ$$

Przykład 3

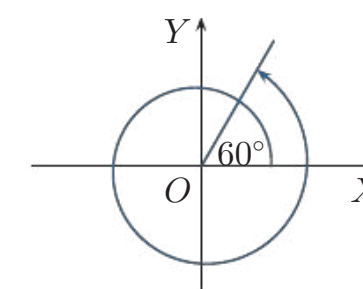
Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 420° .

$420^\circ = 60^\circ + 360^\circ$, zatem:

$$\sin 420^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 420^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$



Ramię końcowe kąta 420° pokrywa się z ramieniem końcowym kąta 60° .

Przykład 4

a) $\sin 750^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg}(-1035^\circ) = \operatorname{tg}(-3 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $\sin 405^\circ$ c) $\sin 1110^\circ$ e) $\operatorname{tg} 1500^\circ$ g) $\cos(-690^\circ)$
b) $\sin 780^\circ$ d) $\operatorname{tg} 765^\circ$ f) $\operatorname{tg}(-330^\circ)$ h) $\cos(-1395^\circ)$

Zadania

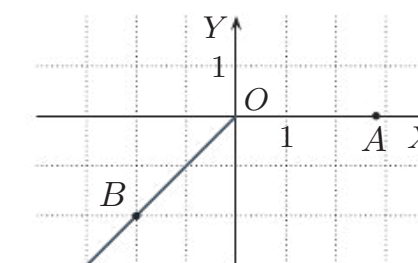
1. Zaznacz w układzie współrzędnych położenie ramienia końcowego kąta α .

- a) $\alpha = 315^\circ$ c) $\alpha = 570^\circ$ e) $\alpha = -2130^\circ$
b) $\alpha = -120^\circ$ d) $\alpha = -1305^\circ$ f) $\alpha = 4260^\circ$

2. Zapisz w postaci $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, miary kątów, do których ramienia końcowego należy punkt $P(1, -1)$.

3. Półprosta OA przedstawiona na rysunku obok po obrocie o kąt α pokryła się z półprostą OB . Wyznacz ten kąt w przypadku, gdy:

- a) $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$, c) $\alpha \in [1080^\circ; 1440^\circ)$,
b) $\alpha \in [360^\circ; 720^\circ)$, d) $\alpha \in [-1080^\circ; -720^\circ)$.



4. Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(3, 3\sqrt{3})$. Wyznacz ten kąt w przypadku, gdy:

- a) $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$, b) $\alpha \in [1080^\circ; 1440^\circ)$, c) $\alpha \in [-360^\circ; 0^\circ)$.

5. Czy punkt $P(-\sqrt{3}, 1)$ należy do ramienia końcowego kąta α ?

- a) $\alpha = 150^\circ$ c) $\alpha = 510^\circ$ e) $\alpha = 2310^\circ$
b) $\alpha = -210^\circ$ d) $\alpha = -930^\circ$ f) $\alpha = -1210^\circ$

6. Oblicz.

- a) $\sin(-330^\circ)$ e) $\cos 1140^\circ$ i) $\operatorname{tg}(-720^\circ)$ m) $\operatorname{tg} 495^\circ$
b) $\cos(-675^\circ)$ f) $\operatorname{tg}(-660^\circ)$ j) $\cos(-1080^\circ)$ n) $\cos 855^\circ$
c) $\sin 840^\circ$ g) $\sin 810^\circ$ k) $\sin 630^\circ$ o) $\cos(-495^\circ)$
d) $\operatorname{tg}(-300^\circ)$ h) $\cos 900^\circ$ l) $\operatorname{tg}(-180^\circ)$ p) $\operatorname{tg} 750^\circ$

7. Wyznacz kąt α spełniający podane warunki.

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (360^\circ; 450^\circ)$ d) $\operatorname{tg} \alpha = -1$ i $\alpha \in (360^\circ; 540^\circ)$
b) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (1080^\circ; 1170^\circ)$ e) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\alpha \in (720^\circ; 900^\circ)$
c) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (720^\circ; 810^\circ)$ f) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ i $\alpha \in (-360^\circ; -270^\circ)$

8. Określ, dla jakich kątów α :

- a) $\sin \alpha = 0$, b) $\cos \alpha = 0$, c) $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

9. Oblicz sumę miar wszystkich kątów z przedziału $[0^\circ; 500^\circ]$, których ramiona końcowe są zawarte w wykresie funkcji f .

- a) $f(x) = -x$ b) $f(x) = \sqrt{3}x$

10. Czy wartość podanego wyrażenia jest liczbą całkowitą?

$$\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 90^\circ + \dots + \cos 870^\circ + \cos 900^\circ$$

11. Wskazówka minutowa zegara ma długość 10 cm. Oblicz, jaką drogę przebędzie punkt na końcu tej wskazówki w ciągu:

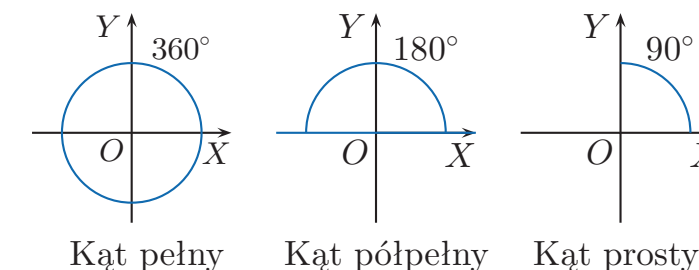
- a) godziny, b) 250 minut, c) doby, d) roku.

12. Wskazówka godzinowa zegara jest o 25% krótsza od wskazówki minutowej. Punkt na końcu wskazówki minutowej przebył drogę 36 cm. Jaką drogę w tym samym czasie przebył punkt na końcu wskazówki godzinowej tego zegara?



R 1.3. Miara łukowa kąta

Miarę kąta zwykle podajemy w stopniach. Gdy jest potrzebna większa dokładność, posługujemy się minutami oraz sekundami.

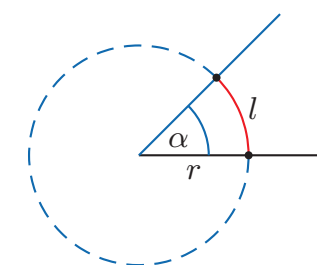


Definicja

Rozpatrzmy okrąg o środku w wierzchołku kąta α . **Miarą łukową** kąta α nazywamy stosunek długości łuku l wyznaczonego na okręgu przez ten kąt do promienia r tego okręgu.

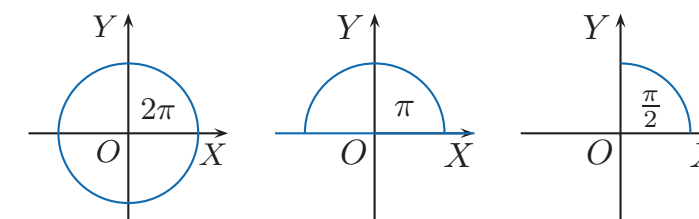
$$\alpha = \frac{\text{długość łuku}}{\text{promień okręgu}} = \frac{l}{r}$$

Jednostką miary łukowej jest **radian**, w skrócie: **rad**.



Miary łukowe kątów pełnego, półpełnego i prostego są równe:

- kąt pełny: $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ [rad],
- kąt półpełny: $\frac{\frac{1}{2} \cdot 2\pi r}{r} = \pi$ [rad],
- kąt prosty: $\frac{\frac{1}{4} \cdot 2\pi r}{r} = \frac{\pi}{2}$ [rad].



Ćwiczenie 1

Punkty A i B należą do okręgu o środku w punkcie O i promieniu r . Ramiona kąta wyznaczają na okręgu łuk o długości l . Podaj miarę łukową kąta AOB .

- a) $r = 4$, $l = 6$ b) $r = \frac{1}{3}$, $l = \frac{1}{6}$ c) $r = \frac{5}{4}$, $l = \frac{\pi}{4}$ d) $r = \frac{2}{3}$, $l = \pi$

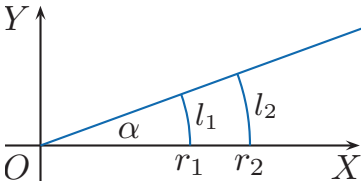
Czy wiesz, że...

Mierzenie kąta w stopniach, minutach i sekundach wprowadzili starożytni Babilończycy. Używali oni sześćdziesiątkowego systemu zapisu liczb.

Aby podać miarę kąta, można (oprócz miary stopniowej i łukowej) wykorzystać:

- miarę gradusową – jej jednostką jest 1 gradus będący $\frac{1}{400}$ kąta pełnego (miara używana w geodezji);
- tysięczne artyleryjskie – jednostką tej miary jest 1 tysięczna artyleryjska będąca $\frac{1}{1000}$ radiana (miara używana w wojskowości).

Zauważmy, że miara łukowa kąta nie zależy od długości promienia okręgu, gdyż $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$ (rysunek obok). Zatem wygodnie jest posługiwać się okręgiem jednostkowym. Wówczas:



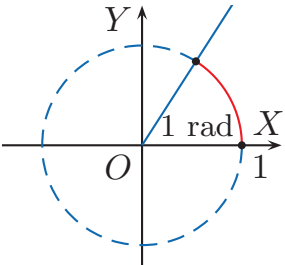
Miara łukowa kąta jest równa długości łuku, jaki ramiona tego kąta wyznaczają na okręgu jednostkowym o środku w wierzchołku kąta. Kąt ma miarę 1 radiana (1 rad), jeśli łuk wyznaczony przez ten kąt na okręgu jednostkowym ma długość 1.

Kąt pełny ma miarę łukową 2π radianów, zatem:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ = 57^\circ 18'$$

natomiast:

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$



Uwaga. Kiedy podajemy miarę łukową kąta, zwyczajowo pomijamy nazwę jednostki. Zamiast „kąt o mierze 2π radianów, $\frac{\pi}{2}$ radianów czy 3 radianów” mówimy krótko „kąt o mierze 2π , $\frac{\pi}{2}$, 3 ”.

Przykład 1

a) Podaj miarę łukową kąta 120° .

$$120^\circ = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

b) Podaj miarę łukową kąta 1140° .

$$1140^\circ = 1080^\circ + 60^\circ = 3 \cdot 360^\circ + \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 3 \cdot 2\pi + \frac{1}{3} \cdot \pi = 6\frac{1}{3}\pi$$

Aby wyznaczyć miarę łukową kąta 120° , możemy również skorzystać z proporcji:

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \\ x = \frac{120^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$

Ćwiczenie 2

Podaj miarę łukową kąta.

- a) 30° b) 45° c) 72° d) 780° e) $11^\circ 15'$

Ćwiczenie 3

Podaj miarę kąta w stopniach.

- a) $\frac{1}{12}\pi$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{4}{5}\pi$ d) $\frac{19}{10}\pi$ e) $\frac{28}{15}\pi$

W radianach będziemy również wyrażać miarę kąta obrotu. Niech α_1 i α będą miarami tego samego kąta wyrażonymi odpowiednio w stopniach i w radianach, przy czym $\alpha_1 \in [0^\circ; 360^\circ)$ oraz $\alpha \in [0; 2\pi)$. Dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{Z}$ zamiast $\alpha_1 + k \cdot 360^\circ$ możemy pisać $\alpha + 2k\pi$.

Przykład 2

a) Oblicz $\cos \frac{9}{4}\pi$.

$$\cos \frac{9}{4}\pi = \cos 2\frac{1}{4}\pi = \cos(2\pi + \frac{1}{4}\pi) = \cos \frac{1}{4}\pi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Oblicz $\text{tg}(-\frac{11}{3}\pi)$.

$$\text{tg}(-\frac{11}{3}\pi) = \text{tg}(-4\pi + \frac{1}{3}\pi) = \text{tg} \frac{1}{3}\pi = \text{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta α i kąta $\alpha + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, są równe.

Ćwiczenie 4

Przerysuj do zeszytu przedstawioną obok tabelę i ją uzupełnij, a następnie oblicz:

- a) $\sin \frac{7}{3}\pi$, d) $\sin \frac{17}{4}\pi$, g) $\cos(-\frac{15}{4}\pi)$,
 b) $\text{tg} \frac{13}{6}\pi$, e) $\sin(-4\pi)$, h) $\cos(-\frac{11}{3}\pi)$,
 c) $\text{tg} \frac{13}{3}\pi$, f) $\cos(-\frac{3}{2}\pi)$, i) $\sin(-\frac{23}{4}\pi)$.

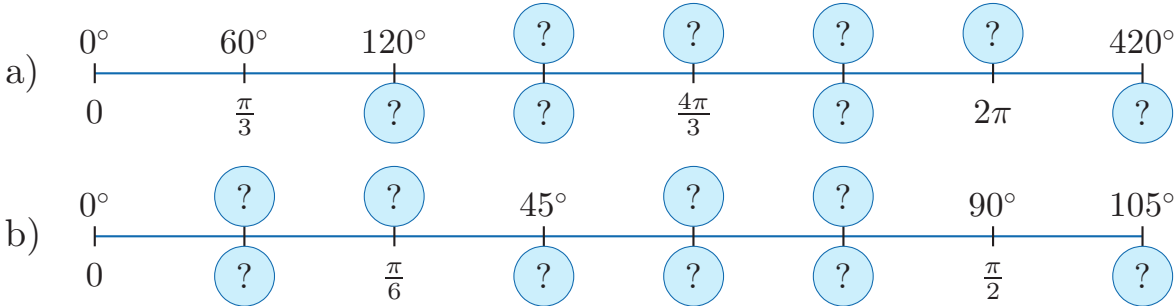
α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	?	?	?
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?
$\text{tg} \alpha$	?	?	?

Zadania

1. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Miara kąta $[\circ]$	5°	10°	?	36°	?	?	?	225°	315°	?
Miara kąta [rad]	?	?	$\frac{\pi}{8}$	?	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{6}$	?	?	$\frac{11\pi}{6}$

2. Na rysunku poniżej przedstawiono dwie miary kątów: stopniową i łukową. Przerysuj go do zeszytu i uzupełnij puste miejsca.



3. Podaj miarę łukową kąta.

- a) 20° b) 315° c) 765° d) -420° e) -1100°

4. Podaj miarę kąta w stopniach.

- a) $\frac{3}{4}\pi$ b) $\frac{7}{12}\pi$ c) $\frac{16}{9}\pi$ d) $-\frac{9}{4}\pi$ e) $-\frac{13}{3}\pi$

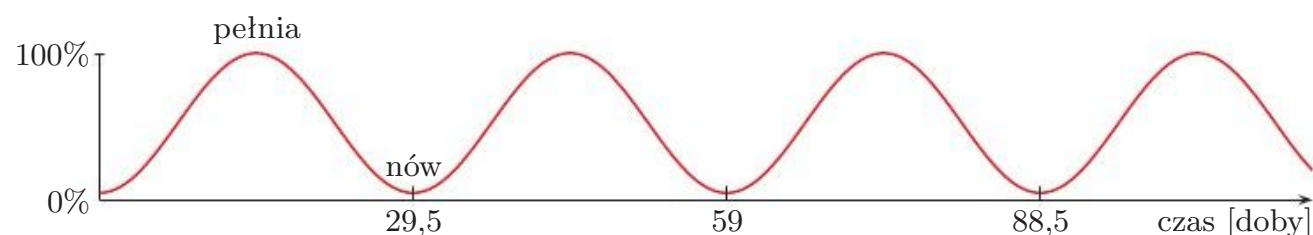
5. Oblicz.

- a) $\sin \frac{9}{4}\pi$ b) $\cos \frac{7}{3}\pi$ c) $\cos \frac{17}{4}\pi$ d) $\text{tg}(-\frac{5}{3}\pi)$ e) $\sin(-\frac{15}{4}\pi)$

R 1.4. Funkcje okresowe



Na zdjęciach powyżej przedstawiono kolejne fazy Księżyca: od pełni do nowiu. Cykl zmian faz Księżyca trwa średnio 29 i pół doby.



Na schematycznym wykresie powyżej pokazano, jaki procent tarczy Księżyca jest widoczny z Ziemi w kolejnych dniach cyklu.

Definicja

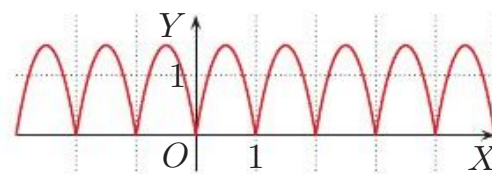
Funkcję f o dziedzinie D nazywamy **okresową**, jeśli istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdego argumentu $x \in D$ i dowolnej liczby całkowitej k :

$$x + kT \in D \text{ oraz } f(x + kT) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji**.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji okresowej. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. Okresem tej funkcji jest dowolna liczba całkowita różna od zera. Liczba 1 jest najmniejszym okresem dodatnim tej funkcji.

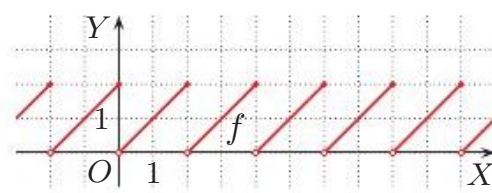
Najmniejszy okres dodatni funkcji (jeśli istnieje) jest nazywany **okresem podstawowym** albo **zasadniczym**.



Zwróć uwagę, że jeśli T jest okresem funkcji f , to każda liczba $k \cdot T$, gdzie k jest liczbą całkowitą różną od zera, też jest okresem tej funkcji.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj okres podstawowy tej funkcji oraz wartości $f(100)$ i $f(100\frac{1}{2})$.

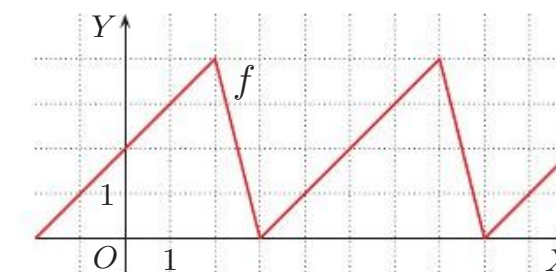


Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie podstawowym $T = 5$. Oblicz $f(101)$ i $f(-96)$.

$$f(101) = f(1 + 20 \cdot 5) = f(1) = 3$$

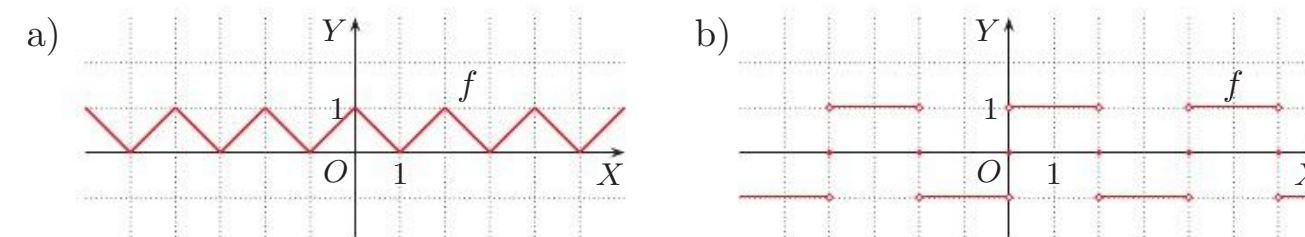
$$f(-96) = f(4 - 20 \cdot 5) = f(4) = 1$$



Dla funkcji f mamy:
 $f(x) = f(x + 5) = f(x + 2 \cdot 5) = \dots$

Ćwiczenie 2

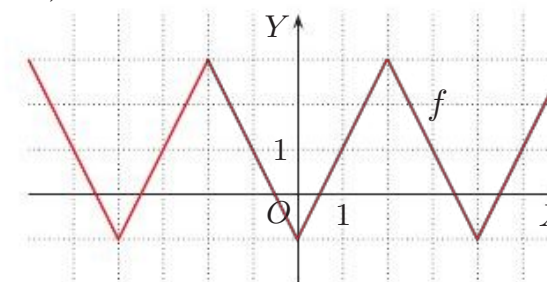
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z wykresu okres podstawowy tej funkcji. Oblicz $f(-11)$, $f(80\frac{1}{2})$ i $f(103)$.



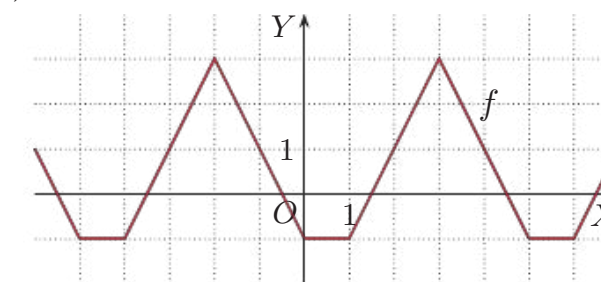
Zadania

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie T . Oblicz $f(33)$, $f(42)$ i $f(-48)$.

a) $T = 4$

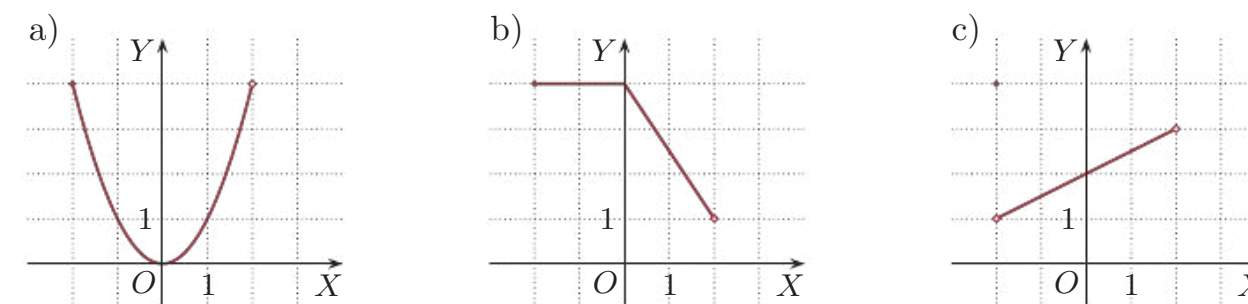


b) $T = 5$



2. Uzasadnij, że funkcja stała $f(x) = c$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ jest funkcją okresową, ale nie istnieje dla niej okres podstawowy.

3. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie $T = 4$. Naszkicuj wykres tej funkcji dla $x \in [-6; 10]$.



4. Wykres funkcji okresowej f o okresie $T = 2$ pokrywa się w przedziale $[-1; 1]$ z wykresem funkcji g . Naskicuj wykres funkcji f .

a) $g(x) = |x|$ b) $g(x) = x$ c) $g(x) = 1 - x^2$ d) $g(x) = x^2 - 2x$

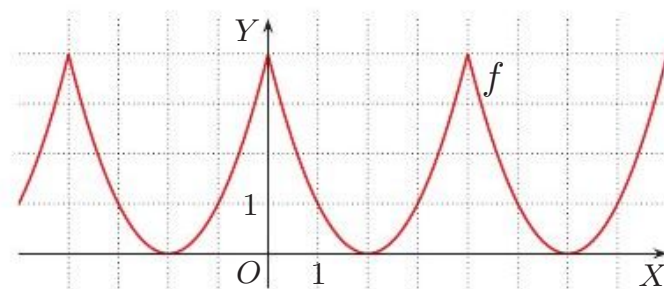
5. Wykres funkcji okresowej f o okresie $T = 4$ pokrywa się w podanym przedziale z wykresem funkcji $g(x) = |x - 1| - 2$. Naskicuj wykres funkcji f .

a) $[-1; 3]$ b) $[0; 4]$ c) $(-2; 2]$ d) $(-4; 0]$

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie $T = 4$.

a) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 1$ należących do przedziału $[0; 20]$.

b) Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ należących do przedziału $[0; 400]$.



7. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x . Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x - [x]$ i podaj jej okres podstawowy.

Czy wiesz, że...

Sygnały świetlne wysyłane przez latarnie morskie powtarzają się okresowo. Oto charakterystyka światła wysyłanego przez latarnię morską w Gąskach koło Mielna: światło – 2,5 s, przerwa – 1,2 s, światło – 2,5 s, przerwa – 1,2 s, światło – 6,4 s, przerwa – 1,2 s (okres wynosi 15 s).



Wartość 1 odpowiada światłu, a 0 odpowiada przerwie.

8. Naskicuj schematyczny wykres przedstawiający charakterystykę światła wysyłanego przez latarnię morską:

a) w Helu: światło – 5 s, przerwa – 5 s (okres wynosi 10 s),

b) w Krynicy Morskiej: światło – 2 s, przerwa – 2 s, światło – 2 s, przerwa – 6 s (okres wynosi 12 s).

Latarnia morska w Gąskach



R 1.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus

Funkcje trygonometryczne możemy traktować jako funkcje zmiennej x , gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą będącą miarą pewnego kąta wyrażoną w radianach. Wówczas dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ mamy: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ oraz $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$. Zatem sinus i cosinus są funkcjami okresowymi o okresie $T = 2\pi$. Można wykazać, że jest to ich okres podstawowy.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

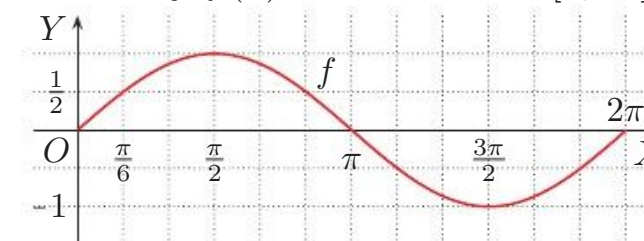
Wykres funkcji sinus

W tabeli podano wartości funkcji $f(x) = \sin x$ dla wybranych argumentów z przedziału $[0; 2\pi]$.

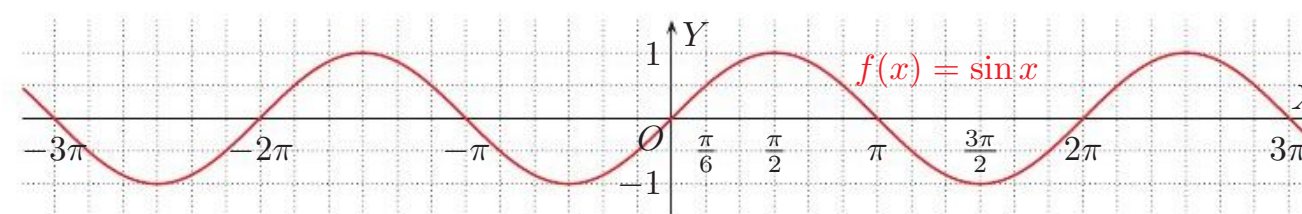
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in [0; 2\pi]$.

Przybliżone wartości funkcji sinus dla innych argumentów niż podane w tabeli możemy obliczyć, korzystając z kalkulatora, lub odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.



Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$, możemy skorzystać z okresowości tej funkcji. Wykres funkcji sinus nazywamy **sinusoidą**.



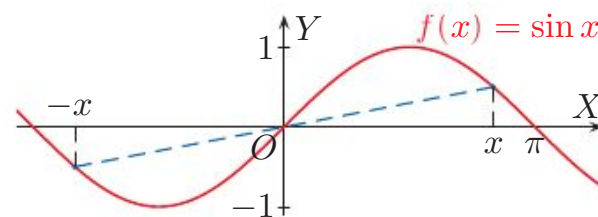
Wybrane własności funkcji $f(x) = \sin x$:

- Dziedzina funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-1; 1]$.
- Funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = 2\pi$.
- Funkcja f przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja f przyjmuje wartość największą 1 dla $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą -1 dla $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ jest każdy punkt o współrzędnych $(k\pi, 0)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. W szczególności jest nim punkt $O(0, 0)$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(-x) = -\sin x$$



Ćwiczenie 1

a) Wiadomo, że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Podaj wartość $\sin(-75^\circ)$.

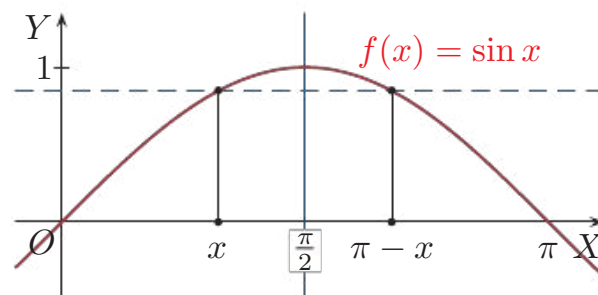
b) Wiadomo, że $\sin(-15^\circ) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$. Podaj wartość $\sin 15^\circ$.

Ośią symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ jest każda prosta pionowa określona równaniem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

W szczególności jest nią prosta $x = \frac{\pi}{2}$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

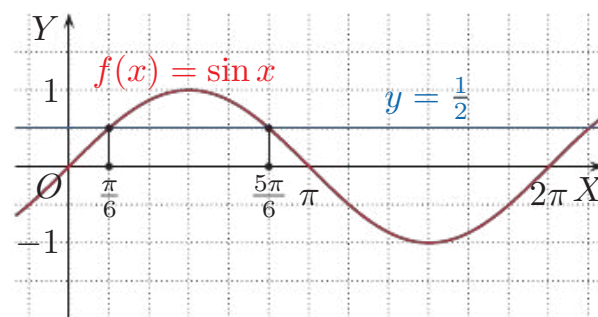
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$



Przykład 1

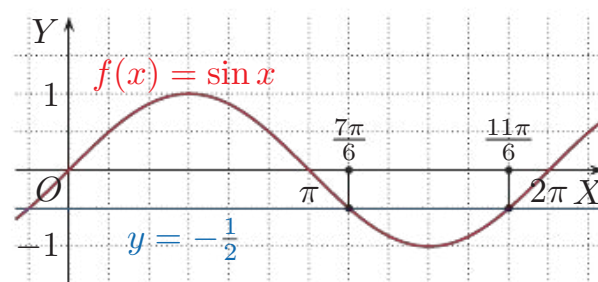
a) Podaj te argumenty $x \in [0; 2\pi]$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.

Z wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ odczytujemy, że równość $\sin x = \frac{1}{2}$ zachodzi dla $x = \frac{\pi}{6}$ oraz dla $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.



b) Podaj te argumenty $x \in [0; 2\pi]$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość $-\frac{1}{2}$.

Z wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ odczytujemy, że równość $\sin x = -\frac{1}{2}$ zachodzi dla $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ oraz dla $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.



Ćwiczenie 2

Wyznacz te argumenty $x \in [0; 2\pi]$, dla których funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje podaną wartość.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

■ Wykres funkcji cosinus

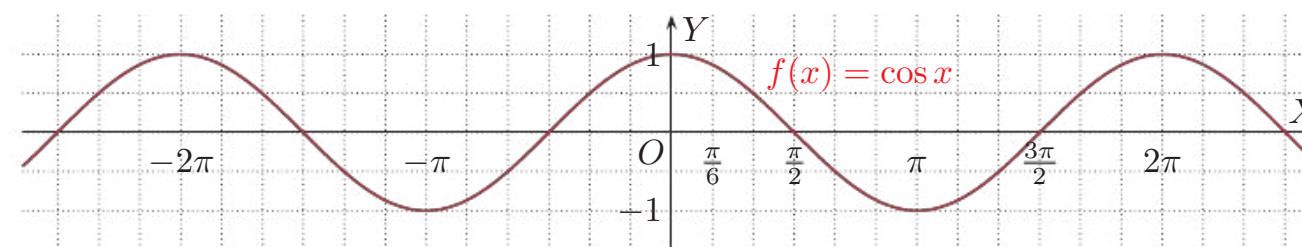
Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos x$	?	?	?	?	?	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$, możemy skorzystać z tego, że jest to funkcja okresowa o okresie podstawowym $T = 2\pi$.

Wykres funkcji cosinus nazywamy **cosinusoidą**.



Dziedziną funkcji $f(x) = \cos x$ jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej zbiorem wartości jest przedział $[-1; 1]$.

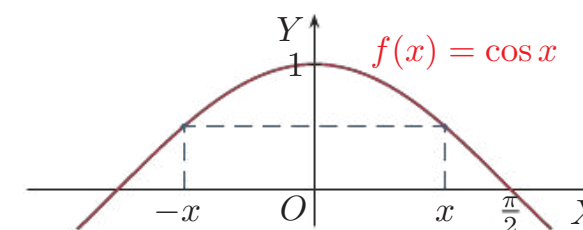
Ćwiczenie 4

Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość: a) 1, b) 0, c) -1?

Oś OY jest osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = \cos x$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(-x) = \cos x$$

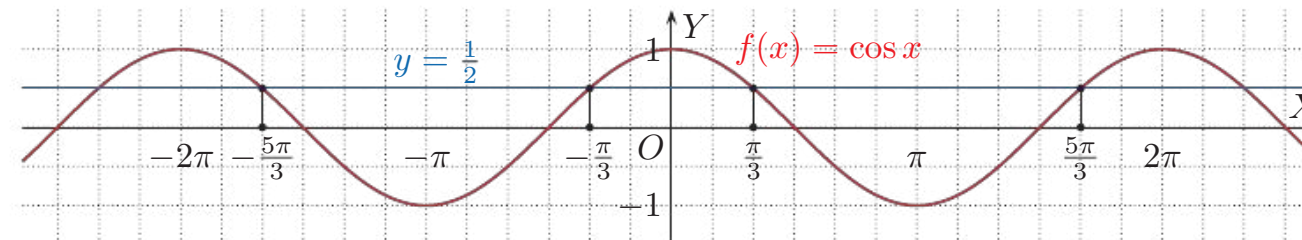


Ćwiczenie 5

Podaj równania prostych, które są osiami symetrii wykresu funkcji $y = \cos x$, oraz współrzędne punktów, które są środkami symetrii tego wykresu.

Przykład 2

Podaj te argumenty $x \in [-2\pi; 2\pi]$, dla których funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$.



Z wykresu odczytujemy, że $\cos x = \frac{1}{2}$ dla $x \in \{-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$.

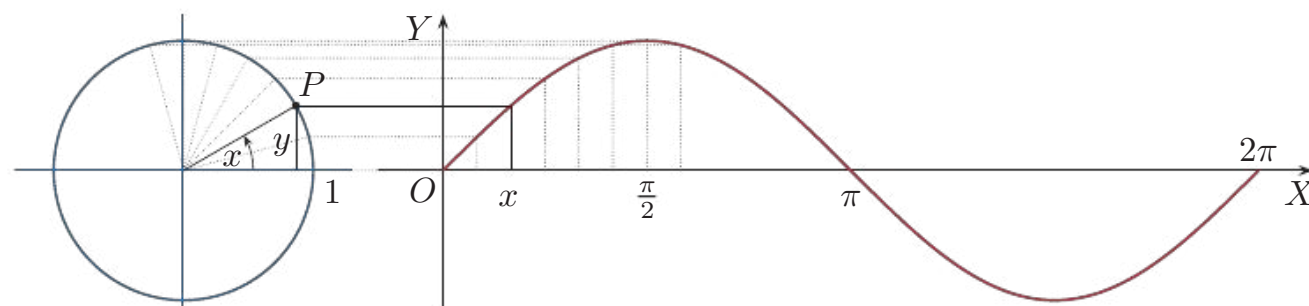
Ćwiczenie 6

Wyznacz te argumenty $x \in [-3\pi; 3\pi]$, dla których funkcja $f(x) = \cos x$ przyjmuje podaną wartość.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadania

- Ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = \sin x$ w podanym przedziale?
a) $[0; 2\pi]$ b) $[-2\pi; 2\pi]$ c) $(0; 5\pi]$ d) $(0; 32)$
- Podaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = \cos x$ należące do przedziału:
a) $[0; 2\pi]$, b) $[-2\pi; 2\pi]$, c) $(-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi]$, d) $(-\frac{9}{2}; \frac{15}{2})$.
- Naszkcuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in [-2\pi; 2\pi]$. Korzystając z wykresu, podaj przedziały, w których funkcja f :
a) przyjmuje wartości dodatnie, b) rośnie, c) maleje.
- Naszkcuj wykres funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in [-\pi; 3\pi]$. Korzystając z wykresu, podaj przedziały, w których funkcja f :
a) przyjmuje wartości ujemne, b) rośnie, c) maleje.
- Ile rozwiązań ma podane równanie we wskazanym przedziale w zależności od parametru m ?
a) $\sin x = m$, $[0; 4\pi]$ c) $\cos x = m$, $[0; 4\pi]$
b) $\sin x = m$, $(-\pi; 3\pi)$ d) $\cos x = m$, $(-\pi; 3\pi)$
- Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania:
a) $\sin x = 0,7$, które należą do przedziału $[0; 6\pi]$,
b) $\cos x = \frac{1}{3}$, które należą do przedziału $[-4\pi; 4\pi]$.
- Objasnij sposób otrzymywania sinusoidy. Skorzystaj z rysunku poniżej (kątowni x odpowiada punkt P na okręgu o promieniu 1).

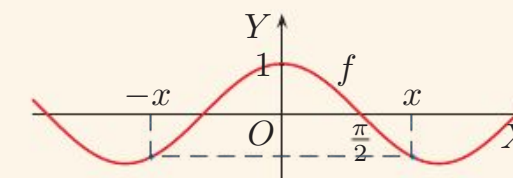


Dowiedz się więcej

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste

Funkcję $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **parzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D$ liczba $-x$ również należy do dziedziny funkcji f oraz zachodzi równość:

$$f(-x) = f(x)$$

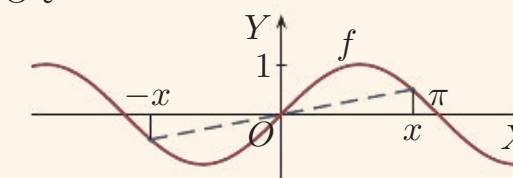


Funkcja $f(x) = \cos x$, określona dla $x \in \mathbb{R}$, jest parzysta.

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY .

Funkcję $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **nieparzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $x \in D$ liczba $-x$ również należy do dziedziny funkcji f oraz zachodzi równość:

$$f(-x) = -f(x)$$



Funkcja $f(x) = \sin x$, określona dla $x \in \mathbb{R}$, jest nieparzysta.

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $O(0,0)$.

Przykład

Zbadaj parzystość funkcji f .

a) $f(x) = x^3 \sin x$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbb{R}$, więc dla każdego $x \in D$ również $-x \in D$.

$$f(-x) = (-x)^3 \cdot \sin(-x) = -x^3 \cdot (-\sin x) = x^3 \cdot \sin x = f(x)$$

Zatem funkcja f jest parzysta.

b) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$, zatem dla każdego $x \in D$ również $-x \in D$.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -f(x)$$

Zatem funkcja f jest nieparzysta.

c) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x+1}$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Zauważ, że $1 \in D$, ale $-1 \notin D$, zatem funkcja f nie jest ani funkcją parzystą, ani funkcją nieparzystą.

1. Zbadaj parzystość funkcji f .

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = -\sin x$ | e) $f(x) = x \sin x + 1$ | i) $f(x) = \frac{1}{x}(\cos x + 1)$ |
| b) $f(x) = \sin x \cos x$ | f) $f(x) = x^2 \sin x$ | j) $f(x) = x - \cos x$ |
| c) $f(x) = \sin^2 x$ | g) $f(x) = x \sin^2 x$ | k) $f(x) = x^2 \sin^2 x + \cos x$ |
| d) $f(x) = - \sin x $ | h) $f(x) = -x^2 \cos^2 x$ | l) $f(x) = x^2 \cos x + \sin x$ |

R 1.6. Wykres funkcji tangens

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, korzystając z rysunku obok, że liczba π jest okresem funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

Można wykazać, że π jest okresem podstawowym funkcji tangens.

Twierdzenie

Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ i $n \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x$$

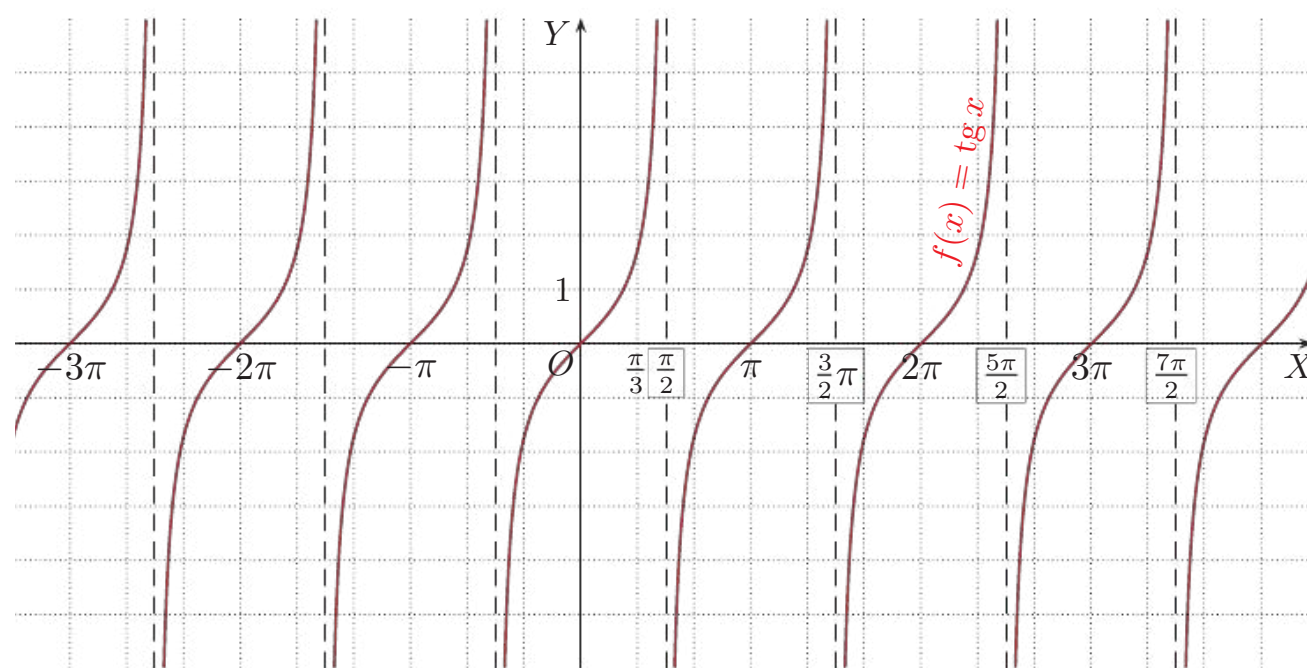
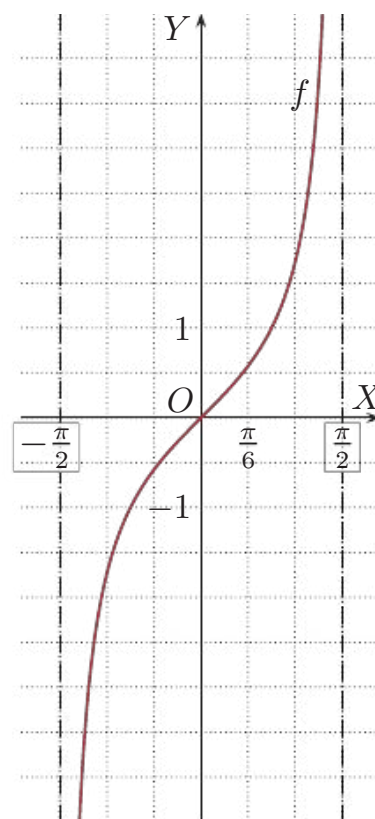
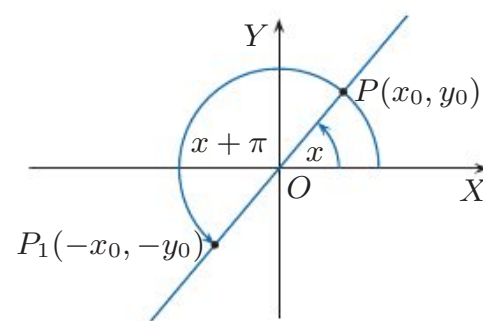
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

x	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\operatorname{tg} x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Proste $x = -\frac{\pi}{2}$ oraz $x = \frac{\pi}{2}$ są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f .

Rozpatrzmy teraz funkcję $f(x) = \operatorname{tg} x$ określoną dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Aby otrzymać jej wykres, korzystamy z tego, że jest ona okresowa.

Wykres funkcji tangens nazywamy **tangensoidą**.



Wybrane własności funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$:

- Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = \pi$.
- Funkcja f przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja f rośnie w każdym z przedziałów $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Proste o równaniach $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f .

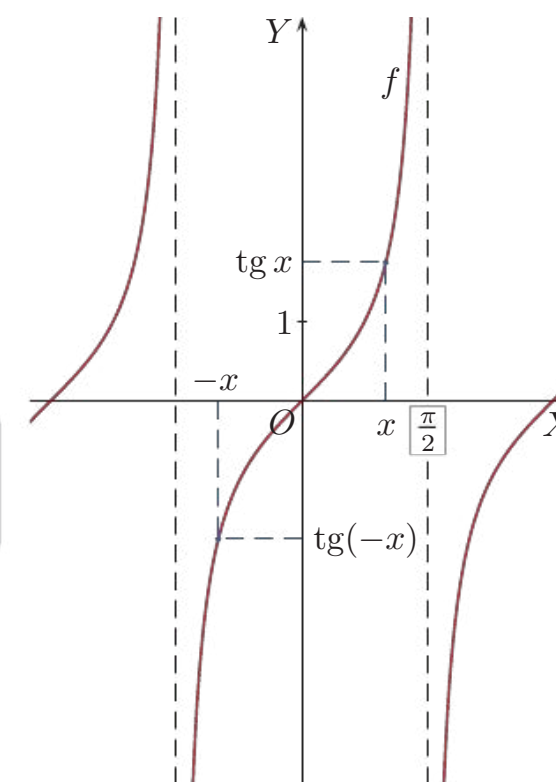
Ćwiczenie 2

Podaj współrzędne środków symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$, prawdziwa jest więc poniższa własność.

Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$



Ćwiczenie 3

- Podaj wartość $\operatorname{tg}(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = 3$.
- Podaj wartość $\operatorname{tg}(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$.
- Podaj wartość $\operatorname{tg} x$, jeśli $\operatorname{tg}(-x) = \frac{5}{8}$.

Przykład 1

Skorzystaj z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ i wyznacz rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

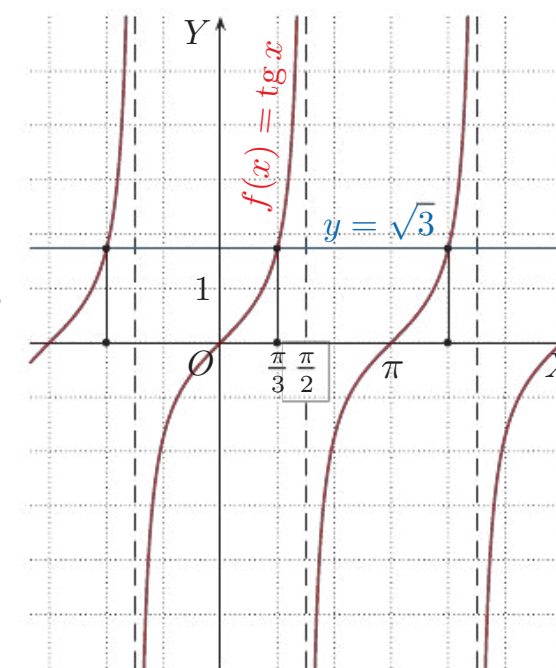
W przedziale $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ dla $x = \frac{\pi}{3}$. Na podstawie okresowości funkcji tangens otrzymujemy rozwiązanie równania:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ćwiczenie 4

Skorzystaj z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ i wyznacz rozwiązanie równania:

- $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$,
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Zadania

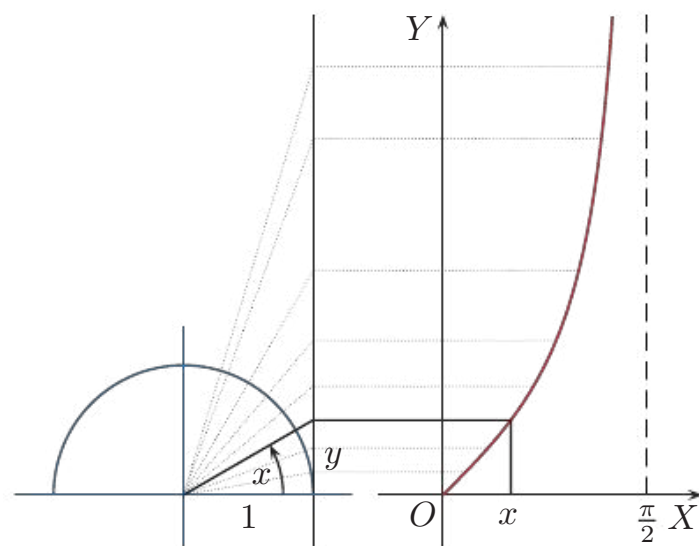
- Naszkicuj wykres funkcji tangens. Czy jest to funkcja monotoniczna? Odpowiedź uzasadnij.
- Naszkicuj wykres funkcji tangens i rozwiąż podane równanie. Wyznacz najmniejszą liczbę z przedziału $(3; \infty)$ spełniającą to równanie.
 - $\operatorname{tg} x = 0$
 - $\operatorname{tg} x = 1$
 - $\operatorname{tg} x = -1$
 - $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- Wyznacz x spełniający podane warunki.
 - $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ i $x \in [2\pi; 3\pi]$
 - $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ i $x \in [-3\pi; -2\pi]$
 - $\operatorname{tg} x = -1$ i $x \in [4\pi; 5\pi]$
- Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $[0; 4\pi]$.
 - $\operatorname{tg} x = 0$
 - $\operatorname{tg} x = 1$
 - $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - $\operatorname{tg} x = -1$
 - $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
 - $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$
- Wyznacz przybliżone rozwiązanie podanego równania należące do przedziału $[2\pi; 3\pi]$. Skorzystaj z informacji zamieszczonych obok.

- $\operatorname{tg} x = 0,3249$
 - $\operatorname{tg} x = -1,3764$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \approx 0,3249$
 $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} \approx 1,3764$
- Wyznacz rozwiązania równania należące do przedziału $[-\pi; 2\pi]$. Skorzystaj z danych z tabeli obok.

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$
$\operatorname{tg} x$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} + 1$	$2 + \sqrt{3}$

 - $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$
 - $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$
- Rozwiąż podane równanie. Skorzystaj z danych z tabeli powyżej.
 - $\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2}$
 - $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} - 2$
- Objasnij sposób otrzymywania tangensoidy dla $x \in [0; \frac{\pi}{2})$. Skorzystaj z rysunku obok.

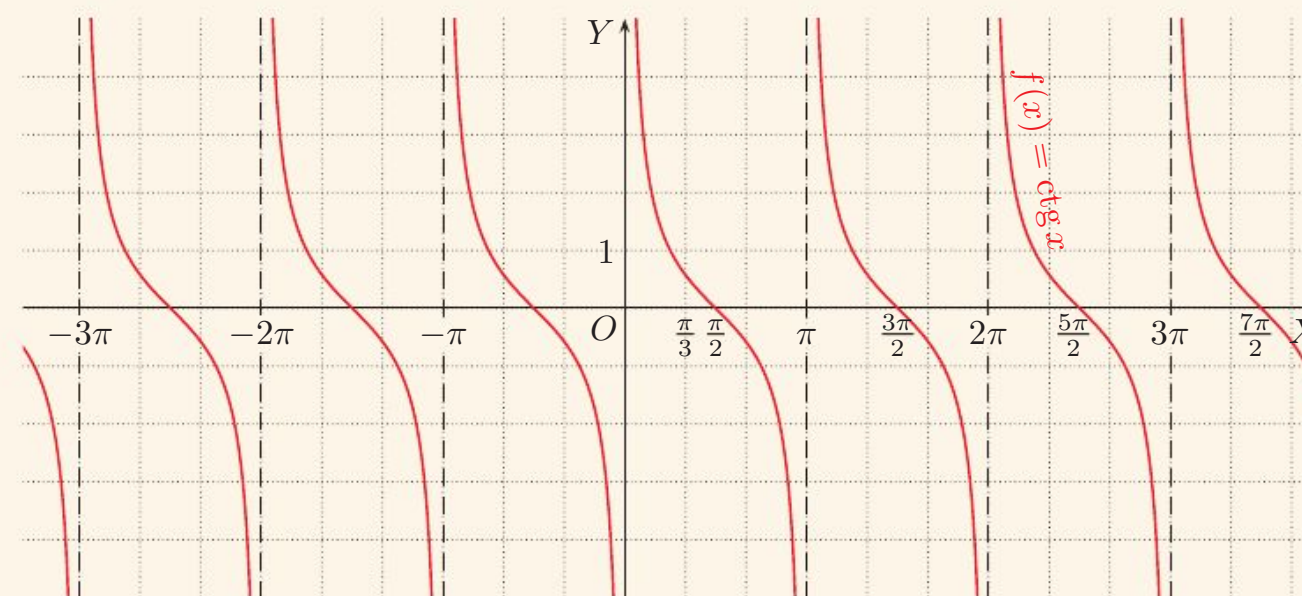


Dowiedz się więcej

Wykres funkcji cotangens

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Jest ona określona dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$, a jej okres podstawowy jest równy π .

Wykres funkcji cotangens nazywamy **cotangensoidą**.



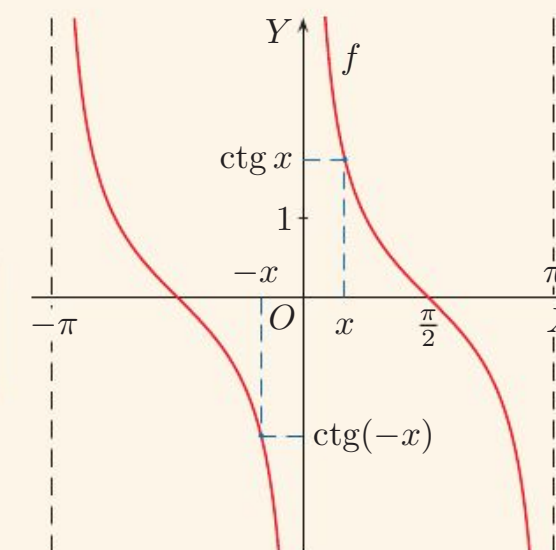
Wybrane własności funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$:

- Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Dla $x \neq k\frac{\pi}{2}$ zachodzi równość $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.
- Funkcja f przyjmuje wartość 0 dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja f maleje w każdym z przedziałów $(k\pi; (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Proste o równaniach $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, są asymptotami pionowymi wykresu funkcji f .

Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ (funkcja ctg jest nieparzysta), prawdziwa jest więc poniższa własność.

Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$



- Oblicz.
 - $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{6})$
 - $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{4})$
 - $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})$
- Wyznacz rozwiązania podanego równania należące do przedziału $[-2\pi; 4\pi]$.
 - $\operatorname{ctg} x = 1$
 - $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$
 - $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

R 1.7. Przekształcenia wykresu funkcji

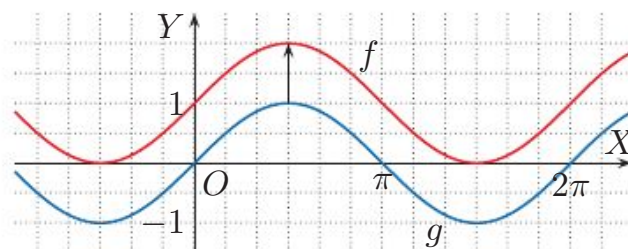
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin x + 1$ i podaj jej zbiór wartości.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

$$g(x) = \sin x$$

o wektor $\vec{v} = [0, 1]$. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[0; 2]$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = \sin x - 1$ b) $f(x) = \sin x + 2$ c) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}$

Przykład 2

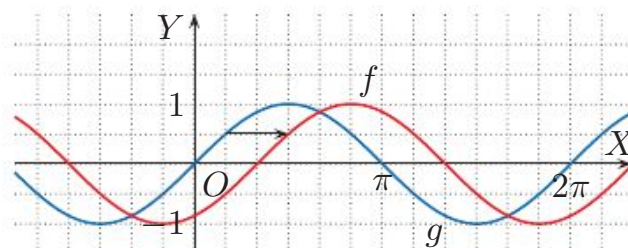
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$. Podaj jej okres podstawowy oraz miejsca zerowe.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

$$g(x) = \sin x$$

o wektor $\vec{v} = [\frac{\pi}{3}, 0]$. Okres podstawowy funkcji f jest równy 2π .

Miejsca zerowe funkcji f są postaci $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej okres podstawowy oraz miejsca zerowe.

- a) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ c) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

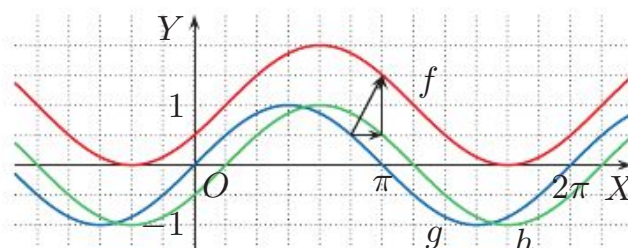
Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6}) + 1$. Podaj jej okres podstawowy.

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji:

- $g(x) = \sin x$,
- $h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$,
- $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6}) + 1$.

Wykres funkcji f możemy też otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \sin x$ o wektor $\vec{v} = [\frac{\pi}{6}, 1]$. Okres podstawowy funkcji f jest równy 2π .



Zauważmy, że przesunięcie wykresu funkcji o wektor nie zmienia jej okresu podstawowego.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości oraz okres podstawowy.

- a) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$ c) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$
b) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2$ d) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}) + 2$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji:

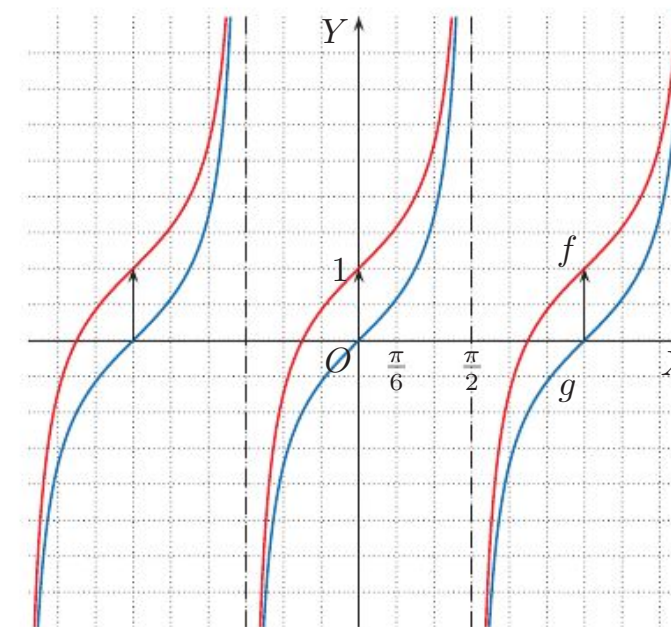
$$f(x) = \operatorname{tg} x + 1$$

Podaj jej dziedzinę i równania asymptot wykresu tej funkcji.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \operatorname{tg} x$ o wektor $\vec{u} = [0, 1]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Asymptotami wykresu funkcji f są proste $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$. Podaj jej dziedzinę i równania asymptot wykresu tej funkcji.

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji:

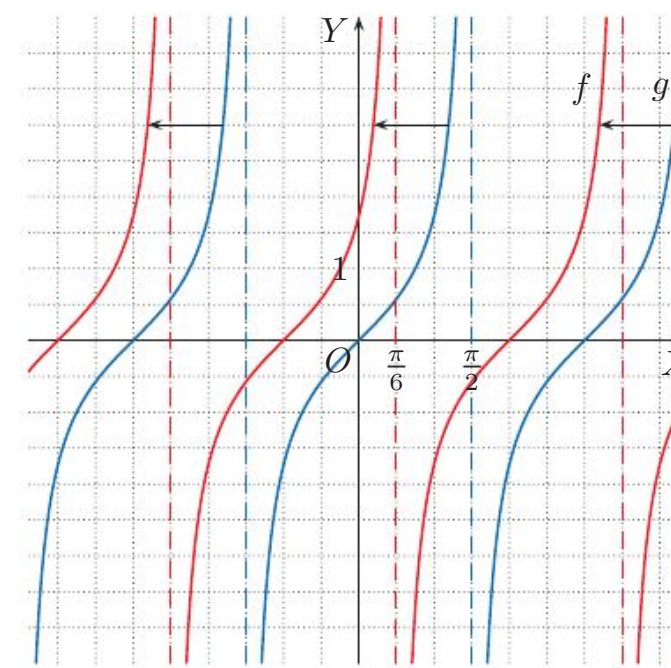
$$f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})$$

i podaj jej dziedzinę oraz równania asymptot wykresu tej funkcji.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \operatorname{tg} x$ o wektor $\vec{u} = [-\frac{\pi}{3}, 0]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Asymptotami wykresu funkcji f są proste $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



Ćwiczenie 5

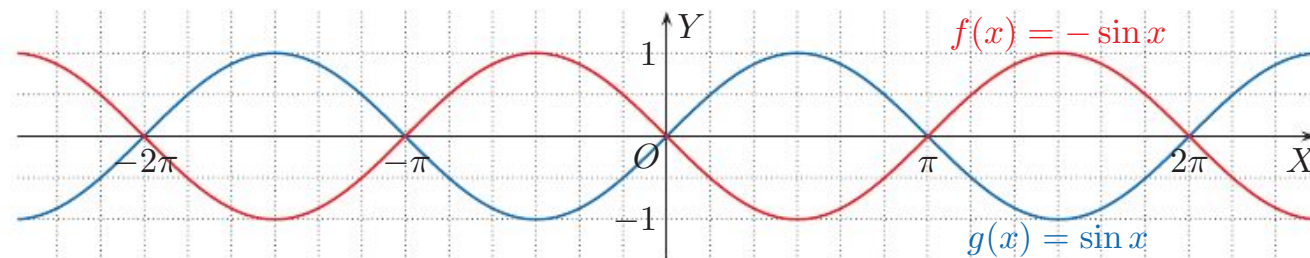
Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę oraz równania asymptot wykresu tej funkcji.

a) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6})$ b) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$ c) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3}) - 1$

Przykład 6

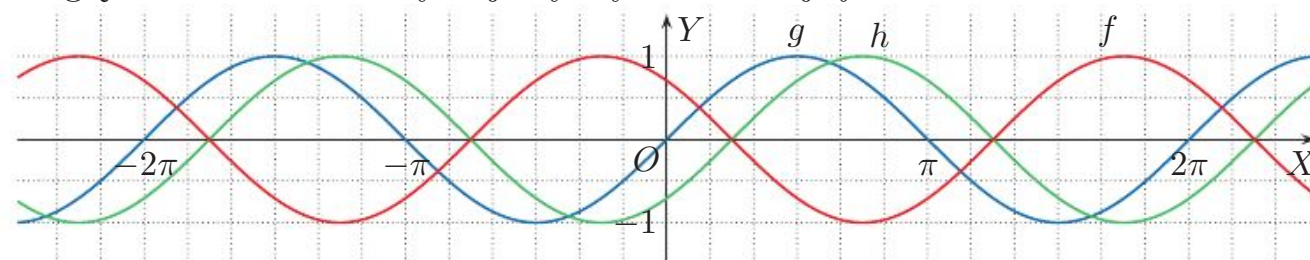
a) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\sin x$.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu funkcji $g(x) = \sin x$ względem osi OX .



b) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{4})$.

Wykres funkcji $g(x) = \sin x$ przesuwamy o wektor $[\frac{\pi}{4}, 0]$ i otrzymujemy wykres funkcji $h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$. Następnie wykres funkcji h odbijamy symetrycznie względem osi OX i otrzymujemy wykres funkcji f .



Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

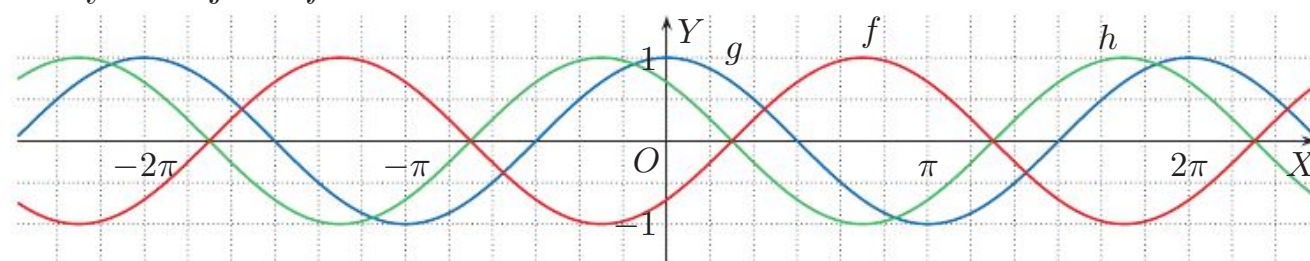
a) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{6})$ b) $f(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{3})$ c) $f(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{2})$

Ćwiczenie 7

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$g(x) = \cos x, \quad h(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}), \quad f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$$

Opisz przekształcenia pozwalające z wykresu funkcji g otrzymać kolejno wykresy funkcji h i f .



Ćwiczenie 8

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{3})$ b) $f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$

Przykład 7

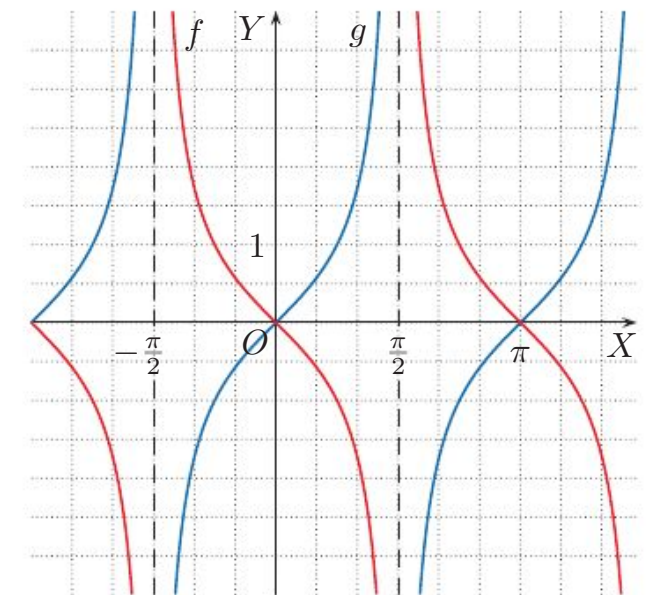
Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = -\operatorname{tg} x$$

Podaj przedziały, w których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu funkcji $g(x) = \operatorname{tg} x$ względem osi OX .

Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



Przykład 8

Naszkicuj wykres funkcji:

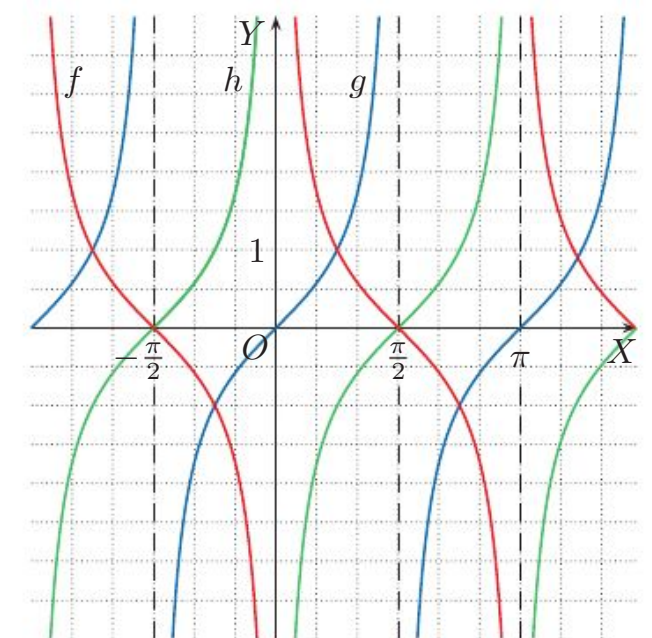
$$f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$$

Podaj przedziały, w których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji:

- $g(x) = \operatorname{tg} x$,
- $h(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$,
- $f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$.

Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



Ćwiczenie 9

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę i miejsca zerowe.

a) $f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$ b) $f(x) = -\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$ c) $f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})$

Zadania

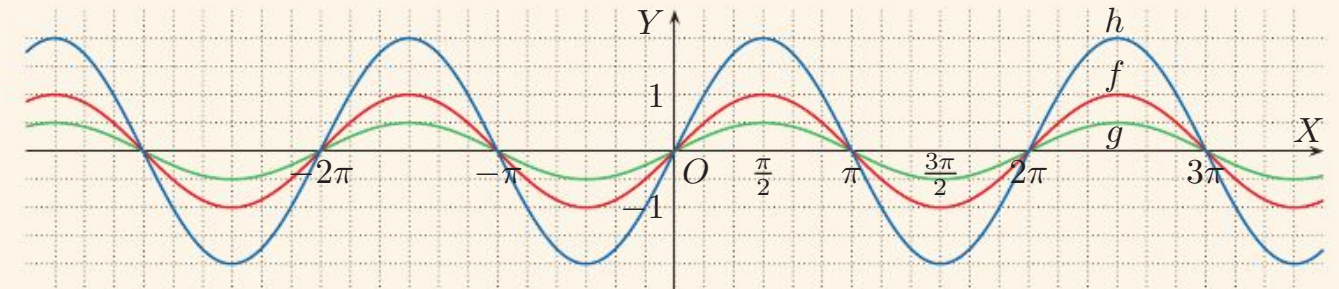
1. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin x + 3$ b) $f(x) = \cos x + 2$ c) $f(x) = \sin x - 2$

Inne przekształcenia wykresów funkcji sinus i cosinus

Przykład 1

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ (kolor czerwony), $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$ (kolor zielony), $h(x) = 2 \sin x$ (kolor niebieski).



Zauważmy, że jeśli do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ należy punkt (x_0, y_0) , to do wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$ należy punkt $(x_0, \frac{1}{2}y_0)$, a do wykresu funkcji $h(x) = 2 \sin x$ – punkt $(x_0, 2y_0)$. Wykres funkcji g jest „ściśnięty” wzdłuż osi OY w stosunku do wykresu funkcji f , a wykres funkcji h – „rozciągnięty”.

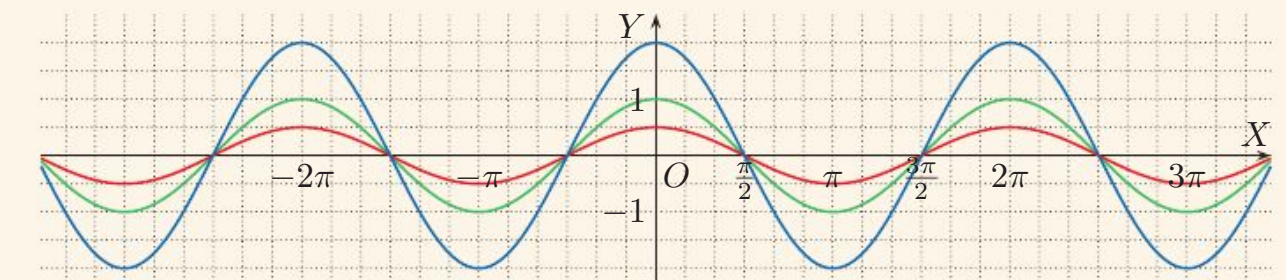
Dla funkcji $y = a \sin x$ oraz dla funkcji $y = a \cos x$, $a \neq 0$, liczbę $|a|$ nazywamy **amplitudą** wykresu tej funkcji.

Uwaga. Wykres funkcji $y = a \sin x$ jest sinusoidą, a wykres funkcji $y = a \cos x$ jest cosinusoidą.

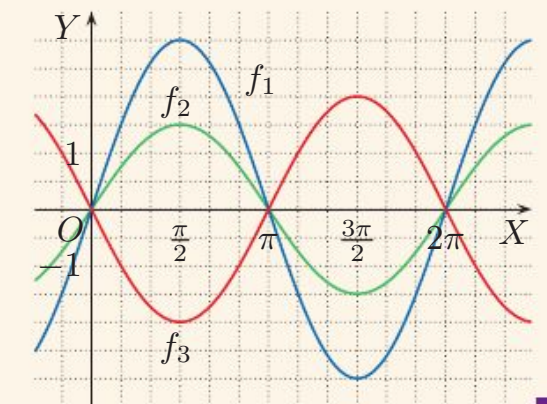
1. Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \frac{1}{2} \cos x, \quad h(x) = 2 \cos x$$

Dobierz wzór do każdego wykresu i podaj zbiór wartości każdej funkcji.



2. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f_1(x) = a_1 \sin x$, $f_2(x) = a_2 \sin x$, $f_3(x) = a_3 \sin x$. Wyznacz a_1 , a_2 , a_3 . Podaj amplitudy tych wykresów.



3. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = a \cos x$ w przypadku, gdy:

a) $f(\pi) = -\frac{3}{2}$, b) $f(\pi) = 2$.

2. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ c) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$ e) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{3})$
b) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = \cos(x + \pi)$ f) $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$

D 3. Uzasadnij, że podana równość jest prawdziwa. Skorzystaj z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ c) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
b) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ d) $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$

4. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ c) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2$
b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6}) - 2$ d) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

5. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę.

a) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$ c) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6}) + 1$
b) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{2}{3}\pi) - 1$

6. Naskicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = -\operatorname{tg} x + 1$ c) $f(x) = \operatorname{tg}(-x) + 2$
b) $f(x) = -\operatorname{tg} x - 1$ d) $f(x) = \operatorname{tg}(-x) - 2$

7. Naskicuj wykres funkcji f i podaj równania jego asymptot.

a) $f(x) = -\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) - 1$ c) $f(x) = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3}) - 1$
b) $f(x) = 1 - \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3})$ d) $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - x) + 1$

8. Rozwiąż równanie:

a) $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$,
b) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6}) = -1$, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$.

9. Naskicuj wykres funkcji f i na jego podstawie podaj rozwiązania równania $f(x) = a$ należące do przedziału $[-2\pi; 2\pi]$.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$, $a = \frac{1}{2}$ c) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

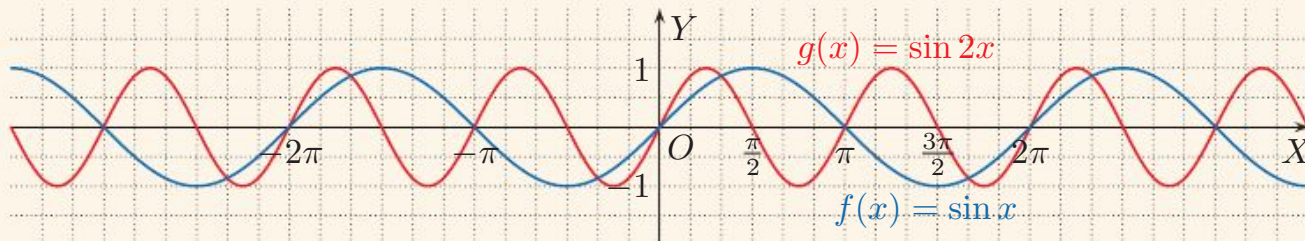
10. Podaj zbiór wartości funkcji f .

a) $f(x) = \sin x + 4$ d) $f(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{3})$ g) $f(x) = \sin^2 x + 1$
b) $f(x) = \sin x - 3$ e) $f(x) = 3 - \cos x$ h) $f(x) = 1 - \cos^2 x$
c) $f(x) = \cos x - \frac{1}{3}$ f) $f(x) = -1 - \sin x$ i) $f(x) = 2 + \cos^2(x + \frac{\pi}{2})$

Przykład 2

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin x$ oraz wykres funkcji $g(x) = \sin 2x$.

Funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zatem funkcja $g(x) = \sin 2x$ przyjmuje wartość 0 dla x takich, że $2x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, czyli dla $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Okres podstawowy funkcji $g(x) = \sin 2x$ jest równy π .

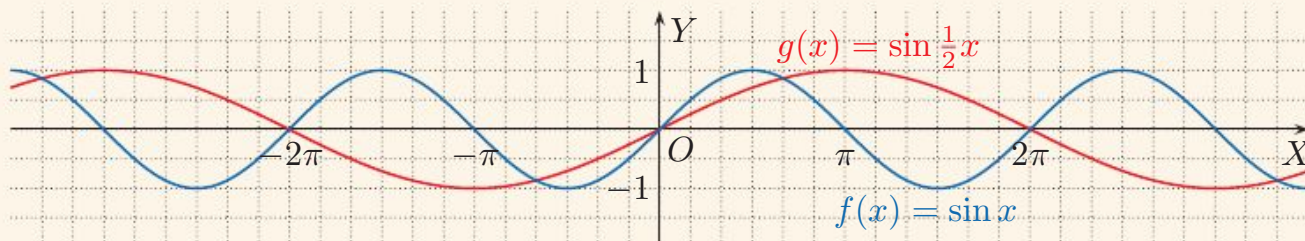


Wykres funkcji g jest w stosunku do wykresu funkcji f „ściśnięty” wzdłuż osi OX .

Przykład 3

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \sin x$ oraz wykres funkcji $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$.

Funkcja $f(x) = \sin x$ przyjmuje wartość 0 dla $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zatem funkcja $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ przyjmuje wartość 0 dla x takich, że $\frac{1}{2}x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, czyli dla $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Okres podstawowy funkcji $g(x) = \sin \frac{1}{2}x$ jest równy 4π .



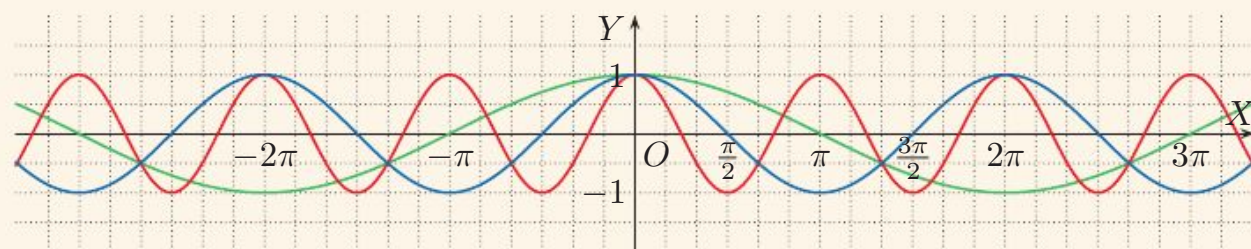
Wykres funkcji g jest w stosunku do wykresu funkcji f „rozciągnięty” wzdłuż osi OX .

Okres podstawowy funkcji $y = \sin ax$ oraz funkcji $y = \cos ax$, gdzie $a > 0$, jest równy $\frac{2\pi}{a}$.

4. Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos 2x, \quad h(x) = \cos \frac{1}{2}x$$

Dobierz wzór do każdego wykresu.



R 1.8. Tożsamości trygonometryczne

Tożsamość trygonometryczna to taka równość, w której występują funkcje trygonometryczne, prawdziwa dla tych wszystkich wartości zmiennej, dla których wyrażenia występujące w tej równości mają sens.

Przypomnijmy, że między wartościami funkcji trygonometrycznych kąta ostrego o mierze łukowej x zachodzą podane obok związki.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Równości te są też prawdziwe dla dowolnego kąta o mierze łukowej $x \in \mathbb{R}$, dla którego obie strony równości są określone.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ jedyńska trygonometryczna
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

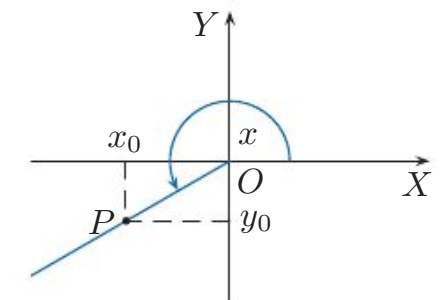
Dowód jedynki trygonometrycznej

Niech punkt $P(x_0, y_0)$, różny od początku układu współrzędnych, będzie dowolnym punktem na ramieniu końcowym kąta x . Wówczas:

$$\sin x = \frac{y_0}{r}, \quad \cos x = \frac{x_0}{r}$$

gdzie $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Zatem:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{y_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{r}\right)^2 = \frac{y_0^2 + x_0^2}{r^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2} = 1$$



D Ćwiczenie 1

Udowodnij tożsamość $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

D Przykład 1

Udowodnij tożsamość trygonometryczną $(1 - \sin^2 x) \operatorname{tg} x = \sin x \cos x$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

$$(1 - \sin^2 x) \operatorname{tg} x = \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x \sin x$$

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 + \cos^2 x = 1$ oraz $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

D Ćwiczenie 2

Udowodnij tożsamość trygonometryczną $\cos^2 x \sin x + \sin^3 x = \sin x$.

D Przykład 2

Udowodnij, że $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

Zakładamy, że tangens jest określony, $1 + \sin x \neq 0$ oraz $\cos x \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = && \text{Korzystamy z tożsamości} \\ &&& \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}. \\ &= \frac{\sin x(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\cos x(1 + \sin x)} = \\ &= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = && \text{Korzystamy z tożsamości} \\ &&& \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \\ &= \frac{\sin x + 1}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

D Ćwiczenie 3

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2 & \text{c)} \quad & \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x \\ \text{b)} \quad & \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x & \text{d)} \quad & \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} (\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 x \end{aligned}$$

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że podane wyrażenie jest równe 1 dla wszystkich x , dla których jest określone.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x - 1} & \text{b)} \quad & \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} & \text{c)} \quad & \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} \end{aligned}$$

Czasami, aby udowodnić tożsamość trygonometryczną, warto przekształcić zarówno jej prawą, jak i lewą stronę.

D Przykład 3

Udowodnij, że $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$.

$$\begin{aligned} L &= \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = && \text{Przekształcamy lewą} \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x && \text{stronę równości.} \\ P &= 1 - 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x = && \text{Przekształcamy prawą} \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x && \text{stronę równości.} \end{aligned}$$

Równość $L = P$ zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, zatem udowodniliśmy powyższą tożsamość trygonometryczną.

D Ćwiczenie 5

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x} - 2 = \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\sin x} & \text{b)} \quad & \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg} x)^2 \end{aligned}$$

Przykład 4

Wiadomo, że $\sin x = \frac{3}{5}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Oblicz $\cos x$ i $\operatorname{tg} x$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x &= 1 \\ \cos^2 x &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \cos x &= -\frac{4}{5} \quad \text{lub} \quad \cos x = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Dla $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ cosinus jest ujemny, zatem $\cos x = -\frac{4}{5}$. Korzystamy z tożsamości $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x spełniającego podane warunki.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sin x = -\frac{4}{5} \quad \text{i} \quad x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right) & \text{c)} \quad & \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \text{b)} \quad & \cos x = -\frac{12}{13} \quad \text{i} \quad x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right) & \text{d)} \quad & \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{5} \quad \text{i} \quad x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right) \end{aligned}$$

D Ćwiczenie 7

Udowodnij podaną obok tożsamość trygonometryczną.

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \text{dla } x &\in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Przykład 5

Wiadomo, że $\operatorname{tg} x = -3$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$. Oblicz $\cos x$ i $\sin x$.

Korzystamy z tożsamości $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ i otrzymujemy:

$$1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Stąd $\cos^2 x = \frac{1}{10}$, czyli:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10} \quad \text{lub} \quad \cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Dla $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$ cosinus jest dodatni, zatem $\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Korzystamy z tożsamości $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i otrzymujemy:

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Ćwiczenie 8

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x spełniającego podane warunki.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \operatorname{tg} x = \frac{5}{12} \quad \text{i} \quad x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right) & \text{c)} \quad & \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \text{b)} \quad & \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) & \text{d)} \quad & \operatorname{tg} x = -4 \quad \text{i} \quad x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right) \end{aligned}$$

Zadania

- D 1.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.
- a) $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin^2 x$ d) $2 \sin^2 x - 1 = 1 - 2 \cos^2 x$
b) $\cos x \sin^2 x + \cos^3 x = \cos x$ e) $\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x = 1$
c) $1 - 2 \sin x \cos x = (\sin x - \cos x)^2$ f) $\cos x + \operatorname{tg}^2 x \cos x = \frac{1}{\cos x}$
- D 2.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.
- a) $\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} x$ d) $\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2}{\sin x}$
b) $\frac{\operatorname{tg} x + \cos x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ e) $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$
c) $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} - \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{-4 \sin x}{\cos^2 x}$ f) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{2}{\cos x}$
- D 3.** Udowodnij tożsamość trygonometryczną.
- a) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ d) $\frac{\cos x + \operatorname{tg} x \sin x}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x \sin x}$
b) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ e) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \sin^2 x$
c) $\frac{\operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x \cos x}$ f) $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$
- 4.** Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x .
- a) $\cos x = -\frac{1}{4}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ c) $\sin x = \frac{2}{3}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$
b) $\cos x = -\frac{1}{4}$ i $x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$
- 5.** Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x . Rozpatrz dwa przypadki.
- a) $\sin x = \frac{1}{3}$ c) $\cos x = -\frac{2}{3}$ e) $\sin x = \frac{7}{25}$ g) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$
b) $\sin x = -\frac{12}{13}$ d) $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ f) $\cos x = -\frac{7}{25}$ h) $\cos x = \frac{\sqrt{21}}{5}$
- 6.** Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x .
- a) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ c) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $x \in (0; \frac{\pi}{2})$
b) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$ d) $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$ i $x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$
- 7.** Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x . Rozpatrz dwa przypadki.
- a) $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ b) $\operatorname{tg} x = -4$ c) $\operatorname{tg} x = -\frac{12}{5}$ d) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$
- 8.** Wiadomo, że $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 3$. Oblicz $\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$ oraz $\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}$.

Dowiedz się więcej

Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji $y = x$, $y = \sin x$ i $y = \operatorname{tg} x$.

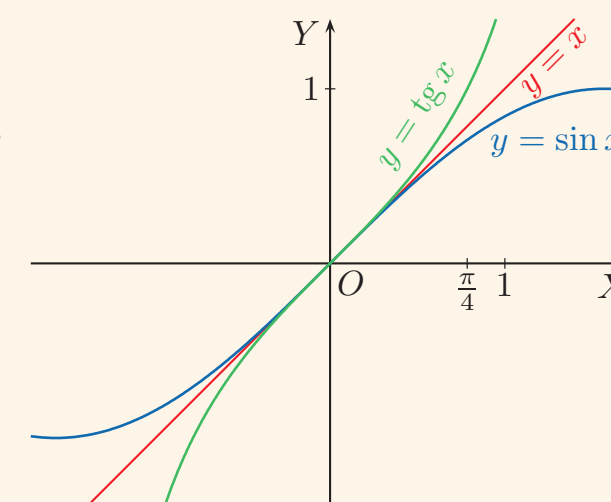
Dla „małych” kątów x wykres funkcji $y = x$ jest dobrym przybliżeniem wykresów funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \operatorname{tg} x$. Na przykład $\frac{\pi}{100} \approx 0,0314159$, natomiast:

$$\sin \frac{\pi}{100} \approx 0,0314108,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{100} \approx 0,0314263.$$

Zwróć uwagę na to, że:

- jeśli $x > 0$, to $\sin x < x$,
- jeśli $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, to $\operatorname{tg} x > x$.



- D 1.** Nie korzystając z kalkulatora, uzasadnij podaną nierówność.

a) $\sin \frac{\pi}{20} < 0,2$

b) $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{10} > 0,09$

c) $\sin^2 \frac{\sqrt{\pi}}{10} < 0,032$

Przybliżone wartości funkcji sinus (dla „małych” x) możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$

gdzie $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Na przykład:

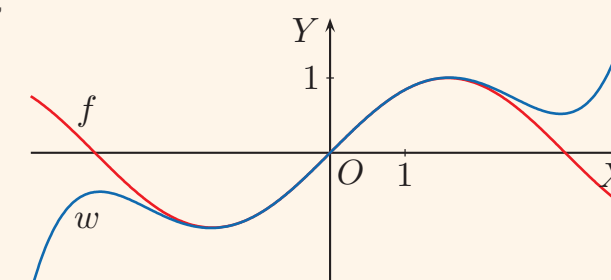
$$\sin \frac{\pi}{4} \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{4} \right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{4} \right)^5 \approx 0,707.$$

Przybliżone wartości funkcji cosinus (dla „małych” x) możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

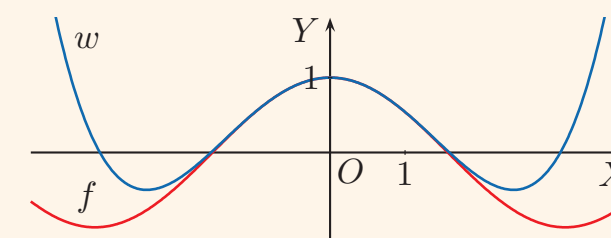
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Na przykład:

$$\cos \frac{\pi}{6} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{6} \right)^4 \approx 0,8660539.$$



Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ i $w(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.



Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \cos x$ i $w(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

- 2.** Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę przybliżonych wartości funkcji sinus i cosinus. Skorzystaj z powyższych wzorów.

α	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin \alpha$	?	?	?	0,707
$\cos \alpha$	?	?	?	?

R 1.9. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Podane zależności zachodzą niezależnie od tego, czy miary kątów podane są w stopniach czy w radianach.

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	sinus sumy kątów
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$	sinus różnicy kątów
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	cosinus sumy kątów
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	cosinus różnicy kątów

Dowód wzoru na sinus sumy kątów i wskazówki, jak udowodnić pozostałe wzory, zostały podane na str. 50.

Przykład 1

a) Oblicz $\sin 75^\circ$.

Korzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów.

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

b) Oblicz $\sin \frac{\pi}{12}$.

Korzystamy ze wzoru na sinus różnicy kątów.

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

- a) Oblicz $\cos 75^\circ$. Skorzystaj ze wzoru na cosinus sumy kątów.
b) Oblicz $\sin 105^\circ$. Skorzystaj ze wzoru na sinus sumy kątów.
c) Oblicz $\cos \frac{\pi}{12}$. Skorzystaj ze wzoru na cosinus różnicy kątów.

Przykład 2

a) $\cos 28^\circ \cdot \cos 17^\circ - \sin 28^\circ \cdot \sin 17^\circ =$
 $= \cos(28^\circ + 17^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Korzystamy ze wzoru na cosinus sumy kątów.

b) $\sin 3^\circ \cdot \cos 33^\circ - \cos 3^\circ \cdot \sin 33^\circ =$
 $= \sin(3^\circ - 33^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

Korzystamy ze wzoru na sinus różnicy kątów.

c) $\sin \frac{3}{10}\pi \cdot \cos \frac{1}{5}\pi + \cos \frac{3}{10}\pi \cdot \sin \frac{1}{5}\pi = \sin\left(\frac{3}{10}\pi + \frac{1}{5}\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- a) $\sin 85^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 25^\circ \cdot \cos 85^\circ$ c) $\cos \frac{8}{7}\pi \cdot \cos \frac{1}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi \cdot \sin \frac{1}{7}\pi$
b) $\sin 33^\circ \cdot \cos 12^\circ + \sin 12^\circ \cdot \cos 33^\circ$ d) $\sin \frac{\pi}{18} \cdot \sin \frac{4}{9}\pi - \cos \frac{\pi}{18} \cdot \cos \frac{4}{9}\pi$

Ze wzorów na sinus sumy kątów i cosinus sumy kątów bezpośrednio wynikają wzory na sinus podwojonego kąta i cosinus podwojonego kąta.

D Ćwiczenie 3

Wyprowadź podany obok wzór na sinus podwojonego kąta.

Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$:
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

D Ćwiczenie 4

Wyprowadź podane obok wzory na cosinus podwojonego kąta.

Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$:
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

Przykład 3

Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$ dla kąta α spełniającego podane warunki.

- a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ oraz $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ b) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ oraz $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$

Przykład 4

Oblicz $\sin \frac{\pi}{8}$ i $\cos \frac{\pi}{8}$.

Podstawiamy $\alpha = \frac{\pi}{8}$ do wzoru $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{4} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \\ \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad \text{lub} \quad \sin \frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Sprzeczność, bo $\sin \frac{\pi}{8} > 0$.

Po skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Ćwiczenie 6

Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ dla kąta α spełniającego podane warunki.

- a) $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $2\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ b) $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ oraz $2\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ i } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Dowód

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

D Ćwiczenie 7

Sformułuj odpowiednie założenia i udowodnij podane obok wzory.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Ćwiczenie 8

Oblicz.

- a) $\operatorname{tg} 15^\circ$ b) $\operatorname{tg} 75^\circ$ c) $\operatorname{tg} 105^\circ$ d) $\operatorname{tg} 120^\circ$

Zadania

- Oblicz $\sin(30^\circ + \beta)$ i $\sin(60^\circ - \beta)$ dla kąta β spełniającego podane warunki.

a) $\sin \beta = \frac{4}{5}$ i $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$ c) $\cos \beta = \frac{5}{13}$ i $\beta \in (270^\circ; 360^\circ)$
 b) $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ i $\beta \in (90^\circ; 180^\circ)$ d) $\sin \beta = -\frac{7}{25}$ i $\beta \in (180^\circ; 270^\circ)$
- Oblicz $\cos(45^\circ + \beta)$ i $\cos(60^\circ - \beta)$ dla kąta β spełniającego podane warunki.

a) $\cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ i $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$ b) $\sin \beta = -\frac{1}{3}$ i $\beta \in (270^\circ; 360^\circ)$
- a) Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{24}{25}$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ oraz $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ i $\beta \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Oblicz $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha + \beta)$.

b) Wiadomo, że $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ i $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$ oraz $\cos \beta = -\frac{3}{4}$ i $\beta \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$. Oblicz $\sin(\alpha - \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$.

c) Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ oraz $\cos \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\beta \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$. Oblicz $\sin(\alpha - \beta)$ i $\cos(\alpha + \beta)$.

d) Wiadomo, że $\cos \alpha = -0,6$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ oraz $\sin \beta = 0,4$ i $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oblicz $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$.

D 4. Uzasadnij, że podana zależność jest tożsamością trygonometryczną.

- a) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ d) $\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$
 b) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ e) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
 c) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ f) $\cos 4\alpha = 1 - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

D 5. Uzasadnij, że podana zależność jest tożsamością trygonometryczną.

- a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha$
 b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$
 c) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$
 d) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$

6. Oblicz.

- a) $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ$ c) $\sin \frac{1}{12}\pi \sin \frac{3}{4}\pi - \cos \frac{1}{12}\pi \cos \frac{3}{4}\pi$
 b) $\sin 111^\circ \cos 66^\circ - \cos 111^\circ \sin 66^\circ$ d) $\cos \frac{4}{3}\pi \cos \frac{2}{3}\pi + \sin \frac{4}{3}\pi \sin \frac{2}{3}\pi$

7. Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta α spełniającego podane warunki.

- a) $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$ oraz $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ c) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$
 b) $\cos 2\alpha = \frac{3}{4}$ oraz $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$ d) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

D 8. a) Wyprowadź podane obok wzory.

b) Oblicz $\sin \frac{\pi}{12}$ i $\cos \frac{\pi}{12}$.

9. Oblicz $\sin \frac{\alpha}{2}$ i $\cos \frac{\alpha}{2}$ dla kąta α spełniającego podane warunki.

- a) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$
 b) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ oraz $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$

Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$|\cos \frac{\alpha}{2}| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$|\sin \frac{\alpha}{2}| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$.

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f i naskicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \sin x - \cos x$ c) $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$
 b) $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ d) $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$

Wskazówka. W podpunkcie b) zauważ, że $f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$.

11. Oblicz $\operatorname{tg} 2\alpha$ dla kąta α spełniającego podane warunki.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} + 1$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 2 + \sqrt{3}$

12. Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ oraz $\operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{2}$. Oblicz $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ i $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

Dowiedz się więcej

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów – dowody

Rozpatrzmy kąty α i β położone tak jak na rysunku obok, gdzie:

$$\alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0^\circ; 90^\circ)$$

Punkt A jest punktem przecięcia ramienia końcowego kąta $\alpha + \beta$ z okręgiem jednostkowym.

Prowadzimy odcinek AB prostopadły do ramienia końcowego kąta α , odcinki BC i AD prostopadłe do osi OX oraz odcinek EB prostopadły do odcinka AD .

Kąt EAB ma miarę α (uzasadnij).

Boki trójkąta OAB mają długości:

$$|OA| = 1, |OB| = \cos \beta, |AB| = \sin \beta$$

Zauważmy, że $\frac{|BC|}{|OB|} = \sin \alpha$, więc:

$$|BC| = |OB| \sin \alpha = \sin \alpha \cos \beta$$

Podobnie $\frac{|AE|}{|AB|} = \cos \alpha$, więc:

$$|AE| = |AB| \cos \alpha = \cos \alpha \sin \beta$$

oraz $\frac{|AD|}{|OA|} = \sin(\alpha + \beta)$, więc:

$$|AD| = |OA| \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$$

Zatem otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= |AD| = |ED| + |AE| = |BC| + |AE| = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

D 1. Skorzystaj z powyższego rysunku i uzasadnij, że:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \text{ gdzie } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0^\circ; 90^\circ)$$

Wskazówka. Rozpatrz długości odcinków OD , DC i OC .

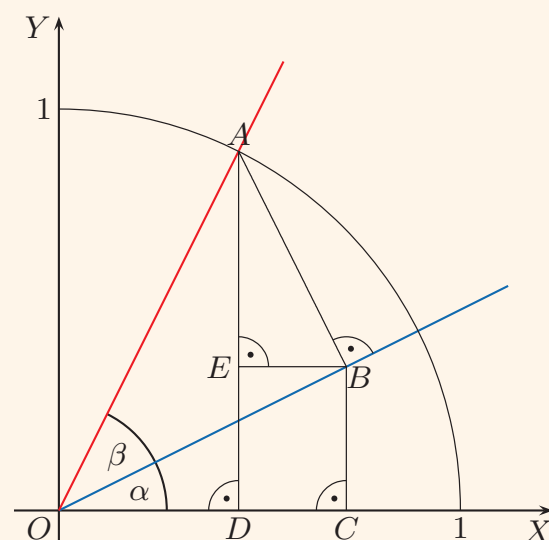
D 2.* Wykaż prawdziwość wzoru $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ w przypadku, gdy:

a) $\alpha, \beta \in (0^\circ; 90^\circ)$ oraz $\alpha + \beta \in (90^\circ; 180^\circ)$,

b) $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ oraz $\beta, \alpha + \beta \in (90^\circ; 180^\circ)$.

D 3. Wykaż prawdziwość wzorów na sinus i cosinus różnicy kątów. Skorzystaj ze wzorów na sinus i cosinus sumy kątów oraz własności:

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta \text{ i } \cos(-\beta) = \cos \beta$$



R 1.10. Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne pozwalają wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $[0; \frac{\pi}{2})$.

Wzory redukcyjne

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	
$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	
$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$	
$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$
$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$
		$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

D Przykład 1

Udowodnij wzór redukcyjny.

a) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ b) $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ c) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Skorzystamy ze wzorów na sinus sumy kątów i cosinus sumy kątów.

a) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = \cos \alpha$

b) $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - 1 \cdot \sin \alpha = -\sin \alpha$

c) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij wzór redukcyjny.

a) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ b) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ c) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

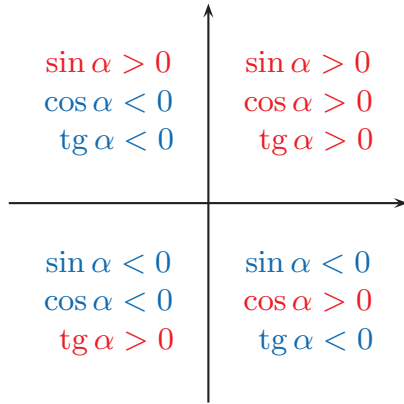
D Ćwiczenie 2

Udowodnij wzór redukcyjny.

a) $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$ b) $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$ c) $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

W podanych wzorach redukcyjnych miarę kąta można przedstawić w postaci $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2})$. Zauważmy, że:

- jeśli k jest liczbą nieparzystą, to funkcja sinus zmienia się na cosinus, funkcja cosinus – na funkcję sinus (mówimy, że funkcja zmienia się na cofunkcję), a funkcja tangens zmienia się na $\frac{1}{\text{tg}}$;
- jeśli k jest liczbą parzystą, to funkcja pozostaje bez zmiany;
- znak plus lub minus przed funkcją zależy od tego, czy wartość wyjściowej funkcji jest dodatnia, czy ujemna w danej ćwiartce układu współrzędnych.



Dla kątów, których miary podano w stopniach, wzory redukcyjne mają następującą postać:

Wzory redukcyjne

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha$	$\text{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$	$\text{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\text{tg } \alpha}$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	
$\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha$	$\text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg } \alpha$	
$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\text{tg}(270^\circ - \alpha) = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$	$\text{tg}(270^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\text{tg } \alpha}$	$\text{tg}(360^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

Przykład 2

Oblicz $\sin 210^\circ$. Skorzystaj ze wzoru $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

$$\sin 210^\circ = \sin(270^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Zauważmy, że ten sam wynik otrzymamy, jeśli zapiszemy kąt 210° w postaci $180^\circ + 30^\circ$ i skorzystamy ze wzoru $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$:

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 3

Skorzystaj ze wzorów redukcyjnych i oblicz:

- a) $\sin 240^\circ$, b) $\cos 480^\circ$, c) $\text{tg } 225^\circ$.

Przykład 3

Oblicz $\cos(-\frac{13}{4}\pi)$.

$$\begin{aligned} \cos(-\frac{13}{4}\pi) &= \cos \frac{13}{4}\pi = \cos(2\pi + \frac{5}{4}\pi) = \cos \frac{5}{4}\pi = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
Korzystamy z okresowości funkcji cosinus.
 $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

Ćwiczenie 4

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

- a) $\cos \frac{11}{3}\pi$ d) $\sin(-330^\circ)$ g) $\sin(-\frac{11}{4}\pi)$
b) $\sin \frac{5}{3}\pi$ e) $\text{tg}(-210^\circ)$ h) $\cos(-\frac{16}{3}\pi)$
c) $\cos \frac{7}{6}\pi$ f) $\text{tg}(-315^\circ)$ i) $\text{tg}(-\frac{4}{3}\pi)$

Zadania

- D** 1. Udowodnij wzór redukcyjny.

- a) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ c) $\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \sin \alpha$
b) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ d) $\sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

2. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

- a) $\sin \frac{5}{4}\pi$ d) $\text{tg } \frac{2}{3}\pi$ g) $\cos(-\frac{4}{3}\pi)$ j) $\cos(-\frac{11}{4}\pi)$
b) $\cos \frac{7}{4}\pi$ e) $\text{tg } \frac{4}{3}\pi$ h) $\sin(-\frac{5}{6}\pi)$ k) $\cos(-11\pi)$
c) $\sin \frac{8}{3}\pi$ f) $\text{tg } \frac{5}{6}\pi$ i) $\cos(-\frac{2}{3}\pi)$ l) $\text{tg}(-\frac{7}{6}\pi)$

3. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

- a) $\sin 120^\circ$ d) $\cos 855^\circ$ g) $\text{tg } 510^\circ$ j) $\sin(-870^\circ)$
b) $\sin 135^\circ$ e) $\cos 840^\circ$ h) $\text{tg } 570^\circ$ k) $\text{tg}(-300^\circ)$
c) $\cos 330^\circ$ f) $\sin 660^\circ$ i) $\text{tg } 1035^\circ$ l) $\text{tg}(-840^\circ)$

4. Oblicz, korzystając z wartości podanych obok.

- a) $\sin 72^\circ$ d) $\sin 666^\circ$
b) $\cos 108^\circ$ e) $\sin(-468^\circ)$
c) $\cos 234^\circ$ f) $\cos(-864^\circ)$

α	18°	36°	54°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

5. Wiadomo, że $\cos x = \frac{1}{4}$ oraz $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Oblicz:

- a) $\sin(\frac{3\pi}{2} + x)$, b) $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$, c) $\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$.

6. Oblicz.

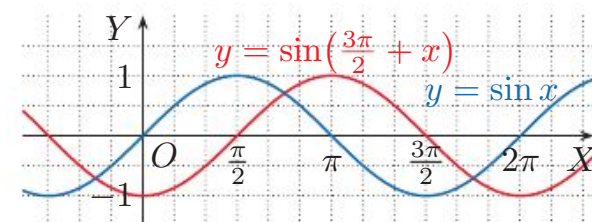
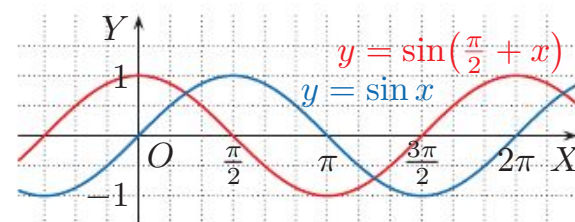
- a) $2 \sin 120^\circ + 4 \cos 60^\circ$ d) $4 \sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ$ g) $\sin^2 310^\circ + \cos^2 310^\circ$
 b) $\sin 420^\circ \cdot \cos(-390^\circ)$ e) $\operatorname{tg} 300^\circ \cdot \operatorname{tg} 210^\circ$ h) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 225^\circ$
 c) $\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg}(-210^\circ)$ f) $2 \cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 150^\circ$ i) $\operatorname{tg}^2 780^\circ - 3 \operatorname{tg}^2 420^\circ$

7. Oblicz.

- a) $\sin \frac{5}{6}\pi + \cos(-\frac{\pi}{3})$ d) $\sin \frac{7}{6}\pi + \cos(-\frac{7}{3}\pi)$
 b) $6 \operatorname{tg} \frac{2}{3}\pi \cdot \cos \frac{7}{3}\pi$ e) $\sin^2(-\frac{13}{6}\pi) + \cos^2 \frac{7}{4}\pi$
 c) $8 \sin \frac{5}{4}\pi \cdot \cos(-\frac{4}{3}\pi)$ f) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{7\pi}{3}$

D 8. Przeczytaj informację w ramce.

Wzory redukcyjne można uzasadnić, korzystając z odpowiedniego przesunięcia wykresu funkcji trygonometrycznej. Poniżej przedstawiono uzasadnienia wzorów $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ oraz $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x$.



Uzasadnij wzór. Zastosuj odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji.

- a) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x$ b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

9. Skorzystaj z podanego obok fragmentu tablic wartości funkcji trygonometrycznych i oblicz:

- a) $\sin 413^\circ$, d) $\sin 589^\circ$,
 b) $\cos 769^\circ$, e) $\cos 860^\circ$,
 c) $\operatorname{tg} 597^\circ$, f) $\operatorname{tg} 954^\circ$.

D 10. Skorzystaj ze wzorów redukcyjnych i wykaż, że wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta można wyrazić za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $[0^\circ; 45^\circ]$.

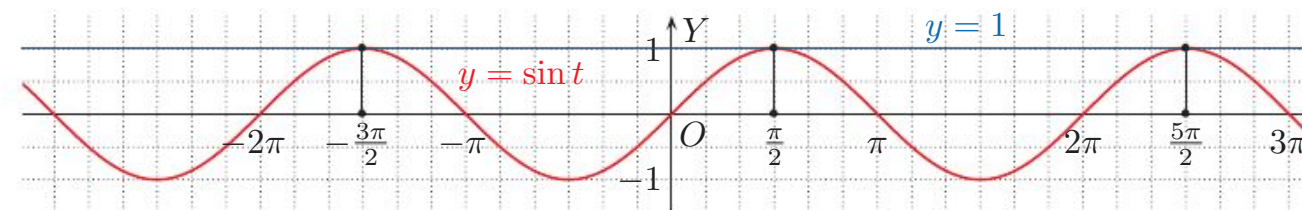
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693

R 1.11. Równania trygonometryczne (1)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\sin 2x = 1$.

Podstawiamy $t = 2x$ i otrzymujemy równanie pomocnicze $\sin t = 1$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązania równania $\sin t = 1$:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wracamy do niewiadomej x :

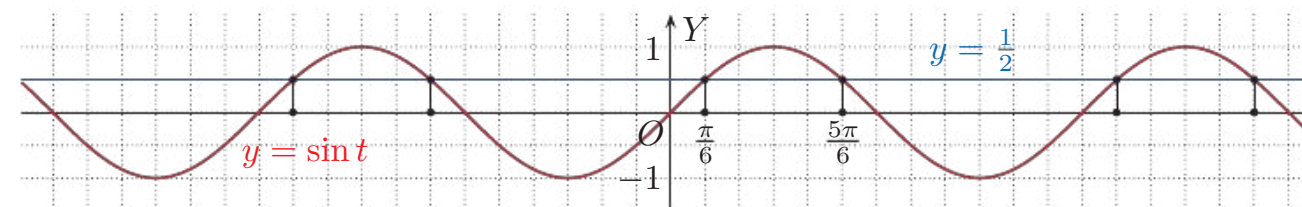
$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

Podstawiamy $t = 2x - \frac{\pi}{6}$ i otrzymujemy równanie pomocnicze $\sin t = \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązania równania $\sin t = \frac{1}{2}$:

$$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 2x = \pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $\sin 3x = 1$ d) $2 \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ g) $6 \sin(\pi - \frac{\pi x}{4}) = 3$
 b) $\cos 2x = -1$ e) $\cos(3x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $2 \sin \pi x - \sqrt{3} = 0$
 c) $\cos 4x = \frac{1}{2}$ f) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ i) $2 \cos 2\pi x + \sqrt{2} = 0$

Przykład 3

Oblicz sumę dziesięciu najmniejszych dodatnich pierwiastków równania $\sin^2 x = 1$.

$$\sin^2 x = 1, \text{ gdy } \sin x = 1 \text{ lub } \sin x = -1$$

Pierwiastkami równania $\sin^2 x = 1$ są liczby postaci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Suma dziesięciu najmniejszych dodatnich pierwiastków równania jest równa:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + \dots + \left(\frac{\pi}{2} + 9\pi\right) &= 10 \cdot \frac{\pi}{2} + (1 + 2 + \dots + 9)\pi = \\ &= 5\pi + 45\pi = 50\pi \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę dziesięciu najmniejszych dodatnich pierwiastków równania:

$$\text{a) } \cos^2 x = 1, \quad \text{b) } 2 \sin^2 x = 1, \quad \text{c) } 4 \sin^2 x = 3.$$

Ćwiczenie 3

Ile pierwiastków podanego równania należy do przedziału $[0; 4\pi]$?

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 3x &= 1 & \text{c) } \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{4} & \text{e) } |\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)| &= 1 \\ \text{b) } 2 \cos^2 2x &= 1 & \text{d) } \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{3}{4} & \text{f) } |\sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)| &= 1,5 \end{aligned}$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$.

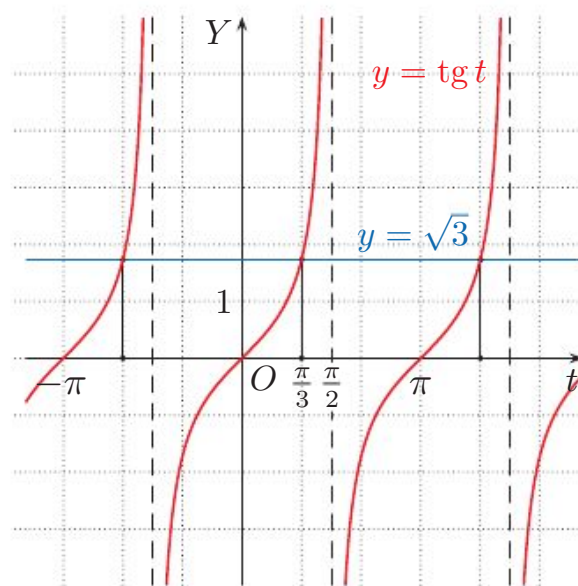
Zakładamy, że $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, czyli $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Podstawiamy $t = 4x$ i otrzymujemy równanie pomocnicze $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$. Z wykresu funkcji tangens odczytujemy rozwiązania tego równania: $t = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wracamy do niewiadomej x :

$$4x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$



Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{tg} 2x &= -1 & \text{c) } \operatorname{tg}^2 2x &= 3 & \text{e) } 3 \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} \\ \text{b) } 3 \operatorname{tg} \pi x &= \sqrt{3} & \text{d) } 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} &= 1 & \text{f) } \sqrt{6} \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę pierwiastków podanego równania należących do przedziału $[0; \pi]$.

$$\text{a) } \operatorname{tg}^2 2x = 1 \quad \text{b) } \operatorname{tg}^2 4x = 1 \quad \text{c) } \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = 1$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 4x &= 1 & \text{c) } 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) &= 1 & \text{e) } 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= -\sqrt{2} \\ \text{b) } 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 1 & \text{d) } \sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) &= 1 & \text{f) } 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{tg} 4x &= -1 & \text{c) } \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{3} & \text{e) } 3 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) &= -\sqrt{3} \\ \text{b) } \operatorname{tg} 6x &= \sqrt{3} & \text{d) } \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{3} & \text{f) } \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) &= -1 \end{aligned}$$

3. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 4x &= 1 & \text{c) } 4 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= 3 & \text{e) } |2 \cos 3x| &= 1 \\ \text{b) } \cos^2 3x &= \frac{3}{4} & \text{d) } 6 \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= 3 & \text{f) } \left|\sin 2x - \frac{1}{2}\right| &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \operatorname{tg}^2\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{b) } 3 \operatorname{tg}^2 \pi x = 1 \quad \text{c) } \left|\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 3$$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $\sin^2 x = 3 \sin x$.

$$\sin^2 x - 3 \sin x = 0$$

$$\sin x (\sin x - 3) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ lub } \sin x = 3$$

Równanie $\sin x = 3$ jest sprzeczne. Równanie $\sin x = 0$ jest spełnione przez liczby postaci $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ – jest to rozwiązanie równania wyjściowego.

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 x &= -\sin x & \text{c) } \sin^3 x + \sin x &= 0 & \text{e) } 4 \sin^3 x &= \sin x \\ \text{b) } 2 \cos^2 x &= \cos x & \text{d) } 2 \cos^3 x - \cos x &= 0 & \text{f) } 3 \cos^3 x &= 4 \cos x \end{aligned}$$

6. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0 \quad \text{b) } \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x \quad \text{c) } \operatorname{tg}^2 x = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$$

7. Podaj rozwiązania równania należące do przedziału $[-\pi; 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 \sin^2 x &= \sin x & \text{c) } 4 \cos^3 x - \cos x &= 0 & \text{e) } \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x &= 0 \\ \text{b) } 2 \cos^2 x &= \sqrt{2} \cos x & \text{d) } 3 \sin x - 4 \sin^3 x &= 0 & \text{f) } 3 \operatorname{tg}^3 2x - \operatorname{tg} 2x &= 0 \end{aligned}$$

8. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \cos 2x(1 + \operatorname{tg} x) = 0 \quad \text{b) } \sin x \operatorname{tg} 2x = \sin x \quad \text{c) } \cos 2x = \sin 4x$$

Dowiedz się więcej

Suma i różnica sinusów, suma i różnica cosinusów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{suma sinusów}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{różnica sinusów}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{suma cosinusów}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{różnica cosinusów}$$

Dowód wzoru na sumę sinusów

Niech $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$, wówczas $x + y = \alpha$ oraz $x - y = \beta$. Zatem:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin(x + y) + \sin(x - y) = \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = \\ &= 2 \sin x \cos y = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Dowody pozostałych wzorów przeprowadza się analogicznie.

Przykład

Rozwiąż równanie $\sin 5x + \sin x = 0$.

$$\begin{aligned} \sin 5x + \sin x &= 2 \sin \frac{5x + x}{2} \cos \frac{5x - x}{2} = \quad \text{Korzystamy ze wzoru na sumę sinusów.} \\ &= 2 \sin 3x \cos 2x \end{aligned}$$

Zatem zapisujemy równanie w postaci:

$$\begin{aligned} 2 \sin 3x \cos 2x &= 0 \\ \sin 3x &= 0 \quad \text{lub} \quad \cos 2x = 0 \\ 3x &= k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{k\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

1. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 3x - \sin 2x &= \sin x & \text{c) } \cos 6x + \sin 5x + \cos 2x &= \sin 3x \\ \text{b) } \cos 5x - \sin 3x &= \cos x & \text{d) } \cos 7x - \sin 7x &= \cos x - \sin x \end{aligned}$$

2. Oblicz wartość wyrażenia.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 \cos 70^\circ \cos 10^\circ - \cos 80^\circ & & \text{c) } \sin 37^\circ 30' \cos 7^\circ 30' \\ \text{b) } 2 \sin 115^\circ \cos 70^\circ - \sin 185^\circ & & \text{d) } \cos 52^\circ 30' \cos 7^\circ 30' \end{aligned}$$

Wskazówka. W podpunkcie a) znajdź kąty α i β takie, że $\frac{\alpha + \beta}{2} = 70^\circ$ i $\frac{\alpha - \beta}{2} = 10^\circ$.

R 1.12. Równania trygonometryczne (2)

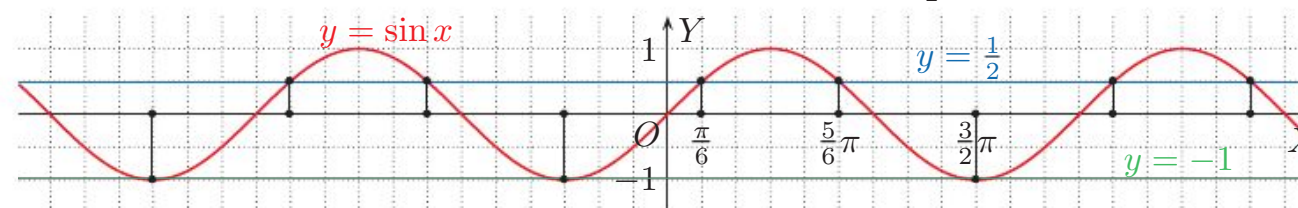
Przykład 1

Rozwiąż równanie $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Podstawiamy $t = \sin x$, zakładamy, że $t \in [-1; 1]$, i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned} 2t^2 + t - 1 &= 0 \\ \Delta &= 1 + 8 = 9, \quad \sqrt{\Delta} = 3 \\ t_1 &= \frac{-1-3}{4} = -1, \quad t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wracamy do niewiadomej x : $\sin x = -1$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.



Z wykresu funkcji sinus odczytujemy rozwiązanie równania:

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Uwaga. Powyższe rozwiązanie można też zapisać w postaci $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 \cos^2 x - \cos x &= 1 & \text{c) } \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 1 &= 0 \\ \text{b) } 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 &= 0 & \text{d) } \frac{\cos x + \cos^2 x + \frac{1}{4}}{\sin x} &= 0 \end{aligned}$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 1 &= 0 \\ 2 \sin^2 x - 2 &= 0 \\ \sin x &= 1 \quad \text{lub} \quad \sin x = -1 \\ x &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x &= 3 & \text{c) } 2 \cos^2 x + \sin^2 x &= 2 \cos x + 1 \\ \text{b) } 4 \cos^2 x - \sin^2 x &= -1 & \text{d) } 2 + \sin^2 x &= 4 - \cos^2 x + \cos x \end{aligned}$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $2 \sin x \cos x - \sin x - 2 \cos x + 1 = 0$.

Grupujemy wyrazy znajdujące się po lewej stronie równania.

$$\sin x(2 \cos x - 1) - (2 \cos x - 1) = 0 \quad \text{Wylączamy wspólny czynnik.}$$

$$(2 \cos x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \sin x = 1$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Zatem $x \in \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $2 \sin x \cos x + 2 \sin x - \cos x - 1 = 0$
- b) $4 \sin x \cos x - 2 \cos x - 2 \sin x + 1 = 0$
- c) $2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x + 2 \sin x - \sqrt{3} = 0$
- d) $4 \sin x \cos x + 2\sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{3} \cos x + 3$

Przykład 4

Wyznacz te pierwiastki równania $4 \cos 5x \cos 2x = 2 \cos 7x + 1$, które należą do przedziału $[0; \pi]$.

Korzystamy ze wzoru na cosinus sumy kątów:

$$\cos 7x = \cos(5x + 2x) = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x$$

Zatem równanie można zapisać w postaci:

$$4 \cos 5x \cos 2x = 2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \sin 2x + 1$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 5x \sin 2x = 1$$

$$2 \cos(5x - 2x) = 1$$

$$\cos 3x = \frac{1}{2}$$

$$3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Do przedziału $[0; \pi]$ należą więc pierwiastki $x = \frac{\pi}{9}$, $x = \frac{5}{9}\pi$, $x = \frac{7}{9}\pi$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz te pierwiastki podanego równania, które należą do przedziału $[0; 2\pi]$.

- a) $2 \sin 5x \sin 3x = 1 - \cos 8x$
- c) $2 \sin 3x \cos x = \sin 2x - 1$
- b) $4 \cos 3x \cos x = 2 \cos 2x + \sqrt{3}$
- d) $4 \sin 5x \cos 3x = 2 \sin 8x + \sqrt{2}$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$

d) $\cos^2 x + 2 \sin x = 1$

b) $\cos^2 x + 6 \cos x + 5 = 0$

e) $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 3$

c) $2 \sin^2 x - \sin x = 1$

f) $\operatorname{tg}^2 x - \frac{4}{3}\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 2x = \cos x$

d) $\cos^3 x - \cos 2x = 1$

b) $\cos x + \sin 2x = 0$

e) $\sin 2x \operatorname{tg} x = \sin x$

c) $\cos 2x - \sin x = 0$

f) $\sin x \cos x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $2 \sin 2x + 2 \sin x = 2 \cos x + 1$

d) $\sin^2 2x + 6 \sin^2 x = 6$

b) $2 \sin^2 x - \sin^2 2x = \cos^2 2x$

e)* $1 + \sin 2x = \cos 2x$

c) $\sin^2 2x - \cos^2 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

f)* $\frac{1}{2}(\cos 4x - 1) = \cos^2 x$

4. Znajdź liczby należące do przedziału $[0; 2\pi]$ i spełniające równanie:

a) $\sin x + \cos x = 1$,

d) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$,

b) $\sin x - \cos x = 1$,

e) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$,

c) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2$,

f) $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x$.

5. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x - \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x - 1$

c) $\sin 2x - \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} \sin x - 1$

b) $\operatorname{tg} x - 2 \sin x = 2 - \frac{1}{\cos x}$

d) $\cos 2x = 1 + 2\sqrt{2} \sin^2 x \cos x$

6.* Wyznacz największy ujemny pierwiastek równania.

a) $4 \sin 6x \cos x - 2 \sin 5x = 1$

c) $2 \sin 2x \cos^2 2x - \sin 2x \cos 4x = 1$

b) $2 \sin 6x \sin 3x = 1 - \cos 9x$

d) $\sin^2 2x + \frac{1}{2} \sin 4x = \operatorname{tg} 2x$

$$\sin \beta = \sin \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + 2k\pi \quad \text{lub} \quad \beta = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \beta = \cos \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + 2k\pi \quad \text{lub} \quad \beta = -\alpha + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

7.* Rozwiąż równanie. Skorzystaj z powyższej własności.

a) $\sin 3x - \sin 2x = 0$

d) $\cos 4x + \cos 3x = 0$

b) $\sin 4x + \sin 3x = 0$

e) $\cos 3x - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

c) $\cos 5x - \cos 3x = 0$

f) $\sin 2x - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

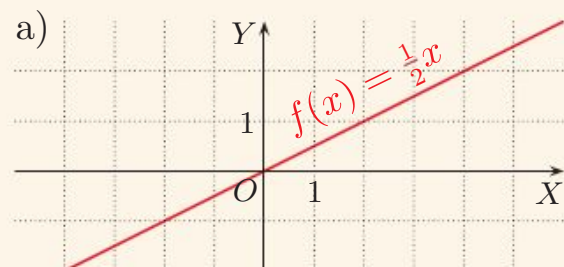
Dowiedz się więcej

Funkcje odwrotne

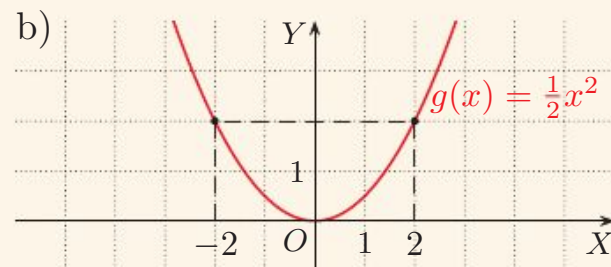
Definicja

Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest **różnowartościowa** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch różnych argumentów przyjmuje ona różne wartości.

Przykład 1



Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x$ jest różnowartościowa. Jeśli $x_1 \neq x_2$, to $\frac{1}{2}x_1 \neq \frac{1}{2}x_2$.



Funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ nie jest różnowartościowa. Na przykład $-2 \neq 2$, ale $g(-2) = g(2)$.

- D** 1. Uzasadnij, że dowolna prosta równoległa do osi OX przecina wykres funkcji różnowartościowej w co najwyżej jednym punkcie.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f: X \rightarrow Y$, gdzie Y jest zbiorem wartości funkcji f (tzn. dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y$), jest różnowartościowa, to istnieje funkcja $g: Y \rightarrow X$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $g(f(x)) = x$. Funkcję g nazywamy funkcją **odwrotną** do funkcji f .

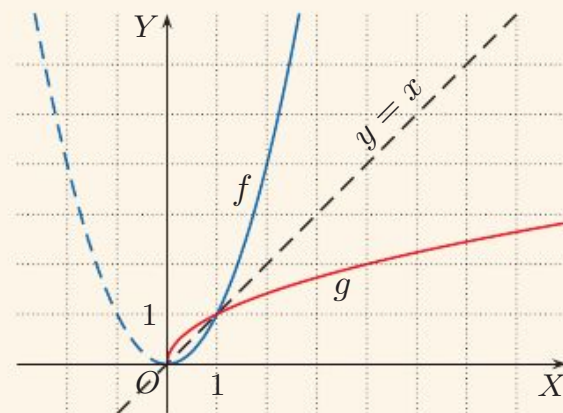
Przykład 2

Funkcja $f: [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ określona wzorem $f(x) = x^2$ jest różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest przedział $[0; \infty)$. Istnieje zatem funkcja do niej odwrotna. Jest to funkcja $g: [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ określona wzorem $g(x) = \sqrt{x}$, gdyż dla każdego $x \in [0; \infty)$ zachodzi równość:

$$g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

Uwaga. Jeśli funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji f , to funkcja f jest funkcją odwrotną do funkcji g . Wykresy wzajemnie odwrotnych funkcji f i g są do siebie symetryczne względem prostej $y = x$.

2. Naskicuj wykresy funkcji $f(x) = x^3$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$ – odwrotnej do f .



Dowiedz się więcej

Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych

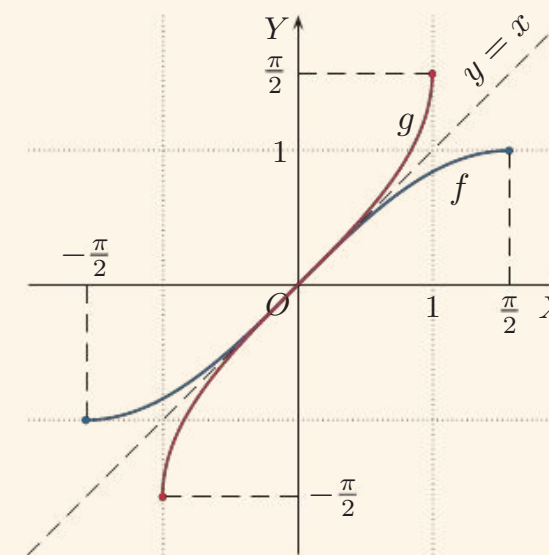
Rozpatrzmy funkcję:

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$$

określoną wzorem $f(x) = \sin x$ (kolor niebieski na rysunku obok). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest przedział $[-1; 1]$.

Istnieje zatem funkcja $g: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ odwrotna do funkcji f . Nosi ona nazwę **arcus sinus** i zapisuje się ją: $g(x) = \arcsin x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.



Przykład 1

- a) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, więc $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.
b) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

1. Oblicz.

- a) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ c) $\arcsin(-1)$

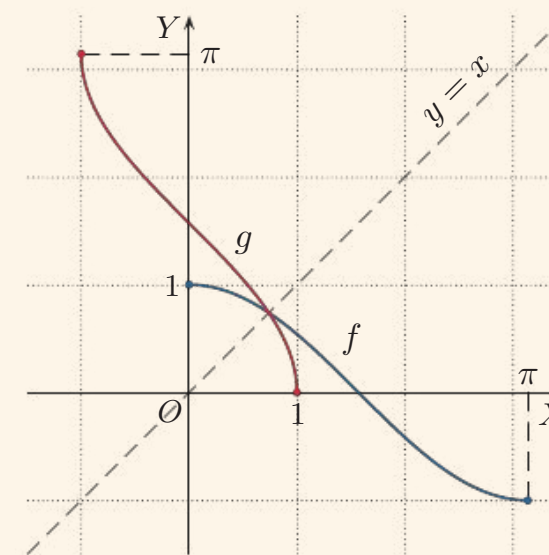
Rozpatrzmy funkcję:

$$f: [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$$

określoną wzorem $f(x) = \cos x$ (kolor niebieski na rysunku obok). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest przedział $[-1; 1]$.

Istnieje zatem funkcja $g: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$ odwrotna do funkcji f . Nosi ona nazwę **arcus cosinus** i zapisuje się ją: $g(x) = \arccos x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.



Przykład 2

- a) $\cos 0 = 1$, więc $\arccos 1 = 0$. b) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, więc $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

2. Oblicz.

- a) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $\arccos(-1)$



Powtórzenie

Zestaw I

- Podaj miarę łukową kąta.
 - 40°
 - 108°
 - 110°
 - 144°
- Podaj miarę kąta w stopniach.
 - $\frac{3}{5}\pi$
 - $\frac{7}{8}\pi$
 - $\frac{5}{9}\pi$
 - $\frac{11}{12}\pi$
- Oblicz.
 - $(\sin 30^\circ + \cos 120^\circ) \cdot \operatorname{tg} 930^\circ$
 - $\sin 225^\circ \cdot \operatorname{tg} 495^\circ - \cos 330^\circ$
 - $\cos(-570^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-1230^\circ)$
 - $\frac{\sin 120^\circ + \cos 300^\circ}{\operatorname{tg}(-225^\circ)} - \sin(-390^\circ)$
 - $(\sin(-315^\circ) + 3 \cos 45^\circ)^2$
 - $\frac{\sin 270^\circ + 2 \cos(-60^\circ)}{\operatorname{tg}(-225^\circ)} + \cos(-240^\circ)$
- Oblicz.
 - $\sin(-\frac{5}{3}\pi) - \operatorname{tg} \frac{31}{6}\pi - \cos \frac{3}{2}\pi$
 - $\sqrt{2} \cos \frac{5}{4}\pi + \sqrt{3} \operatorname{tg}(-\frac{25}{3}\pi)$
 - $\frac{\sin \frac{37}{6}\pi - 2 \cos \frac{\pi}{6}}{-\operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi}$
 - $(\sin \frac{13}{6}\pi + \cos \frac{7}{3}\pi) \cdot \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})$
 - $3(\cos \frac{4}{3}\pi + \sin \frac{11}{6}\pi)$
 - $\frac{\sin \frac{5}{4}\pi - \cos \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{4}{3}\pi}$
- Wyznacz kąty $\alpha \in (-360^\circ; 360^\circ)$ spełniające warunek:
 - $\sin \alpha = \sin 15^\circ$
 - $\sin \alpha = -\sin 15^\circ$
 - $\cos \alpha = \cos 55^\circ$
 - $\cos \alpha = -\cos 55^\circ$
 - $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 85^\circ$
 - $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} 85^\circ$
- Wyznacz kąt $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ]$ spełniający warunki:
 - $\operatorname{tg} \alpha = 1$ i $\cos \alpha < 0$,
 - $\operatorname{tg} \alpha = -1$ i $\cos \alpha > 0$,
 - $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos \alpha < 0$,
 - $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin \alpha < 0$,
 - $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$,
 - $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\operatorname{tg} \alpha > 0$.
- Wyznacz rozwiązania równania należące do podanego przedziału.
 - $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, (\frac{\pi}{2}; \pi)$
 - $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, (\pi; 2\pi)$
 - $\sin^2 x = \frac{1}{4}, (0; \pi)$
 - $|\sin x| = \frac{1}{2}, (-\pi; 0)$
 - $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
 - $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, (\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi)$
 - $\cos^2 x = 1, (2\pi; 4\pi)$
 - $|\cos x| = \frac{1}{2}, (-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2})$
- Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $[0; 8\pi]$.
 - $\sin x = \frac{1}{2}$
 - $\cos x = -\frac{1}{2}$
 - $\sin x = 0,9$
 - $\sin x = 0,3$

Rozpatrzmy funkcję:

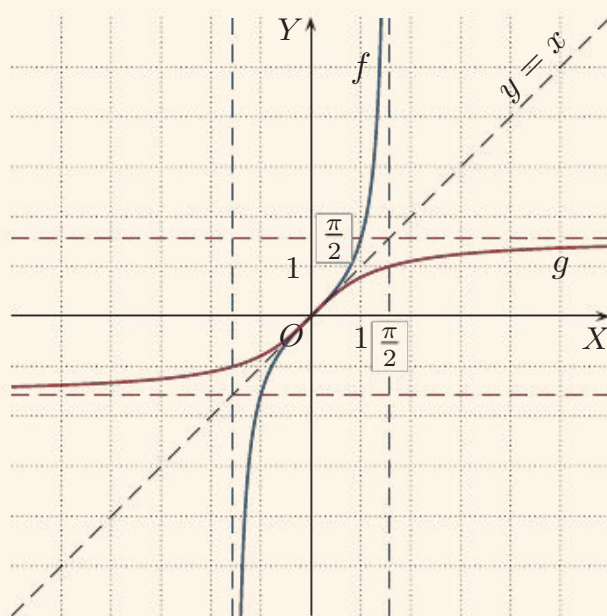
$$f: (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$$

określoną wzorem $f(x) = \operatorname{tg} x$ (kolor niebieski na rysunku obok). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.

Istnieje zatem funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ odwrotna do funkcji f . Nosi ona nazwę **arcus tangens** i zapisuje się ją: $g(x) = \operatorname{arctg} x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.

Zwróć uwagę na to, że wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ ma asymptoty pionowe $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$, a wykres funkcji $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ma asymptoty poziome $y = -\frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{\pi}{2}$.



Przykład 3

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, więc $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. b) $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, więc $\operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$.

Rozpatrzmy funkcję:

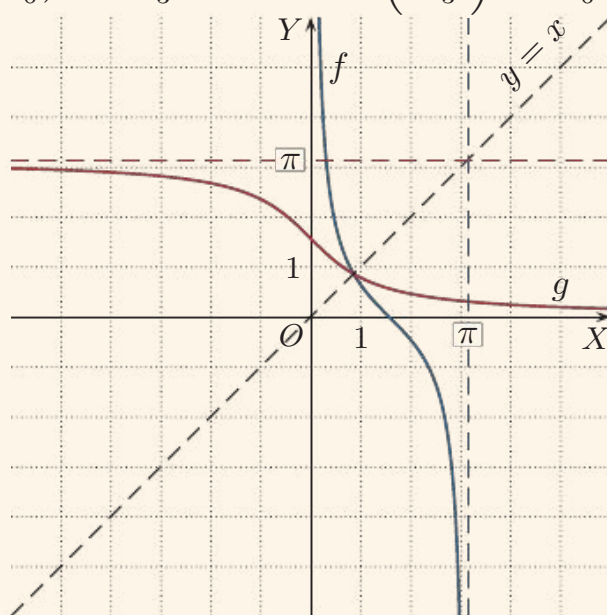
$$f: (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

określoną wzorem $f(x) = \operatorname{ctg} x$ (kolor niebieski na rysunku obok). Jest ona różnowartościowa, a jej zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.

Istnieje zatem funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow (0; \pi)$ odwrotna do funkcji f . Nosi ona nazwę **arcus cotangens** i zapisuje się ją: $g(x) = \operatorname{arctg} x$ (kolor czerwony).

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem prostej $y = x$.

Zwróć uwagę na to, że wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ma asymptoty pionowe $x = 0$ i $x = \pi$, a wykres funkcji $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ma asymptoty poziome $y = 0$ i $y = \pi$.



Przykład 4

a) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, więc $\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. b) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, więc $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

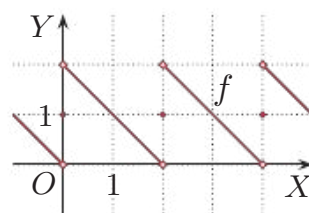
3. Oblicz.

a) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ b) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\operatorname{arctg}(-1)$ d) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$

9. Wyznacz rozwiązania równania należące do podanego zbioru.

- a) $\operatorname{tg} x = 1, \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ c) $|\operatorname{tg} x| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \left(2\pi; \frac{5}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{2}\pi; 3\pi\right)$
 b) $\operatorname{tg}^2 x = 3, \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ d) $|\operatorname{tg} x| = \sqrt{3}, (-\pi; 0)$

10. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2. Naszkicuj wykres tej funkcji w przedziale $[-4; 4]$. Ile rozwiązań równania $f(x) = 1$ należy do tego przedziału?



11. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości i miejsca zerowe.

- a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$
 b) $f(x) = -1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ d) $f(x) = 1 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

12. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α spełniającego podane warunki.

- a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$ c) $\sin \alpha = -\frac{1}{3}, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$
 b) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$ d) $\cos \alpha = \frac{1}{4}, 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

13. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α spełniającego podane warunki.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -2, 270^\circ < \alpha < 360^\circ$
 b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$

14. Czy podana zależność jest tożsamością trygonometryczną?

- a) $\sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \sin x$ c) $2 \cos^2 x \operatorname{tg} x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$
 b) $\operatorname{tg} x \cos^3 x - \sin^2 x = \cos^2 x$ d) $(1 - \cos x) \operatorname{tg} x = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + \cos x}$

D 15. Wykaż, że funkcja $f(x) = \cos^4 x - 2 \cos^2 x - \sin^4 x$ jest funkcją stałą.

D 16. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

- a) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x \operatorname{tg}^2 x}$ c) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$
 b) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$ d) $\sin x \cos x + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x (\cos^2 x + 1)$

17. Podaj liczbę rozwiązań równania należących do przedziału $[0; 2\pi]$ w zależności od parametru m .

- a) $\cos x + 1 = m$ b) $2 \sin x - 1 = m$ c) $|\sin x| + \frac{1}{2} = m$

18. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie?

- a) $f(x) = 1 - 3 \sin x$ b) $f(x) = |\operatorname{tg} 3x| - 4$ c) $f(x) = \frac{2}{|\sin x - 3|}$

■ Zestaw II

1. Oblicz.

- a) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$ d) $\sin 23^\circ \cdot \cos 67^\circ + \cos 23^\circ \cdot \sin 67^\circ$
 b) $\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ$ e) $\cos 66^\circ \cdot \sin 21^\circ - \sin 66^\circ \cdot \cos 21^\circ$
 c) $\sin^2 75^\circ - \cos^2 15^\circ$ f) $\sin 82^\circ \cdot \sin 52^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 52^\circ$

2. Czy podana zależność jest tożsamością trygonometryczną?

- a) $1 + \sin \alpha = (\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})^2$ c) $\sin^4 \alpha + 8 \cos^2 \alpha = 8 \cos^4 \alpha + 1$
 b) $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ d) $\sin \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) + 2 \cos \alpha = \sin \alpha$

D 3. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

- a) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}$ c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
 b) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ d) $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

4. a) Wiadomo, że $\sin \frac{x}{2} = \frac{4}{5}$ i $x \in (\pi; 3\pi)$. Oblicz $\cos \frac{x}{2}$, $\sin x$, $\cos x$ i $\operatorname{tg} x$.

b) Wiadomo, że $\cos \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ i $x \in (3\pi; 4\pi)$. Oblicz $\sin \frac{x}{2}$, $\sin x$, $\cos x$ i $\operatorname{tg} x$.

5. Oblicz.

- a) $\sin 15^\circ + \sin 105^\circ$ b) $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ$ c) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 105^\circ$

6.* Wiadomo, że $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ i $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) = -2 \cos x$. Oblicz $\sin 2x$ i $\cos 2x$.

7.* Wiadomo, że $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4})$. Oblicz:

- a) $\sin 2x$, b) $\cos x - \sin x$, c) $\operatorname{tg} 2x$.

8.* Oblicz $\sin 3x$ i $\cos 3x$ w przypadku, gdy:

- a) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, x \in (0; \frac{\pi}{2})$, b) $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}, x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$.

9. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości i miejsca zerowe.

- a) $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$ c) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6}) + 1$ e) $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$
 b) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}$ d) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1$ f) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$

10. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ należących do przedziału $[0; 2\pi]$ w zależności od parametru m .

- a) $f(x) = \sin x - \frac{3}{2}$ d) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ g) $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$
 b) $f(x) = \cos x + \frac{3}{2}$ e) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$ h) $f(x) = -\operatorname{tg} x + 2$
 c) $f(x) = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1$ i) $f(x) = \operatorname{tg}(-x) - \sqrt{3}$

11. Ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f i g w przedziale $[0; 2\pi]$?
- a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2 - \sin x$ c) $f(x) = \sin x + \cos x$, $g(x) = \sqrt{2}$
b) $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 - \sin x$ d) $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$, $g(x) = 1$

12. Uprość wzór funkcji f i naskicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
b) $f(x) = \cos(-x) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
c) $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(\pi - x) - \sin(\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

13. Rozwiąż równanie.

- a) $2 \cos(-3x) = 1$ c) $2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ e) $3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3}$
b) $2 \sin(2x - \pi) = 1$ d) $2 \cos^2(3x + \pi) = 1$ f) $\operatorname{tg}^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 3$

14. Rozwiąż równanie.

- a) $2 \cos^2 x + 5 \cos x = 3$ d) $5 \cos^2 x + 7 \sin^2 x = 6$
b) $\sin^2 x - \sin x = 2$ e) $\cos^2 x + 5 \sin x = 5$
c) $\sin^2 x - 3 \cos x = 3$ f) $2 \cos^2 x = \sqrt{3} \sin x - 1$

15. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$ d) $\sin x \cos 2x - \sin x = \frac{1}{2} \sin 4x - \sin 2x$
b) $\cos^4 x + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ e) $\cos x \cos 2x = \sin x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 3x$
c) $\operatorname{tg}^2 x + \cos 2x = 1$ f) $\sin x \cos 2x = \sin 2x - \frac{3}{2} \sin x$

16. Wyznacz rozwiązania równania należące do przedziału $[0; 2\pi]$.

- a) $2 \cos^3 x - \cos^2 x = 2 \cos x - 1$ b) $\cos x + |\cos x| = \sin 2x$

17. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej wartości najmniejszą i największą.

- a) $f(x) = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x$ c) $f(x) = \cos^2 x + |\sin x| \cdot \sin x$
b) $f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ d) $f(x) = |\operatorname{tg} x| \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \sin 2x$

18. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 2 \cos^2 x - \frac{1}{2} \cos 2x$, której dziedziną jest przedział $(0; 2\pi)$. Podaj rozwiązanie równania $f(x) = \frac{3}{4}$.

19. Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz jej okres podstawowy.

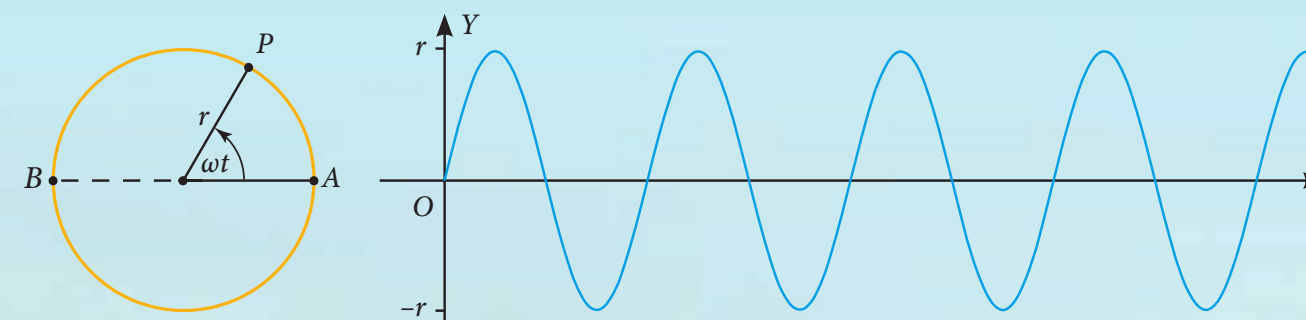
- a) $f(x) = |\sin x| + \sin x$ c) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x$
b) $f(x) = |\cos x| + \cos x$ d) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - \operatorname{tg} x$

20. Podaj dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

- a) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ b) $f(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}$ c) $f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$

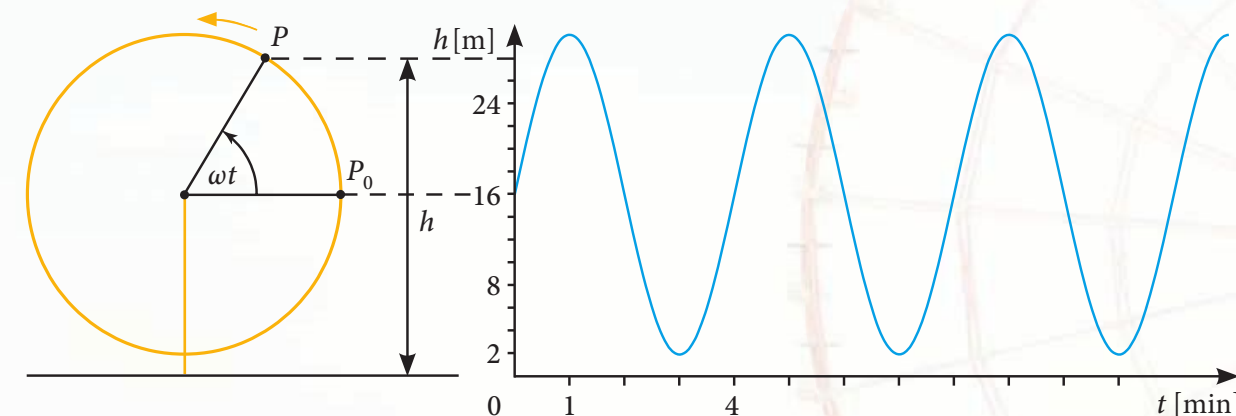
Ruch po okręgu a sinusoida

Na rysunku poniżej punkt P porusza się ruchem jednostajnym ze stałą prędkością kątową ω po okręgu o promieniu r w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (prędkość kątowa to stosunek kąta zakreślonego podczas ruchu do czasu, w którym to nastąpiło). Początkowe położenie punktu P oznaczono przez A – jest to jeden z końców poziomej średnicy AB . Wykres przedstawiający zmiany położenia punktu P względem średnicy AB w czasie jest sinusoidą.



Diabelski młyn

Diabelski młyn to obracające się wielkie koło, na którym są zamocowane wagoniki. Na rysunku schematycznie pokazano diabelski młyn o średnicy 28 m, obracający się ze stałą prędkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Wagonik w najniższym położeniu jest zawieszony 2 m nad ziemią, a jeden pełny obrót koła trwa 4 minuty.



Przyjmijmy, że w chwili $t_0 = 0$ wagonik znajdował się w punkcie P_0 , czyli 16 m nad ziemią. Wysokość h , na której wagonik znalazł się po upływie czasu t (punkt P na rysunku), jest opisana wzorem:

$$h(t) = 14 \sin(\omega t) + 16$$

- 1 Na jakiej wysokości nad ziemią znajdzie się ten wagonik po upływie 5 minut?
A na jakiej po upływie 8 minut?

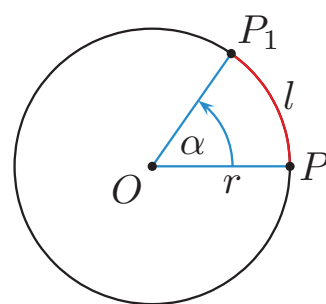


Zadania z kontekstem realistycznym

Informacja do zadań 1.–4.

Jeśli ciało poruszające się po okręgu przemieściło się z punktu P do punktu P_1 w czasie t , to opisując ten ruch, możemy podać zarówno **prędkość kątową** $\omega = \frac{\alpha}{t}$ (stosunek kąta obrotu α do czasu t), jak i **prędkość liniową** $v = \frac{l}{t}$ (stosunek długości łuku l do czasu t).

Prędkość kątową ω zwykle podaje się w radianach na sekundę lub w radianach na godzinę. Miara łukowa kąta α to stosunek długości łuku l do promienia r ($\alpha = \frac{l}{r}$), więc otrzymujemy $\omega = \frac{l}{rt}$ i stąd mamy zależność $v = r\omega$.



Przykład

Ziemia wykonuje pełny obrót wokół swojej osi w ciągu 24 godzin, zatem prędkość kątową jej ruchu obrotowego jest równa:

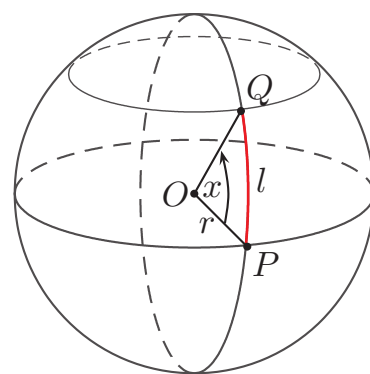
$$\omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \text{ [rad/h]}$$

Jeżeli przyjmiemy, że Ziemia jest kulą o promieniu 6370 km, to punkt P na jej równiku porusza się na skutek ruchu obrotowego z prędkością liniową:

$$v = r\omega = 6370 \cdot \frac{\pi}{12} \approx 1668 \text{ [km/h]}$$

Dla punktu Q , którego szerokość geograficzna jest równa x , prędkość liniowa jest wyrażona wzorem:

$$v_Q = v \cos x \text{ (uzasadnij)}$$



- Oblicz, z jaką prędkością liniową porusza się punkt leżący na tym samym równoleżniku co Kraków, którego szerokość geograficzna wynosi 50°N .
- Przednie koło bicyklu ma średnicę równą 144 cm, a tylne 36 cm. Ile razy prędkość kątową, z jaką podczas jazdy obraca się tylne koło, jest większa od prędkości kątowej, z jaką obraca się przednie koło?
- Ile obrotów wykonuje w ciągu sekundy koło samochodu jadącego z prędkością 60 km/h, jeśli średnica koła jest równa 52 cm? Z jaką prędkością kątową (w radianach na sekundę) obraca się to koło?
- Przedni wał walca drogowego ma średnicę 2 m. Gdy walec jechał po prostej drodze, jego przedni wał wykonał w ciągu pół godziny 500 obrotów. Z jaką prędkością poruszał się walec?



Sposób na zadanie

Przykład

Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób (metoda analizy starożytnych)

Metoda analizy starożytnych rozwiązywania równań polega na kolejnym przekształcaniu równania wyjściowego w ten sposób, aby każde następne równanie wynikało z poprzedniego (nie musi być mu równoważne). Zbiór rozwiązań ostatniego równania zawiera wszystkie rozwiązania równania wyjściowego. Na koniec należy sprawdzić, które liczby z tego zbioru spełniają równanie wyjściowe.

Obie strony równania $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ podnosimy do kwadratu.

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 2$$

Zauważ, że nie sprawdziliśmy, czy obie strony równania mają ten sam znak.

$$1 + \sin 2x = 2$$

$$\sin 2x = 1$$

Zatem $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, czyli $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Teraz sprawdzimy, które z otrzymanych liczb spełniają równanie wyjściowe.

Dla $k = 2n$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \\ &= \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Dla $k = 2n + 1$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi\right) = \\ &= \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right) = \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Sprzeczność

Zatem jedynymi rozwiązaniami równania są liczby $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

II sposób

Zauważ że:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

Zatem:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \text{ gdzie } n \in \mathbb{Z}$$

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$

➔ **Zadanie 6, str. 72**

**Zadanie 1 (0-2)**

Punkt $P(-3, -\sqrt{7})$ należy do ramienia końcowego kąta α . Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha$.

Zadanie 2 (0-3)

Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{\operatorname{tg} 585^\circ - \sin 675^\circ}{\sin 495^\circ + 2 \cos 750^\circ}$$

Zadanie 3 (0-2)

Dany jest kąt $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ taki, że $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}$. Wyznacz sinus i cosinus kąta x .

Zadanie 4 (0-2)

Wyznacz najmniejszy dodatni pierwiastek równania:

$$2 \sin 2\pi x - 1 = 0$$

Zadanie 5 (0-3)

Wyznacz największy ujemny pierwiastek równania:

$$\sin 2\pi x + 2 \cos 2\pi x - 2 \cos^2 \pi x = 0$$

Zadanie 6 (0-4) → Przykład, str. 71

Wyznacz te spośród rozwiązań równania $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2$, które należą do przedziału $[0; 4\pi]$.

Zadanie 7 (0-4)

Wyznacz liczby $x \in [-2\pi; 2\pi]$ spełniające równanie $\sin 2x - \cos 2x = 1$.

Zadanie 8 (0-4)

Oblicz sumę pierwiastków równania $2 \sin^2 x + 1 = \sqrt{3} \cos x$ należących do przedziału $[0; 4\pi]$.

Zadanie 9 (0-4)

Rozwiąż równanie $2 \sin x \cos 2x + \sin 5x = 2 \sin 2x \cos 3x$.

Zadanie 10 (0-4)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{4 \cos x + 3}{4 \cos^3 x - 4 \cos^2 x - 3 \cos x + 3}$.

Zadanie 11 (0-4)

Dla jakich wartości parametru $\alpha \in (0; \pi)$ równanie:

$$(2 \cos \alpha - 1)x^2 - 4x + 4 \cos \alpha = 0$$

ma jeden pierwiastek?

Zadanie 12 (0-5)

Dla jakich wartości parametru α suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + 4x \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha = 0$ jest równa 8?

2 Geometria analityczna

W tym rozdziale opisujemy i badamy figury geometryczne położone w prostokątnym układzie współrzędnych, w którym jednostki na obu osiach mają równe długości.

Układ współrzędnych wykorzystywany jest także w geografii. Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego szerokość i długość geograficzną, np. położenie latarni morskiej w Porto (Portugalia) – szerokość geograficzna: $41^\circ 08' 48'' \text{N}$, długość geograficzna: $8^\circ 40' 38'' \text{E}$.



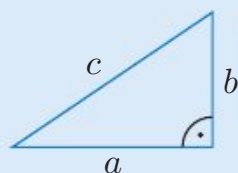
Przypomnij sobie

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne

Twierdzenie Pitagorasa

Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

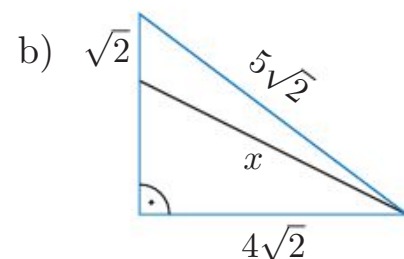
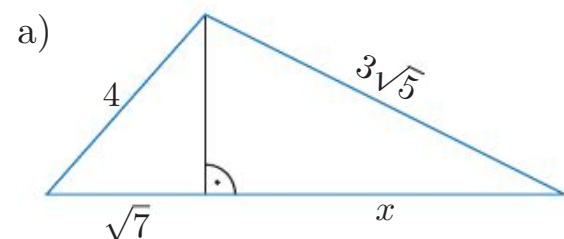
$$a^2 + b^2 = c^2$$



1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c . Oblicz jego obwód.

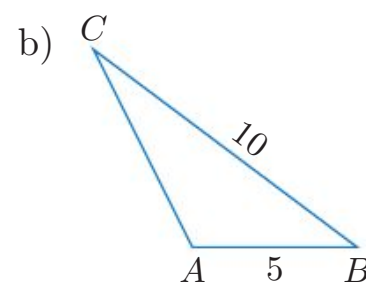
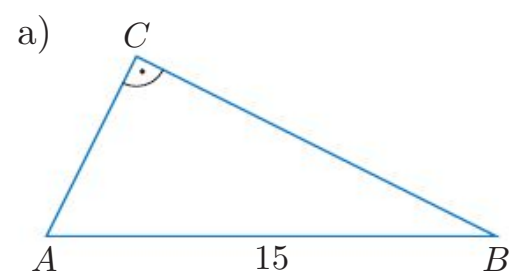
a) $a = 4$, $b = 2\sqrt{2}$ b) $a = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{5}$ c) $b = 2$, $c = \frac{5}{2}$

2. Oblicz x .



3. Podstawa trójkąta równoramiennego jest dłuższa od jego ramienia o 2 cm, a obwód tego trójkąta jest równy 32 cm. Oblicz jego pole.

4. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C jest równa 6. Oblicz obwód trójkąta ABC .



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

5. Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest prostokątny.

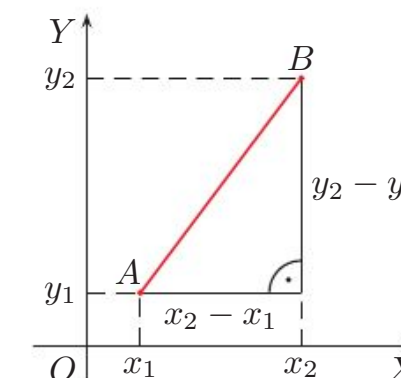
a) 5, 12, 13 c) $2\frac{1}{4}$, 3, $3\frac{3}{4}$ e) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$
 b) 8, 15, 17 d) 15, 18, 25 f) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, 6

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB .

Rozważmy punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ w prostokątnym układzie współrzędnych (rysunek obok). Odległość między nimi możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



Twierdzenie

Odległość między punktami $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Przykład 1

Oblicz odległość między punktami $A(2, 5)$ i $B(-1, 1)$.

$$|AB| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$x_1 = 2, y_1 = 5$
 $x_2 = -1, y_2 = 1$

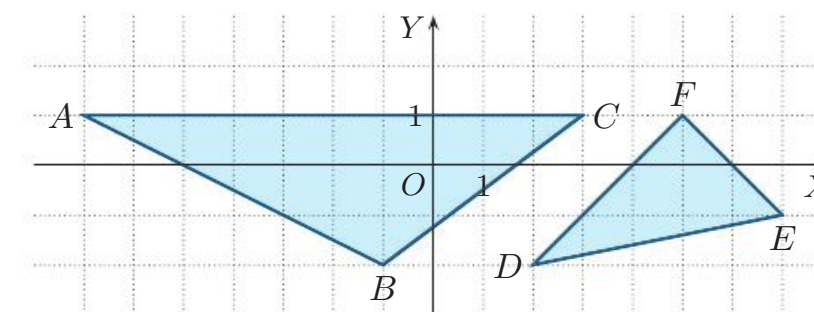
Ćwiczenie 1

Oblicz odległość między punktami A i B .

a) $A(-3, -1)$, $B(-5, -1)$ c) $A(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $B(\frac{1}{2}, -1)$
 b) $A(5, -6\frac{1}{2})$, $B(-7, -1\frac{1}{2})$ d) $A(3 + \sqrt{3}, \sqrt{7})$, $B(\sqrt{3}, -4 + \sqrt{7})$

Ćwiczenie 2

Oblicz obwody trójkątów ABC i DEF przedstawionych na rysunku obok.



Ćwiczenie 3

Czy trójkąt ABC jest równoramienny?

a) $A(1, 3)$, $B(6, 4)$, $C(4, -1)$ c) $A(-3, -3)$, $B(12, -3)$, $C(6, 9)$
 b) $A(0, 0)$, $B(4, -1)$, $C(3, 3)$ d) $A(-1, 0)$, $B(2, \sqrt{3})$, $C(2 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$

Przykład 2

Czy trójkąt o wierzchołkach $A(-2, -4)$, $B(4, 2)$ i $C(1, 5)$ jest prostokątny?

$$|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

$$|AC| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - (-4))^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$$

$$|BC| = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

Zauważmy, że $|AB|^2 + |BC|^2 = 72 + 18 = 90 = |AC|^2$.

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Ćwiczenie 4

Czy trójkąt ABC jest równoramienny? Czy jest prostokątny?

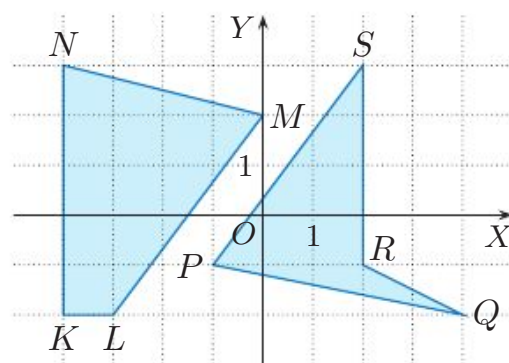
- a) $A(-1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(2, 4)$ c) $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(-1, 6)$
b) $A(-3, 0)$, $B(1, -4)$, $C(5, 4)$ d) $A(-4, 0)$, $B(-1, -3)$, $C(5, 3)$

Zadania

1. Który z czworokątów $KLMN$ i $PQRS$ (rysunek obok) ma większy obwód?

2. Który z odcinków AB i CD jest dłuższy?

- a) $A(1, -2)$, $B(4, 4)$, $C(2, 2)$, $D(8, -2)$
b) $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(-1, 1)$, $D(4, 6)$
c) $A(3, -2)$, $B(8, -2)$, $C(-2, 2)$, $D(2, 5)$



3. Czy trójkąt ABC jest prostokątny?

- a) $A(3, 0)$, $B(-6, 8)$, $C(-2, -2)$ b) $A(-5, -1)$, $B(4, 1)$, $C(3, 5)$

4. Czy trójkąty ABC i DEF są przystające lub podobne?

- a) $A(2, 2)$, $B(8, 5)$, $C(1, 4)$, $D(-2, 0)$, $E(4, -3)$, $F(5, -1)$
b) $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$, $C(0, 4)$, $D(4, 4)$, $E(0, 2)$, $F(-2, -4)$
c) $A(1, -1)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 3)$, $D(0, 3)$, $E(-4, -3)$, $F(4, -5)$

5. Oblicz obwód oraz wysokości trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt przecięcia:

- a) prostych $y = x - 1$ i $y = -\frac{1}{2}x + 5$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OY ,
b) prostych $y = x + 2$ i $y = 3x - 6$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OX .

6. Oblicz obwód, długości przekątnych oraz wysokość rombu $ABCD$.

a) $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 4)$, $D(-2, 3)$

b) $A(-5, -2)$, $B(2, -1)$, $C(7, 4)$, $D(0, 3)$

7. Wyznacz współrzędne punktów należących do prostej l , których odległość od punktu P jest równa d .

a) $l: y = 2x - 2$, $P(5, 3)$, $d = \sqrt{10}$ b) $l: y = -x + 6$, $P(3, 2)$, $d = \sqrt{13}$

8. Dane są wierzchołki $A(-2, 2)$ i $C(5, 3)$ prostokąta $ABCD$. Wierzchołki B i D należą do prostej $y = 4 - x$. Oblicz ich współrzędne.

9. Dane są wierzchołki $A(-4, 2)$, $B(8, -2)$ i $C(6, 4)$ trapezu równoramiennego $ABCD$ o podstawie AB . Oblicz współrzędne wierzchołka D .

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od osi OX i punktu $(0, 1)$.

Niech $P(x, y)$ będzie punktem spełniającym warunki zadania. Odległość punktu P od osi OX jest równa:

$$\sqrt{(x - x)^2 + (y - 0)^2} = |y|$$

a odległość od punktu $(0, 1)$:

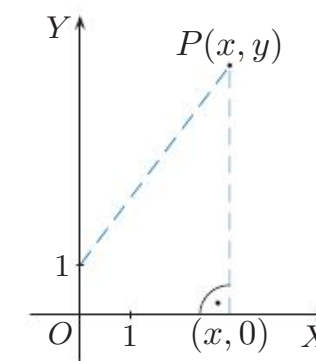
$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

Otrzymujemy zatem równanie:

$$|y| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \quad \text{Obie strony równania są dodatnie.}$$

Stąd $y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$, czyli $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Szukaną krzywą jest parabola o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.



Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe od osi OX i punktu: a) $(0, -4)$, b) $(4, 6)$.

11. Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe:

- a) od prostej $y = -2$ i punktu $(2, 6)$,
b) od prostej $y = 5$ i punktu $(-4, -1)$.

12. Wyznacz równanie krzywej, do której należą punkty równo odległe:

- a) od osi OY i punktu $(2, 0)$,
b) od prostej $x = 4$ i punktu $(2, -4)$.

Przypomnij sobie

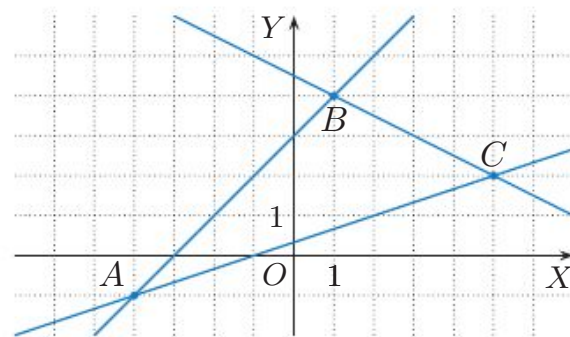
Prosta w układzie współrzędnych

Definicja

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, jest równy $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

1. Wyznacz równania prostych AB , AC i BC (rysunek obok).
2. Wyznacz równanie prostej PQ . Czy należy do niej punkt C ?
a) $P(-2, 1)$, $Q(2, 5)$, $C(4, 8)$
b) $P(-1, 7)$, $Q(3, -1)$, $C(-2, 9)$



Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

- równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
- prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

3. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej l .
a) $P(1, 3)$, $l: y = 4x + 2$ b) $P(20, 9)$, $l: y = -\frac{1}{5}x + 2$
4. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej l .
a) $A(3, -1)$, $l: y = 2x + 7$ b) $A(12, 7)$, $l: y = -6x + 1$

Definicja

Równanie postaci $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

5. Przekształć równanie ogólne prostej do postaci kierunkowej.
a) $3x - y - 4 = 0$ b) $-4x + 2y + 5 = 0$ c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 3 = 0$
6. Prosta l przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do prostej k . Wyznacz równanie prostej l .
a) $P(4, 5)$, $k: 2x - y - 7 = 0$ b) $P(\frac{1}{2}, -1)$, $k: 2x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$

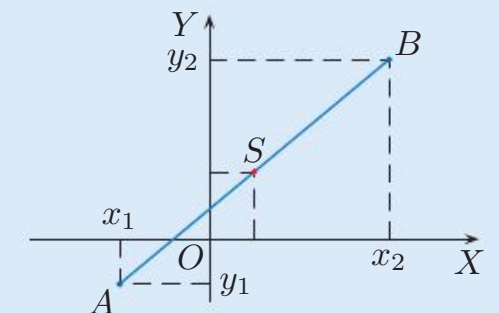
2.2. Środek odcinka

Jeżeli znamy współrzędne końców odcinka, możemy wyznaczyć współrzędne jego środka.

Środek odcinka

Środkiem odcinka AB o końcach w punktach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ jest punkt:

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Przykład 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka o końcach $A(-3, 2)$ i $B(5, -4)$.

Środek odcinka AB ma współrzędne $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB .

- a) $A(-2, -1)$, $B(6, 3)$ b) $A(-4, 1)$, $B(5, -8)$ c) $A(\frac{1}{2}, -2)$, $B(3, \frac{1}{2})$

Przykład 2

Punkt $S(1, 5)$ jest środkiem odcinka AB . Punkt B ma współrzędne $(-3, 4)$. Wyznacz współrzędne punktu A .

Niech punkt A ma współrzędne (x_1, y_1) , wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - 3}{2} &= 1 & \text{i} & \quad \frac{y_1 + 4}{2} = 5 \\ x_1 - 3 &= 2 & \text{i} & \quad y_1 + 4 = 10 \\ x_1 &= 5 & \text{i} & \quad y_1 = 6 \end{aligned}$$

Zatem punkt A ma współrzędne $(5, 6)$.

Ćwiczenie 2

- a) Dane są punkt $A(5, 8)$ i punkt $S(-1, -3)$ będący środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .
- b) Punkt $S(2, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, -2)$ i $B(7, y)$. Oblicz długość odcinka AB .
- c) Punkt $S(1, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, y)$ i $B(x + y, x - y)$. Oblicz długość odcinka AB .

Ćwiczenie 3

Punkty $P(-3, 2)$, $Q(-1, 0)$ i $R(1, 4)$ są środkami boków trójkąta ABC . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz równania prostych zawierających jego środkowe.

Przypomnijmy, że **symetralną odcinka** AB jest prosta do niego prostopadła i przechodząca przez jego środek. Jest ona zbiorem punktów, których odległości od punktów A i B są równe. W poniższym przykładzie przedstawiamy dwa sposoby wyznaczenia równania symetralnej odcinka.

Przykład 3

a) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-2, 3)$ i $B(6, -1)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej, w której jest zawarty odcinek AB :

$$a = \frac{-1-3}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Symetralna odcinka AB jest do niego prostopadła, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy 2.

Wyznaczamy środek odcinka AB :

$$S\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (2, 1)$$

Podstawiamy współrzędne punktu S do równania prostej $y = 2x + b$:

$$1 = 2 \cdot 2 + b, \text{ stąd } b = -3$$

Zatem równanie symetralnej odcinka AB ma postać: $y = 2x - 3$.

b) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-2, 2)$ i $B(4, 0)$.

Punkt $P(x, y)$ należy do symetralnej odcinka AB , jeśli $|PA| = |PB|$, więc:

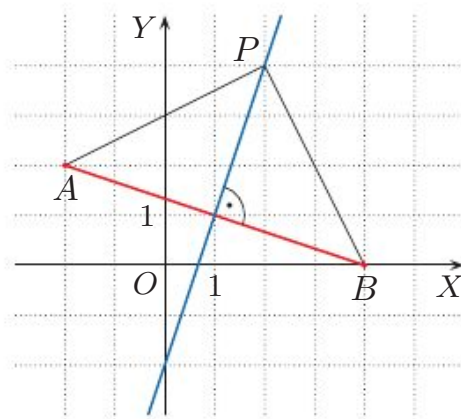
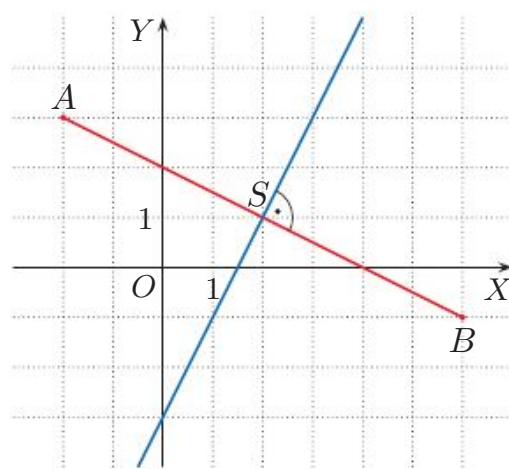
$$\begin{aligned} \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 2)^2} &= \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} \\ (x + 2)^2 + (y - 2)^2 &= (x - 4)^2 + y^2 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 \\ -4y &= -12x + 8 \end{aligned}$$

Zatem równanie symetralnej odcinka AB ma postać: $y = 3x - 2$.

Ćwiczenie 4

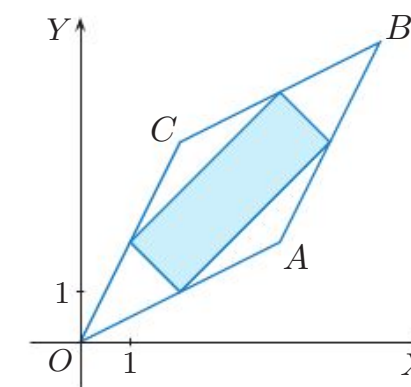
Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .

a) $A(1, 8)$, $B(6, 4)$ b) $A(-2, 6)$, $B(10, 0)$ c) $A(-2, -3)$, $B(4, -1)$



Zadania

- Oblicz odległość środka odcinka AB od początku układu współrzędnych.
a) $A(1, 6)$, $B(-7, 2)$ b) $A(-7, 7)$, $B(11, 1)$ c) $A(9, \sqrt{7})$, $B(-4, -\sqrt{7})$
- Dane są punkt $A(4, 5)$ oraz punkt S będący środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .
a) $S(-2, 3)$ b) $S(6, 7)$ c) $S(-3, 1)$
- Dany jest punkt $A(-4, -3)$. Oblicz długość odcinka AB , którego:
a) środkiem jest punkt $S(-1, -2)$,
b) środek leży na osi OX , a odcięta punktu B jest równa 2.
- Oblicz pole rombu o wierzchołkach $O(0, 0)$, $A(4, 2)$, $B(6, 6)$ i $C(2, 4)$ oraz pole prostokąta, którego wierzchołkami są środki boków rombu $OABC$ (rysunek obok).
- Dany jest prostokąt o wierzchołkach $A(-4, -3)$, $B(8, 3)$, $C(6, 7)$ i $D(-6, 1)$.
a) Oblicz obwód prostokąta $ABCD$.
b) Oblicz obwód rombu, którego wierzchołkami są środki boków prostokąta $ABCD$.
- Wyznacz współrzędne środków odcinka AC i odcinka BD . Czy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem?
a) $A(-2, -1)$, $B(17, 2)$, $C(18, 5)$, $D(-1, 2)$
b) $A(1, -1)$, $B(7, 1)$, $C(8, 5)$, $D(2, 2)$
- Punkty $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ i $C(5, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka AC , współrzędne wierzchołka D oraz obwód tego równoległoboku.
- Wyznacz równania prostych zawierających środkowe trójkąta ABC .
a) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$, $C(2, 7)$ b) $A(-5, -3)$, $B(5, -1)$, $C(-1, 5)$
- Oblicz pole trójkąta, którego środkami boków są punkty $P(1, 0)$, $Q(-2, 3)$ i $R(-4, 1)$.

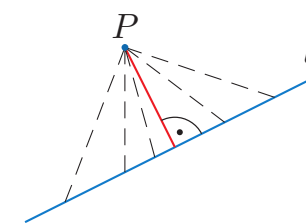


- D** 10. Punkty $A(2, -4)$ i $C(-1, -1)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Uzasadnij, że przekątna BD tego rombu jest zawarta w prostej $x - y - 3 = 0$.

11. Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie $(2, 1)$, a jeden z wierzchołków ma współrzędne $(1, -2)$. Oblicz pole i obwód tego kwadratu.
12. Pole kwadratu jest równe 58, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-2, -3)$. Punkt przecięcia przekątnych kwadratu należy do prostej $y = x - 4$. Oblicz współrzędne tego punktu.
13. Odcinek AB leżący na prostej k ma długość d . Środkiem tego odcinka jest punkt S . Wyznacz współrzędne punktów A i B .
- a) $k: y = x, d = 4\sqrt{2}, S(3, 3)$ b) $k: y = \frac{3}{4}x + 2, d = 10, S(12, 11)$
14. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D czworokąta $ABCD$, który jest:
- a) kwadratem oraz $A(-3, 5)$ i $C(5, 1)$,
b) rombem oraz $A(1, -3), C(9, 5)$ i $|BD| = 2|AC|$.
15. Pole rombu $ABCD$ jest równe 32. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D .
- a) $A(-4, -2), C(4, 6)$ b) $A(2, 3), C(4, 1)$
16. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .
- a) $A(-2, -1), B(4, 1)$ b) $A(-1, 3), B(5, -1)$
17. a) Prosta $y = 2x - 1$ jest symetralną odcinka AB oraz $A(-1, 5)$. Wyznacz współrzędne punktu B .
b) Prosta $y = x - 2$ jest symetralną odcinka AB . Odcięta środka odcinka AB jest równa 2, punkt A leży w I ćwiartce układu współrzędnych oraz $|AB| = 4$. Wyznacz współrzędne punktów A i B .
18. Punkty $A(-3, 1)$ i $B(2, -1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Bok AC jest zawarty w prostej $y = 2x + 7$, a jedna ze środkowych trójkąta ma równanie $y = x + 4$. Oblicz współrzędne wierzchołka C i wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki tego trójkąta.
19. Boki AB i AC trójkąta ABC zawierają się odpowiednio w prostych $y = -\frac{1}{2}x$ i $y = x + 3$. Środkiem boku BC jest punkt $S(4, 1)$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
20. Punkty $A(2, 0)$ i $C(4, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$ o boku długości $2\sqrt{5}$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu i oblicz jego pole.

R 2.3. Odległość punktu od prostej

Przypomnijmy, że **odległością punktu P od prostej l** nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Przykład 1

Oblicz odległość punktu $P(4, 2)$ od prostej $y = 2x - 1$.

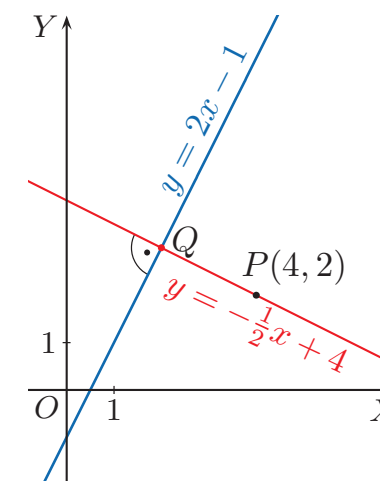
Wyznaczamy równanie prostej k przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do prostej $l: y = 2x - 1$. Ma ona równanie postaci $y = -\frac{1}{2}x + b$. Podstawiamy do tego równania współrzędne punktu P i otrzymujemy:

$$2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$$

czyli $b = 4$. Zatem $k: y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$



i otrzymujemy współrzędne punktu przecięcia się prostych k i l : $Q(2, 3)$.

Obliczamy długość odcinka PQ :

$$|PQ| = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{5}$$

Zatem odległość punktu P od prostej $y = 2x - 1$ jest równa $\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 1

Oblicz odległość punktu P od prostej l .

a) $P(5, 1), l: y = x$

b) $P(-1, 3), l: y = \frac{4}{3}x - 4$

Jeżeli metodę opisaną w przykładzie 1. zastosujemy w przypadku ogólnym, to otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

Odległość d punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu ogólnym:

$$Ax + By + C = 0$$

wyraża się za pomocą wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Przykład 2

Oblicz odległość punktu $P(5, -1)$ od prostej $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

Aby skorzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej, równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$4x + 3y - 6 = 0$$

i odczytujemy z niego wartości współczynników: $A = 4$, $B = 3$ i $C = -6$.

Wartości te razem ze współzrzednymi punktu P : $x_0 = 5$ i $y_0 = -1$ podstawiamy do wzoru:

$$d = \frac{|4 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|20 - 3 - 6|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz odległości punktów $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ i $C(-1, 3)$ od prostej l .

- a) $l: y - x = 1$ b) $l: 3x - y - 7 = 0$ c) $l: y = -\frac{1}{2}x + 2,5$

Przykład 3

Punkty $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ i $C(2, -2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz pole tego trójkąta.

Pole trójkąta obliczymy, korzystając ze wzoru $P = \frac{1}{2}a \cdot h$, w którym $a = |AB|$, a h jest odległością punktu C od prostej AB .

$$a = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = x + 1$ i zapisujemy je w postaci ogólnej: $x - y + 1 = 0$.

Obliczamy odległość punktu C od prostej AB :

$$h = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Zatem pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5$.

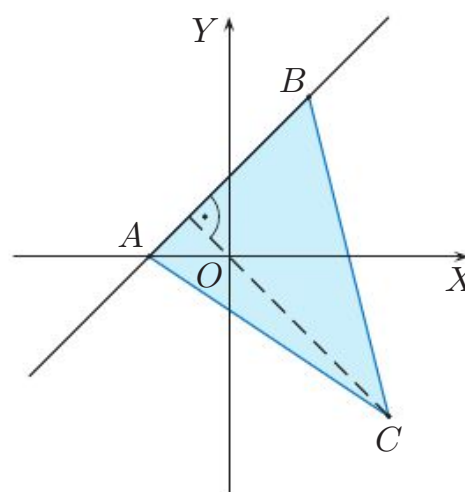
Ćwiczenie 3

Oblicz odległość punktu C od prostej l oraz pole trójkąta ABC , którego wierzchołki A i B są punktami przecięcia prostej l z osiami układu współzrzednych.

- a) $l: y = 3x + 6$, $C(2, -4)$ b) $l: y = -\frac{2}{3}x + 4$, $C(1, -1)$

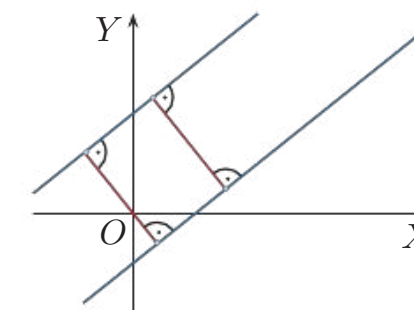
Ćwiczenie 4

Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = \frac{3}{5}x - 6$ z osiami układu współzrzednych. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego wierzchołek D ma współzrzedne $(1, 4)$.



Odległość między dwiema prostymi równoległymi jest równa odległości dowolnego punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej.

Najkrótszy odcinek łączący dwa punkty prostych równoległych musi być prostopadły do tych prostych (dlaczego?).



Przykład 4

Oblicz odległość między prostymi $l: 3x - 2y + 2 = 0$ i $k: 3x - 2y - 11 = 0$.

Dane proste są równoległe. Do równania prostej l podstawiamy $x = 0$ i otrzymujemy $y = 1$, zatem punkt $A(0, 1)$ należy do tej prostej.

Obliczamy odległość punktu A od prostej k :

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 - 11|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Zatem odległość między prostymi l i k jest równa $\sqrt{13}$.

Ćwiczenie 5

Oblicz odległość między prostymi:

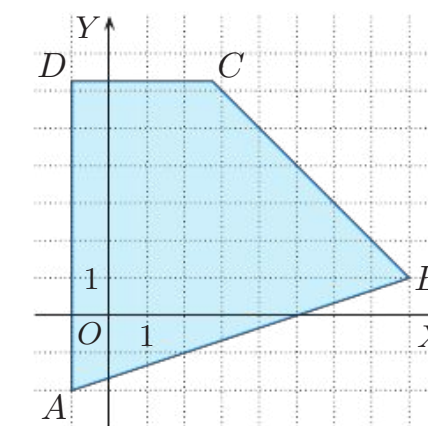
- a) $y = x - 1$ i $y = x + 3$, c) $x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{1}{2}x + 6$,
b) $y = 2x - 1$ i $y = 2x + 2$, d) $3x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{3}{2}x + 1$.

Zadania

1. Oblicz odległości punktów A i B od prostej l . Czy prosta AB jest równoległa do prostej l ?

- a) $A(1, 4)$, $B(5, 5)$, $l: y = \frac{2}{5}x - 6$
b) $A(-4, -2)$, $B(2, 6)$, $l: y = 1\frac{1}{3}x - 5$
c) $A(-5, -1)$, $B(7, -6)$, $l: y = -2,4x$

2. Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-1, -2)$, $B(8, 1)$, $C(\frac{11}{4}, \frac{25}{4})$ i $D(-1, \frac{25}{4})$ (rysunek obok). Oblicz odległości punktu $S(2, 4)$ od boków tego czworokąta.



3. Punkty $A(6, 4)$, $B(-3, 7)$ oraz $C(-2, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz odległość wierzchołka C od prostej AB oraz pole tego równoległoboku.
4. Oblicz pole trójkąta ABC .
- a) $A(-1, 1)$, $B(3, -2)$, $C(2, 3)$ b) $A(-2, 1)$, $B(3, 6)$, $C(2, -1)$

5. Oblicz pole koła stycznego jednocześnie do prostych k i l .
- a) $k: 2x - y + 4 = 0, l: 2x - y - 6 = 0$ b) $k: y = \frac{3}{4}x + 6, l: y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{2}$
6. Sprawdź, czy proste AB i CD są równoległe. Jeśli są, oblicz odległość między nimi oraz oblicz pole czworokąta $ABCD$.
- a) $A(-2, -6), B(6, 2), C(0, 3), D(-3, 0)$
- b) $A(-9, -2), B(3, -6), C(3, 4), D(0, 5)$
7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Odległość między równoległymi prostymi $l_1: y = 2x$ i l_2 jest równa 4. Wyznacz równanie prostej l_2 .

Równanie prostej l_2 ma postać $y = 2x + b$. Dla $x = 0$ otrzymujemy punkt $P(0, b)$ należący do tej prostej. Zapisujemy równanie prostej l_1 w postaci ogólnej: $-2x + y = 0$. Wyznaczamy odległość punktu P od tej prostej:

$$\frac{|-2 \cdot 0 + 1 \cdot b + 0|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5}}$$

Mamy $\frac{|b|}{\sqrt{5}} = 4$, zatem $|b| = 4\sqrt{5}$, czyli równanie prostej l_2 zapisujemy w postaci:

$$y = 2x + 4\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad y = 2x - 4\sqrt{5}$$

Wyznacz równanie prostej l_2 równoległej do prostej l_1 , odległej od niej o d .

a) $l_1: y = x, d = 2$ b) $l_1: y = 2x + 3, d = \sqrt{5}$

8. a) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = 2x - 4$ z osiami układu współrzędnych, a punkt C leży na prostej $y = 2x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABC .
- b) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = \frac{1}{2}x - 6$ z osiami układu współrzędnych, a punkty C i D leżą na prostej $y = \frac{1}{2}x - 1$. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.
9. Punkty przecięcia prostych $y = -\frac{3}{4}x + 3$ i $y = -\frac{3}{4}x - 6$ z osiami układu współrzędnych są wierzchołkami trapezu. Oblicz wysokość tego trapezu oraz długość odcinka łączącego środki jego ramion.
10. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostych k i l oraz równo odległej od nich.
- a) $k: \sqrt{3}x - y + 1 = 0, l: \sqrt{3}x - y + 7 = 0$
- b) $k: 1,4x + 2y + 10 = 0, l: 7x + 10y - 20 = 0$

Dowiedz się więcej

Pole trójkąta w układzie współrzędnych

Twierdzenie

Pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$$

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ (rysunek obok).

Wierzchołki prostokąta $ADEF$ mają współrzędne $A(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_1)$, $E(x_2, y_3)$ i $F(x_1, y_3)$.

Wyznaczamy pole prostokąta $ADEF$:

$$P_{ADEF} = (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) = x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_1$$

Wyznaczamy pola trójkątów T_1, T_2, T_3 :

$$P_1 = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} (x_2 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} (x_2 - x_3)(y_3 - y_2) = \frac{1}{2} (x_2 y_3 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_3 y_2)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) = \frac{1}{2} (x_3 y_3 - x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_1)$$

Zatem pole trójkąta ABC : $P = P_{ADEF} - P_1 - P_2 - P_3$, skąd otrzymujemy (sprawdź):

$$P = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$$

Zauważmy, że wierzchołki trójkąta $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ są położone w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara. Jeśli wierzchołki te byłyby położone w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara, to otrzymalibyśmy wzór: $P = -\frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$.

Oba wzory można zapisać w postaci:

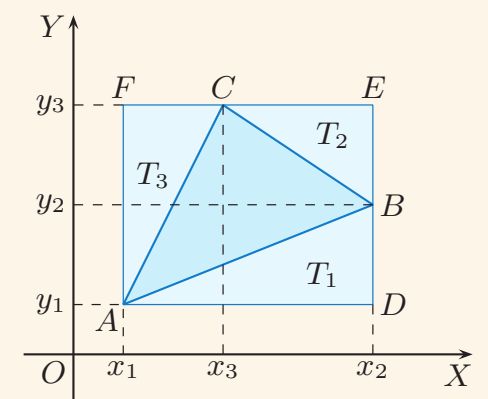
$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$$

1. Korzystając z podanego wzoru, oblicz pole trójkąta ABC .

- a) $A(-3, 3), B(3, -2), C(5, 1)$ c) $A(-3, 1), B(5, -3), C(-5, 6)$
b) $A(1, 6), B(-3, -2), C(6, 3)$ d) $A(7, 9), B(-8, 6), C(2, -7)$

2. Oblicz pola trójkątów ABC, ACD i pole czworokąta $ABCD$.

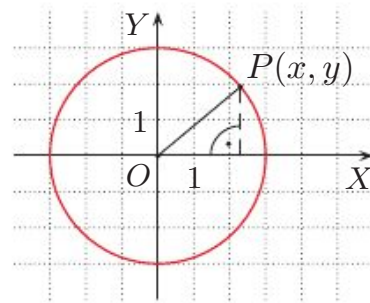
- a) $A(-4, 2), B(2, -1), C(6, 6), D(-2, 5)$
b) $A(-3, -4), B(6, -7), C(3, -2), D(5, 2)$



2.4. Okrąg w układzie współrzędnych

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o promieniu 3 i środku w początku układu współrzędnych. Zauważ, że współrzędne dowolnego punktu $P(x, y)$ tego okręgu spełniają równanie:

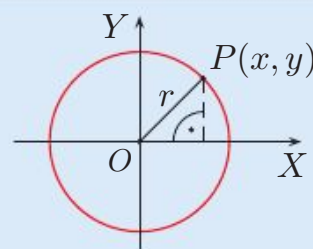
$$x^2 + y^2 = 3^2$$



Równanie okręgu o środku w punkcie (0,0)

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Uwaga. Zamiast „okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$ ” będziemy też pisać krótko: „okrąg $x^2 + y^2 = r^2$ ”.

Ćwiczenie 1

Narysuj okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r . Podaj równanie tego okręgu. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych do niego należy?

- a) $r = 2$ b) $r = 5$ c) $r = \sqrt{2}$ d) $r = \sqrt{5}$

Ćwiczenie 2

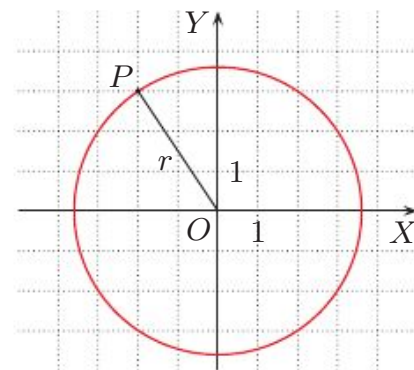
Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$ przechodzącego przez punkt: a) $(0,6)$, b) $(-8,0)$, c) $(\sqrt{3},0)$, d) $(0,5\sqrt{2})$.

Przykład 1

Punkt $P(-2,3)$ leży na okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$. Wyznacz równanie i promień tego okręgu.

Do równania okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ podstawiamy $x = -2$ i $y = 3$: $(-2)^2 + 3^2 = r^2$.

Stąd $r^2 = 13$, czyli równanie okręgu ma postać $x^2 + y^2 = 13$, a jego promień $r = \sqrt{13}$.



Ćwiczenie 3

Okrąg o środku w punkcie $O(0,0)$ przechodzi przez punkt P . Wyznacz równanie i promień tego okręgu.

- a) $P(5, -12)$ b) $P(-3, -3)$ c) $P(-4, -5)$ d) $P(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$

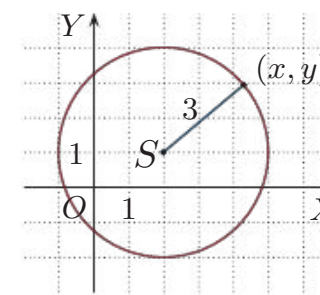
Przykład 2

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S(2,1)$ i promieniu $r = 3$.

Szukany okrąg jest zbiorem wszystkich punktów (x, y) , których odległość od punktu $S(2,1)$ jest równa 3, zatem równanie okręgu ma postać:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 3$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$



Równanie okręgu o środku w punkcie (a,b)

Okrąg o środku w punkcie (a, b) i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Powyższe równanie nazywamy **równaniem okręgu w postaci kanonicznej**.

Ćwiczenie 4

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r , a następnie narysuj ten okrąg.

- a) $S(2,5)$, $r = 3$ b) $S(-7,6)$, $r = 2$ c) $S(-4,-3)$, $r = \sqrt{2}$

Ćwiczenie 5

Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu o podanym równaniu.

- a) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$ d) $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 8$
 b) $(x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{3}{4})^2 = 2\frac{7}{9}$ e) $(x+5)^2 + (y+9)^2 = 225$
 c) $x^2 + (y+\frac{9}{4})^2 = 10$ f) $(x-1\frac{1}{6})^2 + y^2 = 45$

Przykład 3

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(2,-1)$ przechodzącego przez punkt $P(3,1)$.

Obliczamy promień: $r = |SP| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Zatem równanie okręgu ma postać: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$.

Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie S przechodzącego przez punkt P . Narysuj ten okrąg.

- a) $S(0,-1)$, $P(1,1)$ b) $S(-3,-1)$, $P(-1,3)$ c) $S(-1,1)$, $P(2,2)$

Przykład 4

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 10 = 0$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2 \cdot 5y + 25) - 10 - 1 - 25 = 0$$
$$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 36$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $(-1, -5)$ i promieniu 6.

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$

$$(x^2 + 2 \cdot 3x + 9) + (y^2 - 2 \cdot 2y + 4) + 13 - 9 - 4 = 0$$
$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

Powyższe równanie jest prawdziwe tylko dla $x = -3$ i $y = 2$, zatem spełniają je jedynie współrzędne punktu $(-3, 2)$. Nie jest to więc równanie okręgu.

c) $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

$$\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + 3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

Suma kwadratów nie może być liczbą ujemną, więc powyższe równanie jest sprzeczne (zbiór rozwiązań jest pusty) i nie może być równaniem okręgu.

Ćwiczenie 7

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6y + 2x = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 12 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26 = 0$

Zadania

1. Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r .

a) $S(1, 3), r = 2$ b) $S(-6, 2), r = \frac{3}{4}$ c) $S(-5, -1), r = 2\sqrt{5}$

2. Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie S i przechodzi przez punkt P .

a) $S(2, 0), P(1, 3)$ b) $S(2, -3), P(4, -1)$ c) $S(-5, 2), P(-8, -2)$

3. Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB . Narysuj ten okrąg.

a) $A(1, 2), B(7, 2)$ b) $A(-1, -2), B(3, 6)$ c) $A(-3, -4), B(5, 2)$

4. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC .

a) $A(-1, 2), B(6, -2), C(3, 4)$ b) $A(2, 3), B(5, -1), C(-3, -7)$

5. Punkt $S(4, -3)$ jest środkiem okręgu, a punkt $A(2, 1)$ jest środkiem jego cięciwy. Cięciwa ta ma długość równą $2\sqrt{5}$. Wyznacz równanie tego okręgu.

6. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu. Narysuj ten okrąg.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 24x + 8y + 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$

e) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y = 0$

c) $x^2 + y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 24x - 6y + 3 = 0$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie okręgu o promieniu $5\sqrt{2}$ przechodzącego przez punkty $A(-2, 0)$ i $B(2, 2)$.

Środek okręgu leży na symetralnej odcinka AB . Jest to prosta o równaniu $y = -2x + 1$ (sprawdź).

Zatem szukamy punktu $S(x_0, -2x_0 + 1)$ takiego, że $|SA| = 5\sqrt{2}$.

$$|SA| = \sqrt{(x_0 - (-2))^2 + (-2x_0 + 1 - 0)^2}$$

Otrzymujemy więc równanie:

$$\sqrt{(x_0 + 2)^2 + (-2x_0 + 1)^2} = 5\sqrt{2}$$

Równanie jest spełnione, gdy $x_0 = -3$ lub $x_0 = 3$, zatem $S(-3, 7)$ lub $S(3, -5)$. Czyli równanie okręgu ma postać:

$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 50 \quad \text{lub} \quad (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 50$$

Wyznacz równanie okręgu o promieniu r przechodzącego przez punkty A i B .

a) $r = 3\sqrt{5}, A(2, 1), B(2, -5)$

c) $r = 5, A(1, 4), B(3, 0)$

b) $r = 2\sqrt{5}, A(-3, -3), B(3, 3)$

d) $r = \sqrt{26}, A(-3, 1), B(1, 5)$

8. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B , którego środek należy do prostej l .

a) $A(3, -2), B(5, 0), l: y = x + 1$

b) $A(-1, 4), B(2, 1), l: y = 2x + 6$

9. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

a) $A(-3, 2), B(9, 2), C(5, 10)$

c) $A(3, -3), B(9, 3), C(-3, 9)$

b) $A(-3, 4), B(-3, -2), C(6, 1)$

d) $A(-6, -3), B(2, 1), C(1, 4)$

10. Wykaż, że jeżeli $m \neq n$, to równanie $x^2 + y^2 + mx + ny + \frac{mn}{2} = 0$ jest równaniem okręgu. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

Okrąg wpisany w trójkąt

Przykład

Wyznacz współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt o wierzchołkach $A(0, 2)$, $B(7, 3)$ i $C(4, 6)$.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.

Prosta AC jest opisana równaniem $x - y + 2 = 0$, a prosta AB : $x - 7y + 14 = 0$ (sprawdź).

Dwusieczna kąta CAB (półprosta k na rysunku obok) jest zbiorem punktów równo odległych od ramion kąta CAB .

Rozważmy punkt $P(x, y)$ należący do dwusiecznej kąta CAB .

Odległość punktu P od ramienia AC jest równa:

$$\frac{|1 \cdot x + (-1) \cdot y + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}}$$

Odległość punktu P od ramienia AB jest równa:

$$\frac{|1 \cdot x + (-7) \cdot y + 14|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{|x - 7y + 14|}{5\sqrt{2}}$$

Otrzymujemy równanie:

$$\frac{|x - y + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x - 7y + 14|}{5\sqrt{2}}$$

$$5|x - y + 2| = |x - 7y + 14|$$

$$5(x - y + 2) = x - 7y + 14 \quad \text{lub} \quad -5(x - y + 2) = x - 7y + 14$$

$$5x - 5y + 10 = x - 7y + 14 \quad \text{lub} \quad -5x + 5y - 10 = x - 7y + 14$$

$$2y = -4x + 4 \quad \text{lub} \quad 12y = 6x + 24$$

$$y = -2x + 2 \quad \text{lub} \quad y = \frac{1}{2}x + 2$$

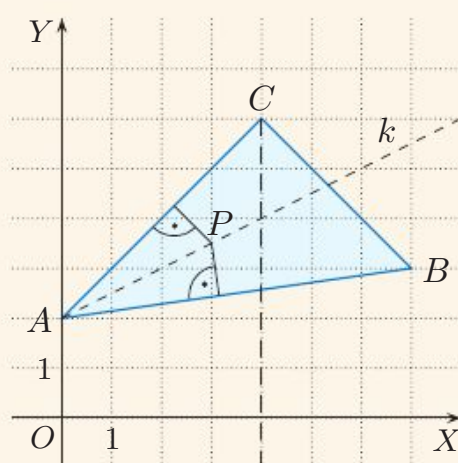
Dwusieczna kąta CAB jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x + 2$ (prosta $y = -2x + 2$ zawiera dwusieczne kątów rozwartych utworzonych przez proste AC i AB).

Dwusieczna kąta ACB jest zawarta w prostej $x = 4$ (sprawdź).

Środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest punktem przecięcia prostych $y = \frac{1}{2}x + 2$ i $x = 4$. Ma on zatem współrzędne $(4, 4)$.

1. Wyznacz współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

a) $A(-2, 4)$, $B(3, -6)$, $C(6, 0)$ b) $A(-12, -1)$, $B(0, -5)$, $C(3, 4)$

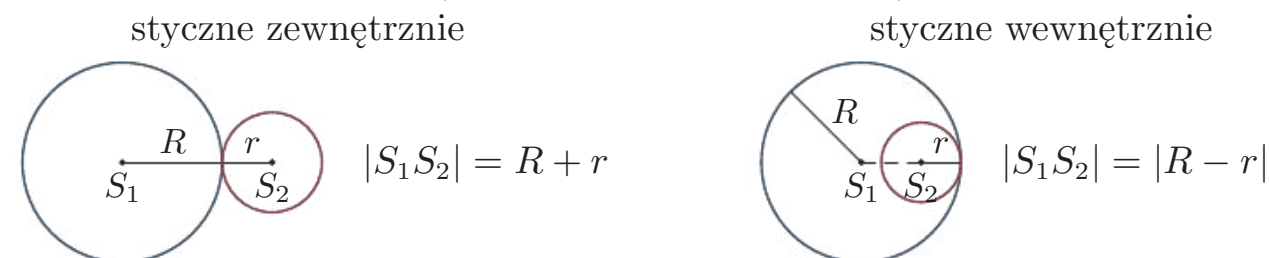


2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Przypomnijmy, jak mogą być położone względem siebie dwa różne okręgi.

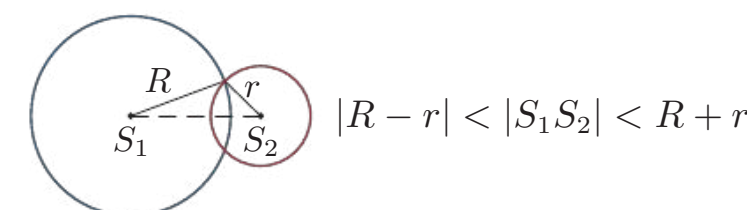
Okręgi styczne

(mają jeden punkt wspólny)



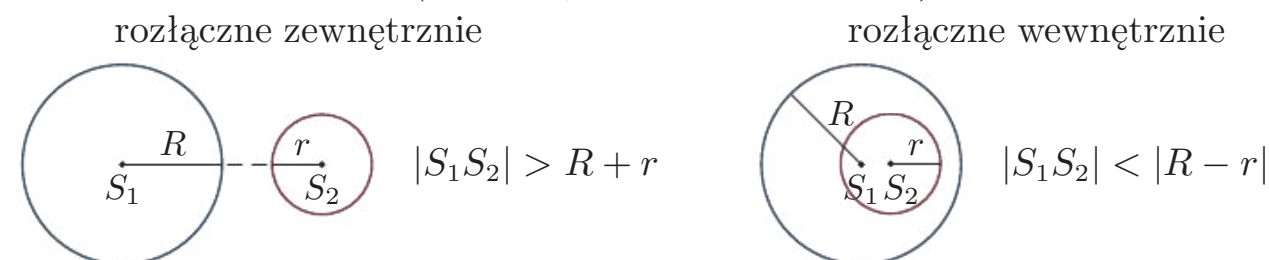
Okręgi przecinające się

(mają dwa punkty wspólne)



Okręgi rozłączne

(nie mają punktów wspólnych)

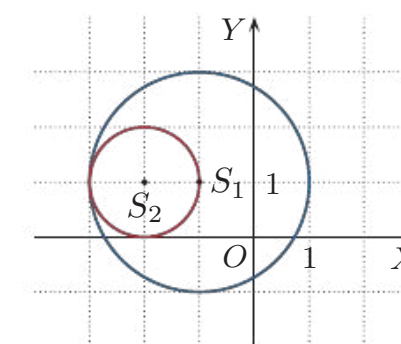


Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono:

- okrąg o środku $S_1(-1, 1)$ i promieniu $R = 2$,
- okrąg o środku $S_2(-2, 1)$ i promieniu $r = 1$.

Zauważ, że $|R - r| = 1 = |S_1S_2|$. Okręgi te mają jeden punkt wspólny (są styczne wewnętrznie).



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu R oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu r . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

- a) $S_1(-1, 0)$, $R = 5$, $S_2(1, 0)$, $r = 2$ c) $S_1(-2, 0)$, $R = 6$, $S_2(-2, 4)$, $r = 2$
b) $S_1(0, 3)$, $R = 4$, $S_2(0, -2)$, $r = 1$ d) $S_1(0, 0)$, $R = \frac{3}{2}$, $S_2(2, 2)$, $r = \frac{3}{2}$

Przykład 2

Ile punktów wspólnych mają okręgi:

$$K_1: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16 \quad \text{ i } \quad K_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4?$$

Środkiem okręgu K_1 jest punkt $S_1(3,4)$, a promień tego okręgu $R = 4$.

Środkiem okręgu K_2 jest punkt $S_2(1,2)$, a promień tego okręgu $r = 2$.

Obliczamy odległość między środkami tych okręgów:

$$|S_1S_2| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$R+r = 6$ oraz $|R-r| = 2$, zatem $|R-r| < |S_1S_2| < R+r$ (gdyż $2 < 2\sqrt{2} < 6$), więc okręgi K_1 i K_2 mają dwa punkty wspólne (przecinają się).

Ćwiczenie 2

Ile punktów wspólnych mają okręgi K_1 i K_2 ?

- $K_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 20$, $K_2: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 5$
- $K_1: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 49$, $K_2: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$
- $K_1: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$, $K_2: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$
- $K_1: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 40$, $K_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$

Przykład 3

Dane są okrąg $K_1: (x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$ oraz okrąg K_2 o środku w punkcie $S_2(5,4)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają jeden punkt wspólny?

Środkiem okręgu K_1 jest punkt $S_1(-3,-2)$, a promień tego okręgu $R = 5$.

Obliczamy odległość między środkami okręgów K_1 i K_2 :

$$|S_1S_2| = \sqrt{(5-(-3))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{64+36} = 10$$

Dane okręgi mają jeden punkt wspólny, gdy:

- są styczne zewnętrznie, czyli $|S_1S_2| = 10 = 5 + r$, zatem $r = 5$,
lub
- są styczne wewnętrznie, czyli $|S_1S_2| = 10 = |5 - r|$, zatem $r = 15$.

Ćwiczenie 3

Dane są okrąg $K_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$ oraz okrąg K_2 o środku w punkcie S_2 i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają jeden punkt wspólny?

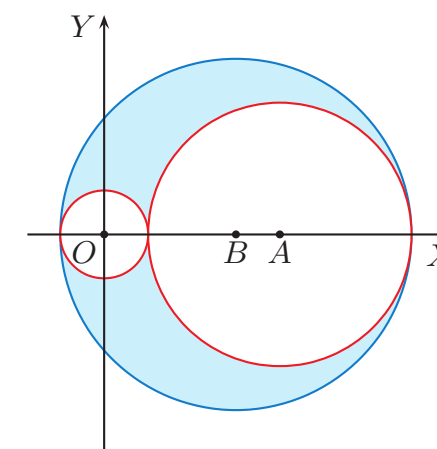
- $S_2(4,2)$
- $S_2(-4,4)$

Ćwiczenie 4

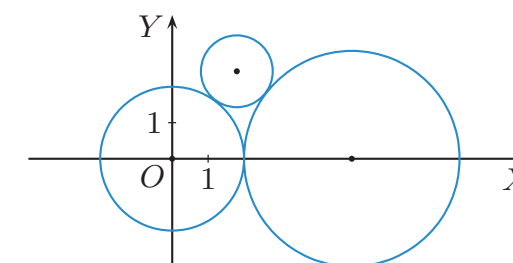
Dane są okrąg $(x+7)^2 + (y-5)^2 = 25$ oraz okrąg o środku w punkcie $S(5,-4)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają dwa punkty wspólne?

Zadania

- Dwa okręgi o środkach $O(0,0)$ i $A(11,0)$ są styczne zewnętrznie. Oba te okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku $B(8,0)$ (rysunek obok). Oblicz promienie tych trzech okręgów i pole zacieniowanego obszaru.
- Dane są okrąg $x^2 + y^2 = 16$ i okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach $A(0,4)$ i $B(4,0)$. Oblicz pola kół ograniczonych przez te okręgi i pole części wspólnej tych kół.



- Dane są okręgi K_1 i K_2 . Oblicz odległość między środkami tych okręgów i określ ich wzajemne położenie.
 - $K_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$, $K_2: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 16$
 - $K_1: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$, $K_2: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 36$
 - $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 90$, $K_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$
 - $K_1: (x+4)^2 + (y-5)^2 = 84$, $K_2: (x+5)^2 + (y+2)^2 = 16$
 - $K_1: (x+1)^2 + (y-8)^2 = 49$, $K_2: (x-1)^2 + (y-6)^2 = 4$
 - $K_1: (x-7)^2 + (y-2)^2 = 49$, $K_2: (x+5)^2 + (y+3)^2 = 25$
- Oblicz odległość między środkami okręgów K_1 i K_2 . Dla jakich wartości r , gdzie $r > 0$, okręgi te mają jeden punkt wspólny, a dla jakich – dwa punkty wspólne?
 - $K_1: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 64$, $K_2: (x+7)^2 + (y-4)^2 = r^2$
 - $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$, $K_2: (x-3)^2 + (y-3)^2 = r^2$
 - $K_1: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 49$, $K_2: (x+6)^2 + (y-1)^2 = r^2$
- Okręgi o promieniach 1, 2 i 3, parami styczne zewnętrznie, są położone w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wyznacz współrzędne środka najmniejszego okręgu.



- Punkty A , B i C są środkami trzech okręgów parami stycznych zewnętrznie. Oblicz odległości między środkami tych okręgów i ich promienie.
 - $A(0,0)$, $B(7,0)$, $C\left(\frac{30}{7}, \frac{12\sqrt{6}}{7}\right)$
 - $A(-6,0)$, $B(4,0)$, $C\left(\frac{2}{5}, \frac{24}{5}\right)$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Określ wzajemne położenie okręgów:

$$K_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0 \quad \text{oraz} \quad K_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$$

Zapisujemy równania okręgów K_1 i K_2 w postaci kanonicznej i odczytujemy współrzędne ich środków oraz promienie.

$$K_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 2 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 8, \quad \text{środek } S_1(-1, 3), \quad \text{promień } r_1 = 2\sqrt{2}$$

$$K_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 2 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 18, \quad \text{środek } S_2(4, -2), \quad \text{promień } r_2 = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy odległość między środkami okręgów: $|S_1S_2| = 5\sqrt{2}$.

$|S_1S_2| = r_1 + r_2$, zatem okręgi K_1 i K_2 są styczne zewnętrznie.

Określ wzajemne położenie okręgów K_1 i K_2 .

a) $K_1: x^2 + y^2 + 6x + 2y - 3 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$

b) $K_1: x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$

c) $K_1: x^2 + y^2 + 4x - 16y - 30 = 0, \quad K_2: x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$

8. Podaj liczbę punktów wspólnych okręgu opisanego podanym równaniem z okręgiem o środku $S(1, 3)$ i promieniu r w zależności od tego promienia.

a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

b) $x^2 + y^2 - 14x + 10y - 26 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 8 = 0$

9. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu 1 (rysunek obok) jest styczny wewnętrznie do okręgów:

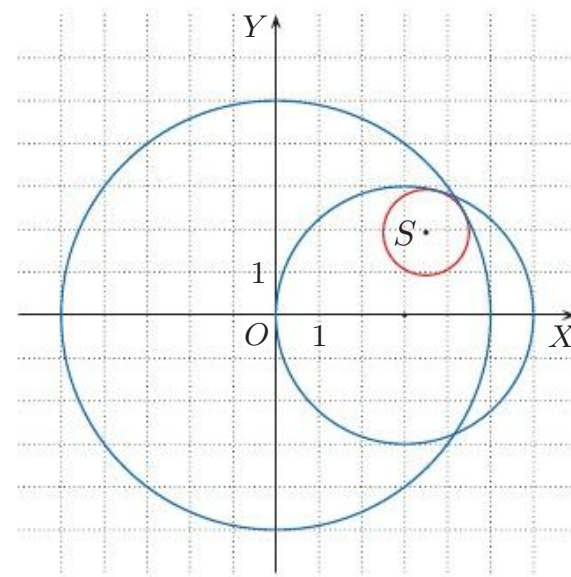
$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{oraz} \quad (x - 3)^2 + y^2 = 9$$

Wyznacz współrzędne punktu S .

10. Wyznacz równanie okręgu o promieniu $r = 1$ stycznego wewnętrznie do okręgów: o środku S_1 i promieniu r_1 oraz o środku S_2 i promieniu r_2 .

a) $S_1(0, 3), r_1 = 5, S_2(6, 3), r_2 = 3$

b) $S_1(0, 0), r_1 = 6, S_2(4, 4), r_2 = 2$



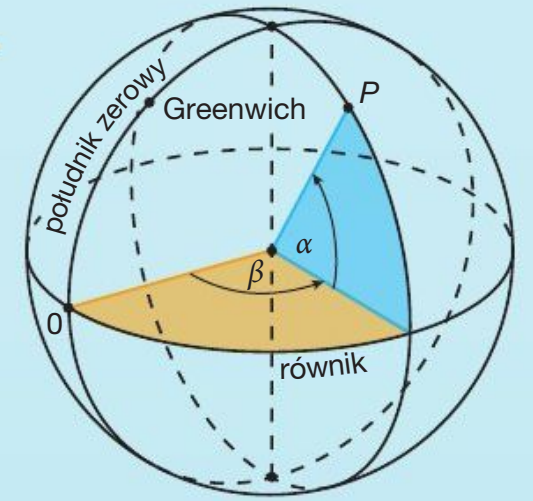
Współrzędne geograficzne

Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego:

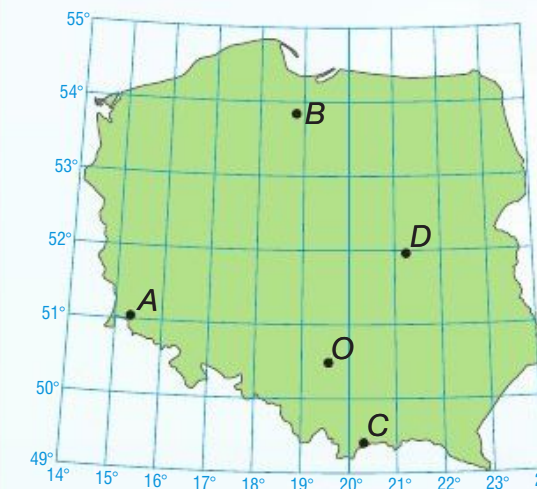
szerokość geograficzną (kąt α mierzony od równika w kierunku północnym albo południowym),

długość geograficzną (kąt β mierzony od południka zerowego w kierunku wschodnim albo zachodnim).

Tak określony układ współrzędnych wykorzystuje się przy tworzeniu map.



Na mapie punkt O oznacza położenie Zamku Ogrodzieniec ($50^{\circ}27'N, 19^{\circ}33'E$), pokazanego na zdjęciu obok.



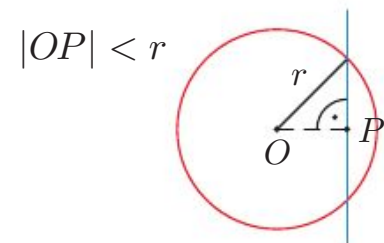
1 Punkty A, B, C, D odpowiadają położeniu czterech zamków pokazanych na zdjęciach. Dopasuj każdy punkt do właściwego zamku.



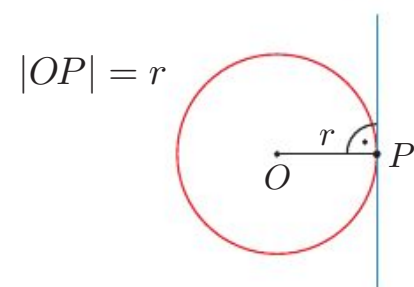
2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Przypomnijmy, że okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

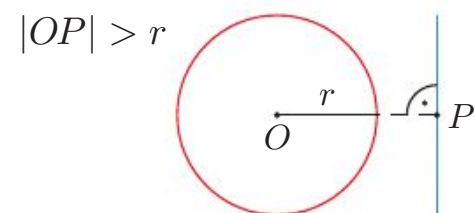
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.



Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia. Odcinek łączący punkty, w których sieczna przecina okrąg, nazywamy **cięciwą**.



Prostą, która ma z okręgiem jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.



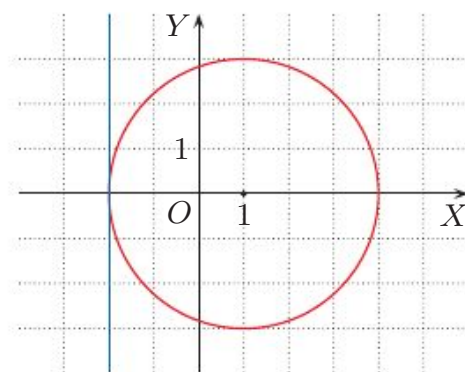
Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Przykład 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie $(1, 0)$ ma prosta $x = -2$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Dana prosta:

- ma jeden punkt wspólny z okręgiem dla $r = 3$ (rysunek obok),
- ma dwa punkty wspólne z okręgiem dla $r > 3$,
- nie ma punktów wspólnych z okręgiem dla $0 < r < 3$.

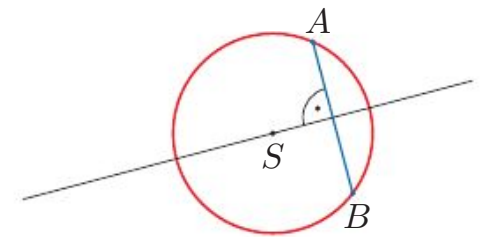


Ćwiczenie 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S ma prosta k w zależności od promienia r tego okręgu?

- | | |
|-----------------------------|---|
| a) $S(2, -2)$, $k: y = 2$ | c) $S(-2, 2)$, $k: x = \sqrt{3}$ |
| b) $S(-1, 3)$, $k: y = -4$ | d) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $k: x = 1 - \sqrt{2}$ |

Przypomnijmy, że jeśli odcinek AB jest cięciwą okręgu, to środek okręgu należy do symetralnej tej cięciwy.



Przykład 2

Dane są okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 16$ i prosta $l: x = 3$. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty ich przecięcia.

Niech $A(3, y_1)$, $B(3, y_2)$ będą punktami przecięcia okręgu z prostą $x = 3$ (rysunek obok). Współrzędne y_1 i y_2 wyznaczamy, podstawiając $x = 3$ do równania okręgu:

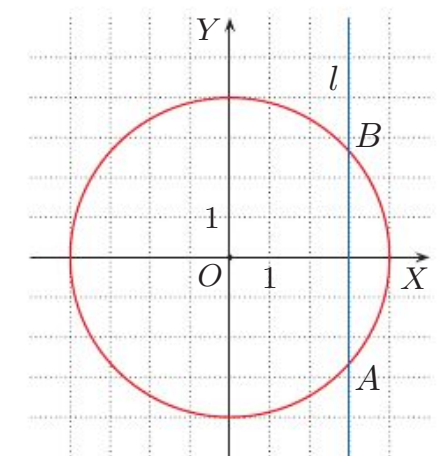
$$3^2 + y^2 = 16$$

$$y^2 = 7$$

$$y_1 = -\sqrt{7}, y_2 = \sqrt{7}$$

Zatem długość cięciwy jest równa:

$$|AB| = 2\sqrt{7}$$



Ćwiczenie 2

Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + y^2 = 25$.

- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| a) $l: x = 4$ | b) $l: x = -1$ | c) $l: y = -3$ |
|---------------|----------------|----------------|

Przykład 3

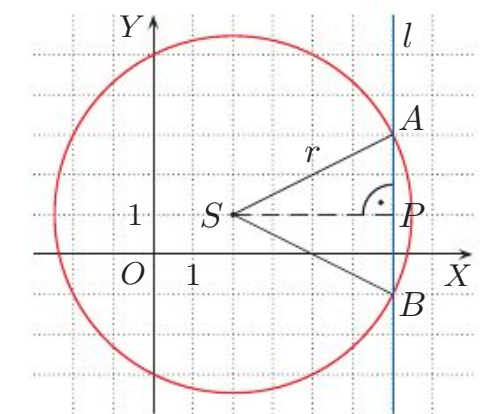
Punkty przecięcia okręgu o środku $S(2, 1)$ i prostej $l: x = 6$ są końcami cięciwy o długości 4. Wyznacz równanie tego okręgu.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Punkt P ma współrzędne $(6, 1)$, więc $|SP| = 4$ oraz $|AP| = 2$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SPA i obliczamy kwadrat promienia okręgu:

$$r^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

Zatem równanie okręgu ma postać:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$$



Ćwiczenie 3

Cięciwa o długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o środku w punkcie S . Wyznacz równanie tego okręgu.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| a) $l: x = 3$, $S(-1, -2)$ | b) $l: y = -2$, $S(4, 1)$ |
|-----------------------------|----------------------------|

Przykład 4

Ile punktów wspólnych z okręgiem o równaniu $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 10$ ma prosta $l: x - 3y + 3 = 0$?

Promień okręgu jest równy $\sqrt{10}$, a środkiem okręgu jest punkt $S(4, -1)$. Obliczamy odległość punktu S od prostej l :

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi okręgu, więc okrąg i prosta są styczne – mają jeden punkt wspólny.

Ćwiczenie 4

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 4 ma prosta l ?

- a) $S(3, 4)$, $l: 12x + 5y - 4 = 0$ c) $S(-3, 2)$, $l: 4x + 3y + 6 = 0$
b) $S(7, 4)$, $l: 3x + 4y - 12 = 0$ d) $S(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $l: x + y = 0$

Przykład 5

Wyznacz równania stycznych do okręgu o środku w punkcie $S(3, 2)$ i promieniu 2 przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Równanie stycznej $y = ax$ zapisujemy w postaci ogólnej $ax - y = 0$.

Odległość środka okręgu od stycznej jest równa promieniowi okręgu:

$$\frac{|a \cdot 3 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$|3a - 2| = 2\sqrt{a^2 + 1} \quad \text{Obie strony równania są dodatnie.}$$

Obie strony równania podnosimy do kwadratu:

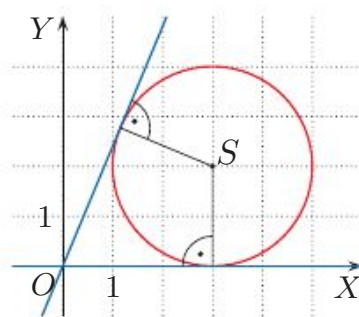
$$9a^2 - 12a + 4 = 4a^2 + 4$$

$$5a^2 - 12a = 0$$

$$a(5a - 12) = 0$$

$$a = 0 \text{ lub } a = \frac{12}{5}$$

Równania szukanych stycznych: $y = 0$ oraz $y = \frac{12}{5}x$.



Ćwiczenie 5

Z punktu A poprowadzono styczne do okręgu o środku w punkcie S i promieniu r . Wyznacz równania tych stycznych i oblicz odległość punktu A od punktów styczności.

- a) $A(4, 1)$, $S(0, 2)$, $r = 1$ c) $A(-3, -2)$, $S(2, 3)$, $r = \sqrt{10}$
b) $A(-1, 3)$, $S(6, 2)$, $r = 5$ d) $A(-3, 1)$, $S(2, 0)$, $r = \sqrt{13}$

Zadania

1. Okrąg o środku $S(2, 0)$ przecina prostą $x = 4$ w punktach A i B . Wyznacz równanie tego okręgu oraz oblicz długość łuku AB .

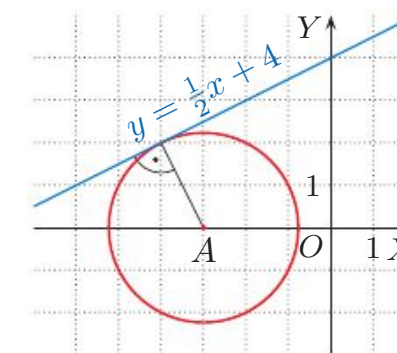
- a) $A(4, 2)$, $B(4, -2)$ b) $A(4, 2\sqrt{3})$, $B(4, -2\sqrt{3})$

2. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 100$ w punktach A i B . Wyznacz równanie tej prostej.

- a) $|AB| = 12$ b) $|AB| = 10\sqrt{2}$ c) $|AB| = 10$ d) $|AB| = 20$

3. Prosta l jest styczna do okręgu, którego środkiem jest punkt A . Oblicz promień tego okręgu.

- a) $l: y = \frac{1}{2}x + 4$, $A(-3, 0)$ (rysunek obok)
b) $l: 3x + 4y - 5 = 0$, $A(-4, -2)$
c) $l: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $A(2, 1)$
d) $l: y = 3x - 1$, $A(-5, 4)$



4. Oblicz odległość punktu S od prostej o podanym równaniu. Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 3 ma ta prosta?

- a) $S(1, 3)$, $2x + y = 0$ c) $S(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $3x + y - 1 = 0$
b) $S(-7, 2)$, $x - 2y + 1 = 0$ d) $S(-8\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$, $x - 7y + 7 = 0$

5. Wyznacz równanie okręgu o środku S stycznego do prostej k .

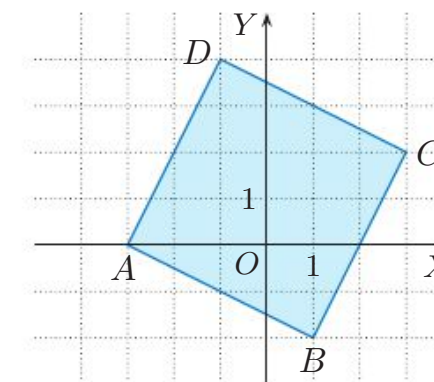
- a) $S(5, 3)$, $k: y = -\frac{1}{2}x + 4$ b) $S(-4, 3)$, $k: y = \frac{1}{3}x + 1$

6. Określ liczbę punktów wspólnych podanej prostej z okręgiem o środku w punkcie S w zależności od promienia r tego okręgu.

- a) $3x + 4y - 1 = 0$, $S(1, 2)$
b) $\sqrt{2}x - y = 0$, $S(6, 0)$
c) $0,5x - y - 1,5 = 0$, $S(-5, 1)$

7. Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(-3, 0)$, $B(1, -2)$, $C(3, 2)$ i $D(-1, 4)$ (rysunek obok). Wyznacz równanie okręgu:

- a) wpisanego w ten kwadrat,
b) opisanego na tym kwadracie.



8. Punkty A i B są wierzchołkami kwadratu wpisanego w okrąg o środku $S(3, 2)$. Wyznacz równania prostych zawierających boki tego kwadratu.

- a) $A(9, 2)$, $B(3, 8)$ b) $A(1, -4)$, $B(9, 0)$

9. Oś OX przecina okrąg o promieniu $2\sqrt{2}$ w punktach $A(5, 0)$ i B . Cięciwa AB ma długość 4. Oblicz współrzędne środka okręgu.
10. Okrąg o środku w punkcie $S(3, 2)$ ma z prostą $x - y - 3 = 0$ punkty wspólne A i B . Wiadomo, że $|AB| = 6\sqrt{2}$. Wyznacz równanie tego okręgu.
11. Wyznacz równanie prostej, która w przecięciu z okręgiem O wyznacza cięciwę o środku w punkcie $A(1, -3)$.
 a) $O: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ b) $O: (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$
12. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkt $A(-2, 1)$ stycznych do podanego okręgu.
 a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ c) $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 5$
13. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(8, 8)$ oraz:
 a) stycznego do osi OX w punkcie $B(4, 0)$,
 b) stycznego do osi OY w punkcie $B(0, 12)$.
14. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, która w przecięciu z okręgiem $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 10$ wyznacza cięciwę długości $2\sqrt{5}$.
15. Wyznacz równania stycznych do okręgu $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5$:
 a) przechodzących przez początek układu współrzędnych,
 b) równoległych do prostej $y = -2x$.
16. Sprawdź, czy równanie $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ jest równaniem okręgu. Jeżeli jest, wyznacz równania stycznych do tego okręgu poprowadzonych z punktu $A(-3, -2)$.
17. Sprawdź, czy równanie $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ jest równaniem okręgu. Jeżeli jest, oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty styczności stycznych poprowadzonych do tego okręgu z punktu $A(-4, 1)$.
18. Wyznacz równanie okręgu o promieniu $\sqrt{10}$ stycznego do prostej $y = 3x - 1$ w punkcie $A(1, 2)$.
19. Dany jest okrąg przechodzący przez punkt $A(-3, 2)$ i styczny do prostej $x - y + 1 = 0$. Środek tego okręgu leży na prostej $4x + y = 0$. Wyznacz współrzędne tego środka.
- 20.* Wyznacz równania wspólnych stycznych do okręgów: $x^2 + y^2 = 5$ oraz $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 20$.

R 2.7. Układy równań drugiego stopnia

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

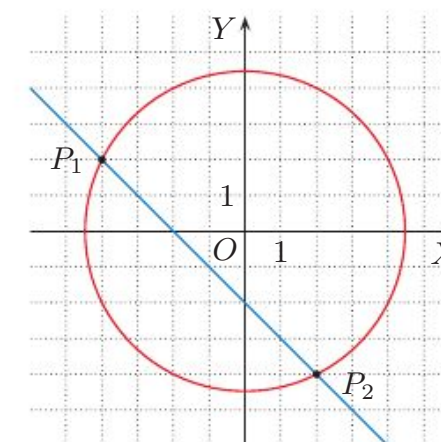
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $y = -x - 2$ i podstawiamy do pierwszego równania:

$$\begin{aligned} x^2 + (-x - 2)^2 &= 20 \\ 2x^2 + 4x - 16 &= 0 \quad / : 2 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ x &= -4 \quad \text{lub} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Okrąg $x^2 + y^2 = 20$ i prosta $x + y + 2 = 0$ mają dwa punkty wspólne: $P_1(-4, 2)$ i $P_2(2, -4)$.

Układ równań, z których jedno jest równaniem okręgu, a drugie jest równaniem prostej, może mieć:

- dwa rozwiązania – prosta jest sieczną okręgu,
- jedno rozwiązanie – prosta jest styczna do okręgu,
- zero rozwiązań – prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x - 4 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 = 9 \\ y = 5 - x \end{cases}$$

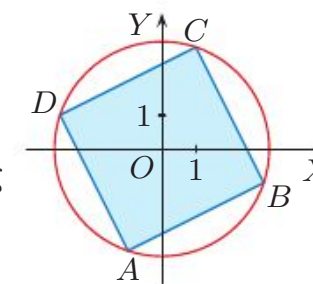
Ćwiczenie 2

Prosta l przecina okrąg $x^2 + y^2 = 20$ w punktach A i B . Oblicz długość cięciwy AB .

$$\text{a) } l: y = -x - 6 \quad \text{b) } l: y = 3x - 10$$

Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono kwadrat wpisany w okrąg $x^2 + y^2 = 10$. Bok AB jest zawarty w prostej $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.



Przykład 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-3)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

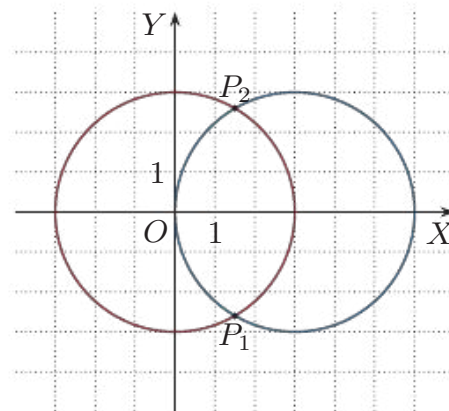
$$\begin{aligned} x^2 - (x-3)^2 &= 0 \\ x^2 - x^2 + 6x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Stąd $6x = 9$, czyli $x = \frac{3}{2}$. Obliczamy y :

$$\begin{aligned} y^2 &= 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \\ y &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{lub} \quad y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Okrąg $x^2 + y^2 = 9$ oraz okrąg $(x-3)^2 + y^2 = 9$ mają dwa punkty wspólne: $P_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ i $P_2\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Układ równań, z których oba są równaniami okręgów, może mieć:

- nieskończenie wiele rozwiązań – okręgi się pokrywają,
- dwa rozwiązania – okręgi się przecinają,
- jedno rozwiązanie – okręgi są styczne,
- zero rozwiązań – okręgi są rozłączne.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-4)^2 = 9 \end{cases} & \text{c)} \quad & \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 9 \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż układ równań.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases} & \text{c)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = |x| \end{cases} \end{aligned}$$

2. a) W okrąg $x^2 + y^2 = 20$ wpisano trójkąt równoramienny prostokątny. Wierzchołek kąta prostego tego trójkąta ma współrzędne $(2, 4)$. Wyznacz współrzędne jego pozostałych wierzchołków.

b) W okrąg $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 20$ wpisano trójkąt równoramienny, którego podstawa jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

3. a) Jeden z boków prostokąta wpisanego w okrąg $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$ jest zawarty w prostej $y = x + 4$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta.

b) Bok kwadratu jest zawarty w prostej $y = 2x - 6$, a jego przekątne przecinają się w punkcie $S(3, 5)$. Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie i współrzędne jego wierzchołków.

4. Jedna z przekątnych kwadratu wpisanego w okrąg $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$ jest zawarta w prostej $3x + 2y - 8 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu oraz oblicz jego pole.

5. Sprawdź, czy podane równanie drugiego stopnia jest równaniem okręgu. Jeśli jest, oblicz długość cięciwy tego okręgu zawartej w prostej l .

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, $l: y = x - 2$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$, $l: y = -2x + 2$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$, $l: y = x + 2$

6. Oblicz długość wspólnej cięciwy okręgów K_1 i K_2 . Wykonaj rysunek.

a) $K_1: (x+4)^2 + y^2 = 25$, $K_2: (x-4)^2 + y^2 = 25$

b) $K_1: x^2 + y^2 = 10$, $K_2: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$

7. Oblicz pole czworokąta S_1AS_2B , gdzie S_1 i S_2 są odpowiednio środkami okręgów K_1 i K_2 , natomiast A i B są punktami wspólnymi tych okręgów.

a) $K_1: x^2 + y^2 = 10$, $K_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 10$

b) $K_1: x^2 + (y+2)^2 = 5$, $K_2: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 45$

8. Rozwiąż układ równań.

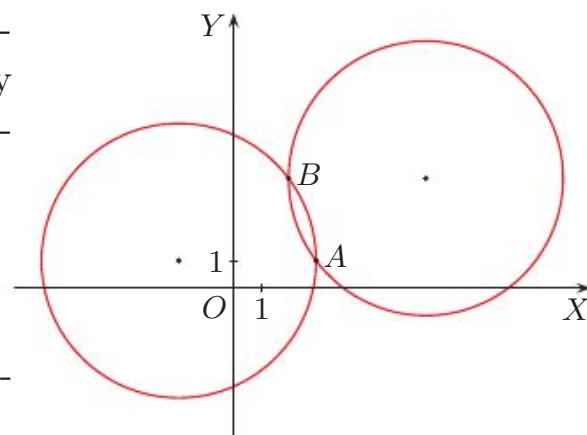
$$\text{a)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + 8y = -15 \end{cases} \quad \text{c)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \quad \text{e)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 8y = -7 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 3 \end{cases} \quad \text{d)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0 \\ x^2 + y^2 - 8y = 0 \end{cases} \quad \text{f)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 8y = -6 \\ x^2 + y^2 + 2y = 4 \end{cases}$$

9. Wyznacz równania okręgów o promieniu 5 przechodzących przez punkty $A(3,1)$ i $B(2,4)$ (rysunek obok). Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (3-a)^2 + (1-b)^2 = 25 \\ (2-a)^2 + (4-b)^2 = 25 \end{cases}$$

Rozwiązania tego układu są współrzędnymi środków szukanych okręgów.



10. Wyznacz równania okręgów o promieniu r przechodzących przez punkty A i B .

- a) $r = \sqrt{5}$, $A(4,2)$, $B(1,3)$ c) $r = 3$, $A(0,0)$, $B(1,1)$
b) $r = 2$, $A(1,2)$, $B(-1,0)$ d) $r = \sqrt{13}$, $A(5,2)$, $B(0,1)$

11. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ile rozwiązań w zależności od parametru m ma układ równań?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4\frac{1}{2} = 0 \\ y = x + m \end{cases}$$

Podstawiamy $y = x + m$ do pierwszego równania:

$$\begin{aligned} x^2 + (x+m)^2 - 2x - 4(x+m) + 4\frac{1}{2} &= 0 \\ x^2 + x^2 + 2mx + m^2 - 2x - 4x - 4m + 4\frac{1}{2} &= 0 \\ 2x^2 + (2m-6)x + m^2 - 4m + 4\frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Wyznaczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego. Liczba rozwiązań układu równań jest równa liczbie rozwiązań tego równania.

$$\Delta = (2m-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - 4m + 4\frac{1}{2}) = -4m^2 + 8m = -4m(m-2)$$

Zatem:

- $\Delta = 0$ dla $m \in \{0, 2\}$ – układ ma jedno rozwiązanie,
- $\Delta > 0$ dla $m \in (0; 2)$ – układ ma dwa rozwiązania,
- $\Delta < 0$ dla $m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ – układ nie ma rozwiązań.

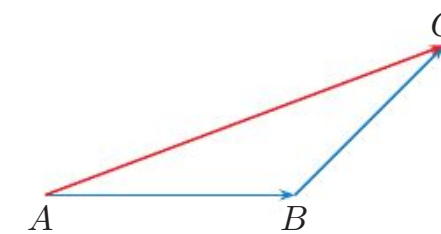
Ile rozwiązań w zależności od parametru m ma układ równań?

- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + m \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = mx - 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0 \\ y = -2x + m \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = -x + m \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y = m^2 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$

R 2.8. Działania na wektorach

Na rysunku obok przedstawiono wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$. O wektorze $\overrightarrow{AC}$ mówimy, że jest sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$, i piszemy:

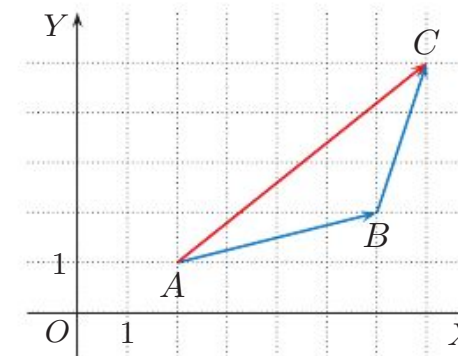
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



Przykład 1

Suma wektorów $\overrightarrow{AB} = [4, 1]$ oraz $\overrightarrow{BC} = [1, 3]$ (rysunek obok) jest równa:

$$\overrightarrow{AC} = [4 + 1, 1 + 3] = [5, 4]$$



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$. Podaj współrzędne tych wektorów.

- a) $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$, $C(4, 0)$ b) $A(3, 4)$, $B(1, -2)$, $C(-4, 1)$

Definicja

Sumą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ nazywamy wektor:

$$\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$$

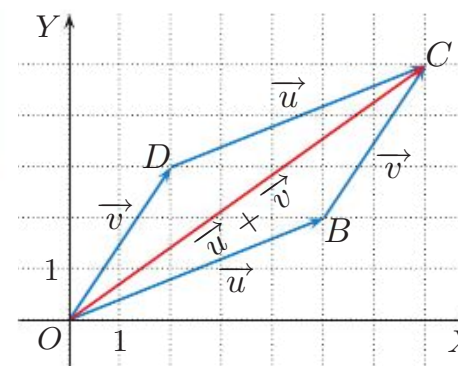
Suma wektorów $\vec{u} = [5, 2]$, $\vec{v} = [2, 3]$ (rysunek obok) jest równa:

$$\vec{u} + \vec{v} = [5 + 2, 2 + 3] = [7, 5]$$

Wektor $\vec{u} + \vec{v}$ odpowiada przekątnej OC równoległoboku $OBCD$.

Zauważ, że dodawanie wektorów jest przemienne: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Aby dodać kilka wektorów geometrycznie, pierwszy z nich zaczepiamy w dowolnym punkcie układu współrzędnych i rysujemy je w ten sposób, aby koniec jednego wektora był początkiem następnego. Początek sumy leży w początku pierwszego z dodawanych wektorów, a koniec – w końcu ostatniego.



Ćwiczenie 2

Narysuj wektor $\vec{u} + \vec{v}$. Podaj jego współrzędne.

- a) $\vec{u} = [3, -2]$, $\vec{v} = [2, 6]$ c) $\vec{u} = [2, 3]$, $\vec{v} = [4, -4]$
b) $\vec{u} = [-5, -4]$, $\vec{v} = [-2, 3]$ d) $\vec{u} = [4, -2]$, $\vec{v} = [-6, 3]$

Przykład 2

Dane są wektory:

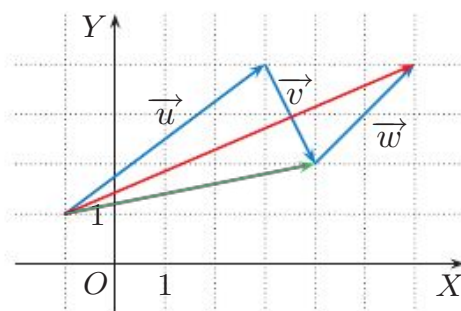
$$\vec{u} = [4, 3], \vec{v} = [1, -2], \vec{w} = [2, 2]$$

- Suma wektorów $\vec{u} + \vec{v}$ (kolor zielony):

$$\vec{u} + \vec{v} = [4, 3] + [1, -2] = [5, 1]$$

- Suma wektorów $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ (kolor czerwony):

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = [4, 3] + [1, -2] + [2, 2] = [7, 3]$$

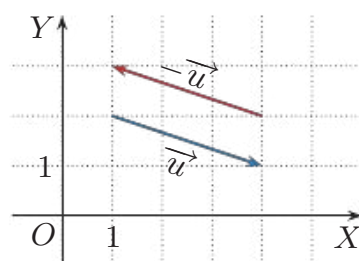


Ćwiczenie 3

Wyznacz geometrycznie sumę wektorów $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ i podaj jej współrzędne.

- a) $\vec{u} = [2, 1], \vec{v} = [1, 3], \vec{w} = [2, -6]$ b) $\vec{u} = [-3, 3], \vec{v} = [6, 2], \vec{w} = [2, 1]$

Przypomnijmy, że wektor przeciwny do wektora $\vec{u}$ oznaczamy $-\vec{u}$. Jeśli $\vec{u} = [a, b]$, to $-\vec{u} = [-a, -b]$.



Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wektory $\vec{u} = [3, -1]$ oraz $-\vec{u} = [-3, 1]$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz wektory $-\vec{u}$ i $-\vec{v}$ przeciwne do wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Wyznacz geometrycznie sumę wektorów $-\vec{u}$ i $-\vec{v}$ i podaj jej współrzędne.

- a) $\vec{u} = [2, 3], \vec{v} = [4, 2]$ b) $\vec{u} = [-4, -2], \vec{v} = [4, -3]$

Definicja

Różnicą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ nazywamy wektor:

$$\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$$

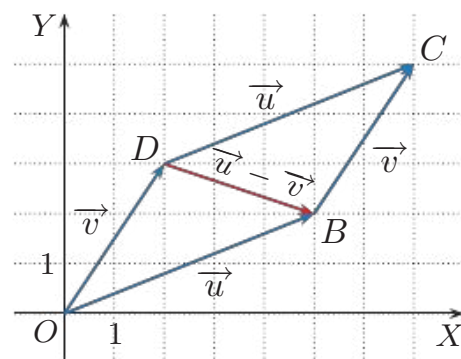
Zauważ, że różnica wektorów $\vec{u} - \vec{v}$ jest równa sumie wektora $\vec{u}$ i wektora $-\vec{v}$ (przeciwego do wektora $\vec{v}$).

Na rysunku obok przedstawiono wektory:

$$\vec{u} = [5, 2], \vec{v} = [2, 3]$$

oraz ich różnicę $\vec{u} - \vec{v} = [3, -1]$.

Wektor $\vec{u} - \vec{v}$ odpowiada przekątnej DB równoległoboku $OBCD$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz różnice wektorów $\vec{u} - \vec{v}$ oraz $\vec{v} - \vec{u}$.

- a) $\vec{u} = [3, -2], \vec{v} = [2, 6]$ b) $\vec{u} = [-5, -4], \vec{v} = [-2, 3]$

Definicja

Iloczynem wektora $\vec{u} = [a, b]$ **przez liczbę** $\alpha \in \mathbb{R}$ **nazywamy wektor:**

$$\alpha \vec{u} = [\alpha a, \alpha b]$$

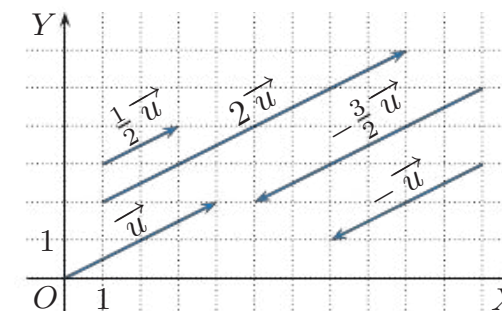
Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wektor $\vec{u} = [4, 2]$ oraz wektory:

$$\frac{1}{2} \vec{u} = [2, 1], \quad 2 \vec{u} = [8, 4]$$

$$-\vec{u} = [-4, -2]$$

$$-\frac{3}{2} \vec{u} = [-6, -3]$$



Ćwiczenie 6

Dane są wektory $\vec{u} = [2, -1]$ i $\vec{v} = [-3, -2]$. Wyznacz wektor $\vec{w}$ i go narysuj.

a) $\vec{w} = 2 \vec{u} + 3 \vec{v}$

c) $\vec{w} = -4 \vec{u} + 2 \vec{v}$

b) $\vec{w} = 3 \vec{u} - \vec{v}$

d) $\vec{w} = \frac{1}{2} \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v}$

Definicja

Wektor $[0, 0]$ nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\vec{0}$.

Przykład 5

Dane są wektory $\vec{u} = [3, -2]$ i $\vec{v} = [-12, 8]$. Wyznacz liczbę α , dla której zachodzi równość $\alpha \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$.

$$\alpha[3, -2] - [-12, 8] = [0, 0]$$

$$[3\alpha, -2\alpha] = [-12, 8]$$

Stąd otrzymujemy $3\alpha = -12$ oraz $-2\alpha = 8$. Obie równości są spełnione dla $\alpha = -4$.

Ćwiczenie 7

Wyznacz liczbę α , dla której zachodzi równość $\alpha \vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

a) $\vec{u} = [2, -3], \vec{v} = [-6, 9]$

b) $\vec{u} = [-12, 9], \vec{v} = [-16, 12]$

Jeśli niezerowe wektory są równoległe (zawierają się w prostych równoległych), to mówimy, że mają ten sam **kierunek**.

Przyjmujemy, że wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora.

Twierdzenie

Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają ten sam kierunek wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $\alpha \neq 0$, że $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.

Przykład 6

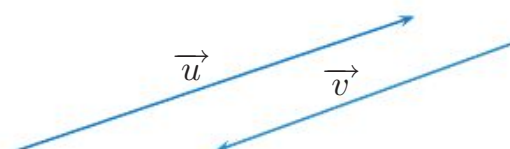
Dane są wektory $\vec{u} = [12, 8]$ i $\vec{v} = [9, 6]$. Wektory te mają ten sam kierunek, gdyż $\vec{u} = \frac{4}{3} \vec{v}$.

Rozpatrzmy niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, dla których istnieje liczba $\alpha \neq 0$, taka że $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.

- Jeśli $\alpha > 0$, to mówimy, że wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają **ten sam zwrot**.
- Jeśli $\alpha < 0$, to mówimy, że wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają **przeciwny zwrot**.



Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają ten sam kierunek i zwrot.



Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają ten sam kierunek, ale przeciwny zwrot.

Ćwiczenie 8

Wśród poniższych wektorów wskaż te, które mają ten sam kierunek i zwrot co wektor $\vec{u} = [-6, 8]$, oraz te, które mają ten sam kierunek co wektor $\vec{u}$, ale przeciwny zwrot.

$$\vec{v}_1 = [-2, 2\frac{2}{3}], \quad \vec{v}_2 = [3, -4], \quad \vec{v}_3 = [18, -16], \quad \vec{v}_4 = [-\frac{3}{4}, 1], \quad \vec{v}_5 = [24, -32]$$

Długość wektora $\vec{AB}$ (oznaczamy ją $|\vec{AB}|$) to długość odcinka AB .

Twierdzenie

Jeżeli wektor $\vec{u}$ ma współrzędne $[u_1, u_2]$, to długość wektora $\vec{u}$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Przykład 7

Oblicz długość wektora $\vec{u} = [24, -7]$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{24^2 + (-7)^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$$

Ćwiczenie 9

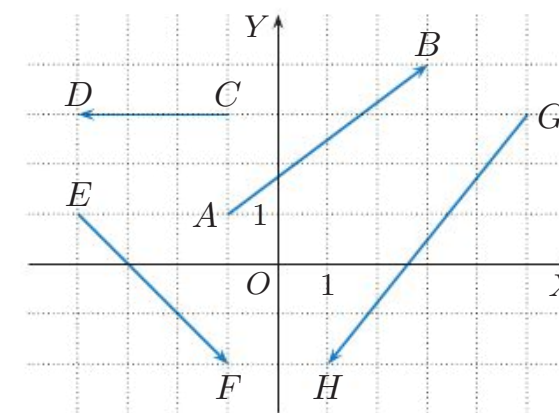
Oblicz długość wektora $\vec{u}$.

- a) $\vec{u} = [-3, 4]$ b) $\vec{u} = [-5, -12]$ c) $\vec{u} = [3, 3]$

Ćwiczenie 10

Dane są wektory $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$ oraz $\vec{GH}$ przedstawione na rysunku obok. Oblicz długość wektora $\vec{u}$.

- a) $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{EF}$
 b) $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{CD}$
 c) $\vec{u} = \vec{GH} + \frac{4}{3} \vec{EF}$
 d) $\vec{u} = \vec{EF} - \frac{1}{3} \vec{CD}$



Zadania

- Sprawdź, czy wektor $\vec{u} + \vec{v}$ jest wektorem przeciwnym do wektora $\vec{w}$.
 a) $\vec{u} = [-3, 6]$, $\vec{v} = [14, -26]$, $\vec{w} = [-11, 12]$
 b) $\vec{u} = [\frac{9}{4}, \frac{9}{2}]$, $\vec{v} = [-\frac{7}{2}, \frac{7}{4}]$, $\vec{w} = [\frac{5}{4}, -\frac{25}{4}]$
 c) $\vec{u} = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]$, $\vec{v} = [\frac{3}{2}, -2]$, $\vec{w} = [\frac{5}{6}, \frac{3}{2}]$
- Dane są punkty $A(2, 1)$ i $B(4, 5)$. Wyznacz współrzędne punktu P .
 a) $\vec{AB} = \vec{BP}$ c) $\vec{AP} = -\vec{BA}$ e) $\vec{AP} = 2\vec{AB}$
 b) $\vec{AP} = \vec{BA}$ d) $\vec{AP} = -\vec{BP}$ f) $\vec{AP} = -3\vec{AB}$
- Dane są trzy punkty A , B i C . Wyznacz współrzędne punktu D takiego, że $\vec{AB} = \vec{CD}$. Oblicz długość wektora $\vec{AD}$.
 a) $A(0, 0)$, $B(4, 3)$, $C(-1, 2)$ c) $A(4, 6)$, $B(3, 1)$, $C(6, 2)$
 b) $A(-1, 2)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 2)$ d) $A(-1, -3)$, $B(-4, 1)$, $C(2, 4)$
- Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

A	B	$\vec{AB}$	$\vec{BA}$	$3\vec{BA}$	$ \vec{AB} $	$ 3\vec{AB} $
$(3, 4)$	$(1, 2)$	?	?	?	?	?
?	$(6, 3)$	?	$[8, 9]$	?	?	?
$(-1, 4)$	?	$[2, -3]$	?	?	?	?
$(1, 4)$	?	?	$[-2, 6]$	?	?	?
?	$(2, \frac{1}{3})$	?	?	$[3, -4]$	?	?

- D** 5. Uzasadnij, że dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest spełniony warunek:

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

6. Sprawdź, czy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają ten sam kierunek i zwrot.
- a) $\vec{u} = [-2, 4]$, $\vec{v} = [\frac{1}{2}, -1]$ c) $\vec{u} = [12, 14]$, $\vec{v} = [72, 86]$
b) $\vec{u} = [12, -9]$, $\vec{v} = [2, -\frac{3}{2}]$ d) $\vec{u} = [\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}]$, $\vec{v} = [1, 2 + \sqrt{2}]$
7. Dla jakich wartości parametru m wektor $\vec{u}$ ma ten sam kierunek co wektor $\vec{v} = [3, 1]$?
- a) $\vec{u} = [m + 1, 2]$ b) $\vec{u} = [6, m^2 + 1]$ c) $\vec{u} = [12m, m^3]$

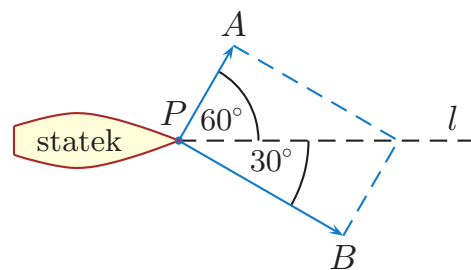
- D** 8. Dany jest wektor $\vec{u} = [x, y]$. Uzasadnij, że $|\alpha \vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|$.
9. Dany jest wektor $\vec{u} = [-3, 4]$. Wyznacz wektor $\vec{v}$, który ma ten sam kierunek i zwrot co wektor $\vec{u}$ oraz:
- a) $|\vec{v}| = 20$, b) $|\vec{v}| = 8$.
10. Dany jest wektor $\vec{u} = [3, -1]$. Wyznacz wektor $\vec{v}$, który ma ten sam kierunek co wektor $\vec{u}$, ale przeciwny zwrot oraz:
- a) $|\vec{v}| = 20$, b) $|\vec{v}| = 3$.

- D** 11. Dany jest niezerowy wektor $\vec{u} = [x, y]$. Wykaż, że wektor $[\frac{x}{|\vec{u}|}, \frac{y}{|\vec{u}|}]$ jest wektorem jednostkowym.

Wektor, którego długość jest równa 1, nazywamy **wektorem jednostkowym**.

12. Wyznacz wektor jednostkowy równoległy do wektora $\vec{u}$.
- a) $\vec{u} = [-8, 6]$ b) $\vec{u} = [1, 1]$
13. Dane są wektory $\vec{u} = [1, 2]$ i $\vec{v} = [3, -1]$. Wyznacz wartości parametrów α i β , dla których jest prawdziwa poniższa równość.
- a) $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = [-1, 5]$ c) $\alpha \vec{u} - \beta \vec{v} = [-3, 2\frac{1}{2}]$
b) $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = [3, -4]$ d) $\alpha \vec{u} - \beta \vec{v} = [-1, -23]$
14. Wyznacz wartość parametru m , dla której $2\vec{u} + 3\vec{v} - m\vec{w} = \vec{0}$.
- a) $\vec{u} = [1, 3]$, $\vec{v} = [-4, 2]$, $\vec{w} = [-5, 6]$
b) $\vec{u} = [4, 2]$, $\vec{v} = [-6, 9]$, $\vec{w} = [-3, \frac{3}{2}]$

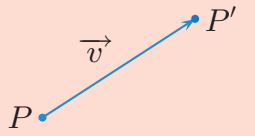
- D** 15. Statek jest holowany przez dwa holowniki. Jeden z nich ciągnie ten statek z siłą o wartości F w kierunku PA . Uzasadnij, że jeżeli drugi holownik – ciągnący statek w kierunku PB – użyje siły o wartości $\sqrt{3}F$, to statek ten będzie się poruszał wzdłuż prostej l .



R 2.9. Wektory – zastosowania

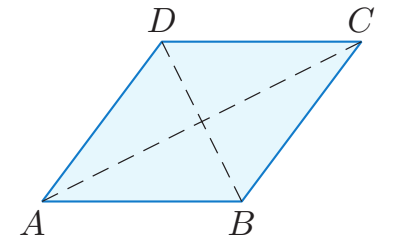
Przesunięciem (lub translacją) o wektor $\vec{v}$ nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi P płaszczyzny przyporządkowuje taki punkt P' , że $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.

Punkt P' nazywamy **obrazem** punktu P w przesunięciu o wektor $\vec{v}$.



Ćwiczenie 1

Dany jest romb $ABCD$ o polu równym 4 (rysunek obok). Romb $A'B'C'D'$ otrzymujemy przez przesunięcie rombu $ABCD$ o wektor $\vec{v}$. Oblicz pole figury będącej częścią wspólną obu rombów.



- a) $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ b) $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

Obrazem punktu $P(x, y)$ w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [a, b]$ jest punkt:

$$P'(x + a, y + b)$$

Ćwiczenie 2

Dany jest prostokąt F o wierzchołkach $A(-3, 0)$, $B(1, -2)$, $C(4, 4)$ i $D(0, 6)$. Prostokąt F_1 jest obrazem prostokąta F w przesunięciu o wektor $\vec{v}$. Oblicz pole części wspólnej obu prostokątów.

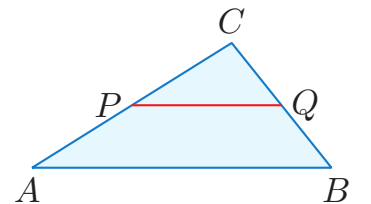
- a) $\vec{v} = [1, 2]$ b) $\vec{v} = [0, -5]$ c) $\vec{v} = [4, 2]$

Ćwiczenie 3

Koło K_2 jest obrazem koła K_1 o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r = 4$ w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [4, 4]$. Oblicz pole części wspólnej tych kół.

D Przykład 1

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok). Punkt P jest środkiem boku AC , a punkt Q – środkiem boku BC . Udowodnij, że $PQ \parallel AB$ oraz $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$.



Wektor $\overrightarrow{PQ}$ zapisujemy jako sumę:

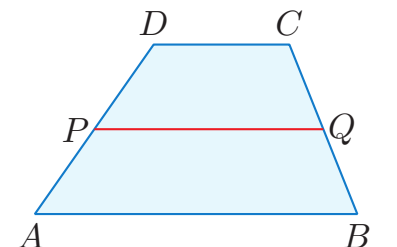
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Oznacza to, że $PQ \parallel AB$ oraz $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$.

D Ćwiczenie 4

Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, a długość tego odcinka jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

Wskazówka. Zauważ, że $\overrightarrow{DC} = \alpha \overrightarrow{AB}$ dla pewnej stałej α .



Przykład 2

Sprawdź, czy punkty $A(-4, -5)$, $B(2, -1)$ i $C(26, 15)$ są współliniowe.

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-4), -1 - (-5)] = [6, 4], \quad \overrightarrow{AC} = [26 - (-4), 15 - (-5)] = [30, 20]$$

Zauważmy, że $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$, zatem punkty A , B i C są współliniowe.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy punkty P , Q i R są współliniowe.

- a) $P(2, -1)$, $Q(-2, 4)$, $R(10, -11)$ b) $P(-5, 2)$, $Q(13, 8)$, $R(19, 10)$

Przykład 3

Dane są współrzędne wierzchołków $A(-1, 3)$, $B(-3, 2)$ i $C(3, 1)$ równoległoboku $ABCD$.

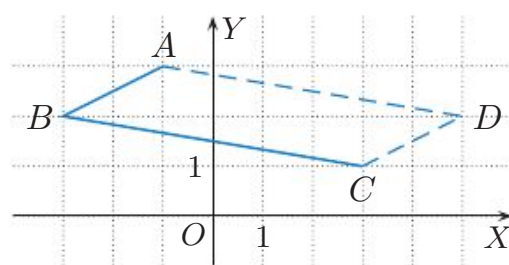
Wyznacz współrzędne wierzchołka D .

Zauważmy, że $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Wyznaczamy wektor $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = [3 - (-3), 1 - 2] = [6, -1]$$

Wierzchołek D jest obrazem punktu A w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{AD}$, zatem $D(-1 + 6, 3 - 1)$, czyli $D(5, 2)$.



Ćwiczenie 6

Punkty P , Q i R są kolejno środkami boków AB , BC i CD równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

- a) $B(3, 3)$, $P(5, 1)$, $Q(-1, 2)$ c) $\overrightarrow{BA} = [-5, 5]$, $\overrightarrow{BC} = [2, 4]$, $Q(3, -1)$
b) $P(2, 0)$, $Q(7, 4)$, $R(4, 4)$ d) $\overrightarrow{AB} = [8, 2]$, $Q(7, 2)$, $R(6, 4)$

Zadania

- D** 1. Dane są punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ oraz $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. Wykaż, że:

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2. Wyznacz wektor $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, a następnie współrzędne punktów P i Q dzielących odcinek AB na trzy równe części.

- a) $A(-3, -2)$, $B(3, 1)$ b) $A(-10, 6)$, $B(8, -6)$ c) $A(1, -1)$, $B(2, 1)$

3. Wyznacz współrzędne końców odcinka AB , o którym wiadomo, że:

- a) punkty $P(2, 1)$ i $Q(5, 4)$ dzielą go na trzy równe części,
b) punkty $P(4, -2)$, $Q(3, 1)$ i $R(2, 4)$ dzielą go na cztery równe części.

4. a) Dane są punkty $A(-4, 7)$ i $B(6, -8)$. Wyznacz współrzędne punktu P , który dzieli odcinek AB w stosunku $2:3$. Rozpatrz dwa przypadki.

- b) Dane są punkty $P(3, -2)$ i $B(-9, 16)$. Punkt P dzieli odcinek AB w stosunku $3:4$. Wyznacz współrzędne punktu A . Rozpatrz dwa przypadki.

5. a) Punkty $A(-2, -3)$ i $B(4, -1)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Punkt $P(2, 0)$ jest punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D .

- b) Punkt $P(3, 1)$ jest środkiem boku AB równoległoboku $ABCD$. Jego przekątne przecinają się w punkcie $S(-1, 1)$ oraz $\overrightarrow{CD} = [2, -4]$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

6. Dane są wektory $\overrightarrow{AC} = [12, 3]$, $\overrightarrow{BC} = [9, 9]$ oraz punkt $A(-5, 3)$. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte wysokości trójkąta ABC .

7. a) Dane są wektor $\overrightarrow{AB} = [6, 3]$ oraz punkt $C(1, 6)$. Punkt $S(2, 3\frac{1}{2})$ jest środkiem odcinka BC . Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B trójkąta ABC .

- b) Dane są wektory $\overrightarrow{AB} = [4, -4]$, $\overrightarrow{CD} = [6, 6]$ oraz punkt $C(6, 7)$ będący wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB i wysokości CD . Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta.

8. Dane są wierzchołki $A(4, -5)$, $B(8, 1)$, $D(-3, -1)$ trapezu $ABCD$. Jego podstawa AB jest dwa razy dłuższa od podstawy CD . Wyznacz współrzędne wierzchołka C .

- 9.* Dany jest wierzchołek $A(1, 2)$ trapezu $ABCD$, $\overrightarrow{AD} = [1, 3]$ i $\overrightarrow{DB} = [5, 0]$. Podstawa AB tego trapezu jest trzy razy dłuższa od podstawy CD . Wyznacz współrzędne wierzchołków B , C i D .

- D** 10.* a) Udowodnij, że współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ są wyrażone wzorami:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

- b) Dane są wierzchołki $A(-1, 0)$ i $B(2, 5)$ trójkąta ABC . Jego środek ciężkości ma współrzędne $(-1, 2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego trójkąta.

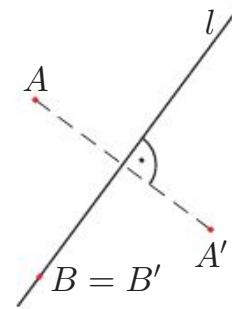
- 11.* Dane są równania prostych zawierających dwie środkowe trójkąta: $y = 2$ i $y = -x + 3$ oraz jeden z jego wierzchołków: $(1, -2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

2.10. Symetria osiowa

Załóżmy, że punkt A nie należy do prostej l .

Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem prostej l** , jeżeli punkty A i A' leżą na prostej prostopadłej do prostej l i środek odcinka AA' należy do prostej l (prosta l jest symetralną odcinka AA').

Punktem symetrycznym względem prostej l do punktu należącego do tej prostej jest ten sam punkt (patrz punkt B na rysunku obok).

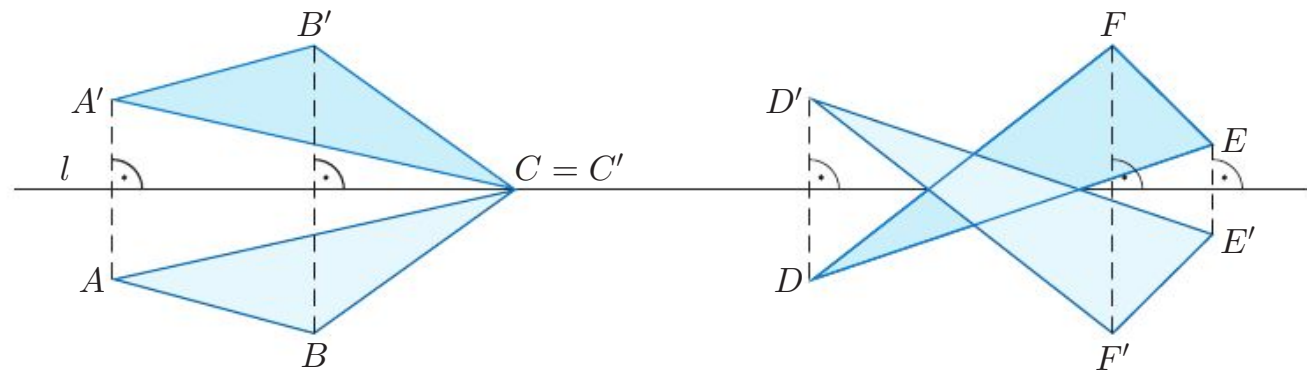


Definicja

Symetrią osiową względem prostej l (lub symetrią względem prostej l) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej l .

Prostą l nazywamy **osią symetrii**. Punkt A' symetryczny względem prostej l do punktu A nazywamy **obrazem** punktu A .

Na rysunku poniżej przedstawiono trójkąty ABC i DEF oraz ich obrazy w symetrii osiowej względem prostej l – odpowiednio trójkąty $A'B'C'$ i $D'E'F'$.

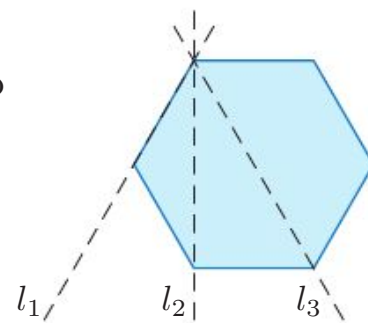


Obrazem dowolnej figury w symetrii osiowej jest figura do niej przystająca. Na przykład obrazem trójkąta jest trójkąt do niego przystający, a obrazem okręgu jest okrąg o takim samym promieniu.

Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie sześciokąt foremny, a następnie jego obraz w symetrii względem prostej (rysunek obok):

- a) l_1 , b) l_2 , c) l_3 .



Definicja

Figurę nazywamy **osiowosymetryczną**, jeśli jest ona swoim własnym obrazem w symetrii względem pewnej prostej l .

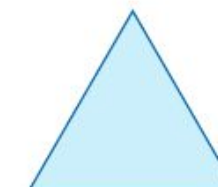
Prostą l nazywamy wówczas **osią symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

Podaj, ile osi symetrii mają poniższe figury.



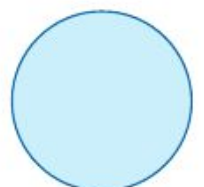
kwadrat



trójkąt równoboczny



prostokąt



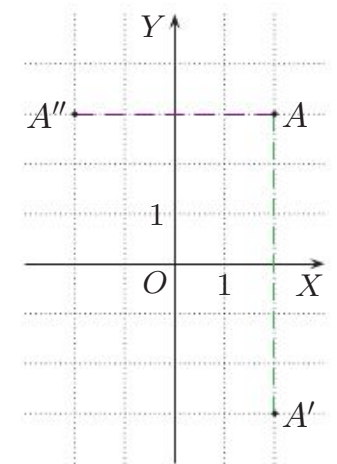
koło

Symetria względem osi układu współrzędnych

Przykład 1

W symetrii względem osi:

- OX obrazem punktu $A(2, 3)$ jest punkt $A'(2, -3)$,
- OY obrazem punktu $A(2, 3)$ jest punkt $A''(-2, 3)$.



W symetrii względem osi:

- OX obrazem punktu $P(x, y)$ jest punkt $P'(x, -y)$,
- OY obrazem punktu $P(x, y)$ jest punkt $P''(-x, y)$.

Ćwiczenie 3

Podaj współrzędne końców odcinka $A'B'$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OX oraz odcinka $A''B''$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OY . Narysuj w jednym układzie współrzędnych odcinki AB , $A'B'$ i $A''B''$.

- a) $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ b) $A(1, -2)$, $B(-4, 3)$ c) $A(-5, 1)$, $B(1, 4)$

Ćwiczenie 4

Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A(0, 3)$, $B(2, -1)$, $C(3, -1)$. Narysuj ten trójkąt oraz jego obraz w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Ćwiczenie 5

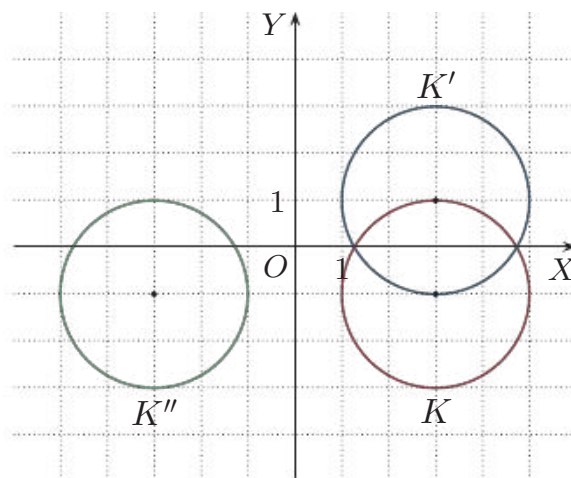
Dane są punkty $A(-2, 1)$, $B(2, -3)$, $C(4, -1)$ i $D(0, 3)$. Podaj współrzędne wierzchołków prostokąta będącego obrazem prostokąta $ABCD$ w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg K dany równaniem $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Okrąg K' jest symetryczny do okręgu K względem osi OX (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OX).

Okrąg K'' jest symetryczny do okręgu K względem osi OY (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OY).



Ćwiczenie 6

Podaj równania okręgów K' i K'' z powyższego przykładu.

Ćwiczenie 7

Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX oraz równanie okręgu K'' symetrycznego do okręgu K względem osi OY .

- a) $K: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ c) $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
b) $K: (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$ d) $K: (x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 49$

Zadania

- Sprawdź, czy odcinki AB i $A'B'$ są symetryczne względem osi OX lub osi OY .
a) $A(-2, 1), B(3, -2), A'(-2, -1), B'(3, 2)$
b) $A(-3, 4), B(-1, -2), A'(3, 4), B'(1, -2)$
c) $A(-4, -3), B(2, 2), A'(-4, 3), B'(-2, 2)$
d) $A(-2, 0), B(0, 4), A'(2, 0), B'(0, -4)$
- Narysuj w jednym układzie współrzędnych trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OX oraz trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OY .
a) $A(-1, 2), B(5, 3), C(2, 5)$ c) $A(-3, 2), B(0, -3), C(3, 2)$
b) $A(-3, 0), B(-2, -5), C(0, 3)$ d) $A(-3, -1), B(9, -2), C(2, 1)$
- Oblicz pole części wspólnej kwadratu K o wierzchołkach $(-5, 1), (-2, -2), (1, 1), (-2, 4)$ oraz kwadratu symetrycznego do kwadratu K względem:
a) osi OX , b) osi OY .

- Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem prostej $y = 0$. Sprawdź, czy punkt $P(-3, 2)$ należy do okręgu K' .
a) $K: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ c) $K: (x + 3)^2 + y^2 = 4$
b) $K: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 41$ d) $K: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$
- Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem prostej $x = 0$. Oblicz pole rombu, którego wierzchołkami są środki okręgów K i K' oraz punkty wspólne tych okręgów.
a) $K: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$ b) $K: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$
- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Dany jest okrąg K o środku w punkcie $S(4, 2)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem prostej $l: y = 3x$.

Niech $m: y = ax + b$ będzie prostą przechodzącą przez punkt S oraz $m \perp l$. Zatem $a = -\frac{1}{3}$ oraz:

$$m: y = -\frac{1}{3}x + b$$

Do równania prostej m podstawiamy współrzędne punktu $S(4, 2)$ i otrzymujemy:

$$m: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$$

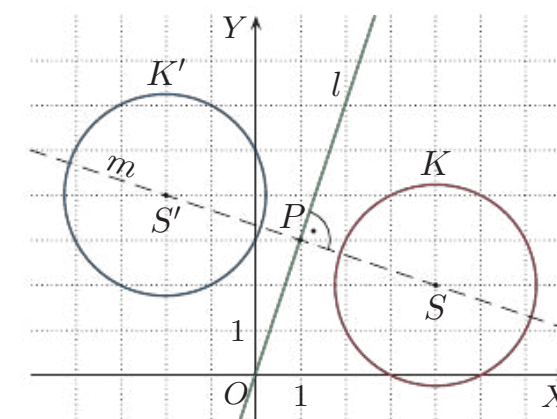
Niech P będzie punktem przecięcia prostych l i m . Jego współrzędne spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

Zatem $P(1, 3)$.

Współrzędne punktu S' – środka okręgu K' – wyznaczamy, korzystając z tego, że punkt P jest środkiem odcinka $S'S$. Otrzymujemy $S'(-2, 4)$.

Ponieważ okrąg K' ma ten sam promień co okrąg K , równanie okręgu K' ma postać $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$.



Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do okręgu K względem prostej l .

- a) $K: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 2, l: y = 2x - 3$
b) $K: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16, l: x + 3y - 2 = 0$
c) $K: (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 16, l: 2x + 3y - 9 = 0$

2.11. Symetria środkowa

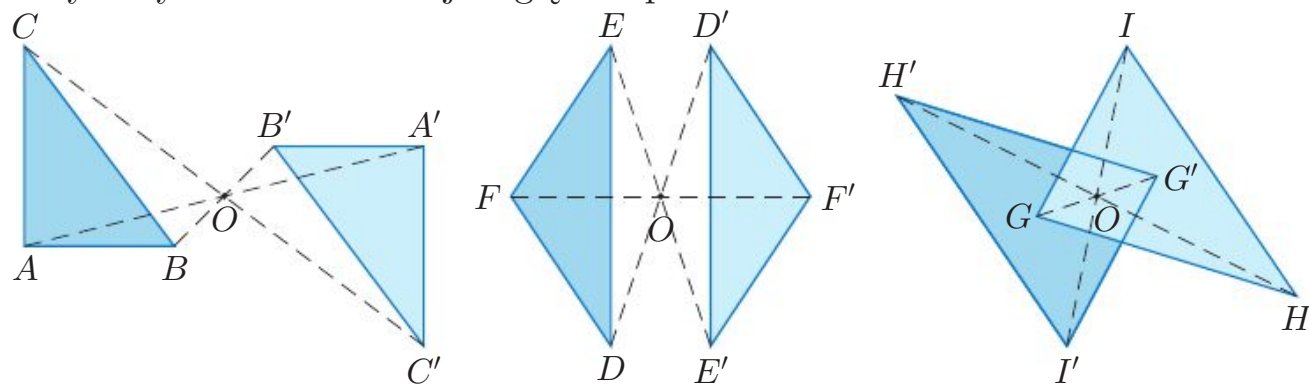
Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem punktu O** ($A \neq O$), jeżeli punkt O jest środkiem odcinka łączącego punkty A i A' .

Punktem symetrycznym do punktu O względem punktu O jest on sam.

Definicja

Symetrią środkową względem punktu O (lub symetrią względem punktu O) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O . Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**. Punkt A' symetryczny względem punktu O do punktu A nazywamy **obrazem** punktu A .

Na rysunkach poniżej przedstawiono trójkąty ABC , DEF i GHI oraz ich obrazy w symetrii środkowej względem punktu O .



Obrazem dowolnej figury w symetrii środkowej jest figura do niej przystająca.

Ćwiczenie 1

Narysuj trójkąt równoboczny, a następnie przekształć go symetrycznie względem:

- a) jednego z jego wierzchołków, c) punktu przecięcia jego dwusiecznych,
- b) środka jednego z jego boków, d) punktu leżącego na zewnątrz niego.

Figurę nazywamy **środkowsymetryczną**, jeśli jest ona swoim własnym obrazem w symetrii względem pewnego punktu O .

Punkt O nazywamy wówczas **środkiem symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

Która z wymienionych figur ma środek symetrii: trójkąt, równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek, półprosta?

Symetria względem początku układu współrzędnych

Przykład 1

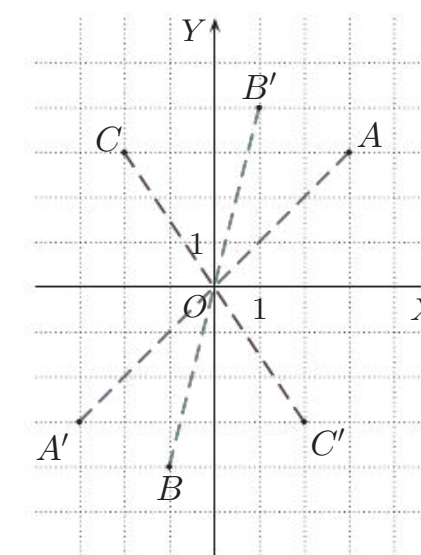
W symetrii względem początku układu współrzędnych obrazami punktów:

$$A(3, 3), B(-1, -4) \text{ i } C(-2, 3)$$

są odpowiednio punkty:

$$A'(-3, -3), B'(1, 4) \text{ i } C'(2, -3)$$

W symetrii względem początku układu współrzędnych obrazem punktu $P(x, y)$ jest punkt $P'(-x, -y)$.



Ćwiczenie 3

Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta ABC względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$.

- a) $A(3, -2), B(-2, -1), C(-1, 4)$ b) $A(2, -2), B(1, 3), C(-3, 1)$

Ćwiczenie 4

Prostokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

- a) $A(-3, -2), B(5, -2), C(5, 3), D(-3, 3)$
- b) $A(-3, 1), B(1, 3), C(3, -1), D(-1, -3)$
- c) $A(-2, 1), B(1, -2), C(3, 0), D(0, 3)$

Przykład 2

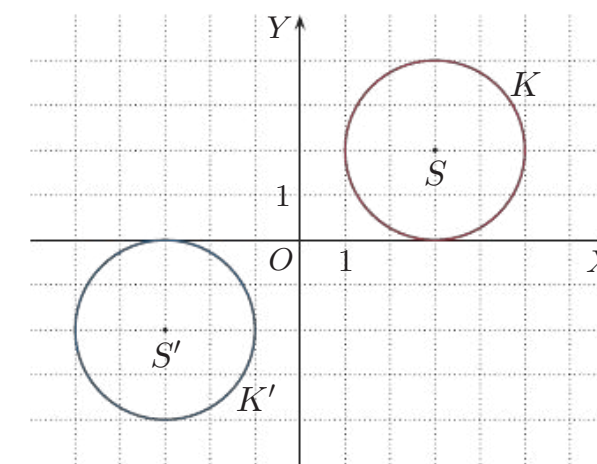
Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Narysuj te okręgi.

Środkiem okręgu K jest punkt $S(3, 2)$, a promień tego okręgu $r = 2$.

Zatem środkiem okręgu K' jest punkt S' symetryczny do S względem początku układu współrzędnych, czyli $S'(-3, -2)$, a promień tego okręgu $r' = 2$.

Oznacza to, że równanie okręgu K' ma postać:

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$$



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu K . Narysuj te okręgi.

- a) $K: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ c) $K: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$
b) $K: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ d) $K: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

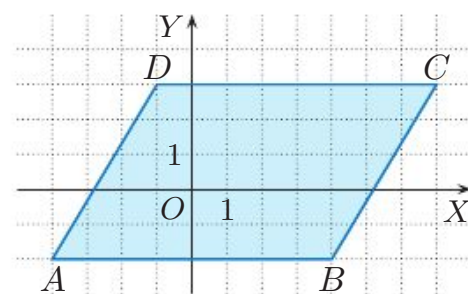
Zadania

1. Punkt A' jest położony symetrycznie do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AA' .
a) $A(3,4)$ b) $A(-1,4)$ c) $A(-6,-8)$ d) $A(a,a)$

2. Narysuj w układzie współrzędnych prostokąt $ABCD$ i jego obraz w symetrii względem początku układu współrzędnych.

- a) $A(1,1), B(4,1), C(4,3), D(1,3)$
b) $A(-3,-1), B(1,-1), C(1,2), D(-3,2)$

3. Równoległobok $A'B'C'D'$ jest obrazem równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) w symetrii względem punktu $O(0,0)$. Oblicz pole części wspólnej tych równoległoboków.



- D** 4. Okrąg K' jest obrazem okręgu K w symetrii względem osi OX , a okrąg K'' jest obrazem okręgu K' w symetrii względem osi OY . Uzasadnij, że okrąg K'' jest obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych.

5. Wyznacz punkty wspólne okręgu K oraz jego obrazu w symetrii względem początku układu współrzędnych.

- a) $K: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$ c) $K: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$
b) $K: (x+4)^2 + (y-1)^2 = 34$ d) $K: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 26$

6. Okrąg K' jest obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej kół przez nie ograniczonych.

- a) $K: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$ c) $K: (x-3\sqrt{3})^2 + y^2 = 36$
b) $K: (x-2)^2 + y^2 = 16$ d) $K: (x-3\sqrt{3})^2 + (y-3\sqrt{3})^2 = 72$

7. Okrąg $K: (x+2)^2 + (y-4)^2 = r^2$ i okrąg K' będący jego obrazem w symetrii względem początku układu współrzędnych są styczne zewnętrznie. Podaj równania wspólnych stycznych tych okręgów.

Dowiedz się więcej

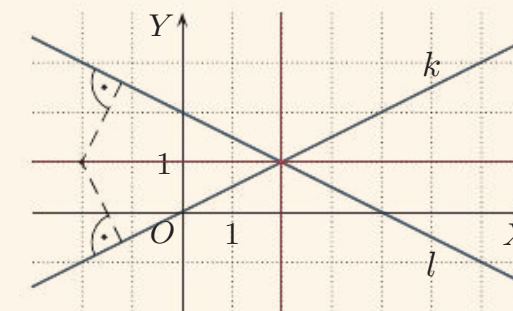
Zbiory punktów o danej własności

Przykład 1

Punkty równo odległe od dwóch przecinających się prostych leżą na dwusiecznych kątów utworzonych przez te proste.

Na rysunku obok przedstawiono proste:

$$k: y = \frac{1}{2}x \quad \text{ i } \quad l: y = -\frac{1}{2}x + 2$$



Proste k i l przecinają się w punkcie $(2,1)$. Zbiór punktów równo odległych od tych prostych jest sumą dwóch prostych: $x = 2$ oraz $y = 1$.

1. Wyznacz zbiór punktów równo odległych od prostych k i l .

- a) $k: y = 2x + 5, l: y = -2x - 2$ c) $k: y = 0, l: y = \sqrt{3}x$
b) $k: y = 3, l: x = 1$ d) $k: y = -3, l: y = 1$

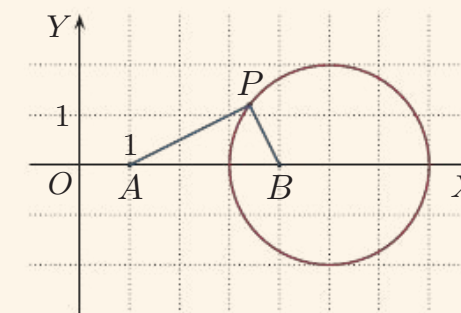
2. Opisz położenie punktów równo odległych od dwóch prostych równoległych. Wyznacz zbiór punktów równo odległych od prostych $y = x + 1$ i $y = x + 3$.

D Przykład 2

Wykaż, że zbiorem punktów, których odległość od punktu $A(1,0)$ jest dwa razy większa od odległości od punktu $B(4,0)$, jest okrąg.

Niech $P(x,y)$ będzie takim punktem, że $|PA| = 2|PB|$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2} / 2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 \\ -3x^2 - 3y^2 + 30x - 63 &= 0 / : (-3) \\ x^2 + y^2 - 10x + 21 &= 0 \\ (x^2 - 10x + 25) - 25 + y^2 + 21 &= 0 \\ (x-5)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$



Zatem szukanym zbiorem punktów jest okrąg o środku $(5,0)$ i promieniu 2.

- D** 3. Wykaż, że zbiorem punktów, których odległość od punktu A jest n razy większa od odległości od punktu B , jest okrąg.

- a) $A(0,0), B(6,0), n = 2$ c) $A(0,1), B(0,-3), n = 3$
b) $A(-2,0), B(4,0), n = 2$ d) $A(0,1), B(3,1), n = 2$



Powtórzenie

Zestaw I

- Oblicz długości odcinków AB , BC i AC . Czy punkty A , B i C są współliniowe?
 - $A(-4, 5)$, $B(0, 2)$, $C(8, -4)$
 - $A(13, 5)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 1)$
 - $A(-4, -12)$, $B(2, -4)$, $C(10, 2)$
 - $A(-2\sqrt{2}, 8)$, $B(0, 0)$, $C(\sqrt{2}, -4)$
- Czy trójkąt ABC jest równoramienny? Czy jest prostokątny?
 - $A(-3, 1)$, $B(3, -3)$, $C(1, 7)$
 - $A(-3, 4)$, $B(10, -2)$, $C(5, 8)$
- D** Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny oraz równoramienny. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.
 - $A(0, 6)$, $B(2, 0)$, $C(8, 2)$
 - $A(-7, -2)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 10)$
- W trójkącie o wierzchołkach $A(2, -1)$, $B(1, 2)$ i $C(-3, 4)$ poprowadzono środkową AD i wysokość AE . Oblicz ich długości.
- Wyznacz punkty należące do prostej $y = x + 4$, których odległość od punktu $P(3, 1)$ jest równa $2\sqrt{5}$.
 - Na prostej przechodzącej przez punkty $A(1, -3)$ i $B(6, 7)$ wyznacz punkty, których odległość od punktu A jest równa 2.
- W okrąg o równaniu $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ wpisano kwadrat. Jedna z jego przekątnych jest zawarta w prostej $4x - 3y = 8$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.
- Kwadrat, którego jeden z wierzchołków ma współrzędne $(1, -4)$, ma obwód równy $8\sqrt{5}$. Punkt przecięcia przekątnych tego kwadratu należy do prostej $y = x - 1$, a współrzędne tego punktu są liczbami ujemnymi. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.
- Podaj równanie okręgu o środku S i promieniu r . Narysuj ten okrąg. Wyznacz jego punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.
 - $S(-4, 0)$, $r = 5$
 - $S(2, 3)$, $r = 5$
 - $S(-1, 2)$, $r = 4$
 - $S(-3, -4)$, $r = 1$
- Wyznacz równanie okręgu o środku S przechodzącego przez punkt A .
 - $S(2, 1)$, $A(6, 4)$
 - $S(-3, -2)$, $A(-1, 1)$
 - $S(2, -2)$, $A(-2, -1)$

Przykład 3

Wyznacz zbiór środków okręgów przechodzących przez punkt $A(0, 2)$ oraz stycznych do osi OX .

Niech punkt $P(x, y)$ będzie środkiem okręgu spełniającego warunki zadania, a $Q(x, 0)$ – punktem styczności tego okręgu z osią OX .

Wtedy $|PA| = |PQ|$ oraz $x, y > 0$.

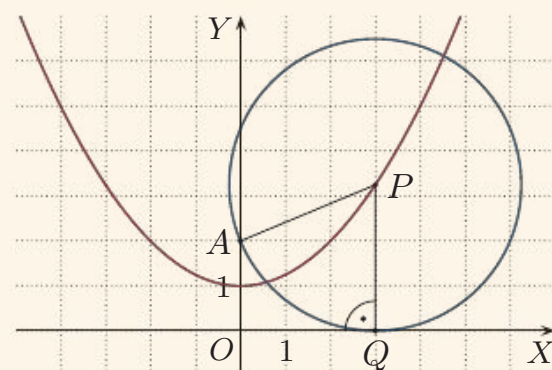
Otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = y$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2$$

$$4y = x^2 + 4$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$



Zatem szukanym zbiorem punktów jest parabola $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

4. Wyznacz zbiór środków okręgów przechodzących przez punkt:

- $A(0, 4)$ i stycznych do osi OX ,
- $A(6, 0)$ i stycznych do osi OY .

Przykład 4

Wyznacz zbiór punktów o dodatniej rzędnej będących środkami okręgów stycznych wewnątrz do okręgu $K: x^2 + y^2 = 16$ oraz stycznych do osi OX .

Niech punkt $P(x, y)$ będzie środkiem okręgu K_1 spełniającego warunki zadania. Promień tego okręgu jest równy y oraz $y \in (0; 2]$. Niech A będzie punktem styczności okręgów K i K_1 .

Wtedy $|OP| = 4 - |PA| = 4 - y$ oraz

$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$, zatem otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - y$$

Zauważ, że $4 - y > 0$.

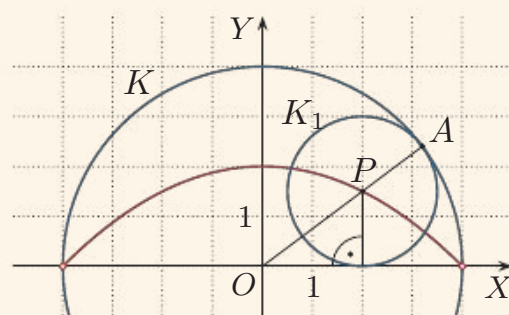
$$x^2 + y^2 = 16 - 8y + y^2$$

$$8y = -x^2 + 16$$

Otrzymaliśmy równanie paraboli $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$, zatem szukanym zbiorem punktów jest jej fragment dla $x \in (-4; 4)$.

5. Wyznacz zbiór punktów o dodatniej odciętej będących środkami okręgów stycznych wewnątrz do okręgu $K: x^2 + y^2 = 4$ oraz:

- stycznych do osi OY ,
- stycznych do osi OX .

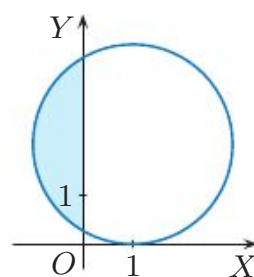


10. Do okręgu o środku $(1, 2)$ należy punkt $(3, 2)$.

a) Wyznacz równanie tego okręgu.

b) Wyznacz współrzędne punktów, w których okrąg ten przecina oś OY .

c) Oblicz pole zacieniowanego obszaru (rysunek obok).



11. Określ wzajemne położenie okręgów K_1 i K_2 .

a) $K_1: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$, $K_2: (x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 25$

b) $K_1: (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 36$, $K_2: (x + 4)^2 + (y + 6)^2 = 3$

c) $K_1: (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 17$, $K_2: (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$

d) $K_1: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 5$, $K_2: (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$

12. Okrąg o środku w punkcie S_1 jest styczny do prostej l , a okrąg o środku w punkcie S_2 jest styczny do prostej k . Oblicz promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

a) $S_1(-1, 4)$, $l: x = 1$, $S_2(1, 4)$, $k: x = 3$

b) $S_1(-3, -3)$, $l: y = -2$, $S_2(-3, -4)$, $k: y = -6$

■ Zestaw II

1. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia symetralnych boków trójkąta ABC . Podaj równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

a) $A(0, 0)$, $B(4, -4)$, $C(4, 8)$ b) $A(-2, -2)$, $B(6, -2)$, $C(2, 6)$

2. Punkt P leży na prostej l , a jego odległość od prostej $y = -x + 2$ jest równa $4\sqrt{2}$. Wyznacz współrzędne punktu P .

a) $l: y = x + 2$ b) $l: y = \frac{5}{3}x - 6$

3. Jeden z boków kwadratu opisanego na okręgu o środku w punkcie P jest zawarty w prostej k . Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe boki tego kwadratu.

a) $P(-2, 1)$, $k: y = 3x - 3$ b) $P(3, 1)$, $k: y = -\frac{3}{4}x + 10$

4. Dane są proste $l_1: y = -x + b_1$ i $l_2: y = -x + b_2$, gdzie $b_1, b_2 > 0$. Prosta l_1 jest odległa od punktu $(0, 0)$ o 2, a prosta l_2 o 6. Oblicz odległość między tymi prostymi oraz wyznacz ich równania.

5. Oblicz promień okręgu stycznego jednocześnie do prostych k i l . Wyznacz równanie tego okręgu, wiedząc, że jego środek leży na prostej $y = -x$.

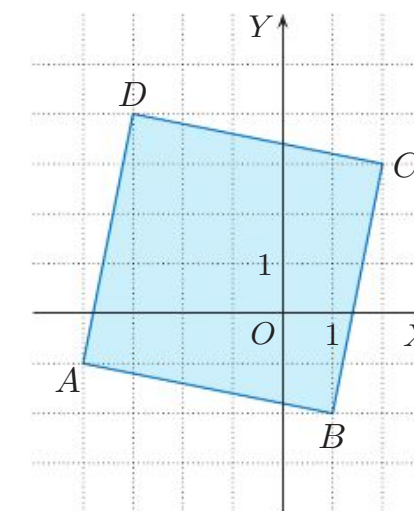
a) $k: y = x + 2$, $l: y = x + 6$ b) $k: y = \frac{1}{2}x + 2$, $l: y = \frac{1}{2}x - 8$

6. Okręgi K_1 i K_2 o środkach odpowiednio $S_1(-3, -1)$ i $S_2(5, 5)$ mają równe promienie i są styczne zewnętrznie. Wyznacz równania tych okręgów.

7. Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(-4, -1)$, $B(1, -2)$, $C(2, 3)$ i $D(-3, 4)$ (rysunek obok). Wyznacz równanie okręgu:

a) wpisanego w ten kwadrat,

b) opisanego na tym kwadracie.



8. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-3, 3)$, $B(2, -2)$ i $C(7, 3)$. Oblicz pole części wspólnej tego trójkąta i jego obrazu w symetrii względem:

a) osi OX ,

b) osi OY .

9. W okrąg $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 50$ jest wpisany trójkąt równoramienny, którego:

a) podstawa jest zawarta w prostej $y = x - 7$,

b) jedno z ramion jest zawarte w prostej $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

10. Bok AB trójkąta ABC zawiera się w prostej $x + y - 2 = 0$, a bok AC – w prostej $3x - 5y - 14 = 0$. Punkt $S(0, -2)$ jest środkiem boku BC . Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz wyznacz równanie okręgu opisanego na nim.

11. Wyznacz równania stycznych do okręgu $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 40$, które są prostopadłe do prostej $3x - y = 0$.

12. Oblicz odległość punktu $P(0, -3)$ od prostej, do której należą punkty wspólne okręgów $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$ oraz $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

13. Oblicz pole części wspólnej trójkąta ABC i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\vec{v} = [-4, 1]$.

a) $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$ b) $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3\sqrt{3})$

14. Punkty P i Q są środkami boków odpowiednio AB i AC trójkąta ABC . Wyznacz równanie prostej zawierającej bok AC .

a) $A(-4, 1)$, $P(-1, -\frac{1}{2})$, $\vec{CB} = [1, -8]$

b) $P(1, 3)$, $\vec{AP} = [4, 2]$, $\vec{PQ} = [-3, 1]$

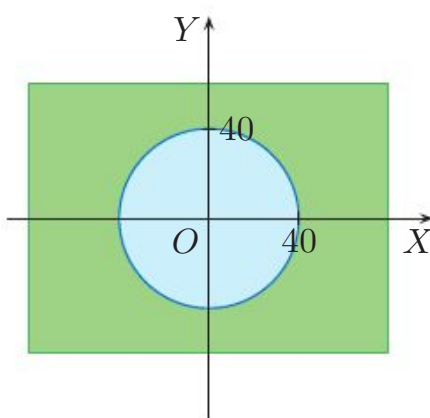


Zadania z kontekstem realistycznym

- Obszar leśny przedstawiono na planie narysowanym w układzie współrzędnych. Przyjęto, że odcinek o długości 1 na planie odpowiada odcinkowi o długości 1 km w rzeczywistości. Obszar ten ma kształt trójkąta, którego wierzchołki na planie mają współrzędne: $A(2, 0)$, $B(9, 1)$ i $C(5, 9)$. Zatwierdzone zostało postawienie wieży obserwacyjnej w celach przeciwpożarowych. Wieża ma się znajdować w punkcie P równo odległym od wierzchołków trójkąta. Oblicz odległość wieży od tych wierzchołków.

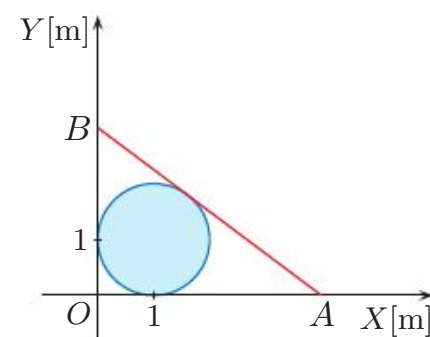
- Plan trójkątnego trawnika narysowano w układzie współrzędnych. Przyjęto, że odcinek o długości 1 na planie odpowiada odcinkowi o długości 1 m w rzeczywistości. Wierzchołki trójkąta mają współrzędne: $A(1, 1)$, $B(7, 1)$ i $C(4, 8)$. Uzasadnij, że umieszczona na trawniku rabata kwiatowa w kształcie koła ma średnicę mniejszą od 4 m.

- Na rysunku obok przedstawiono plan prostokątnego parku umieszczony w układzie współrzędnych. Przyjęto, że odcinek o długości 1 na planie odpowiada odcinkowi o długości 1 m w rzeczywistości. Staw znajdujący się w parku ma kształt koła o średnicy 80 m. Czy będzie potrzebny mostek, aby poprowadzić ścieżkę biegnącą wzdłuż linii prostej z punktu $A(20, -60)$ do punktu $B(60, 60)$?



- Na planie miejscowości umieszczonym w układzie współrzędnych rura wodociągowa biegnie wzdłuż prostej o równaniu $4x - 3y + 6 = 0$. Do wodociągu chcą się podłączyć dwaj mieszkańcy: pan Adam, którego dom jest tak położony, że miejsce podłączenia będzie w punkcie $A(3, -2)$, oraz pan Karol, którego dom zostałby podłączony w punkcie $B(7, 3)$. Podłączenie ma przebiegać prostopadłe do istniejącej rury, a jego cena zależy tylko od długości. Który mieszkaniec zapłaci więcej?

- Drabina opiera się o ziemię w punkcie A oraz o mur w punkcie B . Umieszczona pod nią belka nawiniętego drutu o przekroju poprzecznym będącym kołem o średnicy 2 m, dotyka drabiny (rysunek obok). Prosta AB ma współczynnik kierunkowy równy $-0,75$. Na jakiej wysokości drabina opiera się o mur?



Przykład

Dla jakich wartości parametru m okrąg $(x - 2)^2 + (y - m)^2 = 5$ jest styczny do prostej $y = 2x - 1$?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Okrąg jest styczny do prostej, gdy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ (x - 2)^2 + (y - m)^2 = 5 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie.

Przekształcamy drugie równanie i otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2my + m^2 - 1 = 0$$

Podstawiamy $y = 2x - 1$:

$$x^2 + (2x - 1)^2 - 4x - 2m(2x - 1) + m^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 4x - 4mx + 2m + m^2 - 1 = 0$$

$$5x^2 - 4(m + 2)x + m(m + 2) = 0$$

$$\Delta = 16(m + 2)^2 - 20m(m + 2) = -4m^2 + 24m + 64 = -4(m + 2)(m - 8)$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie, gdy $\Delta = 0$, czyli dla $m \in \{-2, 8\}$.

II sposób

Okrąg jest styczny do prostej, gdy odległość jego środka od tej prostej jest równa promieniowi okręgu.

Środkiem okręgu jest punkt $S(2, m)$, a promień tego okręgu $r = \sqrt{5}$.

Równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$2x - y - 1 = 0$$

Odległość punktu S od prostej $2x - y - 1 = 0$:

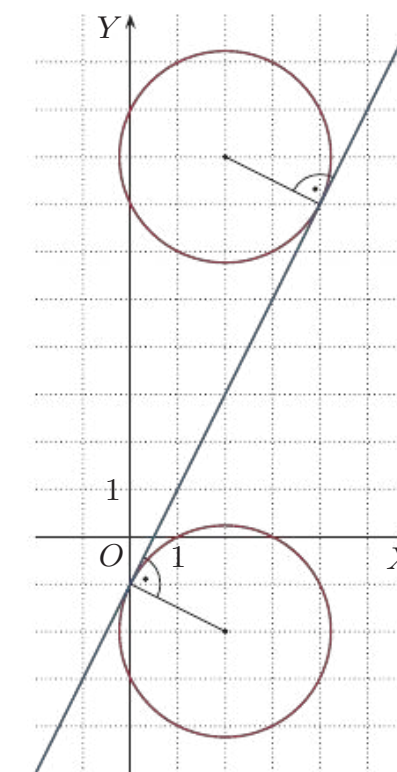
$$\frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot m - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - m|}{\sqrt{5}}$$

Rozwiązujemy równanie: $\frac{|3 - m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$$|3 - m| = 5$$

$$3 - m = 5 \quad \text{lub} \quad 3 - m = -5$$

$$m = -2 \quad \text{lub} \quad m = 8$$



Odpowiedź: Dany okrąg jest styczny do prostej $y = 2x - 1$ dla $m \in \{-2, 8\}$.

➔ Zadanie 7, str. 134



W zadaniach 1–10, 12.1, 12.2 i 13.1 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Prosta $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej danej równaniem ogólnym $2x + \sqrt{2}y + 4 = 0$. Współczynnik a jest równy

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 2 (0–1)

Punkty $A(-2, -2)$ i $B(6, 2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Pole tego trójkąta jest równe

- A. $20\sqrt{3}$ B. $24\sqrt{3}$ C. $30\sqrt{3}$ D. $32\sqrt{3}$

Zadanie 3 (0–1)

Punkty $A(-3, 2)$, $B(1, 2)$, $C(5, 6)$ i $D(1, 6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Jego obwód jest liczbą należącą do przedziału

- A. $(13; 16]$ C. $(19; 22]$
B. $(16; 19]$ D. $(22; 25]$

Zadanie 4 (0–1)

Dane są wierzchołki $B(2, -1)$ i $C(4, 3)$ rombu $ABCD$. Jego przekątne przecinają się w punkcie $P(4, -1)$. Pozostałe wierzchołki tego rombu mają współrzędne

- A. $(4, -3)$, $(6, -1)$ C. $(4, -3)$, $(6, -3)$
B. $(4, -5)$, $(6, -1)$ D. $(4, -5)$, $(6, -3)$

Zadanie 5 (0–1)

Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do okręgu opisanego równaniem $x^2 + y^2 = 100$?

- A. 4 B. 8 C. 9 D. 12

Zadanie 6 (0–1)

Okrąg o środku w punkcie $S(-1, 2)$ i promieniu $\sqrt{10}$ przechodzi przez punkt

- A. $(-3, -1)$ B. $(1, -2)$ C. $(-2, 5)$ D. $(-2, 3)$

Zadanie 7 (0–1)

Okrąg o środku S_1 ma promień 3, a okrąg o środku S_2 ma promień 2. Okręgi te mają jeden punkt wspólny. Punkty S_1 i S_2 mogą mieć współrzędne

- A. $S_1(1, 2)$, $S_2(4, 5)$ C. $S_1(-6, 2)$, $S_2(-2, -1)$
B. $S_1(2, 1)$, $S_2(3, 2)$ D. $S_1(-4, -3)$, $S_2(-2, -2)$

**Zadanie 8 (0–1)**

Okrąg o środku w punkcie $S(-6, 3)$ jest styczny do osi OY . Wskaż równanie tego okręgu.

- A. $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 9$ C. $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$
B. $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 9$ D. $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 36$

Zadanie 9 (0–1)

Punkt B jest obrazem punktu $A(3, -2)$ w symetrii względem osi OX . Obrazem punktu B w symetrii względem osi OY jest punkt

- A. $(-3, -2)$ B. $(3, 2)$ C. $(-3, 2)$ D. $(-2, 3)$

Zadanie 10 (0–1)

Okrąg K_1 o środku $S_1(12, -8)$ jest styczny do osi OX . Okrąg K_2 – obraz okręgu K_1 w symetrii względem osi OY – jest styczny do jednej z osi układu współrzędnych w punkcie

- A. $(-8, 0)$ B. $(0, -8)$ C. $(-12, 0)$ D. $(0, -12)$

Zadanie 11 (0–2)

Dany jest okrąg K : $(x + 9)^2 + (y - 5)^2 = 1\frac{9}{16}$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Środkiem okręgu K jest punkt

- A. $(-9, -5)$ B. $(-9, 5)$ C. $(9, -5)$ D. $(9, 5)$

2. Promień okręgu K jest równy

- E. $1\frac{9}{16}$ F. $1\frac{3}{4}$ G. $1\frac{1}{2}$ H. $1\frac{1}{4}$

Zadanie 12

Punkty $A(-4, -4)$, $B(6, -4)$ i $C(14, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$.

Zadanie 12.1 (0–1)

Pole tego rombu jest równe

- A. 68 B. 60 C. 52 D. 48

Zadanie 12.2 (0–1)

Okrąg o środku w punkcie przecięcia przekątnych tego rombu, styczny do boku AB , jest dany równaniem

- A. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$ C. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$
B. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ D. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$

**Zadanie 13**

Punkty $A(-3, 7)$, $B(17, -3)$ oraz $C(13, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.

Zadanie 13.1 (0-1)

Wierzchołek D ma współrzędne

- A. $(-7, 15)$ B. $(-4, 10)$ C. $(-4, 8)$ D. $(-20, 10)$

Zadanie 13.2 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Krótszy bok równoległoboku ma długość $6\sqrt{3}$.	P	F
Dłuższy bok równoległoboku ma długość $10\sqrt{5}$.	P	F

Zadanie 14 (0-1)

Środek okręgu K_1 o promieniu 14 leży w II ćwiartce układu współrzędnych. Okrąg ten jest styczny do osi OX i do osi OY . Okrąg K_2 jest dany równaniem $(x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 196$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Okręgi K_1 i K_2 są symetryczne względem osi OX .	P	F
Odległość między środkami tych okręgów jest równa $20\sqrt{2}$.	P	F

Zadanie 15 (0-1)

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $D(-3, 5)$, $E(-3, -1)$ i $F(5, 5)$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Środek okręgu opisanego na trójkącie DEF leży

A.	na jednym z boków tego trójkąta	i ma współrzędne	1.	$(1, 2)$.
B.	wewnątrz tego trójkąta		2.	$(1, 3)$.
C.	na zewnątrz tego trójkąta		3.	$(1, 5)$.

Zadanie 16 (0-2)

Średnicą okręgu K jest odcinek o końcach $A(-2, 3)$ i $B(6, -1)$. Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do okręgu K względem początku układu współrzędnych.

**Zadanie 17 (0-2)**

Dane są punkty $A(-5, 1)$, $B(-3, 5)$, $C(5, -1)$ i $D(11, -3)$. Oblicz odległość między środkami odcinków AB i CD .

Zadanie 18 (0-2)

Wyznacz równanie okręgu o środku $S(4, 1)$ stycznego do prostej $y = -2$.

Zadanie 19 (0-2)

Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu $K: (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$ względem osi OX . Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

Zadanie 20 (0-3)

Punkty $A(4, 2)$ i $B(1, 6)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Punkt $S(0, 3)$ jest środkiem boku BC . Wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 21 (0-3)

Dane są punkty $A(-1, 3)$, $B(-5, -3)$ i $C(5, -1)$. Punkt D jest symetryczny do punktu B względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

D Zadanie 22 (0-3)

Uzasadnij, że okręgi dane równaniami:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5 \quad \text{ i } \quad (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$$

są styczne zewnętrznie.

D Zadanie 23 (0-4)

Uzasadnij, że czworokąt o kolejnych wierzchołkach $A(-2, -1)$, $B(4, 1)$, $C(6, 7)$ i $D(0, 5)$ jest rombem. Oblicz jego pole i wysokość.

Zadanie 24

W okrąg $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ wpisano trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku $C(-1, -3)$.

Zadanie 24.1 (0-2)

Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 24.2 (0-3)

Wierzchołek A ma współrzędne $(6, -2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka B oraz równanie prostej zawierającej przyprostokątną BC .

Zadanie 25 (0-4)

Prosta $k: y = 2x - 4$ przecina oś OY w punkcie A , a prosta $l: y = -\frac{1}{2}x + 6$ przecina tę oś w punkcie B . Punkt C jest punktem wspólnym tych prostych. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

**Zadanie 1 (0-3)**

Bok rombu $ABCD$ ma długość 5 oraz $\overrightarrow{AC} = [6, 2]$. Oblicz pole tego rombu.

Zadanie 2 (0-2)

Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A(4, 0)$ i $B(2, 2)$ leży na prostej $y = -x$. Oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 3 (0-3)

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(2, -1)$ równo odległej od punktów $B(2, 9)$ i $C(0, 3)$.

Zadanie 4 (0-4)

W okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ wpisano trójkąt równoboczny, którego jeden z wierzchołków ma współrzędne $(-3, 3)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Zadanie 5 (0-5)

Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego wpisanego w okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 50$ jest średnicą tego okręgu. Jedno z ramion trapezu leży na prostej $y = 3x - 15$. Oblicz wysokość tego trapezu.

Zadanie 6 (0-6)

Punkty $A(-2, 3)$, $B(0, 1)$ i $C(3, 6)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od środka okręgu na nim opisanego.

Zadanie 7 (0-4) → Przykład, str. 129

Dla jakiej wartości parametru m okrąg $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = 68$ ma dwa punkty wspólne z prostą $y = -4x + 3$?

Zadanie 8 (0-4)

W okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$ wpisano trapez. Jego wysokość jest równa $4\sqrt{2}$, a dłuższa podstawa jest zawarta w prostej $x - y = 1$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

Zadanie 9 (0-4)

Dane są wierzchołki $B(10, 5)$ i $D(1, 5)$ trapezu $ABCD$, którego podstawa AB jest trzy razy dłuższa od podstawy CD oraz $\overrightarrow{AB} = [12, 6]$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trapezu. Wyznacz wektor, którego początkiem jest środek ramienia AD , a końcem – środek ramienia BC .

Zadanie 10 (0-5)

Dla jakiej wartości parametru m pole trójkąta o wierzchołkach $A(0, -3)$, $B(2, 1)$ i $C(m, m^2 + 1)$ jest najmniejsze?

3 Ciągi

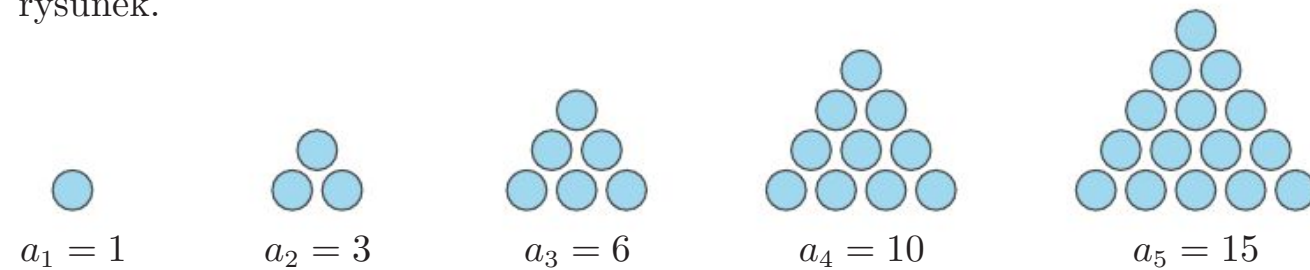
Pojęciem ciągu posługujemy się w sytuacjach, gdy mamy do czynienia z kolejno ustawionymi i ponumerowanymi obiektami. Mogą to być obiekty matematyczne lub inne. W rozdziale tym omawiamy ciągi liczbowe, czyli takie, których kolejnymi wyrazami są liczby. Przykłady ciągów:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$ – ciąg odwrotności kolejnych liczb pierwszych,
 $1, 4, 1, 41, 1, 414, 1, 4142, 1, 41421, 1, 414214, 1, 4142136, \dots$ – ciąg kolejnych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$.



3.1. Pojęcie ciągu

Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, ... to kolejne liczby trójkątne – nazwę wyjaśnia poniższy rysunek.



Mówimy, że liczby trójkątne tworzą **ciąg**. Ciąg jest określony, jeśli kolejnym liczbom naturalnym dodatnim przyporządkowano wartości: $a_1, a_2, a_3, \dots$, które nazywamy **wyrazami ciągu**.

Przykład 1

W ciągu: 1, 4, 9, 16, ... wyrazy są kwadratami kolejnych liczb naturalnych dodatnich. Na przykład wyrazy $a_9 = 9^2 = 81$, $a_{10} = 10^2 = 100$.

Ogólnie, n -ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = n^2$.

Ćwiczenie 1

Odgadnij regułę, według której mogły powstać wyrazy danego ciągu, i podaj wyrazy a_9 oraz a_{10} tego ciągu.

- a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... c) -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...
b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ d) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$

Definicja

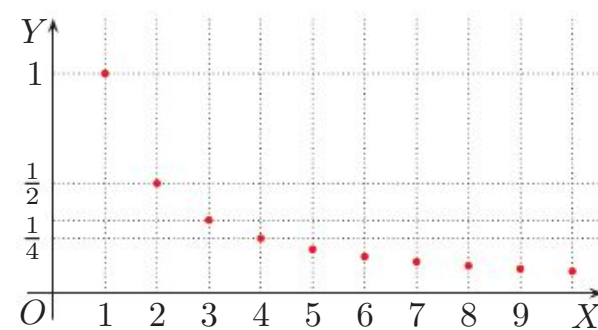
Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Uwaga. Zamiast „ciąg nieskończony” będziemy pisać krótko: „ciąg”. Czasem za dziedzinę ciągu przyjmuje się zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

Kiedy mówimy o ciągach, używamy zwykle innych oznaczeń niż do opisu funkcji. I tak ciąg $a: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczamy (a_n) . Kolejne wartości funkcji a , czyli wyrazy ciągu: $a(1), a(2), a(3), \dots$, oznaczamy odpowiednio: $a_1, a_2, a_3, \dots$

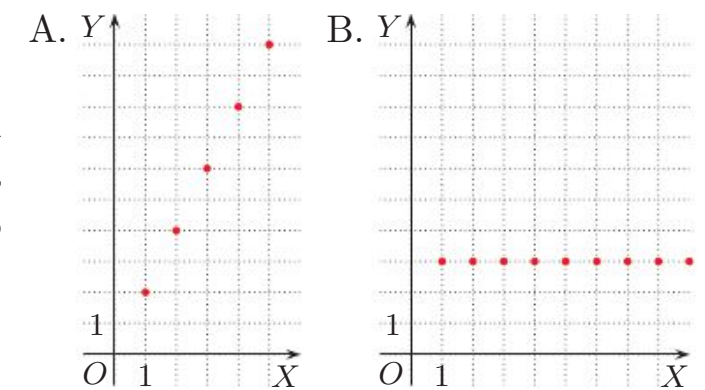
Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu odwrotności kolejnych liczb naturalnych dodatnich: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



Ćwiczenie 2

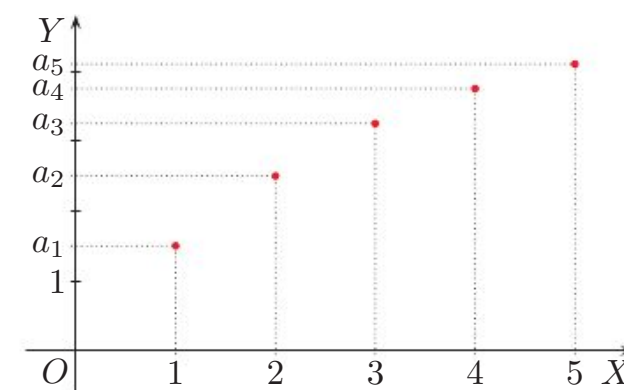
Na rysunku A przedstawiono wykres ciągu kolejnych liczb parzystych dodatnich: 2, 4, 6, 8, 10, ..., a na rysunku B – wykres ciągu stałego o wszystkich wyrazach równych 3. Podaj wyrazy siedemnasty oraz setny każdego z tych ciągów.



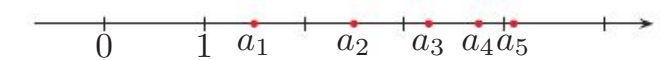
Ćwiczenie 3

Narysuj wykres ciągu:

- a) połówek kolejnych liczb naturalnych: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
b) kolejnych potęg liczby $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
c) naprzemiennego (o wyrazach na przemian dodatnich i ujemnych): 2, -2, 2, -2, 2, -2, ...



Czasami, zamiast rysować wykres ciągu w układzie współrzędnych (rysunek obok), wyrazy ciągu będziemy zaznaczać na osi liczbowej (rysunek poniżej).



Ćwiczenie 4

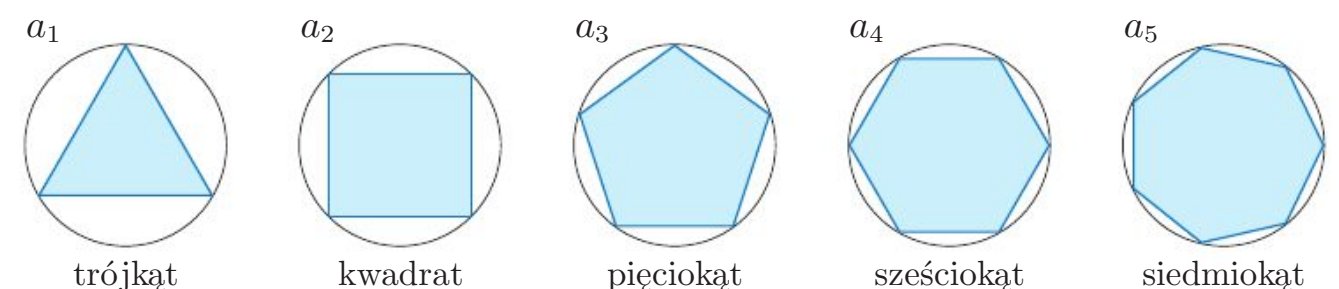
Zaznacz na osi liczbowej pięć początkowych wyrazów danego ciągu.

- a) $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{10}{2}, \frac{15}{2}, \dots$ b) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ c) $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Ciągi, których wyrazami są liczby, nazywamy **ciągami liczbowymi**. Rozpatruje się również ciągi, których wyrazami są inne obiekty, np. figury geometryczne.

Przykład 3

Na poniższych rysunkach przedstawiono pięć początkowych wyrazów ciągu wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1.



Rozpatrujemy również **ciągi skończone**, czyli takie, których dziedziną jest zbiór skończony $\{1, 2, \dots, n\}$. Ciąg: $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy **ciągiem n -wyrazowym**.

Przykład 4

W tabeli przedstawiono dwa różne ciągi siedmiowyrazowe: (a_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności następowania po sobie oraz (b_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności alfabetycznej.

Zwróć uwagę na to, że kolejność wyrazów w ciągu ma znaczenie. Jeżeli zmienimy kolejność wyrazów w ciągu, to otrzymamy nowy ciąg.

n	a_n	b_n
1	poniedziałek	czwartek
2	wtorek	niedziela
3	środa	piątek
4	czwartek	poniedziałek
5	piątek	sobota
6	sobota	środa
7	niedziela	wtorek

Zadania

1. Podaj wyrazy a_7 , a_8 , a_9 i a_{10} ciągu:

- a) kolejnych liczb nieparzystych dodatnich: 1, 3, 5, 7, ...
- b) odwrotności kolejnych liczb parzystych dodatnich: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, ...
- c) kolejnych liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, ...

2. Narysuj wykres ciągu o wyrazach:

- a) $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$
- b) $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots$
- c) $-3, 3, -3, 3, -3, 3, \dots$
- d) $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{6}, \dots$
- e) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$
- f) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$

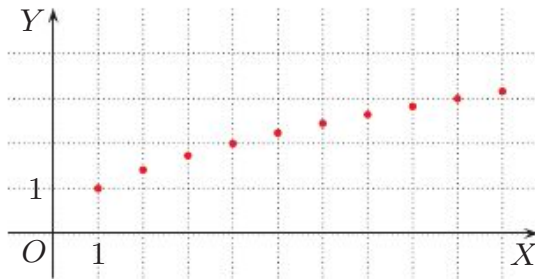
3. Wyrazy $a_1, a_2, \dots, a_6$ ciągu są przybliżeniami dziesiętnymi liczby x do pierwszego, drugiego, ..., szóstego miejsca po przecinku. Wypisz te wyrazy.

- a) $x = \sqrt{2}$
- b) $x = \sqrt{3}$
- c) $x = \pi$

4. Na rysunku przedstawiono wykres ciągu (a_n) o wyrazach: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$. Z wykresu możemy odczytać, że do przedziału $(1; 2)$ należą dwa wyrazy tego ciągu: $a_2 = \sqrt{2}$ i $a_3 = \sqrt{3}$. Ile wyrazów ciągu (a_n) należy do przedziału:

- a) $(2; 3)$,
- b) $(3; 4)$,
- c) $(4; 5)$,
- d) $(11; 12)$?

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1,41421356237309505 \\ \sqrt{3} &\approx 1,73205080756887729 \\ \pi &\approx 3,14159265358979324\end{aligned}$$



3.2. Sposoby określania ciągu

Ciąg możemy opisać słownie, podając warunki, które spełniają jego wyrazy.

Przykład 1

a) Ciąg kolejnych cyfr występujących w rozwinięciu dziesiętnym liczby π .

Jest to ciąg: 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, ...

b) Ciąg kolejnych liczb pierwszych większych od 10.

Jest to ciąg: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

Ćwiczenie 1

Wypisz siedem początkowych wyrazów ciągu:

- a) kolejnych liczb naturalnych, których pierwiastek jest liczbą niewymierną,
- b) kolejnych liczb pierwszych większych od 30.

Innym sposobem określenia ciągu jest podanie wzoru na n -ty wyraz ciągu – taki wzór nazywamy **wzorem ogólnym ciągu** (zwanym też wzorem jawnym).

Przykład 2

a) Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, 3, 4 otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}$$

b) Oblicz dziesięć początkowych wyrazów ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, ..., 10 otrzymujemy:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz cztery początkowe wyrazy oraz wyraz a_{10} ciągu (a_n) .

- a) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$
- b) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$
- c) $a_n = \frac{-3}{n(n+2)}$
- d) $a_n = n^3 - n^2$

Ćwiczenie 3

Oblicz następujące wyrazy ciągu (a_n) : a_1, a_2, a_4, a_7 i a_{10} .

- a) $a_n = (-1)^{n+1}$
- b) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n$
- c) $a_n = (-1)^n \cdot n$
- d) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$
- e) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1}$
- f) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$

Zadania

1. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

a) $a_n = 4n - 2$ d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ g) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$
b) $a_n = 3n - n^2$ e) $a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$ h) $a_n = \frac{n(1+(-1)^n)}{2}$
c) $a_n = 2^n - n$ f) $a_n = (-1)^{n+1} + n$ i) $a_n = n^2 + (-n)^{n-1}$

2. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ c) $a_n = \begin{cases} 2n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{n}{n-1} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$
b) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ d) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

3. Zaproponuj wzór ogólny ciągu.

a) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \dots$ d) $2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \dots$
b) $\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}, \dots$ e) $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \dots$
c) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \dots$ f) $0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{1}{729}, \dots$

4. Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne?

a) $a_n = n^2 - 5n - 10$ b) $a_n = n^2 - 11n + 10$ c) $a_n = 3n^2 - 10n + 8$

5. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero?

a) $a_n = n^2(n - 3)$ c) $a_n = n^3 - 4n^2 + 4n$ e) $a_n = n^4 - 13n^2 + 36$
b) $a_n = \frac{n^2 - 4n + 3}{n + 1}$ d) $a_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2n^2 + 4}$ f) $a_n = \frac{(n^3 - 64)(64 - n^2)}{3n - 1}$

6. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe jeden?

a) $a_n = 2 - (-1)^n$ b) $a_n = n^2 - 2n - 14$ c) $a_n = \frac{n^2 - 6n + 15}{n + 3}$

7. Dla jakich n zachodzi nierówność $a_n < b_n$?

a) $a_n = n(n - 5), b_n = \frac{n}{n + 5}$ b) $a_n = 2n + 6, b_n = (n^2 - 9)(n - 5)$

8. Wyznacz wyrazy ciągu (a_n) , które są liczbami całkowitymi.

a) $a_n = \frac{n + 4}{n}$ b) $a_n = \frac{2n + 8}{n + 1}$ c) $a_n = \frac{36 - n^2}{n^2}$

D 9. Uzasadnij, że wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

a) $a_n = 2n^2 - n + 9, b_n = 6 - 8n$ b) $a_n = 4n^3, b_n = 4n^2 - n$

Czasem na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu można odgadnąć regułę, według której mogły one powstać, co pozwala zaproponować wzór ogólny tego ciągu.

Przykład 3

Kolejne wyrazy ciągu	Przykładowy wzór ogólny ciągu
3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	$a_n = 2n + 1$
4, 7, 12, 19, 28, ...	$a_n = n^2 + 3$
-3, 3, -3, 3, -3, ...	$a_n = (-1)^n \cdot 3$

Ćwiczenie 4

Zaproponuj wzór na n -ty wyraz ciągu.

a) 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... e) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$
b) 0, 3, 8, 15, 24, 35, ... f) $\frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{17}, \frac{3}{26}, \frac{3}{37}, \dots$
c) -1, 4, -9, 16, -25, 36, ... g) $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \frac{1}{6 \cdot 7}, \dots$
d) 3, -9, 27, -81, 243, ... h) $\frac{1}{1 \cdot 4}, -\frac{1}{2 \cdot 5}, \frac{1}{3 \cdot 6}, -\frac{1}{4 \cdot 7}, \frac{1}{5 \cdot 8}, \dots$

Zauważmy, że na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu możemy podać różne wzory na n -ty wyraz ciągu.

Ćwiczenie 5

Trzy początkowe wyrazy ciągu (a_n) są równe: -1, 0 i 1. Oblicz wyrazy a_4, a_5 oraz a_6 .

a) $a_n = n - 2$ b) $a_n = (n - 2)^3$ c) $a_n = (n - 2)^5$

Przykład 4

Które wyrazy ciągu określonego za pomocą wzoru $a_n = 25 - n^2$ są równe zero?

$$25 - n^2 = 0$$
$$n = -5 \text{ lub } n = 5$$

Z założenia $n \in \mathbb{N}_+$, zatem jedynym wyrazem ciągu (a_n) równym zero jest a_5 .

Ćwiczenie 6

Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero? Które wyrazy tego ciągu są dodatnie?

a) $a_n = 12 - 3n$ c) $a_n = n^2 - 4$
b) $a_n = 14 - 3n$ d) $a_n = 40 - n^2$

10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej l (rysunek obok). Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

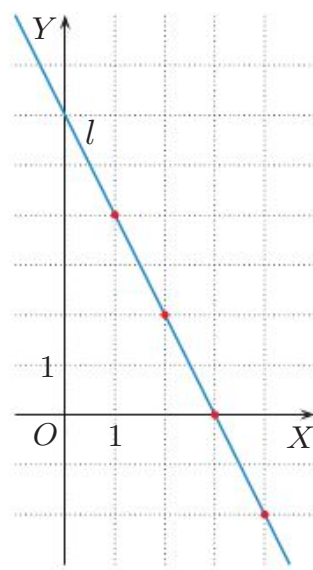
Równanie prostej l zapisujemy w postaci:

$$y = ax + b$$

Punkty $(1, 4)$ i $(3, 0)$ należą do tej prostej. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$

i otrzymujemy $a = -2$ i $b = 6$. Zatem $y = -2x + 6$, czyli wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = -2n + 6$.



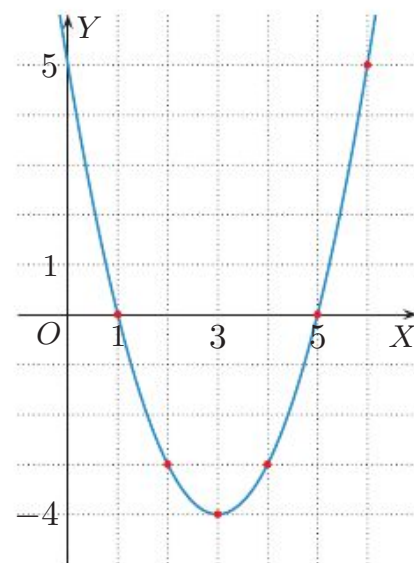
Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , którego wykres zawiera się w prostej:

- przechodzącej przez punkty $(2, 2)$ i $(6, 0)$,
- równoległej do prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ oraz największy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$,
- prostopadłej do prostej $y = 3x$ oraz $a_6 = 7$.

11. a) Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przedstawionej na rysunku obok. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

b) Które wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \leq 12$?

12. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez początek układu współrzędnych i mającej wierzchołek w punkcie $(2, 8)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.



13. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez punkty $(0, 0)$, $(2, 1)$ i $(4, 4)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_6 , a_{10} i a_{20} .

14. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli:

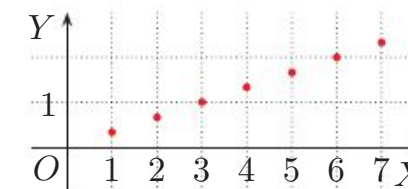
- której wierzchołek ma współrzędne $(3, 9)$ oraz $a_1 = 5$,
- która przecina oś OX w punktach $(-2, 0)$ i $(4, 0)$ oraz $a_6 = 8$,
- która przecina oś OY w punkcie $(0, -4)$ oraz $a_2 = 4$, $a_3 = 11$.

Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego ósmy wyraz.

3.3. Ciągi monotoniczne (1)

Przykład 1

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{3}$ (wykres obok) to: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

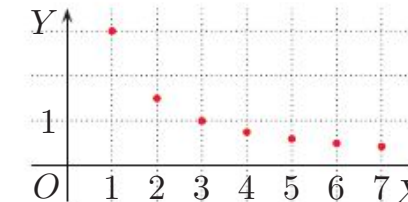


Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami rosnącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n > 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m > a_n$.

Przykład 2

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{3}{n}$ (wykres obok) to: $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest malejący.



Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami malejącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n < 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest malejący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m < a_n$.

Ćwiczenie 1

Podaj przykład ciągu:

- malejącego o wszystkich wyrazach większych od 10,
- rosnącego o wszystkich wyrazach ujemnych.

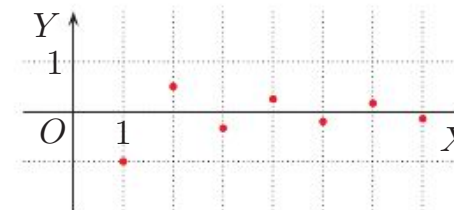
Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ (wykres obok) nie jest ani rosnący, ani malejący.

Kolejne wyrazy ciągu (a_n) to:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Aby stwierdzić, że ciąg ten nie jest ani rosnący, ani malejący, wystarczy zauważyć, że na przykład drugi wyraz jest większy od pierwszego ($a_2 > a_1$), natomiast trzeci wyraz jest mniejszy od drugiego ($a_3 < a_2$).



D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest ani rosnący, ani malejący.

a) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$ b) $-1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -\sqrt{5}, -3, -3\frac{1}{2}, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg rosnący lub malejący?

a) $a_n = (n-3)^2$ b) $a_n = -n^2 + 4n$ c) $a_n = n^2 - 7n + 5$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest rosnący lub malejący, nie wystarczy obliczenie kilku jego początkowych wyrazów. Należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 4

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n}{n+3}$. Wyznacz wyraz a_{n+1} .

$a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{2n+2}{n+4}$ Wyraz a_{n+1} otrzymujemy, wstawiając we wzorze ogólnym $n+1$ w miejsce n .

Ćwiczenie 4

Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{n}{2n+1}$ b) $a_n = \frac{-2n}{3n-2}$ c) $a_n = \frac{n-3}{n^2+1}$ d) $a_n = \frac{n^2-1}{2n-5}$

D Przykład 5

Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący.

$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$ Wyznaczamy wyraz a_{n+1} .

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Zauważmy, że $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący.

a) $a_n = n^2 - n$ b) $a_n = \frac{n}{n+4}$ c) $a_n = \frac{2n-2}{2n+1}$ d) $a_n = \frac{4n+1}{3n+1}$

D Ćwiczenie 6

Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

a) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ b) $a_n = \frac{4n+2}{5n-1}$ c) $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$ d) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

Ciągami monotonicznymi, oprócz ciągów rosnących i ciągów malejących, są ciągi stałe, ciągi niemalejące i ciągi nierosnące.

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **niemalejącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} \geq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \geq 0$).

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **nierosnącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} \leq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \leq 0$).

Uwaga. Każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym, a każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym.

Ćwiczenie 7

Jakie liczby można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać ciąg niemalejący?

a) $1, 2, 3, 4, ?, ?, 4, 5, 6, \dots$ b) $1, \frac{3}{2}, ?, 2, ?, ?, 3, 3, 3, \dots$

Ćwiczenie 8

Wypisz osiem początkowych wyrazów dowolnego nierosnącego ciągu (a_n) .

a) $a_2 = a_3 = 2, a_5 = 1$ b) $a_4 = a_6 = -1, a_7 = -2$

Zadania

1. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = \frac{3+n}{n}$ e) $a_n = \frac{3n-4}{2n+1}$ g) $a_n = \frac{2n^2+3}{2n+6}$
b) $a_n = 2n - n^2$ d) $a_n = \frac{2n}{n+5}$ f) $a_n = \frac{2-3n}{4n-5}$ h) $a_n = \frac{4-2n^2}{2n^2-1}$

D 2. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Uzasadnij, że ten ciąg nie jest monotoniczny.

a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ c) $a_n = |n-4|$ e) $a_n = (n-1)(n-3)$
b) $a_n = 4 - \frac{(-1)^n}{n}$ d) $a_n = |n^2-4|$ f) $a_n = 8n - n^2$

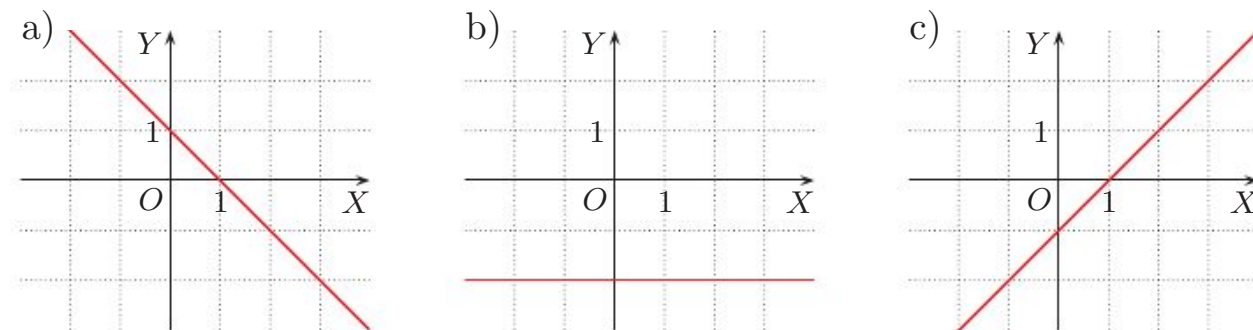
D 3. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = n^2 - 2n$ b) $a_n = 1 - n^2$ c) $a_n = 3 + \frac{7}{n}$ d) $a_n = \frac{2-4n^2}{n^2}$

D 4. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n}{2n-1}$ e) $a_n = \frac{2n-4}{3n+5}$ g) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$
b) $a_n = \frac{3n}{n+2}$ d) $a_n = \frac{3n+2}{4n+1}$ f) $a_n = \frac{2-3n}{3-4n}$ h) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

5. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej przedstawionej na rysunku. Określ monotoniczność tego ciągu.



6. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej $y = (k-1)x$. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest: a) malejący, b) rosnący, c) stały?
7. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?
a) $a_n = (2k-3)n-6$ b) $a_n = (k^2-1)n+4$ c) $a_n = (3-k^2)n$
8. Dla jakich wartości parametru t ciąg (a_n) jest nierosnący, a dla jakich – niemalejący?
a) $a_n = (3-\frac{1}{3}t)n+2$ b) $a_n = (t^2-9)(n+1)$ c) $a_n = -n(t^2-2t)$
9. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest malejący?
a) $a_n = \frac{k^2+1}{k}n$ b) $a_n = (1-\frac{1}{k})n+3$ c) $a_n = \frac{k}{k+1}n-2$
10. Dla jakich wartości parametru p ciąg (a_n) jest rosnący?
a) $a_n = n^2 - np$ b) $a_n = \frac{pn}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n+p}{n+2}$
11. a) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest rosnący.
b) Podaj przykład ciągu rosnącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest malejący.
12. a) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = |a_n|$ jest rosnący.
b) Podaj przykład ciągu rosnącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = |a_n|$ nie jest monotoniczny.
- D** 13. a) Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, $c > 0$ i $d \in \mathbb{R}$, to ciąg określony za pomocą wzoru $b_n = c \cdot a_n + d$ jest rosnący.
b) Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest malejący, $c < 0$ i $d \in \mathbb{R}$, to ciąg określony za pomocą wzoru $b_n = c \cdot a_n + d$ jest rosnący.

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

Ciąg (a_n) możemy określić, podając jego pierwszy wyraz a_1 (lub kilka początkowych wyrazów) oraz wzór na wyraz a_{n+1} wyrażony za pomocą poprzedniego wyrazu (lub kilku poprzednich). Taki sposób określenia ciągu nazywamy **rekurencyjnym**.

Przykład 1

Oblicz wyrazy a_2 , a_3 i a_4 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Podstawiamy za n kolejno 1, 2, 3 i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2 \\ a_3 &= a_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5 \\ a_4 &= a_3^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Poniżej podano rekurencyjne określenie ciągu (a_n) i obliczono wyrazy a_2 i a_3 . Oblicz wyrazy a_4 , a_5 i a_6 .

a)	$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a_2 &= a_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0 \\ a_3 &= a_2^2 - 1 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$
b)	$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \end{aligned}$
c)	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + (-1)^1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ a_3 &= 2a_2 + (-1)^2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \end{aligned}$

Ćwiczenie 2

Oblicz wyrazy $a_2, a_3, \dots, a_6$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

- a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{64} \\ a_{n+1} = 2^n \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

Przykład 2

Oblicz wyrazy $a_3, a_4, \dots, a_{10}$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (z wyjątkiem pierwszego i drugiego) jest sumą dwóch poprzednich wyrazów. Jego dziesięć początkowych wyrazów to:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

Ciąg ten znany jest jako **ciąg Fibonacciego** [czyt. fibonacczego].

Czy wiesz, że...

Leonardo z Pizy (ok. 1180–1250), znany jako Fibonacci, jest uważany za najwybitniejszego matematyka średnio-wiecznej Europy. Podróżując po krajach Wschodu, zapoznał się z osiągnięciami matematyki arabskiej i hinduskiej. W swoim dziele *Liber abaci* z 1202 r. dokonał podsumowania stanu ówczesnej wiedzy matematycznej.



Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_3, a_4, a_5 i a_6 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

- a) $\begin{cases} a_1 = 0, & a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_{n-1} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2, & a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

D Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - n^2 & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$ i określamy jej znak:

$a_{n+1} - a_n = a_n - n^2 - a_n = -n^2 < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest malejący.

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n + 4n^2 - 1 & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = n^2 \cdot a_n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^n} & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} \cdot a_n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

Podanie wzoru ogólnego ciągu, który jest określony rekurencyjnie, może być trudne. Natomiast jeśli znamy wzór ogólny ciągu, to ciąg ten możemy zdefiniować rekurencyjnie.

Przykład 4

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n(n+1)$. Określ ten ciąg rekurencyjnie.

Wyznaczamy wyrazy: $a_1 = 1 \cdot 2 = 2$ oraz $a_{n+1} = (n+1)(n+2)$.

• Ciąg możemy określić rekurencyjnie na podstawie różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2n+2$$

Stąd otrzymujemy rekurencyjne określenie ciągu (a_n) :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2 & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

• Rekurencyjne określenie ciągu możemy również wyznaczyć na podstawie ilorazu ($a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n}$$

Stąd otrzymujemy inne rekurencyjne określenie ciągu (a_n) :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Określ rekurencyjnie ciąg (a_n) na dwa sposoby. Skorzystaj najpierw z różnicy $a_{n+1} - a_n$, a następnie z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- a) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2 \cdot 3^n$ e) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
- b) $a_n = n^2 + 1$ d) $a_n = (-1)^n$ f) $a_n = \sqrt{n+1}$

Zadania

1. Oblicz wyrazy a_2, a_3, a_4 i a_5 ciągu (a_n) . Ile liczb dodatnich jest wśród dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu?

- a) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n - 2^n, & n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + (n-1)^2, & n \geq 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (-2)^n, & n \geq 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2, & n \geq 1 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n - n^2 + 1, & n \geq 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = (-1)^n a_n + n, & n \geq 1 \end{cases}$

2. Ile jest liczb ujemnych wśród sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) ?

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 4a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = 2 - na_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - na_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

3. Oblicz wyraz a_5 ciągu (a_n) .

a) $\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \\ a_{n+2} = (-1)^n a_n - a_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 32, \quad a_2 = 64 \\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

4. O ciągu (a_n) wiadomo, że $a_2 + a_5 = 9$. Oblicz x . Czy ciąg (a_n) jest monotoniczny?

a) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = a_n + 2n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$

D 5. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek:

a) $a_{n+1} = a_n^2 - na_n$, b) $a_{n+1} = a_n^2 - (n+1)a_n$.

Wykaż, że niezależnie od tego, którą z liczb: $-1, 1, 2$ przyjmiemy za a_1 , otrzymamy tę samą wartość wyrazu a_4 .

6. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$ oraz:

a) $a_2 = -\frac{1}{2}$, b) $a_2 = \frac{3}{2}$, c) $a_3 = 1$, d) $a_4 = 1\frac{1}{4}$.

Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

7. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek $a_{n+1} = a_n^2 + na_n$. Ile powinno być równe a_1 , aby: a) $a_3 = 0$, b) $a_3 = 8$?

Czy wiesz, że...

Rekurencji używa się do definiowania niektórych pojęć matematycznych. Jednym z przykładów jest $n!$ (n **silnia**). Dla $n > 1$ symbol $n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Przyjmuje się również, że $0! = 1$ oraz $1! = 1$.

Rekurencyjna definicja $n!$:

$$\begin{cases} 0! = 1, \quad 1! = 1 \\ (n+1)! = n!(n+1) \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Ciąg Fibonacciego

Początkowe dwa wyrazy ciągu Fibonacciego są równe 1, a każdy następny wyraz jest sumą dwóch poprzednich wyrazów:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765...

Złota liczba a ciąg Fibonacciego

Niech ciąg (f_n) będzie ciągiem Fibonacciego. Rozpatrzmy kolejne ilorazy $\frac{f_{n+1}}{f_n}$.

$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{5}{3} = 1,6; \quad \frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{13}{8} = 1,625; \quad \frac{21}{13} = 1,61538...$$

Wartości tych ułamków są coraz bliższe złotej liczbie:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$

Nasiona słonecznika

Nasiona wielu roślin tworzą spirale układające się w dwóch przeciwnych kierunkach. Liczby spirali ułożonych w jedną i w drugą stronę są najczęściej równe dwóm kolejnym wyrazom ciągu Fibonacciego. W koszykach niektórych gatunków słoneczników w jedną stronę rozwijają się 21 spirali, a w drugą stronę rozwijają się 34 spirale; u innych gatunków słoneczników będą to np. liczby 34 i 55.



Wzór ogólny ciągu Fibonacciego

Dla ciągu Fibonacciego (f_n) prawdziwy jest wzór Bineta:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

1 Sprawdź prawdziwość tego wzoru dla $n = 1, 2, 3, 4$.

R 3.5. Ciągi monotoniczne (2)

Definicja

Ciąg (c_n) nazywamy **sumą** ciągów (a_n) i (b_n) , jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi równość $c_n = a_n + b_n$.

Podobnie definiujemy **różnicę** i **iloczyn** ciągów (a_n) i (b_n) oraz (przy założeniu, że $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$) ich **iloraz** $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

Ćwiczenie 1

Dane są ciągi $a_n = n - 1$ i $b_n = n + 1$. Podaj wzór ogólny ciągu (c_n) oraz oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = a_n \cdot b_n$ d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

Ćwiczenie 2

Dane są ciągi $a_n = n^2$ i $b_n = \frac{12}{n}$. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (c_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = a_n \cdot b_n$ d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

Przykład 1

Dane są ciągi rosnące (a_n) i (b_n) . Uzasadnij, że ciąg (c_n) będący sumą ciągów (a_n) i (b_n) też jest rosnący.

Ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące, zatem $a_{n+1} - a_n > 0$ i $b_{n+1} - b_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Wyznaczamy różnicę $c_{n+1} - c_n$:

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n)$$

Zatem $c_{n+1} - c_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, czyli ciąg (c_n) jest rosnący.

Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że suma ciągów malejących jest ciągiem malejącym.

Ćwiczenie 4

Podaj przykład takich ciągów rosnących (a_n) i (b_n) , że ciąg (c_n) określony za pomocą wzoru $c_n = a_n \cdot b_n$:

a) jest stały, b) jest malejący, c) nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 5

Podaj przykład takich ciągów rosnących (a_n) i (b_n) , że ciąg (c_n) określony za pomocą wzoru $c_n = \frac{a_n}{b_n}$: a) jest rosnący, b) jest malejący.

Zadania

- 1.** Dane są ciągi $a_n = \frac{n-1}{n}$ i $b_n = \frac{4n-1}{n}$. Zbadaj monotoniczność ciągu:

a) $(a_n + b_n)$, b) $(a_n - b_n)$, c) $(a_n \cdot b_n)$, d) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

- D 2.** Uzasadnij, że jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące, to ciąg (c_n) też jest rosnący.

a) $c_n = 2a_n + 3b_n$ b) $c_n = 2^{a_n+b_n}$

- D 3.** Zbadaj monotoniczność ciągów $a_n = \frac{4n+5}{n+2}$ i $b_n = n^3$. Uzasadnij, że ciąg $c_n = a_n \cdot b_n$ jest rosnący.

- D** 4. Uzasadnij, że ciągi $a_n = n^2 - n - 6$ i $b_n = n^4$ są rosnące, a ciąg $c_n = a_n \cdot b_n$ nie jest monotoniczny.

- D 5.** Uzasadnij, że ciągi $a_n = 2^{-2n+1}$ i $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ są malejące. Zbadaj monotoniczność ciągów $c_n = a_n \cdot b_n$ i $d_n = \frac{a_n}{b_n}$.

6. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in [0; 2\pi]$ ciąg (a_n) jest rosnący?

a) $a_n = n \sin \alpha - 3$ b) $a_n = -n \cos \alpha + \frac{1}{2}$

7. Dane są ciągi $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ i $b_n = \cos \frac{n\pi}{2}$. Zbadaj monotoniczność ciągu:

a) $a_n + b_n$, b) $a_n - b_n$, c) $n + a_n$, d) $2n - b_n$.

8. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{2k-1}{k+1}a_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = (nk+2)a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Narysuj wykres ciągu $a_n = \left[\frac{n}{2}\right]$. Czy jest to ciąg monotoniczny?

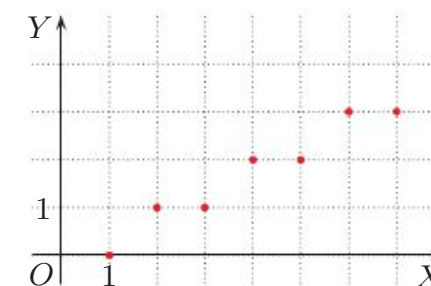
Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x .

Zatem:

$$a_1 = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 0, a_2 = \lceil 1 \rceil = 1, a_3 = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 1,$$

$$a_4 = [2] = 2, a_5 = [\frac{5}{2}] = 2, \dots$$

Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa 0 lub 1. Zatem ciąg (a_n) jest niemalejący.



Narysuj wykres ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny?

a) $a_n = \left[\frac{n}{4} \right]$ b) $a_n = -\left[\frac{n}{4} \right]$ c) $a_n = \left[\frac{n-4}{4} \right]$

3.6. Ciąg arytmetyczny (1)

Przykład 1

Pani Jola postanowiła kupić sprzęt narciarski za 2700 zł. W tym celu w pierwszym miesiącu odłożyła 500 zł, a w każdym następnym odkładała po 200 zł. W tabeli podano stan oszczędności pani Joli w kolejnych miesiącach.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
500	700	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2300	2500	2700

Zauważ, że każda z wymienionych w tabeli kwot (oprócz pierwszej) jest większa od poprzedniej o tę samą stałą wartość. Wymienione liczby stanowią przykład ciągu arytmetycznego.

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) o co najmniej trzech wyrazach nazywamy **ciągą arytmetyczną**, jeżeli istnieje taka liczba r , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_+$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 1

Podaj różnicę ciągu arytmetycznego i wypisz jego cztery następne wyrazy.

- a) 3, 12, 21, 30, ... b) $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, \dots$ c) 7, 3, -1, -5, ...

Przykład 2

Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = 6$ i $r = 5$.

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \\ a_2 &= 6 + 5 = 11 \\ a_3 &= 6 + 2 \cdot 5 = 16 \\ a_4 &= 6 + 3 \cdot 5 = 21 \\ &\vdots \\ a_{11} &= 6 + 10 \cdot 5 = 56 \end{aligned}$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu arytmetycznego, obliczamy $a_1 + (11 - 1)r$.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład 3

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego: 1, 11, 21, 31, 41, ... Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = a_2 - a_1 = 11 - 1 = 10$. Wyznaczamy wzór ogólny ciągu:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1) \cdot 10 = 10n - 9$$

Obliczamy dwudziesty wyraz: $a_{20} = 10 \cdot 20 - 9 = 191$.

Ćwiczenie 2

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

- a) 2, 4, 6, 8, 10, ... b) $4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6, \dots$ c) 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...

Ćwiczenie 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, w którym:

- a) $a_1 = 4, a_4 = 10$, b) $a_1 = -5, a_6 = 20$, c) $a_1 = 5, a_{10} = 2\frac{3}{4}$.

Twierdzenie

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:

- **rosnący**, gdy $r > 0$,
- **malejący**, gdy $r < 0$,
- **stały**, gdy $r = 0$.

Ćwiczenie 4

Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego i określ jego monotoniczność. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

- a) 9, 3, -3, -9, -15, -21, ... b) $1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 4, \dots$ c) 2, 2, 2, 2, ...

Ćwiczenie 5

Dla jakiej wartości parametru k liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, gdy:

$$b - a = c - b$$

- a) $a = 3, b = k + 1, c = 3k - 6$ b) $a = 1, b = k^2, c = k^2 + 2k + 2$

Ćwiczenie 6

Dane są wyrazy a_1, a_2, a_3 ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wyrazy a_4 i a_5 . Określ monotoniczność tego ciągu w zależności od parametru m .

- a) $a_1 = 4, a_2 = m + 6, a_3 = 2m + 8$ c) $a_1 = 1, a_2 = m^2, a_3 = 2m^2 - 1$
b) $a_1 = \frac{1}{2}m, a_2 = m - 3, a_3 = \frac{3}{2}m - 6$ d) $a_1 = m^2, a_2 = m, a_3 = 2m - m^2$

Przykład 4

Jaką liczbę należy wstawić między liczby a i b , aby otrzymany w ten sposób ciąg był arytmetyczny?

Oznaczmy szukaną liczbę przez x . Rozpatrujemy więc ciąg: a, x, b . Wówczas:

$$\begin{aligned}x - a &= b - x \\ x &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Szukaną liczbą jest więc **średnia arytmetyczna** liczb a i b . Otrzymujemy zatem ciąg: $a, \frac{a+b}{2}, b$.

Twierdzenie

W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Dowód

Dla $n \geq 2$ wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r możemy zapisać w postaci: $a_{n-1} = a_n - r$ i $a_{n+1} = a_n + r$. Zatem:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - r + a_n + r}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

Ćwiczenie 7

Podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x .

- a) 9, x , 37 b) 4, x , -8 c) $\frac{1}{2}$, x , $\frac{1}{3}$

Zadania

- Oblicz n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Określ monotoniczność tego ciągu.
a) $a_1 = -5, r = 3, n = 7$ c) $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}, n = 9$
b) $a_1 = 4, r = -4, n = 11$ d) $a_1 = 2, r = 0,1, n = 15$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_1 = 6, a_3 = 20$ b) $a_1 = -4, a_4 = 5$ c) $a_1 = 9, a_6 = 6\frac{1}{2}$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
a) $r = 2, a_3 = 5$ b) $r = -3, a_5 = 0$ c) $r = \frac{1}{2}, a_7 = -4$
- Wyznacz liczby:
a) a, b tak, aby ciąg: 1, $a, b, 10$ był arytmetyczny,
b) a, b, c tak, aby ciąg: 2, $a, b, c, 100$ był arytmetyczny.

5. Wstaw między liczby 1 i 25:

- a) pięć liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny,
b) siedem liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny.

6. W wieku od 3 do 10 lat dzieci zwykle rosną w stałym tempie. Wzrost pewnego dziecka w kolejnych latach utworzył ciąg arytmetyczny, co postanowiono przedstawić w tabeli. Przerysuj tę tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Wiek [lata]	3	4	5	6	7	8	9	10
Wzrost [cm]	98	?	?	117,5	?	?	?	?

7. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_{12} .

- a) $\begin{cases} a_6 = 20 \\ a_{10} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_3 = -9 \\ a_{15} = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_5 = 4 \\ a_{21} = 8 \end{cases}$

8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.

- a) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 22 \\ \frac{a_1}{a_5} = 21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_2^2 + a_4^2 = 16 \\ a_3 + a_5 = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{a_5}{a_1} = -1 \\ a_2 \cdot a_7 = -1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 11 \\ a_7 - a_3 = 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_3 + a_5 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_3 = \frac{5}{a_4} + 2 \end{cases}$

9. Podane liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

- a) -2, $2 + x$, $4 + x^2$ b) $2x - 3$, $3x - 5$, $\frac{1}{4}x^2 + x - 2$

10. Suma drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 2, a różnica szóstego i trzeciego wyrazu jest równa 9. Który wyraz tego ciągu jest równy 40?
11. Trzeci, piąty i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) są równe odpowiednio 4, 10 i 40. Oblicz a_1 i wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.
12. Różnica czterowyrazowego ciągu arytmetycznego jest równa 1, a iloczyn jego trzech ostatnich wyrazów jest równy -60. Wyznacz liczby tworzące ten ciąg.
13. Wyznacz cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny, w którym:
a) suma dwóch pierwszych liczb jest równa 4, a suma dwóch ostatnich jest równa -28,
b) różnica jest równa 2, a iloczyn wszystkich liczb jest równy -15.

3.7. Ciąg arytmetyczny (2)

Przykład 1

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg arytmetyczny?

a) $a_n = n^2 + n + 1$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

$$a_4 = 4^2 + 4 + 1 = 21$$

Aby wykazać, że ciąg nie jest arytmetyczny, wystarczy wskazać wyrazy a_k , a_{k+1} oraz a_n , a_{n+1} takie, że $a_{k+1} - a_k \neq a_{n+1} - a_n$.

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$ oraz $a_3 - a_2 = 13 - 7 = 6$, zatem $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

b) $a_n = (n - 2)^3 + 2$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = (1 - 2)^3 + 2 = 1 \quad a_3 = (3 - 2)^3 + 2 = 3$$

$$a_2 = (2 - 2)^3 + 2 = 2 \quad a_4 = (4 - 2)^3 + 2 = 10$$

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1$, ale $a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że ciąg o podanych początkowych wyrazach nie jest arytmetyczny.

a) 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, ... b) $1, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -5, -6\frac{1}{2}, \dots$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny, nie wystarczy sprawdzić różnicy między kilkoma początkowymi wyrazami tego ciągu. Należy wykazać, że różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

D Przykład 2

Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{3n+2}{2}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+2}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3n+5}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Różnica ta jest stała dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

D Ćwiczenie 2

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 6n - 2$ b) $a_n = \frac{2n-5}{3}$ c) $a_n = \sqrt{2}n$ d) $a_n = 13 - \frac{1}{10}n$

Przykład 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego:

$$-3, -1, 1, 3, 5, \dots$$

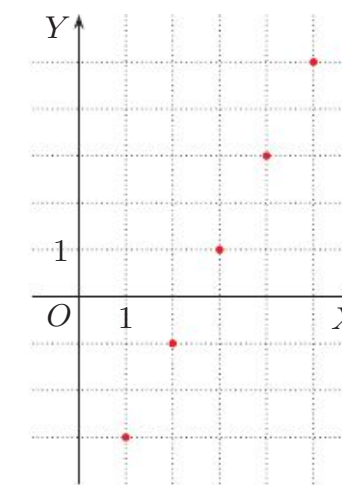
Narysuj wykres tego ciągu.

Różnica tego ciągu jest równa 2.

Wyznaczamy wzór ogólny:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r = -3 + (n-1) \cdot 2 = \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

Zauważmy, że wykres tego ciągu jest zawarty w prostej $y = 2x - 5$.



Ćwiczenie 3

a) Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego: 6, 4, 2, 0, -2, ... Narysuj jego wykres i podaj równanie prostej, w której się on zawiera.

b) Wykres ciągu arytmetycznego jest zawarty w prostej $y = 3x - 2$. Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu oraz jego wzór ogólny.

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres zawiera się w pewnej prostej $y = ax + b$.

Zadania

1. Dany jest ciąg $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n$.

a) Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

D b) Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

2. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = \frac{n+2}{6}$ c) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ e) $a_n = \frac{1}{2}(n-7)$

b) $a_n = \frac{\sqrt{5}n+1}{2}$ d) $a_n = \frac{9n^2-4}{3n+2}$ f) $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)(7-n)$

D 3. Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) też jest ciągiem arytmetycznym.

a) $b_n = 3a_n + 2$ b) $b_n = -2a_n + n$ c) $b_n = 6 - \frac{a_n+2}{4}$

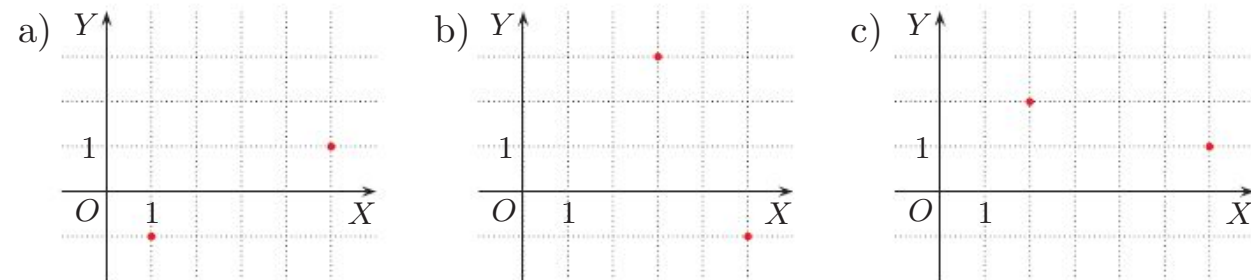
D 4. Wykaż, że jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są ciągami arytmetycznymi, to ciąg (c_n) też jest ciągiem arytmetycznym.

a) $c_n = 2a_n + 3b_n$ b) $c_n = 3a_n - 4b_n + \frac{n}{2}$ c) $c_n = \frac{4a_n - \sqrt{2}b_n}{3}$

5. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w podanej prostej. Podaj wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

a) $y = 5x - 4$ b) $y = -3x + 1$ c) $y = \sqrt{3}x - 2$

6. Na rysunku przedstawiono dwa punkty należące do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od zera?



- D** 7. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Uzasadnij, że jest on arytmetyczny i rosnący. Zapisz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego dziesiąty wyraz.

a) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$ b) $\begin{cases} a_1 = 3\sqrt{2} \\ a_{n+1} = a_n + \sqrt{2} \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$

- D** 8. a) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Wykaż, że ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.
b) Wykaż, że dla dowolnej funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.

9. a) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Oblicz obwód tego trójkąta.
b) Długości boków trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna ma długość 10, tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

- D** 10. a) Wykaż, że długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5.

- b) Długości boków trójkąta prostokątnego, którego obwód jest równy 18, tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz pole tego trójkąta.

11. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest arytmetyczny i malejący?

a) $a_n = (k^2 + 2k - 1)n + 2$ b) $a_n = \frac{kn + 2}{(k^2 - 1)n^2 + 2}$

12. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest arytmetyczny i rosnący?

a) $a_n = (4 - 2^k)n$ b) $a_n = (9^k - 3)n$

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) oznaczamy symbolem S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Przykład 1

Oblicz sumę S_{100} wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

Zapisujemy sumę S_{100} na dwa sposoby i dodajemy równości stronami:

$$\begin{array}{r} S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 \\ S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{100} = 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Zatem $2S_{100} = 101 \cdot 100$, czyli $S_{100} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

- a) od 1 do 50, b) od 1 do n .

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Dowód

Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r , to sumę n początkowych wyrazów tego ciągu możemy zapisać w postaci:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + \dots + (a_1 + (n-2)r) + (a_1 + (n-1)r)$$

Sumowane wyrazy możemy też zapisać w odwrotnej kolejności:

$$S_n = (a_1 + (n-1)r) + (a_1 + (n-2)r) + \dots + (a_1 + r) + a_1$$

Dodajemy do siebie stronami powyższe równania i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2S_n &= (2a_1 + (n-1)r) + ((2a_1 + (n-1)r) + \dots + (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r)) \\ 2S_n &= (2a_1 + (n-1)r) \cdot n \\ S_n &= \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \end{aligned}$$

Przykład 2

Oblicz sumy S_5 i S_8 ciągu arytmetycznego: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

$$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \frac{2+10}{2} \cdot 5 = 30$$

$$S_8 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = \frac{2+16}{2} \cdot 8 = 72$$

Ćwiczenie 2

a) Oblicz wyraz a_6 , a następnie sumę S_6 ciągu arytmetycznego: 1, 4, 7, 10, ...

b) Oblicz wyraz a_{20} , a następnie sumę S_{20} ciągu arytmetycznego: $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ...

W obliczeniach wykorzystuje się również podaną niżej postać wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Przykład 3

Oblicz sumę S_{21} ciągu arytmetycznego: 3, 8, 13, 18, ...

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 5$, zatem:

$$S_{21} = \frac{2 \cdot 3 + (21-1) \cdot 5}{2} \cdot 21 = \frac{6+100}{2} \cdot 21 = 53 \cdot 21 = 1113$$

Ćwiczenie 3

a) Oblicz sumę S_{31} ciągu arytmetycznego: 3, 7, 11, ...

b) Oblicz sumę S_{13} ciągu arytmetycznego: -5, -8, -11, ...

D Przykład 4

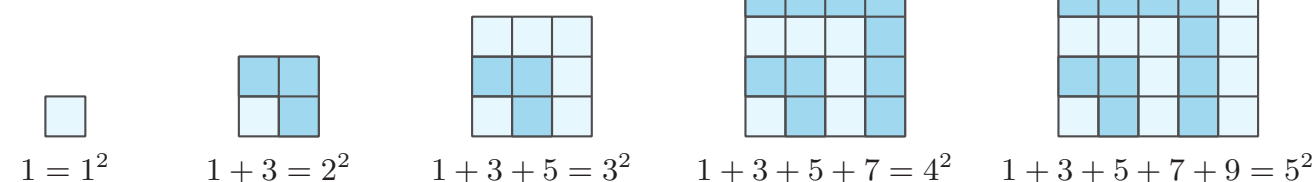
Uzasadnij wzór na sumę n początkowych liczb nieparzystych dodatnich:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $a_n = 2n-1$. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2$$

Na poniższych rysunkach przedstawiono ilustrację graficzną tego wzoru.



D Przykład 5

Uzasadnij wzór $1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{3n^2-n}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.

Podane składniki sumy tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 3$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i wyrazie $a_n = 3n-2$. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

$$S_n = \frac{1 + (3n-2)}{2} \cdot n = \frac{3n^2-n}{2}$$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbb{N}_+$.

$$\text{a) } n + 2n + 3n + \dots + n^2 = \frac{n^3+n^2}{2} \quad \text{b) } 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n^2-n}{2}$$

Przykład 6

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1.

Liczy naturalne, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1, mają postać $6n+1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Warunki zadania spełniają zatem liczby:

$$6 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 6 \cdot 1 + 1 = 7, \quad 6 \cdot 2 + 1 = 13, \quad \dots, \quad 6 \cdot 16 + 1 = 97$$

Tworzą one 17-wyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 6$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ostatnim wyrazie $a_{17} = 97$. Zatem:

$$S_{17} = \frac{1+97}{2} \cdot 17 = 49 \cdot 17 = 833$$

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę, której składnikami są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

$$\text{a) } 7 + 11 + 15 + \dots + 47 + 51 \quad \text{c) } -5 - 7 - 9 - \dots - 29 - 31$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \dots + 99\frac{1}{2} + 100 \quad \text{d) } -18 - 15 - 12 - \dots + 15 + 18$$

Ćwiczenie 6

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa:

$$\text{a) } 3, \quad \text{b) } 4, \quad \text{c) } 3 \text{ lub } 4.$$

Zadania

1. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .

$$\text{a) } a_1 = -2 \text{ i } r = 3 \quad \text{b) } a_1 = 4 \text{ i } r = -5 \quad \text{c) } a_1 = 1,5 \text{ i } r = -0,1$$

2. Oblicz wyrazy a_1 i a_{10} oraz sumę S_{10} ciągu arytmetycznego (a_n) .

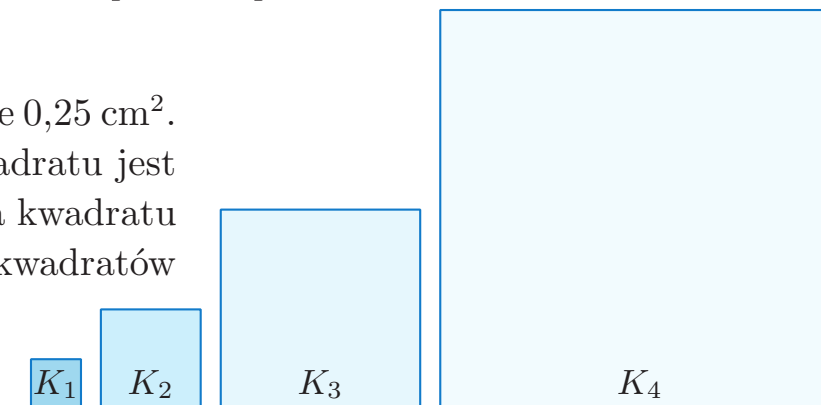
$$\text{a) } a_4 = 6 \text{ i } a_8 = 14 \quad \text{b) } a_6 = 1 \text{ i } a_8 = 3 \quad \text{c) } a_2 = 12 \text{ i } a_4 = 0$$

3. Ustal, ile wyrazów ma podany skończony ciąg arytmetyczny, oraz oblicz ich sumę.
 a) 4, 7, 10, ..., 34 b) $\frac{1}{3}$, 1, $1\frac{2}{3}$, ..., $9\frac{2}{3}$ c) -3, -5, -7, ..., -41
4. a) Oblicz sumę wszystkich liczb parzystych zawartych między 13 a 2027.
 b) Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych nieparzystych dodatnich.
5. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, których reszta z dzielenia:
 a) przez 5 jest równa 1 i które są mniejsze od 100,
 b) przez 4 jest równa 3 i które są większe od 10 oraz mniejsze od 80,
 c) przez 6 jest większa od 3 i które są mniejsze od 100.
6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1001, które są podzielne przez: a) 2 lub 3, b) 3 lub 5, c) 5 lub 9.
7. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, które:
 a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe, c) są mniejsze od 500.
8. Ciąg arytmetyczny składa się z dziesięciu wyrazów. Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy 7, a suma dwóch wyrazów środkowych jest równa 8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu oraz sumę wszystkich jego wyrazów.
- D** 9. Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbb{N}_+$.
 a) $6 + 12 + 18 + \dots + 6n = 3n(n + 1)$
 b) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = n(3n + 1)$
10. Ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać sumę 546?
 a) 6, 8, 10, ... b) 13, 17, 21, ... c) -24, -22, -20, ...
11. Rozwiąż równanie.
 a) $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + x = 190$
 b) $(1 + x) + (3 + x) + (5 + x) + \dots + (25 + x) = 130$
 c) $(1 + x) + (2 + 3x) + (3 + 5x) + (4 + 7x) + \dots + (50 + 99x) = 275$
 d) $(1 + x) + (5 + 2x) + (9 + 3x) + \dots + (61 + 16x) = -48$
12. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
 a) $a_n = \frac{5 + 10 + 15 + \dots + 5n}{n + 3}$ c) $a_n = \frac{6 + 12 + 18 + \dots + 6n}{n^2}$
 b) $a_n = \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n + 5}$ d) $a_n = \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)}{n^2 + n}$

3.9. Ciąg geometryczny (1)

Ćwiczenie 1

Pole kwadratu K_1 jest równe $0,25 \text{ cm}^2$. Pole każdego kolejnego kwadratu jest cztery razy większe od pola kwadratu poprzedniego. Oblicz pola kwadratów K_2 , K_3 i K_4 .



Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) o co najmniej trzech wyrazach nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_+$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 2

Podaj iloraz ciągu geometrycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

- a) 3, 6, 12, ... c) 4, 2, 1, ... e) 1, -2, 4, ...
 b) $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$ d) 64, 16, 4, ... f) -27, 9, -3, ...

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- a) $a_1 = 1$, $q = 3$ c) $a_1 = 5$, $q = -1$ e) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $q = \sqrt{2}$
 b) $a_1 = 16$, $q = \frac{1}{2}$ d) $a_1 = \frac{1}{4}$, $q = -2$ f) $a_1 = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{6}$

Twierdzenie

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Ćwiczenie 4

Oblicz iloraz ciągu geometrycznego o podanych dwóch kolejnych wyrazach.

- a) 27 i 243 c) -216 i -36 e) $\sqrt{2}$ i -4
 b) $\frac{8}{9}$ i $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{6}{5}$ i $\frac{9}{10}$ f) $2\sqrt{3}$ i $3\sqrt{2}$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest ciągiem geometrycznym.

- a) 4, 8, 16, 32, 60, 120, ... b) 1, -2, 4, -8, 16, 32, ... c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{27}{32}, \frac{81}{64}, \dots$

Przykład 1

Oblicz jedenasty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ oraz ilorazie $q = 2$.

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$\vdots$$

$$a_{11} = 3 \cdot 2^{10} = 3072$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu geometrycznego, obliczamy $a_1 \cdot q^{11-1}$.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

a) $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2, n = 6$

e) $a_1 = -2, q = -3, n = 5$

b) $a_1 = 25, q = \frac{1}{5}, n = 7$

f) $a_1 = -7, q = -1, n = 15$

c) $a_1 = 8, q = \frac{2}{3}, n = 4$

g) $a_1 = 5, q = \sqrt{2}, n = 9$

d) $a_1 = \frac{1}{10}, q = 2\frac{1}{2}, n = 6$

h) $a_1 = \sqrt{3}, q = -\frac{\sqrt{3}}{3}, n = 8$

Ćwiczenie 7

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

a) $a_4 = 1, q = \frac{1}{2}$

b) $a_6 = 16, q = -2$

c) $a_8 = 81, q = 3$

Zadania

1. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) o podanych wyrazach początkowych. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz a_7 .

a) 128, 64, 32, ...

c) $\frac{1}{243}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \dots$

e) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

b) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, \dots$

d) $\frac{625}{256}, \frac{125}{64}, \frac{25}{16}, \dots$

f) $\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \dots$

2. Oblicz wyrazy czwarty i piąty podanego ciągu geometrycznego.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}, 2 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 2, \dots$ b) $\sqrt{2} - 1, 1, \sqrt{2} + 1, \dots$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_4 = 6$ oraz $a_6 = 54$.

Jeżeli q jest ilorazem ciągu (a_n) , to $a_4 = a_1 \cdot q^3$ oraz $a_6 = a_1 \cdot q^5$, zatem otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 6 \\ a_1 \cdot q^5 = 54 \end{cases}$$

Dzielimy stronami drugie równanie przez pierwsze:

$$\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^3} = \frac{54}{6}$$

Stąd $q^2 = 9$, czyli $q = -3$ lub $q = 3$.

Dla $q = -3$ mamy $a_1 = -\frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = -\frac{2}{9} \cdot (-3)^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2, 6, -18, \dots$).

Dla $q = 3$ mamy $a_1 = \frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = \frac{2}{9} \cdot 3^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18, \dots$).

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_2 = \frac{5}{12}, a_3 = \frac{2}{15}$

c) $a_2 = 7, a_4 = 28$

e) $a_6 = 32, a_{10} = 2$

b) $a_3 = 1\frac{1}{2}, a_4 = 1\frac{1}{4}$

d) $a_3 = -3, a_6 = -24$

f) $a_6 = 1, a_8 = 9$

4. Oblicz brakujące wyrazy ciągu geometrycznego.

a) $?, ?, -27, -9, ?$

c) $?, 6, ?, ?, 48, ?$

e) $8, ?, ?, ?, ?, \frac{1}{4}$

b) $?, ?, ?, ?, 3, -6$

d) $?, ?, 3, ?, ?, -81$

f) $\frac{5}{9}, ?, ?, ?, ?, 135$

5. Wstaw między liczby x i y trzy liczby tak, aby otrzymać ciąg geometryczny (podaj dwa rozwiązania).

a) $x = -2, y = -32$

b) $x = 3, y = 768$

c) $x = 7, y = 7$

6. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , w którym:

a) suma drugiego i trzeciego wyrazu jest równa 6, a różnica czwartego i drugiego wyrazu jest równa 24,

b) suma drugiego i szóstego wyrazu jest równa -34, a suma pierwszego i piątego wyrazu jest równa 17.

3.10. Ciąg geometryczny (2)

Przykład 1

Pani Kasia ulokowała 2000 zł na koncie o stałym oprocentowaniu 5% w skali roku. W tabeli obok przedstawiono stan oszczędności pani Kasi po upływie kolejnych lat. I tak po upływie roku stan jej konta wyniesie:

$2000 \cdot 105\% = 2000 \cdot 1,05 = 2100 \text{ [zł]}$

a po upływie dwóch lat:

$2100 \cdot 105\% = 2100 \cdot 1,05 = 2205 \text{ [zł]}$

Wpłata:	2000,00
$2000,00 \cdot 1,05 =$	2100,00
$2100,00 \cdot 1,05 =$	2205,00
$2205,00 \cdot 1,05 =$	2315,25
$2315,25 \cdot 1,05 \approx$	2431,01
$2431,01 \cdot 1,05 \approx$	2552,56

Otrzymany ciąg jest przykładem rosnącego ciągu geometrycznego.

Twierdzenie

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ i ilorazie q jest:

- rosnący, gdy $q > 1$,
- malejący, gdy $0 < q < 1$,
- stały, gdy $q = 1$.

Ćwiczenie 1

- D** a) Sformułuj i uzasadnij analogiczne twierdzenie o monotoniczności ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie ujemnym.
- b) Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij. Podaj przykłady odpowiednich ciągów geometrycznych i określ ich monotoniczność.

	$a_1 < 0$	$a_1 > 0$
$q < 0$	?	1, -2, 4, -8, 16, ... nie jest monotoniczny
$q = 0$	-3, 0, 0, 0, 0, ... niemalejący	?
$0 < q < 1$	?	?
$q > 1$	?	?

Stałym ciągiem geometrycznym jest również ciąg: 0, 0, 0, 0, ... Jego pierwszy wyraz $a_1 = 0$, a iloraz może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) .

- a) $a_3 = 2, a_5 = 4,5$ b) $a_1 = -8, a_5 = -\frac{1}{2}$ c) $a_2 = -4, a_6 = -64$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest geometryczny, należy wykazać, że iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

D Przykład 2

Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 3 \cdot 4^n$ jest ciągiem geometrycznym. Określ jego monotoniczność.

Wyznaczamy iloraz ciągu: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 4^{n+1}}{3 \cdot 4^n} = 4$.

Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest geometryczny. Jest to ciąg rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q = 4 > 1$.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.

- a) $a_n = \frac{5}{2^n}$ c) $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 2^n$ e) $a_n = 6 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$
b) $a_n = (-\frac{1}{7})^n$ d) $a_n = -2 \cdot (\frac{1}{3})^n$ f) $a_n = 4^{2n+1}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Liczby a, b, c , różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a \cdot c$.

Ćwiczenie 5

Podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz je.

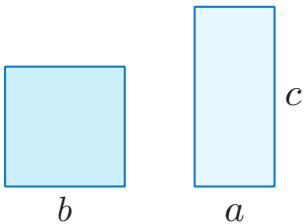
- a) $x, x + 1, x - 3$ b) $\frac{1}{x+1}, x, 3x^2$ c) $x^2 - 1, x + 1, 2x - 1$

Średnia geometryczna

Jeśli dodatnie liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, to $b = \sqrt{a \cdot c}$.

Liczbę $\sqrt{a \cdot c}$ nazywamy **średnią geometryczną** liczb a i c .

Pole kwadratu o boku b jest równe polu prostokąta o bokach a i c , jeśli b jest równe średniej geometrycznej liczb a i c .



W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ dla $n \geq 2$

Ćwiczenie 6

Ciąg geometryczny (a_n) ma wszystkie wyrazy dodatnie oraz $a_5 = 20$ i $a_7 = 45$. Oblicz wyraz a_6 .

Zadania

- D** 1. Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.
a) $a_n = \frac{4}{3^n}$ b) $a_n = 2 \cdot (-5)^n$ c) $a_n = 4 \cdot (\sqrt{3})^{n+1}$ d) $a_n = -2 \cdot 5^{2n-1}$

- D** 2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Uzasadnij, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n^2 - n + 2$ nie jest geometryczny.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: 2, 4, 8, 14, ... i badamy ilorazy:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{14}{8} \neq 2$$

Zatem ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

a) $a_n = n^2 - 2n + 2$ b) $a_n = -n^2 + 4n - 2$

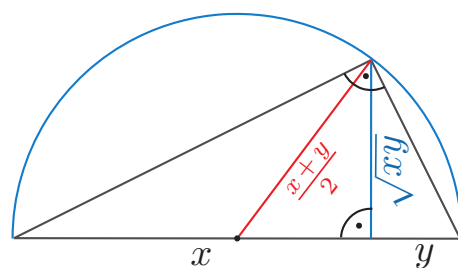
3. Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $\begin{cases} a_6 = -4 \\ a_{10} = -\frac{1}{64} \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 1 \\ a_2^2 = 25a_3^2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 1 \\ a_2^2 + a_3^2 = 5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_4 = 3a_2 \\ a_1 \cdot a_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_2 + a_3 = 30 \\ a_4 - a_2 = 120 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 6 \\ a_3^2 - a_2^2 = 12 \end{cases}$

4. Liczby a, b, c, d są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego. Suma dwóch liczb środkowych jest równa 24, a suma dwóch liczb skrajnych jest równa 36. Wyznacz te liczby.

5. Liczby x, y, z tworzą monotoniczny ciąg geometryczny. Podwojona suma pierwszej i drugiej liczby jest równa sumie drugiej i trzeciej liczby, a suma tych trzech liczb jest równa 77. Wyznacz te liczby.

- D** 6. a) Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków, na jakie wysokość ta dzieli przeciwprostokątną (rysunek obok).



- b) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi następująca zależność między ich średnią arytmetyczną a geometryczną:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Kiedy te średnie są równe?

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Przykład 1

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

Aby obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, można skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dowód

Kolejne wyrazy ciągu to: $a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_1q^2, \dots, a_n = a_1q^{n-1}$, zatem:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n$$

Mnożymy obie strony równania przez q .

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dzielimy obie strony równania przez $1-q$ (z założenia $q \neq 1$).

Uwaga. Jeśli iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 1, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu dana jest wzorem $S_n = n \cdot a_1$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, korzystając z podanego wzoru. Sprawdź otrzymany wynik, dodając wyrazy ciągu.

a) 1, 3, 9, 27, ... b) 1, -2, 4, -8, ... c) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{32}$ i ilorazie: a) $q = 2$, b) $q = 4$, c) $q = 1$.

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n) .

- a) $a_1 = 3, a_2 = -6, n = 6$ b) $a_1 = -4, a_2 = -12, n = 5$

Przykład 2

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie 3. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 1456?

Niech n będzie szukaną liczbą wyrazów. Wówczas:

$$\begin{aligned}4 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} &= 1456 \\1-3^n &= -728 \\3^n &= 729 \\3^n &= 3^6\end{aligned}$$

Zatem $n = 6$. Należy dodać sześć początkowych wyrazów tego ciągu.

Ćwiczenie 4

- a) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 635?
- b) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie $\frac{3}{2}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać $16\frac{1}{4}$?

Ćwiczenie 5

Suma pierwszego i czwartego wyrazu ciągu geometrycznego jest równa 26, a suma drugiego i piątego wyrazu jest równa -78 . Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać -61 ?

Ciąg (b_n) nazywamy **podciągami** ciągu (a_n) , jeśli możemy go otrzymać poprzez wybranie jego wyrazów spośród wyrazów ciągu (a_n) bez zmiany ich kolejności. Na przykład podciągami ciągu geometrycznego: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... są:

- 2, 8, 32, 128, 512, ... – podciąg wyrazów o numerach parzystych,
- 1, 4, 16, 64, 256, ... – podciąg wyrazów o numerach nieparzystych,
- 512, 1024, 2048, 4096, ... – podciąg wyrazów podzielnych przez 512.

Ćwiczenie 6

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie -2 jest równy 3. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów jego podciągu złożonego z wyrazów o numerach:

- a) nieparzystych, b) parzystych.

Zadania

1. Oblicz sumę S_8 ciągu geometrycznego (a_n) , którego wyrazy pierwszy i drugi są odpowiednio równe:

- a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}$, b) 18, 6, c) 15, -30 , d) $-7, -7$.

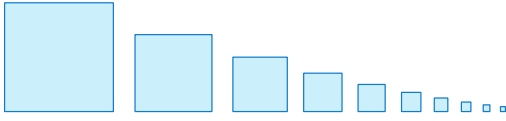
2. Oblicz sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- a) $a_1 = -1, q = 2, n = 8$ c) $a_1 = 3, q = -\sqrt{2}, n = 10$
b) $a_1 = \frac{2}{9}, q = \frac{3}{2}, n = 5$ d) $a_1 = 5, q = 1, n = 20$

3. Ciąg (a_n) jest geometryczny. Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	?	?	242
?	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$	?
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{2}$	8	?	?

4. Pola dziesięciu kwadratów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$. Największy spośród tych kwadratów ma pole równe 1 cm^2 . Oblicz sumę ich:



- a) pól, b) obwodów.

5. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- a) $q = 2, S_4 = 60$ c) $q = 3, S_6 = 728$ e) $q = -\sqrt{2}, S_6 = -7$
b) $q = \frac{1}{2}, S_4 = 2046$ d) $q = -\frac{1}{2}, S_5 = 33$ f) $q = -1, S_{13} = 9$

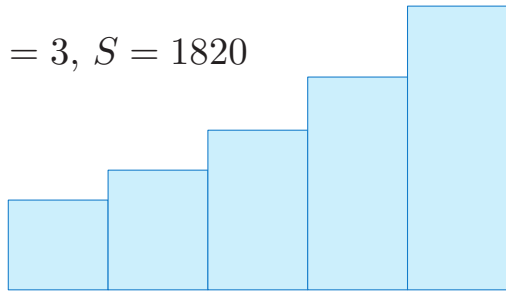
6. Ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2 należy dodać, aby otrzymać:

- a) 315, b) 2555, c) 5115?

7. Wyznacz liczbę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q i sumie wszystkich wyrazów S .

- a) $a_1 = 6, q = -2, S = 258$ b) $a_1 = 5, q = 3, S = 1820$

8. Pola pięciu prostokątów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{4}{3}$. Suma tych pól jest równa $\frac{781}{90} \text{ cm}^2$. Oblicz pole najmniejszego prostokąta.





9. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q . Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać sumę równą S ?

a) $a_1 = 10, q = 0,9, S = 34,39$ b) $a_1 = 100, q = 0,4, S = 164,96$

10. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 33, a różnica wyrazów pierwszego i szóstego jest równa 99. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

11. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = x$ i ilorazie $q = -1$ w przypadku, gdy n jest liczbą:

a) parzystą, b) nieparzystą.

12. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , którego suma:

a) $S_3 = 35$, a różnica wyrazów pierwszego i czwartego jest równa 17,5,

b) $S_4 = 20$, a różnica wyrazów pierwszego i trzeciego jest równa 8.

13. Ciąg geometryczny (a_n) spełnia warunki: $S_5 - S_3 = 72$ i $a_4 - a_3 = 12$. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

14. Suma czterech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 8, a suma kolejnych czterech wyrazów jest równa 72. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

15. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 6, a stosunek sumy pięciu początkowych wyrazów tego ciągu do sumy kolejnych pięciu wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.

16. Dany jest dziesięciowyrazowy ciąg geometryczny (a_n) . Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 341, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 682. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

17. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 21, a suma trzech następnych jest równa 168. Który wyraz tego ciągu jest równy 192?

18. Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 93 \quad \text{ i } \quad a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 372$$

Oblicz pierwszy wyraz oraz iloraz tego ciągu.

D 19. Dany jest skończony ciąg geometryczny o parzystej liczbie wyrazów. Iloraz i pierwszy wyraz tego ciągu są różne od zera. Wykaż, że stosunek sumy wyrazów o numerach parzystych do sumy wyrazów o numerach nieparzystych jest równy ilorazowi tego ciągu.

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Przykład 1

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = 2n^2$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu:

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$$

Dla $n > 1$ wyraz a_n możemy wyznaczyć ze wzoru $a_n = S_n - S_{n-1}$:

$$a_n = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 2n^2 - 2(n^2 - 2n + 1) = 4n - 2$$

Stąd $a_{n+1} = 4(n+1) - 2 = 4n + 2$.

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4n + 2 - (4n - 2) = 4$ dla $n > 1$.

Należy jeszcze obliczyć różnicę $a_2 - a_1$:

$$a_2 - a_1 = (4 \cdot 2 - 2) - 2 = 4$$

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, więc ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy ciąg (a_n) o sumie S_n jest ciągiem arytmetycznym.

a) $S_n = n^2 - 4$ b) $S_n = n^2 + 2n$ c) $S_n = 6n - 2n^2$ d) $S_n = 2n$

Przykład 2

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 21. Jeśli od pierwszej i drugiej liczby odejmiemy 3, a od trzeciej odejmiemy 1, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

Zapisujemy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: $a - r, a, a + r$. Ich suma:

$$a - r + a + a + r = 21$$

$$a = 7$$

Zatem szukane liczby mają postać: $7 - r, 7, 7 + r$.

Zgodnie z warunkami zadania liczby $4 - r, 4, 6 + r$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, zatem zachodzi równość:

$$4^2 = (4 - r)(6 + r)$$

$$r^2 + 2r - 8 = 0$$

$$r = -4 \text{ lub } r = 2$$

Dla $r = -4$ otrzymujemy liczby: 11, 7, 3.

Dla $r = 2$ otrzymujemy liczby: 5, 7, 9.

Ćwiczenie 2

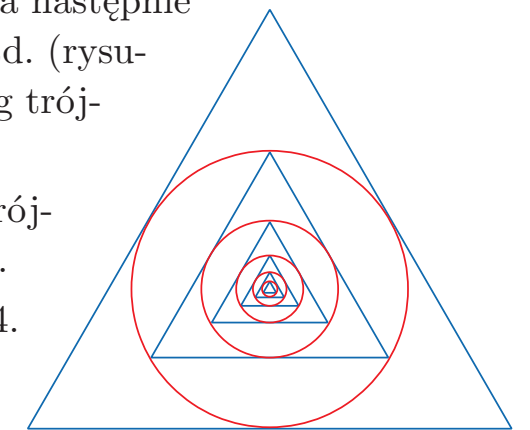
- a) Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od drugiej z nich odejmiemy 1, a do trzeciej dodamy 6, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
- b) Liczby a , b , c , których suma jest równa 12, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby $a + 1$, $b + 2$, $c + 6$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz liczby a , b , c .

Zadania

1. a) Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu.
b) Jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 20. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.
2. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) . Stosunek sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych do sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych jest równy $\frac{9}{8}$. Suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa 12. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
3. Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:
$$a_1 + a_5 = 68 \text{ i } a_2 + a_6 = 136$$

Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 2044?
4. W sześciowyrazowym ciągu geometrycznym suma pięciu początkowych wyrazów jest równa 11, a suma pięciu ostatnich – jest równa 33. Oblicz iloraz oraz wyrazy pierwszy i szósty tego ciągu.
5. a) W dziewięciowyrazowym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy 4, wyrazy pierwszy, trzeci i siódmy tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.
b) W sześciowyrazowym malejącym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy -1 , wyrazy pierwszy, drugi i piąty tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.
6. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 15, a suma ich odwrotności jest równa $\frac{3}{20}$. Wyznacz te liczby.
7. Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również kolejno wyrazami pierwszym, drugim i czwartym ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

8. a) Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 15. Jeśli pierwszą i drugą z tych liczb zwiększymy o 1, a trzecią – o 4, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
b) Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 8, a drugą i trzecią zostawimy bez zmian, to tak otrzymany ciąg będzie trzywyrazowym ciągiem geometrycznym, którego suma będzie równa 26. Wyznacz te liczby.
9. a) Wstaw między liczby 5 i 30 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.
b) Wstaw między liczby -4 i 32 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy – ciąg geometryczny.
10. a) Trzy liczby, których suma jest równa 13, tworzą malejący ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej liczby odejmiemy 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.
b) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 52. Jeśli pierwszą i drugą liczbę zostawimy bez zmian, a od trzeciej odejmiemy 16, to otrzymamy kolejne wyrazy rosnącego ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.
11. Z czterech zapisanych kolejno liczb pierwsze trzy tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny. Suma pierwszej i ostatniej jest równa 1, a suma drugiej i trzeciej jest równa $\frac{3}{4}$. Wyznacz te liczby.
12. W trójkąt równoboczny wpisujemy okrąg, a następnie w okrąg wpisujemy trójkąt równoboczny itd. (rysunek obok). Otrzymujemy w ten sposób ciąg trójkątów równobocznych i ciąg okręgów.
- D** a) Uzasadnij, że ciąg obwodów kolejnych trójkątów jest geometryczny. Podaj jego iloraz.
b) Bok największego trójkąta ma długość 4. Oblicz sumę obwodów pięciu największych trójkątów oraz sumę ich pól.
- D** 13. Wykaż, że jeśli liczby $\frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{x+z}$ i $\frac{1}{y+z}$ tworzą ciąg arytmetyczny, to również liczby x^2 , y^2 i z^2 tworzą ciąg arytmetyczny.
- D** 14. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = 2^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym.



Ciągi liczb całkowitych

Ponad pięćdziesiąt lat temu amerykański matematyk Neil Sloane [czyt. nil słohn] stworzył katalog ciągów liczb całkowitych obecnie funkcjonujący jako **Encyklopedia ciągów liczb całkowitych w wersji on-line** (oeis.org). Opisanych jest w niej ponad ćwierć miliona różnych ciągów. Aby znaleźć informacje o ciągu, należy podać jego numer w katalogu, nazwę lub początkowe wyrazy. Na przykład:

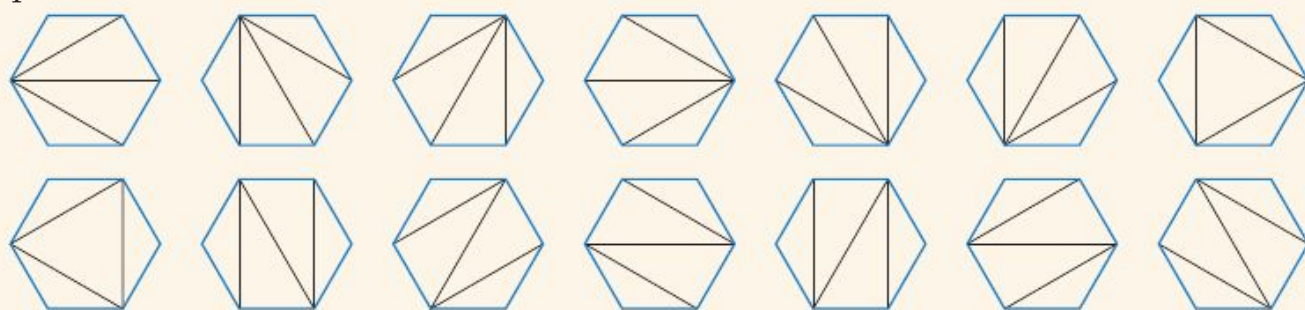
- pod numerem A000045 znajduje się ciąg Fibonacciego (patrz str. 148),
- pod numerem A000108 znajduje się ciąg liczb Catalana [czyt. katalana]:

1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...

Ciąg liczb Catalana określony jest wzorem $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Zatem:

$$c_1 = \frac{2!}{3!1!} = 1, c_2 = \frac{4!}{3!2!} = 2, c_3 = \frac{6!}{4!3!} = 5, c_4 = \frac{8!}{5!4!} = 14, \dots$$

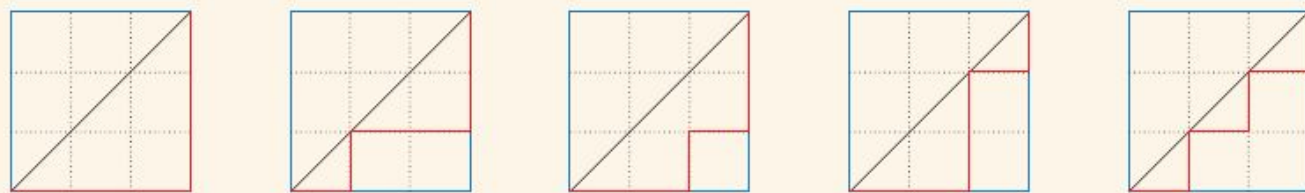
Ciąg ten ma wiele interpretacji geometrycznych, np. dla $(n+2)$ -kąta wypukłego liczba jego możliwych podziałów na trójkąty nieprzecinającymi się przekątnymi jest równa n -tej liczbie Catalana. Dla sześciokąta istnieje 14 takich podziałów:



Rozważmy teraz kwadrat o wymiarach $n \times n$ z siatką całkowitą, jak na rysunku poniżej, oraz drogi prowadzące z lewego dolnego rogu tego kwadratu do jego prawego górnego rogu spełniające warunki:

- poruszamy się po siatce całkowitej w prawo albo w górę,
- nie przechodzimy nad przekątną kwadratu.

Okazuje się, że liczba takich dróg jest n -tą liczbą Catalana. Na poniższych rysunkach przedstawiono wszystkie możliwe drogi dla $n = 3$ ($c_3 = 5$).



1. Narysuj odpowiednie rysunki i sprawdź, czy dla kwadratu 4×4 istnieje $c_4 = 14$ różnych dróg spełniających warunki opisane wyżej.



3.13. Procent składany

Kapitał w wysokości k złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym (rocznej stopie procentowej) $p\%$ wzrośnie po roku do kwoty:

$$k \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Przykład 1

Pani Kowalska wpłaciła do banku 1000 zł na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku. Jaką kwotę będzie miała po trzech latach, a jaką – po dwudziestu, jeśli odsetki są co roku dopisywane do kapitału i w kolejnych latach także podlegają oprocentowaniu?

Kwota po roku: $1000 + 6\% \cdot 1000 = 1060$ [zł]

Kwota po 2 latach: $1060 + 6\% \cdot 1060 = 1060 + 63,6 = 1123,6$ [zł]

Kwota po 3 latach: $1123,6 + 6\% \cdot 1123,6 = 1123,6 + 67,416 \approx 1191,02$ [zł]

Zauważ, że otrzymane kwoty są zaokrąglane do pełnych groszy.

Wyznaczenie powyższą metodą kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po dwudziestu latach, jest bardzo pracochłonne. Zauważmy jednak, że co roku kapitał powiększa się 1,06 razy.

Kapitał wynosi więc:

po roku: $k \cdot 1,06$

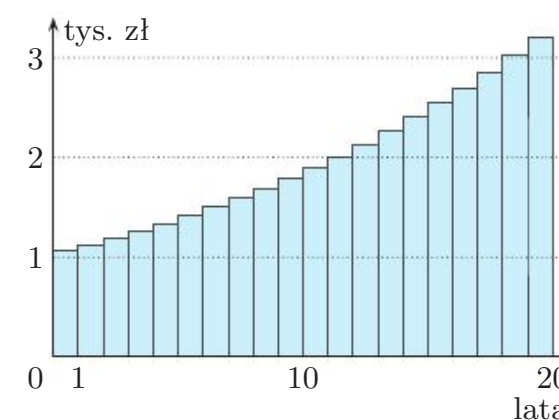
po 2 latach: $k \cdot (1,06)^2$

po 3 latach: $k \cdot (1,06)^3$

⋮

po 20 latach:

$k \cdot (1,06)^{20} \approx 1000 \cdot 3,20714 = 3207,14$ [zł]



Jeżeli w kolejnych latach odsetki są dopisywane do kapitału powiększonego o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kapitał został złożony na **procent składany**.

Kapitał w wysokości k złożony w banku na n lat na procent składany przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ po n latach wzrośnie do kwoty $k \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Ćwiczenie 1

Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku 5000 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym $p\%$?

a) $n = 5, p = 4,5$

b) $n = 8, p = 5,5$

c) $n = 10, p = 3$

Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się **kapitalizacją odsetek** lub krótko **kapitalizacją**, a czas, po jakim ona następuje, nazywa się **okresem kapitalizacji**.

Przykład 2

Rodzice Basi złożyli w banku 5000 zł na trzy lata. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 6%, w ostatnich dwóch latach 5%, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Do jakiej kwoty wzrósłby ten kapitał po trzech latach, gdyby odsetki nie były opodatkowane, a do jakiej – gdyby od naliczanych odsetek był pobierany co roku podatek w wysokości 20%?

Jeśli odsetki nie byłyby opodatkowane, to oszczędności po trzech latach wyniosłyby:

$$5000 \cdot 1,06 \cdot (1,05)^2 = 5843,25 \text{ [zł]}$$

Jeśli od naliczanych odsetek byłby pobierany podatek, to odsetki te byłyby pomniejszane o 20%, zatem w pierwszym roku wpłacona kwota wzrosłaby o:

$$0,06 \cdot 0,8 = 0,048 = 4,8\%$$

a w drugim i trzecim roku o:

$$0,05 \cdot 0,8 = 0,04 = 4\%$$

Zatem po trzech latach kapitał wzrósłby do:

$$5000 \cdot (1,048) \cdot (1,04)^2 \approx 5667,58 \text{ [zł]}$$

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%. W tym rozdziale, dla ułatwienia obliczeń, podatek ten pomijamy lub przyjmujemy, że wynosi 20%. Zwróć uwagę na to, że podatek płaci się tylko od dopisywanych odsetek, a nie zgromadzonego kapitału.

Ćwiczenie 2

Kapitał 5000 zł złożono w banku na dziesięć lat przy oprocentowaniu wynoszącym 5% i rocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz wysokość dopisanych odsetek. O ile mniejszy będzie zgromadzony kapitał, jeśli od odsetek jest naliczany podatek w wysokości 20% w skali roku?

Ćwiczenie 3

Kapitał 800 zł złożono w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego czasu w przypadku, gdy kapitalizacja odsetek była roczna, od odsetek naliczano podatek w wysokości 20% w skali roku, a oprocentowanie:

- w pierwszych dwóch latach wynosiło 8%, w ostatnich trzech – 4%,
- w pierwszych trzech latach wynosiło 4%, w ostatnich dwóch – 8%,
- w pierwszych dwóch latach wynosiło 7%, w kolejnych dwóch – 5%, w ostatnim roku – 2%.

Odsetki mogą być dopisywane częściej niż co rok. Jeżeli są dopisywane co kwartał, mówimy o kapitalizacji kwartalnej, jeśli co miesiąc – o kapitalizacji miesięcznej.

Twierdzenie

Kapitał w wysokości k złożony w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i kapitalizacji m razy w roku po n latach wzrośnie do kwoty:

$$k \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{m \cdot n}$$

Przykład 3

W bankach A , B i C lokaty terminowe są oprocentowane 6% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane: w banku A – co rok, w banku B – co kwartał, a w banku C – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 1000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

Kapitał po roku wyniesie:

w banku A : $1000 \cdot (1 + 0,06) = 1060$ [zł],

w banku B : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^4 = 1000 \cdot (1,015)^4 \approx 1000 \cdot 1,06136 = 1061,36$ [zł],

w banku C : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} = 1000 \cdot (1,005)^{12} \approx 1000 \cdot 1,06168 = 1061,68$ [zł].

Zatem odsetki dopisane w tych bankach to kolejno: 60 zł, 61,36 zł i 61,68 zł. Kapitał wzrośnie więc: w banku A – o 6%, w banku B – o $\frac{61,36}{1000} = 0,06136 \approx 6,14\%$, a w banku C – o $\frac{61,68}{1000} = 0,06168 \approx 6,17\%$.

Ćwiczenie 4

Bank X oferuje kapitalizację półroczną przy rocznej stopie 8%, a bank Y – kapitalizację kwartalną przy rocznej stopie $p\%$. Dla której wartości p oprocentowanie w skali roku jest w obu bankach najbardziej zbliżone?

- A. $p = 4$ B. $p = 7,92$ C. $p = 8$

Czy wiesz, że...

Roczną stopę procentową $p\%$ taką, że odsetki w wysokości $\frac{0,01p}{m}$ są kapitalizowane m razy w roku, nazywa się **nominalną stopą** procentową. Rzeczywisty przyrost kapitału pokazuje **efektywna stopa** procentowa $r\%$, przy której odsetki są kapitalizowane raz, na koniec roku. Między tymi stopami zachodzi następująca zależność:

$$1 + 0,01r = \left(1 + \frac{0,01p}{m}\right)^m$$

Ćwiczenie 5

Pani Katarzyna złożyła w banku kwotę 10 000 zł na lokatę oprocentowaną 4% rocznie. Do jakiej kwoty wzrośnie jej kapitał po pięciu latach, jeśli odsetki będą kapitalizowane:

- a) co rok, b) co pół roku, c) co kwartał, d) co miesiąc?

Ćwiczenie 6

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rodzice założyli konto córce. Postanowili wpłacać na nie 200 zł na początku każdego roku przez pięć lat. Oprocentowanie roczne w całym tym okresie wynosi 5%, a kapitalizacja następuje co rok. Jaką kwotę będzie miała na koncie ich córka po pięciu latach od pierwszej wpłaty?

Pierwsza wpłata w wysokości 200 zł będzie kapitalizowana pięć razy, druga – wpłacona rok później – cztery razy i każda kolejna wpłata będzie kapitalizowana o jeden raz mniej. Zatem kapitał po pięciu latach będzie wynosił:

$$\begin{aligned} & 200 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot 1,05^4 + 200 \cdot 1,05^3 + 200 \cdot 1,05^2 + 200 \cdot 1,05 = \\ & = 200(1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5) = \text{Korzystamy ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego.} \\ & = 200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1 - (1,05)^5}{1 - 1,05} \approx 1160,38 \text{ [zł]} \end{aligned}$$

Jaka kwota byłaby na koncie opisanym w powyższym przykładzie, gdyby okres oszczędzania był dłuższy o pięć lat?

Ćwiczenie 7

a) Pani Ania zamierza wpłacać 500 zł na konto na początku każdego roku. Oprocentowanie konta wynosi 4% w skali roku, a odsetki są kapitalizowane co rok. Jakie środki będą zgromadzone na koncie pani Ani po 8 latach, a jakie – po 20 latach oszczędzania?

b) Jaki kapitał znajdzie się na koncie osiemnastolatka, jeżeli rodzice, poczynawszy od dnia jego urodzenia, wpłacali mu do banku co rok 300 zł? Oprocentowanie wynosiło 6% w skali roku, a odsetki były kapitalizowane co miesiąc.

Ćwiczenie 8

Paweł, który ma 25 lat, zamierza wpłacać 100 zł na fundusz emerytalny na początku każdego miesiąca. Oprocentowanie funduszu wynosi 6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek jest miesięczna. Jaki kapitał zostanie zgromadzony przez Pawła, gdy będzie on w wieku:

- a) 60 lat, b) 65 lat, c) 67 lat?

Zadania

- Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku 2000 zł przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i rocznej kapitalizacji odsetek?
a) $n = 2, p = 5$ b) $n = 5, p = 5$ c) $n = 10, p = 3$
- Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 4000 zł przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i rocznej kapitalizacji odsetek?
a) $n = 2, p = 4$ b) $n = 5, p = 3$ c) $n = 10, p = 4$
- Kapitał w wysokości 600 zł został złożony w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu w przypadku, gdy kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie w pierwszym roku wynosiło:
a) 6%, w drugim roku – 5,5%, a w trzech ostatnich latach – 4%,
b) 5,5%, w trzech kolejnych latach – 4%, a w ostatnim roku – 6%.
- Oprocentowanie czteroletniej lokaty z roczną kapitalizacją odsetek wynosiło w kolejnych latach 9%, 8%, 7% i 6%. Zaproponuj stałą roczną stopę procentową $r\%$, przy której wpłacenie kapitału na cztery lata, z roczną kapitalizacją odsetek, przyniosłoby porównywalny zysk. Wartość r podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.
- Jaką kwotę w pełnych złotych należy ulokować na koncie o rocznym oprocentowaniu 4% i przy rocznej kapitalizacji odsetek, aby po pięciu latach uzyskać co najmniej 1216 zł? Jaką kwotę w pełnych złotych należałoby wpłacić, aby uzyskać co najmniej 1216 zł po trzech latach?
- Bank przyjął kwotę 50 000 zł na 5% rocznie, a następnie pożyczył ją na 6% rocznie. Ile zyskał bank w ciągu pięciu lat, a ile by zyskał w ciągu dziesięciu lat?
- Do banku wpłacono 3000 zł na trzy lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeśli odsetki są kapitalizowane: a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc, d) codziennie?
- Warunki oferowane przez banki dla lokat dwuletnich są następujące:
bank A – 5,44% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
bank B – 5,5% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,
bank C – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,
bank D – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.
Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

9. Firma X zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 10 000 zł. Co roku bank nalicza odsetki w wysokości 10%. Kredyt wraz z odsetkami ma być spłacony jednorazowo po n latach. Na ile lat został zaciągnięty kredyt, jeżeli wiadomo, że firma X będzie musiała spłacić 13 310 zł?
10. Dziadkowie w dniu narodzin wnuka zdeponowali dla niego w banku kwotę k zł na osiemnaście lat, oprocentowaną 5% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Obecnie chłopiec ma dziewięć lat i kwota ta wzrosła do 7757 zł. Ile wynosił kapitał początkowy k zł? Jaka kwota będzie na rachunku na koniec okresu oszczędzania?
11. Kuba zamierza kupić samochód, który kosztuje 40 000 zł. Zakup finansuje ze środków własnych i zaciągniętego na ten cel kredytu. Kredyt wraz z odsetkami, które wyniosą 1200 zł, ma być spłacony po roku. Ile środków własnych ma Kuba, jeżeli oprocentowanie kredytu wynosi 8% w skali roku?
12. Kapitał w wysokości 1000 zł wpłacono do banku na lokatę z miesięczną kapitalizacją odsetek. Po ilu latach kapitał ten się podwoi, jeżeli wiadomo, że oprocentowanie w skali roku wynosi: a) 6%, b) 3%?
13. Pan Lech zaciągnął kredyt w wysokości 100 000 zł, oprocentowany 10% w skali roku. Kredyt będzie spłacany w równych ratach po 30 000 zł na koniec każdego roku, przy czym ostatnia rata może być mniejsza. Odsetki są naliczane rocznie tylko od niespłaconej części kredytu. W tabeli przedstawiono sposób obliczania stanu zadłużenia po kolejnych latach.

Rok	Doliczone odsetki [zł]	Stan zadłużenia [zł]
1.	$0,1 \cdot 100\,000 = 10\,000$	$100\,000 + 10\,000 - 30\,000 = 80\,000$
2.	$0,1 \cdot 80\,000 = 8000$	$80\,000 + 8000 - 30\,000 = 58\,000$
3.	$0,1 \cdot 58\,000 = 5800$	$58\,000 + 5800 - 30\,000 = 33\,800$
4.	$0,1 \cdot 33\,800 = 3380$	$33\,800 + 3380 - 30\,000 = 7180$
5.	$0,1 \cdot 7180 = 718$	$7180 + 718 - 7898 = 0$

Zatem łącznie trzeba spłacić $4 \cdot 30\,000 + 7898 = 127\,898$ [zł].

- a) Sporządź analogiczną tabelę dla kredytu w wysokości 100 000 zł, oprocentowanego 20% w skali roku, spłacanego na tych samych zasadach co kredyt pana Lecha. Jaką kwotę trzeba łącznie spłacić?
- b) Ile czasu trwałoby spłacanie takiego kredytu, gdyby oprocentowanie wynosiło 25% w skali roku?

R 3.14. Granica ciągu

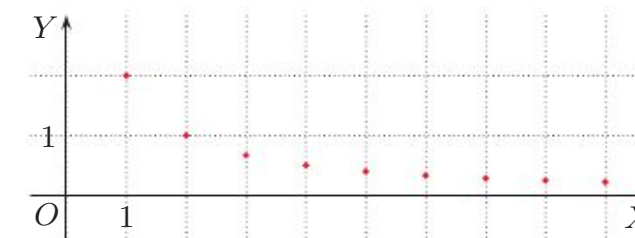
Uwaga. W lekcjach 3.14–3.17 rozważamy ciągi nieskończone.

Intuicyjne pojęcie granicy

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = \frac{2}{n}$.

Kolejne wyrazy tego ciągu: 2, 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, ... są „coraz bliżej” liczby 0.

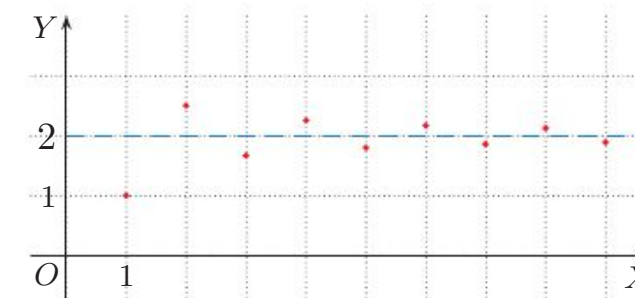


Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu:

$$a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Kolejne wyrazy tego ciągu: 1, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{4}$, $1\frac{4}{5}$, $2\frac{1}{6}$, $1\frac{6}{7}$, ... są „coraz bliżej” liczby 2.



W powyższych przykładach wyrazy nieskończonego ciągu są „coraz bliżej” pewnej liczby. Liczbę tę nazywamy **granicą** lub **granicą właściwą** ciągu.

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g , to piszemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

Skrót „lim” pochodzi od łacińskiego słowa *limes* – granica.

co czytamy: „granicą ciągu a_n przy n dążącym do nieskończoności jest liczba g ” lub „ciąg a_n dąży do liczby g przy n dążącym do nieskończoności”.

Informację tę możemy też zapisać tak: $a_n \rightarrow g$ przy $n \rightarrow \infty$.

Ćwiczenie 1

Narysuj wykres ciągu (a_n) i na tej podstawie podaj granicę tego ciągu.

a) $a_n = -\frac{3}{n}$

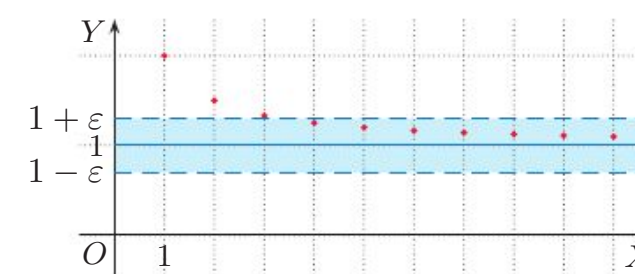
b) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

c) $a_n = 4 - \frac{1}{2^n}$

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Granicą tego ciągu jest liczba 1, co zapisujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$



Zauważmy, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ **prawie wszystkie** (wszystkie z wyjątkiem skończonej liczby) wyrazy tego ciągu są oddalone od 1 o mniej niż ε , czyli $|a_n - 1| < \varepsilon$, co zapisujemy też: $a_n \in (1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$ dla prawie wszystkich n .

Definicja

Ciąg (a_n) ma **granice** równą g , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

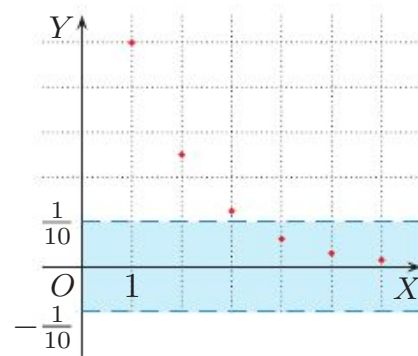
Jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g , to mówimy, że jest **zbieżny** do g .

Przykład 4

Granica ciągu $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest liczba 0.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Na przykład dla $\varepsilon = \frac{1}{10}$ warunek $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| < \varepsilon$ jest spełniony, gdy $n > 3$, a dla $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, gdy $n > 9$.



Ćwiczenie 2

Dany jest ciąg $a_n = 0,9^n$. Dla jakich n jest spełniona nierówność $|a_n - 0| < \frac{1}{10}$?

Twierdzenie

- Jeśli $q \in (-1; 1)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.
- Jeśli $a \in (0; \infty)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Często w zadaniach będziemy mieli do czynienia z następującymi granicami:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Twierdzenie

Jeśli $k \in (0; \infty)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

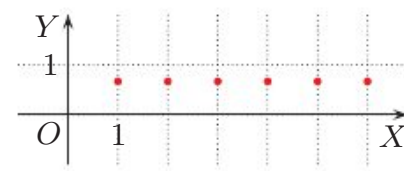
Ćwiczenie 3

Granica ciągu $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest liczba 0. Które wyrazy tego ciągu spełniają warunek $|a_n - 0| < \varepsilon$, gdy:

- a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, b) $\varepsilon = \frac{1}{50}$, c) $\varepsilon = \frac{1}{100}$, d) $\varepsilon = 10^{-6}$?

Przykład 5

Ciąg stały: $a, a, a, \dots$ ma granicę równą a . Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = \frac{2}{3}$. Granica tego ciągu: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

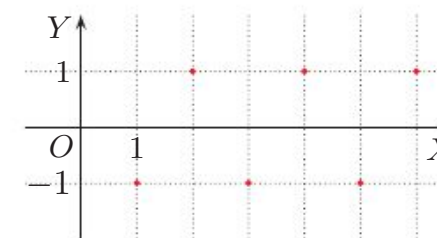


Przykład 6

Ciąg naprzemienny $a_n = (-1)^n$ **nie ma granicy**.

Aby to stwierdzić, wystarczy przyjąć $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Nie istnieje liczba g taka, żeby wyrazy o numerach parzystych (równe 1) i wyrazy o numerach nieparzystych (równe -1) były jednocześnie odległe od g o mniej niż $\frac{1}{2}$.



Twierdzenie

Ciąg może mieć tylko jedną granicę.

Zauważ, że jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g , to liczba ta jest również granicą każdego jego podciągu.

Jeśli dwa podciągi ciągu (a_n) mają różne granice, to ciąg (a_n) nie ma granicy.

Przykład 7

Rozpatrzmy ciąg (a_n) określony wzorem:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Podciąg wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych ma granicę równą 2, a podciąg wyrazów o numerach parzystych ma granicę równą 0. Zatem ciąg (a_n) nie ma granicy.

Ćwiczenie 4

Czy ciąg (a_n) ma granicę?

$$\text{a) } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} \quad \text{b) } a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \sqrt[n]{2} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Zadania

1. Narysuj wykres ciągu (a_n) . Czy ten ciąg ma granicę?

- a) $a_n = 1 + \frac{4}{n}$ c) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ e) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
b) $a_n = 4 - \frac{1}{n}$ d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ f) $a_n = \frac{(-2)^n}{4}$

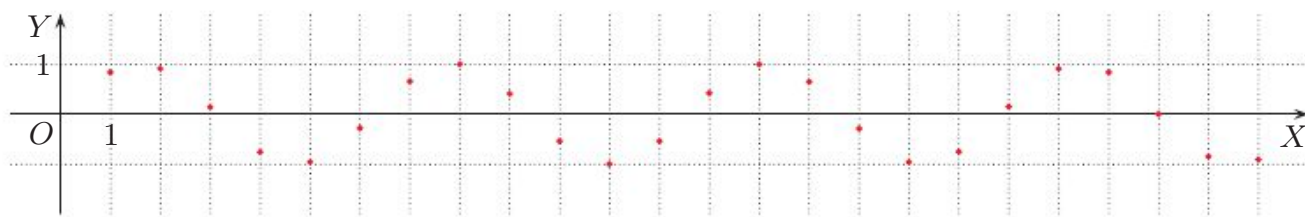
2. Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{4}{n}$ spełniają warunek $|a_n - 0| < \varepsilon$, gdy:

- a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, b) $\varepsilon = \frac{1}{50}$, c) $\varepsilon = \frac{1}{100}$, d) $\varepsilon = 10^{-6}$?

3. Dla jakich n jest spełniona nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$?

- a) $a_n = \frac{n+1}{n}$, $g = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$ b) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, $g = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{10000}$

R 3.15. Ciągi rozbieżne



Ciąg, który ma granicę, nazywamy ciągiem zbieżnym. O ciągu, który nie ma granicy, mówimy, że jest **rozbieżny**. Przykładami ciągów rozbieżnych są ciągi $a_n = (-1)^n$ oraz $b_n = \sin n$ (wykres powyżej). Szczególnymi przykładami ciągów rozbieżnych są ciągi rozbieżne do $-\infty$ i ciągi rozbieżne do ∞ .

Definicja

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny do ∞** , jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n > M$.

O ciągu rozbieżnym do ∞ mówimy, że ma **granicę niewłaściwą ∞** , i piszemy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ lub $a_n \rightarrow \infty$ przy $n \rightarrow \infty$.

Przykład 1

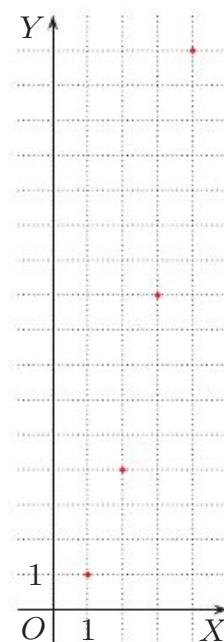
Ciąg $a_n = n^2$ jest rozbieżny do ∞ , co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

Prawie wszystkie (wszystkie z wyjątkiem skończonej liczby) wyrazy ciągu są większe od dowolnie wybranej liczby M . Na przykład dla $M = 100$ wszystkie wyrazy, począwszy od jedenastego, spełniają warunek $a_n > M$.

Ćwiczenie 1

Określ, dla jakich n zachodzi nierówność $a_n > M$. Czy dla dowolnie wybranej liczby M można wskazać takie n ?

- a) $a_n = n - 10$, $M = 100$ c) $a_n = \sqrt{n}$, $M = 40$
b) $a_n = \frac{1}{5}n$, $M = 50$ d) $a_n = 2^n$, $M = 1000$



Definicja

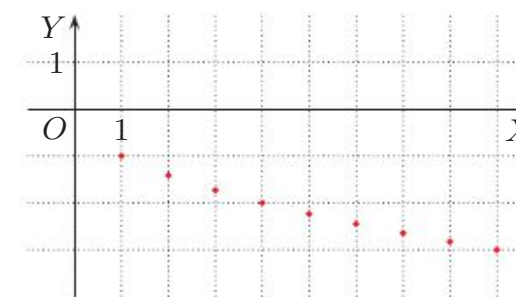
Ciąg (a_n) jest **rozbieżny do $-\infty$** , jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n < M$.

O ciągu rozbieżnym do $-\infty$ mówimy, że ma **granicę niewłaściwą $-\infty$** , i piszemy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \rightarrow -\infty$ przy $n \rightarrow \infty$.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = -\sqrt{n}$. Jest to ciąg rozbieżny do $-\infty$. Które wyrazy tego ciągu spełniają warunek:

- a) $a_n < -10$, c) $a_n < -1000$,
b) $a_n < -500$, d) $a_n < -10\,000$?



Przykład 2

Czy ciąg $a_n = (-1)^n \cdot n$ ma granicę niewłaściwą?

Ciąg (a_n) nie jest rozbieżny ani do $-\infty$, ani do ∞ , gdyż jego podciąg wyrazów o numerach parzystych jest rozbieżny do ∞ , a podciąg wyrazów o numerach nieparzystych jest rozbieżny do $-\infty$.

Twierdzenie

- Jeśli $q > 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$. ■ Jeśli $k > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$.

Ćwiczenie 3

Czy ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą?

- a) $a_n = \begin{cases} -2^n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ -n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ b) $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

Zadania

- Czy ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ lub do ∞ ?
a) $a_n = -\frac{1}{10}n$ c) $a_n = 3^n$ e) $a_n = 0,1^n$ g) $a_n = -n^3$
b) $a_n = (-4)^n$ d) $a_n = (-2)^n$ f) $a_n = (0,9)^n$ h) $a_n = n^2 - 100$
- Które wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $(M; \infty)$?
a) $a_n = \frac{1}{2}n^2$, $M = 200$ c) $a_n = \frac{n+1}{10}$, $M = 50$
b) $a_n = \frac{1}{2}n^2$, $M = 20\,000$ d) $a_n = \frac{n+1}{10}$, $M = 500$
- a) Dany jest ciąg $a_n = \sqrt[n]{n}$. Dla jakich n jest spełniony warunek $a_n > 10$, a dla jakich – warunek $a_n > 100$?
b) Dany jest ciąg $a_n = n^3 + 40n^2 - 25n$. Dla jakich n jest spełniony warunek $a_n > 1000$?
- Udowodnij, korzystając z definicji, że ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = -100$ oraz $r = 2$, jest rozbieżny do ∞ .

R 3.16. Obliczanie granic ciągów (1)

Przy obliczaniu granic ciągów będziemy korzystać z poniższego twierdzenia.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ granica iloczynu ciągu i liczby
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$ granica sumy ciągów
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$ granica różnicy ciągów
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$ granica iloczynu ciągów
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$,
gdzie $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ granica ilorazu ciągów

Przykład 1

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{5n^2 + 3n - 1}{n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n - 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 5 + 0 - 0 = 5$$

Ćwiczenie 1

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

$$\text{a) } a_n = \frac{-2n^2 + 4}{n^2} \quad \text{b) } a_n = \frac{6n^3 - 4n^2 + n}{2n^3} \quad \text{c) } a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

Przykład 2

a) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{3n+1}{4n+2}$.

W pierwszym kroku licznik i mianownik dzielimy przez n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4 + \frac{2}{n})} = \frac{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}$$

b) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{2n^2 - n + 1}{5n^2 + 2n + 2}$.

W pierwszym kroku licznik i mianownik dzielimy przez n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 1}{5n^2 + 2n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{2}{5}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

$$\text{a) } a_n = \frac{n+3}{10n-6} \quad \text{b) } a_n = \frac{1-4n}{2n-5} \quad \text{c) } a_n = \frac{6-8n}{4-3n}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

$$\text{a) } a_n = \frac{-8n^2 - 3n + 1}{2n^2 - n - 3} \quad \text{b) } a_n = \frac{3n^3 - n^2 + 2}{4n^3 - 3n + 3} \quad \text{c) } a_n = \frac{1 - 4n - 7n^3}{2n^3 + 4}$$

Przykład 3

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+1)(3n-1)}$.

Z każdego czynnika wyłączamy n przed nawias.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+1)(3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{n^2(2+\frac{1}{n})(3-\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{(2+\frac{1}{n})(3-\frac{1}{n})} = \frac{1}{6}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

$$\begin{aligned} \text{a) } a_n &= \frac{(6n-1)(2n+1)}{(n+2)(4n-1)} & \text{c) } a_n &= \frac{(2n+1)^3}{(n+2)^3} & \text{e) } a_n &= \frac{(n^2-2)(2n+1)}{(6n-4)(n^2+1)} \\ \text{b) } a_n &= \frac{(2n+7)(4+5n)}{(3n+5)(4-3n)} & \text{d) } a_n &= \frac{(n+1)^4}{(n+2)^4} & \text{f) } a_n &= \frac{(3-2n^2)(n-6)}{(2n-5)^3} \end{aligned}$$

Przykład 4

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{3n^3+4}$.

Licznik ułamka jest sumą n wyrazów ciągu arytmetycznego, zatem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{3n^3+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{3n^3+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2}{6n^3+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{6 + \frac{8}{n^3}} = \frac{0}{6} = 0$$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n-2n^2} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+n+n^2} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+8+12+\dots+4n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$$

Przykład 5

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2}{3 \cdot 4^n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2}{3 \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{4^n}}{3} = \frac{1}{3}$$

Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez 4^n .

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

$$\begin{aligned} \text{a) } a_n &= \frac{2^n + 1}{2^n} & \text{c) } a_n &= \frac{3^n + 6}{3^n + 1} & \text{e) } a_n &= \frac{2^n + 7^n}{4^n - 3 \cdot 7^n} \\ \text{b) } a_n &= \frac{2^n}{2 + 3 \cdot 2^n} & \text{d) } a_n &= \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} & \text{f) } a_n &= \frac{3^n - 8^n}{4^n + 5 \cdot 8^n} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 7

Korzystając z podanej obok informacji, oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Przy wyznaczaniu granic ciągów można skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla wszystkich (lub prawie wszystkich) $n \in \mathbb{N}_+$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Przykład 6

Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{10^n + 7^n}$.

Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}_+$ są prawdziwe nierówności:

$$\sqrt[n]{10^n} < \sqrt[n]{10^n + 7^n} < \sqrt[n]{10^n + 10^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 10^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 10 = 10 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2} \cdot 10) = 1 \cdot 10 = 10.$$

Zatem na podstawie twierdzenia o trzech ciągach: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n + 7^n} = 10$.

Ćwiczenie 8

Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6^n + 8^n}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 2^n + 4 \cdot 7^n}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7 + \sin n}$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n - 2^n}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 4^n - \cos n}$

Wskazówka. W podpunkcie b) zauważ, że $\sqrt[n]{4^n - 2^n} = 4 \sqrt[n]{1 - 2^{-n}}$.

Zadania

1. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{\frac{1}{2}n + 8}{2n + 4}$ c) $a_n = \frac{-6n^2 + n - 5}{1 + n + 3n^2}$ e) $a_n = \frac{-4n^3 + 4n^2 - 1}{-6n^4 + 4n^2 + 1}$
b) $a_n = \frac{3n^2 - 12}{2n^2 + 3n}$ d) $a_n = \frac{100n^2 + 1}{n^4 + 3n}$ f) $a_n = \frac{8n^8 + 6n^6 - 4n^4}{n^5 + n^7 - n^9}$

2. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{(n+2)^2}{(2n-1)^2}$ c) $a_n = \frac{(n^2+1)(6-4n^2)}{(n-1)(n^3+1)}$ e) $a_n = \frac{2n^3 - n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n^2 - n + 1)}$
b) $a_n = \frac{(2n+3)^3}{(n+3)^3}$ d) $a_n = \frac{(n-1)(3n+1)^2}{(3n-1)(n^2+4)}$ f) $a_n = \frac{(n+1)^2(2n-1)^2}{(n+2)^4}$

3. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{2^n + 5^n}{5^n - 2^n}$ b) $a_n = \frac{4^n + 6 \cdot 9^n}{4^n - 9^n}$ c) $a_n = \frac{3 \cdot 6^n + 4^{n+1}}{6^{n+2} - 2 \cdot 4^n}$

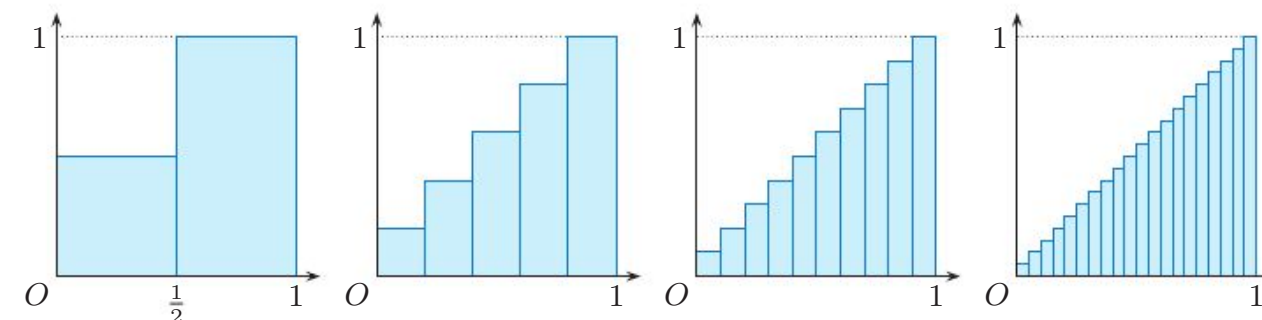
4. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+2n}{n^2+1}$ d) $a_n = \frac{1000n}{1+3+5+7+\dots+(2n+1)}$
b) $a_n = \frac{4n^2-3n+1}{1+2+3+\dots+n}$ e) $a_n = \frac{2+4+6+\dots+(2n+2)}{n^3+2n+5}$
c) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n+(n+1)}{1+2+3+\dots+n}$ f) $a_n = \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{n+4}$

5. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt[n]{6 \cdot 5^n + 7 \cdot 3^n}$ c) $a_n = \sqrt[n]{4n + \frac{10}{n}}$ e) $a_n = \frac{100 \sin n}{\sqrt{n}}$
b) $a_n = \sqrt[n]{9^n - 3^n}$ d) $a_n = \sqrt[n]{6n + (-1)^n}$ f) $a_n = \frac{8 \cos n^2}{3n+1}$

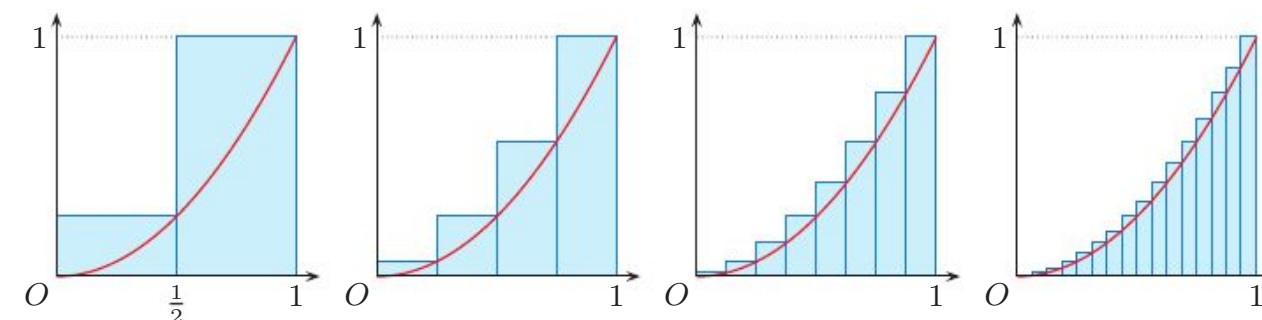
6. Niech $S_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}$, $S_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}$ i ogólnie $S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n}$. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.



Na rysunkach przedstawiono interpretację geometryczną sum S_2 , S_5 , S_{10} i S_{20} .

7. Niech $S_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2$. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, korzystając z tego, że:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Na rysunkach przedstawiono interpretację geometryczną sum S_2 , S_4 , S_8 i S_{16} .

R 3.17. Obliczanie granic ciągów (2)

Dla ciągów mających granicę niewłaściwą ∞ zachodzą poniższe własności. Analogiczne własności zachodzą dla ciągów mających granicę $-\infty$.

- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Ćwiczenie 1

Ile jest równa granica iloczynu ciągów (a_n) i (b_n) , gdy:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$?

Przykład 1

Oblicz granicę ciągu $a_n = n^4 - 100n^2 - 5n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 100n^2 - 5n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(1 - \frac{100}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right) = \infty$$

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (6n^3 - 2n^2 - 2050)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-7n^4 + 10n^3 + 3)$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^4) \cdot 2^n$

Jeśli ciąg (b_n) o wyrazach niezerowych ma granicę $b > 0$ oraz:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, ■ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$.

Jeśli ciąg (b_n) o wyrazach niezerowych ma granicę $b < 0$ oraz:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$, ■ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Przykład 2

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{3n^5 - 2n + 1}{2n^2 + 5}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - 2n + 1}{2n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}} = \infty$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez n^2 otrzymujemy ułamek, którego licznik jest rozbieżny do ∞ , a mianownik ma granicę równą 2.

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - n^2 + 2}{3n^3 + 6}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{6 + n - n^2}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 5n - 2n^5}{8n^2 - 0,5n^3}$

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ (lub $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$), gdzie $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Przykład 3

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{10n^2 - 4n}{n^3 + 6n^2 + 5}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 - 4n}{n^3 + 6n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{4}{n}}{n + 6 + \frac{5}{n^2}} = 0$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez n^2 otrzymujemy ułamek, którego licznik ma granicę równą 10, a mianownik jest rozbieżny do ∞ .

Ćwiczenie 4

Oblicz granicę.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n + 8}{n^2 + 5n}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n^2 + 6n}{6n^4 + n}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 - 1}{n^2 - n^4}$

W przykładzie 4. wyznaczamy $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Przykład 4

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$.

a) $a_n = n^3$, $b_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

b) $a_n = n^3$, $b_n = \frac{1}{n^4}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \cdot \frac{1}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

c) $a_n = n^3$, $b_n = \frac{2}{n^3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \cdot \frac{2}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$

d) $a_n = n$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, granica ciągu $(a_n \cdot b_n)$ nie istnieje (uzasadnij).

Zwróćmy uwagę na to, że gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, granica ciągu $(a_n \cdot b_n)$ może nie istnieć, natomiast gdy istnieje, nie możemy podać jej wartości bez szczegółowej analizy danego przykładu.

Mówimy wówczas, że mamy do czynienia z **symbolem nieoznaczonym** $[\infty \cdot 0]$. Inne symbole nieoznaczone to między innymi: $[\infty - \infty]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ oraz $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, gdzie $a_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \infty$.

Przykład 5

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4})$.

Mamy tu do czynienia z symbolem nieoznaczonym typu $[\infty - \infty]$. Granicę obliczamy, mnożąc i dzieląc różnicę pierwiastków przez ich sumę.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4})(\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4})}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+9) - (n+4)}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4}} = 0 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ | d) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ |
| b) $a_n = \sqrt{4n-1} - \sqrt{3n+5}$ | e) $a_n = \sqrt{2n^2+4} - \sqrt{n^2+5}$ |
| c) $a_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$ | f) $a_n = \sqrt{6n^2+n} - \sqrt{6n^2-n}$ |

Zadania

1. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- | | | |
|----------------------|----------------------------|---------------------------|
| a) $a_n = n^2 - 10n$ | c) $a_n = n^3 - 2n + 1$ | e) $a_n = -n^3(6n - n^2)$ |
| b) $a_n = n^2 - n^3$ | d) $a_n = 100n^3 - 0,1n^4$ | f) $a_n = n(1-n)(2-n^2)$ |

2. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- | | | |
|------------------------------------|--|---|
| a) $a_n = \frac{2n^2+1}{n-8}$ | d) $a_n = \frac{n^4+2n-5}{n^2-n+3}$ | g) $a_n = \frac{(2n+3)(3n-1)^2}{(n-1)(1-n)}$ |
| b) $a_n = \frac{n^3-1}{2-n^2}$ | e) $a_n = \frac{3n-n^3+n^4}{9+n^2-6n^3}$ | h) $a_n = \frac{(2-n)^3(4+n)}{(2+n)^2(6+n)}$ |
| c) $a_n = -\frac{-n^4+100}{5-n^2}$ | f) $a_n = \frac{2n^3-n^2-1}{(4n+1)^2}$ | i) $a_n = \frac{(2n^3-1)(1-5n^2)}{(n^3+2)(1-2n)}$ |

3. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- | | | |
|------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $a_n = 5^n - 3 \cdot 2^n$ | c) $a_n = 2^n + 4 \cdot 7^n - 5^n$ | e) $a_n = 4^n - 6 \cdot 2^n - 100$ |
| b) $a_n = 4^n + 6^n - 8^n$ | d) $a_n = -2^n + 8^n + 5^n$ | f) $a_n = 3^n + 4^n - 12^n$ |

4. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--|
| a) $a_n = \frac{4^n-1}{2^n+6}$ | b) $a_n = \frac{4-6^n}{4^n-6}$ | c) $a_n = \frac{4^n-3 \cdot 8^n+2}{2^n+2}$ |
|--------------------------------|--------------------------------|--|

5. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- | | | | |
|--|---|--|---|
| a) $a_n = \frac{\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+2}$ | b) $a_n = \frac{\sqrt{n^3}+1}{1-2\sqrt{n}}$ | c) $a_n = \frac{n^2-\sqrt{n}}{5+\sqrt{n}}$ | d) $a_n = \frac{2n-\sqrt[3]{n^2}}{1+n}$ |
|--|---|--|---|

6. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

- | | |
|--|--|
| a) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \leq 500 \\ \frac{6n^2+1}{2n+1} & \text{dla } n > 500 \end{cases}$ | c) $a_n = \begin{cases} \frac{2n}{1+n^2} & \text{dla } n \leq 1000 \\ \frac{1-n^2}{1+n} & \text{dla } n > 1000 \end{cases}$ |
| b) $a_n = \begin{cases} 5-n^2 & \text{dla } n \leq 100 \\ \frac{5n^2+1}{n+1} & \text{dla } n > 100 \end{cases}$ | d) $a_n = \begin{cases} \frac{3-n}{n^2+1} & \text{dla } n \leq 1000 \\ \frac{n^3+1}{1-n} & \text{dla } n > 1000 \end{cases}$ |

7. Oblicz granicę.

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1})$ | d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n^2+3})$ |
| b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n-3} - \sqrt{2n+10})$ | e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+2})$ |
| c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n-1} - n)$ | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2-n} - \sqrt{2n^2+3n+4})$ |

8. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2n+3n+\dots+n^2}{\sqrt{4n^4+n+1}}$.

9.* Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rozbieżny do ∞ ?

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $a_n = \frac{kn}{ k-2 n+3}$ | b) $a_n = \frac{(k^2-1)n^2-n-100}{kn}$ |
|--------------------------------|--|

10.* Wyznacz granicę ciągu (a_n) w zależności od parametru p .

- | | |
|---|---|
| a) $a_n = \frac{(p+2)n^2+(p+1)n}{ p^2-4 n^2+6}$ | b) $a_n = \frac{(4p^2-9)n^3-pn^2}{ 2p-3 n^2+n}$ |
|---|---|

Twierdzenie

- Jeśli $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.
- Jeśli $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

D 11. Korzystając z powyższego twierdzenia, uzasadnij, że:

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \cos n) = \infty$, | c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \sin 2n) = \infty$, |
| b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n} + \sin n^2) = \infty$, | d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{tg} \frac{n\pi}{3} - 2n) = -\infty$. |

D 12.* Niech a_n będzie sumą odwrotności liczb naturalnych od 1 do 2^n , czyli:

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \dots$$

Uzasadnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Ciągi ograniczone

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli istnieje liczba M taka, że $a_n \leq M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z dołu**, jeśli istnieje liczba m taka, że $a_n \geq m$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **ograniczonym**, jeśli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry, czyli istnieją liczby m i M takie, że $m \leq a_n \leq M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 1

Rozpatrzmy ciąg $a_n = 20n - n^2$. Początkowymi wyrazami tego ciągu są: 19, 36, 51, 64, ... Czy ciąg ten może przyjmować dowolnie duże wartości?

Korzystamy ze wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = 20x - x^2$ i otrzymujemy $y_w = 100$. Ramiona paraboli są skierowane w dół, zatem $a_n \leq 100$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry przez liczbę 100.

Zauważ, że w definicji nie wymagamy wskazania najmniejszej liczby ograniczającej dany ciąg z góry. W przykładzie ciąg (a_n) jest ograniczony z góry również przez liczby: 105, 110, 200 itp.

1. Wymień kilka liczb ograniczających ciąg (a_n) z góry.

a) $a_n = 10n - n^2$ b) $a_n = 100n - 2n^2$ c) $a_n = -n^2 + 14n - 40$

D 2. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ograniczony.

a) $a_n = 5 \sin n + \frac{10}{n}$ b) $a_n = \frac{6}{2^n} + 2 \cos n^2$ c) $a_n = \frac{1000}{n^2} + \frac{500}{n} + 5$

Jeśli ciąg rosnący jest ograniczony z góry, to ciąg ten ma granicę. Podobnie ciąg malejący ograniczony z dołu. Twierdzenie to zwykle formułuje się krótko:

Twierdzenie

Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Można wykazać, że ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony, zatem jest zbieżny. Jego granicę oznaczamy literą e i nazywamy liczbą Eulera. Jest to liczba niewymierna, jej przybliżona wartość jest równa 2,718281828.

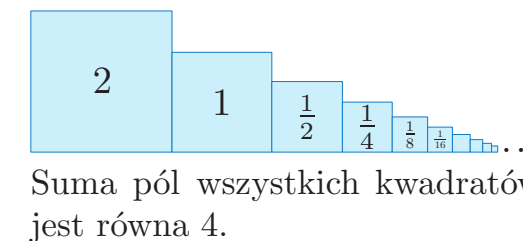
R 3.18. Szereg geometryczny

Przykład 1

Rozpatrzmy ciąg geometryczny o wyrazach początkowych: 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ... Iloraz tego ciągu $q = \frac{1}{2}$, więc suma jego n początkowych wyrazów dana jest wzorem:

$$S_n = \frac{2(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 4(1 - (\frac{1}{2})^n)$$

Czy można obliczyć sumę $S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ wszystkich wyrazów tego ciągu? Ponieważ $S_n \rightarrow 4$ przy $n \rightarrow \infty$ (gdyż $(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$), przyjmujemy, że $S = 4$.



Definicja

Wyrażenie $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots$ nazywamy **szeregiem geometrycznym** o wyrazach: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$ i ilorazie q .

Sumę $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$ nazywamy n -tą **sumą częściową** tego szeregu. I tak:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_1q, \quad S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2, \dots$$

Jeśli istnieje granica właściwa $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, to granicę tę nazywamy **sumą szeregu**, szereg nazywamy **zbieżnym** i piszemy: $S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$

W przeciwnym wypadku szereg nazywamy **rozbieżnym**.

Przykład 2

Wyznacz n -tą sumę częściową szeregu geometrycznego $12 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots$, a następnie oblicz sumę tego szeregu.

Pierwszy wyraz szeregu $a_1 = 12$, a jego iloraz $q = \frac{1}{3}$. Zatem n -ta suma częściowa wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{12(1 - (\frac{1}{3})^n)}{1 - \frac{1}{3}} = 18(1 - (\frac{1}{3})^n)$$

Obliczamy sumę szeregu:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 18(1 - (\frac{1}{3})^n) = 18$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz n -tą sumę częściową szeregu geometrycznego, a następnie oblicz sumę tego szeregu.

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

b) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots$

Twierdzenie

Szereg geometryczny o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie $q \in (-1; 1)$ jest zbieżny, a jego suma wyraża się wzorem:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Dowód. Dla $|q| < 1$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Zatem:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

Przykład 3

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \dots$

Mamy $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{5} \in (-1; 1)$, zatem suma $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{5}} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Ćwiczenie 2

Danych jest nieskończenie wiele odcinków. Pierwszy z nich ma długość $\frac{1}{2}$, a każdy następny jest 2 razy krótszy od poprzedniego. Ile jest równa suma długości wszystkich tych odcinków?



Ćwiczenie 3

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$

a) $a_1 = 100$, $q = 0,9$ b) $a_1 = 12$, $q = \frac{1}{3}$ c) $a_1 = 2 - \sqrt{2}$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Przykład 4

Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) $0,(61) = 0,616161\dots = 0,61 + 0,0061 + 0,000061 + \dots =$

$$= \frac{61}{100} + \frac{61}{100^2} + \frac{61}{100^3} + \dots = \frac{\frac{61}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{61}{99}$$

Ułamek okresowy $0,(61)$ przedstawiliśmy w postaci szeregu geometrycznego, w którym $a_1 = \frac{61}{100}$ oraz $q = \frac{1}{100}$.

b) $0,5(027) = 0,5027027027\dots =$

$$= 0,5 + 0,0027 + 0,0000027 + 0,000000027 + \dots =$$

$$= 0,5 + \frac{\frac{27}{10000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1}{2} + \frac{27}{9990} = \frac{1}{2} + \frac{1}{370} = \frac{93}{185}$$

Ćwiczenie 4

Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) $0,7777\dots$ b) $0,343434\dots$ c) $0,1121212\dots$ d) $0,0123123123\dots$

D Przykład 5

Uzasadnij, że szereg geometryczny $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$ jest rozbieżny.

Iloraz szeregu $q = \frac{3}{2}$. Wyznaczamy n -tą sumę częściową:

$$S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} = -2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Badamy granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = \infty$$

Zatem szereg jest rozbieżny do ∞ .

Twierdzenie

Szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 \neq 0$ i ilorazie q jest:

- zbieżny, gdy $|q| < 1$,
- rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$.

Uwaga. Jeśli $a_1 = 0$, to szereg ma postać $0 + 0 + 0 + \dots$. Jego suma jest równa 0.

Ćwiczenie 5

Dla jakich wartości x szereg geometryczny jest zbieżny?

- a) $x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \dots$ c) $1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{27x^3} + \dots$
 b) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ d) $1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^3} + \dots$

Przykład 6

Rozwiąż równanie $4 + 4(x-1) + 4(x-1)^2 + \dots = x + 3$.

Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie $q = x-1$. Równanie ma rozwiązanie, gdy szereg jest zbieżny, czyli gdy $|x-1| < 1$. Zatem $x \in (0; 2)$.

Korzystamy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{4}{1-(x-1)} &= x + 3 \quad / \cdot (2-x) \\ 4 &= -x^2 - x + 6 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ x &= -2 \text{ lub } x = 1 \end{aligned}$$

$-2 \notin (0; 2)$, zatem rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

- a) $x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots = 2x - 1$ b) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \dots = 1 + \frac{1}{x}$

Zadania

- Sprawdź, czy szereg geometryczny jest zbieżny. Jeśli jest, oblicz jego sumę.
 - $10 + 9 + \frac{81}{10} + \frac{729}{100} + \dots$
 - $-125 - 25 - 5 - 1 - \dots$
 - $2 - 4 + 8 - 16 + \dots$
 - $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \dots$
 - $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{8} + \dots$
 - $-2 + \frac{4}{5} - \frac{8}{25} + \frac{16}{125} - \dots$
- Sprawdź, czy szereg geometryczny o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q jest zbieżny. Jeśli jest, oblicz jego sumę.
 - $a_1 = \sqrt{2} - 1, q = \sqrt{2} + 1$
 - $a_1 = \sqrt{2} + 1, q = \sqrt{2} - 1$
- Uzupełnij brakującą informację dotyczącą szeregu geometrycznego zbieżnego o pierwszym wyrazie a_1 , ilorazie q i sumie S .
 - $a_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}, q = 1 - \sqrt{3}, S = \boxed{?}$
 - $a_1 = \boxed{?}, q = \frac{1}{100}, S = 100$
 - $a_1 = -\frac{1}{5}, q = \boxed{?}, S = -\frac{2}{5}$
 - $a_1 = -2\sqrt{2}, q = \boxed{?}, S = -3\sqrt{2}$
- Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.
 - $0,(1)$
 - $0,(9)$
 - $0,0(2)$
 - $1,3(6)$
 - $0,(60)$
 - $1,8(81)$
 - $-5,(45)$
 - $-1,(1001)$
- Suma pierwszych trzech wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 56, a suma wszystkich jego wyrazów jest równa 64. Oblicz cztery początkowe wyrazy tego ciągu.
- Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa $\frac{4}{3}$, a iloczyn trzech początkowych jego wyrazów jest równy -1 . Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.
- Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 9, a suma jego wyrazów o numerach parzystych jest równa $\frac{9}{4}$. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.
 - Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 6, a suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 12. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.
- Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $q = -\frac{1}{2}$ i pierwszym wyrazie różnym od zera jest dwukrotnie mniejsza od sumy kwadratów jego wyrazów. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.
 - Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 20, a suma kwadratów jego wyrazów jest równa 240. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

- Dla jakich wartości x szereg geometryczny jest zbieżny?

- $1 + (2x - 3) + (2x - 3)^2 + \dots$
- $1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \dots$

- Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

- $x + 1 + (x + 1)^2 + (x + 1)^3 + \dots = 8x^2 - 1$

- $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \dots = x^2 + x + 1$

- Wyznacz dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

- $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots$

- $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots$

- $f(x) = -x + x^2 - x^3 + \dots$

- $f(x) = -1 + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \dots$

- Wyznacz dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

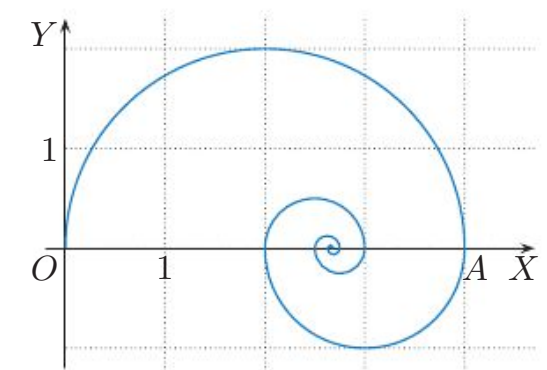
- $f(x) = -1 + \frac{x-1}{x-2} - \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 + \dots$

- $f(x) = -1 + \frac{x-4}{x-3} - \left(\frac{x-4}{x-3}\right)^2 + \dots$

- Spirala (rysunek obok) składa się z półokręgów o promieniach $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

- Oblicz długość spirali.

- Wyznacz współrzędne takiego punktu P , że spirala przecina każdy z odcinków OP i PA w nieskończenie wielu punktach.



Czy wiesz, że...

Rozpatruje się również szeregi inne niż geometryczne. Na przykład szereg odwrotności liczb naturalnych zwany szeregiem harmonicznym:

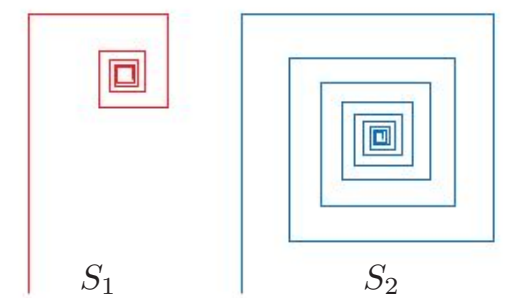
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

jest rozbieżny do ∞ , podczas gdy szereg harmoniczny rzędu 2:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

jest zbieżny i jego suma jest równa $\frac{\pi^2}{6}$.

- Na rysunku obok przedstawiono początkowe fragmenty spiral. Spirala S_1 składająca się z odcinków o długościach $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ma nieskończoną długość. Oblicz długość spirali S_2 składającej się z odcinków o długościach $1, 0,9, 0,9^2, 0,9^3, \dots$



Indukcja matematyczna

O prawdziwości twierdzenia dotyczącego liczb naturalnych nie możemy wnioskować na podstawie sprawdzenia pewnej (nawet bardzo dużej) liczby przykładów. Twierdzeń dotyczących liczb naturalnych dowodzimy, korzystając z twierdzenia zwanego **zasadą indukcji matematycznej**.

Zasada indukcji matematycznej

Jeżeli własność dotycząca liczb naturalnych spełnia warunki:

1. jest prawdziwa dla liczby naturalnej n_0 ,
2. dla każdej liczby naturalnej $k \geq n_0$ zachodzi wynikanie: jeśli własność jest prawdziwa dla liczby k , to jest prawdziwa dla liczby $k + 1$,
to własność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq n_0$.

Warunek 1. nazywamy **krokiem początkowym**, warunek 2. nazywamy **krokiem indukcyjnym**.

D Przykład 1

Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że suma n początkowych liczb nieparzystych jest wyrażona wzorem:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

1. Sprawdzamy prawdziwość wzoru dla $n_0 = 1$:
lewa strona $L = 1$, prawa strona $P = 1^2$, zatem wzór jest prawdziwy.
2. Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej $k \geq 1$ (założenie to nazywamy **założeniem indukcyjnym**), czyli:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

Wykażemy, że wzór jest prawdziwy dla liczby $k + 1$:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)}_{k^2} + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Sprawdziliśmy, że wzór jest prawdziwy dla $n_0 = 1$, a następnie wykazaliśmy, że z prawdziwości wzoru dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 1$ wynika jego prawdziwość dla $k + 1$. Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

- D 1.** Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi poniższa równość.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$

c) $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$



D Przykład 2

Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $4^n + 5$ jest podzielna przez 3.

1. Sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n_0 = 0$: $4^0 + 5 = 6$ oraz $3|6$, zatem twierdzenie jest prawdziwe.
2. Zakładamy, że dla liczby naturalnej k , liczba $4^k + 5$ jest podzielna przez 3. Pokażemy, że wtedy liczba $4^{k+1} + 5$ jest podzielna przez 3.
Z założenia, że liczba $4^k + 5$ jest podzielna przez 3, wynika istnienie liczby całkowitej a takiej, że $4^k + 5 = 3a$.

Stąd $4^k = 3a - 5$, czyli:

$$4^{k+1} + 5 = 4^k \cdot 4 + 5 = (3a - 5) \cdot 4 + 5 = 12a - 15 + 5 = 12a - 10 = 3(4a - 5)$$

Zatem liczba $4^{k+1} + 5$ jest również podzielna przez 3.

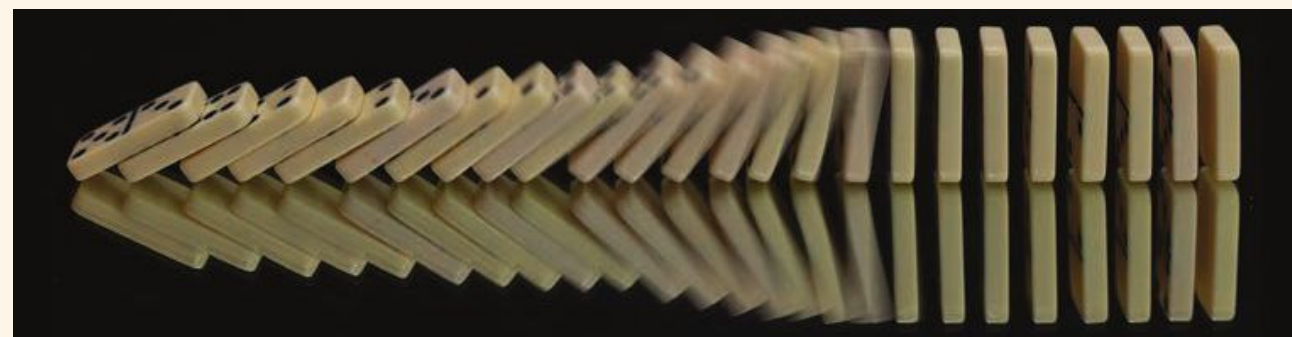
Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4^n + 5$ jest podzielna przez 3.

- D 2.** Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że:

- | | |
|--------------------|-----------------------------------|
| a) $6 n^3 - n$, | e) $12 10^n - 4$ dla $n \geq 2$, |
| b) $3 n^3 + 2n$, | f) $9 4^n + 15n - 1$, |
| c) $6 n^3 + 11n$, | g) $9 7^n + 3n - 1$, |
| d) $30 n^5 - n$, | h) $6 10^n + 4^n - 2$. |

- D 3.** Odgadnij wzór ogólny ciągu (a_n) . Postawioną hipotezę udowodnij, stosując zasadę indukcji matematycznej.

- | | |
|---|--|
| a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2, n \geq 1 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$ |
|---|--|



Dobłą ilustracją zasady indukcji matematycznej jest domino. Mamy pewność, że wszystkie kamienie się przewrócą, gdy będą spełnione dwa warunki:

1. musi się przewrócić pierwszy kamień,
2. przewrócenie któregośkolwiek kamienia (k -tego) pociąga za sobą przewrócenie następnego $((k + 1)$ -szego).

Powtórzenie

Zestaw I

- Oblicz $a_{10} - b_8$.
a) $a_n = \frac{8-n}{4}$, $b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{2}$ b) $a_n = \frac{n^2+5}{n}$, $b_n = \frac{5n-8}{n^2}$
- Oblicz wyrazy a_1 , a_2 , a_3 i a_8 ciągu $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Uzasadnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.
- Czy ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym? Określ jego monotoniczność.
a) $b_n = 4 - \frac{1}{2}n$ b) $b_n = \frac{n+3}{n}$ c) $b_n = \frac{9-4n^2}{2n+3}$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz wyraz a_8 .
a) $a_2 = 2$, $a_4 = 6$ b) $a_2 = 0$, $a_5 = 9$ c) $a_4 = 2$, $a_{10} = -10$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_1 \cdot a_2 = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 6 \\ a_2 + a_4 = 8 \end{cases}$
- Oblicz ósmy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_2 = -10$, $a_5 = -40$ b) $a_7 + a_9 = 10$ c) $a_1 = 1$, $a_9 - a_6 = 6$
- Oblicz sumę S_{12} ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_1 = 2$, $a_{10} = 29$ c) $a_2 = 5$, $a_{10} = 21$ e) $a_1 = 16$, $S_4 = 52$
b) $a_1 = 3$, $r = 2$ d) $a_2 = -8$, $r = 3$ f) $a_3 = -4$, $S_{10} = -15$
- Oblicz sumę S_{100} ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{100} = \frac{2}{3}$ c) $a_1 = 5$, $a_{99} + a_{101} = 150$
b) $a_{10} = -1$, $a_{100} = -11$ d) $a_3 + a_6 = 4\frac{1}{2}$, $a_{10} - a_4 = 3$
- Lewa strona równania jest sumą kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x .
a) $3 + 5 + 7 + \dots + x = 48$ c) $2 + 7 + 12 + \dots + x = 156$
b) $8 + 6 + 4 + \dots + x = -220$ d) $-7 - 3 + 1 + \dots + x = 110$
- Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 5, które:
a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe.

- Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Określ jego monotoniczność.
a) $b_n = 2^{-n}$ b) $b_n = 3 \cdot 5^n$ c) $b_n = 2^{3n-1}$
- Oblicz wyrazy od czwartego do ósmego ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $a_1 = 3$, $q = 2$ b) $a_1 = -4$, $q = \frac{1}{2}$ c) $a_2 = -25$, $a_3 = 5$
- Oblicz wyrazy a_3 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $a_6 = 100$, $q = 10$ c) $a_4 = 1$, $a_3 \cdot a_4 = 3$
b) $a_2 = 4$, $a_7 = 128$ d) $a_1 + a_3 = 10$, $a_3 = -8a_6$
- Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$ c) $a_1 = 1$, $a_2 + a_3 = 20$
b) $a_1 = -10$, $q = -\frac{1}{2}$ d) $a_1 = -4$, $S_3 = -12$
- Dla jakich wartości x liczby a , b , c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a dla jakich – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?
a) $a = x - 9$, $b = x - 6$, $c = 2x - 4$ b) $a = -6x$, $b = 3x$, $c = x^2$
- Oblicz $2a_5 - b_7$.
a) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = (-2)^n \cdot a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_{n+1} = b_n - (-1)^n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
- Podaj rekurencyjne określenie ciągu (a_n) .
a) $a_n = n^2 - 3n + 1$ c) $a_n = -\frac{5}{2^n}$
b) $a_n = 4 + \frac{1}{n}$ d) $a_n = \log n$
- Do banku wpłacono 2000 zł na dwa lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeżeli odsetki są kapitalizowane:
a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc?
- Kapitał w wysokości 800 zł został złożony w banku oferującym kapitalizację miesięczną. Oblicz wysokość kapitału po roku w przypadku, gdy przez sześć pierwszych miesięcy roczna stopa procentowa wynosiła:
a) 6%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 3%,
b) 3%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 6%.

Zestaw II

1. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{-n+2}{3}$ b) $a_n = \frac{2n+1}{2n+3}$ c) $a_n = \frac{2n^2+1}{2n^2}$ d) $a_n = \frac{5-3n}{2n+1}$

2. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 - a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

D 3. Wykaż, że dla każdej wartości parametru t ciąg (a_n) jest rosnący.

a) $\begin{cases} a_1 = t \\ a_{n+1} = a_n(a_n + 1) + 3 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = t \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 + 1 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

4. S_n jest sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny?

a) $S_n = 3n^2 + 3n$ b) $S_n = n^3 + 7$

D 5. Uzasadnij, że jeśli liczby a, b, c tworzą jednocześnie ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny, to jest to ciąg stały.

6. a) Trzy liczby, których suma jest równa 6, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do ostatniej z nich dodamy 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

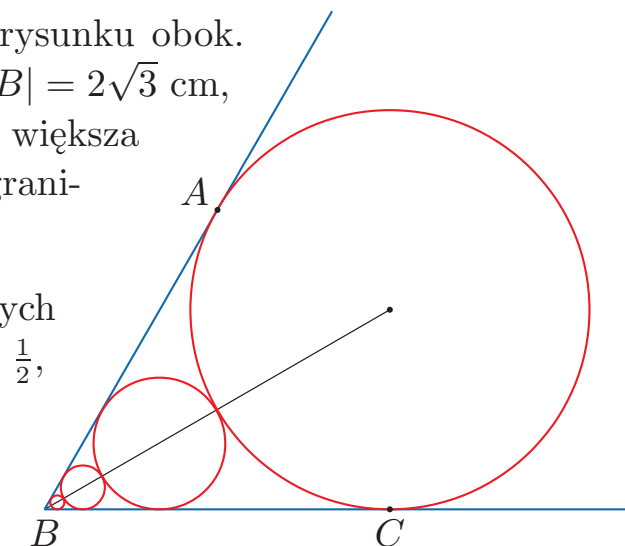
b) Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Jeśli do drugiej z nich dodamy 2, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

7. Suma trzech wyrazów: b_1, b_2, b_3 ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 6. Jeśli od ostatniego wyrazu odejmiemy 18, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Oblicz b_1, b_2, b_3 .

8. a) Dany jest skończony ciąg geometryczny o parzystej liczbie wyrazów. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a suma wszystkich wyrazów jest cztery razy większa od sumy wyrazów o numerach parzystych. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

b) Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 12, a stosunek sumy dziesięciu początkowych wyrazów do sumy trzech początkowych wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz siódmy wyraz tego ciągu.

D 9. Cztery okręgi są położone jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli $|\angle ABC| = 60^\circ$ i $|AB| = 2\sqrt{3}$ cm, to suma długości tych okręgów jest większa od 18,6 cm. Oblicz sumę pól kół ograniczonych tymi okręgami.



10. Pola pięciu trójkątów równobocznych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$, a suma tych pól jest równa $31\sqrt{3}$. Oblicz obwód największego spośród tych trójkątów.

11. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = -\frac{1}{2}n^4 + 10n^3 + 102n$ e) $a_n = \frac{0,3n+6}{\sqrt{n+3}}$
b) $a_n = \frac{2n^2+4n}{2n^3+n^2-6n}$ f) $a_n = \frac{3n^2+5n+6}{6n^2+4n+3}$
c) $a_n = \frac{(4-n^2)(4+n^2)}{2n^3-n^2+1}$ g) $a_n = \frac{(1-n)(6-n^2)}{(2+n)(8-n^2)}$
d) $a_n = \frac{\sqrt{6n}-n}{\sqrt{2n}+n}$ h) $a_n = \frac{3+n^3}{\sqrt{n^4+4}}$

12. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$ b) $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$

13. Dla jakich wartości parametru b ciąg (a_n) ma granicę równą 2?

a) $a_n = \frac{bn}{(b+1)n+3}$ b) $a_n = \frac{b^2n}{(b+4)n+b}$

14. Oblicz sumę szeregu geometrycznego.

a) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ b) $(1 + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}+3}{3} + \frac{1+\sqrt{3}}{3} + \dots$

15. Przedstaw ułamek okresowy w postaci ułamka zwykłego.

a) 0,(12) b) 0,(342) c) 2,4(23) d) 3,(9)

16. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = 1 + \frac{x}{1+x} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \dots$ b) $f(x) = 1 + \frac{x-2}{x-3} + \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 + \dots$

17. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

a) $\frac{2}{3} + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3 + \dots = 2$ c) $1 + 2x + 4x^2 + \dots = \frac{1}{1-2x}$
b) $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \dots = \frac{16}{5}$ d) $1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+5n}{2n^2+1}$



Zadania z kontekstem realistycznym

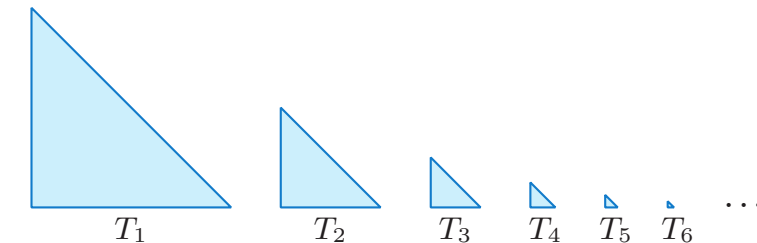
- Pani Katarzyna w dniu 10. urodzin swojego syna Karola zaczęła systematycznie, co rok, wpłacać na założone dla niego konto bankowe kwotę 4000 zł. Oprocentowanie tego konta wynosi 1,5% w skali roku, a kapitalizacja odsetek następuje co rok. Jaką kwotę będzie miał na tym koncie Karol w dniu swoich 18. urodzin?
- Oferta banku „Oszczędzaj systematycznie” polega na wpłacaniu co kwartał kwoty 2000 zł na rachunek oprocentowany 2% w skali roku przy kwartalnej kapitalizacji odsetek. O ile więcej, w porównaniu z sumą wpłat, będzie na rachunku na koniec czwartego kwartału, jeśli umowę na „Oszczędzaj systematycznie” zawarto na rok?
- Pan Tomek zaciągnął na dwa lata kredyt w wysokości 40 000 zł oprocentowany 8% w skali roku.
 - Spłatę kredytu rozłożono na dwie raty tej samej wysokości. Pierwsza rata składała się z części pożyczonej kwoty oraz odsetek od pełnej kwoty kredytu należnych bankowi po roku od udzielenia kredytu. Drugą ratę stanowiła pozostała część pożyczonej kwoty i roczne odsetki od tej części. O ile procent więcej odda pan Tomek bankowi w porównaniu z kwotą pożyczki?
 - O ile procent więcej oddałby pan Tomek bankowi w porównaniu z kwotą pożyczki, gdyby jednorazowo spłacił cały kredyt wraz z odsetkami po dwóch latach od jego zaciągnięcia?
- Pożyczkę w wysokości 5000 zł spłacono wraz z odsetkami jednorazowo po roku. Czy odsetki przekroczyły 5,5% pożyczonej kwoty, jeśli kapitalizowane były miesięcznie, a roczna stopa procentowa wynosiła:
 - w pierwszym półroczu 6%, a w drugim półroczu 4,8%,
 - w pierwszym kwartale 3,6%, a w pozostałych miesiącach 6%?
- W pewnym banku można założyć dwuletnią lokatę z roczną kapitalizacją odsetek. Po roku odsetki będą stanowić $\frac{20}{41}$ odsetek, które zostaną naliczone na koniec trwania lokaty. Jakie jest oprocentowanie tej lokaty?
- Pani Ania zgromadziła na rachunku oszczędnościowym 100 000 zł. Nie będzie więcej dokonywać wpłat na ten rachunek, ale przez najbliższe 20 lat zamierza na koniec każdego roku wypłacać taką samą z góry określoną kwotę. Jakiej maksymalnie wysokości mogą być wypłaty, jeśli roczna stopa procentowa wynosi 5%, a bank kapitalizuje odsetki rocznie?



Sposób na zadanie

Przykład 1

Dany jest nieskończony ciąg trójkątów prostokątnych równoramiennych (T_n) . Przyprostokątna trójkąta T_1 ma długość 2, a skala podobieństwa trójkąta T_{n+1} do trójkąta T_n , gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, jest równa $\frac{1}{2}$. Oblicz sumę obwodów tych trójkątów oraz sumę ich pól.



Trójkąty $T_1, T_2, T_3, \dots$ są podobne, więc ich obwody tworzą nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $4 + 2\sqrt{2}$ i ilorazie równym skali podobieństwa, czyli $\frac{1}{2}$. Zatem suma tych obwodów:

$$S_O = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 8 + 4\sqrt{2}$$

Pola tych trójkątów tworzą nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 2 i ilorazie równym kwadratowi skali podobieństwa, czyli $\frac{1}{4}$. Zatem suma tych pól:

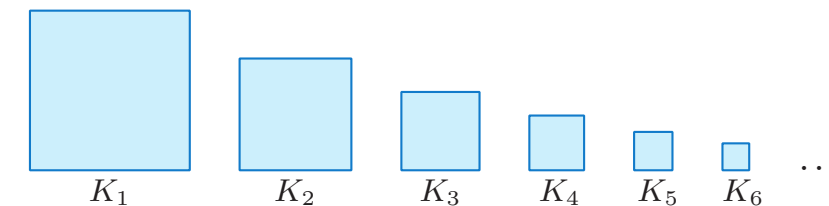
$$S_P = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{3}$$

Odpowiedź: Suma obwodów jest równa $8 + 4\sqrt{2}$, a suma pól jest równa $\frac{8}{3}$.

→ Zadanie 6, str. 216

Przykład 2

Dany jest nieskończony ciąg kwadratów (K_n) . Bok kwadratu K_1 ma długość $\sqrt{5}$, a skala podobieństwa kwadratu K_{n+1} do kwadratu K_n jest równa q dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Suma pól tych kwadratów jest równa 9. Oblicz sumę ich obwodów.



Stosunek pola K_{n+1} do pola kwadratu K_n jest równy q^2 dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Otrzymujemy równanie (uzasadnij):

$$\frac{5}{1 - q^2} = 9$$

Stąd $q^2 = \frac{4}{9}$, czyli $q = \frac{2}{3}$ (skala podobieństwa jest dodatnia).

Zatem suma obwodów tych kwadratów: $S_O = \frac{4\sqrt{5}}{1 - \frac{2}{3}} = 12\sqrt{5}$.

Odpowiedź: Suma obwodów jest równa $12\sqrt{5}$.

→ Zadanie 6, str. 216



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Liczba 6 jest piątym wyrazem ciągu (a_n) o wzorze ogólnym

- A. $a_n = (n - 1)^2 + 5$ C. $a_n = (n - 3)^2 + 5$
B. $a_n = (n - 2)^2 + 5$ D. $a_n = (n - 4)^2 + 5$

Zadanie 2 (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n+6}{n}$. Żaden wyraz tego ciągu nie jest równy

- A. 8 B. 6 C. 5 D. 3

Zadanie 3 (0–1)

Ciągiem malejącym jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym

- A. $a_n = n(2 - n)$ C. $a_n = n(4 - n)$
B. $a_n = n(3 - n)$ D. $a_n = n(5 - n)$

Zadanie 4 (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 7(n - 1) + 4$. Jest to ciąg arytmetyczny o różnicy równej

- A. -4 B. -3 C. 4 D. 7

Zadanie 5 (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \sqrt{2} \cdot n - 1$. Suma S_5 tego ciągu jest równa

- A. $5\sqrt{2} - 1$ B. $10\sqrt{2} - 1$ C. $10\sqrt{2} - 5$ D. $15\sqrt{2} - 5$

Zadanie 6 (0–1)

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym wyraz $a_4 = 36$ i iloraz $q = 3$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

- A. $\frac{4}{9}$ B. $1\frac{1}{3}$ C. 4 D. 12

Zadanie 7 (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 54 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest liczbą należącą do przedziału

- A. $[-18; -16]$ B. $[-16; -14]$ C. $[-14; -12]$ D. $[-12; -10]$

Zadanie 8 (0–1)

Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 2. Suma wyrazów a_{11} i a_{21} tego ciągu jest równa

- A. 120 B. 124 C. 128 D. 132



Zadanie 9 (0–1)

Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1. Suma wyrazów ciągu (a_n) większych od 10 i mniejszych od 100 jest równa

- A. 1535 B. 1540 C. 1595 D. 1760

Zadanie 10 (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}n - 6$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.	P	F
Ciąg (a_n) ma dziewięć wyrazów ujemnych.	P	F

Zadanie 11

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 4n^2 - 40n + 96$.

Zadanie 11.1 (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) ma dwa wyrazy równe 0.	P	F
Najmniejszy wyraz ciągu (a_n) jest równy -4.	P	F

Zadanie 11.2 (0–2)

Wyznacz liczbę wyrazów ciągu (a_n) mniejszych od 32.

Zadanie 12 (0–1)

Ciąg geometryczny (a_n) dany jest wzorem $a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. Oznaczmy przez q iloraz tego ciągu.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) jest ciągiem

A.	rosnącym	oraz	1.	$a_1 = -3$ i $q = \frac{1}{2}$.
	malejącym		B.	2.
3.			$a_1 = -\frac{3}{4}$ i $q = \frac{1}{4}$.	

**Zadanie 13 (0-2)**

Dany jest ciąg arytmetyczny o różnicy r .

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Ciąg ten jest malejący dla

A. $r = 3 - 2\sqrt{2}$

C. $r = 3\sqrt{3} - 5$

E. $r = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$

B. $r = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $r = 2\sqrt{3} - \frac{7}{2}$

F. $r = \pi - 3\sqrt{3}$

Zadanie 14 (0-1)

Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb nieparzystych dodatnich.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Suma stu początkowych wyrazów tego ciągu jest

liczbą podzielną przez 11.	P	F
równa 9999.	P	F

Zadanie 15 (0-1)

Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie 8 jest równa 57,5.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy $3\frac{1}{2}$.	P	F
Różnica tego ciągu jest równa $\frac{1}{2}$.	P	F

Zadanie 16 (0-2)

Dany jest ciąg (a_n) określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = -\sqrt{2}a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ jest równy

A. 2048

B. 1024

C. -1024

D. -2048

2. Suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ jest równa

E. $32 - 16\sqrt{2}$

F. $28 - 12\sqrt{2}$

G. $24 - 10\sqrt{2}$

H. $20 - 8\sqrt{2}$

**Zadanie 17**

Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 - n + 3 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Zadanie 17.1 (0-2)

Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

D Zadanie 17.2 (0-2)

Wykaż, że jest to ciąg monotoniczny.

Zadanie 18 (0-2)

Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a iloraz 4. Z ilu wyrazów składa się ten ciąg?

Zadanie 19 (0-3)

Suma trzech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie 2 jest równa 26. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

Zadanie 20 (0-4)

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest wzorem $S_n = 6n - 2n^2$. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 21 (0-4)

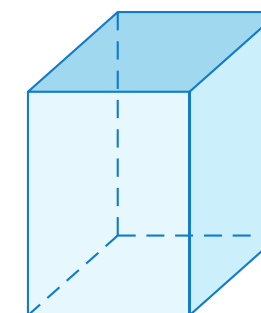
Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 24, a długości jego boków tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Zadanie 22 (0-4)

Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Zadanie 23 (0-4)

Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny. Suma długości tych krawędzi jest równa 14 cm, a objętość prostopadłościanu jest równa 64 cm^3 . Oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

**Zadanie 24 (0-4)**

Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 30 oraz $a_2 \cdot a_4 = 11$. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?



Zadanie 1 (0-2)

Oblicz czwarty wyraz ciągu (a_n) .

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = \sqrt{2} \\ a_{n+2} = \frac{(1-a_{n+1})^3}{a_n} & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Zadanie 2 (0-2)

Oblicz granicę ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \sqrt{3n^2 + 6n} - \sqrt{3n^2 + n + 6}$.

Zadanie 3 (0-2)

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{(3-p)n}{2pn-3n}$. Dla jakiej wartości parametru p granica tego ciągu jest równa 4?

Zadanie 4 (0-2)

Wyrazy szósty i siódmy nieskończonego ciągu geometrycznego są równe odpowiednio $3\sqrt{6}$ i 6. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 5 (0-2)

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $1 + \sin \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \dots$

Zadanie 6 → Przykłady 1 i 2, str. 211

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (K_n) . Średnice tych okręgów tworzą ciąg geometryczny o dwóch początkowych wyrazach 6 i 4.

Zadanie 6.1 (0-2)

Oblicz sumę długości tych okręgów.

D Zadanie 6.2 (0-2)

Uzasadnij, że suma pól kół ograniczonych przez te okręgi jest większa od 50.

Zadanie 7 (0-4)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach całkowitych. Suma wyrazów pierwszego, drugiego i piątego jest równa 27, a liczby $a_1 - 1$, $a_2 - 1$ i $a_5 - 4$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .

Zadanie 8 (0-4)

Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 7. Jeśli od ostatniej z nich odejmiemy 1, a pierwsze dwie pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

Zadanie 9 (0-4)

Iloczyn trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy 2^{12} , a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 64. Oblicz sumę jego wyrazów o numerach nieparzystych.

4 Rachunek różniczkowy

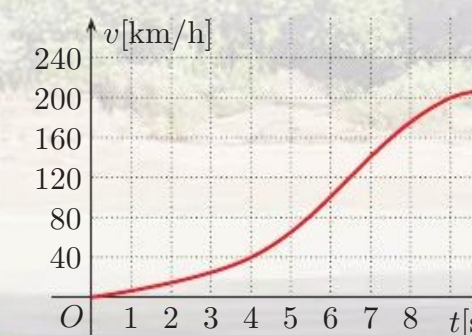
Rachunek różniczkowy (zwany też rachunkiem pochodnych) oraz związany z nim rachunek całkowy stały się podstawą rozwoju fizyki klasycznej. Dzięki nim możliwe było między innymi opisanie ruchu ciał za pomocą równań wiążących ze sobą takie wielkości jak czas, droga, prędkość i przyspieszenie.

Jeśli chcemy obliczyć średnie przyspieszenie samochodu od chwili t_0 do chwili t , korzystamy ze wzoru:

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

(dzielimy przyrost prędkości przez czas, w którym on nastąpił).

Jeśli chcemy obliczyć przyspieszenie w chwili t_0 , korzystamy z tego, że jest ono **pochodną** funkcji prędkości od czasu (patrz str. 259).



Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się prędkość v samochodu w czasie t .



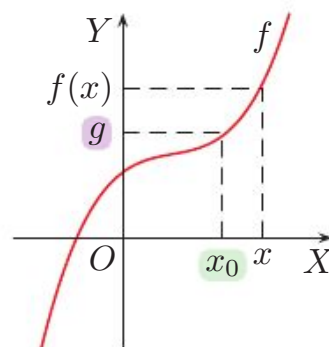
R 4.1. Granica funkcji w punkcie

■ Intuicyjne pojęcie granicy

Granica funkcji jest jednym z podstawowych pojęć matematyki. Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 , jeśli wartość funkcji f „zbliża się” do g , gdy x „zbliża się” do x_0 .

Piszemy wówczas:

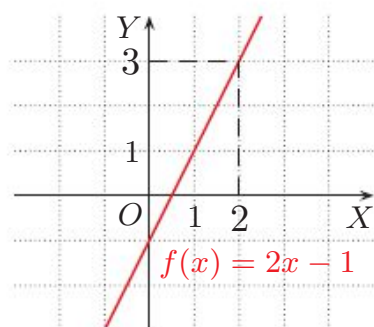
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \text{ lub } f(x) \rightarrow g \text{ przy } x \rightarrow x_0$$



Przykład 1

Odczytaj z rysunku wartość granicy funkcji w danym punkcie.

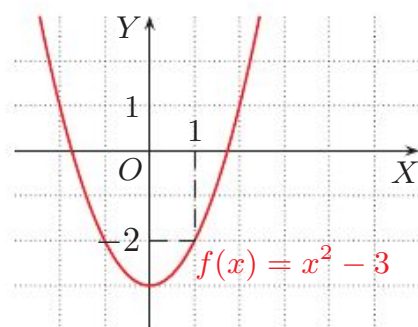
a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1)$



Gdy x „zbliża się” do 2, $f(x)$ „zbliża się” do 3:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$$

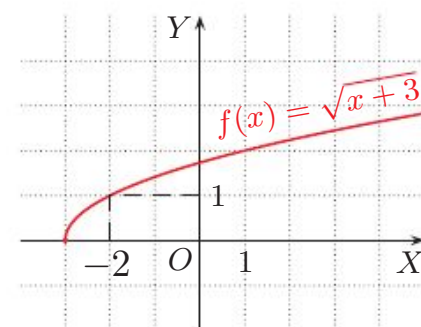
b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3)$



Gdy x „zbliża się” do 1, $f(x)$ „zbliża się” do -2:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3) = -2$$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x + 3}$

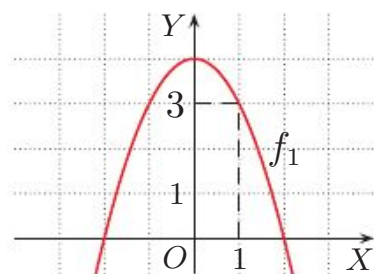


Gdy x „zbliża się” do -2, $f(x)$ „zbliża się” do 1:

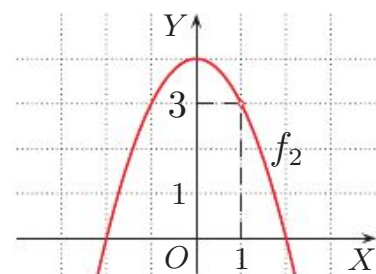
$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x + 3} = 1$$

Przykład 2

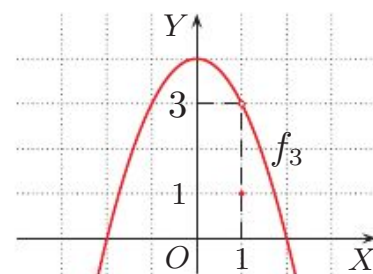
Poniżej przedstawiono wykresy funkcji f_1 , f_2 i f_3 . W punkcie $x_0 = 1$ funkcje te mają tę samą granicę: $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f_3(x) = 3$.



$$f_1(x) = 4 - x^2, D_{f_1} = \mathbb{R}$$



$$f_2(x) = 4 - x^2, D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$



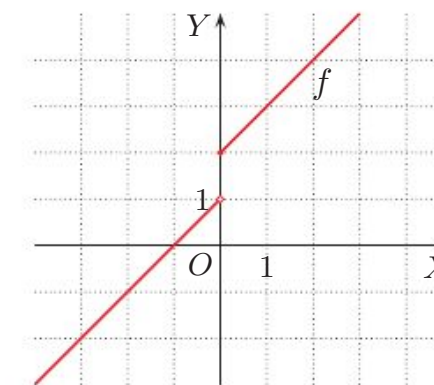
$$f_3(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Punkt x_0 , w którym badamy granicę, nie musi należeć do dziedziny funkcji (funkcja f_2). Jeśli x_0 należy do dziedziny, to wartość funkcji w punkcie x_0 nie zawsze jest równa wartości tej granicy (funkcja f_3).

Przykład 3

$$\text{Funkcja } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x < 0 \\ x + 2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$ (rysunek obok). Gdy x „zbliża się” do 0 z prawej strony, wartość funkcji „zbliża się” do 2, natomiast gdy x „zbliża się” do 0 z lewej strony, wartość funkcji „zbliża się” do 1.



Sąsiedztwem punktu x_0 nazywamy zbiór $(x_0 - r; x_0) \cup (x_0; x_0 + r)$, gdzie $r > 0$.

Definicja

Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 .

Liczba g jest **granicą** funkcji f w punkcie x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

D Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 5$. Uzasadnij, że $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$.

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 2 i takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 5) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 5 = 2 \cdot 2 + 5 = 9 \end{aligned}$$

Zatem zgodnie z definicją $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$.

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że:

a) funkcja $f(x) = 6 - 2x^2$ ma w punkcie $x_0 = -1$ granicę równą 4,

b) funkcja $f(x) = \frac{3}{x+7}$ ma w punkcie $x_0 = 5$ granicę równą $\frac{1}{4}$.

D Przykład 5

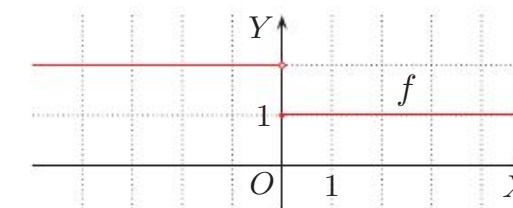
$$\text{Wykaż, że funkcja } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

Rozpatrzmy ciągi $a_n = -\frac{1}{n}$ oraz $b_n = \frac{1}{n}$ zbieżne do zera. Wtedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 1$$

Funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$, gdyż $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$.

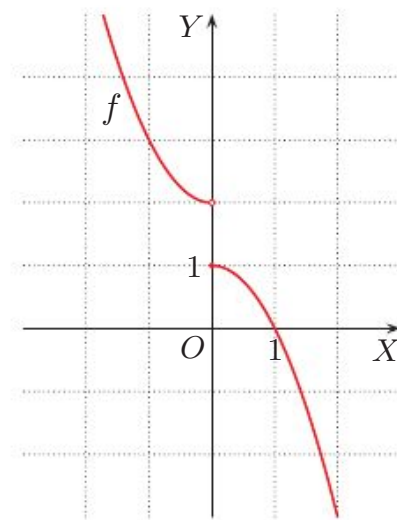


Zadania

- D** 1. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{dla } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

Wykaż, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

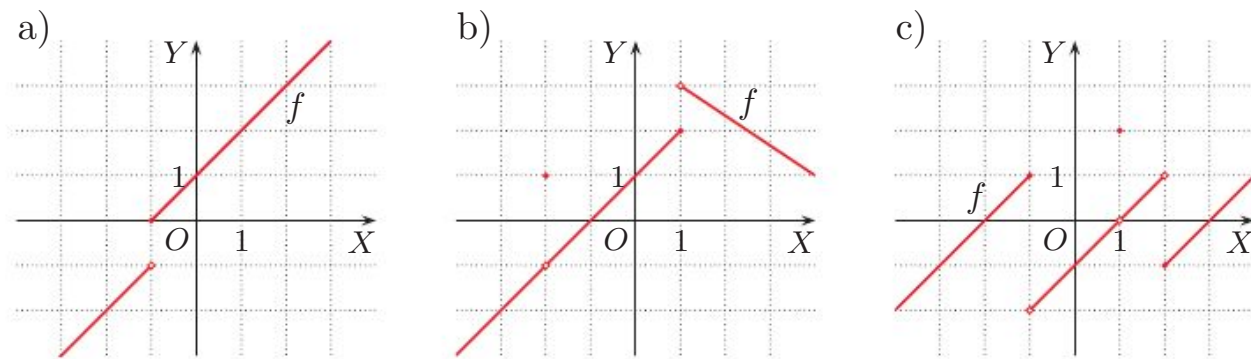


- D** 2. Naskicuj wykres funkcji sgn (signum) określonej wzorem:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Wykaż, że funkcja ta nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

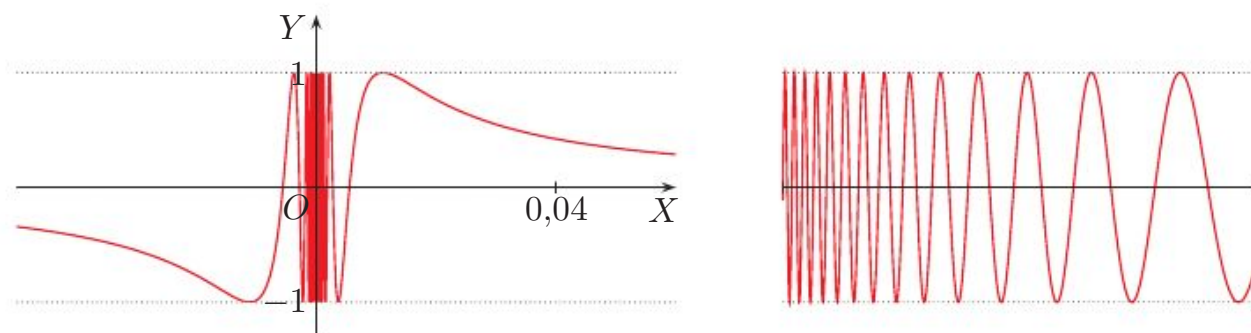
3. Na podstawie wykresu funkcji f określ, dla jakich punktów x_0 nie istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Odpowiedź uzasadnij.



- D** 4. Uzasadnij, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą 6.

a) $f(x) = 2x + 4$, $x_0 = 1$ b) $f(x) = 4x^2 - 10$, $x_0 = 2$

- D** 5. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$. Wartości funkcji oscylują między -1 a 1 , gdy x „zbliża się” do 0 . Na rysunkach poniżej przedstawiono fragmenty wykresu funkcji f w przedziale $[-0,06; 0,06]$ i w przedziale $[0,00015; 0,0006]$ odpowiednio przeskalowane.



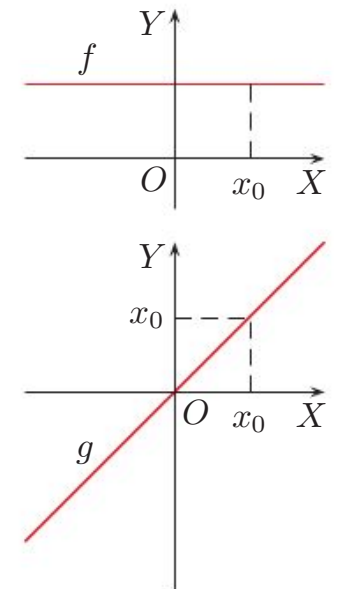
Uzasadnij, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

R 4.2. Obliczanie granic funkcji

Korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, możemy wykazać, że dla funkcji stałej $f(x) = c$ dla dowolnego punktu x_0 zachodzi równość $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$.

Dla funkcji $g(x) = x$ dla dowolnego punktu x_0 zachodzi równość $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = x_0$.

Przy obliczaniu granic często korzystamy z poniższego twierdzenia – jest ono wnioskiem z analogicznego twierdzenia dotyczącego granic ciągów (str. 190).



Twierdzenie

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot a$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ granica iloczynu funkcji i liczby
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a + b$ granica sumy funkcji
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a - b$ granica różnicy funkcji
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \cdot b$ granica iloczynu funkcji
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$, jeśli $b \neq 0$ granica ilorazu funkcji

Przykład 1

Oblicz granicę funkcji $f(x) = 2x^2 + 5$ w punkcie $x_0 = 3$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 5) &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 5 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 5 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x + 5 = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 = 23 \end{aligned}$$

Zauważ, że dla funkcji $f(x) = 2x^2 + 5$ mamy $f(3) = 2 \cdot 3^2 + 5 = 23$, czyli $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 5) = f(3)$.

Jeżeli funkcja f jest wielomianem, to:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ćwiczenie 1

Oblicz granicę.

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - x + 2)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)^{10}$

Przykład 2

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+1}{x^2+2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+1}{x^2+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (5x+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+2)} = \frac{6}{3} = 2$$

Zauważ, że dla funkcji $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+2}$ mamy $f(1) = 2$, czyli $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Jeśli f jest funkcją wymierną oraz x_0 należy do dziedziny tej funkcji, to $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Twierdzenie

Jeżeli $f(x) = \frac{w(x)}{v(x)}$ jest funkcją wymierną, gdzie w, v są wielomianami, oraz $v(x_0) \neq 0$, to:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w(x)}{v(x)} = \frac{w(x_0)}{v(x_0)}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3}{x-3}$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3-x}{2x^2-10}$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^4-4x^2+1}{2x^2-1}$ d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3+4x-13}{x+7}$

Przykład 3

a) Oblicz $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x}$.

Dla $x = 3$ wielomiany w liczniku i mianowniku przyjmują wartość 0 – mamy tu do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\left[\frac{0}{0}\right]$, nie możemy więc skorzystać z powyższego twierdzenia. Zauważmy jednak, że w rozkładzie obu wielomianów na czynniki występuje czynnik $(x-3)$. Zatem:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x} = \frac{2}{3}$$

b) Oblicz $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$$

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

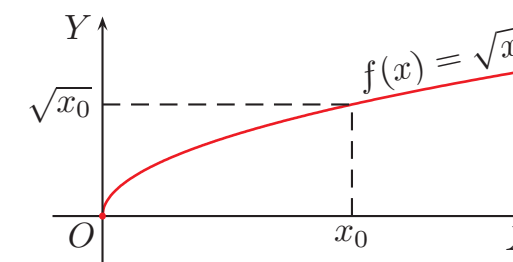
a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x-x^3}{x+2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-x-12}{x^2-16}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-1}{x^3-1}$

Kolejne twierdzenie dotyczy granicy funkcji, w której wzorze występuje pierwiastek.

Jeśli $x_0 > 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Ogólnie $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ dla:

- $x_0 > 0$, jeżeli n jest liczbą parzystą;
- $x_0 \in \mathbb{R}$, jeżeli n jest liczbą nieparzystą.



Ćwiczenie 4

Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 64} (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$ b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0,001} (\sqrt[3]{x} + 100x)$

Twierdzenie

Jeśli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, to:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

Przykład 4

Oblicz $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2+5}$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2+5) = 9, \text{ zatem } \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2+5} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2+5)} = \sqrt{9} = 3.$$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x-4}$ b) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{|x|+3}}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^4+9}}{\sqrt{3x-2}}$

Przykład 5

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$.

Zauważ, że $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x}-2) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$.

Podaną granicę obliczamy następująco:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} &\stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt{2x}+2} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Przykład 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2$$

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

Zadania

1. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+x^2+3}{x^2-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4-3x+8}{4x-x^3}$ c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+2)^5}{7-x^2}$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-9x}{3-x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x+6}{x^2+5x-6}$ g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+9x+14}{x^2+3x+2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x}$ e) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2-8x+1}{4x^2-1}$ h) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3-x^2-12x}{2x+6}$
 c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+3x-2}{x+2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$ i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+7x-8}{x^3-1}$

3. Naskicuj wykres funkcji f . Oblicz $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

a) $f(x) = \frac{4-2x}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{3x-6}{2x-x^2}$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{3-x}}{2-x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4}-1}{2x+6}$ f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{1-\sqrt{x^2-3}}$

Twierdzenie

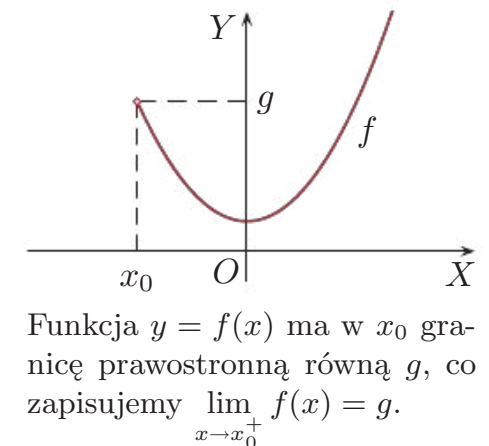
Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.

5. Oblicz granicę. Skorzystaj z podanego wyżej twierdzenia.

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x - \cos x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x}{\cos x} + 6 \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x)$

R 4.3. Granice jednostronne

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$. Będziemy rozważać, do jakiej liczby „zbliża się” wartość funkcji, gdy x „zbliża się” do x_0 i $x \in (x_0; b)$. W tym przypadku mówimy, że x dąży do x_0 z prawej strony, i piszemy $x \rightarrow x_0^+$ (punkt x_0 może, ale nie musi, należeć do dziedziny funkcji).



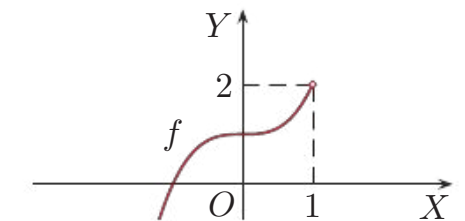
Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$.

Liczba g jest **granicą prawostronną** funkcji f w punkcie x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , gdzie $x_n \in (x_0; b)$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Ćwiczenie 1

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a; x_0)$. Sformułuj definicję **granic lewostronnej** funkcji f w punkcie x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.



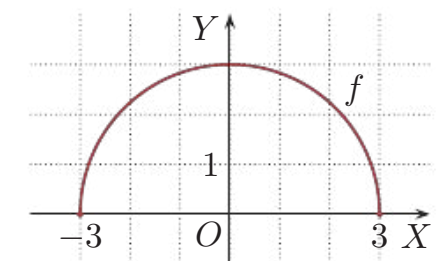
Funkcja $y = f(x)$ ma w $x_0 = 1$ granicę lewostronną równą 2, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

Granica prawostronna funkcji oraz granica lewostronna funkcji nazywane są **granicami jednostronnymi** funkcji f w punkcie x_0 .

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji danej wzorem $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, gdzie $x \in [-3; 3]$. Granice funkcji na krańcach dziedziny:

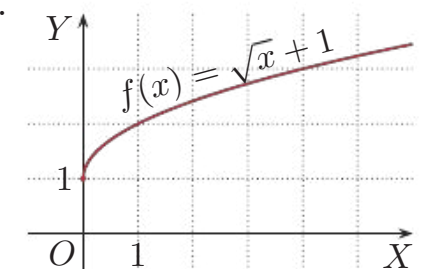
$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$$



Przy obliczaniu granic jednostronnych stosuje się analogiczne metody i twierdzenia jak w przypadku obliczania granic w punkcie.

Przykład 2

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 0 + 1 = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{6}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}} = \frac{6}{2} = 3$



Ćwiczenie 2

Oblicz granicę jednostronną.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x^2+1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-16}+2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$$

Przykład 3

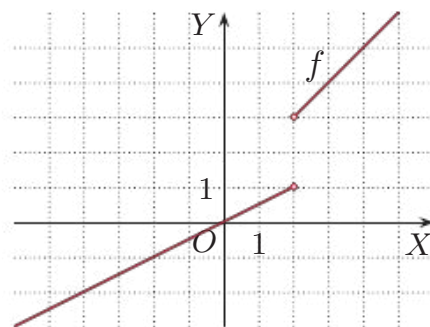
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ x+1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$

W punkcie $x_0 = 2$ można obliczyć obie granice jednostronne funkcji f :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{2}x\right) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3$$

Zauważ jednak, że $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Funkcja f ma obie granice jednostronne, ale nie ma granicy w punkcie $x_0 = 2$.



Twierdzenie

Granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ oraz zachodzi równość:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Zatem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$.

Zadania

1. Oblicz granicę jednostronną.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x-4}+2) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+5x+6}{2x^2-8} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{\sqrt{3-x}+1} \end{array}$$

2. Naszkicuj wykres funkcji f . Oblicz $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. Czy istnieje $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{dla } x \leq -1 \\ 3 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x < -1 \\ x^3-1 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{dla } x < -1 \\ x^2-1 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} x^3+4 & \text{dla } x < -1 \\ 4-x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

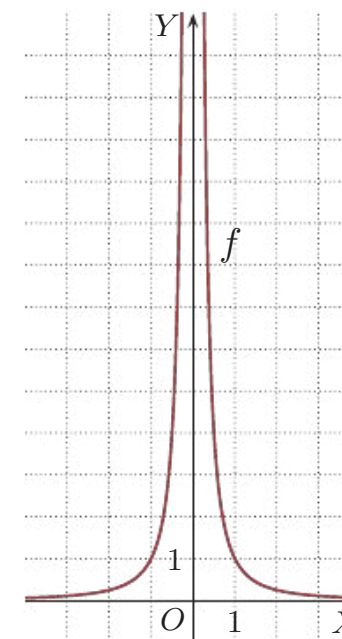
4.4. Granice niewłaściwe

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ (wykres obok). Zauważmy, że dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$.

Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu x_0 .

Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** ∞ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞ .



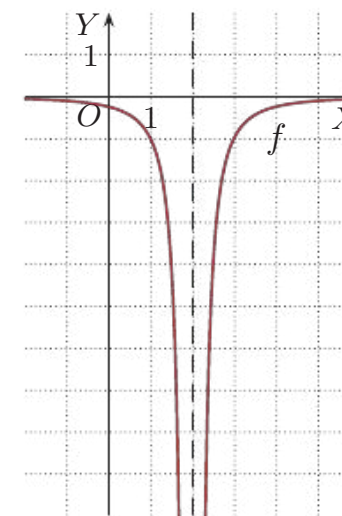
Ćwiczenie 1

Sformułuj definicję **granicy niewłaściwej** $-\infty$ funkcji f w punkcie x_0 .

Przykład 1

Funkcja $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (wykres obok), ma w punkcie $x_0 = 2$ granicę niewłaściwą $-\infty$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji:

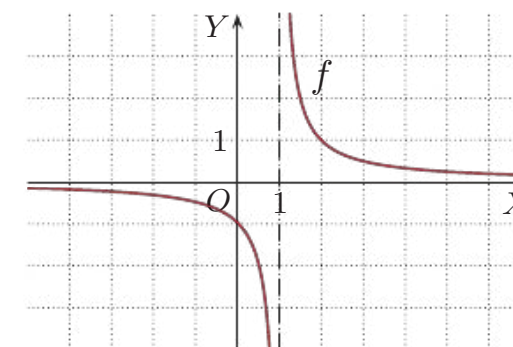
$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+2} & \text{dla } x < -2 \\ \frac{-4}{x+2} & \text{dla } x > -2 \end{cases}$$

Dla jakiego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ ma ona granicę $-\infty$?

Przykład 2

Dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (rysunek obok), nie istnieje $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Istnieją natomiast **granice niewłaściwe jednostronne** w punkcie $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$



Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$. Funkcja f ma w punkcie x_0 **granice niewłaściwą prawostronną** ∞ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , gdzie $x_n \in (x_0; b)$, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞ .

Uwaga. Analogicznie definiujemy granice:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

Będziemy stosować następujące oznaczenia:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$ oznacza, że $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ oraz $f(x) > 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 ;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^-$ oznacza, że $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ oraz $f(x) < 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 .

Twierdzenie

- Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a > 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$.
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a < 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^-$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a > 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^-$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a < 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$.

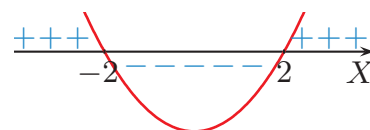
Uwaga. Analogiczne zależności zachodzą dla granic jednostronnych.

Przykład 3

Oblicz granicę.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-6}{x^2-4} \stackrel{\left[\frac{-4}{0^+}\right]}{=} -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-4) = 0 \text{ oraz } x^2-4 > 0 \text{ dla } x \in (2; \infty)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-6}{x^2-4} \stackrel{\left[\frac{-4}{0^-}\right]}{=} \infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-4) = 0 \text{ oraz } x^2-4 < 0 \text{ dla } x \in (-2; 2)$$



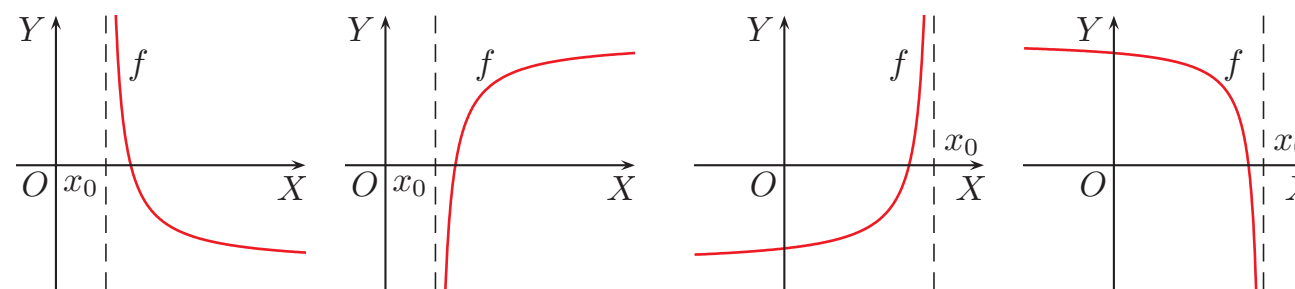
Aby ustalić znak mianownika, można naszkicować wykres funkcji $y = x^2 - 4$.

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

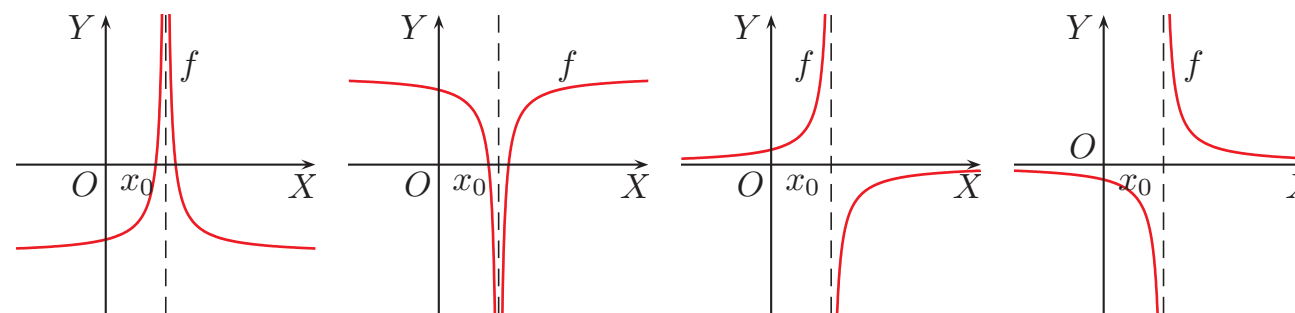
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{3-x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+1}{x^2-4}$$

Asymptoty pionowe wykresu funkcji



Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową prawostronną** wykresu funkcji f .
Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** wykresu funkcji f .

Jeśli obie granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 są niewłaściwe, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową obustronną** (lub krótko – asymptotą pionową) wykresu funkcji f (wykresy poniżej).



Istnienie asymptot pionowych w przypadku funkcji wymiernej badamy w miejscach zerowych mianownika.

Przykład 4

Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2} \stackrel{\left[\frac{1}{0}\right]}{=} \infty$, zatem prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f .

Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji f i wyznacz asymptoty pionowe jej wykresu.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x+2}{x-4} \quad \text{b) } f(x) = \frac{1-x^2}{x+2} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że wykres funkcji f nie ma asymptoty pionowej w punkcie x_0 . Naszkicuj ten wykres.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1-4x^2}{2x-1}, \quad x_0 = \frac{1}{2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}, \quad x_0 = 2$$

Twierdzenie

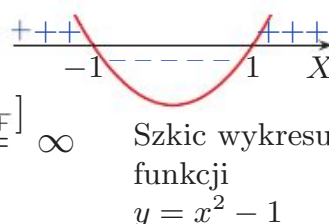
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$.
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

Uwaga. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, to wyznaczenie $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ wymaga szczegółowych badań (mamy wówczas do czynienia z symbolem nieoznaczonym $[\infty - \infty]$).

Przykład 5

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) \stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1} \stackrel{\left[\frac{1}{0^+}\right]}{=} \infty$$



Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-4} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$

Zadania

1. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1-x}{5-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x+1}{x^2-x-2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3}{x-2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+1}{x^2+4x+3}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+3}{x^2-1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-7}{2x-x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right)$

2. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x^2-5}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

e) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

b) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$

d) $f(x) = \frac{6x+2}{1-9x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-6x+8}$

3. Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x^2}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x-3}$

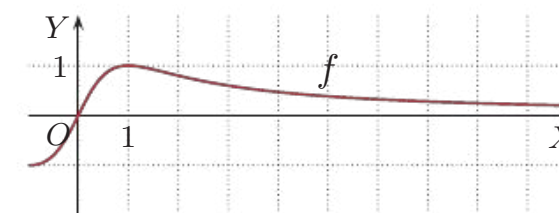
c) $f(x) = \frac{x}{|x-3| - |x-1|}$

R 4.5. Granica funkcji w nieskończoności

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Rozpatrzmy ciąg argumentów (x_n) taki, że $x_n \rightarrow \infty$.

Wtedy ciąg odpowiadających im wartości funkcji $(f(x_n))$ ma granicę równą zero.



Definicja

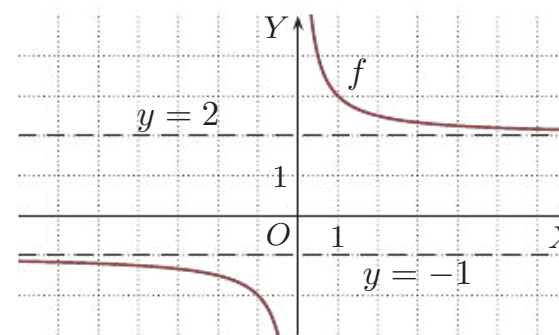
Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a; \infty)$. Liczba g jest granicą funkcji f w ∞ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do ∞ , o wyrazach należących do dziedziny funkcji f , ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Ćwiczenie 1

Sformułuj definicję $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$.

Jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$, to prostą $y = k$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w ∞ .

Jeśli $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, to prostą $y = l$ nazywamy **asymptotą poziomą** wykresu funkcji w $-\infty$.



Wykres funkcji f ma w ∞ asymptotę poziomą $y = 2$, a w $-\infty$ - asymptotę poziomą $y = -1$.

Przykład 2

Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji $f(x) = \frac{3-x^2}{2x^2+4}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x^2}{2x^2+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right)}{x^2 \left(2 + \frac{4}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 1}{2 + \frac{4}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^2}{2x^2+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right)}{x^2 \left(2 + \frac{4}{x^2} \right)} = -\frac{1}{2}$$

Wykres funkcji f ma w ∞ oraz w $-\infty$ asymptotę poziomą $y = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{6-4x}{1+2x}$

b) $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+2}$

c) $f(x) = \frac{2|x|+1}{x}$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

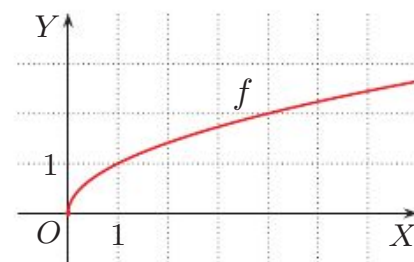
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Definicja

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a; \infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) rozbieżnego do ∞ , o wyrazach należących do dziedziny funkcji f , ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞ .

Przykład 3

Funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ (wykres obok) ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞ .



Ćwiczenie 3

Sformułuj definicję:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f i określ granice $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$

Twierdzenie

Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ ■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -\infty & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$ ■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ dla n nieparzystych

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}}{x^5}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^3)^2}{x^4}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

Twierdzenie

- Jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a > 0$, to $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a < 0$, to $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$.
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a > 0$, to $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$.
- Jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a < 0$, to $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$.

Przykład 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 6x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(2 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = \infty \quad \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = 2 \end{matrix}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (100 + x - x^3)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4}{10} + 2x^3 + x^2 \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x)^3$

Przykład 5

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{6x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{6 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{6}$$

Aby obliczyć te granice, dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę x z mianownika.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{2x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x}} = \infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^3 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ćwiczenie 7

Oblicz granicę.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 2x}{1 - x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 4}{x^4 + x + 1}$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 10}{x + \sqrt{x}}$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 7}{x + 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 1}{(x^2 - 1)^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{4\sqrt{x} - x}$

Zadania

1. Oblicz granicę.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - x^3 + 3)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + \frac{1}{x})$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)^4$

2. Oblicz granicę.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x - 2}$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 - 3x + 2}$ i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^5 - 1}$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 6x}{2x + 1}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - x^3 + 1}{x - 2x^4}$ j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 9}{1 - 2x^2}$
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + x + 1}{x - 3x^2}$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{1 - x^3}$ k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + x - 1}{2x + 1}$
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{1 - x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^2}{x^3 + 3x - 7}$ l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{3 - x^2}$

3. Oblicz granicę.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(1-x)}{(1-6x)(x+1)}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2x+1)(3x-1)}{(x+1)(x^2-4)}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(4x-1)}{(2x-1)^2(3-x)}$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 9} - x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

5. Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{-x} \cdot \sqrt[3]{x^2})$

6. Wyznacz asymptoty poziome wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = \frac{1 - 6x^2}{2x^2 + x - 1}$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-1}}$
 b) $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$ d) $f(x) = \frac{5x^4 - x^2 + 1}{x^4 + 1}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3-x}}$

7. Wyznacz asymptoty poziome i pionowe wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ g) $f(x) = \frac{2x^2+x}{x^2-x-2}$
 b) $f(x) = \frac{2x-1}{4-x}$ e) $f(x) = \frac{-3}{9-x^2}$ h) $f(x) = \frac{1-x}{x^2-4x-5}$
 c) $f(x) = \frac{1-6x}{2-3x}$ f) $f(x) = \frac{5-x}{x^2-25}$ i) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+x-2}$

8. Wyznacz asymptoty poziome i pionowe wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{\frac{1-4x}{1-x}}$ b) $f(x) = \sqrt{\frac{9x-1}{x-1}}$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{1-16x^2}{4-x^2}}$

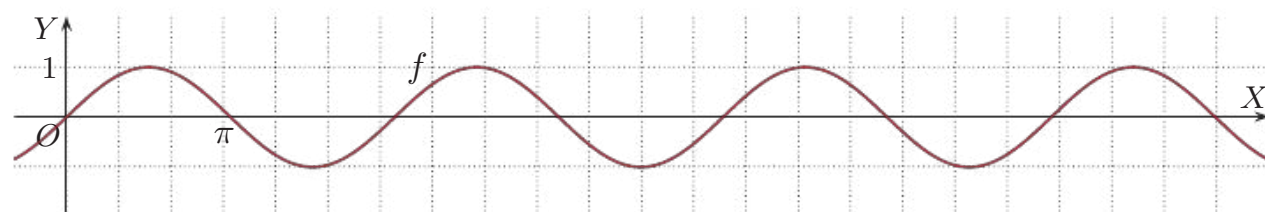
9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2} + 1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} = \quad |x| = -x \text{ dla } x < 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right) = -1 \end{aligned}$$

Oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{8x^3+3}}$

D 10. Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \sin x$ nie ma granicy w ∞ .



Dowiedz się więcej

Asymptoty ukośne

Prosta $y = mx + n$ jest **asymptotą ukośną** wykresu funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$. Współczynniki m i n asymptoty ukośnej (jeżeli istnieje) wyznaczamy za pomocą wzorów:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

Przykład

Wyznacz asymptotę ukośną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^3 + 8x}{2x^2 + 2}$ w ∞ (rysunek obok).

Wyznaczamy współczynniki m i n :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8x}{2x^3 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 + \frac{8}{x^2})}{2x^3(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 8x}{2x^2 + 2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 8x}{2(x^2 + 1)} - \frac{x^3 + x}{2(x^2 + 1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{2(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \frac{7}{x}}{2x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x}}{2(1 + \frac{1}{x^2})} = 0 \end{aligned}$$

Zatem asymptotą ukośną wykresu funkcji f w ∞ jest prosta $y = \frac{1}{2}x$.

Analogicznie wyznacza się asymptotę ukośną wykresu funkcji f w $-\infty$. Dla funkcji $f(x) = \frac{x^3 + 8x}{2x^2 + 2}$ jest nią również prosta $y = \frac{1}{2}x$.

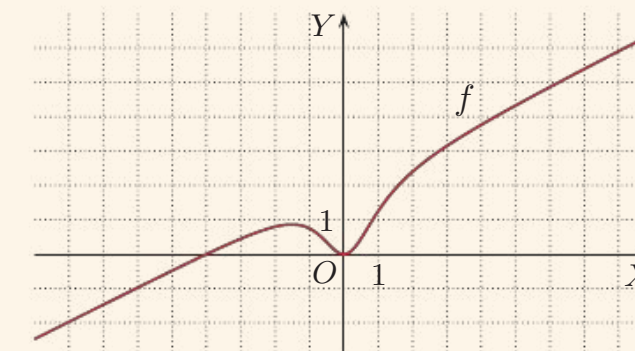
Szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej jest asymptota pozioma – prosta o współczynniku kierunkowym $m = 0$.

Wykres funkcji może mieć asymptotę ukośną, która nie jest asymptotą poziomą, tylko wtedy, gdy granica tej funkcji w $\pm\infty$ jest równa $\pm\infty$.

D 1. Uzasadnij, że asymptotą ukośną wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2}{2x^2 + 2}$$

(rysunek obok) w $\pm\infty$ jest prosta $y = \frac{1}{2}x + 2$.



R 4.6. Ciągłość funkcji

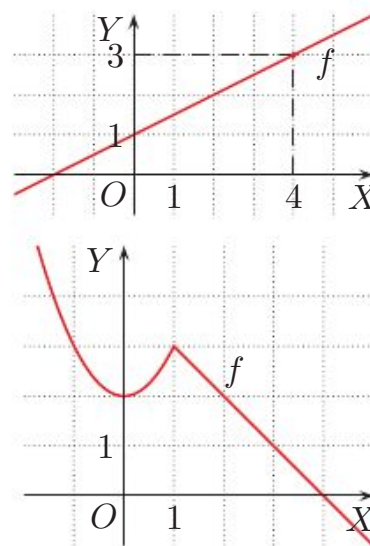
Definicja

Funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in (a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Uwaga. Analogiczną definicję przyjmujemy dla funkcji określonej w przedziale $(-\infty; b)$, $(a; \infty)$ lub w $\mathbb{R}$.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 4$, gdyż $\lim_{x \rightarrow 4} (\frac{1}{2}x + 1) = 3$ oraz $f(4) = 3$.



D Przykład 2

Wykaż, że funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 4 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

Obliczamy granice jednostronne w punkcie $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - x) = 3$$

Istnieje więc granica: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$. Ponadto $f(1) = 3$, więc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$. Funkcja f jest zatem ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

D Ćwiczenie 1

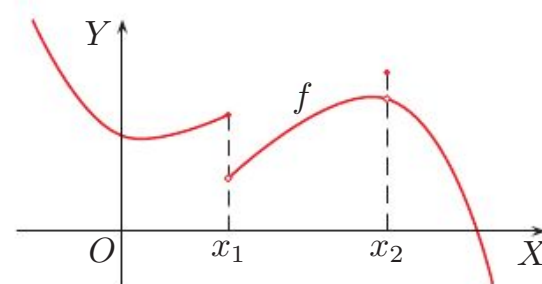
Wykaż, że funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$, i naszkicuj jej wykres.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & \text{dla } x < 2 \\ x & \text{dla } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{dla } x < 2 \\ (x-3)^3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

Przykład 3

Funkcja f , której wykres przedstawiono na rysunku obok, nie jest ciągła:

- w punkcie x_1 , gdyż $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$ nie istnieje;
- w punkcie x_2 , gdyż $\lim_{x \rightarrow x_2} f(x) \neq f(x_2)$.



Jeśli funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 \in D_f$, to mówimy, że jest **nieciągła w punkcie** x_0 .

D Ćwiczenie 2

Wykaż, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, i naszkicuj jej wykres.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Przykład 4

Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 1}{4x - 2} & \text{dla } x \neq \frac{1}{2} \\ a & \text{dla } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Obliczamy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{4x - 2} \stackrel{[0/0]}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{2(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 1}{2} = 1$$

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\frac{1}{2}) = 1$, czyli dla $a = 1$.

Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} & \text{dla } x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - x & \text{dla } x \neq 2 \\ a^2 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

Definicja

Funkcję $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **ciągłą**, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(a; b)$.

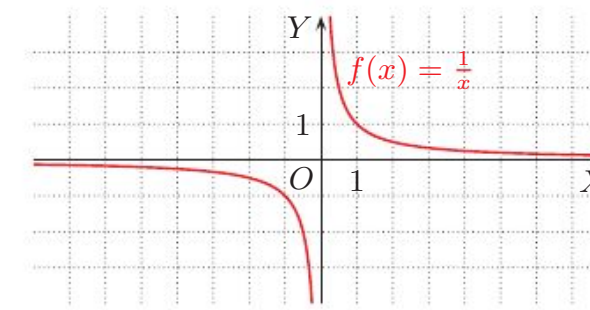
Uwaga. Analogicznie definiujemy funkcję ciągłą określoną w przedziale $(-\infty; b)$, $(a; \infty)$ lub w zbiorze $\mathbb{R}$.

Jeśli funkcja f jest nieciągła w choćby jednym punkcie swojej dziedziny, to mówimy, że jest **nieciągła**.

Jeśli dziedziną funkcji f jest zbiór będący sumą przedziałów otwartych, to mówimy, że funkcja ta jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym z tych przedziałów.

Przykład 5

Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ określona w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ jest ciągła, ponieważ jest ciągła w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ oraz $(0; \infty)$.

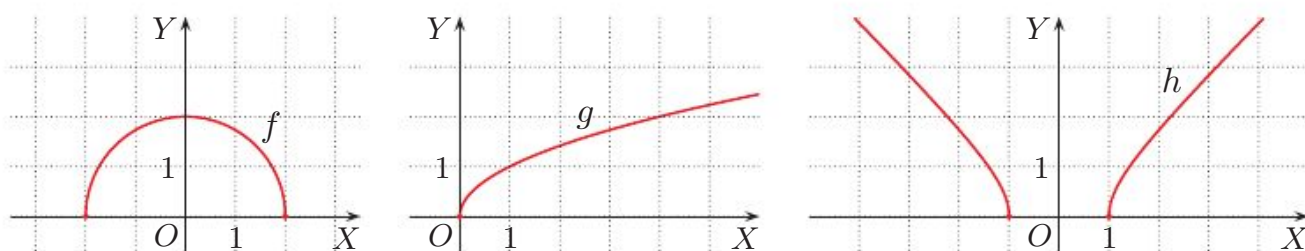


Definicja

Funkcję $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **ciągłą w przedziale domkniętym** $[a; b]$, jeżeli jest ciągła w przedziale $(a; b)$ oraz:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Uwaga. Analogicznie definiujemy ciągłość funkcji w przedziałach postaci $[a; b)$ i $(a; b]$ oraz $[a; \infty)$ i $(-\infty; b]$.



$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

Funkcja $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ określona w przedziale $[-2; 2]$ jest ciągła.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

Funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ określona w przedziale $[0; \infty)$ jest ciągła.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = h(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$$

Funkcja $h(x) = \sqrt{x^2-1}$ określona w zbiorze $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ jest ciągła.

Twierdzenie

Jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to funkcja:

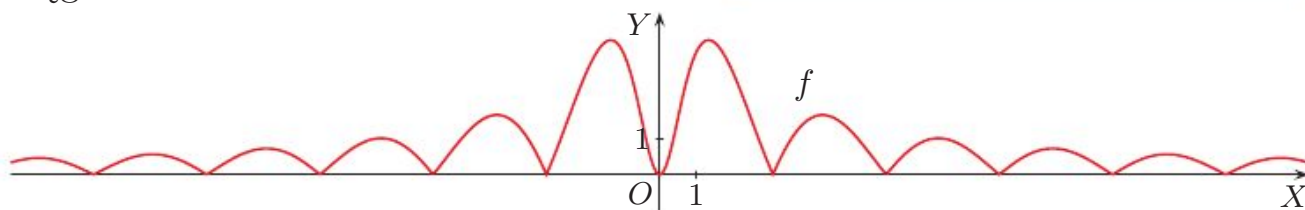
- $f + g$ jest ciągła w punkcie x_0 ,
- $f - g$ jest ciągła w punkcie x_0 ,
- $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0 ,
- $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0 pod warunkiem, że $g(x_0) \neq 0$.

Funkcjami ciągłymi są wielomiany, funkcje wymierne, funkcje wykładnicze i logarytmiczne, funkcje trygonometryczne (sinus, cosinus i tangens) oraz funkcje otrzymane z powyższych w wyniku operacji arytmetycznych.

Przykład 6

Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \left| \frac{8x \sin x}{x^2 + 1} \right|$ (wykres poniżej) jest ciągła.

Jeśli funkcja f jest ciągła, to funkcja $y = |f(x)|$ również jest ciągła.



Zadania

- D** 1. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 .

a) $f(x) = 2x^2 + 1, x_0 = \frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}, x_0 = 1$

2. Zbadaj ciągłość funkcji f .

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \leq 3 \\ 4x + 1 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{dla } x \neq 3 \\ 4 & \text{dla } x = 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{4x-x^2}{x-4} & \text{dla } x \neq 4 \\ 0 & \text{dla } x = 4 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{1-x} & \text{dla } x \neq 1 \\ 3 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

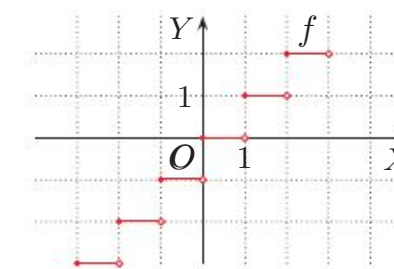
c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2x^2}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{1-x^2} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ 1 & \text{dla } x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

3. Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{dla } x \leq 1 \\ 3x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{dla } x < 2 \\ 2x - a^2 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{dla } x < 3 \\ x - 6 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + a^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ \frac{3}{x} - a & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = [x]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x . Dla jakich argumentów $x \in \mathbb{R}$ funkcja ta nie jest ciągła? Odpowiedź uzasadnij.



5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x}{x^2-x} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ a^3 - 7 & \text{dla } x = 0 \\ 2 \sin b & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \\ a^2 - \frac{1}{6}a & \text{dla } x = -2 \\ \frac{1}{3} \cos b & \text{dla } x = 2 \end{cases}$

6. Dla jakich wartości parametrów a, b i c funkcja f jest ciągła?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x^2+x-6} & \text{dla } x < -3 \\ b-1 & \text{dla } x = -3 \\ c|x+1| & \text{dla } x > -3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-4} & \text{dla } x < 2 \\ bx + 1 & \text{dla } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-c}{x-3} & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

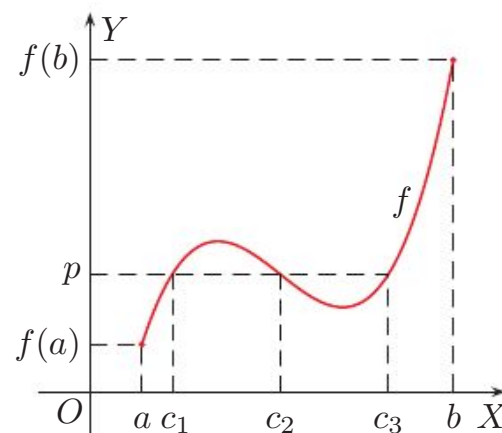
R 4.7. Własności funkcji ciągłych

Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich

Jeśli funkcja $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $f(a) \neq f(b)$, to funkcja ta przyjmuje w przedziale $(a; b)$ każdą wartość liczbową p znajdującą się między liczbami $f(a)$ i $f(b)$ (czyli przyjmuje w tym przedziale każdą wartość pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$).

O funkcji, która ma własność opisaną w powyższym twierdzeniu, mówimy, że ma **własność Darboux** (Jean Gaston Darboux [czyt. żą gasta darbu], matematyk francuski (1842–1917)).

Powyższe twierdzenie można również sformułować następująco: jeśli funkcja $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $f(a) < f(b)$, to dla każdej liczby $p \in (f(a); f(b))$ istnieje co najmniej jeden argument $c \in (a; b)$ taki, że $f(c) = p$.



Jeśli funkcja $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz:

$$f(a) < 0, f(b) > 0 \text{ lub } f(a) > 0, f(b) < 0$$

to istnieje co najmniej jeden argument $c \in (a; b)$ taki, że $f(c) = 0$.

D Przykład 1

Wykaż, że wielomian $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ ma pierwiastek $c \in (0; 1)$.

Wielomian w jest funkcją ciągłą w przedziale $[0; 1]$ oraz $w(0) = -1 < 0$ i $w(1) = 1 > 0$, zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich ma on pierwiastek $c \in (0; 1)$.

D Ćwiczenie 1

Wykaż, że wielomian w ma pierwiastek należący do podanego przedziału.

a) $w(x) = -3x^4 + 6x^2 + 5, (0; 2)$ b) $w(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 - 7, (-2; -1)$

Ćwiczenie 2

Znajdź błąd w poniższym rozumowaniu.

Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła oraz $f(-1) = -1 < 0$ i $f(1) = 1 > 0$, zatem równanie $\frac{1}{x} = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(-1; 1)$.

D Przykład 2

Uzasadnij, że równanie $x = 4 \cos x$ ma rozwiązanie należące do przedziału $(0; \frac{\pi}{2})$.

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x - 4 \cos x$ (wykres obok). Jest ona ciągła w przedziale $[0; \frac{\pi}{2}]$.

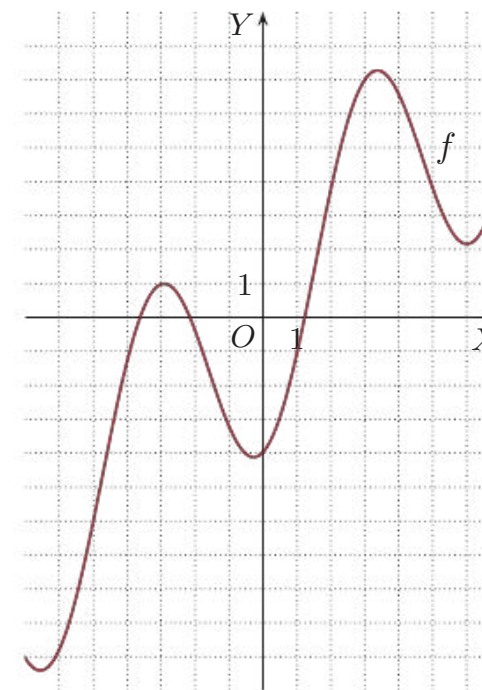
$$f(0) = 0 - 4 \cos 0 = -4 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 4 \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$$

Zatem na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(0; \frac{\pi}{2})$, co oznacza, że równanie:

$$x - 4 \cos x = 0$$

ma rozwiązanie należące do tego przedziału.



D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie należące do podanego przedziału.

a) $\sin x = 3 - 2x, (0; \frac{\pi}{2})$

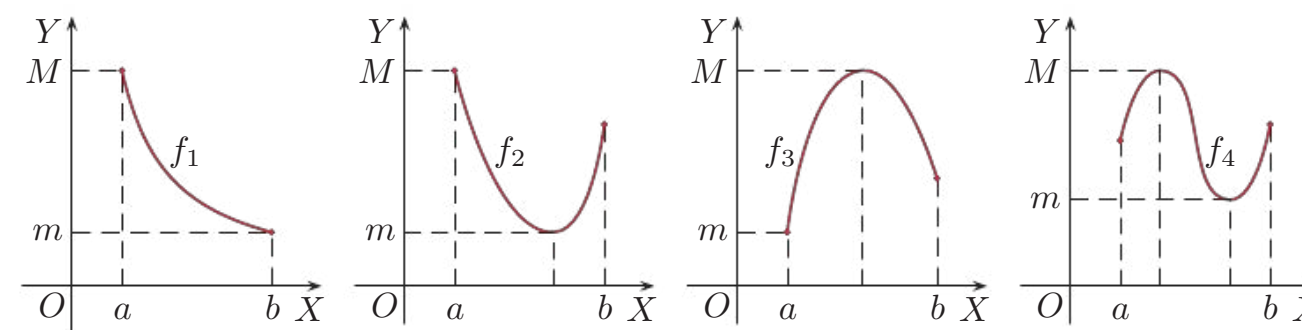
b) $\sqrt{x} + \frac{4}{x} = 4, (1; 2)$

Poniższe twierdzenie o przyjmowaniu przez funkcję ciągłą wartości najmniejszej i największej, zwane też **twierdzeniem o osiągnięciu kresów**, udowodnił matematyk niemiecki Karl Teodor Wilhelm Weierstrass [czyt. wajersztras] (1815–1897).

Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli funkcja $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to w pewnym punkcie tego przedziału funkcja ta przyjmuje wartość największą oraz w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość najmniejszą.

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a; b]$ przyjmuje wartość najmniejszą m oraz wartość największą M albo na końcach przedziału $[a; b]$, albo w którymś z jego punktów wewnętrznych (patrz przykłady poniżej).



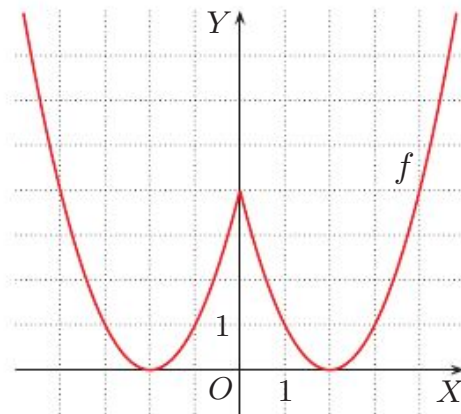
Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{dla } x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale:

- a) $[-4; -3]$, b) $[-3; 3]$, c) $[-1; 5]$.



Zadania

- D** 1. Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie w przedziale $(-1; 0)$.
a) $x^3 + 2x + 1 = 0$ b) $x^4 - 7x - 4 = 0$ c) $x^6 - 1 = 3x^3$
- D** 2. Uzasadnij, że równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie.
a) $x^3 - 4x + 1 = 0$ b) $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ c) $x^4 + 2x^3 = 4$
3. Wyznacz przedział długości $\frac{1}{2}$, do którego należy rozwiązanie równania.
a) $2x^3 + 4x - 1 = 0$ b) $2x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ c) $x^4 - 3x^3 + 3 = 0$
- D** 4. Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie w przedziale $(2; 4)$.
a) $\frac{2}{x^2} = \sqrt{x} - 1$ b) $\log_2 x = \frac{3}{2}x - 3$ c) $4 \sin \frac{\pi}{8} x = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x$
- D** 5. a) Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x^2 - 5x + \log_4 x + 5$ ma w przedziale $(1; 4)$ co najmniej dwa miejsca zerowe.
b) Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ ma w przedziale $(0; 4)$ co najmniej trzy miejsca zerowe.
- D** 6. Funkcja $f: [\frac{1}{2}; \frac{13}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i dla argumentów n będących liczbami naturalnymi $f(n) = (-2)^n$. Uzasadnij, że f ma co najmniej pięć miejsc zerowych.
7. Naskicuj wykres funkcji f . Znajdź największą wartość tej funkcji w przedziale $[2; 4]$.
a) $f(x) = (x-2)^2$ b) $f(x) = -(x-3)^2 + 1$ c) $f(x) = (x-4)^3$
8. Naskicuj wykres funkcji f i na tej podstawie określ, czy funkcja ta przyjmuje wartość najmniejszą.
a) $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x \in [-1; 0] \\ 4-x^2 & \text{dla } x \in [0; 1] \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \in (0; 1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1; 4] \end{cases}$

R 4.8. Pochodna funkcji w punkcie

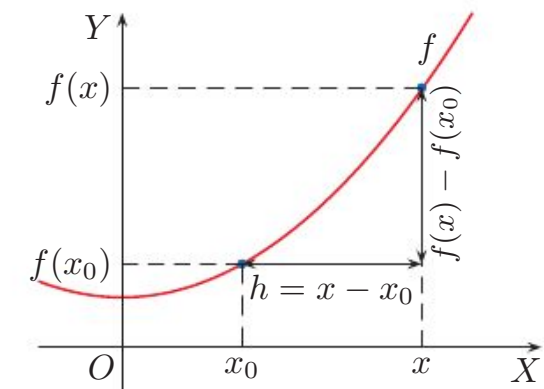
W tym temacie zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a; b)$. Niech x_0 oraz x będą punktami należącymi do przedziału $(a; b)$.

Różnicę $h = x - x_0$ nazywamy **przyrostem argumentu** funkcji (stąd $x = x_0 + h$).

Różnicę $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazywamy **przyrostem wartości funkcji**.

Iloraz $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (dla $x \neq x_0$), zapisywany też w postaci $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0 .

Iloraz różnicowy można interpretować jako średnią prędkość przyrostu funkcji f w przedziale $[x_0; x]$.

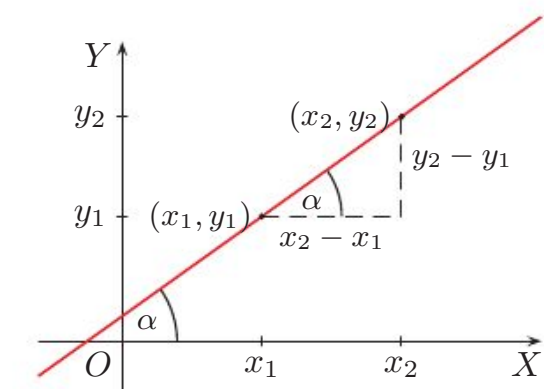


Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Przypomnijmy, że jeśli prosta $y = ax + b$ przechodzi przez dwa różne punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , to jej **współczynnik kierunkowy** możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Jednocześnie iloraz $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ jest równy tangensowi kąta α (rysunek obok).



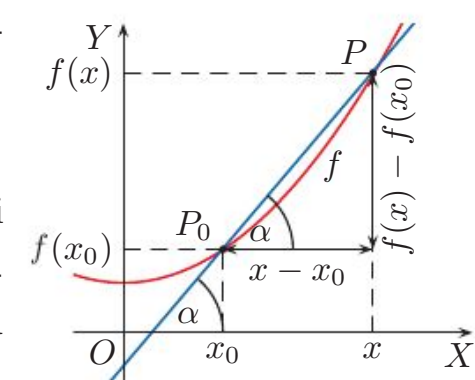
Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta α , jaki ta prosta tworzy z osią OX : **$\operatorname{tg} \alpha = a$** .

Prostą, która przecina wykres funkcji w co najmniej dwóch punktach, nazywamy **sieczną** tego wykresu.

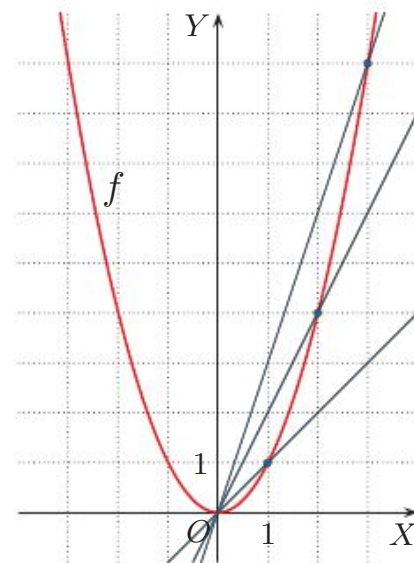
Rozpatrzmy sieczną wykresu funkcji f przecinającą ten wykres w punktach $P_0(x_0, f(x_0))$ i $P(x, f(x))$ (rysunek obok).

Iloraz różnicowy $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ jest równy tangensowi kąta α , jaki sieczna P_0P tworzy z osią OX , a zatem jest równy współczynnikowi kierunkowemu siecznej P_0P .



Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej wykresu funkcji $f(x) = x^2$ (rysunek obok) przecinającej ten wykres w punkcie $(0, 0)$ oraz w punkcie o odciętej równej: a) 1, b) 2, c) 3.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -(x-1)^2$ oraz styczną tego wykresu przechodzącą przez punkty o odciętych $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$. Oblicz współczynnik kierunkowy tej stycznej.

Pochodna funkcji w punkcie

Definicja

Jeśli istnieje skończona granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, to granicę tę nazywamy **po pochodną funkcji f w punkcie x_0** i oznaczamy $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Uwaga. Można wykazać, że jeśli funkcja ma w punkcie x_0 pochodną, to jest w tym punkcie ciągła. Jednak z ciągłości funkcji w punkcie x_0 nie wynika istnienie pochodnej (patrz zad. 4, str. 246).

Przykład 1

a) Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 3$.

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

b) Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz $f'(x_0)$.

a) $f(x) = 2x$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = -2$

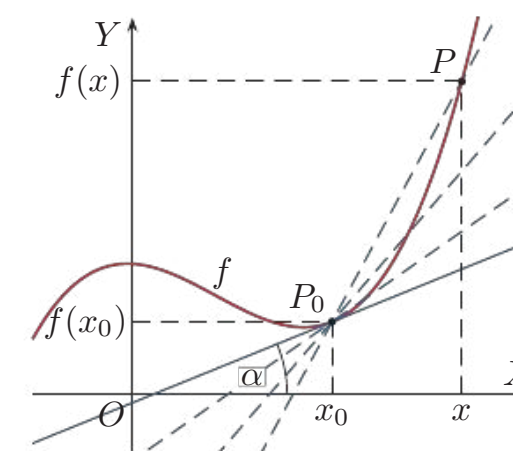
b) $f(x) = 2x^2$, $x_0 = 4$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 3$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną. Wówczas przy x dążącym do x_0 styczne wykresu funkcji f przechodzące przez punkt P_0 (rysunek obok) „zbliżają się” do prostej zwanej **styczną do wykresu funkcji w punkcie P_0** .

Przypomnijmy, że iloraz różnicowy $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ jest równy tangensowi kąta, jaki styczna P_0P tworzy z osią OX .

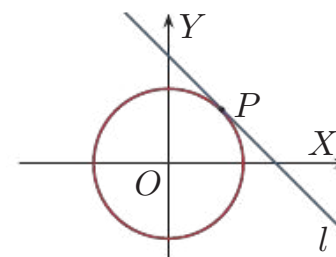


Pochodna $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta, jaki styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P_0(x_0, f(x_0))$ tworzy z osią OX (rysunek powyżej):

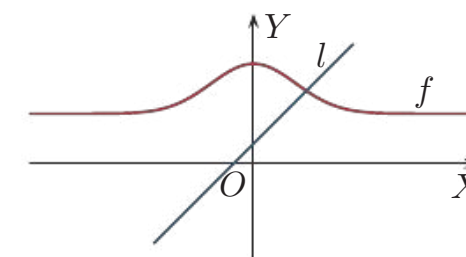
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Liczba $f'(x_0)$ jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

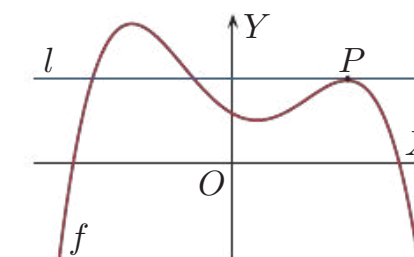
Zauważ, że o ile styczną do okręgu można zdefiniować jako prostą mającą z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny, o tyle w przypadku stycznej do wykresu funkcji takie określenie byłoby niepoprawne.



Prosta l jest styczna do okręgu w punkcie P . Prosta l ma z okręgiem jeden punkt wspólny.



Prosta l ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f , ale nie jest jego styczną.



Prosta l jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P i ma trzy punkty wspólne z tym wykresem.

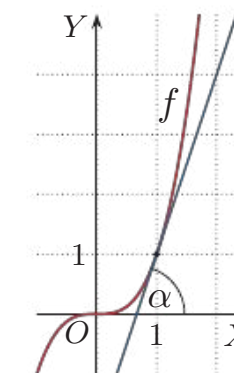


Przykład 2

Oblicz miarę kąta α , jaki styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $(1, 1)$ tworzy z osią OX .

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \end{aligned}$$

Zatem $\operatorname{tg} \alpha = 3$, stąd $\alpha \approx 72^\circ$.





Ćwiczenie 4

Oblicz współczynnik kierunkowy a stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Podaj miarę kąta α , jaki ta styczna tworzy z osią OX .

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$ b) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$

Zadania

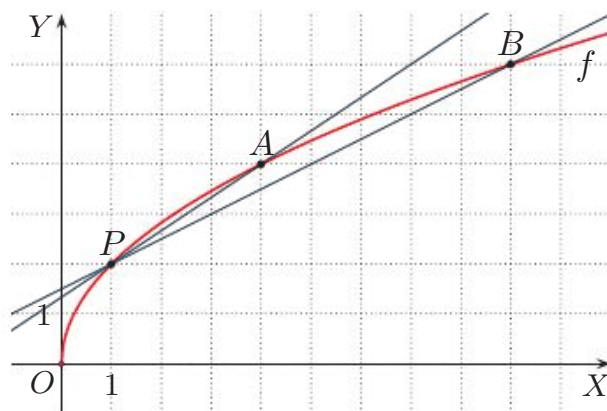
1. Oblicz pochodne funkcji f w punktach x_0 i x_1 .

a) $f(x) = 2$, $x_0 = 3$, $x_1 = 6$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 2$
 b) $f(x) = 3x - 4$, $x_0 = 1$, $x_1 = 5$ e) $f(x) = x^3$, $x_0 = -2$, $x_1 = -3$
 c) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ f) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 4$

2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2\sqrt{x}$.

a) Oblicz współczynniki kierunkowe siecznych PA i PB oraz wyznacz ich równania.

b) Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f poprowadzonej w punkcie P .



3. Oblicz miarę kąta, jaki z osią OX tworzy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = -\frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$ c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$

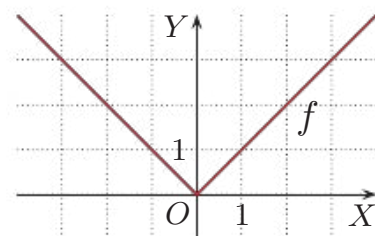
D 4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Oznacza to, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nie istnieje, czyli funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$ (choć jest ciągła w tym punkcie).



Uzasadnij, że funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0 .

a) $f(x) = |x - 2|$, $x_0 = 2$ b) $f(x) = x + |x|$, $x_0 = 0$

R 4.9. Funkcja pochodna

D Przykład 1

Wykaż, że funkcja $f(x) = x^2$ ma pochodną w dowolnym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$.

Obliczamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 \end{aligned}$$

Zauważmy, że możemy określić funkcję, która każdej liczbie $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie przyporządkowywać wartość pochodnej funkcji f w punkcie x_0 równą $2x_0$. Mamy więc dwie funkcje – funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x^2$ oraz funkcję $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f'(x) = 2x$.

Definicja

Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie x pewnego zbioru (będącego przedziałem otwartym lub sumą przedziałów otwartych), to w tym zbiorze jest określona funkcja $y = f'(x)$, zwana **funkcją pochodną** funkcji f lub krótko **pochodną** funkcji f .

O funkcji f mówimy, że jest w tym zbiorze **różniczkowalna**.

D Ćwiczenie 1

Wykaż, że:

a) funkcja stała $f(x) = c$ ma w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ pochodną równą 0,

b) funkcja $f(x) = x$ ma w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ pochodną równą 1.

Wzory na pochodne zwykle zapisuje się krótko:

$$\begin{array}{lll} (c)' = 0, \text{ gdzie } c - \text{stała} & (x^2)' = 2x & \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \text{ dla } x \neq 0 \\ (x)' = 1 & (x^3)' = 3x^2 & (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ dla } x > 0 \end{array}$$

Uwaga. Wzory $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ są szczególnymi przypadkami wzoru podanego niżej.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$: $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n < 0$: $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przykład 2

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 7$.

$f'(x) = 2x$, zatem $f'(7) = 2 \cdot 7 = 14$.

Ćwiczenie 2

Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0 .

a) $f(x) = x^3$, $x_0 = -5$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1\frac{9}{16}$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie $f'(x) = 2$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Podany obok wzór na pochodną funkcji $f(x) = x^a$, zwanej **funkcją potęgową**, jest prawdziwy dla dowolnego wykładnika $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $x > 0$. Na przykład dla funkcji $f(x) = \sqrt[6]{x}$:

$$f'(x) = (\sqrt[6]{x})' = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

Równanie stycznej

Przykład 3

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $(2, 4)$.

Równanie stycznej zapisujemy w postaci $y = ax + b$ i obliczamy jej współczynnik kierunkowy a :

$$f'(x) = 2x, \text{ zatem } a = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

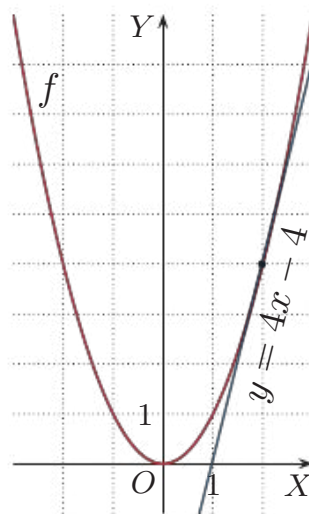
Styczna ma więc równanie $y = 4x + b$. Aby wyznaczyć wartość b , podstawiamy współrzędne punktu $(2, 4)$ do równania stycznej: $4 = 4 \cdot 2 + b$ i stąd $b = -4$.

Otrzymaliśmy równanie stycznej $y = 4x - 4$.

Prosta o współczynniku kierunkowym a przechodząca przez punkt $(x_0, f(x_0))$ dana jest równaniem $y - f(x_0) = a(x - x_0)$. Aby wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, możemy skorzystać z poniższego wzoru.

Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną, to **styczną** do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest prosta o równaniu:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



Ćwiczenie 4

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

a) $f(x) = x^2$, $P(3, 9)$ b) $f(x) = x^2$, $P(-2, 4)$ c) $f(x) = x^3$, $P(1, 1)$

Zadania

1. Na podstawie definicji pochodnej wyprowadź podany wzór.
 - a) $(x^3)' = 3x^2$ b) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ c) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .
 - a) $f(x) = x^2$, $x_0 = -4$ b) $f(x) = x^3$, $x_0 = -3$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$
3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tworzącej z osią OX kąt 30° .

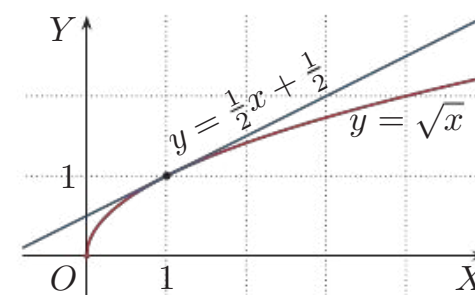
$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc szukamy punktu x_0 , dla którego $f'(x_0) = 2x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Stąd $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ oraz $y_0 = f(x_0) = \frac{1}{12}$. Zatem styczna ma równanie $y - \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{6})$, czyli $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{12}$.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ tworzącej z osią OX kąt: a) 45° , b) 60° , c) 150° .

4. Wyznacz punkt $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f jest równoległa do prostej $y = 6x - 11$.
 - a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$
5. Wyznacz punkt $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f jest prostopadła do prostej $y = -3x + 7$.
 - a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$
6. Czy istnieje styczna do wykresu funkcji f mająca współczynnik kierunkowy równy a ? Jeżeli styczna istnieje, to wyznacz jej równanie.
 - a) $f(x) = x^3$, $a = 3$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -4$ c) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = -1$

7. a) Wykaż, że prosta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$.

- b) Skorzystaj z przybliżenia $\sqrt{x} \approx \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ i oblicz $\sqrt{1,2}$ i $\sqrt{0,9}$. Porównaj otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi na kalkulatorze.



R 4.10. Działania na pochodnych

Twierdzenie

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x oraz c jest dowolną stałą, to:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Przykład 1

a) $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$

b) $(5x^{-4})' = 5(x^{-4})' = 5(-4x^{-5}) = -\frac{20}{x^5}$ dla $x \neq 0$

Ćwiczenie 1

Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = 12x^3$

c) $f(x) = 4x^7$

e) $f(x) = 2x^{-6}$

b) $f(x) = 0,5x^6$

d) $f(x) = 6x^{-1}$

f) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x}$

Pochodna sumy i pochodna różnicy funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x , to:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{oraz} \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Przykład 2

a) $(x^2 + 3x - 1)' = (x^2)' + (3x)' - (1)' = 2x + 3$

b) $(2x^3 + \frac{4}{x} - x + 1)' = 2(x^3)' + 4(\frac{1}{x})' - (x)' + (1)' = 6x^2 - \frac{4}{x^2} - 1$ dla $x \neq 0$

Ćwiczenie 2

Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6$

c) $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x^3 + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 3x^4 - 7x^2 - 2$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2x} - 2\sqrt{x}$

Pochodna iloczynu funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x , to:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Przykład 3

a) $(x^2\sqrt{x})' = (x^2)'\sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$ dla $x > 0$

b) $((x^2 + 1)(x^3 - 4))' = 2x(x^3 - 4) + (x^2 + 1)3x^2 = 5x^4 + 3x^2 - 8x$

Ćwiczenie 3

Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = 2x\sqrt{x} - 4x^3 + 2$

d) $f(x) = (x^3 + x^2 - 4)(4x^4 - x^2)$

b) $f(x) = -4x^6\sqrt{x} + 6x^2$

e) $f(x) = \sqrt{x}(3x^5 - x^2)$

c) $f(x) = (2x^3 - 4)(x^4 + x)$

f) $f(x) = \sqrt{x}(x^4 + 4\sqrt{x})$

Pochodna ilorazu funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x oraz $g(x) \neq 0$, to:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Przykład 4

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \quad \text{dla } x \neq 1$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{x}}$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że jeśli funkcja g ma pochodną w punkcie x i $g(x) \neq 0$, to prawdziwy jest wzór podany obok.

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ćwiczenie 6

Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

b) $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 3}$

c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} - 4}$

Zadania

1. Wyznacz pochodną funkcji f . Oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = -3x^2 + x + 4$

d) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 6x$

b) $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

e) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

c) $f(x) = 2x^3 + 4x - 6$

f) $f(x) = -0,2x^5 + 0,5x^4 - 3x$

2. Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$

d) $f(x) = (x^3 - 1)(2x^2 - 5)$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$

e) $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$

c) $f(x) = (1 - 3x^2)(x^2 + x)$

f) $f(x) = (x - 2)^2(1 - x^2)$

3. Określ dziedzinę funkcji f , a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{4x+1}{2x+1} & \text{e) } f(x) = \frac{6x+2}{1-x^2} & \text{i) } f(x) = \frac{(x-2)^2}{1-x} \\ \text{b) } f(x) = \frac{x^2}{1-2x} & \text{f) } f(x) = \frac{2x^2-x+1}{3x-x^2} & \text{j) } f(x) = \frac{1}{5x-1} + \frac{1}{x} \\ \text{c) } f(x) = \frac{5x-1}{x^2} & \text{g) } f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} & \text{k) } f(x) = \frac{1}{1-x^4} - \frac{2}{x^3} \\ \text{d) } f(x) = \frac{x^2+1}{3x-1} & \text{h) } f(x) = \frac{x^3+x^2-x-1}{x+1} & \text{l) } f(x) = \frac{3}{x^3-2} - \frac{1}{4x^4} \end{array}$$

4. Określ dziedzinę funkcji f , a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej. Oblicz $f'(1)$ i $f'(4)$.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \sqrt{x}(1-2x^2) & \text{c) } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} & \text{e) } f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt[4]{x} \\ \text{b) } f(x) = (\sqrt{x}+1)(x-5) & \text{d) } f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}} & \text{f) } f(x) = \sqrt{x}(x+\sqrt[4]{x}) \end{array}$$

- D** 5. Przeczytaj podany w ramce dowód wzoru na pochodną sumy funkcji.

Dowód

Wyznaczamy pochodną sumy funkcji f i g w punkcie x_0 .

$$\begin{aligned} (f(x_0) + g(x_0))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Udowodnij wzór na pochodną różnicy funkcji.

- D** 6. Przeczytaj podany w ramce dowód wzoru na pochodną iloczynu funkcji.

Dowód

Wyznaczamy pochodną iloczynu funkcji f i g w punkcie x_0 .

$$\begin{aligned} (f(x_0) \cdot g(x_0))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

Udowodnij wzór na pochodną ilorazu funkcji.

7. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{x^2-4x+1}{x^2}, x_0 = 1 & \text{c) } f(x) = \frac{3x^2-1}{1-x^2}, x_0 = 2 \\ \text{b) } f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+3}, x_0 = -2 & \text{d) } f(x) = \frac{3x-5}{x^2-9}, x_0 = 4 \end{array}$$

8. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x^2 - 3x + 1, x_0 = 2 & \text{e) } f(x) = x\sqrt{x} + 4, x_0 = 4 \\ \text{b) } f(x) = \frac{3x}{x-2}, x_0 = 1 & \text{f) } f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}, x_0 = -3 \\ \text{c) } f(x) = \frac{x^3+2}{x^3}, x_0 = 1 & \text{g) } f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2+1}, x_0 = -1 \\ \text{d) } f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x-1}, x_0 = -1 & \text{h) } f(x) = \frac{x^2+4}{(x+2)^2}, x_0 = 2 \end{array}$$

9. Czy istnieje prosta o współczynniku kierunkowym równym a styczna do wykresu funkcji f ?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a = 0, f(x) = (x^3+1)(4-x) & \text{c) } a = 2, f(x) = \sqrt{x} + x \\ \text{b) } a = -1, f(x) = \frac{2x+1}{4x-1} & \text{d) } a = 0, f(x) = \frac{5x}{x^2+1} \end{array}$$

10. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji f równoległych do prostej $y = -2x + 3$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{x+3}{x+1} & \text{b) } f(x) = 2x + \frac{1}{x} \end{array}$$

Twierdzenie

Każda z funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus i tangens ma pochodną we wszystkich punktach swojej dziedziny.

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, x \in \mathbb{R} & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \\ (\cos x)' &= -\sin x, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

11. Oblicz $f'(\frac{\pi}{3})$ i $f'(\frac{\pi}{4})$.

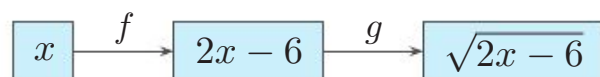
$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \sin x & \text{b) } f(x) = \cos x & \text{c) } f(x) = \operatorname{tg} x \end{array}$$

12. Wyznacz pochodną funkcji f .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \sin x \cos x & \text{d) } f(x) = \sin^2 x & \text{g) } f(x) = \cos^2 x \\ \text{b) } f(x) = (2x+1) \sin x & \text{e) } f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x} & \text{h) } f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x} \\ \text{c) } f(x) = (x^2+3) \operatorname{tg} x & \text{f) } f(x) = \frac{\sin x}{x^2} & \text{i) } f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x} \end{array}$$

R 4.11. Pochodna funkcji złożonej

Aby obliczyć wartość funkcji $h(x) = \sqrt{2x-6}$ dla argumentu $x \in [3; \infty)$, wykonujemy kolejno operacje: najpierw mnożymy ten argument przez 2 i odejmujemy 6, a następnie obliczamy pierwiastek kwadratowy z otrzymanej liczby. Funkcja h jest **złożeniem** dwóch funkcji: $f(x) = 2x - 6$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$.



Na przykład dla $x = 5$: $5 \xrightarrow{f} 2 \cdot 5 - 6 \xrightarrow{g} \sqrt{4}$, zatem $h(5) = 2$.

Definicja

Jeśli $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow T$, to funkcję $h: X \rightarrow T$ określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ nazywamy **złożeniem** funkcji f i g .

Funkcję f nazywamy **funkcją wewnętrzną**, funkcję g – **funkcją zewnętrzną**.

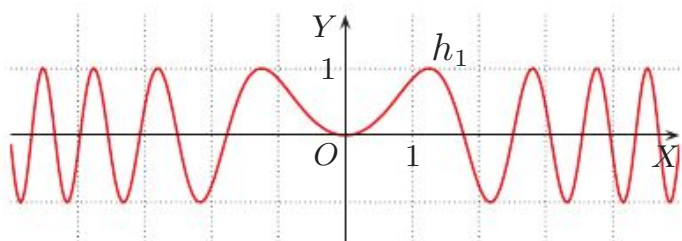
Złożenie funkcji f i g można również zapisać: $(g \circ f)(x)$.

Uwaga. Składanie funkcji nie jest operacją przemenną – funkcje $f \circ g$ oraz $g \circ f$ nie muszą być równe.

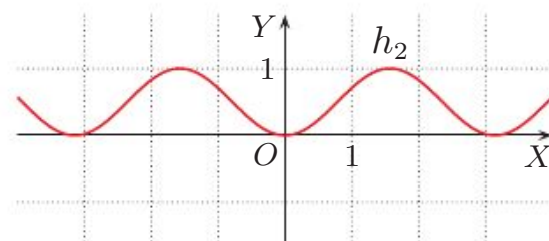
Przykład 1

Niech $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Poniżej przedstawiono wykresy funkcji złożonych:

$$h_1(x) = g(f(x)) = \sin x^2$$



$$h_2(x) = f(g(x)) = \sin^2 x$$



Przykład 2

Podaj wzór i dziedzinę funkcji złożonej h . Przyjmij, że f jest funkcją wewnętrzną, a g – funkcją zewnętrzną.

a) $f(x) = x - 2$, $g(x) = \sqrt{x}$

$$h(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = \sqrt{x - 2}, D_h = [2; \infty)$$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$

$$h(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 2, D_h = [0; \infty)$$

Ćwiczenie 1

Podaj wzór funkcji $h(x) = g(f(x))$. Określ dziedzinę funkcji h .

a) $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 , a funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x_0)$, to funkcja $h = g \circ f$ ma pochodną w punkcie x_0 oraz:

$$h'(x_0) = (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Przykład 3

a) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = (2x + 1)^3$.

Funkcja h jest złożeniem funkcji $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^3$, zatem:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3(2x + 1)^2 \cdot (2x + 1)' = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = \\ &= 6(4x^2 + 4x + 1) = 24x^2 + 24x + 6 \end{aligned}$$

Pochodną funkcji h można również wyznaczyć, korzystając z tego, że:

$$(2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

b) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = (3x^2 + 1)^5$.

Funkcja h jest złożeniem funkcji $f(x) = 3x^2 + 1$ i $g(x) = x^5$, zatem:

$$h'(x) = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot (3x^2 + 1)' = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 + 1)^4$$

Ćwiczenie 2

Wyznacz pochodną funkcji h .

a) $h(x) = (2x^2 - 1)^3$

c) $h(x) = (3x^2 + x)^5$

b) $h(x) = (x^2 - 3x)^4$

d) $h(x) = (4x + 6)^6$

Przykład 4

a) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Funkcja h jest złożeniem funkcji $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \sqrt{x}$, zatem:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

b) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2}$.

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 2x^2}} \cdot (x^4 + 2x^2)' = \frac{4x^3 + 4x}{2\sqrt{x^4 + 2x^2}} = \frac{2x(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x(x^2 + 1)}{|x|\sqrt{x^2 + 2}}$$

Zauważ, że dziedziną funkcji h jest $\mathbb{R}$, a dziedziną funkcji h' – $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz pochodną funkcji h . Określ dziedziny funkcji h i h' .

a) $h(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$

c) $h(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

b) $h(x) = \sqrt{3x^2 + x}$

d) $h(x) = \sqrt{4 + \sqrt{x}}$

Zadania

1. Wyznacz pochodną funkcji f . Oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = (x + 1)^3$

c) $f(x) = (1 - x)^5$

e) $f(x) = (3x + 2)^5$

b) $f(x) = (1 + x^2)^4$

d) $f(x) = (4x^2 + 2)^3$

f) $f(x) = (5x^4 - 6x + 2)^6$

2. Wyznacz pochodną funkcji f . Określ dziedziny funkcji f i f' .

a) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x}$

e) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x}$

b) $f(x) = \sqrt{6x^2 + 1}$

d) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 6x}$

f) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

3. Wyznacz pochodną funkcji f . Oblicz $f'(0)$.

a) $f(x) = (7x - 1)^3(2x + 1)^2$

c) $f(x) = x^2\sqrt{4x + 1}$

b) $f(x) = (x^2 - 1)^2(3 - x)^2$

d) $f(x) = x^3\sqrt{1 - 4x}$

4. Wyznacz pochodną funkcji f . Oblicz $f'(1)$.

a) $f(x) = \frac{1 - 2x}{\sqrt{3x + 1}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

5. Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Oblicz $h'(1)$ dla:

a) $h = f \circ g$,

b) $h = g \circ f$.

6. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{3x + 4}$, $x_0 = -1$

7. Dane są funkcje $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Rozwiąż równanie:

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

8. Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = \sin 4x$

e) $f(x) = \cos x^2$

i) $f(x) = \cos^2 x$

b) $f(x) = \cos 5x$

f) $f(x) = \sin(x^3 - 1)$

j) $f(x) = \sin^3 x$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(6x - 1)$

g) $f(x) = \cos(x^2 - 1)$

k) $f(x) = \operatorname{tg}(1 - x^3)$

d) $f(x) = \sin x^2$

h) $f(x) = \sin^2 x$

l) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

R 4.12. Interpretacja fizyczna pochodnej

Przypuśćmy, że punkt materialny (lub krótko punkt) porusza się po osi liczbowej, a funkcja s opisuje jego położenie w chwili t .

$$\begin{array}{c} \text{---} 0 \quad s(t_0) \quad s(t) \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Prędkość średnia punktu w przedziale od t_0 do t wyraża się za pomocą wzoru:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Prędkość w chwili t_0 , czyli prędkość chwilową $v(t_0)$, określamy jako granicę ilorazu różnicowego przy t dążącym do t_0 :

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Zatem $v(t_0) = s'(t_0)$, czyli prędkość chwilowa jest pochodną położenia względem czasu.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji s opisującej położenie punktu poruszającego się po prostej w zależności od czasu t .

• Współczynnik kierunkowy siecznej AB wykresu funkcji s jest równy prędkości średniej od chwili $t_0 = 4$ do chwili $t = 10$:

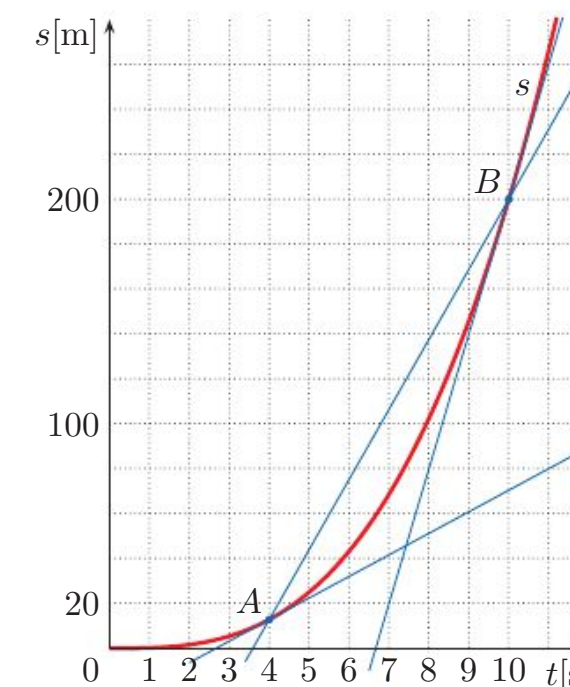
$$v_{\text{sr}} = \frac{s(10) - s(4)}{10 - 4}$$

• Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji s w punkcie A jest równy prędkości w chwili $t_0 = 4$:

$$v(4) = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4} = s'(4)$$

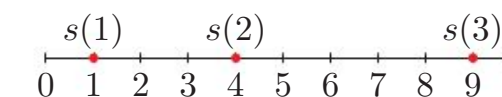
• Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji s w punkcie B jest równy prędkości w chwili $t = 10$:

$$v(10) = \lim_{t \rightarrow 10} \frac{s(t) - s(10)}{t - 10} = s'(10)$$



Ćwiczenie 1

Położenie punktu na osi liczbowej w chwili t opisuje wzór $s(t) = t^2$. Niech $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$. Oblicz prędkość średnią od chwili t_1 do chwili t_3 oraz prędkości w chwilach t_1 , t_2 i t_3 .



Jeżeli ciało wyrzucono pionowo w górę (z poziomu ziemi) z prędkością początkową v_0 , to funkcje $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ oraz $v(t) = v_0 - gt$ opisują odpowiednio wysokość h , na której znajduje się ciało w chwili t , oraz prędkość v , z którą porusza się ono w chwili t ($g \approx 9,8 \frac{m}{s^2}$ jest przyspieszeniem ziemskim).

Przykład 2

Metalowa kula została wystrzelona pionowo w górę (z poziomu ziemi) z prędkością początkową $v_0 = 29,4 \text{ m/s}$. Po podstawieniu wartości v_0 i g do wzoru:

$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

otrzymujemy funkcję:

$$h(t) = 29,4t - 4,9t^2$$

opisującą wysokość, na której znajduje się kula w chwili t . W tabeli podano wysokości, na których znajdowała się kula w kolejnych sekundach.

$t[s]$	0	1	2	3	4	5	6
$h[m]$	0	24,5	39,2	44,1	39,2	24,5	0

Ćwiczenie 2

a) Sprawdź, czy pochodną funkcji:

$$h(t) = 29,4t - 4,9t^2$$

jest funkcja $v(t) = 29,4 - 9,8t$.

b) Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, wpisując prędkości metalowej kuli z przykładu 2. w kolejnych sekundach.

$t[s]$	0	1	2	3	4	5	6
$v[m/s]$	?	?	?	?	?	?	?

Uwaga. Pojawienie się znaku minus w obliczeniach (dla $t = 4$) świadczy o zmianie zwrotu wektora prędkości – kula najpierw poruszała się w górę, a potem w dół.

Zadania

1. Przyjmij, że drogę przebytą przez spadające swobodnie ciało opisuje funkcja $s(t) = 4,9 \cdot t^2$ (gdzie drogę mierzy się w metrach, a czas – w sekundach) i oblicz prędkości ciała w chwilach $t_1 = 1$ i $t_2 = 3$. Odpowiedź podaj w m/s oraz w km/h.

2. Na Marsie przyspieszenie grawitacyjne wynosi około $3,7 \text{ m/s}^2$, zatem funkcję opisującą drogę przebytą przez swobodnie spadające ciało można przedstawić w postaci $s(t) = 1,85t^2$, gdzie drogę mierzy się w metrach, a czas – w sekundach. Oblicz prędkości w chwili $t = 4$, które osiągnie swobodnie spadające ciało na Ziemi oraz na Marsie. Odpowiedź podaj w km/h.



3. Ciało wyrzucone pionowo w górę z powierzchni Marsa z prędkością początkową $v_0 = 18,5 \text{ m/s}$ znajduje się w chwili t na wysokości:

$$h(t) = 18,5t - 1,85t^2$$

Oblicz prędkość, z którą poruszało się to ciało w chwili $t = 5$.

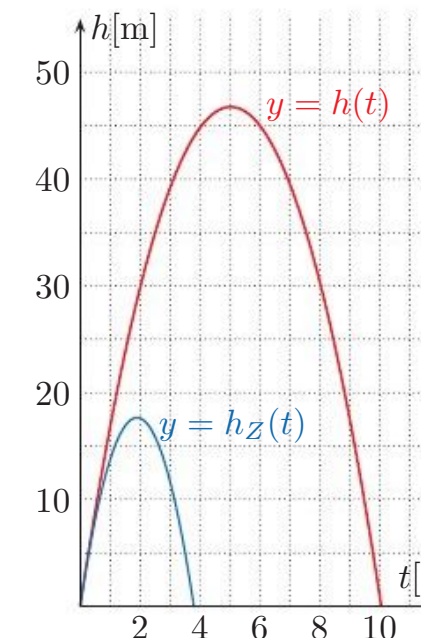
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$h(t) = 18,5t - 1,85t^2$$

oraz dla porównania wykres funkcji:

$$h_Z(t) = 18,5t - 4,9t^2$$

opisującej wysokość, na której znajdowałoby się w chwili t ciało wyrzucone z tą samą prędkością początkową z powierzchni Ziemi.



Czy wiesz, że...

Przypuśćmy, że punkt porusza się po osi liczbowej, a funkcja v opisuje jego prędkość w zależności od czasu t .

Przyspieszenie średnie w przedziale od t_0 do t wyraża się za pomocą wzoru:

$$a_{\text{sr}} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Przyspieszenie $a(t_0)$ w chwili t_0 jest pochodną prędkości:

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

4. Prędkość, z którą punkt porusza się po osi liczbowej, jest wyrażona za pomocą funkcji v . Oblicz przyspieszenia w chwilach $t = 1$ oraz $t = 4$.

a) $v(t) = 4t$

b) $v(t) = t^2 - t$

c) $v(t) = t^3 - 4t^2 + t$

5. Wysokość w metrach, na której znajduje się kula wystrzelona pionowo w górę, jest opisana za pomocą funkcji $h(t) = 24,5t - 4,9t^2$. Wyznacz funkcję opisującą prędkość oraz funkcję opisującą przyspieszenie tej kuli.

Rachunek różniczkowy i całkowy

Rachunek pochodnych (zwany także rachunkiem różniczkowym) stworzono w XVII w. Wraz z powiązaniem z nim rachunkiem całkowym stał się podstawą rozwoju fizyki klasycznej i astronomii. Umożliwił m.in. opis ruchu ciał (w tym planet) za pomocą równań wiążących ze sobą wielkości takie jak czas, droga, prędkość i przyspieszenie.

Za twórców rachunku różniczkowego i całkowego uważa się dwóch uczonych: Isaaca Newtona [czyt. izaaka niutona] i Gottfrieda Leibniza [czyt. gotfrida lajbnica].

Sir Isaac Newton
(1643–1727)



Matematyk, fizyk i astronom angielski. Stworzył rachunek różniczkowy przy okazji prowadzonych badań – było to dla niego użyteczne narzędzie, które umożliwiło mu ściśle sformułowanie praw fizyki dotyczących ruchu ciał oraz prawa powszechnego ciążenia. Z prac Newtona można się dowiedzieć, w jaki sposób to narzędzie wykorzystywał, nie ma w nich jednak żadnego wykładu teoretycznego na temat rachunku różniczkowego i całkowego.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

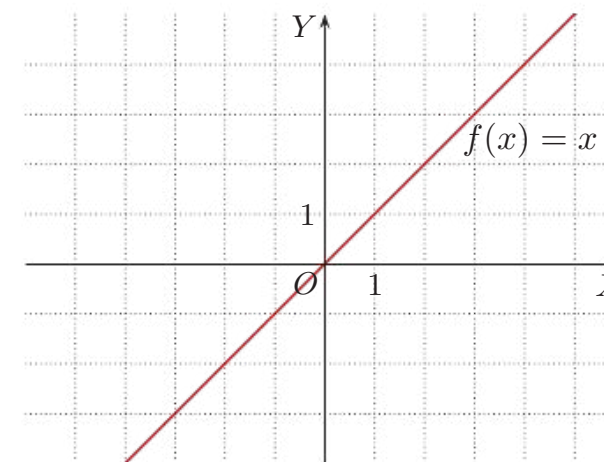


Niemiecki filozof i matematyk. Pierwszą pracę dotyczącą rachunku różniczkowego i całkowego opublikował w 1684 r. Przedstawił w niej m.in. reguły różniczkowania iloczynu i ilorazu funkcji oraz wzór na pochodną funkcji potęgowej. Opublikowanie tej pracy przez Leibniza wywołało w Anglii ostrą dyskusję. Oskarżono go o plagiat – zarzucano mu, że poznał metody Newtona podczas pobytu w Londynie w 1673 r. Spór trwał nawet po śmierci uczonych. Dziś przyjmuje się, że Newton i Leibniz dokonali tego odkrycia niezależnie.

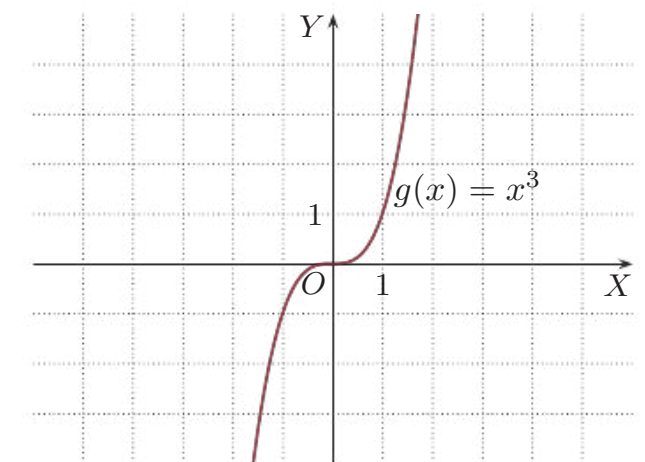
Rachunek różniczkowy umożliwił opisywanie zjawisk zmieniających się w czasie.

R 4.13. Monotoniczność funkcji

Przykład 1



Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona za pomocą wzoru $f(x) = x$ jest rosnąca. Jej pochodną jest funkcja $f'(x) = 1$. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$.



Funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona za pomocą wzoru $g(x) = x^3$ jest rosnąca. Jej pochodną jest funkcja $g'(x) = 3x^2$. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $g'(x) \geq 0$.

Prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

- Jeśli funkcja f w pewnym przedziale $(a; b)$ jest rosnąca i ma pochodną, to $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in (a; b)$.
- Jeśli funkcja f w pewnym przedziale $(a; b)$ jest malejąca i ma pochodną, to $f'(x) \leq 0$ dla każdego $x \in (a; b)$.

Uwaga. Przypomnijmy, że pochodna funkcji stałej w pewnym przedziale jest w tym przedziale równa 0.

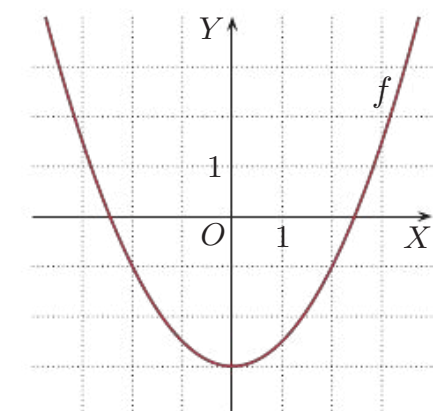
Przykład 2

Funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ (wykres obok):

- jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0]$,
- jest rosnąca w przedziale $[0; \infty)$.

Jej pochodną jest funkcja $f'(x) = x$.

Dla $x \in (-\infty; 0]$ zachodzi nierówność $f'(x) \leq 0$, a dla $x \in [0; \infty)$ – nierówność $f'(x) \geq 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x$ i podaj jej przedziały monotoniczności. Określ znak pochodnej funkcji f w tych przedziałach.

Czy na podstawie znaku pochodnej można wnioskować o monotoniczności funkcji? Mowa o tym w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

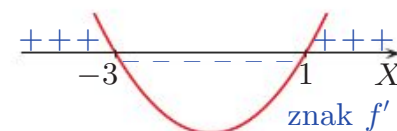
- Jeżeli pochodna funkcji f jest dodatnia w przedziale $(a; b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.
- Jeżeli pochodna funkcji f jest ujemna w przedziale $(a; b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Przykład 3

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

Wyznaczamy pochodną: $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$.

Rozwiązania nierówności $(x + 3)(x - 1) > 0$ oraz $(x + 3)(x - 1) < 0$ odczytujemy ze szkicu wykresu pochodnej:



$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (-3; 1)$

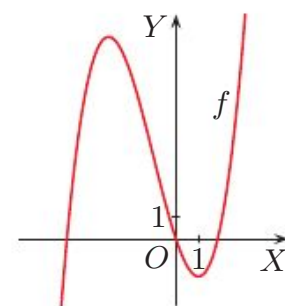
Na podstawie powyższego twierdzenia wnioskujemy, że funkcja f rośnie w przedziałach $(-\infty; -3)$ oraz $(1; \infty)$, a maleje w przedziale $(-3; 1)$.

Uwaga. Zauważ, że choć $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$, to funkcja f nie jest funkcją rosnącą w zbiorze $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ (patrz rysunek niżej).

Twierdzenie

Jeśli funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a; b)$ i jest ciągła w przedziale $[a; b]$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $[a; b]$.

Funkcja f z przykładu 3. jest wielomianem, czyli jest funkcją ciągłą, zatem jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -3]$ i $[1; \infty)$ oraz malejąca w przedziale $[-3; 1]$ (wykres obok).



Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że funkcja:

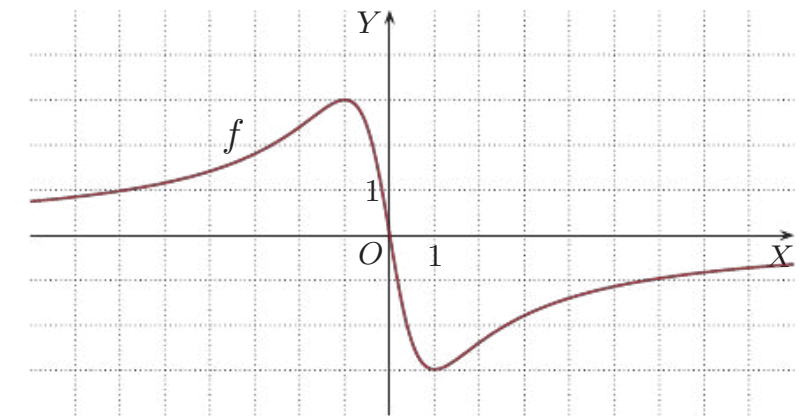
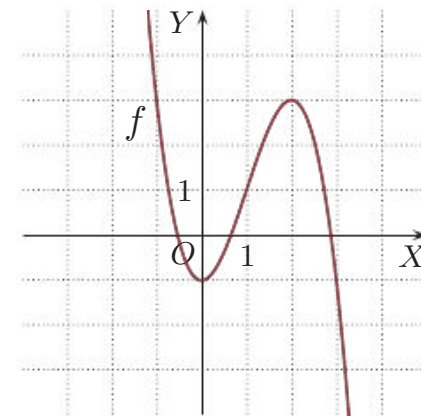
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty; -1]$ i $[1; \infty)$ oraz malejąca w przedziale $[-1; 1]$,
- $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0]$ oraz malejąca w przedziale $[0; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu jej przedziały monotoniczności. Sprawdź odpowiedź, badając znak pochodnej.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

b) $f(x) = -\frac{6x}{x^2+1}$



Ćwiczenie 4

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

- $f(x) = x^3 - 3x - 5$
- $f(x) = x^5 - 20x + 1$
- $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$
- $f(x) = (x + 3)^2(x - 1)$
- $f(x) = 6x^5 + 5x^3$
- $f(x) = x^3 - 4x^2$

Ćwiczenie 5

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

- $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$
- $f(x) = \frac{x+1}{x+8}$
- $f(x) = \frac{x^2-7}{x-4}$

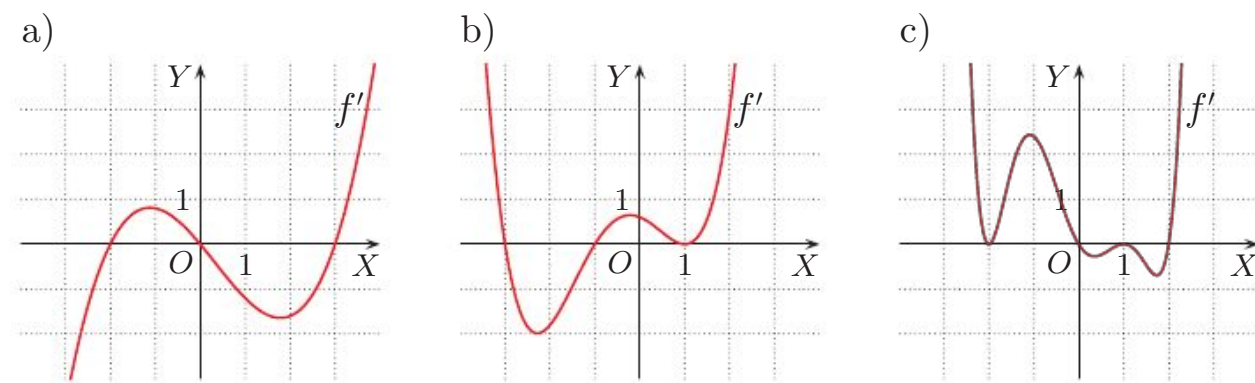
Zadania

- Wykaż, że funkcja f jest rosnąca.
 - $f(x) = x^3 + 6x + 8$
 - $f(x) = 2x^3 + 2x - 5$
 - $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$
 - $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x$
 - $f(x) = x^5 + x$
 - $f(x) = 3x^5 + 4x$
- Wykaż, że funkcja f jest malejąca.
 - $f(x) = -x^3 - x$
 - $f(x) = -2x^3 - 15x$
 - $f(x) = -2x^3 + x^2 - 7x$
 - $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x$
 - $f(x) = -2x^5 - x$
 - $f(x) = -x^7 - 4x$
- Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .
 - $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x + 3$
 - $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$
 - $f(x) = x^3 + 9x^2 - 21x - 4$
 - $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + 1$
 - $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 5$
 - $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x$
 - $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 2$
 - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 24x$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ | e) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ | i) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 1}$ |
| b) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ | f) $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x-3}$ | j) $f(x) = \frac{4x-5}{x^2 - 1}$ |
| c) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ | g) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{5-x}$ | k) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 4}$ |
| d) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$ | h) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ | l) $f(x) = \frac{2x^2}{(x+3)^2}$ |

5. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f na podstawie wykresu jej pochodnej.



6. Dla jakiej wartości parametru k funkcja f jest rosnąca?

- | | |
|--|---------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + kx + 1$ | c) $f(x) = x^3 + (k+2)x - 10$ |
| b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + kx + 19$ | d) $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 7$ |

7. Dla jakiej wartości parametru k funkcja f jest malejąca?

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = -x^3 + x^2 + kx + 14$ | b) $f(x) = -5x^3 + kx + 10$ |
|----------------------------------|-----------------------------|

D 8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykaż, że dla każdej liczby $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x > x$.

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

$f'(x) > 0$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ oraz funkcja f jest ciągła w przedziale $[0; \frac{\pi}{2})$.

Zauważmy, że $f(0) = 0$, więc $f(x) > 0$ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Zatem dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x > x$.

Wykaż, że dla każdej liczby $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność:

- | | |
|-------------------|---|
| a) $\sin x < x$, | b) $\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3$. |
|-------------------|---|

R 4.14. Ekstrema funkcji

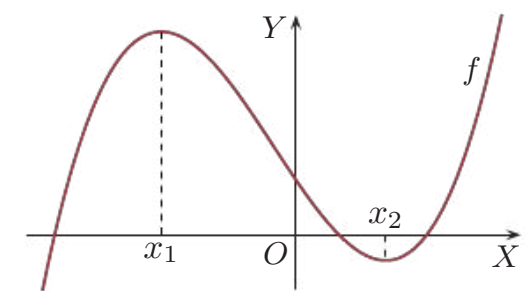
Definicja

Funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 **minimum lokalne** $f(x_0)$, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ i $x \neq x_0$ zachodzi nierówność $f(x) > f(x_0)$.

Funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 **maksimum lokalne** $f(x_0)$, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ i $x \neq x_0$ zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$.

Minima lokalne i maksima lokalne nazywamy **ekstremami lokalnymi** (lub po prostu ekstremami).

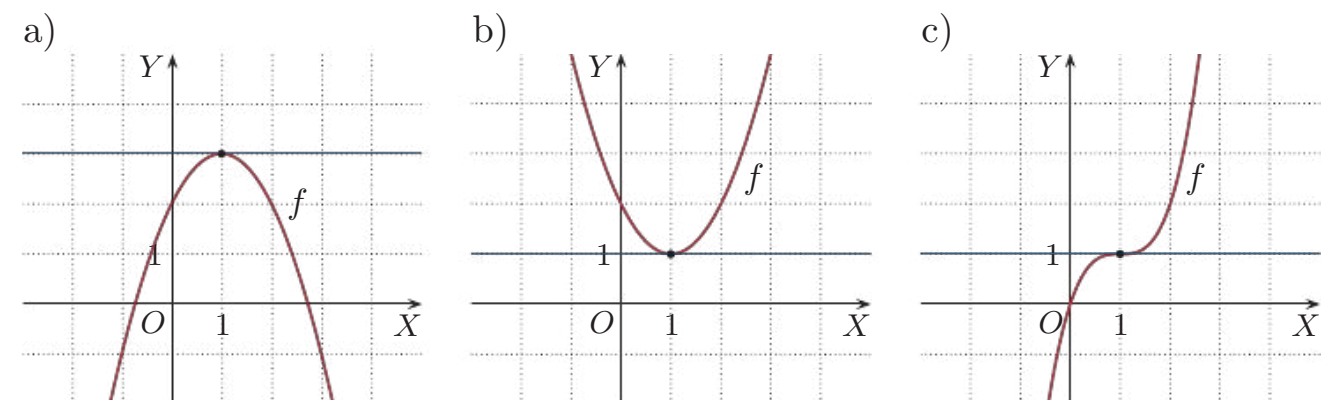
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Ma ona maksimum lokalne w punkcie x_1 oraz minimum lokalne w punkcie x_2 .



Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$ (styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi OX).

Przykład 1



Funkcja $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ osiąga maksimum w punkcie $x_0 = 1$.

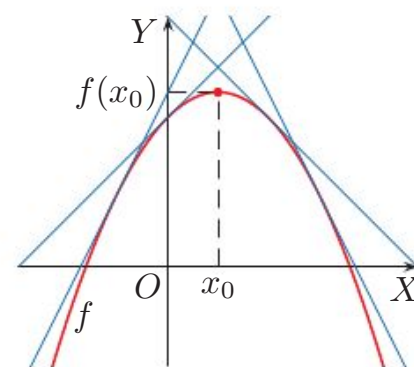
Funkcja $f(x) = (x-1)^2 + 1$ osiąga minimum w punkcie $x_0 = 1$.

Funkcja $f(x) = (x-1)^3 + 1$ nie ma ekstremum w punkcie $x_0 = 1$.

Zwróć uwagę na to, że wprowadziliśmy wszystkie funkcje w powyższym przykładzie mają w punkcie $x_0 = 1$ pochodną równą 0 (styczna do wykresu funkcji jest dla $x_0 = 1$ równoległa do osi OX), ale tylko w podpunktach a) i b) funkcje mają w tym punkcie ekstremum.

Warunek $f'(x_0) = 0$ jest dla funkcji różniczkowalnej **warunkiem koniecznym istnienia ekstremum**, nie jest natomiast **warunkiem wystarczającym** (dostatecznym).

- Jeśli funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest rosnąca w przedziale $(a; x_0]$ i malejąca w przedziale $[x_0; b)$, to ma w punkcie x_0 maksimum.
- Jeśli funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest malejąca w przedziale $(a; x_0]$ i rosnąca w przedziale $[x_0; b)$, to ma w punkcie x_0 minimum.



W przypadku funkcji różniczkowalnej o tym, czy funkcja rośnie, czy maleje w danym przedziale, można wnioskować na podstawie znaku pochodnej.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum

- Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a; b)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (a; x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to f ma w punkcie x_0 maksimum.
- Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a; b)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (a; x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to f ma w punkcie x_0 minimum.

Uwaga. Często mówimy krótko, że jeżeli pochodna funkcji f zmienia w punkcie x_0 znak z dodatniego na ujemny, to funkcja f ma w tym punkcie maksimum, a jeżeli z ujemnego na dodatni, to funkcja f ma w tym punkcie minimum. Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i pochodna funkcji f w punkcie x_0 nie zmienia znaku, to w punkcie tym funkcja f nie ma ekstremum.

Przykład 2

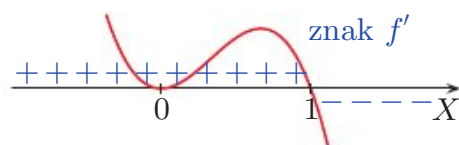
Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = -3x^4 + 4x^3$.

$$f'(x) = -12x^3 + 12x^2$$

Wyznaczamy pochodną funkcji f .

$$f'(x) = 0, \text{ gdy } -12x^3 + 12x^2 = 0, \text{ czyli dla } x \in \{0, 1\}.$$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej.



Rozwiązania nierówności $f'(x) > 0$ oraz $f'(x) < 0$ odczytujemy ze szkicu wykresu pochodnej.

Zatem funkcja $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ ma maksimum w punkcie $x_0 = 1$. Jest ono równe $f(1) = -3 + 4 = 1$.

Korzystamy z warunku wystarczającego istnienia ekstremum (w $x_0 = 1$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny).

W punkcie $x_0 = 0$ funkcja $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ nie ma ekstremum, gdyż pochodna nie zmienia w tym punkcie znaku.

Ćwiczenie 1

Wyznacz ekstrema funkcji f .

- a) $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ d) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 4$ g) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
 b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ h) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$
 c) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 8x$ f) $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 6$ i) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$

Przykład 3

Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + 7$ nie ma ekstremum.

Wyznaczamy pochodną funkcji: $f'(x) = x^2 - 4x + 4$ i znajdujemy jej miejsca zerowe:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0 \text{ dla } x = 2$$

Stąd $f'(x) = 0$ dla $x = 2$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \neq 2$. Zatem funkcja f jest funkcją rosnącą w $\mathbb{R}$, więc nie ma ekstremum.

Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że funkcja f nie ma ekstremum.

- a) $f(x) = -x^3 - 3x + 10$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ c) $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$

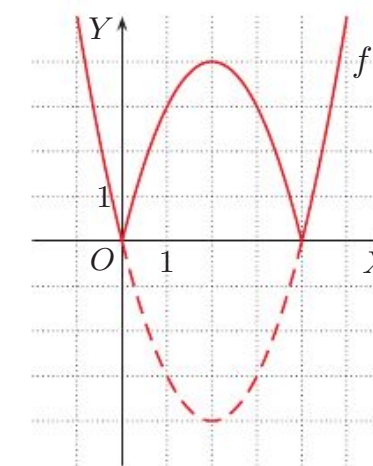
Przykład 4

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = |(x-2)^2 - 4|$. Podaj jej ekstrema.

Z wykresu funkcji f odczytujemy, że ma ona jedno maksimum dla $x = 2$, $f(2) = 4$, oraz dwa minima dla $x = 0$, $f(0) = 0$, i dla $x = 4$, $f(4) = 0$.

Uwaga. Funkcja f nie jest różniczkowalna w punktach $x = 0$ oraz $x = 4$.

Z istnienia ekstremum w punkcie x_0 **nie wynika** istnienie pochodnej w x_0 (ale jeśli pochodna istnieje, to musi być równa 0).



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj punkty, w których funkcja osiąga ekstrema. Określ, czy są to maksima, czy minima. Czy istnieje styczna do wykresu w tych punktach? Czy istnieje pochodna funkcji w tych punktach?

- a) $f(x) = -|x|$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ 4 - x^2 & \text{dla } x \in [-2; 2] \end{cases}$

Zadania

1. Wyznacz ekstrema funkcji f .

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$ d) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 6$ g) $f(x) = x + \frac{4}{x}$
 b) $f(x) = x^3 - 12x - 3$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 3$ h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$
 c) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 10x$ f) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 1$ i) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

2. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f .

a) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x}$ c) $f(x) = \frac{-x^2 + 9}{x + 5}$ e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$
 b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ d) $f(x) = \frac{3x + 2}{x^2 + 1}$ f) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}$

D 3. Uzasadnij, że funkcja f nie ma ekstremum.

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 7x$ b) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$ c) $f(x) = -x^3 - x$

4. Dla jakiej wartości parametru m funkcja f osiąga minimum w punkcie $x_0 = 2$?

a) $f(x) = x^3 + 3mx^2 - 7$ b) $f(x) = x^3 - mx^2 + 6x$

5. Dla jakiej wartości parametru m funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 ? Określ rodzaj tego ekstremum.

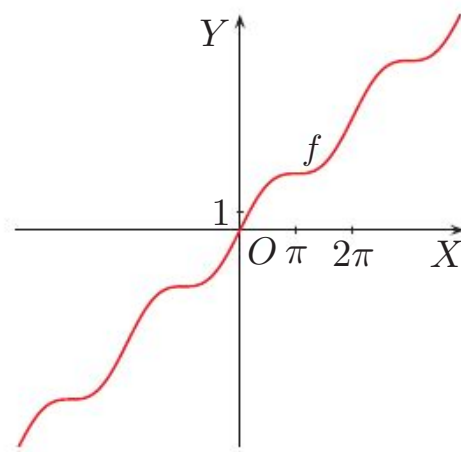
a) $f(x) = mx^3 - x^2 + x + 3$, $x_0 = -1$
 b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 5x - 3$, $x_0 = 1$

6. Dla jakich wartości parametru a funkcja f nie ma ekstremum?

a) $f(x) = -x^3 + ax$ b) $f(x) = x^3 - x^2 + ax$ c) $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x^2 - 9}$

7. a) Wyznacz wartości a i b , dla których funkcja $f(x) = \frac{x^2 - ax + b}{x - 5}$ osiąga ekstremum równe 1 w punkcie $x_0 = 3$. Rozstrzygnij, czy jest to minimum, czy maksimum. Czy jest to jedyne ekstremum lokalne tej funkcji?

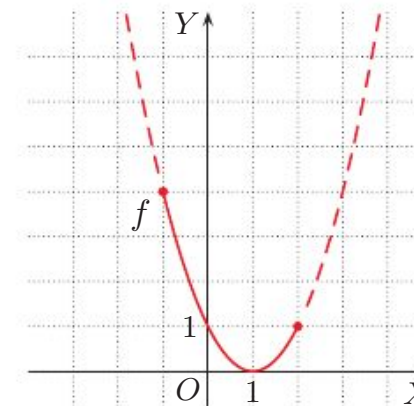
b) Funkcja $f(x) = \frac{ax + b}{(x - 1)(x - 4)}$ osiąga ekstremum równe -1 dla $x = 2$. Rozstrzygnij, czy jest to minimum, czy maksimum.



D 8. Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ (wykres obok) nie ma ekstremum, mimo że dla nieskończenie wielu argumentów x zachodzi równość $f'(x) = 0$.

R 4.15. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji

Przypomnijmy, że jeśli funkcja ciągła f jest określona w przedziale domkniętym, to przyjmuje w tym przedziale wartości najmniejszą i największą.

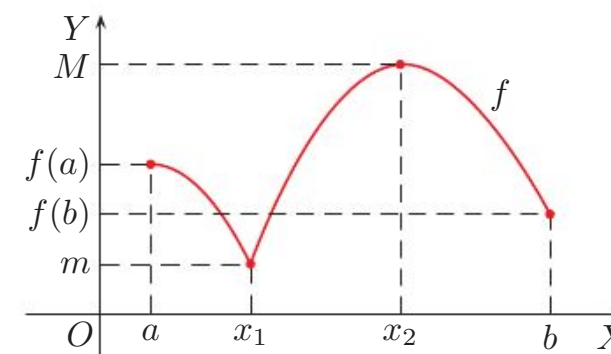


Ćwiczenie 1

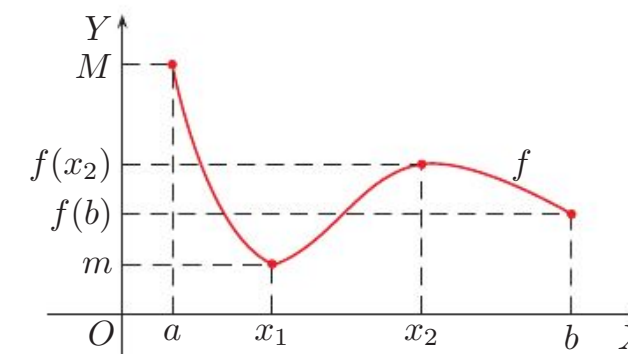
Podaj wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = (x - 1)^2$ w przedziale:

a) $[-1; 2]$ (rysunek obok), b) $[2; 4]$.

Wartością najmniejszą (największą) funkcji ciągłej f w przedziale $[a; b]$ może być jedna z liczb $f(a)$, $f(b)$ lub jedno z ekstremów lokalnych.



Wartość najmniejsza $m = f(x_1)$,
wartość największa $M = f(x_2)$



Wartość najmniejsza $m = f(x_1)$,
wartość największa $M = f(a)$

Przykład 1

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ w przedziale $[-1; 4]$.

Wyznaczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{1, 3\}$ – obie wartości należą do przedziału $[-1; 4]$.

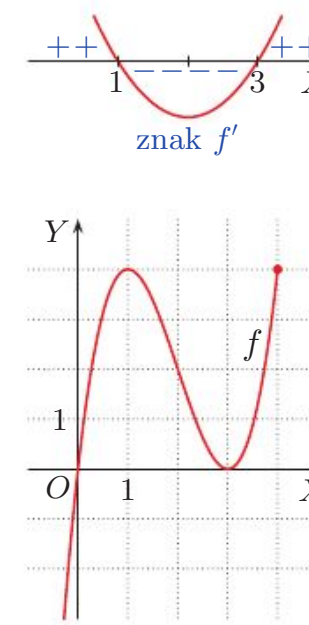
W punkcie $x_1 = 1$ funkcja osiąga maksimum: $f(1) = 4$.

W punkcie $x_2 = 3$ funkcja osiąga minimum: $f(3) = 0$.

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału:

$$f(-1) = -16, \quad f(4) = 4$$

Zatem najmniejszą wartością funkcji w przedziale $[-1; 4]$ jest -16 , a największą 4 – wartość ta jest przyjmowana dwukrotnie (rysunek obok).



Ćwiczenie 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$, $[1; 4]$ b) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$, $[0; 2]$

Przykład 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ w przedziale $[-2; 8]$.

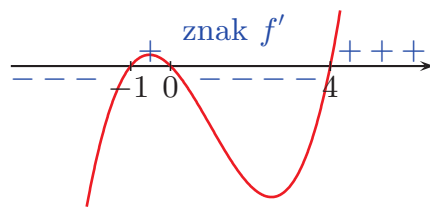
Wyznaczamy pochodną funkcji.

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x = \frac{1}{4}x(x^2 - 3x - 4) = \frac{1}{4}x(x+1)(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{ dla } x \in \{-1, 0, 4\}.$$

Na rysunku obok przedstawiono zmianę znaku pochodnej w tych punktach.

Funkcja f osiąga minima lokalne w punktach $x = -1$ i $x = 4$ oraz maksimum lokalne w punkcie $x = 0$.



Obliczamy wartości funkcji dla tych argumentów: $f(-1) = -\frac{3}{16}$, $f(0) = 0$, $f(4) = -8$ oraz wartości funkcji na końcach przedziału $[-2; 8]$: $f(-2) = 1$, $f(8) = 96$.

Zatem najmniejsza wartość funkcji jest równa -8 , a największa 96 .

Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^4 - 4x$, $[0; 2]$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$, $[-2; 2]$

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $[1; 3]$ d) $f(x) = \frac{-4x}{x^2 - 4x + 5}$, $[-3; 0]$

Czy wiesz, że...

Odkrycie warunku koniecznego istnienia ekstremum przypisuje się francuskiemu uczonemu Pierre'owi de Fermatowi (1601 lub 1607–1665), który dzięki swoim dokonaniom jest uważany za jednego z prekursorów rachunku różniczkowego. W pracy *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* podał metodę znajdowania minimów i maksimów funkcji.

Zadania

1. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ w podanym przedziale.

a) $[-1; 3]$ b) $[1; 3]$ c) $[-1; 1]$ d) $[-2; 4]$

2. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^3 - 6x + 1$, $[-2; 0]$ c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$, $[-2; 4]$

b) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6$, $[-2; 1]$ d) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 6$, $[-2; 2]$

3. Oblicz wartości najmniejszą i największą funkcji f o dziedzinie D . Wyznacz zbiór wartości funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+3}$, $D = [-1; 1]$ d) $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $D = [-3; 3]$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$, $D = [4; 7]$ e) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$, $D = [-2; 3]$

c) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2}$, $D = [1; 2]$ f) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$, $D = [-1; 2]$

4. Dla jakiej wartości parametru p najmniejsza wartość funkcji:

$$f(x) = x^4 - 4x + p$$

w przedziale $[-1; 2]$ jest równa 4?

5. Dla jakich wartości parametru m podane równanie ma rozwiązanie w przedziale $[-1; 2]$?

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = m$ b) $x^5 - 5x + 4 = m$

6. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie w przedziale $[-1; 3]$?

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 2x^2}$

Wskazówka. W podpunkcie a) znajdź najpierw wartości największą i najmniejszą funkcji $g(x) = x^3 - 6x$ w przedziale $[-1; 3]$.

7. Dla jakich wartości parametru m podane równanie ma rozwiązanie?

a) $3 \cos x - 4 \cos^3 x = m$ b) $2 \sin^3 x - 3 \sin x = m$

Wskazówka. W podpunkcie a) podstaw $t = \cos x$.

Czy wiesz, że...

Oznaczenie pochodnej funkcji f symbolem f' wprowadził francuski matematyk i fizyk Joseph Louis de Lagrange [czyt. lagranż] (1736–1813).

Inne używane oznaczenia pochodnej:

$\dot{f}$ – wprowadzone przez Isaaca Newtona (często stosowane przez fizyków),

$\frac{df}{dx}$ – wprowadzone przez Gottfrieda Wilhelma Leibniza,

$D_x f$ – wprowadzone przez Leonharda Eulera [czyt. ojlera] (1707–1783).

R 4.16. Zagadnienia optymalizacyjne

Jednym z najczęstszych zastosowań rachunku różniczkowego jest jego wykorzystanie do wyznaczania wartości największej lub najmniejszej – zagadnienia takie będziemy nazywać **zagadnieniami optymalizacyjnymi**.

Jeśli mamy wyznaczyć największą (najmniejszą) wartość funkcji kwadratowej, to zamiast korzystać z rachunku różniczkowego, możemy skorzystać ze wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli.

Przykład 1

Który z prostokątów o obwodzie 12 cm ma najkrótszą przekątną? Jaka jest jej długość?

Oznaczamy długości boków prostokąta przez x i y , a długość jego przekątnej przez d , wówczas:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oraz

$$2x + 2y = 12$$

stąd $x + y = 6$, czyli $y = 6 - x$.

Zauważmy, że: $0 < x < 6$ i $0 < y < 6$.

Zatem długość przekątnej w zależności od x jest opisana przez funkcję:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2}$$

gdzie $x \in (0; 6)$.

$$d(x) = \sqrt{x^2 + 36 - 12x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$$

Wyznaczamy najmniejszą wartość funkcji kwadratowej:

$$\begin{aligned} k(x) &= 2x^2 - 12x + 36 \\ x_w &= -\frac{b}{2a} = \frac{12}{4} = 3, \quad k(3) = 18 \end{aligned}$$

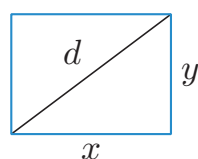
Czyli najmniejsza wartość funkcji d to $d(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$y = 6 - x = 3$, zatem szukany prostokąt jest kwadratem o boku 3 cm. Jego przekątna ma długość $3\sqrt{2}$ cm.

Ćwiczenie 1

a) Który z prostokątów o obwodzie 60 cm ma największe pole?

b) Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie 16 cm i ramieniu 10 cm. Dwa wierzchołki prostokąta należą do podstawy tego trójkąta, pozostałe dwa należą do jego ramion. Wyznacz największe możliwe pole takiego prostokąta.



Wykonujemy (jeśli to możliwe) rysunek i wprowadzamy oznaczenia literowe.

Zapisujemy równanie wyrażające wielkość, której najmniejszą (największą) wartość chcemy wyznaczyć za pomocą innych zmiennych, oraz inne równania wynikające z treści zadania.

Podstawiamy $y = 6 - x$ i otrzymujemy funkcję jednej zmiennej. Określamy dziedzinę tej funkcji.

Przykład 2

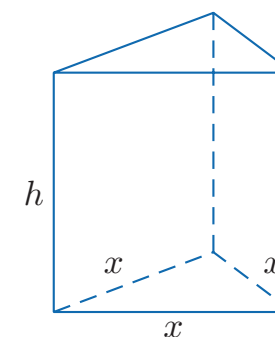
Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12. Jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup?

Długości krawędzi podstawy graniastosłupa oznaczamy przez x , a jego wysokość – przez h . Pole podstawy, która jest trójkątem równobocznym, opisuje wzór:

$$P = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Zatem objętość graniastosłupa:

$$V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$



Suma długości krawędzi graniastosłupa jest równa 12, czyli $6x + 3h = 12$, stąd wyznaczamy wysokość $h = 4 - 2x$, gdzie $x \in (0; 2)$. Zatem:

$$V(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}(4 - 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2x^2 - x^3), \quad D_V = (0; 2).$$

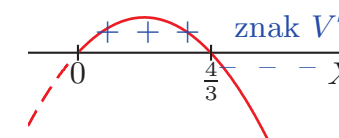
Wyznaczamy pochodną funkcji V :

$$V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(4x - 3x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(4 - 3x), \quad D_{V'} = (0; 2).$$

$V'(x) > 0$ dla $x \in (0; \frac{4}{3})$ oraz $V'(x) < 0$ dla $x \in (\frac{4}{3}; 2)$.

Funkcja V jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $(0; \frac{4}{3}]$ i maleje w przedziale $[\frac{4}{3}; 2)$, czyli w punkcie $x_0 = \frac{4}{3}$ przyjmuje wartość największą: $V(\frac{4}{3}) = \frac{16}{27}\sqrt{3}$.

Największa możliwa objętość takiego graniastosłupa jest równa $\frac{16}{27}\sqrt{3}$.



Ćwiczenie 2

a) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup?

b) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 96. Jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego objętość była największa?

c) Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 16. Jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego pole powierzchni całkowitej było najmniejsze?

Ćwiczenie 3

a) Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratowej ma długość 6 cm. Wyznacz wymiary prostopadłościanu tak, aby jego objętość była największa.

b) Objętość prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równa 27 cm^3 . Wyznacz wymiary prostopadłościanu tak, aby jego pole powierzchni całkowitej było najmniejsze.

Przykład 3

Dwa wierzchołki prostokąta $ABCD$ należą do paraboli $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$, a dwa pozostałe leżą na osi OX (rysunek obok). Jakie powinny być wymiary tego prostokąta, aby jego pole było największe?

Parabola przecina oś OX w punktach o współrzędnych $(-2\sqrt{3}, 0)$ i $(2\sqrt{3}, 0)$.

Można zatem przyjąć, że punkt B ma współrzędne $(t, 0)$, gdzie $t \in (0; 2\sqrt{3})$. Wówczas mamy $A(-t, 0)$ oraz $C(t, -\frac{1}{2}t^2 + 6)$. Obliczamy długości boków prostokąta $ABCD$:

$$\begin{aligned} |AB| &= |CD| = 2t \\ |BC| &= |AD| = -\frac{1}{2}t^2 + 6 \end{aligned}$$

Pole tego prostokąta: $P(t) = 2t(-\frac{1}{2}t^2 + 6) = -t^3 + 12t$, gdzie $t \in (0; 2\sqrt{3})$. Szukamy największej wartości funkcji P w przedziale $(0; 2\sqrt{3})$.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji:

$$P'(t) = -3t^2 + 12$$

Zauważmy, że $-3t^2 + 12 = 0$ dla $t = -2 \notin (0; 2\sqrt{3})$ oraz dla $t = 2 \in (0; 2\sqrt{3})$. Zatem $P'(t) > 0$ dla $t \in (0; 2)$ oraz $P'(t) < 0$ dla $t \in (2; 2\sqrt{3})$.

Funkcja P jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $(0; 2]$ i maleje w przedziale $[2; 2\sqrt{3})$, czyli w punkcie $t_0 = 2$ przyjmuje wartość największą.

Wymiary prostokąta o najmniejszym polu:

$$\begin{aligned} |AB| &= |CD| = 2 \cdot 2 = 4 \\ |BC| &= |AD| = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 6 = 4 \end{aligned}$$

Zatem szukany prostokąt jest kwadratem o boku 4.

Ćwiczenie 4

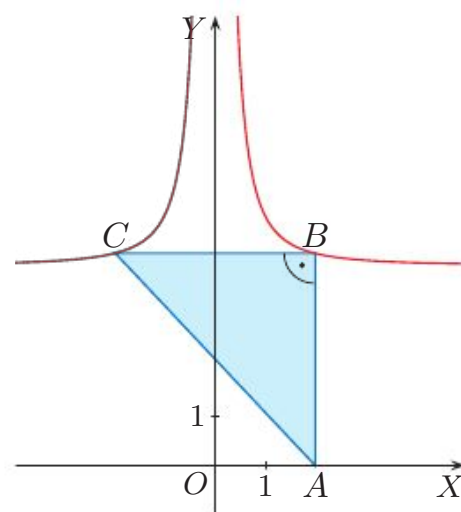
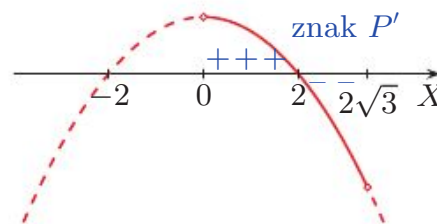
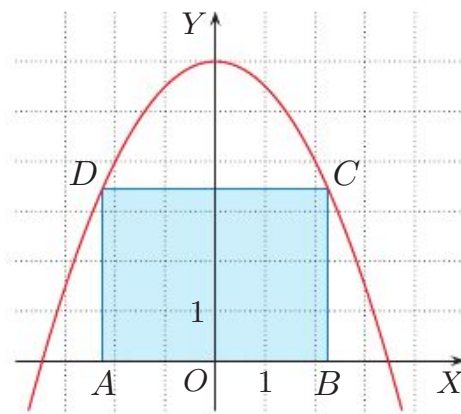
Wierzchołki B i C trójkąta prostokątnego ABC należą do wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 4$$

i mają równe rzędne. Wierzchołek A ma współrzędne $(t, 0)$, gdzie $t \in (0; \infty)$ (rysunek obok). Uzasadnij, że pole trójkąta ABC jest równe:

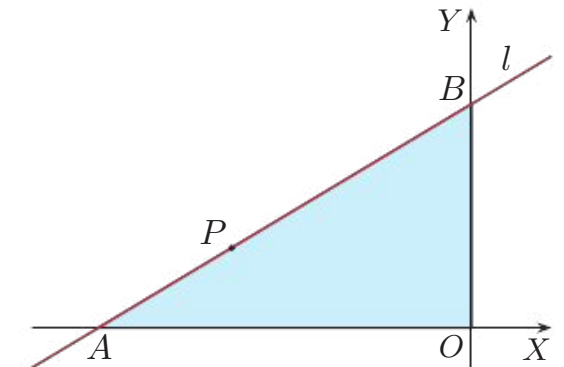
$$P(t) = \frac{1}{t} + 4t$$

Oblicz najmniejsze możliwe pole takiego trójkąta.



Przykład 4

Prosta $l: y = ax + b$ o dodatnim współczynniku kierunkowym przechodzi przez punkt $P(-6, 2)$ i tworzy z osiami układu współrzędnych trójkąt AOB (rysunek obok) o najmniejszym możliwym polu. Wyznacz długości boków tego trójkąta oraz oblicz jego pole.



Punkt $P(-6, 2)$ należy do prostej l , zatem:

$$l: y = a(x + 6) + 2 = ax + 6a + 2$$

Prosta ta przecina oś OX w punkcie $A(-\frac{2}{a} - 6, 0)$ oraz oś OY w punkcie $B(0, 6a + 2)$ (sprawdź).

Trójkąt AOB jest trójkątem prostokątnym, jego przyprostokątne mają długości: $|AO| = \frac{2}{a} + 6$ oraz $|OB| = 6a + 2$. Pole tego trójkąta:

$$\begin{aligned} P(a) &= \frac{1}{2}(6a + 2)\left(\frac{2}{a} + 6\right) = \\ &= 18a + 12 + \frac{2}{a}, \text{ gdzie } a \in (0; \infty) \end{aligned}$$

Szukamy najmniejszej wartości funkcji P w przedziale $(0; \infty)$.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji:

$$P'(a) = 18 - \frac{2}{a^2} = \frac{2(9a^2 - 1)}{a^2}$$

Zauważmy, że $P'(a) = 0$, gdy $9a^2 - 1 = 0$ i $a > 0$, czyli dla $a = \frac{1}{3}$.

$P'(a) > 0$ dla $a \in (\frac{1}{3}; \infty)$ oraz $P'(t) < 0$ dla $a \in (0; \frac{1}{3})$.

Funkcja P jest ciągła, zatem maleje w przedziale $(0; \frac{1}{3}]$ oraz rośnie w przedziale $[\frac{1}{3}; \infty)$, czyli w punkcie $a_0 = \frac{1}{3}$ przyjmuje wartość najmniejszą.

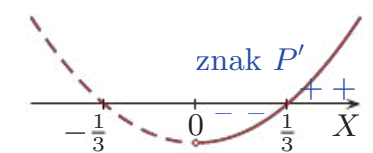
Długości boków trójkąta AOB :

$$\begin{aligned} |AO| &= 12, |OB| = 4, \\ |AB| &= \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

Pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$.

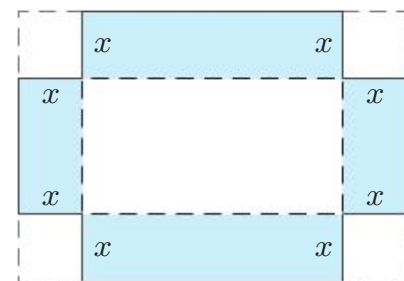
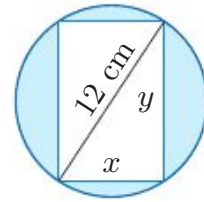
Ćwiczenie 5

Prosta l przechodzi przez punkt $P(2, -6)$ i przecina oś OX w punkcie $A(t, 0)$, gdzie $t > 2$. Wyznacz funkcję zmiennej t opisującą pole trójkąta, który ta prosta tworzy z osiami układu współrzędnych. Oblicz obwód takiego trójkąta o najmniejszym możliwym polu.



Zadania

- Który z prostokątów o polu 50 cm^2 ma najmniejszy obwód?
- Prostokąt o bokach długości x i y jest wpisany w okrąg o średnicy równej 12 cm (rysunek obok). Jakie powinny być wymiary tego prostokąta, aby iloczyn $x \cdot y^2$ miał największą wartość?
- Powierzchnia zadrukowanej części kartki ma wynosić 192 cm^2 . Marginesy górny i dolny mają mieć po 2 cm , a marginesy boczne – po $1,5 \text{ cm}$. Jakie powinny być wymiary tej kartki, aby jej powierzchnia była najmniejsza?
 - Powierzchnia zadrukowanej części plakatu ma wynosić 240 cm^2 . Marginesy górny i dolny mają mieć po 10 cm , a marginesy boczne – po 6 cm . Jakie powinny być wymiary tego plakatu, aby jego powierzchnia była najmniejsza?
- Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 4 cm . Suma długości krótszej podstawy oraz dwóch ramion trapezu jest równa 6 cm . Oblicz największe możliwe pole takiego trapezu.
- Trapez równoramienny jest wpisany w okrąg, którego średnica o długości 2 jest dłuższą podstawą trapezu. Wyznacz długość krótszej podstawy tak wpisanego trapezu o największym możliwym polu.
- Chcemy sporządzić szkielet graniastoslupa prawidłowego czworokątnego tak, aby suma długości jego krawędzi wynosiła 72 cm i aby jego objętość była możliwie największa. Jakie powinny być wymiary tej bryły?
- Mamy wykonać tekturowe pudełko o pojemności 4 l z kwadratowym dnem i bez górnej ścianki, zużywając przy tym jak najmniej materiału. Jakie wymiary powinno mieć to pudełko?
- W rogach prostokątnego arkusza blachy o wymiarach 36 cm i 24 cm wycięto cztery przystające kwadraty. Następnie po zgięciu blachy wzdłuż linii zaznaczonych na rysunku otrzymano pudełko (bez górnej ścianki) o największej możliwej objętości. Oblicz wysokość pudełka.
- Prosta przechodząca przez punkt $P(1, 2)$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym możliwym polu. Wyznacz równanie tej prostej.

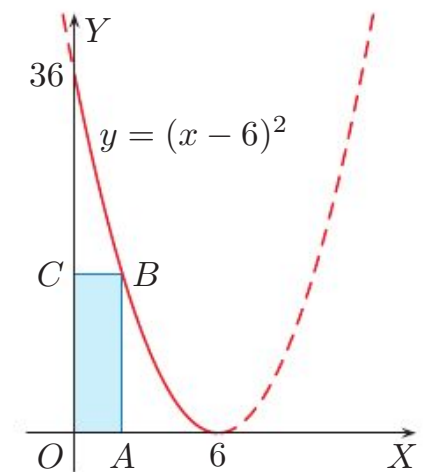


- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(4, 1)$ i odcinającej na dodatnich półosiach układu współrzędnych odcinki, których suma długości jest najmniejsza z możliwych.

- Wierzchołki A i C prostokąta $OABC$ należą do osi układu współrzędnych. Wierzchołek B należy do paraboli o równaniu $y = (x - 6)^2$, $x \in (0; 6)$ (rysunek obok).

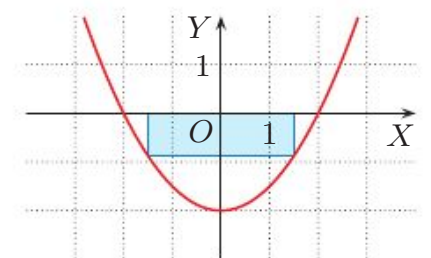
a) Uzasadnij, że jeśli punkt A ma współrzędne $(t, 0)$, gdzie $t \in (0, 6)$, to pole tego prostokąta opisuje funkcja $P(t) = t^3 - 12t^2 + 6t$.

b) Dla jakiej długości boków tego prostokąta jego pole będzie największe?

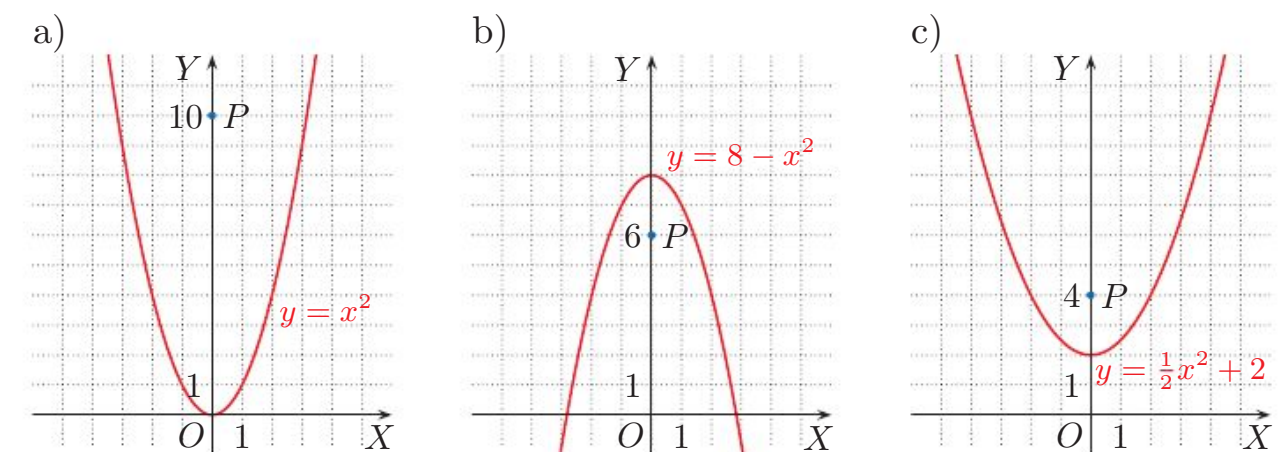


- Wierzchołki trapezu należą do paraboli o równaniu $y = -x^2 + 4$, przy czym końce dłuższej podstawy są punktami, w których parabola przecina oś OX . Wyznacz największe możliwe pole takiego trapezu.

- Dwa wierzchołki prostokąta należą do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, a dwa pozostałe – do osi OX (rysunek obok). Wyznacz obwód takiego prostokąta o największym możliwym polu.



- Wyznacz punkty należące do paraboli, których odległość od punktu P jest najmniejsza (rysunek poniżej).



- W jakim punkcie wykresu funkcji f należy poprowadzić styczną, aby trójkąt ograniczony osiami układu współrzędnych i tą styczną miał najmniejsze pole?

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

R 4.17. Szkicowanie wykresu funkcji

Umiejętność obliczania granic oraz określania przedziałów monotoniczności i ekstremów funkcji na podstawie jej pochodnej pozwala naszkicować wykresy wielu funkcji. W tym celu badamy **przebieg zmienności funkcji**, postępując według następującego schematu.

1. Określamy dziedzinę funkcji.
2. Znajdujemy punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.
3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja jest określona, oraz wyznaczamy asymptoty wykresu funkcji, o ile istnieją.
4. Wyznaczamy pochodną funkcji i określamy dziedzinę pochodnej.
5. Wyznaczamy przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji.

Wszystkie otrzymane wyniki możemy zebrać w tabeli, a następnie naszkicować wykres funkcji.

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych: $D_f = \mathbb{R}$.
2. Szukamy punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
 $f(0) = 0$, więc wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 0)$.

Aby znaleźć punkty, w których wykres przecina oś OX , rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$:

$$\frac{1}{4}x^4 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = 4$$

Zatem wykres funkcji f przecina oś OX w punktach $(0, 0)$ i $(4, 0)$.

3. Obliczamy granice funkcji f w $-\infty$ i w ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\right) \stackrel{\left[\frac{\infty \cdot \frac{1}{4}}{\infty}\right]}{=} \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\right) \stackrel{\left[\frac{\infty \cdot \frac{1}{4}}{\infty}\right]}{=} \infty$$

Zatem wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej.

4. Wyznaczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3\right)' = x^3 - 3x^2$$

i określamy dziedzinę pochodnej: $D_{f'} = \mathbb{R}$.

5. Wyznaczamy przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f .

Szukamy miejsc zerowych pochodnej:

$$x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = 3$$

Ze szkicu wykresu f' (rysunek obok) odczytujemy rozwiązania nierówności:

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (3; \infty),$$

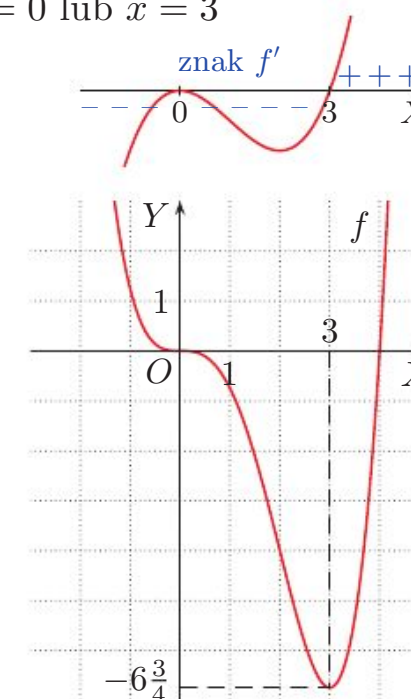
$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3).$$

Funkcja f jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $[3; \infty)$ i maleje w przedziale $(-\infty; 3]$. Dla $x_0 = 3$ funkcja osiąga minimum $f(3) = -6\frac{3}{4}$.

Otrzymane wyniki zbieramy w tabeli i szkicujemy wykres funkcji f (rysunek obok).

x	$x < 0$	0	$0 < x < 3$	3	$3 < x < 4$	4	$x > 4$
$f'(x)$	-	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	$\infty \searrow$	0	$\searrow$	$-6\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow \infty$

Strzałką $\searrow$ oznaczamy, że funkcja maleje, a strzałką $\nearrow$ – że rośnie.



Sprawdź otrzymany wykres, korzystając z odpowiedniego programu komputerowego.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f .

$$\text{a) } f(x) = -x^3 + 3x \quad \text{b) } f(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \quad \text{c) } f(x) = -x^4 + 2x^2$$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych: $D_f = \mathbb{R}$.
2. Szukamy punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
 $f(0) = 1$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$.
Równanie $\frac{1}{x^2 + 1} = 0$ nie ma rozwiązań, więc wykres nie przecina osi OX .
3. Obliczamy granice funkcji f w $-\infty$ i w ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

Zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $-\infty$ i w ∞ .

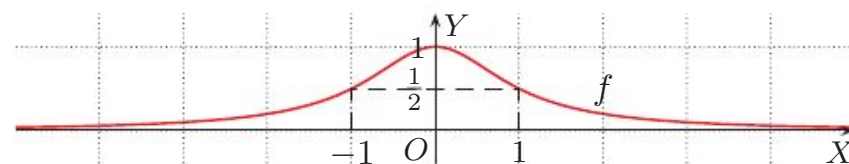
4. Wyznaczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)' = -\frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

oraz określamy dziedzinę pochodnej: $D_{f'} = \mathbb{R}$.

5. Mianownik we wzorze pochodnej jest dodatni dla $x \in \mathbb{R}$, więc znak pochodnej ustalamy na podstawie licznika: $f'(x) > 0$ dla $x < 0$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > 0$. Funkcja f jest ciągła, zatem rośnie w przedziale $(-\infty; 0]$ oraz maleje w przedziale $[0; \infty)$. Dla $x_0 = 0$ funkcja osiąga maksimum $f(0) = 1$.

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$



Wykres funkcji f jest symetryczny względem osi OY .

Zwróć uwagę na to, że oprócz wykorzystania danych z tabeli warto wyznaczyć kilka dodatkowych punktów należących do wykresu funkcji, np. $(1, \frac{1}{2})$, $(-1, \frac{1}{2})$.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ b) $f(x) = \frac{9}{x^2 - 2x + 4}$ c) $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$

Zadania

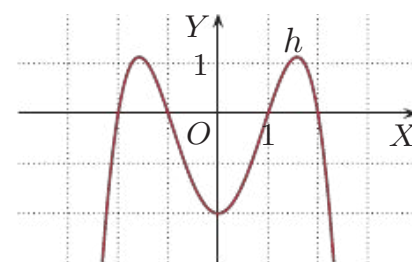
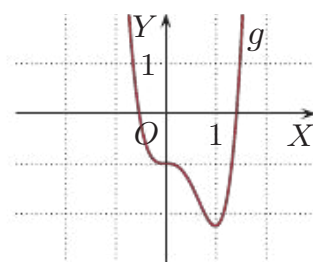
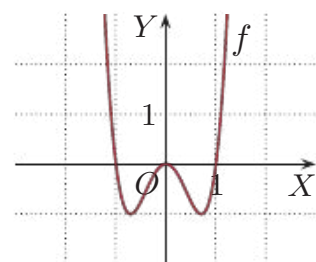
1. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ b) $f(x) = 6x^2 - x^4$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2$

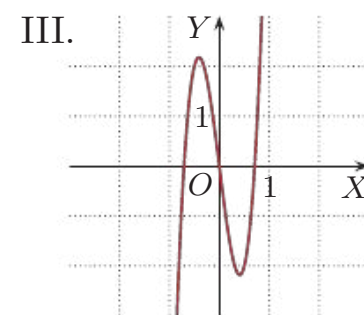
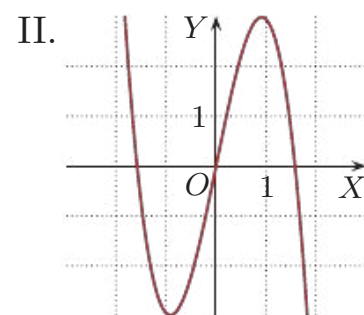
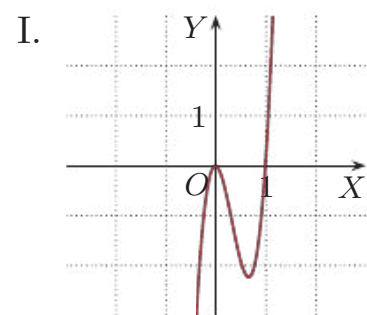
2. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x^2 + 4}$ b) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x + 2}$ c) $f(x) = \frac{1 - x}{x^2 + 3}$

3. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji f , g i h .



Wykresy pochodnych tych funkcji przedstawiono na rysunkach I, II, III. Dopasuj pochodne do funkcji.



Dowiedz się więcej

Szkicowanie wykresów funkcji wymiernych

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

Dla każdego $x \in D_f$ mamy $-x \in D_f$ oraz:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x). \quad \text{Warto sprawdzić parzystość funkcji.}$$

Zatem funkcja jest nieparzysta (patrz str. 29), czyli jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

2. $f(0) = 0$, więc wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 0)$.
 $f(x) = 0$ dla $x = 0$, zatem punkt $(0, 0)$ jest też jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji i osi OX .

3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja f jest określona:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Prosta $y = 0$ jest zatem obustronną asymptotą poziomą wykresu funkcji f .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} \left[\frac{-1}{0^-} \right] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} \left[\frac{1}{0^+} \right] = \infty$$

Proste $x = -1$ oraz $x = 1$ są zatem obustronnymi asymptotami pionowymi wykresu funkcji f .

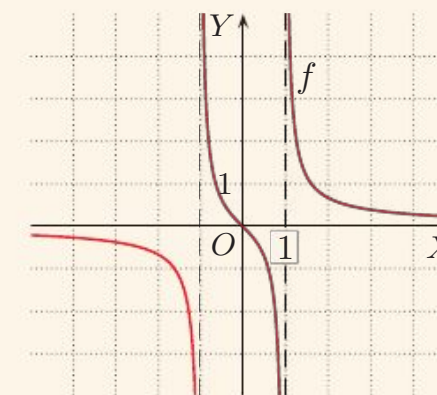
4. Wyznaczamy pochodną:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

5. Pochodna f' jest ujemna dla $x \in D_{f'}$, zatem funkcja f jest malejąca w przedziałach $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ i $(1; \infty)$ oraz nie ma ekstremów.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	-	$\times$	-	-	-	$\times$	-
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$\times$	$\infty \searrow$	0	$\searrow -\infty$	$\times$	$\infty \searrow 0$

Uwaga. Ponieważ funkcja f jest nieparzysta, można przeprowadzić badanie funkcji tylko dla $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, naszkicować odpowiedni fragment wykresu i odbić go symetrycznie względem punktu $(0, 0)$.



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.
2. $f(0) = 0$, zatem punkt $(0, 0)$ jest punktem przecięcia wykresu z osią OY .
 $f(x) = 0$ dla $x = 0$, zatem punkt $(0, 0)$ jest też jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji i osi OX .
3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja f jest określona:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-\frac{2}{x}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-\frac{2}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} \left[\frac{4}{0^+} \right] = \infty$$

Prosta $x = 2$ jest zatem obustronną asymptotą pionową wykresu funkcji f .

Można skorzystać z informacji podanej na str. 235 i wykazać, że wykres funkcji f ma w $\pm\infty$ asymptotę ukośną $y = x + 2$.

4. Wyznaczamy pochodną:

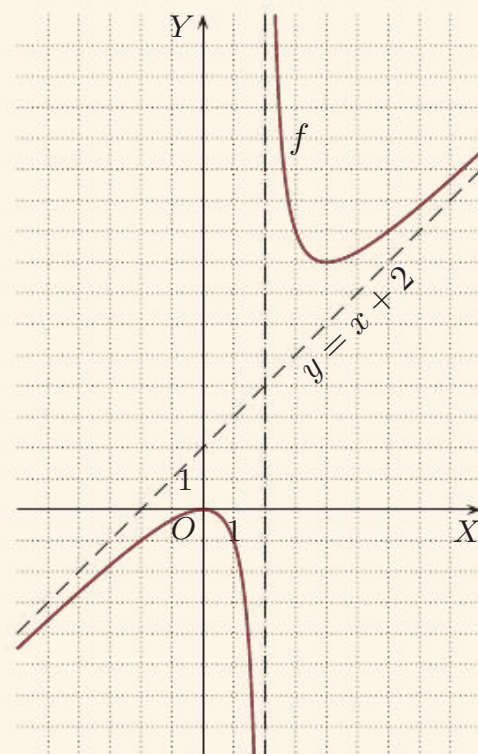
$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-2} \right)' = \frac{2x(x-2) - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

5. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = 4$
 $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$
 $f'(x) < 0$ dla $x \in (0; 2) \cup (2; 4)$

Funkcja f jest ciągła, zatem rośnie w przedziałach $(-\infty; 0]$ i $[4; \infty)$ oraz maleje w przedziałach $[0; 2)$ i $(2; 4]$.

W punkcie $x_0 = 0$ funkcja f osiąga maksimum $f(0) = 0$, a w punkcie $x_1 = 4$ osiąga minimum $f(4) = 8$.

x	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < 4$	4	$x > 4$
$f'(x)$	+	0	-	×	-	0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$	×	$\infty \searrow$	8	$\nearrow \infty$



1. Naszkicuj wykres funkcji f .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x + \frac{1}{x} & \text{c) } f(x) = \frac{x^3+2}{x} & \text{e) } f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x} \\ \text{b) } f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} & \text{d) } f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4} & \text{f) } f(x) = \frac{x^2}{|x|-2} \end{array}$$

Powtórzenie

Zestaw I

1. Oblicz granicę.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 7x + 12} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 9} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 10x + 9}{x^2 - 11x + 18} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} \end{array}$$

2. Oblicz granicę.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-4}-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{7+x}-1}{x+6} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x-7}-1}{\sqrt{x-3}-1} \end{array}$$

3. Sprawdź, czy istnieje $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji f .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ 1 & \text{dla } x = 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } x \leq 2 \\ 2x^2 - x - 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

4. Oblicz granicę.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{3}{x-5} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{4-x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{x^2-x-6} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+1}{x^3+8} \end{array}$$

5. Zbadaj, czy istnieje granica.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-3}{x^2-4x-5} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \end{array}$$

6. Oblicz granicę.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^4 - x^2 + 6) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+2}{3x-1} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+x}{8x^3-x+2} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5 + x^2 + x) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2+2x}{3x^2+x-1} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x+1}{1-x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^4 - 2x + 1) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3-x^2+1}{1-4x^3} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+5x-1}{x+2} \end{array}$$

7. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji f .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{x-1}{x} & \text{c) } f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-5x+6} & \text{e) } f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x}} \\ \text{b) } f(x) = \frac{x}{x^2-16} & \text{d) } f(x) = \frac{x^2}{1+x} & \text{f) } f(x) = \sqrt{1+x^2} + x \end{array}$$

8. Uzasadnij, że równanie ma rozwiązanie należące do podanego przedziału.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } -3x^4 + 6x^2 + 5 = 0, \quad (0; 2) & \text{b) } x^5 - 5x^3 + x^2 - 7 = 0, \quad (-2; -1) \end{array}$$

9. Zbadaj ciągłość funkcji f i naskicuj jej wykres.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-3} & \text{dla } x \leq 2 \\ x - 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

10. Czy można tak dobrać wartość parametru a , żeby funkcja f była ciągła?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{x+1} & \text{dla } x < 0 \\ a & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-1}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

11. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej równej 1.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = -5x^4 + \frac{x^3}{3} + x & \text{c) } f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{e) } f(x) = \frac{2x^3-x}{1+x^2} \\ \text{b) } f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x} & \text{d) } f(x) = (x^3-1)\sqrt{x} & \text{f) } f(x) = \frac{2x^2-9}{\sqrt{x}} \end{array}$$

■ Zestaw II

1. Dla jakiej wartości parametru a granica $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{ax^2-x+1}$ jest równa:

$$\text{a) } 1, \quad \text{b) } 2, \quad \text{c) } -\infty?$$

2. Oblicz granicę.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x}) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x+x^2} + x) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+2x}}{x+1} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-1} - 2x) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2+1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+x}} \end{array}$$

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = 3x^2 + 1, x_0 = 0 & \text{d) } f(x) = (x-4)^3, x_0 = 3 \\ \text{b) } f(x) = \frac{x^3}{3} + x, x_0 = -1 & \text{e) } f(x) = \frac{x-3}{x}, x_0 = 1 \\ \text{c) } f(x) = \frac{1}{x} - 1, x_0 = 2 & \text{f) } f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}, x_0 = 1 \end{array}$$

4. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$, które:

- są równoległe do prostej o równaniu $y = 7x - 4$,
- są prostopadłe do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$,
- tworzą z osią OX kąt 135° .

5. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 & \text{c) } f(x) = \frac{x+2}{x} & \text{e) } f(x) = x^2 - \frac{2}{x} \\ \text{b) } f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5 & \text{d) } f(x) = \frac{x^2}{x+1} & \text{f) } f(x) = 4x + \frac{1}{x} \end{array}$$

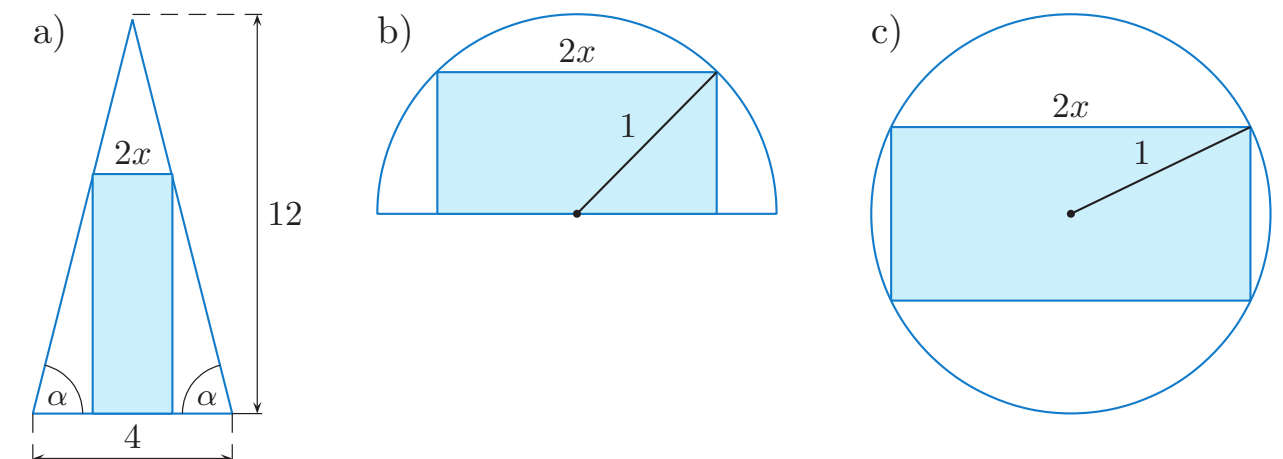
6. Wyznacz ekstrema funkcji f .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x & \text{d) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4} & \text{g) } f(x) = \sqrt{x^4+2x^2+2} \\ \text{b) } f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x & \text{e) } f(x) = x + \frac{4}{x^2} & \text{h) } f(x) = \sqrt{2x^4-x^2+1} \\ \text{c) } f(x) = \frac{3x}{x^2+4x+4} & \text{f) } f(x) = \frac{2x}{x^2+4} & \text{i) } f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}} + 1 \end{array}$$

7. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x^3 - 6x, [-2; 3] & \text{c) } f(x) = \frac{x}{x^2+4}, [-4; 4] \\ \text{b) } f(x) = \frac{x-8}{x+2}, [0; 8] & \text{d) } f(x) = \sqrt{2x(9-x)}, [1; 3] \end{array}$$

8. Przedstaw pole P prostokąta (rysunek poniżej) jako funkcję zmiennej x . Dla jakiego argumentu x pole jest największe? Podaj wymiary prostokąta o największym polu.



9. Wymiary prostopadłościanu są w stosunku $2:3:x$, gdzie $x > 0$, a suma tych wymiarów jest równa 1 m. Wyznacz wartość x , dla której objętość tej bryły jest największa. Oblicz tę objętość.

10. Na paraboli $y = x^2$ zaznaczono punkty $A(-1, 1)$, $B(a, a^2)$, $C(2, 4)$, gdzie $a \in (-1; 2)$. Wyznacz wartość a , dla której pole trójkąta ABC jest największe. Oblicz to pole.

11. Naskicuj wykres funkcji f .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 & \text{d) } f(x) = \frac{x+2}{x^2-9} & \text{g) } f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3} \\ \text{b) } f(x) = x^4 + x^2 - 2 & \text{e) } f(x) = \frac{8x}{x^2+8} & \text{h) } f(x) = \frac{6}{x^2-2x+8} \\ \text{c) } f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 & \text{f) } f(x) = \frac{-2}{x^2-1} & \text{i) } f(x) = \frac{2x}{x^2+4x+4} \end{array}$$



Zadania z kontekstem realistycznym

1. Właściciel hurtowni mebli ogrodowych poprosił swojego syna Karola o pomoc w rozwiązaniu następującego problemu. Należy ogrodzić prostokątny plac wystawowy o powierzchni 160 m^2 . Trzy boki prostokąta mają być ogrodzone drewnianym płotem (koszt: 200 zł za metr bieżący płotu), a czwarty – ścianą z cegły (koszt: 800 zł za metr bieżący ściany). Jakie wymiary powinien mieć ten plac, aby koszt ogrodzenia był najmniejszy?

a) W ramce poniżej podano fragment rozwiązania przedstawionego przez Karola. Dokończ to rozwiązanie.

Oznaczmy przez x i y boki prostokąta. Przyjmijmy, że ściana z cegły powstanie wzdłuż boku BC . Wówczas koszt ogrodzenia (w złotych) można przedstawić za pomocą wzoru:

$$k = (2x + y) \cdot 200 + y \cdot 800 = 400x + 1000y$$

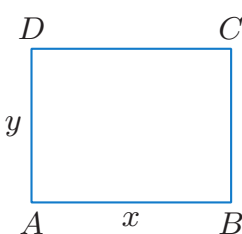
Powierzchnia placu jest równa 160 m^2 , czyli $x \cdot y = 160$, więc $y = \frac{160}{x}$.

Zatem należy znaleźć argument $x > 0$, dla którego funkcja:

$$k(x) = 400x + \frac{160000}{x}$$

przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczamy pochodną funkcji k .



- b) Koszt drewnianego płotu wzrósł o 400 zł za metr bieżący, a koszt metra bieżącego ściany z cegły pozostał bez zmian. Oblicz, jakie wymiary powinien mieć ten plac, aby koszt ogrodzenia był najmniejszy. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 cm.

2. Pudełko w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości 96 dm^3 ma zostać wykonane z dwóch rodzajów materiału. Materiał na dolną podstawę kosztuje 200 zł/m^2 , a materiał na górną podstawę i ściany boczne – 100 zł/m^2 . Jakie wymiary powinno mieć to pudełko, aby koszt jego wykonania był najmniejszy? Ile wyniesie koszt materiału potrzebnego na jego wykonanie?

3. Blaszany pojemnik w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego bez górnej ścianki ma mieć pojemność 12 l. Na ścianki boczne przeznaczono materiał trzy razy tańszy niż na podstawę. Jakie wymiary powinien mieć ten pojemnik, aby koszt jego wykonania był najmniejszy?



Sposób na zadanie

Przykład

Jakie jest największe możliwe pole trapezu równoramiennego, którego ramiona i krótsza podstawa mają długość 2?

W trapezie $ABCD$ (rysunek obok) niech $x = |AE|$.

Wówczas wysokość trapezu jest równa:

$$h = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}, \text{ gdzie } x \in (0; 2)$$

Pole trapezu:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |DE|$$

zapisujemy jako funkcję zmiennej x :

$$P(x) = \frac{(2 + 2x) + 2}{2} \cdot \sqrt{4 - x^2} = (2 + x)\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{(2 + x)^2(4 - x^2)}$$

$$P(x) = \sqrt{-x^4 - 4x^3 + 16x + 16}$$

gdzie $x \in (0; 2)$.

Następnie wyznaczamy największą wartość funkcji P . W tym celu możemy:

- wyznaczyć pochodną funkcji P :

$$P'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x^4 - 4x^3 + 16x + 16}} \cdot (-4x^3 - 12x^2 + 16)$$

lub

- rozpatrzyć funkcję pomocniczą:

$$f(x) = -x^4 - 4x^3 + 16x + 16$$

gdzie $x \in (0; 2)$.

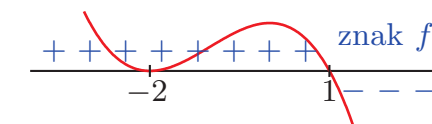
Funkcja $y = \sqrt{t}$ jest rosnąca, więc funkcje P i f osiągają wartości największe dla tego samego argumentu x .

$$f'(x) = -4x^3 - 12x^2 + 16, \text{ gdzie } x \in (0; 2)$$

$$-4x^3 - 12x^2 + 16 = 0 \text{ dla } x \in \{-2, 1\} \text{ (sprawdź)}$$

Z założenia $x \in (0; 2)$, zatem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Funkcja f rośnie w przedziale $(0; 1]$ i maleje w przedziale $[1; 2)$, zatem dla $x = 1$ funkcja f oraz funkcja P osiągają wartości największe.



$$P(1) = \sqrt{-1^4 - 4 \cdot 1^3 + 16 \cdot 1 + 16} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole takiego trapezu jest równe $3\sqrt{3}$.

➔ Zadanie 7, str. 288

**Zadanie 1 (0–2)**

Oblicz $\lim_{x \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{3x^3 + 4x^2 - 6x - 8}{9x^2 - 16}$.

Zadanie 2 (0–2)

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$$

w punkcie $x_0 = 1$.

Zadanie 3 (0–2)

Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$ w przedziale $(-\infty; 1]$.

Zadanie 4 (0–4)

Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x = m$ ma rozwiązanie należące do przedziału $[0; 1]$?

Zadanie 5 (0–5)

Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3ax^2}{(a^2 + 4)x^2 + 7}$$

w przedziale $[-5; 5]$.

Zadanie 6 (0–5)

Rozpatrujemy trójkąty prostokątne opisane na okręgu o promieniu 1. Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, dla którego promień opisanego na nim okręgu jest najmniejszy.

Zadanie 7 (0–6) → Przykład, str. 287

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$, którego ramię AD jest prostopadłe do dłuższej podstawy AB . Krótsza podstawa DC oraz ramię BC mają długość 4. Oblicz wysokość takiego trapezu $ABCD$ spełniającego podane warunki, którego pole jest największe.

Zadanie 8 (0–5)

Rozważamy graniastosłupy prawidłowe sześciokątne o objętości 36 cm^3 . Oblicz długość przekątnej ściany bocznej tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

Zadanie 9 (0–6)

Wyznacz w zależności od parametru a współrzędne punktu należącego do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ i leżącego najbliżej punktu $P(0, a)$.

5 Statystyka

Poniższa tabela zawiera szacunkowe dane dotyczące liczebności populacji bobra na terenie Polski w wybranych latach. Dane te pokazują, że od ostatniego ćwierćwiecza XX wieku następuje ciągły przyrost populacji bobra w naszym kraju.

Rok	1976	1980	1982	1986	1992	1994	2003	2020
Liczebność	500	1000	1800	3000	6000	7400	20 660	137 000

Na podstawie: *Krajowy plan ochrony gatunku. Bóbr europejski*, oprac. Andrzej Czech, Kraków 2007; www.wody.gov.pl

W tym rozdziale poznajemy pojęcia statystyczne związane z analizą danych. Wykorzystuje się je do opisu różnych zjawisk, także przy podejmowaniu kluczowych decyzji gospodarczych i społecznych.



5.1. Średnia arytmetyczna

Przykład 1

W tabeli podano liczby punktów zdobytych przez zawodników A i B w sześciu kolejnych meczach koszykówki.

A	8	18	10	20	16	12
B	24	18	4	0	0	2

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika A :

$$\frac{8 + 18 + 10 + 20 + 16 + 12}{6} = 14$$

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika B :

$$\frac{24 + 18 + 4 + 0 + 0 + 2}{6} = 8$$

Definicja

Średnią arytmetyczną n liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Zamiast „średnia arytmetyczna” będziemy czasami pisać krótko: „średnia”.

Ćwiczenie 1

W tabeli podano oceny z wybranych przedmiotów otrzymane przez troje uczniów klasy III na koniec semestru. Oblicz średnie ocen uzyskanych przez Basię i Tomka (zauważ, że Tomek nie uczy się języka francuskiego).

	J. polski	J. angielski	J. francuski	Historia	Matematyka	Biologia	Fizyka	Chemia	Geografia	WF	Średnia ocen
Agnieszka	6	5	5	5	4	5	4	3	5	4	4,6
Basia	2	1	2	3	4	3	4	3	2	5	?
Tomek	5	4	–	5	3	3	4	4	5	3	?

Ćwiczenie 2

Wynagrodzenia miesięczne pracowników pewnej firmy wyniosły (w złotych): 5300, 5250, 7500, 5350, 9500, 5300, 5000, 5100 i 4700. Ilu pracowników tej firmy otrzymało wynagrodzenie poniżej średniej?

Ćwiczenie 3

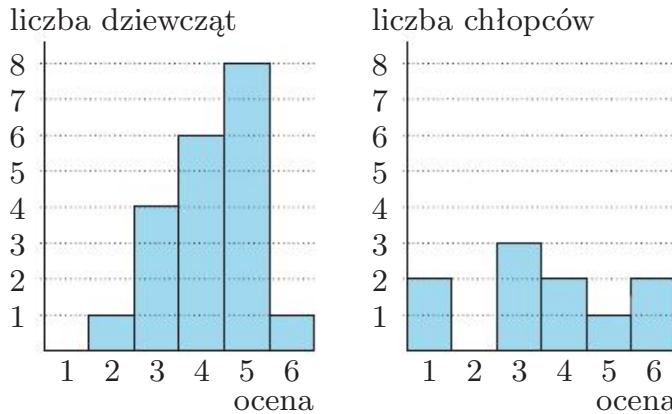
Oblicz średnie arytmetyczne zestawów danych A , B i C . Sformułuj wniosek.

$$A = \{7, 7, 3, 4, 4, 11\}, \quad B = \{17, 17, 13, 14, 14, 21\}, \quad C = \{27, 27, 23, 24, 24, 31\}$$

Przykład 2

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z matematyki w klasie III (z podziałem na dziewczęta i chłopców).

Średnia ocen z matematyki w grupie dziewcząt:



$$\bar{x}_d = \frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{1 + 4 + 6 + 8 + 1} = \frac{84}{20} = 4,2$$

Średnia ocen z matematyki w grupie chłopców:

$$\bar{x}_c = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2 + 3 + 2 + 1 + 2} = \frac{36}{10} = 3,6$$

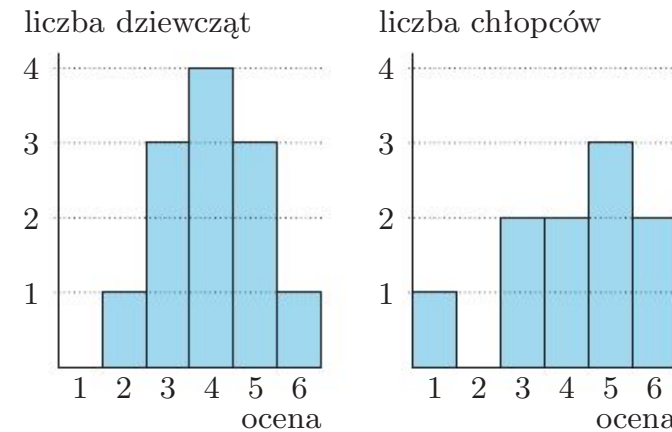
Średnią ocen z matematyki dla całej klasy możemy obliczyć, korzystając z obliczonych wcześniej średnich:

$$\bar{x}_k = \frac{20 \cdot \bar{x}_d + 10 \cdot \bar{x}_c}{10 + 20} = \frac{84 + 36}{30} = \frac{120}{30} = 4$$

Zwróć uwagę na to, że $\bar{x}_k$ nie jest równe $\frac{\bar{x}_d + \bar{x}_c}{2}$. Jak sądzisz, dlaczego?

Ćwiczenie 4

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z biologii w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz średnie ocen z biologii dla grupy dziewcząt, grupy chłopców oraz dla całej klasy.



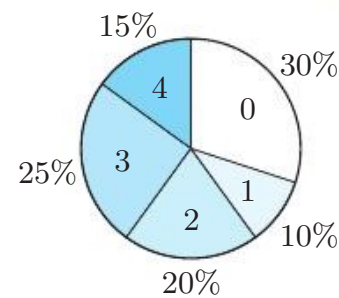
Ćwiczenie 5

a) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \dots, x_8$ jest równa 16, a średnia arytmetyczna liczb: $x_2, \dots, x_8$ jest równa 17. Oblicz x_1 .

b) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \dots, x_7$ jest równa 120, a średnia arytmetyczna liczb: x_2, x_4, x_6 jest równa 100. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: x_1, x_3, x_5, x_7 .

Zadania

1. W grupie 240 osób przeprowadzono sondaż. Każdej osobie zadano pytanie: „Ile godzin dziennie spędzasz, oglądając seriale?”. Wyniki sondażu przedstawiono na diagramie kołowym. Oblicz średnią arytmetyczną otrzymanych danych.

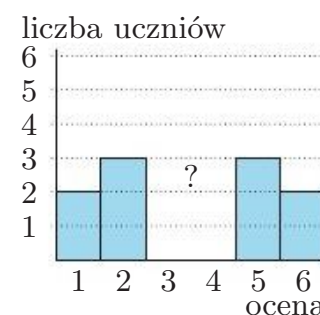


2. Średnia arytmetyczna podanego zestawu liczb jest równa 4,5. Oblicz x .

a) 2, 2, 3, 3, 3, x , 8, 8 b) 0, 1, 1, 1, 2, 2, x , x , 13, 15

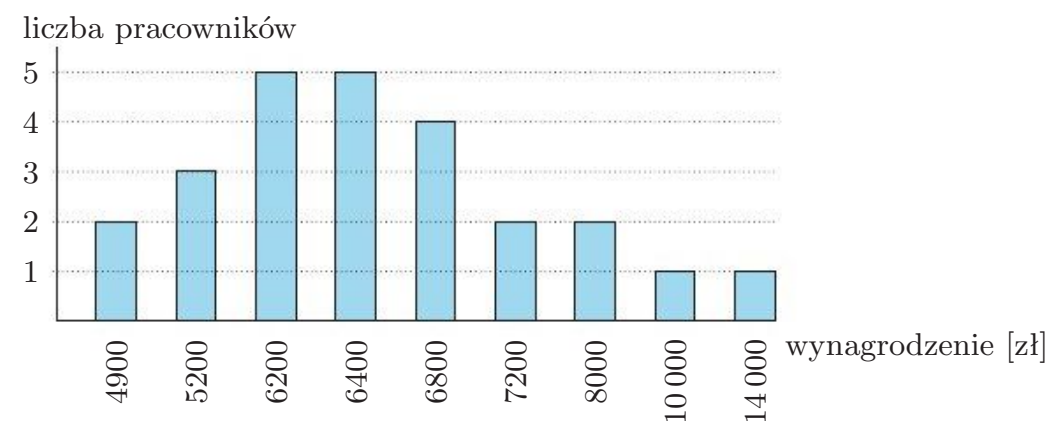
3. Klub zrzeszający dwunastu hodowców gołębi podał, że każdy z jego członków ma średnio 50 gołębi. Dane te okazały się nieaktualne, gdy jeden z klubowiczów sprzedał połowę swoich gołębi – ma ich teraz 36. Ile gołębi przypada średnio na jednego członka klubu obecnie?

4. Na diagramie przedstawiającym zestawienie ocen semestralnych z geografii w dwudziestoosobowej klasie nie zaznaczono liczby ocen dobrych i dostatecznych. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij diagram przy założeniu, że średnia ocen z geografii w tej klasie wynosi:



a) 3,5, b) 3,25, c) 3,65.

5. Na diagramie przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia pracowników oddziału banku (14 000 zł zarabia dyrektor).



- a) Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie w tym banku?
 b) Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie 10 najlepiej zarabiających pracowników, a ile – 10 zarabiających najgorzej?
 c) Jaką podwyżkę otrzymał dyrektor, jeśli wszyscy pozostali pracownicy dostali po 500 zł podwyżki, a średnie miesięczne wynagrodzenie wzrosło o 10%?

6. W pewnej firmie zatrudniającej 15 pracowników średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 6500 zł. Jakie będzie średnie miesięczne wynagrodzenie, jeśli firma dodatkowo zatrudni:

a) stażystę z wynagrodzeniem miesięcznym 4700 zł,
 b) trzech stażystów, każdego z wynagrodzeniem miesięcznym 5000 zł?

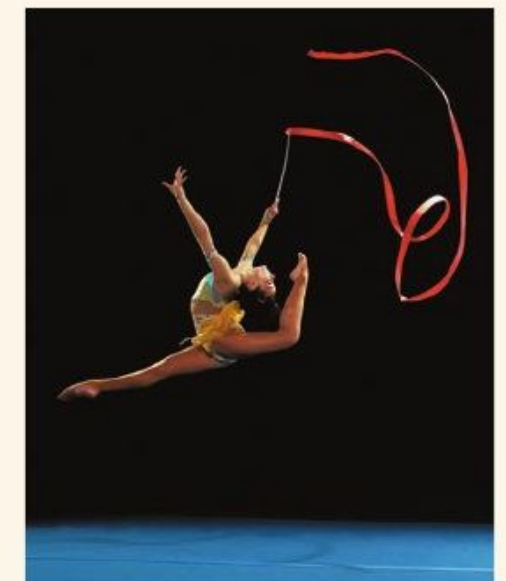
7. Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 5200 zł. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest:

a) o 2% wyższe niż poprzednio, b) o 1% niższe niż poprzednio?

Czy wiesz, że...

Średnia arytmetyczna jest „wrażliwa” na dane, które bardzo odbiegają od pozostałych, dlatego czasem obliczamy ją po odrzuceniu z zestawu pewnej liczby danych największych i najmniejszych. Tak obliczona średnia nosi nazwę **średniej obciętej**.

Średnia obcięta ma swoje zastosowania na przykład w sporcie. Obliczenie ostatecznej oceny w jeździe figurowej na lodzie czy gimnastyce sportowej polega na odrzuceniu dwóch skrajnych ocen i obliczeniu średniej obciętej pozostałych.



8. Oblicz średnią podanego zestawu liczb oraz średnią zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb skrajnych (najmniejszej i największej).

a) 0, 2, 3, 4, 6, 9, 9, 127 b) 11, 12, 12, 13, 15, 17, 82

9. Oblicz średnią arytmetyczną zestawu liczb będących kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $2, 2^2, \dots, 2^{12}$ oraz średnią zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb najmniejszych i dwóch liczb największych.

10. Czy wśród przedstawionych obok liczb można skreślić jeszcze jedną tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich skreślonych liczb:

a) wzrosła o 1, b) zmalała o 1, c) wzrosła o $33\frac{1}{3}\%$?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Skala centylowa

Aby wskazać położenie wybranej danej względem innych danych, używa się **skali centylowej**. Podając centyl, któremu odpowiada liczba x (mówimy też: „w którym mieści się liczba x ”), określamy, jaki jest procent liczb mniejszych lub równych tej liczbie.

Przykład 1

W poniższej tabeli podano wartości centyli odpowiadające poszczególnym wynikom procentowym uzyskanym na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym przeprowadzonym w maju 2025 r.

Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
0	7	34	59	68	89
2	11	36	61	70	90
4	17	38	63	72	91
6	21	40	65	74	92
8	25	42	67	76	93
10	28	44	70	78	94
12	31	46	72	80	95
14	33	48	74	82	96
16	36	50	75	84	97
18	39	52	77	86	97
20	41	54	79	88	98
22	44	56	81	90	99
24	46	58	82	92	99
26	49	60	84	94	99
28	51	62	85	96	100
30	54	64	87	98	100
32	56	66	88	100	100

Z tabeli można odczytać, że:

Źródło: <https://cke.gov.pl>

- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 30% punktów możliwych do zdobycia, to wynik ten odpowiada 54. centylowi, co oznacza, że 54% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast 46% maturzystów uzyskało wynik wyższy.
- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 96% punktów możliwych do zdobycia, to wynik ten odpowiada 100. centylowi, co oznacza, że w przybliżeniu 100% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast mniej niż 1% maturzystów uzyskało wynik wyższy.

5.2. Mediana i dominanta

Poza średnią arytmetyczną rozpatrujemy też inne wielkości służące do analizy danych. Jedną z nich jest wartość środkowa – **mediana**. Aby ją wyznaczyć, porządkujemy dane od wartości najmniejszej do największej, na przykład:

- 1, 2, 2, 2, 5, 5, 6 – medianą jest liczba 2,
−3, −3, 0, 0, 2, 7, 9, 11, 13, 17, 18 – medianą jest liczba 7.

Medianą nieparzystej liczby danych jest wartość środkowa. W przypadku parzystej liczby danych medianą jest średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych, na przykład:

1, 2, 3, 8, 9, 14 – mediana jest równa $\frac{3+8}{2} = 5,5$.

Zauważ, że mediana dzieli dane na dwie równoliczne grupy. Dane w jednej grupie są od niej mniejsze lub jej równe, dane w drugiej – większe lub równe.

Ćwiczenie 1

Wyznacz medianę podanych liczb.

- a) 1, 2, 3, 10, 20 b) 6, 10, 11, 11, 20, 7 c) 18, 6, 4, 10, 5, 4

Ćwiczenie 2

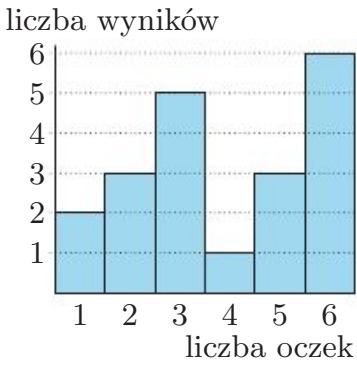
W stadninie zważono wszystkie konie i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach):

- ogiery: 530, 550, 550, 590, 565, 570, 560, 540;
– klacze: 490, 500, 510, 540, 505, 500.

Wyznacz mediany wagi: a) ogierów, b) klaczy, c) wszystkich koni w stadninie.

Ćwiczenie 3

Rzucono 20 razy kostką. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy otrzymano poszczególne liczby oczek. Wyznacz medianę uzyskanych wyników.



Ćwiczenie 4

Podaj przykład pięciu liczb, których mediana jest:

- a) większa od ich średniej arytmetycznej,
b) mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 5

Średnia arytmetyczna zestawu liczb: 8, 6, 3, x , 8, $x+4$, 4, 6, 7, 8 jest równa 7. Ile wynosi mediana tego zestawu liczb?

Kolejną wielkością przydatną podczas analizy danych jest **dominanta** – wartość, która występuje wśród danych najczęściej (dominanta bywa również nazywana **wartością modalną** lub **modą**).

Na przykład dla liczb: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6 dominantą jest liczba 2.

Jeśli w zestawie danych kilka liczb występuje z tą samą, najwyższą częstością, to przyjmujemy, że każda z tych liczb jest dominantą. Jeżeli natomiast wszystkie liczby występują tak samo często, to przyjmujemy, że nie ma dominanty.

Ćwiczenie 6

Sprzedawca zanotował rozmiary butów męskich, które sprzedał pewnego dnia: 42, 44, 41, 42, 43, 42, 44, 42, 45, 43, 45, 46. Wyznacz medianę i dominantę tych danych. Który rozmiar butów kupowano najczęściej?

Ćwiczenie 7

Nauczyciel biologii zrobił zestawienie wyników trzech sprawdzianów przeprowadzonych w dwudziestoosobowej klasie (tabela obok). Po kolejnym sprawdzianie dopisał do zestawienia nowe oceny. Wyznacz dominantę i medianę ocen w nowym zestawieniu przy założeniu, że z tego sprawdzianu:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	4	10	23	2	19	2

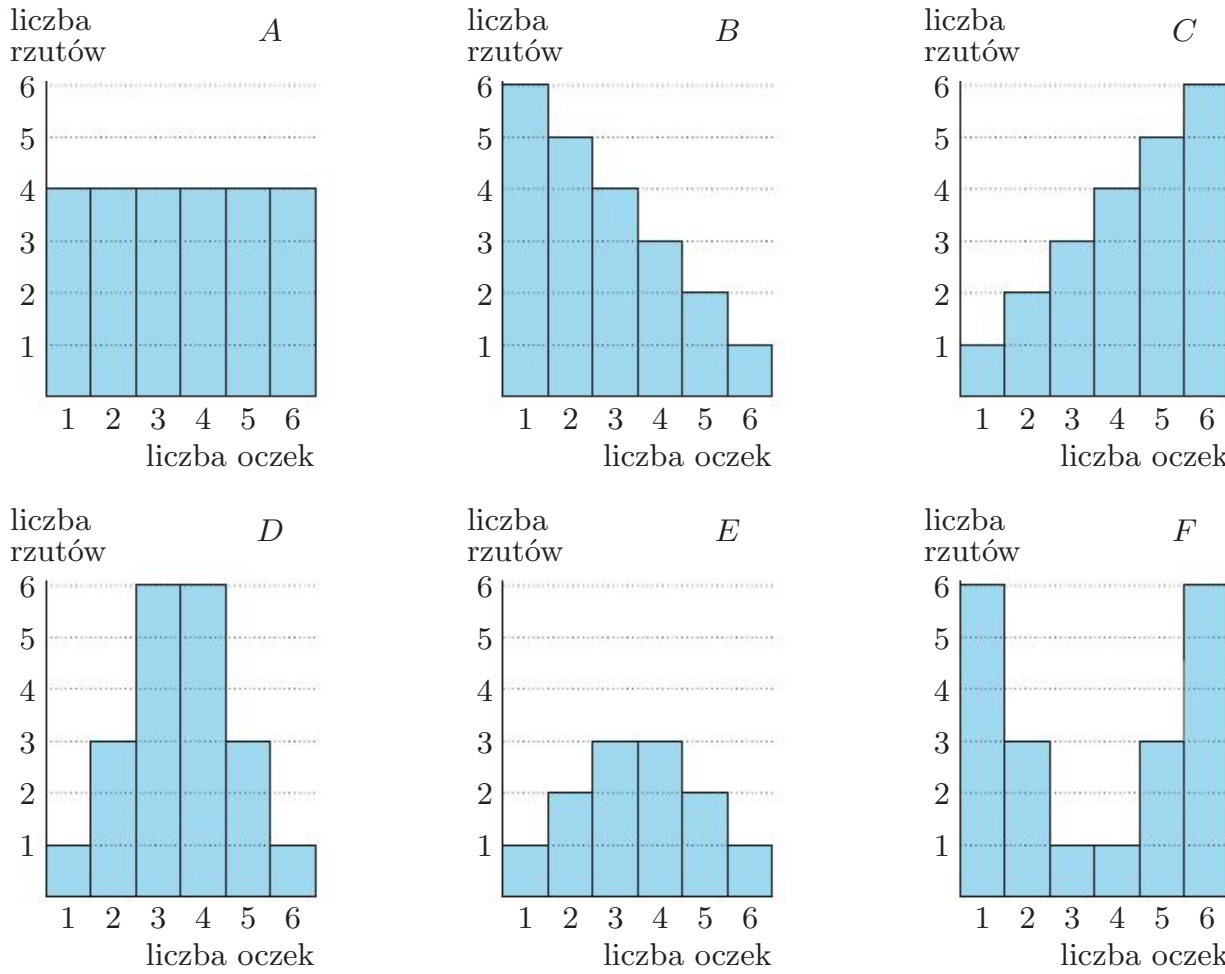
- a) wszyscy uczniowie otrzymali ocenę dobrą,
- b) połowa uczniów otrzymała ocenę bardzo dobrą, a pozostali – dostateczną.

Zadania

- 1. Który zestaw danych: X czy Y ma większą medianę?
a) X : 8, 2, 3, 7, 8, 8, 1, 7, 1, Y : 9, 7, 2, 6, 7, 2, 9, 3
b) X : $\frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$, Y : $\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{4}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}$
- 2. W tabeli przedstawiono, ile medali zdobyli Polacy w trakcie letnich igrzysk olimpijskich w latach 2004–2024. Oblicz średnią arytmetyczną i medianę liczby zdobytych w tych latach:
a) złotych medali, b) wszystkich medali.
- 3. Oznaczmy przez $\bar{x}$, M i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb: 1, 2, 3, 4, c , 2, 3, 4, 4, 4. Oblicz c w przypadku, gdy:
a) $\bar{x} = D$, b) $\bar{x} = M$.

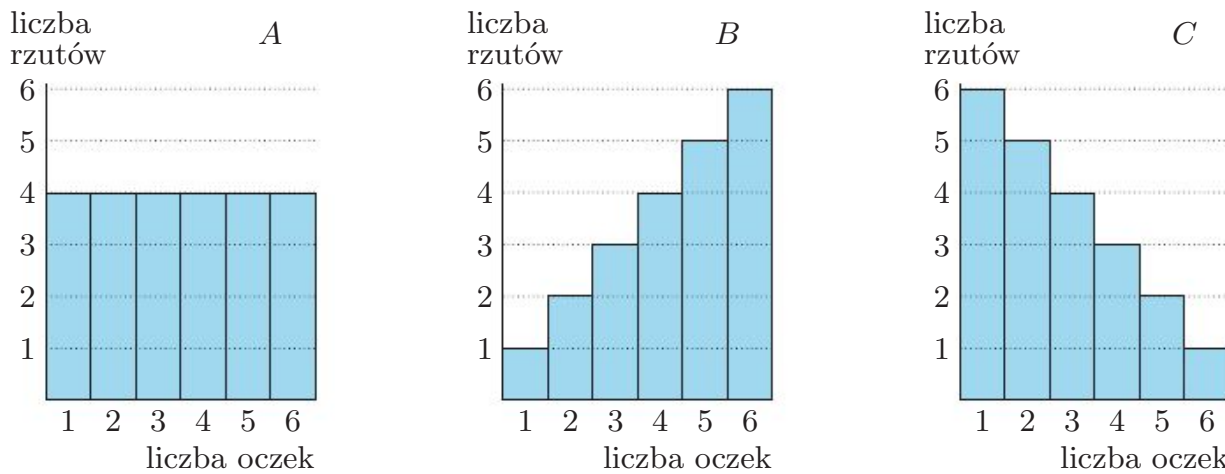
Rok	złoto	srebro	brąz
2004	3	2	5
2008	4	5	2
2012	3	2	6
2016	2	3	6
2020	4	5	5
2024	1	4	5

- 4. Każda z osób A, B, C, D, E, F wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzucanych w każdej serii.



- 5. Każda z osób A, B, C wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzucanych łącznie przez osoby:

- a) A i B , b) A i C , c) B i C , d) A, B i C .



Korelacja

O dodatniej korelacji między dwiema zmiennymi w statystyce mówimy, gdy wzrost jednej z nich jest powiązany ze wzrostem drugiej.

Na przykład zbierając dane dotyczące czasu spędzonego na bieganiu i liczby spalonych kalorii, możemy oczekiwać dodatniej korelacji tych danych.

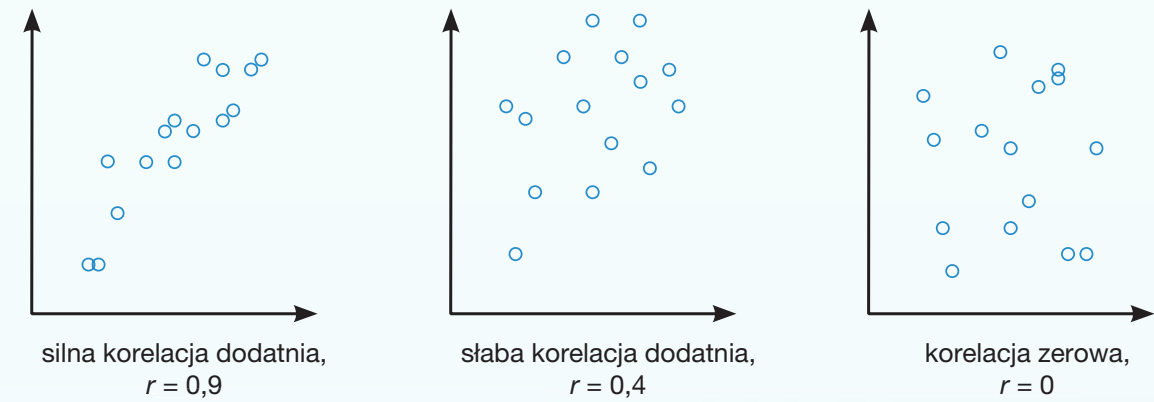


Aby zmierzyć korelację między zmiennymi x i y na podstawie par danych: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, których średnie arytmetyczne wynoszą odpowiednio $\bar{x}$ i $\bar{y}$, oblicza się współczynnik korelacji r Pearsona [czyt. pirsona]:

$$r = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}}$$

Wartość tego współczynnika dla korelacji dodatnich jest liczbą z przedziału $(0; 1)$.

Poniżej przedstawiono zestawy danych o silnej, słabej i zerowej korelacji.



1 W tabeli zestawiono informacje o wzroście (x , w cm) i masie ciała (y , w kg) 10 osób. Oblicz współczynnik korelacji dla tych danych.

x	167	169	172	174	175	176	177	178	180	184
y	69	67	74	70	70	74	78	76	82	80

5.3. Średnia ważona

Przykład 1

Podczas egzaminu z języka obcego wypowiedź studenta oceniano w dwóch kategoriach: x_1 – ocena za umiejętność komunikacji, x_2 – ocena za poprawność gramatyczną. Ostateczną ocenę z egzaminu ustalano, korzystając ze wzoru:

$$\frac{3x_1 + x_2}{3 + 1}$$

W ten sposób zwiększono znaczenie (wagę) oceny za umiejętność komunikacji w stosunku do oceny za poprawność gramatyczną. W tabeli podano oceny, które otrzymali Agata, Marek i Tomek.

	x_1	x_2	$\frac{3x_1 + x_2}{4}$	Ocena z egzaminu
Agata	5	3	$\frac{3 \cdot 5 + 3}{4} = \frac{18}{4}$	4,5
Marek	6	2	$\frac{3 \cdot 6 + 2}{4} = \frac{20}{4}$	5,0
Tomek	3	5	$\frac{3 \cdot 3 + 5}{4} = \frac{14}{4}$	3,5

W powyższym przykładzie obliczyliśmy średnią ważoną.

Definicja

Średnią ważoną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_k$ z odpowiadającymi im wagami: $n_1, n_2, \dots, n_k$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz średnią ważoną liczb $x_1 = 4$ i $x_2 = 6$ z podanymi wagami.

- a) $n_1 = 3, n_2 = 1$ b) $n_1 = 1, n_2 = 1$ c) $n_1 = 0,5, n_2 = 0,5$

Zauważ, że jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona liczb jest równa ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 2

Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	6	9	12	8
Waga	2	1	3	4

b)

Liczba	7	3	4	5
Waga	0,2	0,3	0,5	0,4

Ćwiczenie 3

Uczestnikom kursu języka angielskiego wystawiono oceny za cztery umiejętności: x_1 – za rozumienie ze słuchu, x_2 – za rozumienie tekstu pisanego, x_3 – za wypowiedzi pisemne, x_4 – za wypowiedzi ustne. Aby wystawić ocenę końcową, postanowiono obliczyć średnią ważoną z następującymi wagami: $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$, $n_4 = 3$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Ocena końcowa
Asia	4	5	3	4	3,8
Basia	6	5	2	4	?
Kasia	2	6	5	4	?

- a) Oblicz końcowe oceny Basi i Kasi.
b) Czy gdyby przyjęto $n_1 = 4$, a pozostałe wagi zostawiono bez zmian, to Basia miałaby wyższą ocenę końcową od ocen swoich koleżanek?

Przykład 2

Oblicz średnią arytmetyczną liczb:

2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9

Sprawdzamy, ile razy wystąpiła każda z liczb 2, 7, 9, a następnie obliczamy średnią arytmetyczną:

Liczba x_i	2	7	9
Liczba wystąpień n_i	12	5	3

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{12 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 9}{20} = \frac{86}{20} = 4,3$$

Zauważ, że średnia arytmetyczna podanego zestawu danych jest średnią ważoną liczb 2, 7, 9 z wagami równymi liczbom wystąpień tych liczb.

Ćwiczenie 4

W pewnej grupie studentów zebrano dane dotyczące wysokości otrzymywanego stypendium i przedstawiono je w tabeli.

x_i – wysokość stypendium [zł]	0	900	1200	1400
n_i – liczba studentów	20	10	15	5

- a) Oblicz średnią wysokość stypendium przypadającą na jednego studenta.
b) Studentom, którzy do tej pory nie otrzymywali stypendium, postanowiono wypłacać je w wysokości 400 zł. Ile obecnie wyniesie średnia wysokość stypendium?

Zadania

1. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	11	12	13
Waga	0,1	0,3	0,6

b)

Liczba	3	5	8	11
Waga	0,8	0,1	0,4	0,3

2. Konkurs składa się z czterech etapów ocenianych w skali od 0 do 10 punktów. W tabeli podano liczby punktów zdobytych przez trzech finalistów. Ostateczny wynik jest średnią ważoną. Który zawodnik wygrał ten konkurs?

Etap	I	II	III	IV
Waga	0,2	0,8	0,4	0,6
Adam	10	5	8	7
Marek	5	8	6	7
Piotr	9	4	10	8

3. Dane są liczby x_1 , x_2 , x_3 i x_4 . Sprawdź, czy w przykładach A i B średnia ważona jest taka sama.

A

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	3	2	5	2

B

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	0,6	0,4	1	0,4

4. Średnia ważona danych liczb jest równa 6,5. Oblicz t .

a)

Liczba	t	4	8
Waga	0,3	0,3	0,9

b)

Liczba	15	9	3
Waga	2	3	t

5. Średnia ważona danych liczb jest równa 5. Oblicz w .

a)

Liczba	3	9	w
Waga	0,7	0,3	0,1

b)

Liczba	10	8	6	2
Waga	w	3	5	8

6. Ocena semestralna z matematyki jest średnią ważoną ocen z wagami podanymi w tabeli. Tomek otrzymał następujące oceny:

- prace domowe: 1, 1, 1,
- kartkówki: 3, 1, 2,
- klasówki: 3, 6, 6.

Dla jakiej wartości n średnia ważona tych ocen jest równa:

- a) 3, b) 4?

Kategoria	Waga
praca domowa	1
kartkówka	2
klasówka	n

Odchylenie standardowe

Przykład 1

Dane są dwa zestawy danych:

$A: 98, 99, 100, 101, 102$ i $B: 80, 90, 100, 110, 120$

Średnie arytmetyczne obu zestawów są równe 100 (sprawdź). Jednak dane zestawu B są bardziej rozproszone niż dane zestawu A .

Jako miarę rozproszenia danych wokół ich średniej przyjmuje się **odchylenie standardowe**.

Definicja

Odchyleniem standardowym liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Odchylenie standardowe danych zestawu A z przykładu 1. jest równe:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \sqrt{\frac{(98-100)^2 + (99-100)^2 + (100-100)^2 + (101-100)^2 + (102-100)^2}{5}} = \\ &= \sqrt{\frac{4+1+0+1+4}{5}} = \sqrt{2} \approx 1,414\end{aligned}$$

Odchylenie standardowe danych zestawu B z przykładu 1. jest równe:

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sqrt{\frac{(80-100)^2 + (90-100)^2 + (100-100)^2 + (110-100)^2 + (120-100)^2}{5}} = \\ &= \sqrt{\frac{400+100+0+100+400}{5}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14,14\end{aligned}$$

Odchylenie standardowe danych zestawu B jest 10 razy większe od odchylenia standardowego danych zestawu A .

Przykład 2

Oblicz odchylenie standardowe danych: 4, 9, 11, 13, 13.

Obliczamy średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe:

$$\bar{x} = \frac{4+9+11+13+13}{5} = 10$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(4-10)^2 + (9-10)^2 + (11-10)^2 + (13-10)^2 + (13-10)^2}{5}} = \sqrt{11,2} \approx 3,35$$



1. Oblicz odchylenie standardowe danych:

a) 4, 5, 6, 7, 8;

b) 3, 6, 6, 6, 9;

c) 8, 12, 13, 13, 14.

Przykład 3

Na diagramach przedstawiono oceny semestralne z muzyki w dwóch dwudziestoosobowych klasach. Średnia ocen w obu klasach jest równa 4. Pokaż, że odchylenie standardowe ocen jest większe w klasie A .

Obliczając odchylenie standardowe w klasie A , wykorzystujemy pogrupowanie danych:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{7 \cdot (2-4)^2 + 3 \cdot (3-4)^2 + 3 \cdot (5-4)^2 + 7 \cdot (6-4)^2}{20}} = \sqrt{\frac{62}{20}} = \sqrt{3,1} \approx 1,76$$

Analogicznie obliczamy odchylenie standardowe w klasie B :

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{3 \cdot (2-4)^2 + 7 \cdot (3-4)^2 + 7 \cdot (5-4)^2 + 3 \cdot (6-4)^2}{20}} = \sqrt{\frac{38}{20}} = \sqrt{1,9} \approx 1,38$$

Zatem $\sigma_A > \sigma_B$.

2. Sprawdź, dla którego zestawu danych, A czy B , odchylenie standardowe jest większe.

$A: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5$

$B: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5$

3. Oblicz odchylenia standardowe zestawów liczb A i B . Sformułuj wniosek.

$A: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$

$B: 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14$

4. W tabeli przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia w dwóch firmach. Oblicz odchylenie standardowe wynagrodzeń w firmie X i w firmie Y .

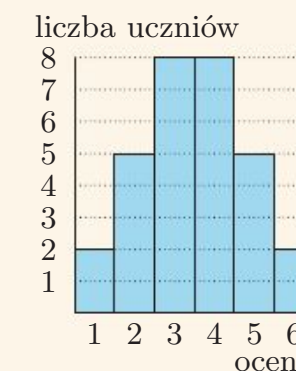
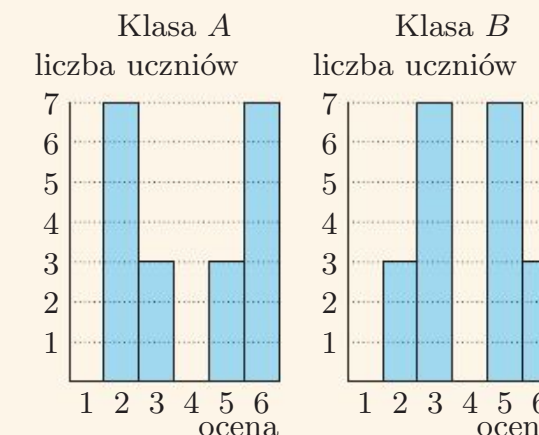
	Firma X			Firma Y		
Liczba pracowników	2	16	2	16	2	2
Wynagrodzenie [zł]	5000	5500	6000	5000	7000	8000

5. Na diagramie przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z fizyki w klasie IIIc.

a) Oblicz odchylenie standardowe tych ocen.

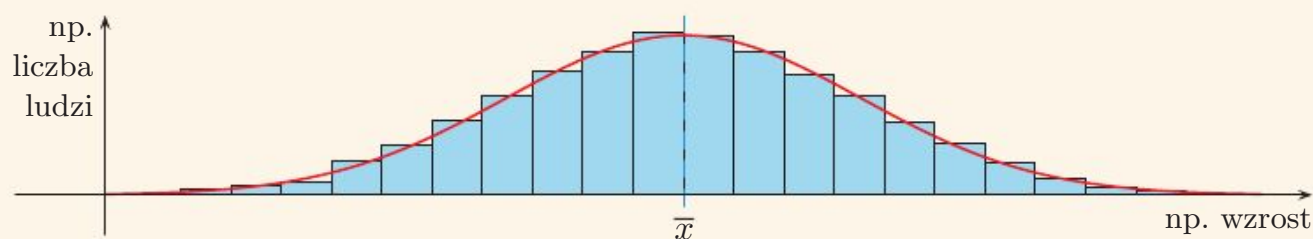
b) Ilu uczniów otrzymało ocenę różniącą się od średniej ocen o mniej niż odchylenie standardowe?

c) Ilu uczniów otrzymało ocenę mieszczącą się w przedziale $(\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma)$?



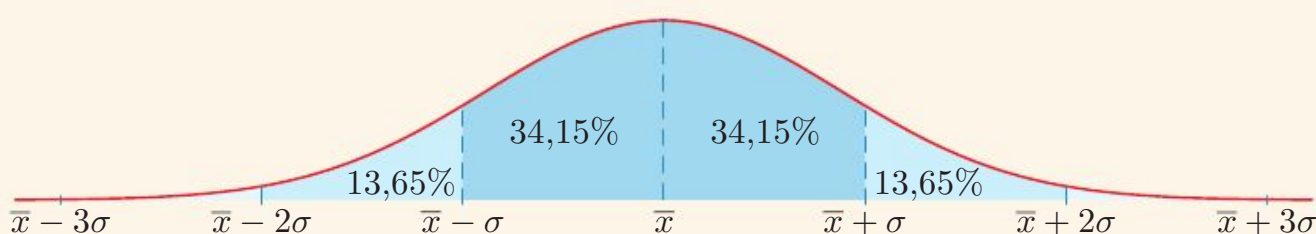
Rozkład normalny

Przy analizie wielu zjawisk dysponujemy dużą liczbą danych. Diagram, za pomocą którego je porządkujemy, często ma taki kształt jak na rysunku poniżej.



Zdarza się to m.in. wówczas, gdy porządkujemy takie dane jak wzrost i waga ludzi czy długość liści określonego drzewa. Taki rozkład danych nosi nazwę **rozkładu normalnego**. Krzywa (zaznaczona na rysunku kolorem czerwonym) jest nazywana **krzywą Gaussa**. Jest ona symetryczna względem prostej pionowej poprowadzonej przez średnią arytmetyczną danych.

Jeśli rozkład danych jest rozkładem normalnym, to około 68,3% danych różni się od średniej o mniej niż odchylenie standardowe σ , a około 95,6% danych różni się od średniej o mniej niż 2σ . **Reguła trzech sigm** mówi, że do przedziału $(\bar{x} - 3\sigma; \bar{x} + 3\sigma)$ należy około 99,7% danych.



- Przyjmijmy, że wyniki testu IQ przeprowadzonego w grupie 500 osób mają rozkład normalny ze średnią $\bar{x} = 100$ i odchyleniem standardowym $\sigma = 15$. Oszacuj, ile osób z tej grupy uzyskało wynik testu:
 - między 85 a 115,
 - wiekszy od 115,
 - wiekszy od 130.
- Zebrano dane dotyczące wzrostu 200 uczniów liceum sportowego. Mają one rozkład normalny o średniej $\bar{x} = 177$ cm i odchyleniu standardowym $\sigma = 6$ cm. Oszacuj, ilu uczniów ma wzrost powyżej 171 cm.
- Żarówki produkowane przez pewną firmę przepalają się średnio po 2000 godzin. Przyjmij, że zebrane dane mają rozkład normalny, a odchylenie standardowe jest równe 300 godzin. Oszacuj, ile żarówek z partii liczącej 20 000 sztuk przepali się przed upływem 1400 godzin, a ile – przed upływem 1100 godzin.
- Sprawdź w dostępnych źródłach, czy wyniki egzaminów maturalnych z matematyki z ostatnich lat mają rozkład normalny.



Powtórzenie

Zestaw I

- Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych liczb.
 - 5, 4, 3, 2, 4, 3, 5, 4
 - 9, 12, 9, 12, 7, 9, 94, 8, 20
 - 8, 8, 1, 3, 4, 6, 1, 6, 8
 - 4, 16, 13, 5, 7, 16, 15, 4
- Studenci matematyki zdawali egzamin w dwóch grupach. W tabeli podano liczby poszczególnych ocen, jakie otrzymali. Oblicz średnią ocen z egzaminu dla każdej grupy.

Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Grupa I	3	6	5	3	3	2
Grupa II	0	3	4	6	4	3

- W klasach IIIa oraz IIIb pewnej szkoły przeprowadzono ankietę. Każdy uczeń odpowiedział na pytanie: „Ile godzin dziennie korzystasz ze smartfona?”. Wyniki ankiety przedstawiono na poniższych diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla każdej klasy oraz dla obu klas razem.



- Średnia wieku w dziewięcioosobowej grupie tanecznej wynosiła 18 lat. Po przyjęciu do grupy trzech nowych osób w tym samym wieku średnia zmniejszyła się o 1. Ile lat ma każda z nowo przyjętych osób?
- Do zestawu liczb: 6, 12, 4, 2, 14, 10, 15, 12, 4, 1 dopisano jeszcze dwie liczby różniące się o 4. Średnia arytmetyczna zestawu nie uległa zmianie. Wyznacz dopisane liczby.

6. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	2	9	6	8
Waga	5	1	2	3

b)

Liczba	5	10	12	20
Waga	0,1	1,1	0,3	0,5

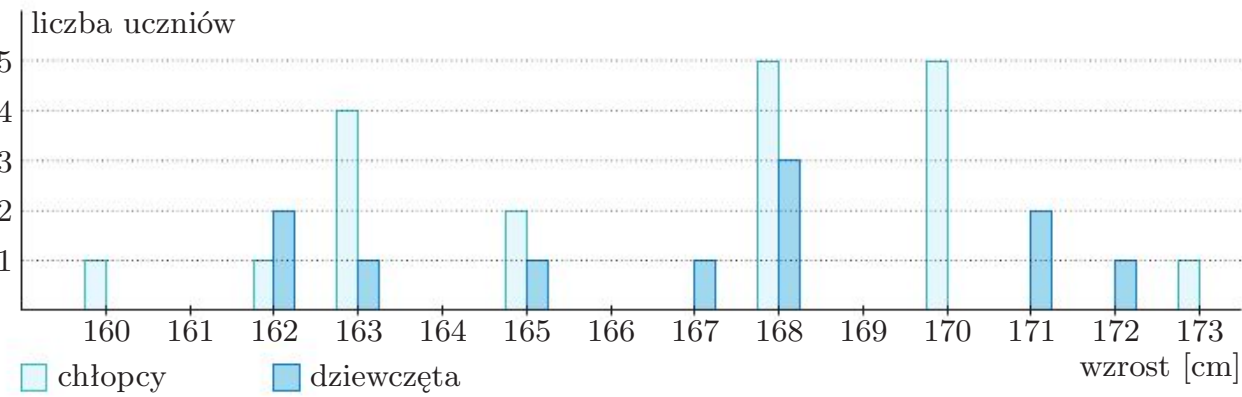
7. Ocena roczna jest średnią ważoną (zaokrągloną do liczby całkowitej) ocen: za pierwszy semestr z wagą 0,4 i za drugi semestr z wagą 0,6. Jakie oceny roczne otrzymali uczniowie, których oceny semestralne podano w tabeli?

Uczeń	A	B	C	D	E
I semestr	5	6	3	2	5
II semestr	6	5	5	5	2

Zestaw II

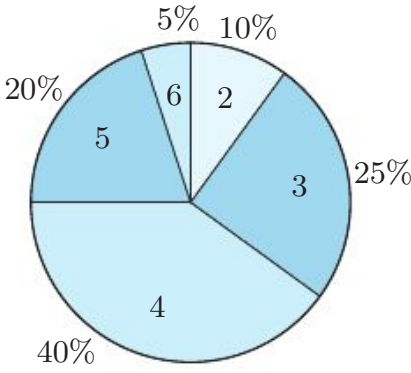
1. Średnia arytmetyczna liczb: a, b, c, d jest równa 8. Które z poniższych zdań są prawdziwe?
- A. Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 0$ jest równa 8.
- B. Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 13$ jest równa 9.
- C. Średnia arytmetyczna liczb: a, a, b, b, c, c, d, d jest równa 16.

2. Na poniższym diagramie przedstawiono dane dotyczące wzrostu dziewcząt i chłopców w pewnej klasie liceum.



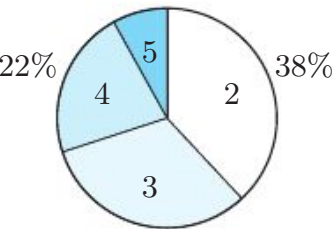
- a) Ile dziewcząt ma wzrost większy niż średni wzrost w grupie dziewcząt?
- b) Ilu chłopców ma wzrost większy niż średni wzrost wszystkich uczniów w klasie?

3. Na diagramie kołowym podano procentowy rozkład ocen semestralnych z matematyki w pewnej szkole. Oblicz średnią ocen z matematyki w tej szkole. Czy jest ona równa medianie ocen?



4. Po usunięciu jednej liczby z zestawu: 4, 2, 4, 1, 5, 1, 6, 1, 5, 2 jego średnia arytmetyczna zmniejszyła się o 0,1. Którą liczbę usunięto?

5. W grupie studentów średnia liczba języków obcych, których się uczyli, jest równa 3. Studentom tym zadano pytanie, ilu języków obcych się uczyli. Na diagramie zestawiono uzyskane wyniki. Ile procent ankietowanych uczyło się 3, a ile – 5 języków?



6. Uczniów klasy IIIa podzielono na grupy według pierwszych liter nazwisk: grupa I – od A do K, grupa II – od L do P, grupa III – od R do Ż. W tabeli przedstawiono średnią ocen semestralnych z języka polskiego w każdej z grup.

	Grupa I	Grupa II	Grupa III
Liczba uczniów	12	8	10
Średnia ocen w grupie	3,5	3,25	4,3

Troje uczniów w grupie I otrzymało na koniec semestru ocenę niedostateczną. O ile byłaby wyższa średnia ocen w tej grupie, a o ile – w całej klasie, gdyby uczniowie ci na koniec semestru otrzymali ocenę dopuszczającą, a oceny reszty uczniów pozostały bez zmian?

7. W pewnej kuracji stosuje się lek X lub lek Y. Lek X podano jednej grupie pacjentów, a lek Y – drugiej. Poniżej przedstawiono dane dotyczące skuteczności każdego z nich (z podziałem na płeć pacjentów). Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Który lek jest skuteczniejszy?

Lek X		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		200	300	500
Lek skuteczny	liczba osób	30	?	?
	procent osób	15%	40%	?

Lek Y		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		400	?	?
Lek skuteczny	liczba osób	80	45	?
	procent osób	?	?	25%



Zadania z kontekstem realistycznym

1. Przeczytaj informację w ramce.

WIBOR 6M to referencyjna roczna stopa procentowa dla pożyczek między bankami udzielanych na 6 miesięcy. Oblicza się ją jako średnią arytmetyczną stóp podanych przez wybrane banki, przy czym jeśli banków jest:

- mniej niż 8, to uwzględnia się wszystkie podane przez nie stopy,
- 8 lub 9, to odrzuca się jedną najmniejszą i jedną największą wartość stóp,
- więcej niż 9, to odrzuca się dwie największe i dwie najmniejsze wartości stóp.

W poniedziałek o godzinie 11:00 banki podały następujące stopy: 2,80%, 3,30%, 3,50%, 4,20%, 3,50%, 2,75%, 3,60%, 3,50%, 4,25%, 3,60%.

a) Oblicz WIBOR 6M.

b) Ile wynosiłaby stopa WIBOR 6M, gdyby nie podano najwyższej z tych stóp, a ile – gdyby nie podano najniższej?

2. Przeczytaj informację w ramce.

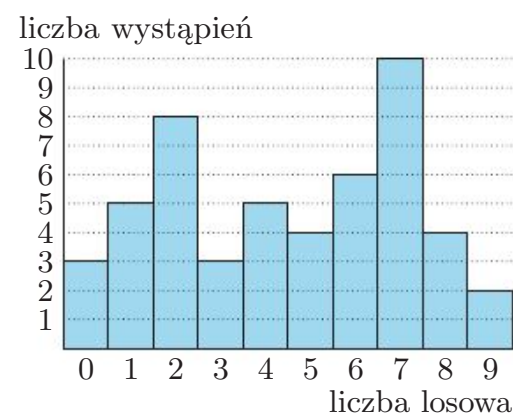
W niektórych zagadnieniach (np. w kryptografii i informatyce) wykorzystuje się liczby losowe. Liczby te można wygenerować za pomocą programu komputerowego lub można skorzystać z odpowiednich tablic. Poniżej podano cztery wiersze tablicy liczb losowych, w której występują liczby naturalne od 0 do 9 odpowiednio pogrupowane.

1.	46016	24742	21311	88342	67778	20741	26755	55382	96777	06729
2.	89311	86439	32128	17700	90725	01936	23678	54622	27342	96439
3.	09006	57476	64080	47646	68020	32924	68500	81779	17120	57784
4.	84642	87958	96983	80086	19451	53725	82606	54516	62617	67000

Wykonano diagram dla liczb z pierwszego wiersza powyższej tablicy liczb losowych.

a) Oblicz ich średnią arytmetyczną oraz medianę.

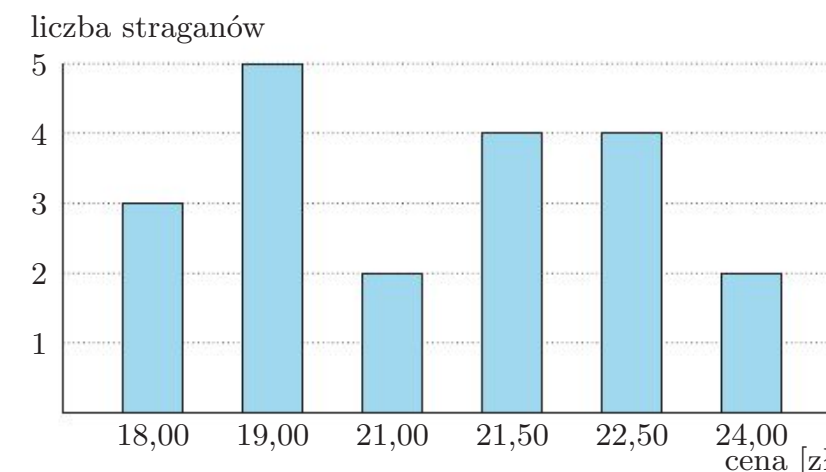
b) Wykonaj analogiczny diagram dla liczb z drugiego wiersza tablicy. Wyznacz ich średnią arytmetyczną, medianę i dominantę.



Sposób na zadanie

Przykład

Podczas targu na dwudziestu straganach sprzedawano truskawki. Na diagramie poniżej przedstawiono cenę w złotych za 1 kg truskawek.



Uzupełnij zdania tak, aby były prawdziwe.

1. Dominanta ceny kilograma truskawek na tych straganach jest równa .
2. Mediana ceny kilograma truskawek na tych straganach jest równa .
3. Liczba straganów, na których sprzedawano truskawki w cenie niższej niż średnia arytmetyczna cen na wszystkich straganach, jest równa .

1. Najczęściej występująca cena to 19 zł, zatem dominanta cen truskawek w złotych jest równa 19.
2. Ceny na straganach stanowią uporządkowany niemalejąco ciąg dwudziestu liczb:

18,00, 18,00, 18,00, 19,00, 19,00, 19,00, 19,00, 19,00, 21,00, 21,00,
21,50, 21,50, 21,50, 21,50, 22,50, 22,50, 22,50, 22,50, 24,00, 24,00

Dziesiąta z tych liczb to 21, a jedenasta to 21,5. Zatem mediana jest równa:

$$\frac{21 + 21,5}{2} = 21,25 \text{ [zł]}$$

3. Obliczamy średnią cenę kilograma truskawek:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 18 + 5 \cdot 19 + 2 \cdot 21 + 4 \cdot 21,5 + 4 \cdot 22,5 + 2 \cdot 24}{20} = 20,75 \text{ [zł]}$$

Cena niższa od średniej była na ośmiu straganach.

Odpowiedź: Kolejno uzupełniamy: 19 zł, 21,25 zł, 8.

→ **Zadanie 14, str. 313**



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

W pewnej firmie jest zatrudnionych 10 osób. Ich miesięczne wynagrodzenia wynoszą: 5900 zł, 6100 zł, 6100 zł, 6240 zł, 6290 zł, 6300 zł, 6320 zł, 6750 zł, 8800 zł, 11000 zł. Ilu pracowników tej firmy ma wynagrodzenie wyższe od wynagrodzenia średniego?

- A. 6 B. 4 C. 3 D. 2

Zadanie 2 (0–1)

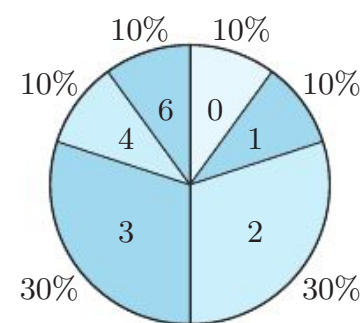
W klasie Małgosi średni wzrost dziewcząt wynosi 164 cm, chłopców – 178 cm, a wszystkich uczniów – 172 cm. Stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy

- A. 2 : 3 B. 3 : 4 C. 1 : 1 D. 4 : 3

Zadanie 3 (0–1)

Grupie 50 losowo wybranych osób w pewnym mieście zadano pytanie: „Ile godzin w tygodniu poświęcasz na uprawianie sportu?”. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. O ile mediana otrzymanych danych jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej?

- A. 0,1 B. 0,2 C. 0,3 D. 0,4



Zadanie 4 (0–1)

Liczby a, b, c, d ustawiono w kolejności rosnącej. Mediana tych liczb jest równa 7 oraz $bc = 24$. Wynika z tego, że

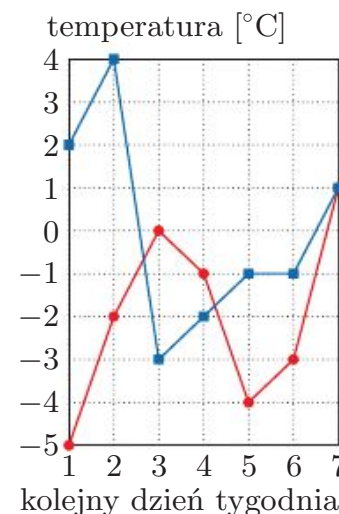
- A. $(b - c)^2 = 0$ C. $(b - c)^2 = 100$
B. $(b - c)^2 = 25$ D. $(b - c)^2 = 144$

Zadanie 5 (0–1)

Rafał przez dwa tygodnie ferii, codziennie o godzinie 12, mierzył temperaturę powietrza. Wyniki pomiarów przedstawił na wykresie (kolorem niebieskim zaznaczył wyniki z pierwszego tygodnia, a kolorem czerwonym – z drugiego).

Niech $\bar{x}_1$ oznacza średnią temperaturę w pierwszym tygodniu, $\bar{x}_2$ – w drugim, a $\bar{x}_3$ – w obu tygodniach. Wówczas

- A. $\bar{x}_2 < \bar{x}_1 < \bar{x}_3$ C. $\bar{x}_1 < \bar{x}_3 < \bar{x}_2$
B. $\bar{x}_3 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2$ D. $\bar{x}_2 < \bar{x}_3 < \bar{x}_1$



Zadanie 6 (0–1)

Średnia arytmetyczna zestawu liczb: 9, 7, 4, x , 9, $x + 4$, 5, 7, 8, 9 wynosi 8. Mediana tego zestawu jest równa

- A. 8 B. 8,5 C. 9 D. 11

Zadanie 7 (0–1)

W klasie Michała jest dwa razy więcej dziewcząt niż chłopców. Średnia ocen z matematyki w pierwszym semestrze w grupie dziewcząt wyniosła 4, a w grupie chłopców wyniosła 3,7. W drugim semestrze średnia dziewcząt spadła o 0,2. Średnia całej klasy w pierwszym i drugim semestrze była taka sama. O ile wzrosła średnia chłopców w drugim semestrze?

- A. o 0,1 B. o 0,2 C. o 0,4 D. o 0,6

Zadanie 8 (0–1)

W tabeli podano liczby z dwoma zestawami wag. Niech $\bar{x}_1$ oznacza średnią tych liczb z wagami X , a $\bar{x}_2$ – ich średnią z wagami Y . Wówczas $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$ jest równe

Liczba	10	15	20
Waga X	0,5	0,4	0,1
Waga Y	0,3	1,2	1,5

- A. 6 B. 4 C. 2 D. 0

Zadanie 9 (0–1)

W pięciu konkurencjach teleturnieju Rafał zdobył następujące liczby punktów: 5, 8, 6, 3, n ($n \in \mathbb{N}$). Warunkiem przejścia do następnego etapu jest uzyskanie średniej ważonej równej co najmniej 7 przy wagach wynoszących odpowiednio: 10, 30, 20, 40, 50. Ile co najmniej punktów musi zdobyć Rafał w piątej konkurencji, aby przejść do następnego etapu?

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

Zadanie 10 (0–3)

Uczniom klasy IIIa zadano pytanie: „Ile godzin dziennie poświęcasz na sen?”. Wyniki ankiety przedstawiono w tabeli.

Liczba godzin snu	6	7	8	9	10
Liczba dziewcząt	1	2	6	2	1
Liczba chłopców	1	1	4	5	1

Uzupełnij zdania tak, aby były prawdziwe.

Dominanta przedstawionych danych dla dziewcząt jest równa ?.

Mediana przedstawionych danych dla chłopców jest równa ?.

Średnia arytmetyczna przedstawionych danych dla całej klasy jest równa ?.

**Zadanie 11 (0–2)**

Uczniowie pisali test z języka angielskiego. Maksymalnie można było zdobyć 60 punktów. Wyniki testu przedstawiono w tabeli.

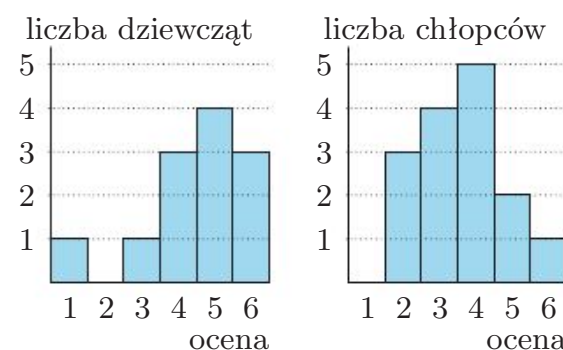
Liczba punktów	10	20	30	45	50	55	60
Liczba uczniów	3	1	3	5	4	1	3

- a) Oblicz średnią liczbę punktów uzyskanych przez uczniów.
b) Ile procent uczniów uzyskało liczbę punktów większą od średniej?

Zadanie 12 (0–1)

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z fizyki w klasie IIIb (z podziałem na dziewczęta i chłopców).

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Średnia ocen dziewcząt jest większa od średniej ocen chłopców o 0,8.	P	F
Średnia ocen w całej klasie jest równa 3,5.	P	F

Zadanie 13 (0–1)

W tabeli przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia w dwóch oddziałach pewnej firmy.

	Oddział A				Oddział B		
Liczba pracowników	10	8	5	4	10	6	3
Wynagrodzenie [zł]	5300	6300	6800	7000	6500	7000	8500

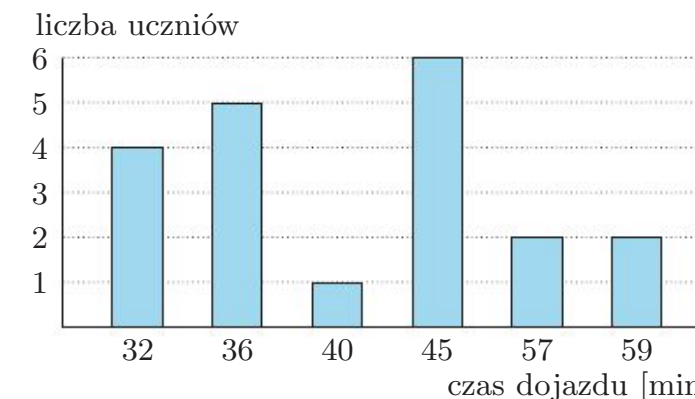
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli każdy pracownik oddziału A dostanie podwyżkę 200 zł, a każdy pracownik oddziału B – podwyżkę 500 zł, to

dominanta zarobków w całej firmie wyniesie 7000 zł.	P	F
mediana zarobków w całej firmie wyniesie 7000 zł.	P	F

**Zadanie 14 (0–2) → Przykład, str. 309**

Dwadzieścioro uczniów poproszono o zmierzenie czasu dojazdu do szkoły z dokładnością do minuty. Otrzymane dane przedstawiono na diagramie.



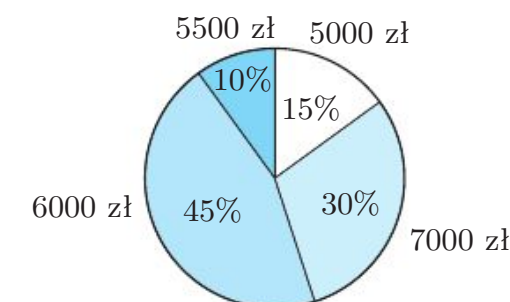
Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj jego dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Początek zdania	Dokończenie zdania
14.1	Średnia arytmetyczna czasu dojazdu jest równa	?
14.2	Mediana czasu dojazdu jest równa	?

A. 39,5 min B. 40 min C. 42,5 min D. 45 min E. 47,5 min

Zadanie 15 (0–2)

Firma ma cztery oddziały. Na diagramie pokazano, jaki procent osób pracuje w poszczególnych oddziałach i jakie są w nich średnie zarobki. Oblicz średnią zarobków w tej firmie.

**Zadanie 16 (0–3)**

Wynik egzaminu jest średnią ważoną liczby punktów uzyskanych z testów: z matematyki z wagą 0,5, z geografii z wagą 0,2 oraz z fizyki z wagą 0,3. Kandydat X zdał egzamin lepiej od kandydata Y, ale gorzej od kandydata Z. Ile może być równe x ($x \in \mathbb{N}$)?

Kandydat	X	Y	Z
Matematyka	x	40	60
Geografia	40	50	40
Fizyka	60	60	50

Zadanie 17 (0–4)

Uczniowie pisali sprawdzian w trzech grupach: A, B i C liczących odpowiednio: 8, 10 i 6 osób. Średnia ocen całej klasy była równa 3,5, średnia ocen w grupach A i B łącznie wyniosła 4, a w grupach B i C łącznie wyniosła 3. Oblicz średnią ocen dla każdej z grup.

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

1. a), b) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$,
 $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$
 c) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$,
 $\sin \beta = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$
 d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$,
 $\sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = 2$
2. a) 6, 8 b) 7, 24
3. a) $Ob = 25$, $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$
 b) $Ob = 2(4 + \sqrt{10})$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

1.1. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

- Ć 1. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$
 b) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$
 c) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$
2. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
 b) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
 c), d) $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = 3$
3. a) $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$
 b) $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\operatorname{tg} 225^\circ = 1$
 c) $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$,
 $\operatorname{tg} 300^\circ = -\sqrt{3}$
- Z 1. a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$
 b) $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$
 c) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 d) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. a) $\alpha_0 = 0^\circ$, $\alpha_1 = 45^\circ$,
 $\alpha_2 = 90^\circ$, $\alpha_3 = 135^\circ$,
 $\alpha_4 = 180^\circ$, $\alpha_5 = 225^\circ$,
 $\alpha_6 = 270^\circ$, $\alpha_7 = 315^\circ$
4. a) 1 b) -2 c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
5. a) $P_4\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
 $P_6(-1, 0)$, $P_7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,
 $P_8\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_9(0, -1)$,
 $P_{10}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
6. a) $\frac{3}{2}$ b) -3 c) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
7. a) II b) IV c), d) III
8. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
 b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
 c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
 d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
9. a) $2(\sqrt{2}-1)$
 b) $\alpha = |\angle POA|$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$,
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}-1$,
 $\beta = |\angle POC|$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$,
 $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{2}-1$

1.2. Kąt obrotu

- Ć 1. 390° , 750° , 1470° , -330° , -690° , -1050°
2. a) -280° , 440° , 800°
 b) -160° , 200° , 920°
 c) -410° , 310° , 670°
 d) -680° , 40° , 400°
3. a) $2 \cdot 360^\circ + 130^\circ$
 b) $3 \cdot 360^\circ + 333^\circ$
 c) $-2 \cdot 360^\circ + 25^\circ$
 d) $-10 \cdot 360^\circ + 10^\circ$
 e) $3 \cdot 360^\circ + 359^\circ 30'$
 f) $-3 \cdot 360^\circ + 35'$
 g) $-2 \cdot 360^\circ + 9^\circ 45'$
 h) $1 \cdot 360^\circ + 270^\circ 20'$
4. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1
 e) $\sqrt{3}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

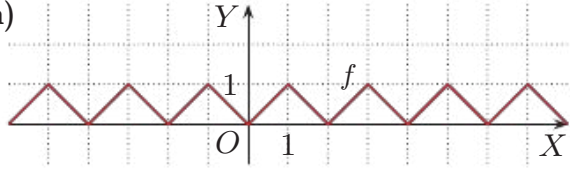
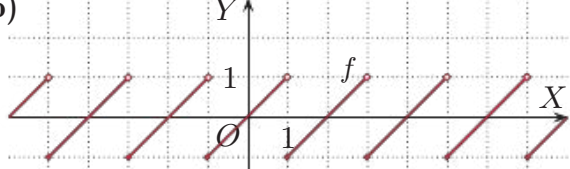
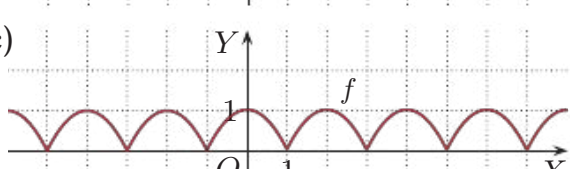
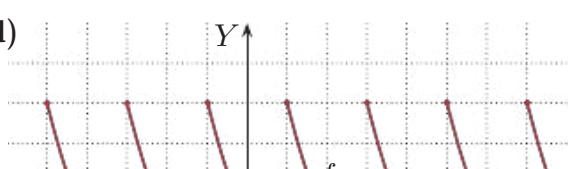
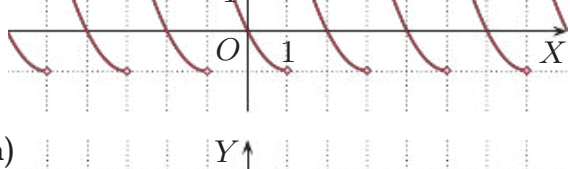
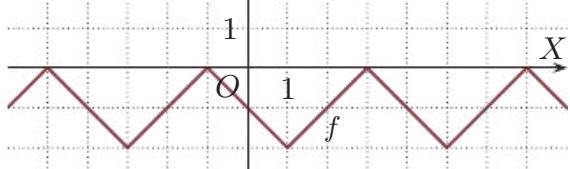
- Z 2. $315^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
3. a) 225° b) 585°
 c) 1305° d) -855°
4. a) 60° b) 1140° c) -300°
5. a), b), c), d), e) tak
 f) nie
6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sqrt{3}$
 e) $\frac{1}{2}$ f) $\sqrt{3}$ g) 1 h) -1
 i) 0 j) 1 k) -1 l) 0
 m) -1 n) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ o) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ p) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
7. a) 390° b) 1110° c) 780°
 d) 495° e) 870° f) -300°
8. a) $\alpha = k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$
 b) $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$
 c) $\alpha = k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$
9. a) 945° b) 720°
10. tak
11. a) 20π cm $\approx 62,8$ cm
 b) $\frac{250\pi}{3}$ cm $\approx 261,8$ cm
 c) 480π cm ≈ 15 m 8 cm
 d) 175200π cm $\approx 5,504$ km lub
 175680π cm $\approx 5,519$ km (w roku przestępnym)
12. 2,25 cm

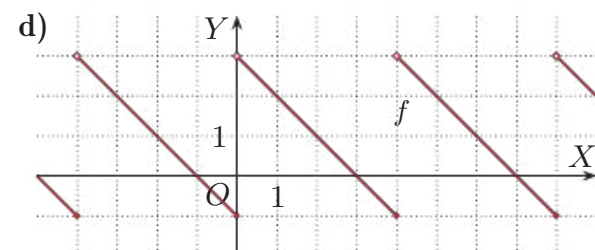
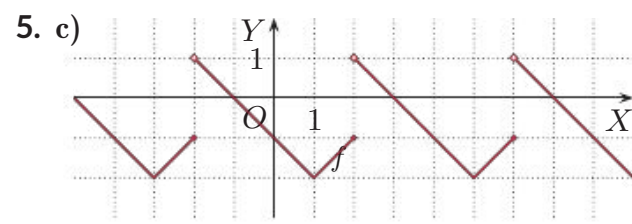
1.3. Miara łukowa kąta

- Ć 1. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{5}$ d) $\frac{3}{2}\pi$
2. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{2}{5}\pi$ d) $\frac{13}{3}\pi$ e) $\frac{\pi}{16}$
3. a) 15° b) 150° c) 144°
 d) 342° e) 336°
- 4.
- | | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| α | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| $\sin \alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$
 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 0 f) 0
 g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Z 3. a) $\frac{1}{9}\pi$ b) $\frac{7}{4}\pi$ c) $\frac{17}{4}\pi$
 d) $-\frac{7}{3}\pi$ e) $-\frac{55}{9}\pi$

4. a) 135° b) 105° c) 320°
 d) -405° e) -780°
5. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

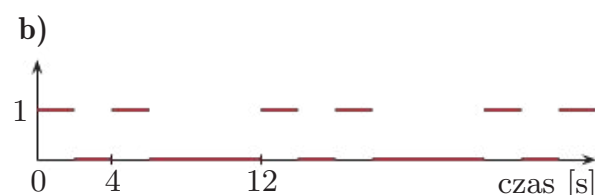
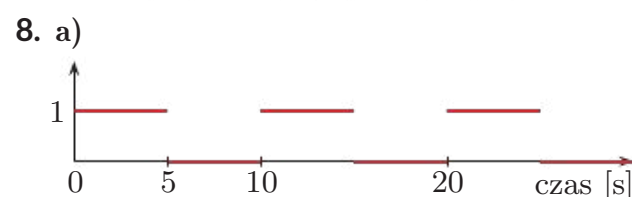
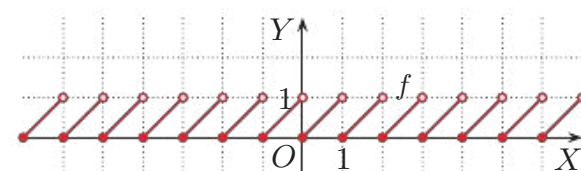
1.4. Funkcje okresowe

- Ć 1. $T = 2$, $f(100) = 2$, $f(100\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
2. a) $T = 2$, $f(-11) = 0$, $f(80\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,
 $f(103) = 0$
 b) $T = 4$, $f(-11) = 1$, $f(80\frac{1}{2}) = 1$,
 $f(103) = -1$
- Z 1. a) $f(33) = 1$, $f(42) = 3$, $f(-48) = -1$
 b) $f(33) = 3$, $f(42) = 1$, $f(-48) = 1$
4. a) 
- b) 
- c) 
- d) 
5. a) 
- b) 



6. a) 100 b) 20200

7. $T = 1$



1.5. Wykresy funkcji sinus i cosinus

Ć 1. a) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. a) $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$
 b) $x = \frac{4\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$
 c) $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$
 d) $x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$

4. a) $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5. osie symetrii: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
 środki symetrii: $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$

6. a) $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$
 b) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$
 c) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$
 d) $-\frac{11\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$

Z 1. a) 3 b), c) 5 d) 10

2. a) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
 b) $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
 c) $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$
 d) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

3. a) $(-2\pi; -\pi), (0; \pi)$
 b) $[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}], [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$
 c) $[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}], [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

4. a) $[-\pi; -\frac{\pi}{2}], (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}), (\frac{5\pi}{2}; 3\pi]$
 b) $[-\pi; 0], [\pi; 2\pi]$ c) $[0; \pi], [2\pi; 3\pi]$

5. a) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 2 dla $m \in \{-1, 1\}$,
 4 dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$,
 5 dla $m = 0$
 b) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 2 dla $m \in \{-1, 1\}$,
 3 dla $m = 0$,
 4 dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
 c) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 2 dla $m = -1$,
 3 dla $m = 1$,
 4 dla $m \in (-1; 1)$
 d) 0 dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 1 dla $m = -1$,
 2 dla $m = 1$,
 4 dla $m \in (-1; 1)$

6. a) 15π b) 0

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste

1. a), b), f), g), i) nieparzysta
 c), d), e), h), k) parzysta
 j), l) ani parzysta, ani nieparzysta

1.6. Wykres funkcji tangens

Ć 2. $(\frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$

3. a) -3 b) $\frac{2}{3}$ c) $-\frac{5}{8}$

4. a) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Z 1. nie jest monotoniczna

2. a) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}; \pi$
 b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{4}$
 c) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{7\pi}{4}$
 d) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{11\pi}{6}$

3. a) $x = \frac{7\pi}{3}$ b) $x = -\frac{8\pi}{3}$ c) $x = \frac{19\pi}{4}$

4. a) 10π b) 7π c) $\frac{28\pi}{3}$
 d) 9π e) $\frac{22\pi}{3}$ f) $\frac{26\pi}{3}$

5. a) $x \approx \frac{21}{10}\pi$
 b) $x \approx \frac{27}{10}\pi$

6. a) $x = -\frac{11}{12}\pi, x = \frac{\pi}{12}, x = \frac{13}{12}\pi$
 b) $x = -\frac{7}{8}\pi, x = \frac{\pi}{8}, x = \frac{9}{8}\pi$

7. a) $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Wykres funkcji cotangens

1. a) $-\sqrt{3}$ b) -1 c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. a) $x \in \{-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi\}$
 b) $x \in \{-\frac{11}{6}\pi, -\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi\}$
 c) $x \in \{-\frac{5}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi\}$

1.7. Przekształcenia wykresu funkcji

Ć 1. a) $[-2; 0]$ b) $[1; 3]$ c) $[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

2. a) $T = 2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $T = 2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $T = 2\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3. a), c) $f(D) = [-2; 0], T = 2\pi$
 b), d) $f(D) = [1; 3], T = 2\pi$

4. $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\pi + k\pi: k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

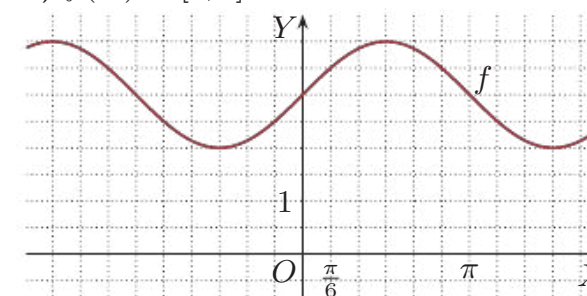
6. a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

7. Wykres funkcji h : przesunąć wykres funkcji g o wektor $[-\frac{\pi}{4}, 0]$.
 Wykres funkcji f : odbić wykres funkcji h symetrycznie względem osi OX .

8. a) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

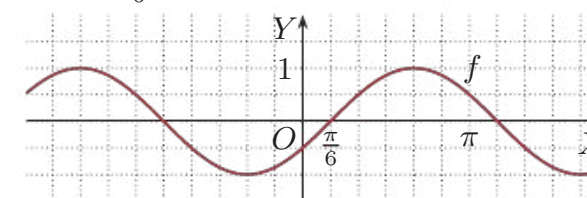
9. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{6} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\},$
 $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Z 1. a) $f(D) = [2; 4]$

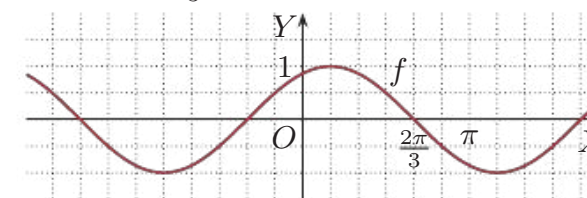


b) $f(D) = [1; 3]$ c) $f(D) = [-3; -1]$

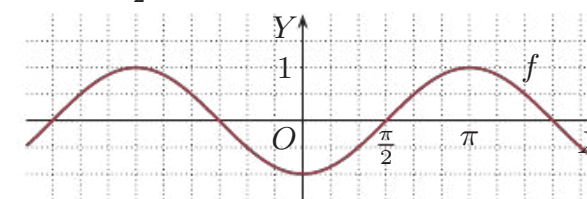
2. a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



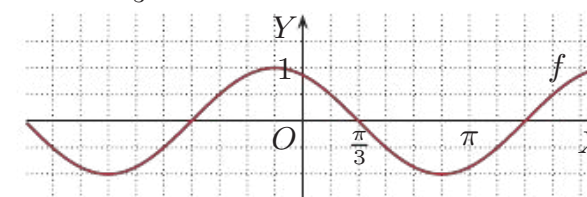
b), c) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



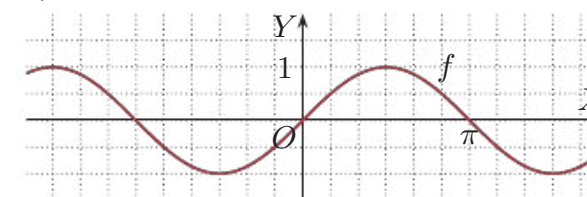
d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



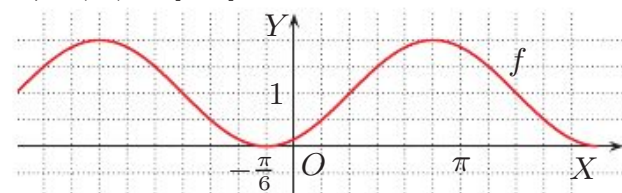
e) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



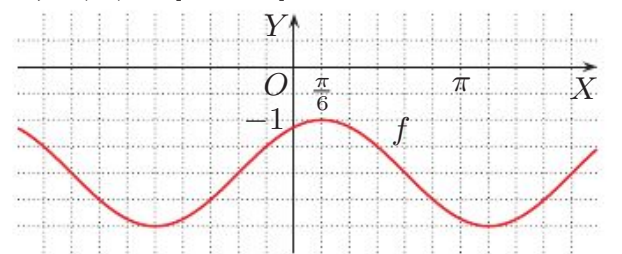
f) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$



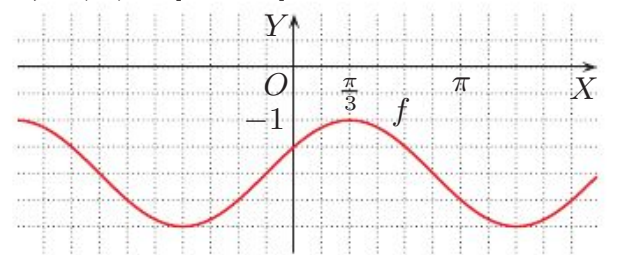
4. a) $f(D) = [0; 2]$



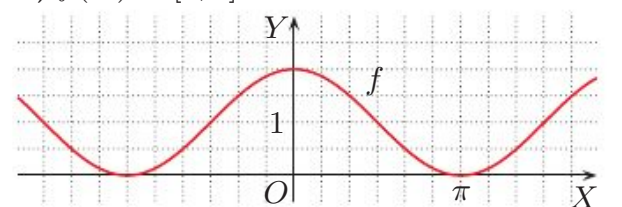
b) $f(D) = [-3; -1]$



c) $f(D) = [-3; -1]$



d) $f(D) = [0; 2]$



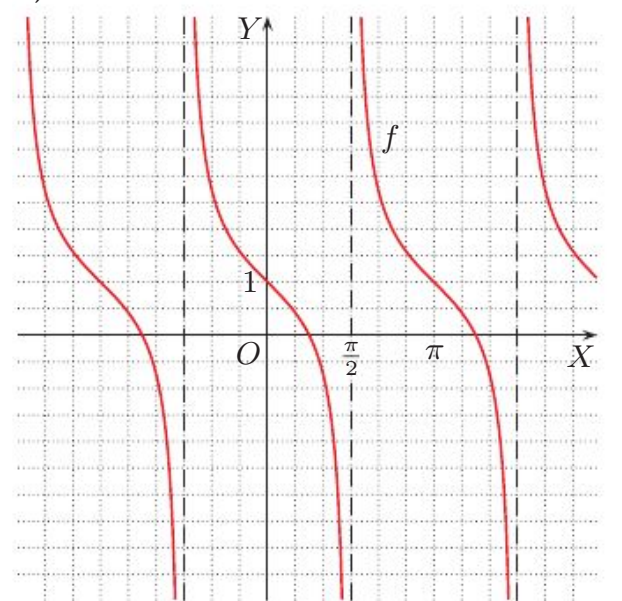
5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{6}\pi + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

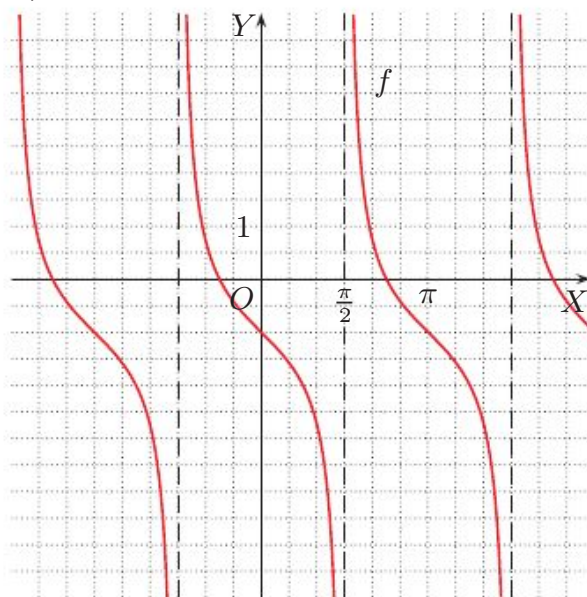
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

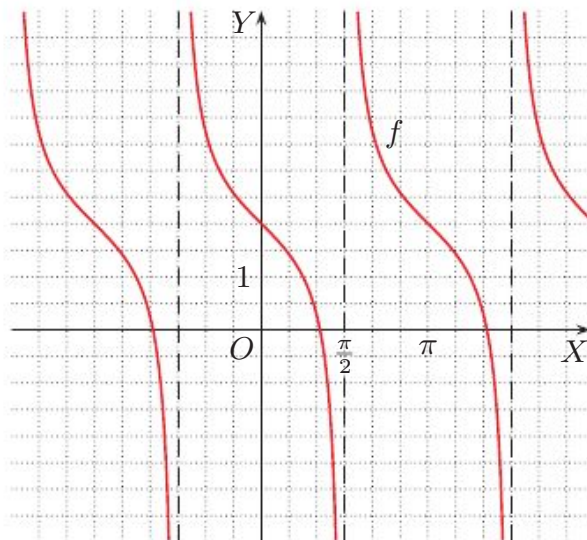
6. a)



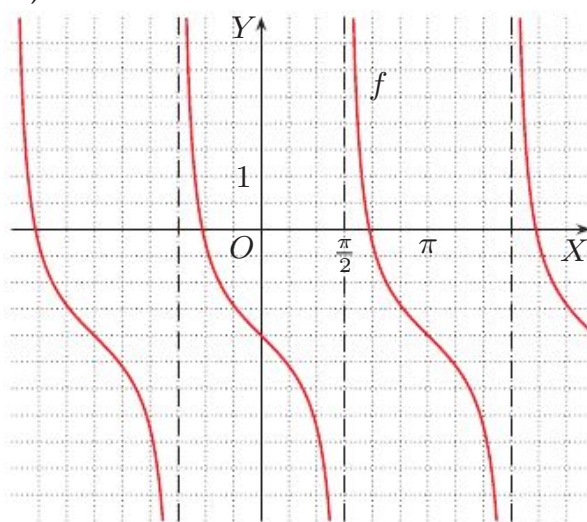
b)



c)



d)



7. a), d) $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b), c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

8. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9. a) $x = -\frac{3}{2}\pi, x = -\frac{5}{6}\pi, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{7}{6}\pi$

b) $x = -\frac{3}{4}\pi, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{5}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi$

c) $x = -\frac{11}{6}\pi, x = -\frac{3}{2}\pi, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}$

d) $x = -\frac{4}{3}\pi, x = -\pi, x = \frac{2}{3}\pi, x = \pi$

10. a) $[3; 5]$ b) $[-4; -2]$

c) $[-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}]$ d) $[-1; 1]$

e) $[2; 4]$ f) $[-2; 0]$

g) $[1; 2]$ h) $[0; 1]$ i) $[2; 3]$

Inne przekształcenia wykresów funkcji sinus i cosinus

1. czerwony: $g, g(D_g) = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$,

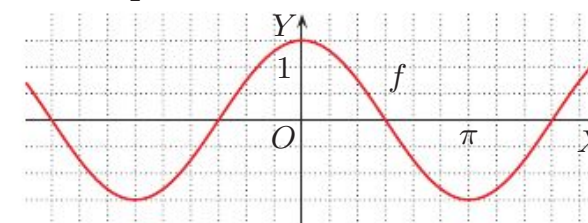
zielony: $f, f(D_f) = [-1; 1]$,

niebieski: $h, h(D_h) = [-2; 2]$

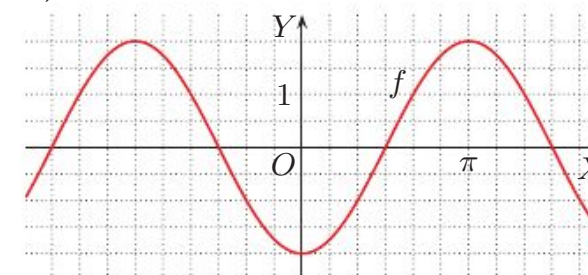
2. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = -2$,

amplitudy - $f_1: 3, f_2: \frac{3}{2}, f_3: 2$

3. a) $a = \frac{3}{2}$



b) $a = -2$



4. niebieski: f , czerwony: g , zielony: h

1.8. Tożsamości trygonometryczne

6. a) $\cos x = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$

b) $\sin x = -\frac{5}{13}, \operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos x = \frac{\sqrt{23}}{5}, \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{46}}{23}$

8. a) $\sin x = -\frac{5}{13}, \cos x = -\frac{12}{13}$

b) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

d) $\sin x = -\frac{4\sqrt{17}}{17}, \cos x = \frac{\sqrt{17}}{17}$

4. a) $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{tg} x = -\sqrt{15}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{tg} x = \sqrt{15}$

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $\cos x = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$

5. a) $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

lub $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos x = \frac{5}{13}, \operatorname{tg} x = -\frac{12}{5}$

lub $\cos x = -\frac{5}{13}, \operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

lub $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$

lub $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$

e) $\cos x = \frac{24}{25}, \operatorname{tg} x = \frac{7}{24}$

lub $\cos x = -\frac{24}{25}, \operatorname{tg} x = -\frac{7}{24}$

f) $\sin x = \frac{24}{25}, \operatorname{tg} x = -\frac{24}{7}$

lub $\sin x = -\frac{24}{25}, \operatorname{tg} x = \frac{24}{7}$

g) $\cos x = \frac{1}{4}, \operatorname{tg} x = -\sqrt{15}$

lub $\cos x = -\frac{1}{4}, \operatorname{tg} x = \sqrt{15}$

h) $\sin x = \frac{2}{5}, \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

lub $\sin x = -\frac{2}{5}, \operatorname{tg} x = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$

6. a) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos x = \frac{2}{3}$

d) $\sin x = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos x = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$

7. a) $\sin x = \frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5}$

lub $\sin x = -\frac{3}{5}, \cos x = -\frac{4}{5}$

b) $\sin x = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \cos x = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

lub $\sin x = -\frac{4\sqrt{17}}{17}, \cos x = \frac{\sqrt{17}}{17}$

c) $\sin x = -\frac{12}{13}, \cos x = \frac{5}{13}$

lub $\sin x = \frac{12}{13}, \cos x = -\frac{5}{13}$

d) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

lub $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8. $\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 7$,

$\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} = 18$

Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin \alpha$	0,156	0,309	0,434	0,707
$\cos \alpha$	0,988	0,951	0,901	0,707

1.9. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

- Ć 1. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ b), c) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
2. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) -1 d) 0
5. a) $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$
b) $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$
6. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{50+20\sqrt{5}}}{10}$,
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{50-20\sqrt{5}}}{10}$
8. a) $2 - \sqrt{3}$ b) $2 + \sqrt{3}$
c) $-2 - \sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$
- Z 1. a) $\sin(30^\circ + \beta) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$,
 $\sin(60^\circ - \beta) = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$
b) $\sin(30^\circ + \beta) = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$,
 $\sin(60^\circ - \beta) = -\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$
c) $\sin(30^\circ + \beta) = \frac{5-12\sqrt{3}}{26}$,
 $\sin(60^\circ - \beta) = \frac{5\sqrt{3}+12}{26}$
d) $\sin(30^\circ + \beta) = -\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$,
 $\sin(60^\circ - \beta) = \frac{7-24\sqrt{3}}{50}$
2. a) $\cos(45^\circ + \beta) = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$,
 $\cos(60^\circ - \beta) = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$
b) $\cos(45^\circ + \beta) = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$,
 $\cos(60^\circ - \beta) = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$
3. a) $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{44}{125}$,
 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{117}{125}$
b) $\sin(\alpha - \beta) = \frac{12+3\sqrt{7}}{20}$,
 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{4\sqrt{7}-9}{20}$
c) $\sin(\alpha - \beta) = 0$,
 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{7}{9}$
d) $\sin(\alpha + \beta) = \frac{4\sqrt{21}-6}{25}$,
 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{8-3\sqrt{21}}{25}$
6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$
7. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$
b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$
d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$

8. b) $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
9. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
10. a) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
b), c), d) $[-2; 2]$
11. a) $\frac{4}{3}$ b) 1 c) -1 d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
12. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{5}$

1.10. Wzory redukcyjne

- Ć 3. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 1
4. a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) 1
g) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ h) $-\frac{1}{2}$ i) $-\sqrt{3}$
- Z 2. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3}$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{1}{2}$
i) $-\frac{1}{2}$ j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ k) -1 l) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
3. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
i) -1 j) $-\frac{1}{2}$ k), l) $\sqrt{3}$
4. a) $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ b) $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$
c) $-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ d) $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
e) $-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ f) $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
5. a) $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ c) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
6. a) $\sqrt{3} + 2$ b) $\frac{3}{4}$ c) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ d) -2
e) -1 f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ g) 1 h) 1 i) -6
7. a) 1 b) $-3\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 0 e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}$
9. około: a) $0,7986$ b) $0,6561$ c) $1,5399$
d) $-0,7547$ e) $-0,7660$ f) $1,3764$

1.11. Równania trygonometryczne (1)

- Ć 1. a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
g) $x = \frac{2}{3} + 8k$, $x = \frac{10}{3} + 8k$, $k \in \mathbb{Z}$
h) $x = \frac{1}{3} + 2k$, $x = \frac{2}{3} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$
i) $x = \frac{3}{8} + k$, $x = \frac{5}{8} + k$, $k \in \mathbb{Z}$

2. a) 55π b), c) 25π

3. a) 12 b) 16 c) 8 d), e), f) 9

4. a) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{1}{6} + k$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
f) $x = \frac{5}{18}\pi + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

5. a) 2π b) 4π c) $\frac{\pi}{2}$

- Z 1. a) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \pi + 4k\pi$, $x = 2\pi + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$, $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2. a) $x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$
e) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

3. a) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

4. a) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$,
 $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = -\frac{1}{6} + k$,
 $x = \frac{1}{6} + k$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$,
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

5. a) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$,
 $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

6. a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

- b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

- c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

7. a) $-\pi$, 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, π , 2π
b) $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$
c) $-\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
d) $-\pi$, $-\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\pi}{3}$, 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, π , $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, 2π
e) $-\pi$, $-\frac{\pi}{6}$, 0 , $\frac{5}{6}\pi$, π , $\frac{11}{6}\pi$, 2π
f) $-\pi$, $-\frac{11}{12}\pi$, $-\frac{7}{12}\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5}{12}\pi$, $-\frac{\pi}{12}$, 0 ,
 $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{11}{12}\pi$, π , $\frac{13}{12}\pi$, $\frac{17}{12}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$,
 $\frac{19}{12}\pi$, $\frac{23}{12}\pi$, 2π

8. a) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$,
 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Suma i różnica sinusów, suma i różnica cosinusów

1. a) $x = k\pi$, $x = \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = -\frac{5}{12}\pi + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$,
 $x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

2. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c), d) $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

1.12. Równania trygonometryczne (2)

- Ć 1. a) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,
 $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
b), d) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,
 $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
2. a) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
b), c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$,
 $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,
 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$,
 $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$,
 $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

4. a) $0, \pi, 2\pi$
 b) $\frac{\pi}{24}, \frac{11}{24}\pi, \frac{13}{24}\pi, \frac{23}{24}\pi, \frac{25}{24}\pi, \frac{35}{24}\pi, \frac{37}{24}\pi, \frac{47}{24}\pi$
 c) $\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$
 d) $\frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi$

- [Z]** 1. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 e) $x = (2k+1)\pi, x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 f) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 e) $x = k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 f) $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, x = \frac{3}{8}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 e) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. a) $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$ b) $\frac{\pi}{2}, \pi$ c) $\frac{\pi}{6}$
 d) $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$
 e) $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$
 f) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$

5. a) $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $x = k\pi, x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6. a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $-\frac{2}{3}\pi$
 c) $-\frac{3}{4}\pi$ d) $-\frac{3}{8}\pi$

7. a) $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = \frac{2}{7}k\pi, x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$
 d) $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}k\pi, x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
 e) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 f) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych

1. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi}{2}$
 2. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{3}{4}\pi$ c) π
 3. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{3}$

Zestaw I

1. a) $\frac{2}{9}\pi$ b) $\frac{3}{5}\pi$ c) $\frac{11}{18}\pi$ d) $\frac{4}{5}\pi$
 2. a) 108° b) $157,5^\circ$ c) 100° d) 165°
 3. a) 0 b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 8 f) $-\frac{1}{2}$
 4. a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) -4 c) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ d) -1 e) -3 f) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$
 5. a) $\alpha \in \{-345^\circ, -195^\circ, 15^\circ, 165^\circ\}$
 b) $\alpha \in \{-165^\circ, -15^\circ, 195^\circ, 345^\circ\}$
 c) $\alpha \in \{-305^\circ, -55^\circ, 55^\circ, 305^\circ\}$
 d) $\alpha \in \{-235^\circ, -125^\circ, 125^\circ, 235^\circ\}$
 e) $\alpha \in \{-275^\circ, -95^\circ, 85^\circ, 265^\circ\}$
 f) $\alpha \in \{-265^\circ, -85^\circ, 95^\circ, 275^\circ\}$
 6. a) $\alpha = 225^\circ$ b) $\alpha = 315^\circ$ c) $\alpha = 135^\circ$ d) $\alpha = 315^\circ$ e) $\alpha = 150^\circ$ f) $\alpha = 240^\circ$
 7. a) $x = \frac{2}{3}\pi$ b) $x = \frac{4}{3}\pi, x = \frac{5}{3}\pi$ c) $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi$ d) $x = -\frac{5}{6}\pi, x = -\frac{\pi}{6}$ e) $x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$ f) $x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{5}{4}\pi$ g) $x = 3\pi$ h) $x = -\frac{4}{3}\pi, x = -\frac{2}{3}\pi$
 8. a), c), d) 28π b) 32π
 9. a) $x = \frac{5}{4}\pi$ b) $x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}$ c) $x = \frac{13}{6}\pi, x = \frac{17}{6}\pi$ d) $x = -\frac{2}{3}\pi, x = -\frac{\pi}{3}$
 10. 8
 11. a) $f(D) = [1; 3]$, brak miejsc zerowych
 b) $f(D) = [-2; 0], x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $f(D) = \mathbb{R}, x = \frac{5}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $f(D) = \mathbb{R}, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

12. a) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$
 b) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
 c) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$
 d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$
 13. a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$
 b) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$
 c) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
 d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

14. a), c), d) tak b) nie

17. a) 0 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,
 1 dla $m = 0$,
 2 dla $m \in (0; 2]$
 b) 0 dla $m \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$,
 1 dla $m \in \{-3, 1\}$,
 2 dla $m \in (-3; -1) \cup (-1; 1)$,
 3 dla $m = -1$
 c) 0 dla $m \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$,
 2 dla $m = \frac{3}{2}$,
 3 dla $m = \frac{1}{2}$,
 4 dla $m \in (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

18. a) $m \in [-2; 4]$ b) $m \in [-4; \infty)$
 c) $m \in [\frac{1}{2}; 1]$

Zestaw II

1. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) 1 e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 2. a), b) tak c), d) nie
 4. a) $\cos \frac{x}{2} = -\frac{3}{5}, \sin x = -\frac{24}{25}$,
 $\cos x = -\frac{7}{25}, \operatorname{tg} x = \frac{24}{7}$
 b) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \sin x = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$,
 $\cos x = -\frac{1}{9}, \operatorname{tg} x = 4\sqrt{5}$
 5. a), b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $-2\sqrt{3}$
 6. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 2x = \frac{1}{2}$
 7. a) $-\frac{24}{25}$ b) $-\frac{7}{5}$ c) $\frac{24}{7}$
 8. a) $\sin 3x = \frac{11\sqrt{5}}{25}, \cos 3x = \frac{2\sqrt{5}}{25}$
 b) $\sin 3x = -\frac{5\sqrt{3}}{9}, \cos 3x = -\frac{\sqrt{6}}{9}$
 9. a) $f(D) = [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}], x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $f(D) = [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}], x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $f(D) = [0; 2], x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- d) $f(D) = [-2; 0], x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 e) $f(D) = \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 f) $f(D) = \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

10. a) 0 dla $m \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$,
 1 dla $m \in \{-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\}$,
 2 dla $m \in (-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$,
 3 dla $m = -\frac{3}{2}$
 b) 0 dla $m \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$,
 1 dla $m = \frac{1}{2}$,
 2 dla $m \in (\frac{1}{2}; \frac{5}{2}]$

- c) 0 dla $m \in (-\infty; -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty)$,
 1 dla $m = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 2 dla $m \in (-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$
 d) 0 dla $m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,
 1 dla $m \in \{0, 2\}$,
 2 dla $m \in (0; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; 2)$,
 3 dla $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 e) 0 dla $m \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$,
 1 dla $m \in \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$,
 2 dla $m \in (-\frac{3}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$,
 3 dla $m = 0$

- f) 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$,
 1 dla $m \in \{-2, 0\}$,
 2 dla $m \in (-2; \frac{\sqrt{2}}{2} - 1) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1; 0)$,
 3 dla $x = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
 g) 2 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 3 dla $m = -1$
 h) 2 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
 3 dla $m = 2$
 i) 2 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}\}$,
 3 dla $m = -\sqrt{3}$

11. a) 1 b) 3 c) 1 d) 2

12. a), b) $f(x) = \cos 2x$ c) $f(x) = 0$

13. a) $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi, x = \frac{11}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$
 e) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 f) $x = -\frac{5}{12}\pi + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

14. a) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 e) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 f) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

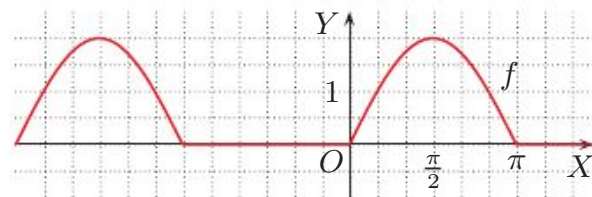
15. a) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 d) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 e) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 f) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

16. a) $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$
 b) $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

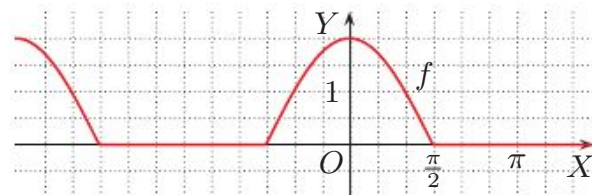
17. a), b), d) $-2, 2$
 c) $-1, 1$

18. $f(D) = [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$,
 $x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

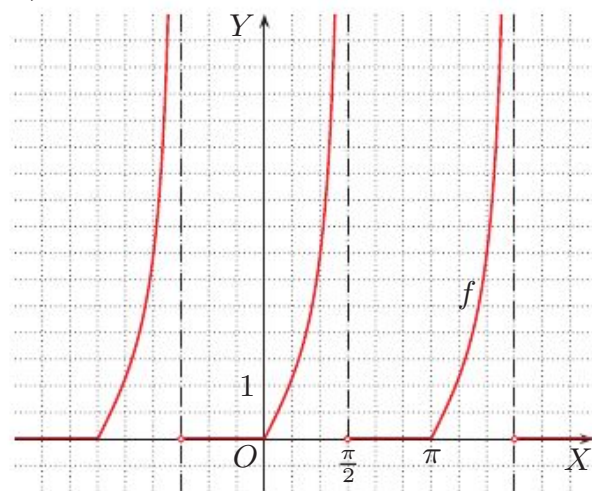
19. a) $T = 2\pi$



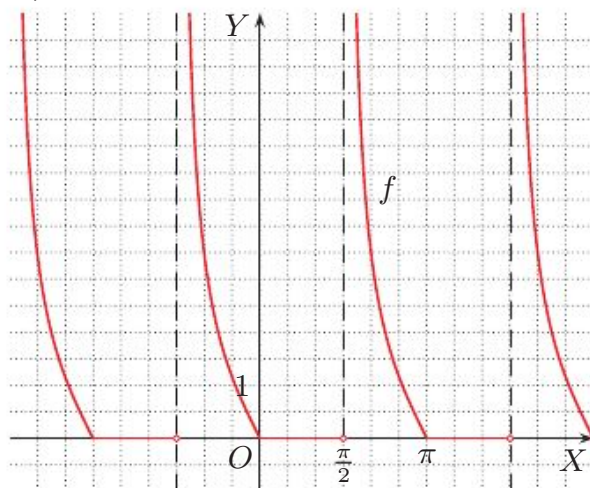
- b) $T = 2\pi$



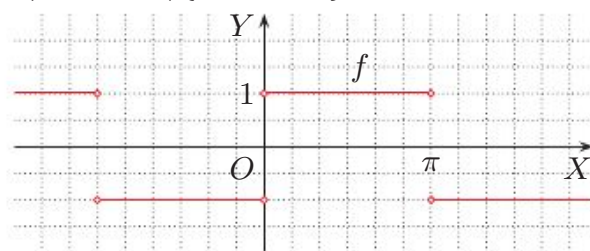
- c) $T = \pi$



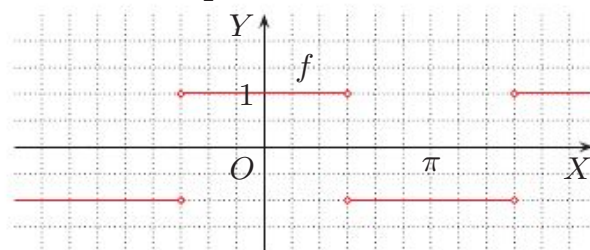
- d) $T = \pi$



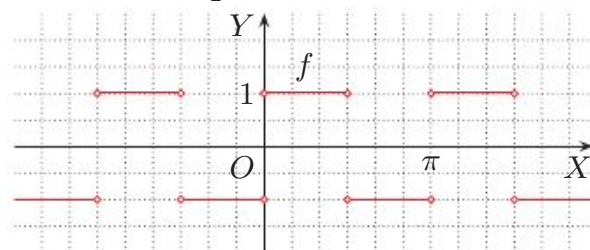
20. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$



- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$



- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2}: k \in \mathbb{Z}\}$



Ruch po okręgu a sinusoida

1. 30 m, 16 m

Zadania z kontekstem realistycznym

1. $v \approx 1072$ km/h
 2. 4 razy
 3. około 10,2 obrotu; $20,4\pi$ rad/s
 4. około 6,28 km/h

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

- $\frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{3}{4}$
- $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}+1} = \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{5}$
- $\sin x = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos x = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$
- $\frac{1}{12}$
- $-\frac{3}{4}$
- $\frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi$
- $-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi$
- 8π
- $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi, 2k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$
- $\alpha \in \{\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\}$
- $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne

- a) $2(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$
 b) $3(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$ c) 6
- a) $x = 6$ b) $x = 2\sqrt{10}$
- 48 cm²
- a) $3(5 + 3\sqrt{5})$ b) $3(5 + \sqrt{5})$
- a), b), c), e) jest
 d), f) nie jest

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

- Ć 1. a) 2 b) 13 c) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ d) 5
 2. $Ob_{\triangle ABC} = 15 + 3\sqrt{5}$,
 $Ob_{\triangle DEF} = \sqrt{26} + 5\sqrt{2}$
 3. a), d) nie jest b), c) jest
 4. a) równoramienny i prostokątny
 b) równoramienny
 c) nie jest równoramienny i nie jest prostokątny
 d) prostokątny

- Z 1. PQRS
 2. a), b) CD
 c) $|AB| = |CD|$
 3. a) jest b) nie jest
 4. a) przystające b), c) podobne

5. a) $Ob = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 6$,
 wysokości: 4, $3\sqrt{2}$, $\frac{12\sqrt{5}}{5}$
 b) $Ob = 2\sqrt{10} + 6\sqrt{2} + 4$,
 wysokości: 6, $2\sqrt{2}$, $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

6. a) $Ob = 4\sqrt{10}, |AC| = 4\sqrt{2}$,
 $|BD| = 2\sqrt{2}, h = \frac{4\sqrt{10}}{5}$
 b) $Ob = 20\sqrt{2}, |AC| = 6\sqrt{5}$,
 $|BD| = 2\sqrt{5}, h = 3\sqrt{2}$

7. a) (2, 2), (4, 6) b) (1, 5), (6, 0)

8. B(4, 0), D(-1, 5)

9. D(-6, 8) lub D($\frac{6}{5}, \frac{28}{5}$)

10. a) $y = -\frac{1}{8}x^2 - 2$
 b) $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

11. a) $y = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$
 b) $y = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

12. a) $x = \frac{1}{4}y^2 + 1$
 b) $x = -\frac{1}{4}y^2 - 2y - 1$

Prosta w układzie współrzędnych

- AB: $y = x + 3$, AC: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$,
 BC: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$
- a) $y = x + 3$, nie
 b) $y = -2x + 5$, tak
- a) $y = 4x - 1$ b) $y = -\frac{1}{5}x + 13$
- a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ b) $y = \frac{1}{6}x + 5$
- a) $y = 3x - 4$ b) $y = 2x - \frac{5}{2}$
 c) $y = -\frac{3}{2}x + 9$
- a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$ b) $y = \frac{1}{6}x - \frac{13}{12}$

2.2. Środek odcinka

- Ć 1. a) S(2, 1) b) S($\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}$) c) S($\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}$)
 2. a) B(-7, -14) b) $2\sqrt{34}$ c) $2\sqrt{10}$
 3. A(-1, 6), B(-5, -2), C(3, 2),
 AQ: $x = -1$, BR: $y = x + 3$, CP: $y = 2$
 4. a) $y = \frac{5}{4}x + \frac{13}{8}$ b) $y = 2x - 5$
 c) $y = -3x + 1$

- Z 1. a) 5 b) $2\sqrt{5}$ c) 2,5
 2. a) B(-8, 1) b) B(8, 9) c) B(-10, -3)
 3. a) $2\sqrt{10}$ b) $6\sqrt{2}$
 4. $P_r = 12, P_p = 6$
 5. a) $16\sqrt{5}$ b) $20\sqrt{2}$

6. a) $S_{AC}(8, 2)$, $S_{BD}(8, 2)$, jest
b) $S_{AC}(4\frac{1}{2}, 2)$, $S_{BD}(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, nie jest
7. $S(3, 2)$, $D(7, 5)$, $Ob = 6\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$
8. a) $y = -\frac{3}{2}x + 5$, $y = 6x - 5$, $y = 3$
b) $y = \frac{5}{7}x + \frac{4}{7}$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$,
 $y = -7x - 2$
9. 24
11. $P = 20$, $Ob = 8\sqrt{5}$
12. $(-4, -8)$ lub $(3, -1)$
13. a) $A(5, 5)$, $B(1, 1)$ lub $A(1, 1)$, $B(5, 5)$
b) $A(16, 14)$, $B(8, 8)$ lub $A(8, 8)$,
 $B(16, 14)$
14. a) $B(-1, -1)$, $D(3, 7)$
b) $B(13, -7)$, $D(-3, 9)$
15. a) $B(2, 0)$, $D(-2, 4)$
b) $B(-5, -6)$, $D(11, 10)$
16. a) $y = -3x + 3$ b) $y = \frac{3}{2}x - 2$
17. a) $B(\frac{27}{5}, \frac{9}{5})$
b) $A(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(2 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$
18. $C(4, 15)$, $AB: y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$,
 $BC: y = 8x - 17$
19. $A(-2, 1)$, $B(6, -3)$, $C(2, 5)$
20. $B(6, -2)$, $D(0, 4)$, $P = 12$

2.3. Odległość punktu od prostej

- ☐ 1. a) $2\sqrt{2}$ b) 5
2. a) $d_A = \sqrt{2}$, $d_B = 0$, $d_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
b) $d_A = \sqrt{10}$, $d_B = \sqrt{10}$,
 $d_C = \frac{13\sqrt{10}}{10}$
c) $d_A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $d_B = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $d_C = 0$
3. a) $d = \frac{8\sqrt{10}}{5}$, $P = 16$
b) $d = \sqrt{13}$, $P = 13$
4. 94
5. a) $2\sqrt{2}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{6\sqrt{13}}{13}$
- ☐ 1. a) $d_A = \frac{48\sqrt{29}}{29}$, $d_B = \frac{45\sqrt{29}}{29}$, nie jest
b) $d_A = d_B = 5$, jest
c) $d_A = 5$, $d_B = \frac{54}{13}$, nie jest
2. $d_{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$, $d_{AD} = 3$,
 $d_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $d_{CD} = \frac{9}{4}$
3. $d = 2\sqrt{10}$, $P = 60$
4. a) $8\frac{1}{2}$ b) 15

5. a) 5π b) 25π
6. a) $AB \parallel CD$, $d = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $P = 38,5$
b) $AB \parallel CD$, $d = 3\sqrt{10}$, $P = 75$
7. a) $y = x + 2\sqrt{2}$ lub $y = x - 2\sqrt{2}$
b) $y = 2x + 8$ lub $y = 2x - 2$
8. a) 6 b) 60
9. $h = 7\frac{1}{5}$, $d = 7\frac{1}{2}$
10. a) $y = \sqrt{3}x + 4$ b) $y = -0,7x - 1,5$

Pole trójkąta w układzie współrzędnych

1. a) 14 b) 26 c) 16 d) 112,5
2. a) $P_{ABC} = 27$, $P_{ACD} = 11$, $P_{ABCD} = 38$
b) $P_{ABC} = 18$, $P_{ACD} = 10$, $P_{ABCD} = 28$

2.4. Okrąg w układzie współrzędnych

- ☐ 1. a) $x^2 + y^2 = 4$, 4 punkty
b) $x^2 + y^2 = 25$, 12 punktów
c) $x^2 + y^2 = 2$, 4 punkty
d) $x^2 + y^2 = 5$, 8 punktów
2. a) $x^2 + y^2 = 36$
b) $x^2 + y^2 = 64$
c) $x^2 + y^2 = 3$
d) $x^2 + y^2 = 50$
3. a) $r = 13$, $x^2 + y^2 = 169$
b) $r = 3\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 18$
c) $r = \sqrt{41}$, $x^2 + y^2 = 41$
d) $r = 2\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 8$
4. a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$
b) $(x + 7)^2 + (y - 6)^2 = 4$
c) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 2$
5. a) $S(2, 5)$, $r = 4$
b) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $r = \frac{5}{3}$
c) $S(0, -\frac{9}{4})$, $r = \sqrt{10}$
d) $S(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $r = 2\sqrt{2}$
e) $S(-5, -9)$, $r = 15$
f) $S(1\frac{1}{6}, 0)$, $r = 3\sqrt{5}$
6. a) $x^2 + (y + 1)^2 = 5$
b) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$
c) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$
7. a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$, tak
b) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = -2$, nie
c) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$, tak
d) $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 0$, nie

- ☐ 1. a) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$
b) $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{16}$
c) $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 20$
2. a) $(x - 2)^2 + y^2 = 10$
b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 8$
c) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$
3. a) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$
b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$
c) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$
4. a) $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{65}{4}$
b) $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{125}{4}$
5. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$
6. a) $S(3, -2)$, $r = 5$
b) $S(4, 3)$, $r = 6$
c) $S(-5, -2)$, $r = 6$
d) $S(6, -2)$, $r = 6$
e) $S(\frac{3}{2}, 2)$, $r = \frac{5}{2}$
f) $S(-4, 1)$, $r = 4$
7. a) $(x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 45$
lub $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 45$
b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$
lub $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$
c) $(x + 2)^2 + y^2 = 25$
lub $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$
d) $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 26$
lub $(x - 2)^2 + y^2 = 26$
8. a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$
b) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 45$
9. a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 40$
b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$
c) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 50$
d) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$
10. $S(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2})$, $r = \frac{|m-n|}{2}$

Okrąg wpisany w trójkąt

1. a) $(3, -1)$ b) $(-2, -1)$

2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

- ☐ 1. a) $|S_1S_2| = 2$, brak punktów wspólnych
b) $|S_1S_2| = 5$, 1 punkt wspólny
c) $|S_1S_2| = 4$, 1 punkt wspólny
d) $|S_1S_2| = 2\sqrt{2}$, 2 punkty wspólne

2. a) 1 b) 0 c) 2 d) 1
3. a) $r \in \{3, 11\}$
b) $r \in \{4 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{5}\}$

4. $r \in (10; 20)$

- ☐ 1. $r_O = 3$, $r_A = 8$, $r_B = 11$, $P = 48\pi$
2. $P_1 = 16\pi$, $P_2 = 8\pi$, $P = 8\pi - 8$
3. a) $d = 6$, styczne zewnętrznie
b) $d = 5$, styczne wewnętrznie
c) $d = 5$, przecinają się
d) $d = 5\sqrt{2}$, przecinają się
e) $d = 2\sqrt{2}$, rozłączne wewnętrznie
f) $d = 13$, rozłączne zewnętrznie

4. a) $d = 13$,
1 punkt dla $r \in \{5, 21\}$,
2 punkty dla $r \in (5; 21)$
b) $d = \sqrt{41}$,
1 punkt dla $r \in \{\sqrt{41} - 4, \sqrt{41} + 4\}$,
2 punkty dla $r \in (\sqrt{41} - 4; \sqrt{41} + 4)$
c) $d = 4\sqrt{5}$,
1 punkt dla $r \in \{4\sqrt{5} - 7, 4\sqrt{5} + 7\}$,
2 punkty dla $r \in (4\sqrt{5} - 7; 4\sqrt{5} + 7)$

5. $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$

6. a) $|AB| = 7$, $|AC| = 6$, $|BC| = 5$,
 $r_A = 4$, $r_B = 3$, $r_C = 2$
b) $|AB| = 10$, $|AC| = 8$, $|BC| = 6$,
 $r_A = 6$, $r_B = 4$, $r_C = 2$

7. a), b) rozłączne zewnętrznie
c) przecinają się

8. a) 0 punktów dla $r \in (0; 3) \cup (7; \infty)$,
1 punkt dla $r \in \{3, 7\}$,
2 punkty dla $r \in (3; 7)$
b) 0 punktów dla $r \in (20; \infty)$,
1 punkt dla $r = 20$,
2 punkty dla $r \in (0; 20)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; 3\sqrt{5} - 5) \cup$
 $\cup (3\sqrt{5} + 5; \infty)$,
1 punkt dla $r \in \{3\sqrt{5} - 5, 3\sqrt{5} + 5\}$,
2 punkty dla $r \in (3\sqrt{5} - 5; 3\sqrt{5} + 5)$
d) 0 punktów dla $r \in (0; \sqrt{2}) \cup (7\sqrt{2}; \infty)$,
1 punkt dla $r \in \{\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\}$,
2 punkty dla $r \in (\sqrt{2}; 7\sqrt{2})$

9. $S\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

10. a) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$
b) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$
lub $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$

Współrzędne geograficzne

1. w Niedzicy – C, w Czersku – D,
Czocha – A, w Gniewie – B

2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej

1. a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
1 punkt dla $r = 4$,
2 punkty dla $r \in (4; \infty)$
b) 0 punktów dla $r \in (0; 7)$,
1 punkt dla $r = 7$,
2 punkty dla $r \in (7; \infty)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; 2 + \sqrt{3})$,
1 punkt dla $r = 2 + \sqrt{3}$,
2 punkty dla $r \in (2 + \sqrt{3}; \infty)$
d) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{3}{2} - \sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \infty)$
2. a) $2\sqrt{21}$ b) 8 c) 8
3. a) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$
b) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 18$
4. a) 1 b) 0 c) 2 d) 1
5. a) $y = 1, y = -\frac{8}{15}x + \frac{47}{15}, d = 4$
b) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}, y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}, d = 5$
c) $y = \frac{1}{3}x - 1, y = 3x + 7, d = 2\sqrt{10}$
d) $y = \frac{2}{3}x + 3, y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}, d = \sqrt{13}$
1. a) $(x-2)^2 + y^2 = 8$, łuk AB: $\sqrt{2}\pi$
b) $(x-2)^2 + y^2 = 16$, łuk AB: $\frac{8}{3}\pi$
2. a) $x = -9$ lub $x = 7$
b) $x = -5\sqrt{2} - 1$ lub $x = 5\sqrt{2} - 1$
c) $x = -5\sqrt{3} - 1$ lub $x = 5\sqrt{3} - 1$
d) $x = -1$
3. a) $\sqrt{5}$ b) 5 c) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ d) $2\sqrt{10}$
4. a) $d = \sqrt{5}$, 2 punkty
b) $d = 2\sqrt{5}$, 0 punktów
c) $d = \frac{7\sqrt{10}}{10}$, 2 punkty
d) $d = 3$, 1 punkt

5. a) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = \frac{9}{5}$
b) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 10$

6. a) 0 punktów dla $r \in (0; 2)$,
1 punkt dla $r = 2$,
2 punkty dla $r \in (2; \infty)$
b) 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{6})$,
1 punkt dla $r = 2\sqrt{6}$,
2 punkty dla $r \in (2\sqrt{6}; \infty)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{5})$,
1 punkt dla $r = 2\sqrt{5}$,
2 punkty dla $r \in (2\sqrt{5}; \infty)$

7. a) $x^2 + (y-1)^2 = 5$
b) $x^2 + (y-1)^2 = 10$

8. a) AB: $y = -x + 11$, BC: $y = x + 5$,
CD: $y = -x - 1$, AD: $y = x - 7$
b) AB: $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$, BC: $y = -2x + 18$,
CD: $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$, AD: $y = -2x - 2$

9. $(3, -2)$ lub $(3, 2)$ lub $(7, -2)$ lub $(7, 2)$

10. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 20$

11. a) $y = -2x - 1$ b) $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

12. a) $y = 1, y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$
b) $y = 1, y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$
c) $y = \frac{1}{2}x + 2, y = 2x + 5$

13. a) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$
b) $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 25$

14. $y = \frac{1}{2}x, y = 2x$

15. a) $y = \frac{1}{2}x, y = 2x$
b) $y = -2x + 10, y = -2x + 20$

16. $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$, jest;
 $y = -2, y = \frac{56}{33}x - \frac{34}{11}$

17. $(x-3)^2 + y^2 = 25$, jest; $5\sqrt{2}$

18. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$
lub $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$

19. $(-\frac{25}{9}, \frac{100}{9})$ lub $(-1, 4)$

20. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$
 $y = 2x + 5, y = -2x + 5$

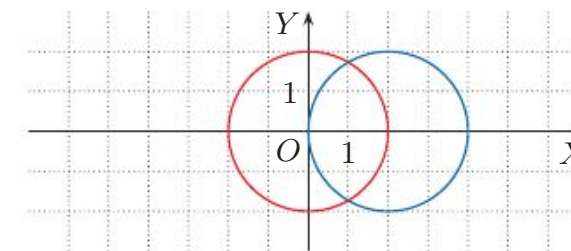
2.7. Układy równań drugiego stopnia

1. a) $x = -3, y = -4$ lub $x = 3, y = 4$
b) $x = 2, y = -2$ c) sprzeczny

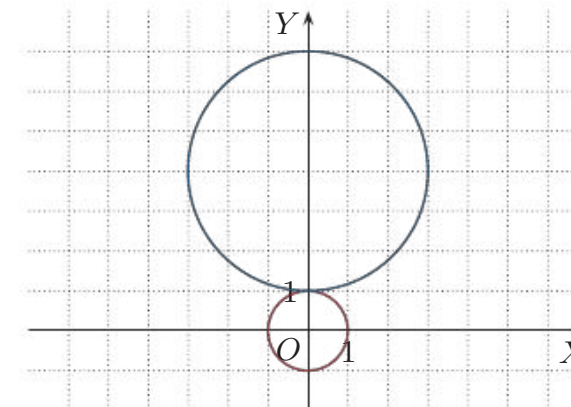
2. a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{10}$

3. $A(-1, -3), B(3, -1), C(1, 3), D(-3, 1)$

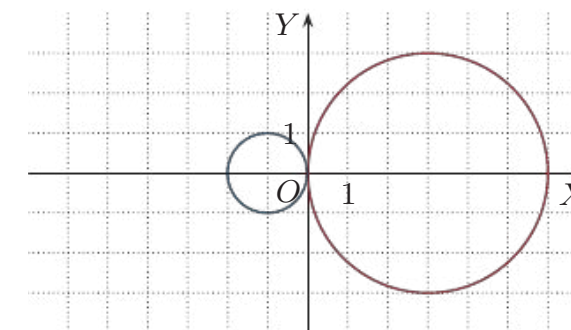
4. a) $x = 1, y = -\sqrt{3}$ lub $x = 1, y = \sqrt{3}$



b) $x = 0, y = 1$



c) $x = 0, y = 0$



5. a) $x = 2, y = 0$ lub $x = 3, y = 1$
b) $x = 3, y = 2$

1. a) $x = 1, y = 3$ lub $x = -3, y = -1$
b) $x = 0, y = -2$ lub $x = 5, y = 3$
c) $x = -1, y = 1$ lub $x = 1, y = 1$

2. a) $(4, -2), (-4, 2)$
b) $A(-6, 0), B(2, 4),$
 $C(0, -2)$ lub $C(-4, 6)$

3. a) $(-3, 1), (1, 5), (5, -7), (9, -3)$
b) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 10,$
 $(0, 4), (4, 2), (6, 6), (2, 8)$

4. $(-1, -1), (0, 4), (5, 3), (4, -2),$
 $P = 26$

5. a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{2}$

6. a) 6 b) $2\sqrt{2}$

7. a) 8 b) 15

8. a) $x = 0, y = -3$

b) $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$
lub $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{7}}{2}$

c) $x = 4, y = 0$

d) $x = 0, y = 0$ lub $x = \frac{96}{25}, y = \frac{72}{25}$

e) $x = -3, y = -4$ lub $x = 3, y = -4$

f) $x = -1, y = 1$ lub $x = 1, y = 1$

9. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$
lub $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 25$

10. a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$
lub $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$
b) $(x-1)^2 + y^2 = 4$
lub $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
c) $\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = 9$
lub $\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^2 = 9$
d) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 13$
lub $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$

11. a) 0 dla $m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \infty)$,
1 dla $m \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$,
2 dla $m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$
b) 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$,
1 dla $m \in \{-2, 2\}$,
2 dla $m \in (-2; 2)$
c) 0 dla $m \in (-2; 2)$,
1 dla $m \in \{-2, 2\}$,
2 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
d) 0 dla $m \in (-\infty; \frac{1}{5})$,
1 dla $m = \frac{1}{5}$,
2 dla $m \in (\frac{1}{5}; \infty)$
e) 0 dla $m \in (-\infty; -9) \cup (1; \infty)$,
1 dla $m \in \{-9, 1\}$,
2 dla $m \in (-9; 1)$
f) 2 dla $m \in \mathbb{R}$

2.8. Działania na wektorach

1. a) $\vec{AB} = [5, -1], \vec{BC} = [2, -4],$
 $\vec{AC} = [7, -5]$
b) $\vec{AB} = [-2, -6], \vec{BC} = [-5, 3],$
 $\vec{AC} = [-7, -3]$

2. a) $[5, 4]$ b) $[-7, -1]$
c) $[6, -1]$ d) $[-2, 1]$

3. a) $[5, -2]$ b) $[5, 6]$

4. a) $[-6, -5]$ b) $[0, 5]$

5. a) $\vec{u} - \vec{v} = [1, -8]$, $\vec{v} - \vec{u} = [-1, 8]$
 b) $\vec{u} - \vec{v} = [-3, -7]$, $\vec{v} - \vec{u} = [3, 7]$
6. a) $[-5, -8]$ b) $[9, -1]$
 c) $[-14, 0]$ d) $[2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
7. a) $\alpha = 3$ b) $\alpha = -\frac{4}{3}$
8. ten sam kierunek i zwrot co wektor $\vec{u}$:
 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_4$; ten sam kierunek co wektor $\vec{u}$,
 ale przeciwny zwrot: $\vec{v}_2$, $\vec{v}_5$
9. a) 5 b) 13 c) $3\sqrt{2}$
10. a) 7 b) $\sqrt{58}$ c) 9 d) 5
- ☐ 1. a), c) nie jest b) jest
2. a) $P(6, 9)$ b) $P(0, -3)$ c) $P(4, 5)$
 d) $P(3, 3)$ e) $P(6, 9)$ f) $P(-4, -11)$
3. a) $D(3, 5)$, $|\vec{AD}| = \sqrt{34}$
 b) $D(3, -3)$, $|\vec{AD}| = \sqrt{41}$
 c) $D(5, -3)$, $|\vec{AD}| = \sqrt{82}$
 d) $D(-1, 8)$, $|\vec{AD}| = 11$
6. a) ten sam kierunek, przeciwne zwroty
 b), d) ten sam kierunek i zwrot
 c) różne kierunki
7. a) $m = 5$ b) $m \in \{-1, 1\}$
 c) $m \in \{-2, 0, 2\}$
9. a) $\vec{v} = [-12, 16]$ b) $\vec{v} = [-4\frac{4}{5}, 6\frac{2}{5}]$
10. a) $\vec{v} = [-6\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$
 b) $\vec{v} = [-\frac{9\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}]$
12. a) $[-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$ lub $[\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$
 b) $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ lub $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$
13. a) $\alpha = 2$, $\beta = -1$
 b) $\alpha = -1\frac{2}{7}$, $\beta = 1\frac{3}{7}$
 c) $\alpha = \frac{9}{14}$, $\beta = 1\frac{3}{14}$
 d) $\alpha = -10$, $\beta = -3$
14. a) $m = 2$ b) nie ma takiego m

2.9. Wektory – zastosowania

- ☐ 1. a) 2 b) 1
2. a) 20 b) 5 c) $\frac{28}{5}$
3. $8(\pi - 2)$
5. a) tak b) tak
6. a) $A(7, -1)$, $C(-5, 1)$, $D(-1, -3)$
 b) $A(-2, -2)$, $B(6, 2)$, $C(8, 6)$, $D(0, 2)$
 c) $A(-3, 2)$, $B(2, -3)$, $C(4, 1)$, $D(-1, 6)$
 d) $A(-4, -3)$, $B(4, -1)$, $C(10, 5)$, $D(2, 3)$

- ☐ 2. a) $\frac{1}{3}\vec{AB} = [2, 1]$, $P(-1, -1)$, $Q(1, 0)$
 b) $\frac{1}{3}\vec{AB} = [6, -4]$, $P(-4, 2)$, $Q(2, -2)$
 c) $\frac{1}{3}\vec{AB} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $P(1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $Q(1\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
3. a) $A(-1, -2)$, $B(8, 7)$
 b) $A(5, -5)$, $B(1, 7)$
4. a) $P(0, 1)$ lub $P(2, -2)$
 b) $A(12, -15\frac{1}{2})$ lub $A(19, -26)$
5. a) $C(6, 3)$, $D(0, 1)$
 b) $A(4, -1)$, $B(2, 3)$, $C(-6, 3)$,
 $D(-4, -1)$
6. $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, $y = -x - 2$,
 $y = -4x - 11$
7. a) $A(-3, -2)$, $B(3, 1)$
 b) $A(10, 15)$, $B(14, 11)$
8. $C(-1, 2)$
9. $B(7, 5)$, $C(4, 6)$, $D(2, 5)$
10. b) $C(-4, 1)$, $P = 9$
11. $(-3, 6)$, $(5, 2)$

2.10. Symetria osiowa

- ☐ 2. kwadrat: 4, trójkąt równoboczny: 3,
 prostokąt: 2, koło: nieskończenie wiele
3. a) $A'(0, -3)$, $B'(3, 0)$, $A''(0, 3)$,
 $B''(-3, 0)$
 b) $A'(1, 2)$, $B'(-4, -3)$, $A''(-1, -2)$,
 $B''(4, 3)$
 c) $A'(-5, -1)$, $B'(1, -4)$, $A''(5, 1)$,
 $B''(-1, 4)$
5. a) $A'(-2, -1)$, $B'(2, 3)$, $C'(4, 1)$,
 $D'(0, -3)$
 b) $A''(2, 1)$, $B''(-2, -3)$, $C'''(-4, -1)$,
 $D''(0, 3)$
6. $K': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$,
 $K'': (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$
7. a) $K': (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$,
 $K'': (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$
 b) $K': (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$,
 $K'': (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$
 c) $K': (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$,
 $K'': (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
 d) $K': (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 49$,
 $K'': (x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 49$

- ☐ 1. a) OX b) OY c), d) nie są

3. a) 8 b) 2

4. a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$, należy
 b) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 41$, nie należy
 c) $(x + 3)^2 + y^2 = 4$, należy
 d) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 40$, należy
5. a) $K': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$, $P = 12$
 b) $K': (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$, $P = 24$
6. a) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2$
 b) $(x - \frac{9}{5})^2 + (y + \frac{18}{5})^2 = 16$
 c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

2.11. Symetria środkowa

- ☐ 2. równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek
3. a) $A'(-3, 2)$, $B'(2, 1)$, $C'(1, -4)$
 b) $A'(-2, 2)$, $B'(-1, -3)$, $C'(3, -1)$
4. a) 24 b) 20 c) 6
5. a) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$
 b) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$
 c) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
 d) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$
- ☐ 1. a) 10 b) $2\sqrt{17}$ c) 20 d) $2\sqrt{2}|a|$
3. 22,4
5. a) $(-1, -1)$, $(1, 1)$
 b) $(-1, -4)$, $(1, 4)$
 c) $(-1, 2)$, $(1, -2)$
 d) $(-3, -2)$, $(3, 2)$
6. a) $8(\pi - 2)$ b) $8(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3})$
 c) $6(2\pi - 3\sqrt{3})$ d) $12(2\pi - 3\sqrt{3})$
7. $y = \frac{1}{2}x$, $y = -2x - 10$, $y = -2x + 10$

Zbiory punktów o danej własności

1. a) suma prostych: $x = -\frac{7}{4}$, $y = \frac{3}{2}$
 b) suma prostych: $y = x + 2$, $y = -x + 4$
 c) suma prostych: $y = -\sqrt{3}x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
 d) $y = -1$
2. $y = x + 2$
4. a) $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$ b) $x = \frac{1}{12}y^2 + 3$
5. a) $x = -\frac{1}{4}y^2 + 1$, gdzie $y \in (-2; 2)$
 b) suma fragmentu paraboli
 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ dla $x \in (0, 2)$
 oraz fragmentu paraboli
 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ dla $x \in (0, 2)$

Zestaw I

1. a) $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $|AC| = 15$;
 współliniowe
 b) $|AB| = 8\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$,
 $|AC| = 4\sqrt{5}$; współliniowe
 c) $|AB| = 10$, $|BC| = 10$, $|AC| = 14\sqrt{2}$;
 niewspółliniowe
 d) $|AB| = 6\sqrt{2}$, $|BC| = 3\sqrt{2}$,
 $|AC| = 9\sqrt{2}$; współliniowe
2. a) równoramienny i prostokątny
 b) prostokątny
3. a) $S(4, 4)$ b) $S(-4, 4)$
4. $|AD| = 5$, $|AE| = \sqrt{5}$
5. a) $(-1, 3)$, $(1, 5)$
 b) $(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}, -3 - \frac{4\sqrt{5}}{5})$,
 $(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, -3 + \frac{4\sqrt{5}}{5})$
6. $(6, -3)$, $(5, 4)$, $(-2, 3)$, $(-1, -4)$
7. $(-1, 0)$, $(-5, -2)$, $(-3, -6)$
8. a) $(x + 4)^2 + y^2 = 25$,
 $(1, 0)$, $(-9, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$
 b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$,
 $(-2, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 3 - \sqrt{21})$,
 $(0, 3 + \sqrt{21})$
 c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$,
 $(-2\sqrt{3} - 1, 0)$, $(2\sqrt{3} - 1, 0)$,
 $(0, 2 - \sqrt{15})$, $(0, 2 + \sqrt{15})$
 d) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 1$,
 nie ma punktów wspólnych z osiami
 układu współrzędnych
9. a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$
 b) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$
 c) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 17$
10. a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
 b) $(0, 2 - \sqrt{3})$, $(0, 2 + \sqrt{3})$
 c) $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$
11. a) styczne zewnętrznie
 b), c) przecinają się
 d) rozłączne zewnętrznie
12. a) $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $|S_1S_2| = 2$,
 przecinają się
 b) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $|S_1S_2| = 1$,
 styczne wewnętrznie

Zestaw II

- a) $(6, 2)$, $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 40$
b) $(2, 1)$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$
- a) $P(4, 6)$ lub $P(-4, -2)$
b) $P(0, -6)$ lub $P(6, 4)$
- a) $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x - 3$,
 $y = 3x + 17$
b) $y = -\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{2}$, $y = \frac{4}{3}x + 6$,
 $y = \frac{4}{3}x - 12$
- $d = 4$, $l_1: y = -x + 2\sqrt{2}$,
 $l_2: y = -x + 6\sqrt{2}$
- a) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$
b) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 20$
- $K_1: (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$,
 $K_2: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$
- a) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{13}{2}$
b) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$
- a) 8 b) 9
- a) $(2, -5)$, $(8, 1)$, $(-4, 7)$
lub $(2, -5)$, $(8, 1)$, $(6, -3)$
b) $(-6, 1)$, $(\frac{36}{5}, -\frac{7}{5})$, $(6, 7)$
lub $(-6, 1)$, $(0, -5)$, $(6, 7)$
- $A(3, -1)$, $B(2, 0)$, $C(-2, -4)$,
 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{17}{2}$
- $y = -\frac{1}{3}x + 5$, $y = -\frac{1}{3}x - \frac{25}{3}$
- $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- a) 2,25 b) $\frac{13}{12}\sqrt{3} - 1$
- a) $y = x + 5$ b) $y = 3x + 10$

Zadania z kontekstem realistycznym

- 5 km
- będzie potrzebny
- pan Karol
- 3 m

Przed obowiązkową maturą z matematyki

- B 2. A 3. C 4. B 5. D 6. C 7. C
- C 9. C 10. C
- BH
- 12.1. B 12.2. D
- 13.1. A 13.2. FP
- FP
- A1

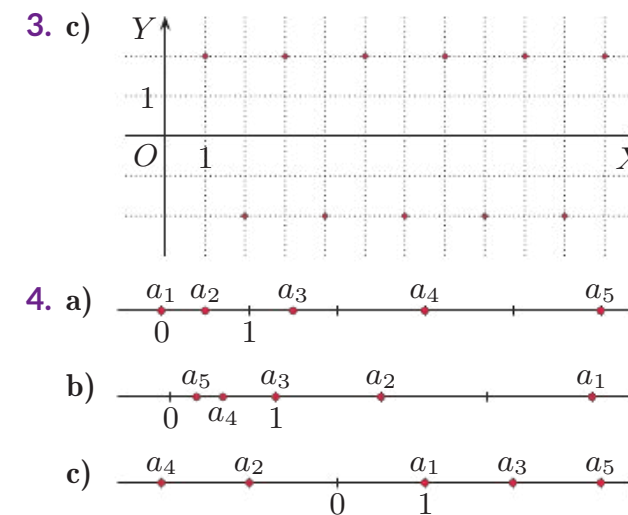
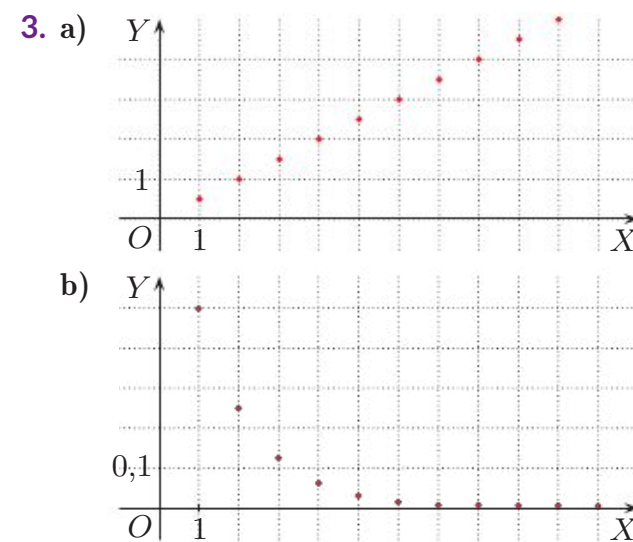
- $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$
- 13
- $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$
- $K': (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$, $d = 6$
- $C(-1, 0)$, $P = 13$
- 38
- $P = 32$, $h = \frac{8\sqrt{10}}{5}$
- 24.1. 25
- 24.2. $B(-2, 4)$, $y = -7x - 10$
- $x^2 + (y - 1)^2 = 25$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

- $10\sqrt{6}$
- $\sqrt{10}$
- $y = -7x + 13$, $y = 3x - 7$
- $(-3 - \sqrt{3}, 0)$, $(-3 + \sqrt{3}, 0)$
- $4\sqrt{2}$
- $\frac{13}{24}\sqrt{2}$
- $m \in (-8; 9)$
- $(-1, -2)$, $(5, 4)$, $(-1, 6)$, $(-3, 4)$
- $A(-2, -1)$, $C(5, 7)$, $[8, 4]$
- $m = 1$

3.1. Pojęcie ciągu

- Ć 1. a) $a_n = 2^n$, $a_9 = 512$, $a_{10} = 1024$
b) $a_n = (\frac{1}{2})^n$, $a_9 = \frac{1}{512}$, $a_{10} = \frac{1}{1024}$
c) $a_n = (-1)^n$, $a_9 = -1$, $a_{10} = 1$
d) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $a_9 = \frac{1}{9}$, $a_{10} = -\frac{1}{10}$
2. A: $a_{17} = 34$, $a_{100} = 200$
B: $a_{17} = 3$, $a_{100} = 3$



- Z 1. a) $a_7 = 13$, $a_8 = 15$, $a_9 = 17$, $a_{10} = 19$
b) $a_7 = \frac{1}{14}$, $a_8 = \frac{1}{16}$, $a_9 = \frac{1}{18}$, $a_{10} = \frac{1}{20}$
c) $a_7 = 17$, $a_8 = 19$, $a_9 = 23$, $a_{10} = 29$
3. a) $a_1 = 1,4$, $a_2 = 1,41$, $a_3 = 1,414$,
 $a_4 = 1,4142$, $a_5 = 1,41421$, $a_6 = 1,414214$
b) $a_1 = 1,7$, $a_2 = 1,73$, $a_3 = 1,732$,
 $a_4 = 1,7321$, $a_5 = 1,73205$, $a_6 = 1,732051$
c) $a_1 = 3,1$, $a_2 = 3,14$, $a_3 = 3,142$,
 $a_4 = 3,1416$, $a_5 = 3,14159$,
 $a_6 = 3,141593$
4. a) 4 b) 6 c) 8 d) 22

3.2. Sposoby określania ciągu

- Ć 1. a) 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10
b) 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59
2. a) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_4 = \frac{16}{5}$,
 $a_{10} = \frac{100}{11}$
b) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{4}{5}$, $a_4 = \frac{15}{17}$,
 $a_{10} = \frac{99}{101}$
c) $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{3}{8}$, $a_3 = -\frac{1}{5}$,
 $a_4 = -\frac{1}{8}$, $a_{10} = -\frac{1}{40}$
d) $a_1 = 0$, $a_2 = 4$, $a_3 = 18$, $a_4 = 48$,
 $a_{10} = 900$
3. a) $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_4 = -1$,
 $a_7 = 1$, $a_{10} = -1$
b) $a_1 = 2$, $a_2 = -4$, $a_4 = -16$,
 $a_7 = 128$, $a_{10} = -1024$
c) $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 4$,
 $a_7 = -7$, $a_{10} = 10$
d) $a_1 = -4$, $a_2 = 8$, $a_4 = 32$,
 $a_7 = -256$, $a_{10} = 2048$

- e) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{3}{5}$,
 $a_7 = -\frac{3}{4}$, $a_{10} = \frac{9}{11}$
f) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -\frac{3}{5}$, $a_4 = -\frac{7}{9}$,
 $a_7 = \frac{13}{15}$, $a_{10} = -\frac{19}{21}$

4. a) $a_n = 3^{n-1}$ b) $a_n = n^2 - 1$
c) $a_n = (-1)^n \cdot n^2$
d) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3^n$
e) $a_n = \sqrt{n}$
f) $a_n = \frac{3}{n^2+1}$
g) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
h) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$
5. a) $a_4 = 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 4$
b) $a_4 = 8$, $a_5 = 27$, $a_6 = 64$
c) $a_4 = 32$, $a_5 = 243$, $a_6 = 1024$
6. a) $a_4 = 0$; $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$
b) brak wyrazów równych zeru;
 $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4\}$
c) $a_2 = 0$; $a_n > 0$ dla $n \geq 3$ i $n \in \mathbb{N}$
d) brak wyrazów równych zeru;
 $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Z 1. a) 2, 6, 10, 14, 18
b) 2, 2, 0, -4, -10
c) 1, 2, 5, 12, 27
d) -1 , $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$
e) 3 , $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{5}$
f) 2, 1, 4, 3, 6
g) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$
h) 0, 2, 0, 4, 0
i) 2, 2, 18, -48, 650
2. a) 1 , $\frac{1}{2}$, 1 , $\frac{1}{4}$, 1 , $\frac{1}{6}$
b) 0, 4, 0, 16, 0, 64
c) 2, 2, 6, $\frac{4}{3}$, 10, $\frac{6}{5}$
d) $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{5}$, 16, $\frac{1}{7}$, 36

3. a) $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$
b) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}$
d) $a_n = \sqrt[n]{n+1}$
e) $a_n = \frac{3n-2}{5n+1}$
f) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2 \cdot 3^n}$

4. a) $a_1, a_2, \dots, a_6$ b) $a_2, a_3, \dots, a_9$
c) brak wyrazów ujemnych

5. a) a_3 b) a_1, a_3 c) a_2
 d) brak wyrazów równych zeru
 e) a_2, a_3 f) a_4, a_8
6. a) $a_{2n}, n \in \mathbb{N}_+$ b) a_5 c) a_3, a_4
7. a) $n \in \{1, 2, \dots, 5\}$
 b) $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{3, 4, 5\}$
8. a) a_1, a_2, a_4 b) a_1, a_2, a_5
 c) a_1, a_2, a_3, a_6
10. a) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$ b) $a_n = -\frac{2}{3}n + 1$
 c) $a_n = -\frac{1}{3}n + 9$
11. a) $a_n = n^2 - 6n + 5$
 b) $a_1, a_2, \dots, a_7$
12. $a_n = -2n^2 + 8n$
13. $a_n = \frac{1}{4}n^2, a_6 = 9, a_{10} = 25,$
 $a_{20} = 100$
14. a) $a_n = -n^2 + 6n, a_8 = -16$
 b) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - n - 4, a_8 = 20$
 c) $a_n = n^2 + 2n - 4, a_8 = 76$

3.3. Ciągi monotoniczne (1)

- ☞ 1. np.: a) $a_n = 10 + \frac{1}{n}$ b) $a_n = -\frac{1}{n}$
3. a) $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1,$
 $a_5 = 4$; nie jest
 b) $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 3, a_4 = 0,$
 $a_5 = -5$; nie jest
 c) $a_1 = -1, a_2 = -5, a_3 = -7,$
 $a_4 = -7, a_5 = -5$; nie jest
4. a) $\frac{n+1}{2n+3}$ b) $\frac{-2n-2}{3n+1}$
 c) $\frac{n-2}{n^2+2n+2}$ d) $\frac{n^2+2n}{2n-3}$
7. a) $a_5 = a_6 = 4$
 b) $a_3 \in [\frac{3}{2}; 2], a_5 \in [2; 3],$
 $a_6 \in [2; 3]$ i $a_5 \leq a_6$
8. a) np. 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1
 b) np. 2, 2, 2, -1, -1, -1, -2, -2
- ☐ 1. a) $n^2 + 2n$ b) $-n^2 + 1$ c) $\frac{n+4}{n+1}$
 d) $\frac{2n+2}{n+6}$ e) $\frac{3n-1}{2n+3}$ f) $\frac{-3n-1}{4n-1}$
 g) $\frac{2n^2+4n+5}{2n+8}$ h) $\frac{-2n^2-4n+2}{2n^2+4n+1}$
2. a) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}$
 b) $5, \frac{7}{2}, \frac{13}{3}, \frac{15}{4}, \frac{21}{5}$
 c) 3, 2, 1, 0, 1 d) 3, 0, 5, 12, 21
 e) 0, -1, 0, 3, 8
 f) 7, 12, 15, 16, 15

5. a) malejący b) stały c) rosnący
6. a) $k < 1$ b) $k > 1$ c) $k = 1$
7. a) $k \in (\frac{3}{2}; \infty)$
 b) $k \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
 c) $k \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$
8. a) nierosnący dla $t \geq 9,$
 niemalejący dla $t \leq 9$
 b) nierosnący dla $t \in [-3; 3],$
 niemalejący dla $t \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$
 c) nierosnący dla $t \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty),$
 niemalejący dla $t \in [0; 2]$
9. a) $k \in (-\infty; 0)$ b) $k \in (0; 1)$
 c) $k \in (-1; 0)$
10. a) $p < 3$ b) $p > 0$ c) $p < 2$
11. a) np. $a_n = -n$ b) np. $a_n = -\frac{1}{n}$
12. a) np. $a_n = -n$
 b) np. $a_n = n - 5$

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

- ☞ 1. a) $a_4 = 0, a_5 = -1, a_6 = 0$
 b) $a_4 = 15, a_5 = 31, a_6 = 63$
 c) $a_4 = 13, a_5 = 27, a_6 = 53$
2. a) $a_2 = -1, a_3 = -4, a_4 = -7,$
 $a_5 = -10, a_6 = -13$
 b) $a_2 = -6, a_3 = -12, a_4 = -24,$
 $a_5 = -48, a_6 = -96$
 c) $a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = -9, a_5 = -35,$
 $a_6 = -115$
 d) $a_2 = \frac{1}{32}, a_3 = \frac{1}{8}, a_4 = 1, a_5 = 16,$
 $a_6 = 512$
 e) $a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 46, a_5 = 2112,$
 $a_6 = 4460539$
 f) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$
3. a) $a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 10$
 b) $a_3 = 4, a_4 = 7, a_5 = 11, a_6 = 18$
 c) $a_3 = 0, a_4 = -1, a_5 = 1, a_6 = 2$
 d) $a_3 = 0, a_4 = -3, a_5 = -4, a_6 = 7$
5. a) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2,$
 $a_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+1}a_n$ dla $n \geq 1$
 b) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2n + 1,$
 $a_{n+1} = \frac{n^2+2n+2}{n^2+1}a_n$ dla $n \geq 1$
 c) $a_1 = 6, a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 3^n,$
 $a_{n+1} = 3a_n$ dla $n \geq 1$

5. d) $a_1 = -1, a_{n+1} = a_n + 2 \cdot (-1)^{n+1},$
 $a_{n+1} = -a_n$ dla $n \geq 1$
 e) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n + 1,$
 $a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n$ dla $n \geq 1$
 f) $a_1 = \sqrt{2},$
 $a_{n+1} = a_n + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1},$
 $a_{n+1} = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}a_n$ dla $n \geq 1$
- ☐ 1. a) $a_2 = 4, a_3 = 0, a_4 = -8, a_5 = -24,$
 2 liczby dodatnie
 b) $a_2 = -1, a_3 = 3, a_4 = -5, a_5 = 11,$
 5 liczb dodatnich
 c) $a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = -7, a_5 = -22,$
 3 liczby dodatnie
 d) $a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 14,$
 8 liczb dodatnich
 e) $a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{9}{16}, a_5 = \frac{289}{256},$
 8 liczb dodatnich
 f) $a_2 = 5, a_3 = 7, a_4 = -4, a_5 = 0,$
 6 liczb dodatnich

2. a) 4 b) 3 c) 6 d) 0
3. a) -4 b) 52 c) -1 d) 5
4. a) $x = -\frac{13}{2}$; rosnący
 b) $x = 20$; malejący
6. a) 0 b) 2 c) $\frac{5}{3}$ d) 2
7. a) -1 lub 0 b) -2 lub 1

3.5. Ciągi monotoniczne (2)

- ☞ 1. a) $c_n = 2n, c_1 = 2, c_2 = 4, c_3 = 6,$
 $c_4 = 8$
 b) $c_n = -2, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -2$
 c) $c_n = n^2 - 1, c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 8,$
 $c_4 = 15$
 d) $c_n = \frac{n-1}{n+1}, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{1}{2},$
 $c_4 = \frac{3}{5}$
2. a) $c_1 = 13, c_2 = 10, c_3 = 13, c_4 = 19;$
 nie jest monotoniczny
 b) $c_1 = -11, c_2 = -2, c_3 = 5, c_4 = 13;$
 rosnący
 c) $c_1 = 12, c_2 = 24, c_3 = 36, c_4 = 48;$
 rosnący
 d) $c_1 = \frac{1}{12}, c_2 = \frac{2}{3}, c_3 = \frac{9}{4}, c_4 = \frac{16}{3};$
 rosnący

4. a) np. $a_n = n, b_n = -\frac{1}{n}$
 b) np. $a_n = b_n = -\frac{1}{n}$
 c) np. $a_n = n - 2, b_n = n - 3$
5. a) np. $a_n = n^2, b_n = n$
 b) np. $a_n = -\frac{1}{n^2}, b_n = -\frac{1}{n}$

- ☐ 1. a), c), d) rosnący b) stały

5. (c_n) - malejący, (d_n) - stały
6. a) $\alpha \in (0; \pi)$ b) $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi)$
7. a), b) nie jest monotoniczny
 c) niemalejący d) rosnący
8. a) $k \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
 b) $k \in [0; \infty)$
9. a), c) niemalejący b) nierosnący

3.6. Ciąg arytmetyczny (1)

- ☞ 1. a) $r = 9$, kolejne wyrazy: 39, 48, 57, 66
 b) $r = 1,$
 kolejne wyrazy: $5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$
 c) $r = -4,$
 kolejne wyrazy: -9, -13, -17, -21
2. a) $a_n = 2n, a_{20} = 40$
 b) $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{7}{2}, a_{20} = \frac{27}{2}$
 c) $a_n = -n + 4, a_{20} = -16$
3. a) $a_n = 2n + 2$
 b) $a_n = 5n - 10$
 c) $a_n = -\frac{1}{4}n + \frac{21}{4}$
4. a) $r = -6$, malejący, $a_n = -6n + 15$
 b) $r = \frac{3}{4}$, rosnący, $a_n = \frac{3}{4}n + 1$
 c) $r = 0$, stały, $a_n = 2$
5. a) $k = 5$
 b) $k = -1$ lub $k = 3$
6. a) $a_4 = 3m + 10, a_5 = 4m + 12;$
 rosnący dla $m > -2,$
 malejący dla $m < -2,$
 stały dla $m = -2$
 b) $a_4 = 2m - 9, a_5 = \frac{5}{2}m - 12;$
 rosnący dla $m > 6,$
 malejący dla $m < 6,$
 stały dla $m = 6$
 c) $a_4 = 3m^2 - 2, a_5 = 4m^2 - 3;$
 rosnący dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty),$
 malejący dla $m \in (-1; 1),$
 stały dla $m \in \{-1, 1\}$

6. d) $a_4 = 3m - 2m^2$, $a_5 = 4m - 3m^2$; rosnący dla $m \in (0; 1)$, malejący dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, stały dla $m \in \{0, 1\}$
7. a) $x = 23$ b) $x = -2$ c) $x = \frac{5}{12}$
- Z** 1. a) $a_7 = 13$, rosnący
b) $a_{11} = -36$, malejący
c) $a_9 = 5$, rosnący
d) $a_{15} = 3,4$, rosnący
2. a) $a_n = 7n - 1$ b) $a_n = 3n - 7$
c) $a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{19}{2}$
3. a) $a_n = 2n - 1$ b) $a_n = -3n + 15$
c) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{15}{2}$
4. a) $a = 4$, $b = 7$
b) $a = 26\frac{1}{2}$, $b = 51$, $c = 75\frac{1}{2}$
5. a) 5, 9, 13, 17, 21
b) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
6. 4 lata – 104,5 cm, 5 lat – 111 cm, 7 lat – 124 cm, 8 lat – 130,5 cm, 9 lat – 137 cm, 10 lat – 143,5 cm
7. a) $a_n = 44 - 4n$, $a_{12} = -4$
b) $a_n = -\frac{21}{2} + \frac{1}{2}n$, $a_{12} = -\frac{9}{2}$
c) $a_n = \frac{11}{4} + \frac{1}{4}n$, $a_{12} = \frac{23}{4}$
8. a) $a_1 = 21$, $r = -5$
b) $a_1 = -2$, $r = 5$
c) $a_1 = -2$, $r = 2$ d) $a_1 = \frac{7}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$
e) $a_1 = -1$, $r = \frac{1}{2}$ lub $a_1 = 1$, $r = -\frac{1}{2}$
f) $a_1 = -1$, $r = 2$ lub $a_1 = \frac{5}{2}$, $r = -\frac{3}{2}$
9. a) $x = 1 - \sqrt{3}$ lub $x = 1 + \sqrt{3}$ b) $x = 10$
10. a_{16}
11. $a_1 = -2$, liczba wyrazów: 15
12. -6, -5, -4, -3
13. a) 6, -2, -10, -18
b) -1, 1, 3, 5 lub -5, -3, -1, 1 lub $-3 - \sqrt{6}$, $-1 - \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$, $3 - \sqrt{6}$ lub $-3 + \sqrt{6}$, $-1 + \sqrt{6}$, $1 + \sqrt{6}$, $3 + \sqrt{6}$

3.7. Ciąg arytmetyczny (2)

- C** 3. a) $a_n = -2n + 8$, $y = -2x + 8$
b) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $a_5 = 13$, $a_n = 3n - 2$
- Z** 1. a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$
2. a), b), d), e) jest c), f) nie jest

5. a) $a_n = 5n - 4$, $a_1 = 1$, $a_2 = 6$, $a_3 = 11$, $a_4 = 16$
b) $a_n = -3n + 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -5$, $a_3 = -8$, $a_4 = -11$
c) $a_n = n\sqrt{3} - 2$, $a_1 = \sqrt{3} - 2$, $a_2 = 2\sqrt{3} - 2$, $a_3 = 3\sqrt{3} - 2$, $a_4 = 4\sqrt{3} - 2$
6. a) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}$; $a_n > 0$ dla $n \geq 4$ i $n \in \mathbb{N}$
b) $a_n = -2n + 9$; $a_n > 0$ dla $n \leq 4$ i $n \in \mathbb{N}_+$
c) $a_n = -\frac{1}{4}n + \frac{5}{2}$; $a_n > 0$ dla $n \leq 9$ i $n \in \mathbb{N}_+$
7. a) $a_n = 3n - 8$, $a_{10} = 22$
b) $a_n = (n + 2)\sqrt{2}$, $a_{10} = 12\sqrt{2}$
9. a) 36 b) 6, 8
10. b) 13,5
11. a) $k \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$ b) $k = -1$
12. a) $k < 2$ b) $k > \frac{1}{2}$

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

- C** 1. a) $S_{50} = 1275$ b) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. a) $a_6 = 16$, $S_6 = 51$
b) $a_{20} = 10$, $S_{20} = 105$
3. a) $S_{31} = 1953$ b) $S_{13} = -299$
5. a) 348 b) 10050 c) -252 d) 0
6. a) 1010 b) 1030 c) 2040
- Z** 1. a) 115 b) -185 c) 10,5
2. a) $a_1 = 0$, $a_{10} = 18$, $S_{10} = 90$
b) $a_1 = -4$, $a_{10} = 5$, $S_{10} = 5$
c) $a_1 = 18$, $a_{10} = -36$, $S_{10} = -90$
3. a) 11 wyrazów, suma: 209
b) 15 wyrazów, suma: 75
c) 20 wyrazów, suma: -440
4. a) 1027140 b) 2475
5. a) 970 b) 810 c) 1584
6. a) 334167 b) 234168 c) 145059
7. a) 3240 b) 329400 c) 83167
8. $a_1 = 1$, $r = \frac{2}{3}$ lub $a_1 = 7$, $r = -\frac{2}{3}$, $S_{10} = 40$
10. a) 21 b) 14 c) 39
11. a) $x = 37$ b) $x = -3$
c) $x = -0,4$ d) $x = -4$
12. a), b), d) rosnący c) malejący

3.9. Ciąg geometryczny (1)

- C** 1. $P_2 = 1 \text{ cm}^2$, $P_3 = 4 \text{ cm}^2$, $P_4 = 16 \text{ cm}^2$
2. a) $q = 2$, $a_4 = 24$, $a_5 = 48$
b) $q = 3$, $a_4 = 1$, $a_5 = 3$
c) $q = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{4}$
d) $q = \frac{1}{4}$, $a_4 = 1$, $a_5 = \frac{1}{4}$
e) $q = -2$, $a_4 = -8$, $a_5 = 16$
f) $q = -\frac{1}{3}$, $a_4 = 1$, $a_5 = -\frac{1}{3}$
3. a) $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$, $a_5 = 81$
b) $a_2 = 8$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$
c) $a_2 = -5$, $a_3 = 5$, $a_4 = -5$, $a_5 = 5$
d) $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 1$, $a_4 = -2$, $a_5 = 4$
e) $a_2 = 1$, $a_3 = \sqrt{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 2\sqrt{2}$
f) $a_2 = 2\sqrt{3}$, $a_3 = 6\sqrt{2}$, $a_4 = 12\sqrt{3}$, $a_5 = 36\sqrt{2}$
4. a) $q = 9$ b) $q = \frac{3}{2}$ c) $q = \frac{1}{6}$ d) $q = -\frac{3}{4}$
e) $q = -2\sqrt{2}$ f) $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$
6. a) $a_6 = 4$ b) $a_7 = \frac{1}{625}$ c) $a_4 = \frac{64}{27}$
d) $a_6 = \frac{625}{64}$ e) $a_5 = -162$ f) $a_{15} = -7$
g) $a_9 = 80$ h) $a_8 = -\frac{1}{27}$
7. a) $a_1 = 8$ b) $a_1 = -\frac{1}{2}$ c) $a_1 = \frac{1}{27}$
- Z** 1. a) $q = \frac{1}{2}$, $a_n = 2^{8-n}$, $a_7 = 2$
b) $q = 4$, $a_n = 4^{n-3}$, $a_7 = 256$
c) $q = -3$, $a_n = (-1)^{n+1}3^{n-6}$, $a_7 = 3$
d) $q = \frac{4}{5}$, $a_n = (\frac{4}{5})^{n-5}$, $a_7 = \frac{16}{25}$
e) $q = \frac{3}{2}$, $a_n = \frac{3^{n-3}}{2^{n-2}}$, $a_7 = \frac{81}{32}$
f) $q = -\sqrt{2}$, $a_n = -(-\sqrt{2})^n$, $a_7 = 8\sqrt{2}$
2. a) $a_4 = 4 + 2\sqrt{2}$, $a_5 = 4\sqrt{2} + 4$
b) $a_4 = 2\sqrt{2} + 3$, $a_5 = 5\sqrt{2} + 7$
3. a) $a_n = \frac{125}{96} \cdot (\frac{8}{25})^{n-1}$ b) $a_n = \frac{54}{25} \cdot (\frac{5}{6})^{n-1}$
c) $a_n = -\frac{7}{2} \cdot (-2)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{7}{2} \cdot 2^{n-1}$
d) $a_n = -\frac{3}{4} \cdot 2^{n-1}$
e) $a_n = -1024 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$ lub $a_n = 1024 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$
f) $a_n = -\frac{1}{243} \cdot (-3)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{1}{243} \cdot 3^{n-1}$
4. a) -243, -81, -3 b) $\frac{3}{16}$, $-\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{2}$
c) 3, 12, 24, 96 d) $\frac{1}{3}$, -1, -9, 27
e) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ f) $\frac{5}{3}$, 5, 15, 45
5. a) -4, -8, -16 lub 4, -8, 16
b) 12, 48, 192 lub -12, 48, -192
c) 7, 7, 7 lub -7, 7, -7
6. a) $a_n = 5^{n-2}$ b) $a_n = (-2)^{n-1}$

3.10. Ciąg geometryczny (2)

- C** 2. a) $a_n = \frac{8}{9} \cdot (\frac{3}{2})^{n-1}$ b) $a_n = -2^{4-n}$
c) $a_n = -2^n$
3. a), c) malejący d), e), f) rosnący
b) nie jest monotoniczny
5. a) $-\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $-\frac{16}{5}$
b) 1, 0, 0 lub $\frac{1}{3}$, 2, 12
c) -1, 1, -1 lub 3, 3, 3
6. $a_6 = 30$
- Z** 1. a), d) malejący b) nie jest monotoniczny
c) rosnący
3. a) $a_n = -4^{7-n}$
b) $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$ lub $a_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$
c) $a_n = 5^{3-n}$ lub $a_n = -5^{3-n}$
d) $a_n = 5^{n-1}$
e) $a_n = (\frac{1}{2})^{n-3}$ lub $a_n = -(\frac{1}{2})^{n-3}$
f) $a_n = -\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$ lub $a_n = \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$
4. $a = 32$, $b = 16$, $c = 8$, $d = 4$
5. $x = 11$, $y = 22$, $z = 44$
6. b) dla $x = y$

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

- C** 1. a) 364 b) -21 c) $\frac{63}{32}$
2. a) $\frac{31}{32}$ b) $\frac{341}{32}$ c) $\frac{5}{32}$
3. a) -63 b) -484
4. a) 7 b) 4
5. 5
6. a) 1023 b) -2046
- Z** 1. a) $15\frac{15}{16}$ b) $26\frac{242}{243}$ c) -1275 d) -56
2. a) -255 b) $\frac{211}{72}$ c) $93(1 - \sqrt{2})$ d) 100
- 3.
- | a_1 | q | n | a_n | S_n |
|------------|---------------|-----|----------------|--------------------|
| 2 | 3 | 5 | 162 | 242 |
| -32 | $\frac{1}{2}$ | 7 | $-\frac{1}{2}$ | $-63\frac{1}{2}$ |
| $\sqrt{8}$ | $-\sqrt{2}$ | 8 | -32 | $30(\sqrt{2} - 2)$ |
4. a) $\frac{1023}{512} \text{ cm}^2$ b) $\frac{31}{8}(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$
5. a) 4 b) 1091,2 c) 2
d) 48 e) $1 + \sqrt{2}$ f) 9
6. a) 6 b) 9 c) 10
7. a) 7 b) 6

8. $0,9 \text{ cm}^2$
 9. a) 4 b) 5
 10. -1023
 11. a) 0 b) x
 12. a) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
 b) $a_n = (-1)^n \cdot 3^{n-1}$ lub $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{6-n}$
 13. 381 lub $\frac{2186}{3}$
 14. $9(\sqrt{3} - 1)$
 15. 8
 16. $a_n = 2^{n-1}$
 17. siódmy
 18. $a_1 = 3$, $q = 2$ lub $a_1 = \frac{93}{11}$, $q = -2$

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

- ☑ 1. a) nie jest b), c), d) jest
 2. a) 2, 7, 12 lub 18, 7, -4
 b) 2, 4, 6 lub 11, 4, -3
 ☐ 1. a) 0 b) 220
 2. $a_n = 2(n - 2)$
 3. 9
 4. $q = 3$, $a_1 = \frac{1}{11}$, $a_6 = 22\frac{1}{11}$
 5. a) 108 lub 36 b) -36
 6. 5, -10 , 20 lub 20, -10 , 5
 7. 4, 8, 16 lub $\frac{28}{3}$, $\frac{28}{3}$, $\frac{28}{3}$
 8. a) 2, 5, 8 lub 11, 5, -1
 b) -6 , 6, 18 lub 10, 6, 2
 9. a) 10, 20 lub $-\frac{15}{2}$, $\frac{45}{4}$ b) 2, 8
 10. a) 9, 3, 1 b) 4, 12, 36
 11. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0 lub $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{15}{16}$
 12. a) $q = \frac{1}{2}$
 b) suma obwodów: $\frac{93}{4}$,
 suma pól: $\frac{341}{64}\sqrt{3}$

3.13. Procent składany

- ☑ 1. a) 6230,91 zł b) 7673,43 zł
 c) 6719,58 zł
 2. odsetki: 3144,47 zł,
 różnica kapitału: 743,25 zł
 3. a), b) 995,43 zł c) 980,34 zł
 4. B
 5. a) 12166,53 zł b) 12189,94 zł
 c) 12201,90 zł d) 12209,97 zł

6. 2641,36 zł
 7. a) po 8 latach: 4791,40 zł,
 po 20 latach: 15484,60 zł
 b) 10001,43 zł
 8. a) 143183,39 zł b) 200144,82 zł
 c) 228151,10 zł
 ☐ 1. a) 2205 zł b) 2552,56 zł
 c) 2687,83 zł
 2. a) 4326,40 zł b) 4637,10 zł
 c) 5920,98 zł
 3. a), b) 754,76 zł
 4. $r \approx 7,49$
 5. na 5 lat: co najmniej 1000 zł,
 na 3 lata: co najmniej 1082 zł
 6. w ciągu 5 lat: 3097,20 zł,
 w ciągu 10 lat: 8097,65 zł
 7. a) 3582,16 zł b) 3586,85 zł
 c) 3590,04 zł d) 3591,60 zł
 8. bank C
 9. 3 lata
 10. $k = 5000$,
 po 18 latach: 12033,10 zł
 11. 25000 zł
 12. a) po 12 latach b) po 24 latach
 13. a) 180840,96 zł b) 9 lat

3.14. Granica ciągu

- ☑ 1. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$
 2. $n \geq 22$
 3. a) $n > 100$ b) $n > 2500$
 c) $n > 10000$ d) $n > 10^{12}$
 4. a) nie ma b) ma

- ☐ 1. a), b), e) ma c), d), f) nie ma
 2. a) $n > 40$ b) $n > 200$
 c) $n > 400$ d) $n > 4 \cdot 10^6$
 3. a) $n > 50$ b) $n > 100$

3.15. Ciągi rozbieżne

- ☑ 1. a) $n > 110$, tak b) $n > 250$, tak
 c) $n > 1600$, tak d) $n > 9$, tak

2. a) $n > 100$ b) $n > 250000$
 c) $n > 1000000$ d) $n > 10^8$

3. a) tak b) nie

- ☐ 1. a), g) $-\infty$ c), h) ∞ b), d), e), f) nie jest

2. a) $n > 20$ b) $n > 200$ c) $n > 499$
 d) $n > 4999$

3. a) $a_n > 10$ dla $n > 10^6$,
 $a_n > 100$ dla $n > 10^{12}$
 b) $n > 5$

3.16. Obliczanie granic ciągów (1)

- ☑ 1. a) -2 b) 3 c) 1
 2. a) $\frac{1}{10}$ b) -2 c) $\frac{8}{3}$
 3. a) -4 b) $\frac{3}{4}$ c) $-\frac{7}{2}$
 4. a) 3 b) $-\frac{10}{9}$ c) 8 d) 1 e) $\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{4}$
 5. a) $-\frac{1}{4}$ b) 1 c) 2
 6. a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) -1 e) $-\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{5}$
 7. a), b) 1
 8. a) 8 b) 4 c) 7 d) 4 e) 1 f) 4
 ☐ 1. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) -2 d) 0 e) 0 f) 0
 2. a) $\frac{1}{4}$ b) 8 c) -4 d) 3 e) 2 f) 4
 3. a) 1 b) -6 c) $\frac{1}{12}$
 4. a) 2 b) 8 c) 1 d) 0 e) 0 f) -1
 5. a) 5 b) 9 c) 1 d) 1 e) 0 f) 0
 6. $\frac{1}{2}$
 7. $\frac{1}{3}$

3.17. Obliczanie granic ciągów (2)

- ☑ 1. a) $-\infty$ b) ∞
 2. a) ∞ b), c) $-\infty$
 3. a), c) ∞ b) $-\infty$
 4. a), b), c) 0
 5. a) 0 b) ∞ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) ∞ f) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
 ☐ 1. a), c), e), f) ∞ b), d) $-\infty$
 2. a), d), f), i) ∞ b), c), e), g), h) $-\infty$
 3. a), c), d), e) ∞ b), f) $-\infty$
 4. a) ∞ b), c) $-\infty$
 5. a), b) $-\infty$ c) ∞ d) 2
 6. a), b) ∞ c), d) $-\infty$
 7. a) 0 b) ∞ c) 1 d) $-\infty$ e) ∞ f) $-\sqrt{2}$
 8. ∞

9. a) $k = 2$ b) $k \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$
 10. a) $-\infty$ dla $p = -2$,
 $\frac{1}{2-p}$ dla $p \in (-2; 2)$,
 $\frac{1}{p-2}$ dla $p \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$,
 ∞ dla $p = 2$
 b) $-\infty$ dla $p \in (-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$,
 $\frac{1}{4}$ dla $p = -\frac{3}{2}$,
 ∞ dla $p \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$

Ciągi ograniczone

1. a) 25, 26, 27
 b) 1250, 1300, 1400
 c) 9, 10, 11

3.18. Szereg geometryczny

- ☑ 1. a) $S_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, $S = \frac{3}{2}$
 b) $S_n = \frac{4}{5} \left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$, $S = \frac{4}{5}$
 2. 1
 3. a) 1000 b) 18 c) 2
 4. a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{34}{99}$ c) $\frac{37}{330}$ d) $\frac{41}{3330}$
 5. a) $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
 b) $x \in (-1; 1)$
 c) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; \infty)$
 d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 6. a) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $x = 1$
 ☐ 1. a) 100 b) $-156\frac{1}{4}$
 c) rozbieżny d) $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)$
 e) rozbieżny f) $-1\frac{3}{7}$
 2. a) rozbieżny b) $\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2$
 3. a) $S = 1$ b) $q = \frac{1}{2}$
 c) $a_1 = 99$ d) $q = \frac{1}{3}$
 4. a) $\frac{1}{9}$ b) 1 c) $\frac{1}{45}$
 d) $\frac{41}{30}$ e) $\frac{20}{33}$ f) $\frac{207}{110}$
 g) $-\frac{60}{11}$ h) $-\frac{1000}{909}$
 5. $a_1 = 32$, $a_2 = 16$, $a_3 = 8$, $a_4 = 4$
 6. $a_1 = 2$, $q = -\frac{1}{2}$
 7. a) $a_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$
 b) $a_1 = 9$, $q = -\frac{1}{2}$
 8. a) $a_1 = 1$ b) $a_1 = 15$, $q = \frac{1}{4}$
 9. a) $x \in (1; 2)$
 b) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$
 10. a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = -1$

11. a) $D = (-1; 1)$, $f(x) = \frac{-1}{x-1} - 1$
 b) $D = (-1; 1)$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$
 c) $D = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
 $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$
 d) $D = (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$,
 $f(x) = \frac{3}{x+3} - 1$
12. a) $D = (-\infty; \frac{3}{2})$, $f(x) = \frac{\frac{1}{4}}{x-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}$
 b) $D = (\frac{7}{2}; \infty)$, $f(x) = \frac{-\frac{1}{4}}{x-\frac{7}{2}} - \frac{1}{2}$
13. a) 4π b) $P(\frac{8}{3}, 0)$
14. 10

Zestaw I

1. a) 3 b) 10
2. $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = 20$, $a_8 = 240$
3. a), c) arytmetyczny
 b) nie jest arytmetyczny
 a), b), c) malejący
4. a) $a_n = 2n - 2$, $a_8 = 14$
 b) $a_n = 3n - 6$, $a_8 = 18$
 c) $a_n = -2n + 10$, $a_8 = -6$
5. a) $a_n = 3n - 1$ lub $a_n = -3n + 8$
 b) $a_n = 2n - 12$ lub $a_n = 2n$
 c) $a_n = n + 1$ lub $a_n = 5n - 11$
6. a) -70 b) 5 c) 15
7. a) 222 b) 168 c) 168
 d) 66 e) 60 f) -6
8. a) 50 b) -550 c) 4000 d) 2525
9. a) $x = 13$ b) $x = -30$
 c) $x = 37$ d) $x = 29$
10. a) 3960 b) 396000
11. a), b), c) geometryczny
 a) malejący
 b), c) rosnący
12. a) 24, 48, 96, 192, 384
 b) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{32}$
 c) -1 , $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $-\frac{1}{625}$
13. a) $a_3 = \frac{1}{10}$, $a_5 = 10$
 b) $a_3 = 8$, $a_5 = 32$
 c) $a_3 = 3$, $a_5 = \frac{1}{3}$
 d) $a_3 = 2$, $a_5 = \frac{1}{2}$ lub $a_3 = a_5 = 0$

14. a) $\frac{93}{16}$ b) $-\frac{55}{8}$ c) 341 lub 521
 d) -44 lub -20
15. a) arytmetyczny dla $x = 1$,
 geometryczny dla $x = 0$ i dla $x = 10$
 b) arytmetyczny dla $x = 0$ i dla $x = 12$,
 geometryczny dla $x = 0$ i dla $x = -\frac{3}{2}$
16. a) 1024 b) $60\frac{1}{7}$
17. np.: a) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 2(n-1)$
 dla $n \geq 1$
 b) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$ dla $n \geq 1$
 c) $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ dla $n \geq 1$
 d) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \log(1 + \frac{1}{n})$
 dla $n \geq 1$
18. a) 2251,02 zł b) 2252,99 zł
 c) 2254,32 zł
19. a), b) 836,74 zł

Zestaw II

1. a), c), d) malejący b) rosnący
2. a), d) rosnący b) malejący
 c) nie jest monotoniczny
4. a) jest b) nie jest
6. a) 1, 2, 3 lub 4, 2, 0
 b) 4, 8, 16 lub 16, 8, 4
7. $b_1 = 2$, $b_2 = -4$, $b_3 = 8$
 lub $b_1 = 8$, $b_2 = -4$, $b_3 = 2$
8. a) $\frac{1}{9}$ b) 3
9. $4\frac{364}{729}\pi \text{ cm}^2$
10. 24
11. a) $-\infty$ b) 0 c) $-\infty$ d) -1
 e) ∞ f) $\frac{1}{2}$ g) -1 h) ∞
12. a) 0 b) ∞
13. a) $b = -2$ b) $b = -2$ lub $b = 4$
14. a) $2 + \sqrt{2}$ b) $3 + 2\sqrt{3}$
15. a) $\frac{4}{33}$ b) $\frac{38}{111}$ c) $\frac{2399}{990}$ d) 4
16. a) $D = (-\frac{1}{2}; \infty)$, $f(x) = x + 1$
 b) $D = (-\infty; \frac{5}{2})$, $f(x) = -x + 3$
17. a) $x = \frac{4}{9}$
 b) $x = -1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$, $x = -1 + \frac{\sqrt{5}}{5}$, $x = 2$
 c) $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
 d) $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Zadania z kontekstem realistycznym

1. 38237,33 zł
2. 100,50 zł
3. a) o około 12,15% b) o 16,64%
4. a), b) tak
5. 5%
6. 8024,26 zł

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. B 3. A 4. D 5. D 6. B 7. C
 8. B 9. C
10. PF
- 11.1. PP 11.2. 5
12. A3
13. DF
14. FF
15. PF
16. AF
- 17.1. 14
18. 4
19. 54
20. jest
21. 6, 8, 10
22. 2, 4, 6
23. 112 cm^2
24. 8

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. $790 - 558\sqrt{2}$
2. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$
3. $p = \frac{5}{3}$
4. $\frac{81}{4}(3 + \sqrt{6})$
5. $2(\sqrt{3} + 2)$
- 6.1. 18π
7. $a_n = 3n + 1$
8. 1, 2, 4 lub 4, 2, 1
9. $\frac{128}{3}$

4.1. Granica funkcji w punkcie

3. a) $x_0 = -1$
 b) $x_0 = 1$
 c) $x_0 \in \{-1, 2\}$

4.2. Obliczanie granic funkcji

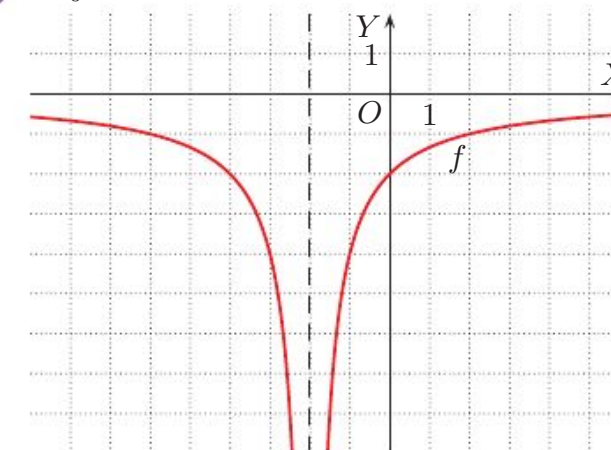
1. a) 16 b) 8 c) 1024
2. a) -5 b) -3 c) 7 d) $\frac{131}{11}$
3. a) -8 b) 0 c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{5}{3}$
4. a), b) 4 c) 0,2
5. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{73}}{3}$ c) $\frac{5}{2}$
6. a) 2 b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
7. 1. a) 5 b) -4 c) $\frac{1}{2}$
 2. a) -18 b) 2 c) -5 d) $-\frac{1}{7}$ e) 1
 f) $\frac{2}{5}$ g) -5 h) $10\frac{1}{2}$ i) 3
 3. a) -2 b) 4 c) $-\frac{3}{2}$
 4. a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) 6 f) $-\frac{5}{2}$
 5. a) 1 b) 7 c) $-\frac{5}{12}$

4.3. Granice jednostronne

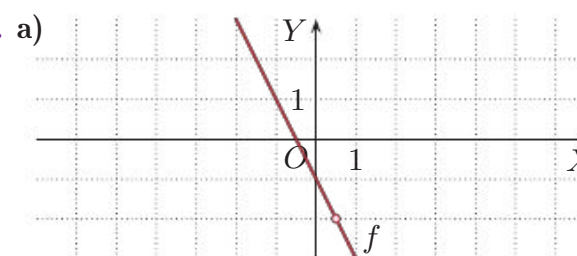
2. a), b) $\frac{1}{2}$ c), d) 0
1. a) 2 b) $-\frac{1}{8}$ c) 1 d) -1
 e) 2 f) $\frac{1}{5}$ g) 0 h) 1
2. a), d) 3; tak b) -2, 0; nie
 c) -1, -2; nie

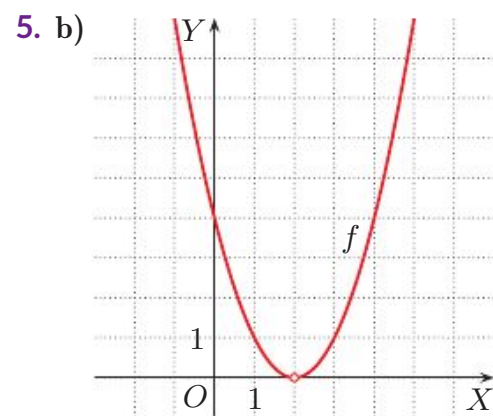
4.4. Granice niewłaściwe

2. $x_0 = -2$



3. a), d) ∞ b), c) $-\infty$
4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $x = 4$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $x = -2$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $x = -3$, $x = 3$
5. a)





6. a), b) ∞

1. a), d), e), h) ∞
b), c), f), g), i) $-\infty$

2. wszystkie asymptoty obustronne:

a) $x = -2$ b) $x = -2, x = 2$
c) $x = -3$ d) $x = \frac{1}{3}$
e) $x = -1$ f) $x = 4$

3. a) $x = 1$ b) brak c) $x = 2$

4.5. Granica funkcji w nieskończoności

2. a) w $\pm\infty$: $y = -2$
b) w $\pm\infty$: $y = 3$
c) w $-\infty$: $y = -2$, w ∞ : $y = 2$

4. a), c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

5. a) $-\infty$ b), c), d) ∞

6. a), c) $-\infty$ b) ∞

7. a) 3 b) $-\infty$ c) 0
d) 1 e) 4 f) 0

1. a) $-\infty$ b), c) ∞

2. a) 4 b) -3 c) -2
d) -5 e) 2 f) -2
g), h), i) 0
j) $-\infty$ k), l) ∞

3. a) $\frac{1}{6}$ b) 6 c) -1

4. a), c) 0 b) ∞

5. a), b), c) ∞

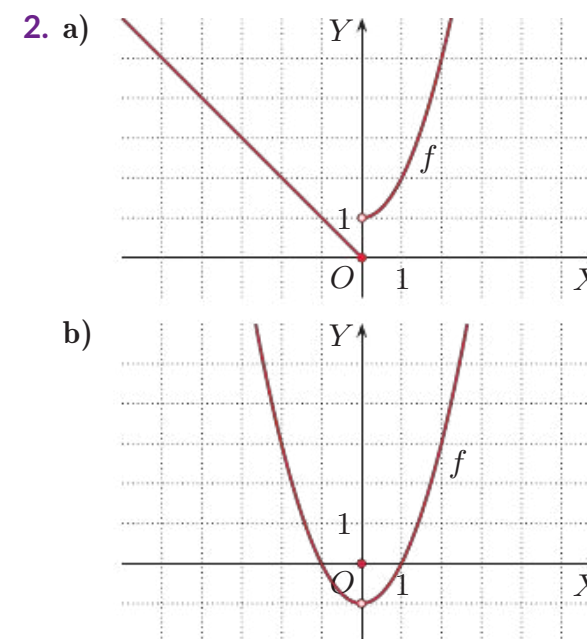
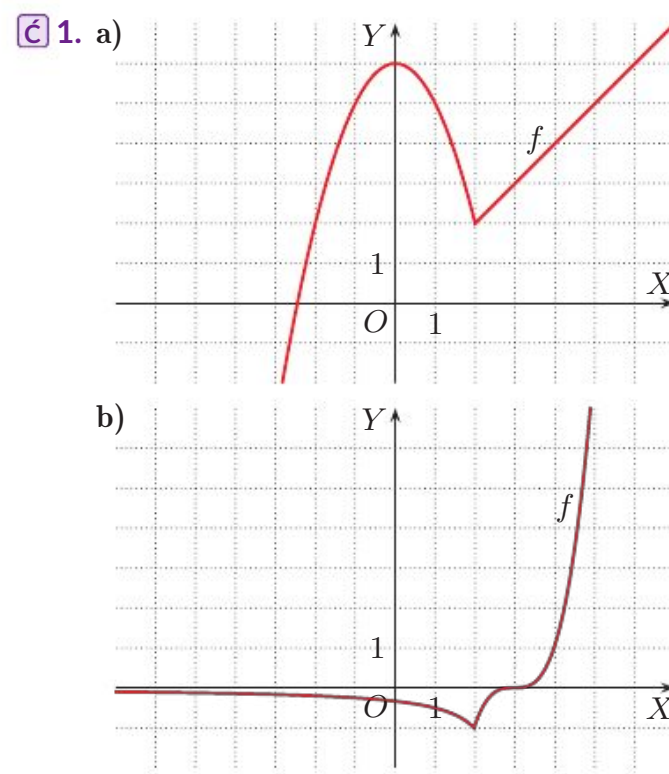
6. a) $y = 0$ w $\pm\infty$ b) $y = 2$ w $\pm\infty$
c) $y = -3$ w $\pm\infty$ d) $y = 5$ w $\pm\infty$
e) $y = 1$ w ∞ f) $y = 1$ w $-\infty$

7. a) $x = 1$ – pionowa obustronna,
 $y = 1$ – pozioma w $\pm\infty$
b) $x = 4$ – pionowa obustronna,
 $y = -2$ – pozioma w $\pm\infty$
c) $x = \frac{2}{3}$ – pionowa obustronna,
 $y = 2$ – pozioma w $\pm\infty$
d) $x = -2, x = 2$ – pionowe obustronne,
 $y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
e) $x = -3, x = 3$ – pionowe obustronne,
 $y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
f) $x = -5$ – pionowa obustronna,
 $y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
g) $x = -1, x = 2$ – pionowe obustronne,
 $y = 2$ – pozioma w $\pm\infty$
h) $x = -1, x = 5$ – pionowe obustronne,
 $y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
i) $y = 1$ – pozioma w $\pm\infty$

8. a) $y = 2$ – pozioma w $\pm\infty$,
 $x = 1$ – pionowa prawostronna
b) $y = 3$ – pozioma w $\pm\infty$,
 $x = 1$ – pionowa prawostronna
c) $y = 4$ – pozioma w $\pm\infty$,
 $x = 2$ – pionowa prawostronna,
 $x = -2$ – pionowa lewostronna

9. a) 2 b) -2 c) $\frac{1}{2}$

4.6. Ciągłość funkcji



3. a) $a = 0$
b) $a = -\sqrt{2}, a = \sqrt{2}$

2. a), b), c), e), f) nieciągła
d) ciągła

3. a) $a = 2$
b) $a = 4$
c) $a = -3, a = 1$
d) $a = -3, a = 1$

4. nieciągła dla $x \in \mathbb{Z}$

5. a) $a = 2$ i $b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) ($a = -\frac{1}{3}$ lub $a = \frac{1}{2}$)
i ($b = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $b = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

6. a) $a = 3, b = \frac{4}{5}, c = -\frac{1}{10}$
b) $a = -1, b = -\frac{1}{4}, c = 2$

4.7. Własności funkcji ciągłych

4. a) wartość najmniejsza: 1,
wartość największa: 4
b) wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 4
c) wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 9

3. np.: a) $(0; \frac{1}{2})$ b) $(\frac{1}{2}; 1)$ c) $(1; \frac{3}{2})$

7. a) $f(4) = 4$
b) $f(3) = 1$
c) $f(4) = 0$

8. a) przyjmuje
b) nie przyjmuje

4.8. Pochodna funkcji w punkcie

1. a) $a = 1$ b) $a = 2$ c) $a = 3$

2. $a = -1$

3. a) 2 b) 16 c) -2 d) 9

4. a) $a = 2; \alpha \approx 63^\circ$
b) $a = 3; \alpha \approx 72^\circ$
c) $a = -\frac{1}{4}; \alpha \approx 166^\circ$

1. a) $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$
b) $f'(x_0) = f'(x_1) = 3$
c) $f'(x_0) = 2, f'(x_1) = -2$
d) $f'(x_0) = -1, f'(x_1) = -\frac{1}{4}$
e) $f'(x_0) = 12, f'(x_1) = 27$
f) $f'(x_0) = \frac{1}{2}, f'(x_1) = \frac{1}{4}$

2. a) $PA: y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3},$
 $PB: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
b) 1

3. a), b) 135° c) 45°

4.9. Funkcja pochodna

2. a) 75 b) -2 c) $\frac{2}{5}$

3. a) $x = 1$ b) $x = \frac{1}{16}$
c) równanie sprzeczne

4. a) $y = 6x - 9$
b) $y = -4x - 4$
c) $y = 3x - 2$

2. a) $y = -8x - 16$
b) $y = 27x + 54$
c) $y = -4x + 4$

3. a) $y = x - \frac{1}{4}$
b) $y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}$
c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{12}$

4. a) (3, 9)
b) $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
c) $(\frac{1}{144}, \frac{1}{12})$

5. a) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{36})$
b) $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{27})$
c) $(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$

6. a) tak; $y = 3x - 2, y = 3x + 2$
b) tak; $y = -4x + 4, y = -4x - 4$
c) nie

7. b) $\sqrt{1,2} \approx 1,1, \sqrt{0,9} \approx 0,95$

4.10. Działania na pochodnych

- ☞ 1. a) $f'(x) = 36x^2$ b) $f'(x) = 3x^5$
c) $f'(x) = 28x^6$
d) $f'(x) = -6x^{-2}, x \neq 0$
e) $f'(x) = -12x^{-7}, x \neq 0$
f) $f'(x) = \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{4}}, x > 0$
2. a) $f'(x) = 8x^3 - 6x$
b) $f'(x) = x^4 + 12x^3 - 14x$
c) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 12x^2, x > 0$
d) $f'(x) = 3x^5 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$
3. a) $f'(x) = 3\sqrt{x} - 12x^2, x > 0$
b) $f'(x) = -26x^5\sqrt{x} + 12x, x > 0$
c) $f'(x) = 14x^6 - 8x^3 - 4$
d) $f'(x) = 28x^6 + 24x^5 - 5x^4 - 68x^3 + 8x$
e) $f'(x) = 16,5x^4\sqrt{x} - 2,5x\sqrt{x}, x > 0$
f) $f'(x) = 4,5x^3\sqrt{x} + 4, x > 0$
4. a) $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+2)^2}$
b) $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
c) $f'(x) = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2}, x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$
6. a) $f'(x) = -\frac{4}{x^5}, x \neq 0$
b) $f'(x) = -\frac{8x}{(4x^2+3)^2}$
c) $f'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2}, x \in (0; 4) \cup (4; \infty)$
- ☒ 1. a) $f'(x) = -6x + 1, f'(0) = 1, f'(1) = -5$
b) $f'(x) = 8x - 5, f'(0) = -5, f'(1) = 3$
c) $f'(x) = 6x^2 + 4, f'(0) = 4, f'(1) = 10$
d) $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 6, f'(0) = 6, f'(1) = 11$
e) $f'(x) = -x^3 + x^2 - x, f'(0) = 0, f'(1) = -1$
f) $f'(x) = -x^4 + 2x^3 - 3, f'(0) = -3, f'(1) = -2$
2. a) $f'(x) = 4x + 5$
b) $f'(x) = 4x^3 + 2x$
c) $f'(x) = -12x^3 - 9x^2 + 2x + 1$
d) $f'(x) = 10x^4 - 15x^2 - 4x$
e) $f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x - 1$
f) $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x - 4$
3. a) $f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$
b) $f'(x) = \frac{-2x^2+2x}{(1-2x)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
c) $f'(x) = \frac{-5x+2}{x^3}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- d) $f'(x) = \frac{3x^2-2x-3}{(3x-1)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$
e) $f'(x) = \frac{6x^2+4x+6}{(1-x^2)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
f) $f'(x) = \frac{5x^2+2x-3}{(3x-x^2)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$
g) $f'(x) = \frac{x^4-3x^2+2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
h) $f'(x) = 2x, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
i) $f'(x) = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
j) $f'(x) = -\frac{5}{(5x-1)^2} - \frac{1}{x^2}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{5}\}$
k) $f'(x) = \frac{4x^3}{(1-x^4)^2} + \frac{6}{x^4}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$
l) $f'(x) = -\frac{9x^2}{(x^3-2)^2} + \frac{1}{x^5}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt[3]{2}\}$

4. a) $f'(x) = \frac{1-10x^2}{2\sqrt{x}}, D_f = [0; \infty), D_{f'} = \mathbb{R}_+, f'(1) = -\frac{9}{2}, f'(4) = -\frac{159}{4}$
b) $f'(x) = \frac{3x+2\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}}, D_f = [0; \infty), D_{f'} = \mathbb{R}_+, f'(1) = 0, f'(4) = \frac{11}{4}$
c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}, D_f = [0; \infty), D_{f'} = \mathbb{R}_+, f'(1) = \frac{1}{8}, f'(4) = \frac{1}{36}$
d) $f'(x) = \frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R}_+, f'(1) = \frac{7}{2}, f'(4) = \frac{13}{4}$
e) $f'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{4}}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R}_+, f'(1) = -2, f'(4) = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}$
f) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}, D_f = [0; \infty), D_{f'} = \mathbb{R}_+, f'(1) = \frac{9}{4}, f'(4) = 3 + \frac{3}{8}\sqrt{2}$

7. a), b) 2 c) $\frac{8}{9}$ d) $-\frac{5}{7}$

8. a) $y = x - 3$

- b) $y = -6x + 3$

- c) $y = -6x + 9$

- d) $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

- e) $y = 3x$

- f) $y = -4x - 22$

- g) $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

- h) $y = \frac{1}{2}$

9. a), b), c), d) tak

10. a) $y = -2x - 5, y = -2x + 3$

- b) $y = -2x - 4, y = -2x + 4$

11. a) $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $f'(\frac{\pi}{3}) = 4, f'(\frac{\pi}{4}) = 2$

12. a) $2\cos^2 x - 1$
b) $2\sin x + (2x + 1)\cos x$
c) $2x\operatorname{tg} x + \frac{x^2+3}{\cos^2 x}$ d) $2\sin x \cos x$
e) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{x}{\sin^2 x}$ f) $\frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$
g) $-2\sin x \cos x$ h) $\frac{1}{1+\cos x}$ i) $\frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}$

4.11. Pochodna funkcji złożonej

- ☞ 1. a) $h(x) = \sqrt{x^2+4}, D_h = \mathbb{R}$
b) $h(x) = \sqrt{x^2-1}, D_h = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$
c) $h(x) = 2\sqrt{x} - 4, D_h = [0; \infty)$
d) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, D_h = \mathbb{R}_+$
2. a) $h'(x) = 12x(2x^2 - 1)^2$
b) $h'(x) = 4(2x - 3)(x^2 - 3x)^3$
c) $h'(x) = 5(6x + 1)(3x^2 + x)^4$
d) $h'(x) = 24(4x + 6)^5$
3. a) $h'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}, D_h = D_{h'} = \mathbb{R}$
b) $h'(x) = \frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}}, D_h = (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [0; \infty), D_{h'} = (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (0; \infty)$
c) $h'(x) = -\frac{1}{2|x|\sqrt{x^2+x}}, D_h = (-\infty; -1] \cup (0; \infty), D_{h'} = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
d) $h'(x) = \frac{1}{4\sqrt{4x+x\sqrt{x}}}, D_h = [0; \infty), D_{h'} = (0; \infty)$
- ☒ 1. a) $f'(x) = 3(x+1)^2, f'(0) = 3, f'(1) = 12$
b) $f'(x) = 8x(x^2+1)^3, f'(0) = 0, f'(1) = 64$
c) $f'(x) = -5(x-1)^4, f'(0) = -5, f'(1) = 0$
d) $f'(x) = 24x(4x^2+2)^2, f'(0) = 0, f'(1) = 864$
e) $f'(x) = 15(3x+2)^4, f'(0) = 240, f'(1) = 9375$
f) $f'(x) = 12(10x^3-3)(5x^4-6x+2)^5, f'(0) = -1152, f'(1) = 84$

2. a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}, D_f = [2; \infty), D_{f'} = (2; \infty)$
b) $f'(x) = \frac{6x}{\sqrt{6x^2+1}}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$
c) $f'(x) = \frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x}}, D_f = [0; \infty), D_{f'} = (0; \infty)$
d) $f'(x) = \frac{3x-3}{\sqrt{3x^2-6x}}, D_f = (-\infty; 0] \cup [2; \infty), D_{f'} = (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
e) $f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}}, D_f = (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [0; \infty), D_{f'} = (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (0; \infty)$
f) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}, D_f = [-2; 2], D_{f'} = (-2; 2)$
3. a) $f'(x) = (70x+17)(2x+1)(7x-1)^2, D_f = D_{f'} = \mathbb{R}, f'(0) = 17$
b) $f'(x) = 2(x^2-1)(3-x)(-3x^2+6x+1), D_f = D_{f'} = \mathbb{R}, f'(0) = -6$
c) $f'(x) = \frac{10x^2+2x}{\sqrt{4x+1}}, D_f = [-\frac{1}{4}; \infty), D_{f'} = (-\frac{1}{4}; \infty), f'(0) = 0$
d) $f'(x) = \frac{3x^2-14x^3}{\sqrt{1-4x}}, D_f = (-\infty; \frac{1}{4}], D_{f'} = (-\infty; \frac{1}{4}), f'(0) = 0$
4. a) $f'(x) = \frac{-6x-7}{2(3x+1)\sqrt{3x+1}}, D_f = D_{f'} = (-\frac{1}{3}; \infty), f'(1) = -\frac{13}{16}$
b) $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. a) $h'(1) = -3$ b) $h'(1) = -\frac{1}{3}$
6. a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ b) $y = x + 2$
7. $x = -1$
8. a) $f'(x) = 4\cos 4x$
b) $f'(x) = -5\sin 5x$
c) $f'(x) = \frac{6}{\cos^2(6x-1)}, D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}: k \in \mathbb{Z}\}$
d) $f'(x) = 2x \cos x^2$
e) $f'(x) = -2x \sin x^2$
f) $f'(x) = 3x^2 \cos(x^3 - 1)$
g) $f'(x) = -2x \sin(x^2 - 1)$
h) $f'(x) = 2\sin x \cos x$
i) $f'(x) = -2\sin x \cos x$
j) $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$

$$8. \text{ k) } f'(x) = \frac{-3x^2}{\cos^2(1-x^3)},$$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \sqrt[3]{1 + \frac{\pi}{2} + k\pi} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$1) f'(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x},$$

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4.12. Interpretacja fizyczna pochodnej

$$\text{C} 1. v_{\text{sr}} = 4, v(t_1) = 2, v(t_2) = 4, v(t_3) = 6$$

$$2. \text{ a) } h'(t) = v(t)$$

$$\text{Z} 1. v(1) = 9,8 \text{ m/s} = 35,28 \text{ km/h},$$

$$v(3) = 29,4 \text{ m/s} = 105,84 \text{ km/h}$$

$$2. v_Z = 141,12 \text{ km/h}, v_M = 53,28 \text{ km/h}$$

$$3. 0 \text{ m/s}$$

$$4. \text{ a) } a(1) = a(4) = 4$$

$$\text{b) } a(1) = 1, a(4) = 7$$

$$\text{c) } a(1) = -4, a(4) = 17$$

$$5. v(t) = 24,5 - 9,8t, a(t) = -9,8$$

4.13. Monotoniczność funkcji

$$\text{C} 1. f \text{ rosnąca w } (-\infty; 2], f'(x) \geq 0;$$

$$f \text{ malejąca w } [2; \infty), f'(x) \leq 0$$

$$3. \text{ a) maleje w } (-\infty; 0] \text{ i w } [2; \infty),$$

$$\text{rośnie w } [0; 2]$$

$$\text{b) rośnie w } (-\infty; -1] \text{ i w } [1; \infty),$$

$$\text{maleje w } [-1; 1]$$

$$4. \text{ a) rośnie w } (-\infty; -1] \text{ i w } [1; \infty),$$

$$\text{maleje w } [-1; 1]$$

$$\text{b) rośnie w } (-\infty; -\sqrt{2}] \text{ i w } [\sqrt{2}; \infty),$$

$$\text{maleje w } [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\text{c) maleje w } \left(-\infty; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right] \text{ i w } \left[0; \frac{\sqrt{10}}{2}\right],$$

$$\text{rośnie w } \left[-\frac{\sqrt{10}}{2}; 0\right] \text{ i w } \left[\frac{\sqrt{10}}{2}; \infty\right)$$

$$\text{d) rośnie w } (-\infty; -3] \text{ i w } \left[-\frac{1}{3}; \infty\right),$$

$$\text{maleje w } \left[-3; -\frac{1}{3}\right]$$

$$\text{e) rośnie w } \mathbb{R}$$

$$\text{f) rośnie w } (-\infty; 0] \text{ i w } \left[\frac{8}{3}; \infty\right),$$

$$\text{maleje w } \left[0; \frac{8}{3}\right]$$

$$5. \text{ a) maleje w } (-\infty; 2) \text{ i w } (2; \infty)$$

$$\text{b) rośnie w } (-\infty; -8) \text{ i w } (-8; \infty)$$

$$\text{c) rośnie w } (-\infty; 1] \text{ i w } [7; \infty),$$

$$\text{maleje w } [1; 4] \text{ i w } (4; 7]$$

$$\text{Z} 3. \text{ a) rośnie w } (-\infty; -2] \text{ i w } [2; \infty),$$

$$\text{maleje w } [-2; 2]$$

$$\text{b) rośnie w } (-\infty; 1] \text{ i w } [2; \infty),$$

$$\text{maleje w } [1; 2]$$

$$\text{c) rośnie w } (-\infty; -7] \text{ i w } [1; \infty),$$

$$\text{maleje w } [-7; 1]$$

$$\text{d) maleje w } (-\infty; 2] \text{ i w } [6; \infty),$$

$$\text{rośnie w } [2; 6]$$

$$\text{e) maleje w } (-\infty; -1], \text{ rośnie w } [-1; \infty)$$

$$\text{f) maleje w } (-\infty; -2] \text{ i w } [1; 2],$$

$$\text{rośnie w } [-2; 1] \text{ i w } [2; \infty)$$

$$\text{g) maleje w } (-\infty; -2],$$

$$\text{rośnie w } [-2; \infty)$$

$$\text{h) rośnie w } (-\infty; -6] \text{ i w } [-2; 2],$$

$$\text{maleje w } [-6; -2] \text{ i w } [2; \infty)$$

$$4. \text{ a) rośnie w } (-\infty; -2] \text{ i w } [2; \infty),$$

$$\text{maleje w } [-2; 0] \text{ i w } (0; 2]$$

$$\text{b) maleje w } (-\infty; 0] \text{ i w } (0; \frac{1}{2}],$$

$$\text{rośnie w } [\frac{1}{2}; \infty)$$

$$\text{c) rośnie w } (-\infty; 0] \text{ i w } (0; \infty)$$

$$\text{d) maleje w } (-\infty; -1] \text{ i w } (0, 1],$$

$$\text{rośnie w } [-1; 0] \text{ i w } [1; \infty)$$

$$\text{e) maleje w } (-\infty; -1] \text{ i w } [1; \infty),$$

$$\text{rośnie w } [-1; 1]$$

$$\text{f) rośnie w } (-\infty; -1] \text{ i w } [7; \infty),$$

$$\text{maleje w } [-1; 3] \text{ i w } (3; 7]$$

$$\text{g) maleje w } (-\infty; 3] \text{ i w } [7; \infty),$$

$$\text{rośnie w } [3; 5] \text{ i w } (5; 7]$$

$$\text{h) rośnie w } (-\infty; -1] \text{ i w } (-1; 0],$$

$$\text{maleje w } [0; 1] \text{ i w } (1; \infty)$$

$$\text{i) maleje w } (-\infty; 1 - \sqrt{2}]$$

$$\text{i w } [1 + \sqrt{2}; \infty),$$

$$\text{rośnie w } [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$$

$$\text{j) maleje w } (-\infty; -1), (-1; \frac{1}{2}] \text{ i w } [2; \infty),$$

$$\text{rośnie w } [\frac{1}{2}; 1] \text{ i w } (1; 2]$$

$$\text{k) maleje w } (-\infty; -4], [-1; 2] \text{ i w } (2; \infty),$$

$$\text{rośnie w } [-4; -2] \text{ i w } (-2; -1]$$

$$\text{l) rośnie w } (-\infty; -3] \text{ i w } [0; \infty),$$

$$\text{maleje w } (-3; 0]$$

$$5. \text{ a) maleje w } (-\infty; -2] \text{ i w } [0; 3],$$

$$\text{rośnie w } [-2; 0] \text{ i w } [3; \infty)$$

$$\text{b) rośnie w } (-\infty; -3] \text{ i w } [-1; \infty),$$

$$\text{maleje w } [-3; -1]$$

$$\text{c) rośnie w } (-\infty; 0] \text{ i w } [2; \infty),$$

$$\text{maleje w } [0; 2]$$

$$6. \text{ a) } k \in [\frac{9}{4}; \infty) \quad \text{b) } k \in [\frac{3}{2}; \infty)$$

$$\text{c) } k \in [-2; \infty) \quad \text{d) } k \in [-3; 3]$$

$$7. \text{ a) } k \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \quad \text{b) } k \in (-\infty; 0]$$

4.14. Ekstrema funkcji

$$\text{C} 1. \text{ a) minimum } f(-1) = 0,$$

$$\text{maksimum } f(1) = 4$$

$$\text{b) minimum } f(2) = -20,$$

$$\text{maksimum } f(-1) = 7$$

$$\text{c) minimum } f(4) = -\frac{112}{3},$$

$$\text{maksimum } f(-1) = \frac{13}{3}$$

$$\text{d) minimum } f(2) = -12$$

$$\text{e) minima } f(0) = f(2) = 0,$$

$$\text{maksimum } f(1) = 1$$

$$\text{f) minimum } f(\sqrt{3}) = -\frac{24}{5}\sqrt{3} + 6,$$

$$\text{maksimum } f(-\sqrt{3}) = \frac{24}{5}\sqrt{3} + 6$$

$$\text{g) minimum } f(1) = 2,$$

$$\text{maksimum } f(-1) = -2$$

$$\text{h) maksimum } f(0) = 0$$

$$\text{i) minimum } f(-1 - \sqrt{5}) = \frac{1 - \sqrt{5}}{8},$$

$$\text{maksimum } f(-1 + \sqrt{5}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{8}$$

$$3. \text{ a) maksimum } f(0) = 0$$

Ani pochodna, ani styczna do wykresu funkcji w tym punkcie nie istnieją.

$$\text{b) minima } f(-2) = f(2) = 0,$$

$$\text{maksimum } f(0) = 4$$

Pochodna funkcji oraz styczna do wykresu istnieją dla maksimum, ale nie istnieją dla minimów tej funkcji.

$$\text{Z} 1. \text{ a) minimum } f(-1) = -5,$$

$$\text{maksimum } f(3) = 27$$

$$\text{b) minimum } f(2) = -19,$$

$$\text{maksimum } f(-2) = 13$$

$$\text{c) minimum } f(2) = -11\frac{1}{3},$$

$$\text{maksimum } f(-5) = 45\frac{5}{6}$$

$$\text{d) minima } f(-2) = f(2) = -10,$$

$$\text{maksimum } f(0) = 6$$

$$\text{e) minimum } f(0) = -3$$

$$\text{f) minimum } f(3) = -161,$$

$$\text{maksimum } f(-3) = 163$$

$$\text{g) minimum } f(2) = 4,$$

$$\text{maksimum } f(-2) = -4$$

$$\text{h) minimum } f(1) = \frac{3}{2}$$

$$\text{i) minimum } f(1) = 4,$$

$$\text{maksimum } f(-1) = -4$$

$$2. \text{ a) rośnie w } (-\infty; 0] \text{ i w } (0; 1],$$

$$\text{maleje w } [1; 2] \text{ i w } (2; \infty),$$

$$\text{maksimum } f(1) = -4$$

$$\text{b) rośnie w } (-\infty; -3] \text{ i w } (-3; 0],$$

$$\text{maleje w } [0; 3] \text{ i w } (3; \infty),$$

$$\text{maksimum } f(0) = 0$$

$$\text{c) rośnie w } [-9; -5] \text{ i w } (-5; -1],$$

$$\text{maleje w } (-\infty; -9] \text{ i w } [-1; \infty),$$

$$\text{minimum } f(-9) = 18,$$

$$\text{maksimum } f(-1) = 2$$

$$\text{d) maleje w } \left(-\infty; -\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right]$$

$$\text{i w } \left[\frac{\sqrt{13}-2}{3}; \infty\right),$$

$$\text{rośnie w } \left[-\frac{\sqrt{13}+2}{3}; \frac{\sqrt{13}-2}{3}\right],$$

$$\text{minimum } f\left(-\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right) = \frac{2-\sqrt{13}}{2},$$

$$\text{maksimum } f\left(\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right) = \frac{\sqrt{13}+2}{2}$$

$$\text{e) rośnie w } (-\infty; -3] \text{ i w } [3; \infty),$$

$$\text{maleje w } [-3; -\sqrt{3}], \text{ w } (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$$

$$\text{i w } (\sqrt{3}; 3], \text{ minimum } f(3) = \frac{9}{2},$$

$$\text{maksimum } f(-3) = -\frac{9}{2}$$

$$\text{f) rośnie w } (-\infty; 4 - \sqrt{6}]$$

$$\text{i w } [4 + \sqrt{6}; \infty),$$

$$\text{maleje w } [4 - \sqrt{6}; 4] \text{ i w } (4; 4 + \sqrt{6}],$$

$$\text{minimum } f(4 + \sqrt{6}) = 5 + 2\sqrt{6},$$

$$\text{maksimum } f(4 - \sqrt{6}) = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$4. \text{ a) } m = -1$$

$$\text{b) } m = \frac{9}{2}$$

$$5. \text{ a) minimum dla } m = -1$$

$$\text{b) maksimum dla } m = 3$$

$$6. \text{ a) } a \in (-\infty; 0]$$

$$\text{b) } a \in [\frac{1}{3}; \infty)$$

$$\text{c) } a \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$$

$$7. \text{ a) } a = 5, b = 4, \text{ maksimum;}$$

$$\text{funkcja ma minimum } f(7) = 9$$

$$\text{b) maksimum}$$

4.15. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji

$$\text{C} 1. \text{ a) najmniejsza: } f(1) = 0,$$

$$\text{największa: } f(-1) = 4$$

$$\text{b) najmniejsza: } f(2) = 1,$$

$$\text{największa: } f(4) = 9$$

$$2. \text{ a) najmniejsza: } f(2) = -4,$$

$$\text{największa: } f(4) = 4$$

$$\text{b) najmniejsza: } f(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4},$$

$$\text{największa: } f(2) = 32$$

3. a) najmniejsza: $f(1) = -3$,
największa: $f(2) = 8$
b) najmniejsza: $f(3) = \frac{1}{10}$,
największa: $f(1) = \frac{1}{2}$
c) najmniejsza: $f(0) = f(2) = 0$,
największa: $f(-2) = 16$
d) najmniejsza: $f(0) = 0$,
największa: $f(-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 4$

1. a) najmniejsza: $f(-1) = f(2) = -2$,
największa: $f(3) = f(0) = 2$
b) najmniejsza: $f(2) = -2$,
największa: $f(3) = 2$
c) najmniejsza: $f(-1) = -2$,
największa: $f(0) = 2$
d) najmniejsza: $f(-2) = -18$,
największa: $f(4) = 18$

2. a) najmniejsza: $f(0) = 1$,
największa: $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 1$
b) najmniejsza: $f(-2) = -10$,
największa: $f(1) = 11$
c) najmniejsza: $f(3) = -25$,
największa: $f(-1) = 7$
d) najmniejsza: $f(-2) = f(2) = -2$,
największa: $f(-1) = f(1) = 7$

3. a) najmniejsza: $f(0) = \frac{2}{3}$,
największa: $f(-1) = f(1) = \frac{3}{4}$,
 $f(D) = [\frac{2}{3}; \frac{3}{4}]$
b) najmniejsza: $f(6) = 12$,
największa: $f(4) = 16$,
 $f(D) = [12; 16]$
c) najmniejsza: $f(\frac{4}{3}) = -\frac{1}{8}$,
największa: $f(1) = f(2) = 0$,
 $f(D) = [-\frac{1}{8}; 0]$
d) najmniejsza: $f(-1) = -2$,
największa: $f(1) = 2$,
 $f(D) = [-2; 2]$
e) najmniejsza: $f(3) = \frac{1}{100}$,
największa: $f(0) = 1$,
 $f(D) = [\frac{1}{100}; 1]$
f) najmniejsza: $f(0) = \frac{1}{2}$,
największa: $f(-1) = 1$,
 $f(D) = [\frac{1}{2}; 1]$

4. $p = 7$
5. a) $m \in [-15; 9]$
b) $m \in [0; 26]$
6. a) $m \in [-\sqrt[6]{32}; \sqrt[3]{9}]$
b) $m \in [-1; \sqrt[3]{63}]$
7. a) $m \in [-1; 1]$
b) $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

4.16. Zagadnienia optymalizacyjne

1. a) kwadrat o boku 15 cm b) 24 cm^2

2. a) $\frac{64}{27}$
b) wszystkie krawędzie równe $\frac{16}{3}$
c) krawędź podstawy 4,
wysokość $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3. a) $2\sqrt{3} \text{ cm} \times 2\sqrt{3} \text{ cm} \times 2\sqrt{3} \text{ cm}$
b) $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$

4. 4

5. $4(4 + \sqrt{10})$

1. kwadrat o boku $5\sqrt{2} \text{ cm}$
2. $x = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $y = 4\sqrt{6} \text{ cm}$

3. a) $15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$
b) $24 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$

4. $3\sqrt{3} \text{ cm}^2$

5. 1

6. $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$

7. $2 \text{ dm} \times 2 \text{ dm} \times 1 \text{ dm}$

8. $(10 - 2\sqrt{7}) \text{ cm}$

9. $y = -2x + 4$

10. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

11. b) $|OA| = 2$, $|OC| = 16$

12. $\frac{256}{27}$

13. $\frac{8}{3}(1 + \sqrt{3})$

14. a) $(-\sqrt{\frac{19}{2}}, \frac{19}{2})$, $(\sqrt{\frac{19}{2}}, \frac{19}{2})$

- b) $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{13}{2})$, $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{13}{2})$

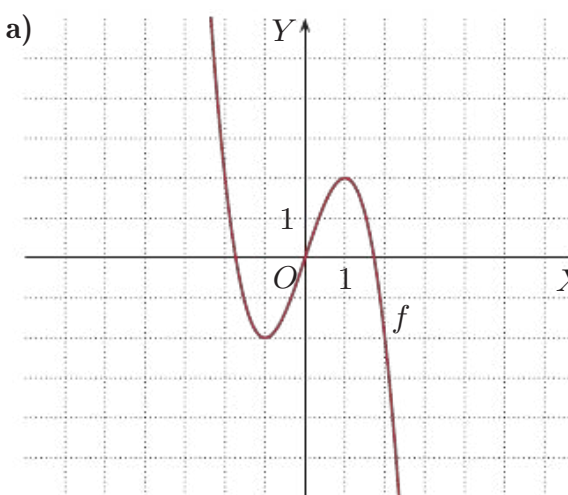
- c) $(-\sqrt{2}, 3)$, $(\sqrt{2}, 3)$

15. a) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3})$ lub $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3})$

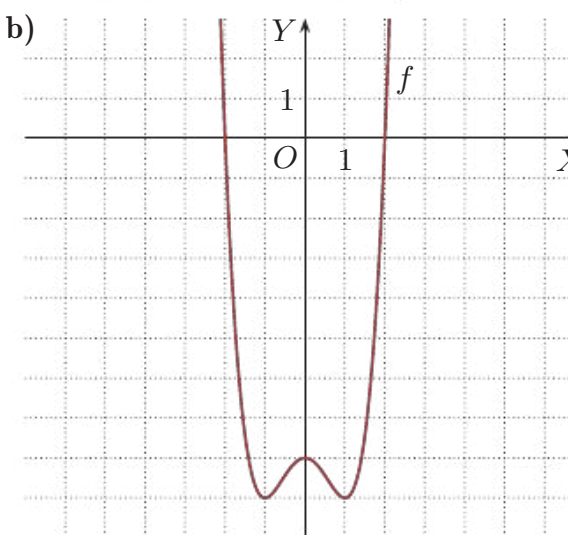
- b) $(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3})$ lub $(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3})$

4.17. Szkicowanie wykresu funkcji

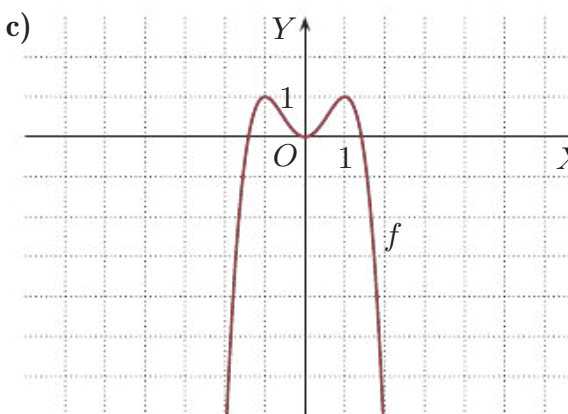
1. a)



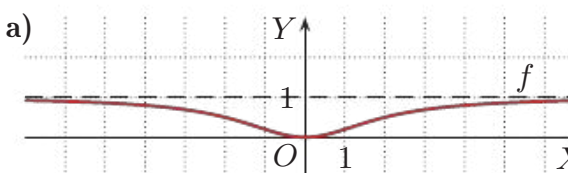
- b)



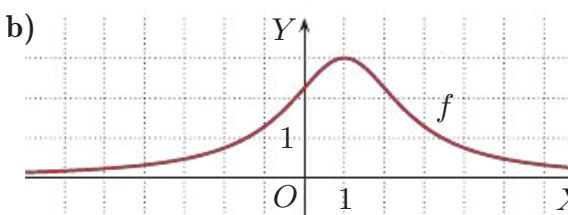
- c)



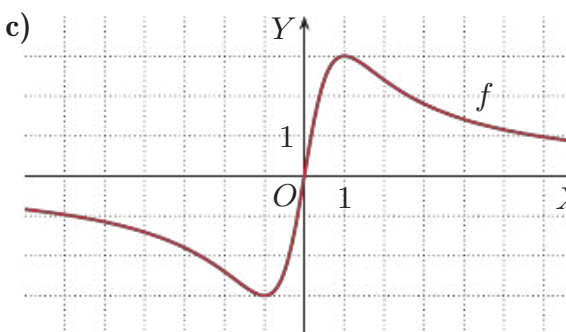
2. a)



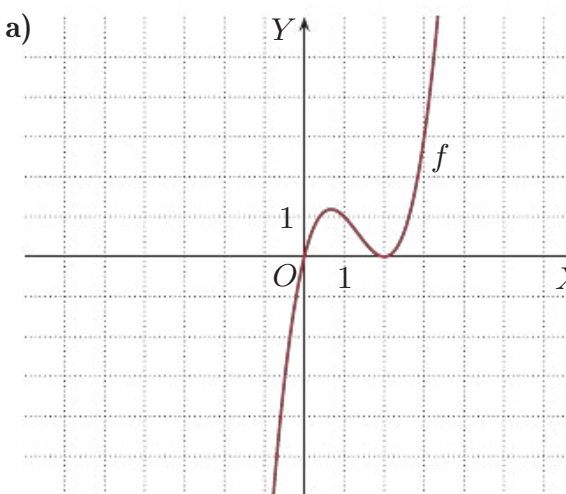
- b)



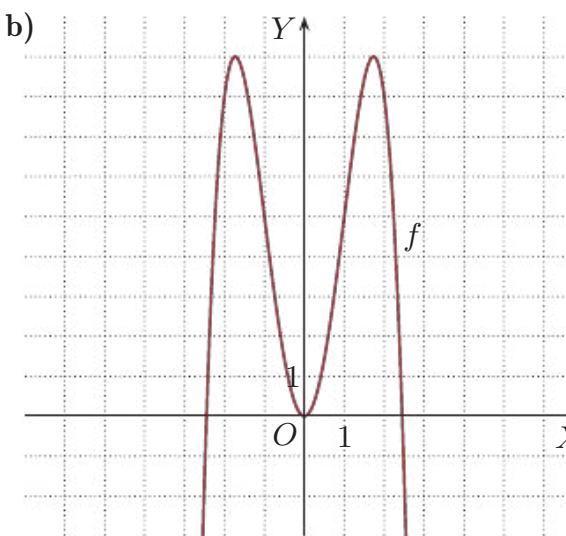
- c)



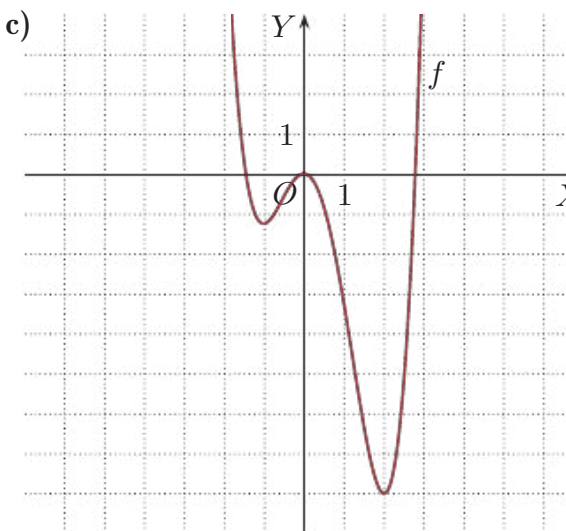
1. a)

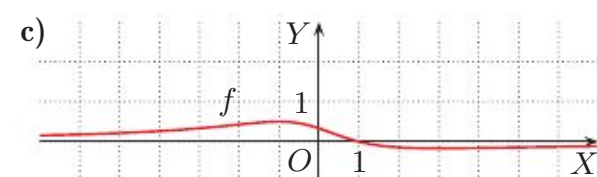
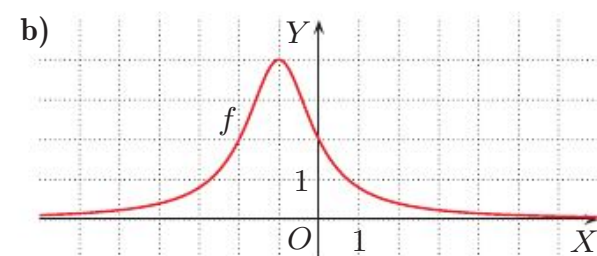
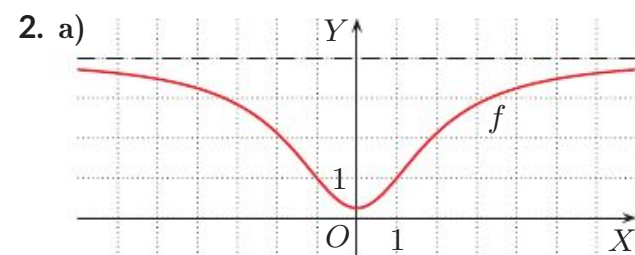


- b)



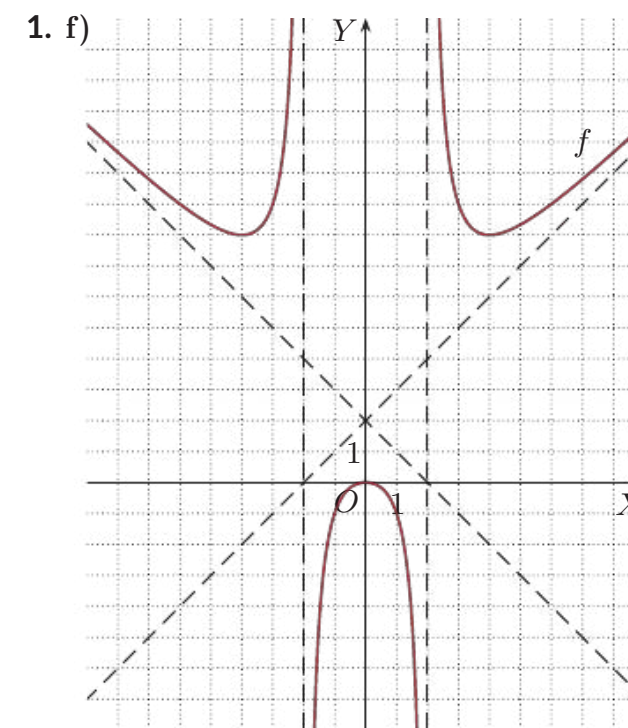
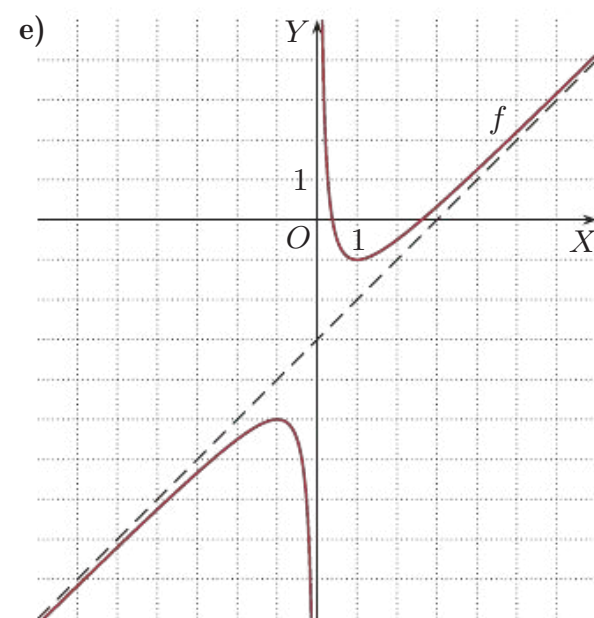
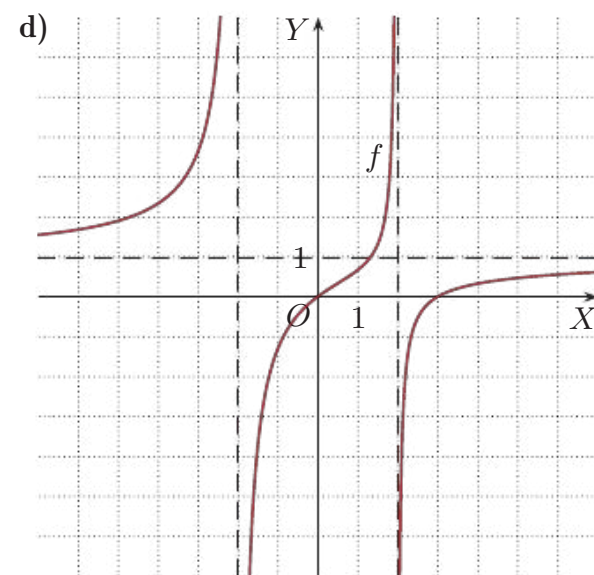
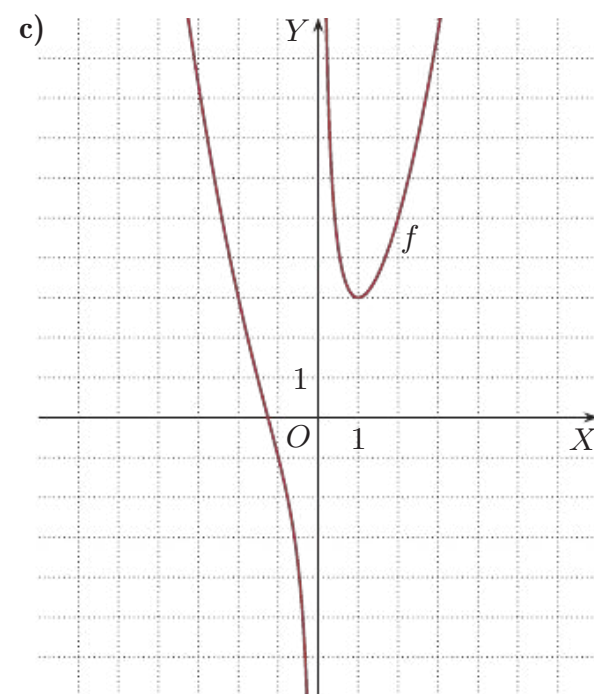
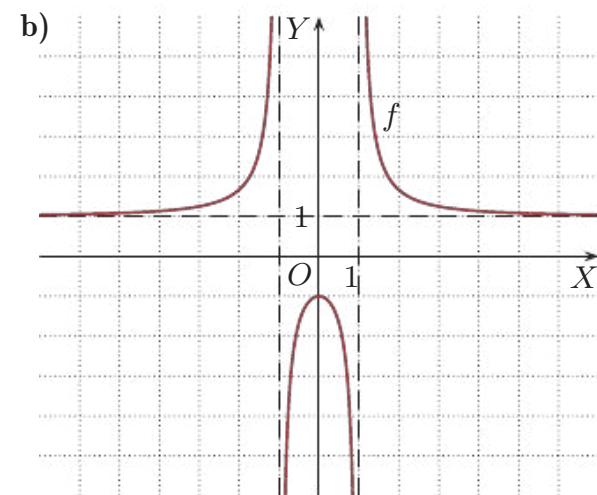
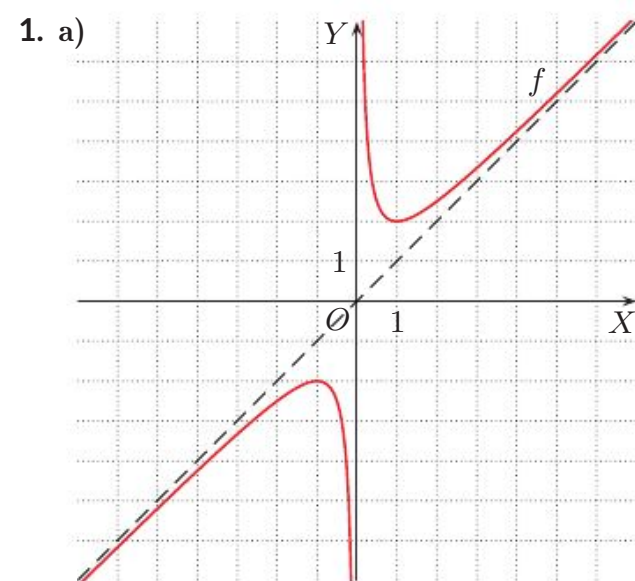
- c)





3. f – III, g – I, h – II

Szkicowanie wykresów funkcji wymiernych



Zestaw I

1. a) 0 b) $-\frac{1}{3}$ c) 2
d) $\frac{8}{7}$ e) 4 f) $\frac{2}{3}$

2. a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 2

3. a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$
b) Granica nie istnieje.

4. a), b), f) $-\infty$ c), d), e) ∞

5. a), b) nie istnieje c) ∞

6. a), b) ∞ c) $-\infty$
d) 2 e) 3 f) -2
g) 0 h) $-\infty$ i) ∞

7. a) $x = 0$ – pionowa obustronna,
 $y = 1$ – pozioma w $\pm\infty$
b) $x = -4$, $x = 4$ – pionowe obustronne,
 $y = 0$ – pozioma w $\pm\infty$
c) $x = 2$, $x = 3$ – pionowe obustronne,
 $y = 2$ – pozioma w $\pm\infty$
d) $x = -1$ – pionowa obustronna
e) $x = 0$ – pionowa prawostronna,
 $x = 1$ – pionowa obustronna,
 $y = 0$ – pozioma w ∞
f) $y = 0$ – pozioma w $-\infty$

9. a) ciągła b) nieciągła w $x_0 = 2$

10. a) tak, $a = -5$ b) nie

11. a) -18 b) 0 c) $-\frac{11}{2}$ d) 3 e) 2 f) $\frac{15}{2}$

Zestaw II

1. a) $a = 2$ b) $a = 1$ c) $a = 0$

2. a) ∞ b) 0 c) -1 d) 0 e) ∞ f) $\frac{1}{2}$

3. a) $y = 1$
b) $y = 2x + \frac{2}{3}$
c) $y = -\frac{1}{4}x$
d) $y = 3x - 10$
e) $y = 3x - 5$
f) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

4. a) $y = 7x + 19$, $y = 7x - 17$

b) $y = 2x - \frac{13}{3}$, $y = 2x + \frac{19}{3}$

c) $y = -x + \frac{1}{3}$, $y = -x + \frac{5}{3}$

5. a) rośnie w $(-\infty; -2]$ i w $[1; \infty)$,
maleje w $[-2; 1]$

b) rośnie w $\mathbb{R}$

c) maleje w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$

d) rośnie w $(-\infty; -2]$ i w $[0; \infty)$,
maleje w $[-2; -1]$ i w $(-1; 0]$

e) maleje w $(-\infty; -1]$,

rośnie w $[-1; 0)$ i w $(0; \infty)$

f) rośnie w $(-\infty; -\frac{1}{2}]$ i w $[\frac{1}{2}; \infty)$,
maleje w $[-\frac{1}{2}; 0)$ i w $(0; \frac{1}{2}]$

6. a) minimum $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{14}{27}$,
maksimum $f(-1) = -\frac{1}{2}$

b) minimum $f(-2) = -24$

c) maksimum $f(2) = \frac{3}{8}$

d) minimum $f(0) = -1$

e) minimum $f(2) = 3$

f) minimum $f(-2) = -\frac{1}{2}$,
maksimum $f(2) = \frac{1}{2}$

g) minimum $f(0) = \sqrt{2}$

h) minimum $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{14}}{4}$,
maksimum $f(0) = 1$

i) maksimum $f(0) = 2$

7. a) najmniejsza: $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$,
największa: $f(3) = 9$

b) najmniejsza: $f(0) = -4$,
największa: $f(8) = 0$

c) najmniejsza: $f(-2) = -\frac{1}{4}$,
największa: $f(2) = \frac{1}{4}$

d) najmniejsza: $f(1) = 4$,
największa: $f(3) = 6$

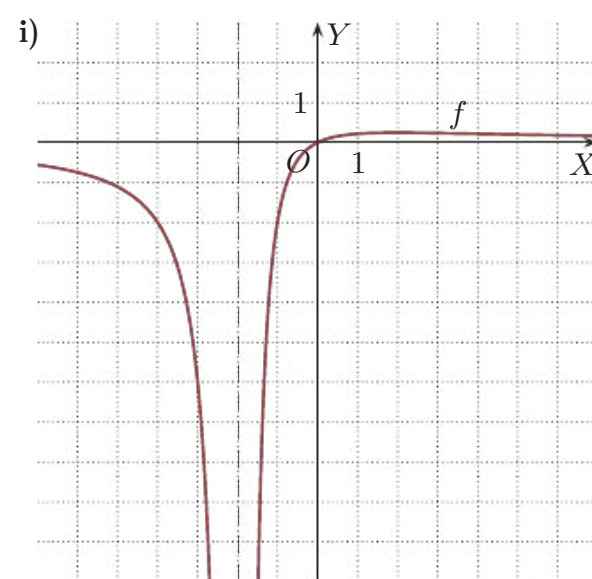
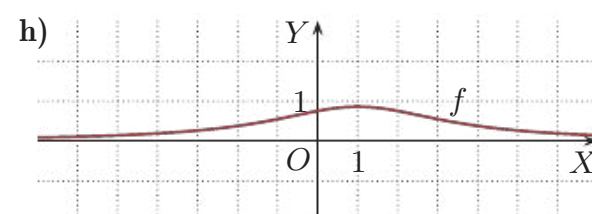
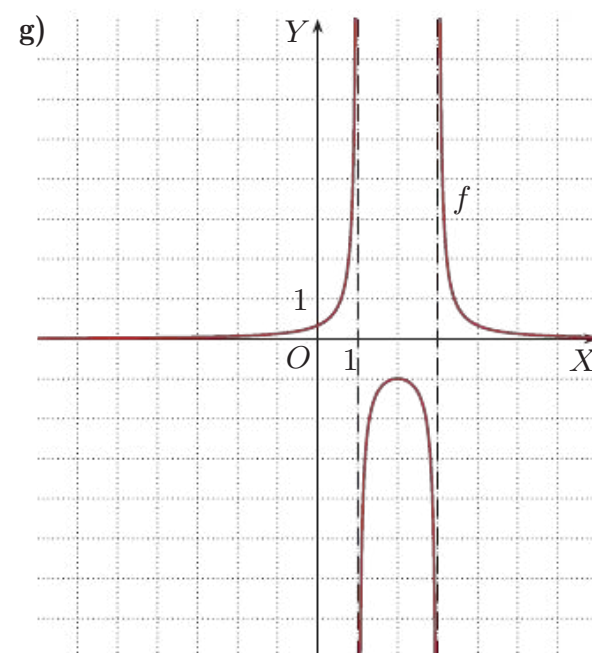
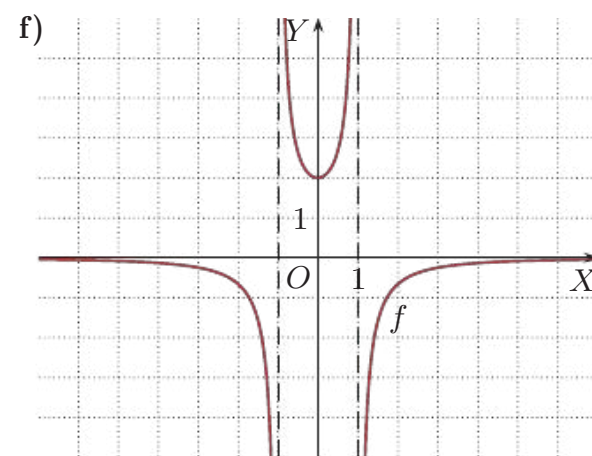
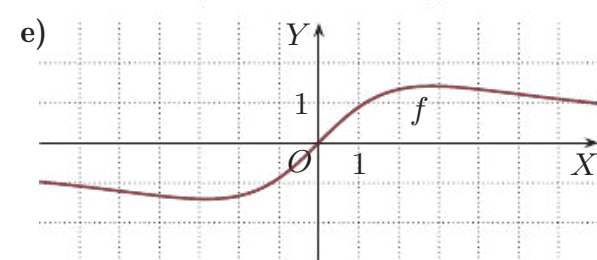
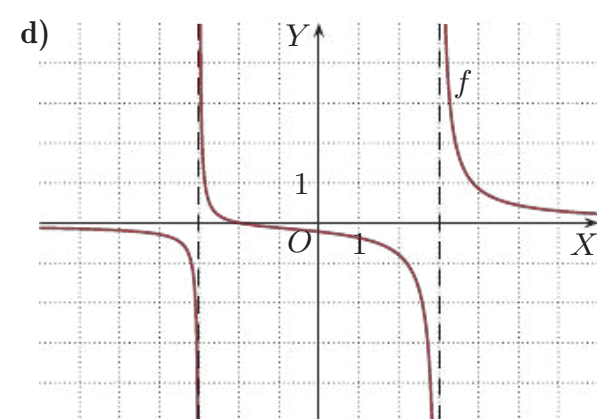
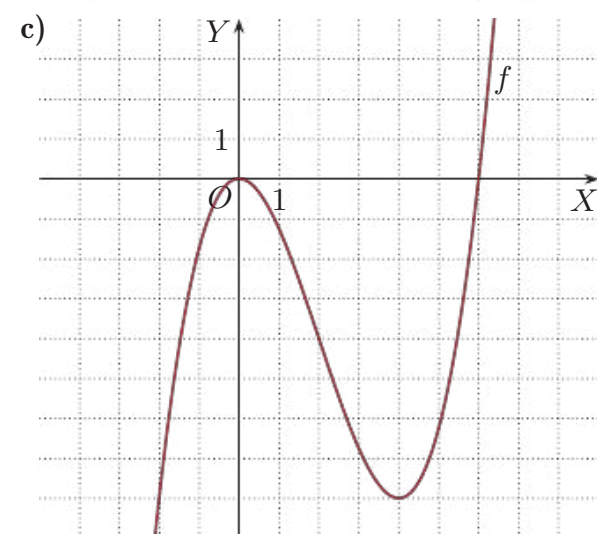
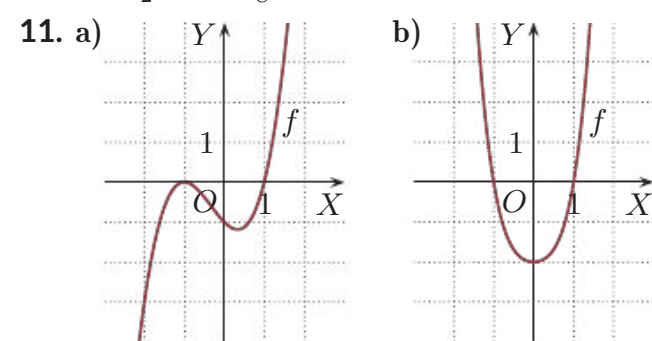
8. a) $P(x) = 24x - 12x^2$, $x \in (0; 2)$,
 $x = 1$; 2×6

b) $P(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $x \in (0; 1)$,
 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $P(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$, $x \in (0; 1)$,
 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$

9. $x = \frac{5}{2}$, $V = \frac{8}{225} \text{ m}^3$

10. $a = \frac{1}{2}$, $P = \frac{27}{8}$



Zadania z kontekstem realistycznym

1. a) $20 \text{ m} \times 8 \text{ m}$, ściana z cegły – 8 m

b) $13 \text{ m} \times 66 \text{ cm} \times 11 \text{ m}$ 71 cm,
ściana z cegły – 11 m 71 cm

2. krawędź podstawy: 4 dm,
wysokość: 6 dm, koszt: 144 zł

3. $2 \text{ dm} \times 2 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. $\frac{1}{36}$

2. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

4. $m \in [-\frac{5}{2}; 0]$

5. najmniejsza: $f(2) = -\frac{3}{4}$,
największa: $f(-2) = \frac{3}{4}$

6. $2 + \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$, $2 + 2\sqrt{2}$

7. $2\sqrt{2\sqrt{3}}$

8. 4 cm

9. $(0, 0)$ dla $a \leq \frac{1}{2}$,
 $(-\sqrt{a - \frac{1}{2}}, a - \frac{1}{2})$, $(\sqrt{a - \frac{1}{2}}, a - \frac{1}{2})$
dla $a > \frac{1}{2}$

5.1. Średnia arytmetyczna

1. Basia: 2,9, Tomek: 4,0

2. 7

3. $\bar{x}_A = 6$, $\bar{x}_B = 16$, $\bar{x}_C = 26$

Jeśli wszystkie liczby z zestawu danych
zwiększymy o stałą wartość, to ich śred-
nia arytmetyczna również zwiększy się
o tę wartość.

4. $\bar{x}_d = 4$, $\bar{x}_c = 4,2$, $\bar{x}_k \approx 4,09$

5. a) $x_1 = 9$ b) 135

1. 1,85 h

2. a) $x = 7$ b) $x = 5$

3. 47

4. a) dst. – 5 osób, db. – 5 osób

b) dst. – 10 osób, db. – 0 osób

c) dst. – 2 osoby, db. – 8 osób

5. a) 6800 zł b) 8160 zł, 5640 zł

c) 5000 zł

6. a) 6387,50 zł b) 6250 zł

7. a) 7384 zł b) 4108 zł

8. a) średnia: 20, średnia obciąża: 5,5

b) średnia: $23\frac{1}{7}$, średnia obciąża: $13\frac{4}{5}$

9. średnia: 682,5, średnia obciąża: 255

10. a) tak, 11 b) nie c) tak, 16

5.2. Mediana i dominanta

1. a) 3 b) 10,5 c) 5,5

2. a) 555 kg b) 502,5 kg c) 540 kg

3. 3,5

4. Przykładowa odpowiedź:

a) 1, 1, 5, 6, 7, mediana: 5, średnia: 4

b) 1, 2, 3, 6, 8, mediana: 3, średnia: 4

5. 7,5

6. mediana: 43, dominanta: 42

Najczęściej kupowano rozmiar 42.

7. a) mediana: 4, dominanta: 3

b) mediana: 3, dominanta: 3

1. a) X b) Y

2. a) $\bar{x} = \frac{17}{6} \approx 2,83$, $M = 3$

b) $\bar{x} = \frac{67}{6} \approx 11,17$, $M = 11$

3. a) $c = 13$ b) $c = 3$ lub $c = 8$

4. A: $M = 3,5$, nie ma dominanty, $\bar{x} = 3,5$

B: $M = 2$, $D = 1$, $\bar{x} = 2\frac{2}{3}$

C: $M = 5$, $D = 6$, $\bar{x} = 4\frac{1}{3}$

D: $M = 3,5$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\bar{x} = 3,5$

E: $M = 3,5$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\bar{x} = 3,5$

F: $M = 3,5$, $D_1 = 1$, $D_2 = 6$, $\bar{x} = 3,5$

5. a) $M = 4$, $D = 6$, $\bar{x} = 3\frac{8}{9}$

b) $M = 3$, $D = 1$, $\bar{x} = 3\frac{1}{9}$

c) $M = 3,5$, nie ma dominanty, $\bar{x} = 3,5$

d) $M = 3,5$, nie ma dominanty, $\bar{x} = 3,5$

Korelacja

1. około 0,85

5.3. Średnia ważona

1. a) 4,5 b) 5 c) 5

2. a) 8,9 b) 4,5

3. a) Basia: 3,6, Kasia: 4,6

b) tak, Asia: $\bar{x}_w \approx 3,8$,

Basia: $\bar{x}_w \approx 4,2$,

Kasia: $\bar{x}_w = 4$

4. a) 680 zł b) 840 zł
1. a) 12,5 b) 5,875
2. Marek
3. taka sama
4. a) $t = 4,5$ b) $t = 7$
5. a) $w = 7$ b) $w = 2$
6. a) $n = 2$ b) $n = 7$

Odchylenie standardowe

1. a) $\sigma \approx 1,41$ b) $\sigma \approx 1,9$ c) $\sigma \approx 2,1$
2. $\sigma_A > \sigma_B$
3. $A: \sigma = 1$; $B: \sigma = 1$
Jeśli wszystkie liczby z zestawu danych zwiększymy o stałą wartość, to odchylenie standardowe się nie zmienia.
4. $X: \sigma \approx 223,61$ zł,
 $Y: \sigma \approx 1024,70$ zł
5. a) $\sigma \approx 1,3$ b) 16 c) 30

Rozkład normalny

1. a) 342 b) 79 c) 11
2. 168
3. 440 przed upływem 1400 godzin,
30 przed upływem 1100 godzin

Zestaw I

1. a) $\bar{x} = 3,75$, $M = 4$, $D = 4$
b) $\bar{x} = 20$, $M = 9$, $D = 9$
c) $\bar{x} = 5$, $M = 6$, $D = 8$
d) $\bar{x} = 10$, $M = 10$,
 $D_1 = 4$, $D_2 = 16$
2. grupa I: 3,5, grupa II: 4
3. IIIa: $\bar{x} = 4,5$ h, $M = 4$ h, $D = 4$ h,
IIIb: $\bar{x} = 4,4$ h, $M = 4,5$ h, $D = 4,5$ h,
dla obu klas: $\bar{x} \approx 4,45$ h, $M = 4,5$ h,
 $D = 4$ h
4. 14 lat
5. 6 i 10
6. a) 5 b) 12,55
7. $A: 5,6 \approx 6$, $B: 5,4 \approx 5$, $C: 4,2 \approx 4$,
 $D: 3,8 \approx 4$, $E: 3,2 \approx 3$

Zestaw II

1. B
2. a) 6 b) 11
3. $\bar{x} = 3,85$, nie
4. 4
5. 3 – 32%, 5 – 8%
6. w grupie: o 0,25, w klasie: o 0,1
7. Nie można rozstrzygnąć, który lek jest skuteczniejszy.

Lek X

Kobiety	Mężczyźni	Razem
200	300	500
30	120	150
15%	40%	30%

Lek Y

Kobiety	Mężczyźni	Razem
400	100	500
80	45	125
20%	45%	25%

Zadania z kontekstem realistycznym

1. a) 3,5% b) 3,4%, 3,6%
2. a) $\bar{x} = 4,52$, $M = 5$
b) $\bar{x} = 4,38$, $M = 4$, $D = 2$

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. B 3. A 4. C 5. D 6. B 7. C
8. B 9. C

10. 8 h, 8,5 h, 8 h 10 min

11. a) 40 b) 65%

12. FF

13. PP

14.1. C 14.2. C

15. 6100 zł

16. $45 \leq x \leq 53$ i $x \in \mathbb{N}$

17. $\bar{x}_A = 4,5$, $\bar{x}_B = 3,6$, $\bar{x}_C = 2$

Indeks

amplituda 39

arcus

cosinus 63

cotangens 64

sinus 63

tangens 64

asymptota wykresu funkcji

pionowa 229

pozioma 231

ukośna 235

ciąg 136

arytmetyczny 154

Fibonacciego 148, 151

geometryczny 165

liczb Catalana 178

liczbowy 137

malejący 143, 155, 168

niemalejący 145

nierosnący 145

nieskończony 136

n -wyrazowy 138

określony rekurencyjnie 147

ograniczony 198

ograniczony z dołu 198

ograniczony z góry 198

rosnący 143, 155, 168

rozbieżny 188

skończony 138

stały 145, 155, 168

zbieżny 186, 198

cięciwa okręgu 98

cosinus

kąta 10–12, 17, 25, 27, 51, 52

podwojonego kąta 47

połowy kąta 49

różnicy kątów 46

sumy kątów 46

cosinusoida 27

cotangens 12, 33

cotangensoida 33

długość wektora 110

dominanta 296

dowód indukcyjny 204

efektywna stopa procentowa 181

ekstremum lokalne funkcji 265

figura

osiowosymetryczna 117

środkowosymetryczna 120

funkcja

ciągła 237, 238

ciągła w punkcie 236

nieciągła 237

nieciągła w punkcie 236

nieparzysta 29

odwrotna 62

okresowa 22

parzysta 29

pochodna 247, 248, 250, 251, 253, 255

różniczkowalna 247

różnowartościowa 62

wewnętrzna 254

zewewnętrzna 254

granica

ciągu 185, 186, 190, 192, 194–196

funkcji 218, 219, 221–224, 226, 231,
232

iloczynu ciągów 190

iloczynu funkcji 221

ilorazu ciągów 190

ilorazu funkcji 221

jednostronna funkcji 225

niewłaściwa ciągu 188, 194, 196, 197

niewłaściwa funkcji 227, 228, 230,
232

niewłaściwa jednostronna funkcji 227,
228

różnicy ciągów 190

różnicy funkcji 221

sumy ciągów 190

sumy funkcji 221

właściwa ciągu 185, 186

iloczyn

ciągów 152

wektora przez liczbę 109

iloraz
 ciągów 152
 ciągu geometrycznego 165
 różnicowy 243
indukcja matematyczna 204

jedynka trygonometryczna 41

kapitalizacja odsetek 180
kąt obrotu 15
krzywa Gaussa 304

maksimum lokalne funkcji 265
mediana 295
metoda analizy starożytnych
 rozwiązywania równań 71
miara łukowa kąta 19, 20
minimum lokalne funkcji 265
moda 296

nominalna stopa procentowa 181

obraz punktu
 w przesunięciu o wektor 113
 w symetrii względem
 osi układu współrzędnych 117
 początku układu współrzędnych 121
 prostej 116
 punktu 120
odchylenie standardowe 302
odległość
 między prostymi równoległymi 85
 między punktami 75
 punktu od prostej 83
okrąg jednostkowy 13
okres
 funkcji 22
 kapitalizacji 180
 podstawowy funkcji 22, 25, 27, 31,
 33, 40
okręgi
 przecinające się 93
 rozłączne 93
 styczne 93
oś symetrii 116, 117

pochodna
 funkcji 247, 248
 funkcji cosinus 253
 funkcji potęgowej 248

pochodna
 funkcji sinus 253
 funkcji stałej 247
 funkcji tangens 253
 funkcji w punkcie 244, 245
 funkcji złożonej 255
 iloczynu funkcji 250
 ilorazu funkcji 251
 różnicy funkcji 250
 sumy funkcji 250
podciąg ciągu 172
pole trójkąta w układzie
 współrzędnych 87
procent składany 179
proste
 prostopadłe 78
 równoległe 78
przebieg zmienności funkcji 278
przesunięcie o wektor 113
punkt
 styczności okręgu i prostej 98
 symetryczny względem prostej 116
 symetryczny względem punktu 120

radian 19, 20
ramię
 końcowe kąta 15
 początkowe kąta 15
reguła trzech sigm 304
rekurencyjne określenie ciągu 147
rozkład normalny 304
równanie
 kierunkowe prostej 78
 ogólne prostej 78
 okręgu 88, 89
 okręgu w postaci kanonicznej 89
 stycznej do wykresu funkcji 248
różnica
 ciągów 152
 ciągu arytmetycznego 154
 cosinusów 58
 sinusów 58
 wektorów 108

sąsiedztwo punktu 219
sieczna
 okręgu 98
 wykresu funkcji 243

silnia 150
sinus
 kąta 10–12, 17, 25, 26, 51, 52
 podwojonego kąta 47
 połowy kąta 49
 różnicy kątów 46
 sumy kątów 46
sinusoida 25, 69
skala centylowa 294
styczna
 do okręgu 98
 do wykresu funkcji 245, 248
suma
 ciągów 152
 cosinusów 58
 częściowa szeregu
 geometrycznego 199
 początkowych wyrazów ciągu
 arytmetycznego 161, 162
 geometrycznego 171
 sinusów 58
 szeregu geometrycznego 199, 200
 wektorów 107
symbol nieoznaczony 195
symetralna odcinka 80, 116
symetria
 osiowa 116
 środkowa 120
 względem osi układu
 współrzędnych 117
 względem początku układu
 współrzędnych 121
szereg
 geometryczny 199–201
 geometryczny rozbieżny 199, 201
 geometryczny zbieżny 199–201
 harmoniczny 203

średnia
 arytmetyczna 156, 290
 geometryczna 169
 obciąża 293
 ważona 299

środek
 odcinka 79
 symetrii 120

tangens
 kąta 10–12, 17, 30, 31, 51, 52
 podwojonego kąta 48
 różnicy kątów 48
 sumy kątów 48
tangensoida 30
tożsamość trygonometryczna 41, 43
translacja o wektor 113
twierdzenie
 o osiągnięciu kresów 241
 o przyjmowaniu wartości
 pośrednich 240
 o trzech ciągach 192
 odwrotne do twierdzenia
 Pitagorasa 74
 Pitagorasa 74
 Weierstrassa 241

wartość modalna 296
warunek istnienia ekstremum
 konieczny 265
 wystarczający 266
wektor
 jednostkowy 112
 zerowy 109
własności funkcji
 cotangens 33
 sinus 25
 tangens 31
własność Darboux 240
współczynnik kierunkowy
 prostej 78, 243
współrzędne środka odcinka 79
wyraz ciągu 136
wzory redukcyjne 51, 52
wzór ogólny ciągu 139
 arytmetycznego 154
 geometrycznego 166

zasada indukcji matematycznej 204
złożenie funkcji 254

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,430
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,301
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,081
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,636
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,290

Wartość bezwzględna

- Dla $a \in \mathbb{R}$:
- $|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$
 - $|-a| = |a|$
- Dla $a, b \in \mathbb{R}$:
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$:
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

Pierwiastek kwadratowy

- Dla $a \geq 0$:
- $\sqrt{a} = b$, gdy $b^2 = a$ i $b \geq 0$
- Dla $a \in \mathbb{R}$:
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- Dla $a, b \geq 0$:
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- Dla $a \geq 0$ i $b > 0$:
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Pierwiastek n -tego stopnia

- Dla $a \geq 0$ i parzystego n :
- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b \geq 0$ i $b^n = a$
- Dla $a \in \mathbb{R}$ i nieparzystego n :
- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Wzory skróconego mnożenia

- Dla $a, b \in \mathbb{R}$:
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 - $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$:
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 - $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 - $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 - $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Potęgi i pierwiastki

- Dla $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$:
- $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$
 - $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- Dla $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$:
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
 - $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
 - $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
 - $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
 - $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Logarytmy

- Dla $a, b > 0$, $a \neq 1$:
- $\log_a b = x$, gdy $a^x = b$
- Dla $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $p \in \mathbb{R}$:
- $\log_a a = 1$
 - $\log_a 1 = 0$
 - $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
 - $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
 - $\log_a b^p = p \log_a b$
 - $a^{\log_a b} = b$
- Dla $a, b, x > 0$, $a, b \neq 1$:
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
 - $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

Równania

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$

Dla $b \neq 0, d \neq 0$:

- równanie: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

jest równoważne równaniu:

$$ad = bc$$

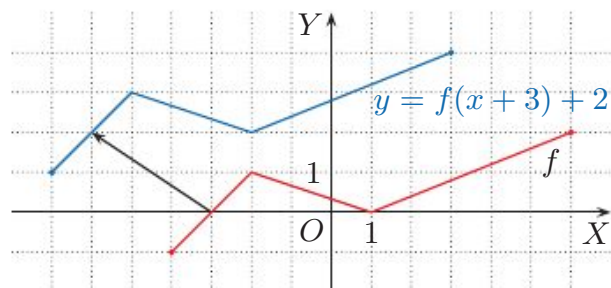
Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Dla $a > 0$:

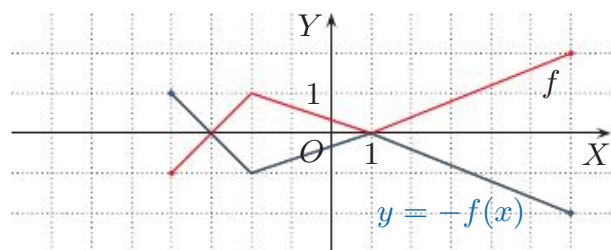
- $|x| = a \Leftrightarrow (x = -a \text{ lub } x = a)$
- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow (x < -a \text{ lub } x > a)$

Przekształcanie wykresów funkcji

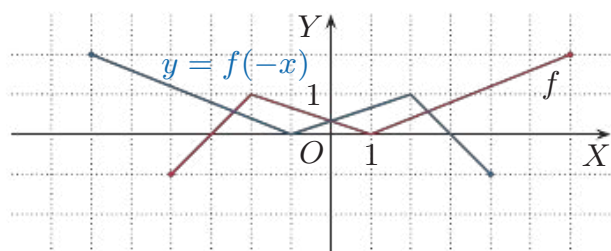
- Wykres funkcji $y = f(x-p) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.



- Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .



- Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY .



Równanie prostej

- Równanie kierunkowe: $y = ax + b$
- Równanie ogólne: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$

- Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

- Współczynnik kierunkowy prostej:

$$y = ax + b$$

przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:
 - równoległe, gdy $a_1 = a_2$,
 - prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Równanie kwadratowe

- Wyróżnik równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:
 $\Delta = b^2 - 4ac$
- Pierwiastki równania kwadratowego:
 - jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 - jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek (podwójny):
 $x_0 = -\frac{b}{2a}$
 - jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Wzór funkcji kwadratowej

- Postać ogólna:
 $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
Współrzędne wierzchołka paraboli:
 $(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- Postać kanoniczna:
 $f(x) = a(x - p)^2 + q, a \neq 0$
- Postać iloczynowa:
 - jeśli $\Delta > 0$, to:
 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), a \neq 0$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami,
 - jeśli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem,
 - jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma postaci iloczynowej.

Wzory Viète'a

Jeżeli równanie kwadratowe:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ma pierwiastki x_1 i x_2 , to:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to:

$$r = w(a)$$

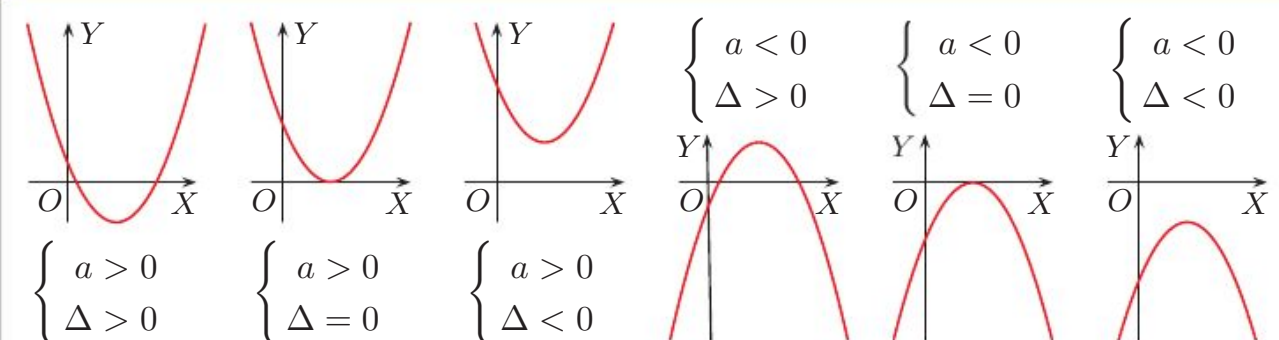
Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian:

$$w(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

(gdzie $a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

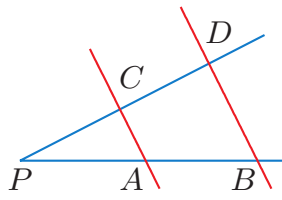
Położenie paraboli względem osi OX



Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to:

- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|AB|}$
- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|}$



Trójkąty

- Dowolny trójkąt

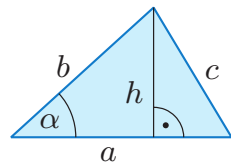
$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = p \cdot r$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



R – promień okręgu opisanego,
 r – promień okręgu wpisanego,
 p – połowa obwodu

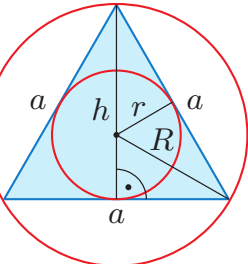
- Trójkąt równoboczny

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

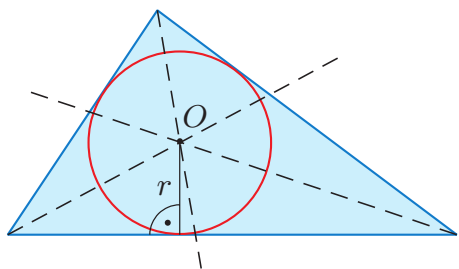
$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



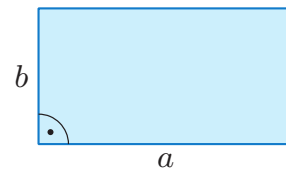
Okrąg wpisany w trójkąt

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

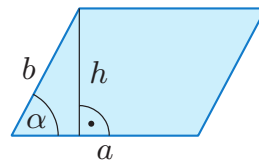


Czworokąty

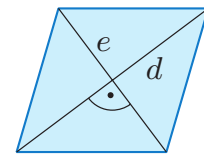
- Prostokąt
 $P = ab$



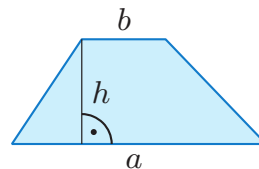
- Równoległobok
 $P = ah$
 $P = ab \sin \alpha$



- Romb
 $P = \frac{1}{2}de$



- Trapez
 $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$



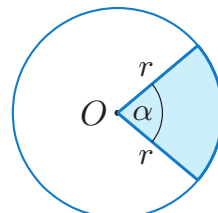
Koło i okrąg

- Długość okręgu:
 $l = 2\pi r$

- Pole koła:
 $P = \pi r^2$

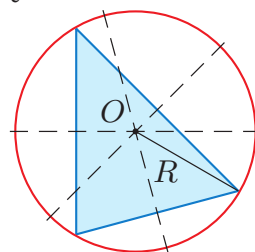
- Pole wycinka koła:
 $P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$

- Długość łuku okręgu:
 $L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$



Okrąg opisany na trójkącie

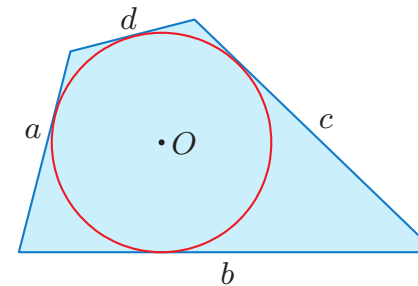
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy:

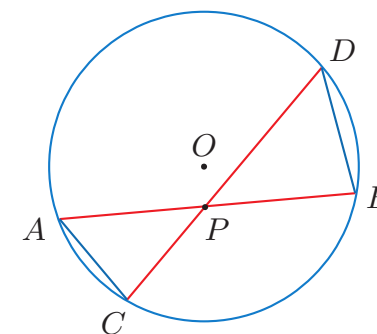
$$a + c = b + d$$



Twierdzenie o cięciwach

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to:

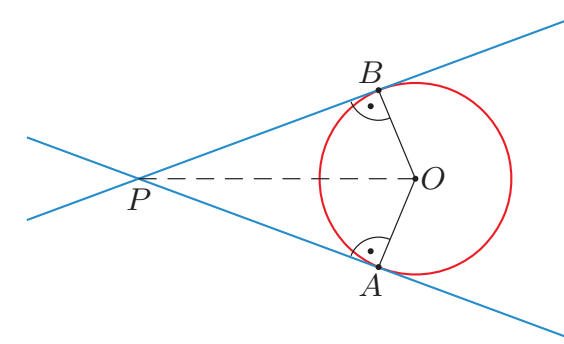
$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

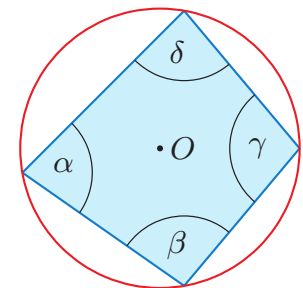
$$|PA| = |PB|$$



Okrąg opisany na czworokącie

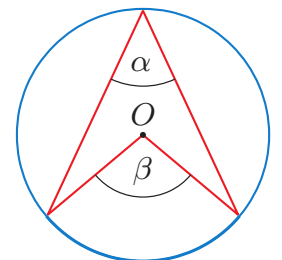
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

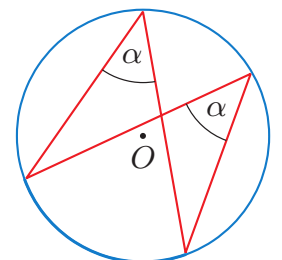


Kąty w okręgu

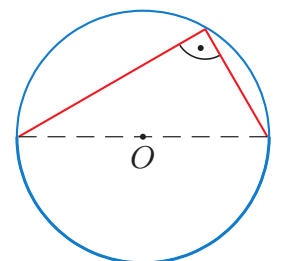
- Kąt α wpisany w okrąg i kąt środkowy β oparte na tym samym łuku:
 $\beta = 2\alpha$



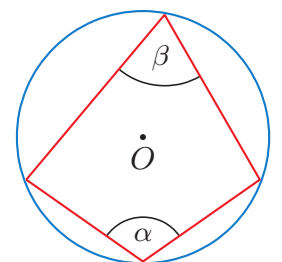
- Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



- Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.

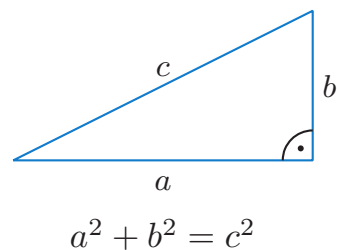


- Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku obok, jest równa 180° .



Twierdzenie Pitagorasa

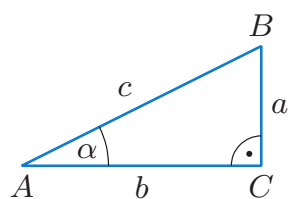
W trójkącie prostokątnym:



Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

W trójkącie prostokątnym:

- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$



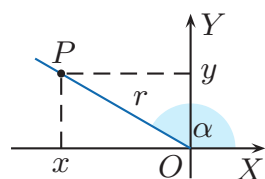
Wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Dla $P(x, y)$ oraz kąta α :

- $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$
- $\cos \alpha = \frac{x}{r}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0$

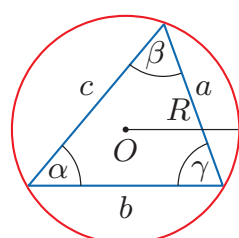


Znak funkcji trygonometrycznych

dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$	dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$
$\sin \alpha > 0$	$\sin \alpha > 0$
$\cos \alpha < 0$	$\cos \alpha > 0$
$\operatorname{tg} \alpha < 0$	$\operatorname{tg} \alpha > 0$
dla $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$	dla $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$
$\sin \alpha < 0$	$\sin \alpha < 0$
$\cos \alpha < 0$	$\cos \alpha > 0$
$\operatorname{tg} \alpha > 0$	$\operatorname{tg} \alpha < 0$

Twierdzenie sinusów

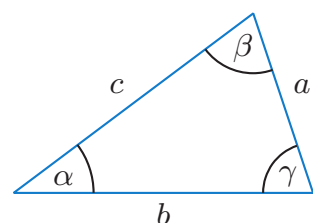
Dla dowolnego trójkąta:



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

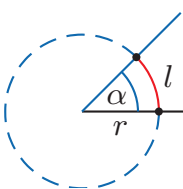
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Miara łukowa kąta

$$\alpha = \frac{\text{długość łuku}}{\text{promień okręgu}} = \frac{l}{r}$$

Jednostką miary łukowej jest radian: $180^\circ = \pi \text{ rad}$.



Okresowość funkcji trygonometrycznych

Dla $x \in \mathbb{R}$:

- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$:

- $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Tożsamości trygonometryczne

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dla $x \in \mathbb{R}$

Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$:

- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Dla $\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

Dla $\alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

Dla $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

Dla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$:

- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.

- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

- $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$
- $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

- $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

- $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$
- $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

- $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$
- $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$
- $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

- $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Odległość między punktami

Odległość między punktami $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Odległość punktu od prostej

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Równanie okręgu

- Okrąg o środku w punkcie $O(0, 0)$ i promieniu $r > 0$

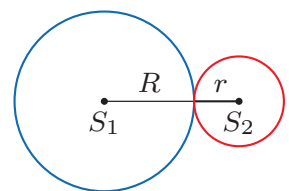
$$x^2 + y^2 = r^2$$

- Okrąg o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu $r > 0$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

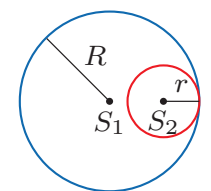
Wzajemne położenie dwóch okręgów

- Okręgi styczne zewnętrznie



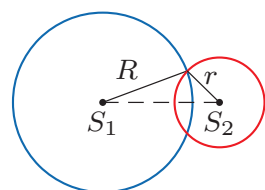
$$|S_1 S_2| = R + r$$

- Okręgi styczne wewnętrznie



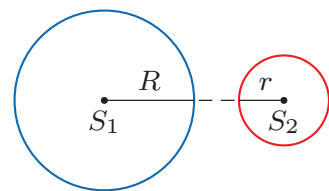
$$|S_1 S_2| = |R - r|$$

- Okręgi przecinające się



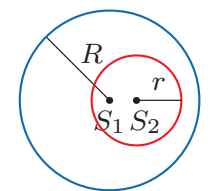
$$|R - r| < |S_1 S_2| < R + r$$

- Okręgi rozłączne zewnętrznie



$$|S_1 S_2| > R + r$$

- Okręgi rozłączne wewnętrznie



$$|S_1 S_2| < |R - r|$$

Środek odcinka

Środek odcinka o końcach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Długość wektora

Długość wektora $\vec{u} = [a, b]$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Działania na wektorach

Dla wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$:

- suma wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$$

- różnica wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$$

- iloczyn wektora $\vec{u}$ przez liczbę α :

$$\alpha \vec{u} = [\alpha a, \alpha b]$$

Ciągi monotoniczne

Ciąg (a_n) jest:

- rosnący**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} > a_n$,
- malejący**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$,
- niemalejący**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} \geq a_n$,
- nierosnący**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} \leq a_n$,
- stały**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi równość $a_{n+1} = a_n$.

Ciąg arytmetyczny

- Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

gdzie r jest różnicą ciągu.

- Wzór ogólny ciągu:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

- Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, gdy:

$$b - a = c - b$$

- Dla $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

- Suma n początkowych wyrazów ciągu:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

- Ciąg (a_n) jest:

- rosnący, gdy $r > 0$,
- malejący, gdy $r < 0$.

Ciąg geometryczny

- Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

gdzie q jest ilorazem ciągu.

- Wzór ogólny ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Jeśli liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to:

$$b^2 = ac$$

- Dla $n \geq 2$: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

- Suma n początkowych wyrazów ciągu:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ gdy } q \neq 1$$

- Dla $a_1 > 0$ ciąg (a_n) jest:

- rosnący, gdy $q > 1$,
- malejący, gdy $0 < q < 1$.

- Dla $a_1 < 0$ ciąg (a_n) jest:

- rosnący, gdy $0 < q < 1$,
- malejący, gdy $q > 1$.

Procent składany

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na procent składany:

- na rok przy oprocentowaniu rocznym $p\%$, wzrośnie po roku do kwoty:

$$k\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

- na n lat przy oprocentowaniu rocznym $p\%$, po n latach wzrośnie do kwoty:

$$k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- na n lat przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i kapitalizacji m razy w roku, po n latach wzrośnie do kwoty:

$$k\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{m \cdot n}$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Szereg geometryczny

Szereg geometryczny o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q jest:

- zbieżny, gdy $|q| < 1$, jego suma jest równa:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

- rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$.

Wybrane granice ciągów

- $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{dla } q \in (-1; 1) \\ \infty & \text{dla } q > 1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$ dla $k > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ dla $k > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$

Pochodne sumy i różnicy funkcji

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

Wybrane granice funkcji

Dla $n \in \mathbb{N}_+$:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -\infty & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ dla n nieparzystych

Pochodne wybranych funkcji

Przy odpowiednich założeniach:

- $(c)' = 0$, gdzie c – stała
- $(x^a)' = ax^{a-1}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Równanie stycznej

Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Pochodne iloczynu, ilorazu i złożenia funkcji

- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$ dla $g(x) \neq 0$
- $(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Za co polubisz podręcznik NOWA MATeMATyka 3?

Powód 1



Jest tu wszystko, czego potrzebujesz. Ten podręcznik jest dostosowany do aktualnej podstawy programowej dla zakresu rozszerzonego.

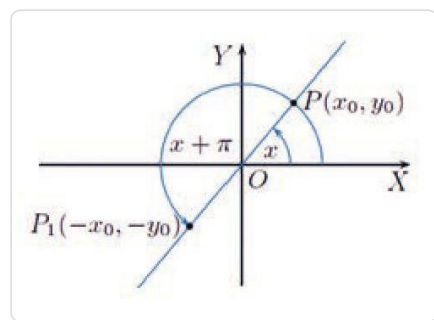
ZMIANY
W PODSTAWACH
2024

podręcznik w pełni
dostosowany

Powód 2



Czytelne rysunki merytoryczne. Czy to przydatne? Tak. Lepiej zrozumiesz to, o czym jest mowa w podręczniku, i rozwiążesz zadania.



Powód 3



Matura. Dobrze jest mieć podręcznik, który uczy rozwiązywania takich zadań, jakie mogą pojawić się na maturze. Dzięki temu możesz mieć pewność, że wiesz, umiesz, zdasz.

Przed maturą z matematyki

Zadanie 1 (0-2)
Punkty $A(-2, -1)$ i $C(4, 1)$ są wierzchołkami rombu. Oblicz pole tego rombu.

Zadanie 2 (0-2)
Środek okręgu przechodzącego przez $y = -x$. Oblicz promień tego okręgu.