

Nowość

NOWA

MATeMATyka

3

PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM

ZAKRES PODSTAWOWY

ZMIANY
W PODSTAWACH
2024



podręcznik w pełni
dostosowany

nowa
era

NOWA MATeMATyka

3 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY

WOJCIECH BABIAŃSKI
LECH CHAŃKO
JOANNA CZARNOWSKA
GRZEGORZ JANOCZA
JOLANTA WESOŁOWSKA

NOWA MATEMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym, na podstawie opinii rzeczoznawców:
prof. dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. hab. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa
Rok dopuszczenia: 2025

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/3/2025/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* (2024) autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2026
ISBN 978-83-267-5383-1

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Urszula Cielniak, Ewa Kowalik, Aleksandra Łukaszewicz, Katarzyna Radzimińska, Renata Sawicka, Agnieszka Trzpil-Gajek

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne stron działowych i infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

Projekt okładki: Maciej Galiński

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Klaudia Jarocka-Ciok, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

Ilustracje na infografikach: Laura Maziewska (diamenty, s. 188), Krzysztof Mrawiński (współrzędne geograficzne, s. 75), Aleksandra Szpunar (wykres, s. 40)

Mapa: Zespół kartograficzny Nowa Era (s. 75)

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: P/mint Sp. z o. o.

Fotografia na okładce: Getty Images/Photodisc/Jorg Greuel.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo - Gunter Kirsch s. 75 (zamek Czocha), Jesse Kraft s. 95, Witold Skrypczak s. 75 (zamek w Czersku); Getty Images: E+/4x6 s. 40 (gitarzysta), iStock/Getty Images Plus - Antonio_Diaz s. 40 (dziewczyna), plus99 s. 157, iStock Unreleased/ewg3D s. 75 (zamek w Niedzicy); Shutterstock: Akkaradet Bangchun s. 188, Andriy Baidak s. 53, Dmitry Demkin s. 112 (słoneczniki), Ian 2010 s. 112 (słonecznik), Marcin Krzyzak s. 75 (zamek w Ogródzie), Nerthuz s. 42, Pecold s. 75 (zamek w Gniewie), raphotography88 s. 9.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Spis treści

► 1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku całkowitym – przypomnij sobie	10
1.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie	11
1.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym	13
1.3. Funkcja wykładnicza	16
1.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej	19
1.5. Logarytm	22
1.6. Logarytm dziesiętny	26
1.7. Logarytm iloczynu i logarytm ilorazu	28
1.8. Logarytm potęgi	30
1.9. Funkcja logarytmiczna	32
1.10. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej	36
1.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania	41
Powtórzenie	44
Sposób na zadanie	48
Przed obowiązkową maturą z matematyki	49

► 2. Geometria analityczna

2.1. Prosta w układzie współrzędnych – powtórzenie	54
Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne – przypomnij sobie	58
2.2. Odległość między punktami w układzie współrzędnych	59
2.3. Środek odcinka	63
2.4. Okrąg w układzie współrzędnych	67
2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów	72
2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej	76
2.7. Symetria osiowa	79
2.8. Symetria środkowa	83
Powtórzenie	87
Sposób na zadanie	90
Przed obowiązkową maturą z matematyki	91

► 3. Ciągi

3.1. Pojęcie ciągu	96
Równania i nierówności – przypomnij sobie	99
3.2. Sposoby określania ciągu	100
3.3. Ciągi monotoniczne	104

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie	108
3.5. Ciąg arytmetyczny (1)	113
3.6. Ciąg arytmetyczny (2)	117
3.7. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (1)	120
3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (2)	124
3.9. Ciąg geometryczny (1)	126
3.10. Ciąg geometryczny (2)	130
3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	134
3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania	138
Procenty – przypomnij sobie	141
3.13. Procent składany	142
Powtórzenie	148
Sposób na zadanie	152
Przed obowiązkową maturą z matematyki	153
► 4. Graniastopy i ostrośpy	
4.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	158
Przedstawianie graniastopów na rysunkach – przypomnij sobie	162
4.2. Graniastopy	163
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym – przypomnij sobie	167
4.3. Odcinki w graniastopach	168
4.4. Objętość graniastopa	173
4.5. Ostrośpy	177
Przedstawianie ostrostopów na rysunkach – przypomnij sobie	182
4.6. Objętość ostrostopa	183
4.7. Kąt między prostą a płaszczyzną	189
4.8. Kąt dwuścienny	193
Powtórzenie	198
Sposób na zadanie	200
Przed obowiązkową maturą z matematyki	201
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	205
Indeks	229
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	232
Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne	233

Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.



Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.



Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu warto skorzystać z kalkulatora, oraz tematów ze wszystkimi takimi zadaniami.

Sekcja *Przypomnij sobie* zawiera nieobowiązkowe powtórzenie przydatnych wiadomości przed wybranymi lekcjami.

1 Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Do opisu niektórych wielkości fizycznych wykorzystujemy **skalę logarytmiczną**. Jedną z takich wielkości jest poziom głośności różnych źródeł dźwięku (tabela obok) – dziesięciokrotnemu wzrostowi natężenia dźwięku odpowiada wzrost poziomu głośności o 10 decybeli (patrz str. 40).

Źródło dźwięku	Poziom głośności
Odrzutowiec	160 decybeli
Koncert rockowy	120 decybeli
Cicha rozmowa	40 decybeli
Szelest liści	10 decybeli
Próg słyszalności	0 decybeli



Przypomnij sobie

Potęga o wykładniku całkowitym

1. Oblicz.

a) 2^n dla $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ b) 3^n dla $n = 0, 1, \dots, 6$

2. Oblicz.

a) $(-3)^4$ b) $(-2)^5$ c) $(-6)^3$ d) $(-5)^0$

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ i liczby naturalnej $n \geq 1$ przyjmujemy:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3. Oblicz.

a) 4^{-2} c) 6^{-3} e) $(-4)^{-1}$ g) $(-2)^{-4}$
b) 5^{-4} d) 9^{-3} f) $(-5)^{-2}$ h) $(-3)^{-5}$

4. Oblicz.

a) $(\frac{1}{4})^3$ c) $(1\frac{1}{2})^6$ e) $(\frac{5}{9})^{-1}$ g) $(1\frac{1}{4})^{-3}$
b) $(\frac{2}{3})^4$ d) $(\frac{13}{7})^0$ f) $(\frac{2}{3})^{-3}$ h) $(3\frac{1}{3})^{-4}$

5. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = 2^{10}$, $y = (-2)^{11}$ c) $x = (-3)^4$, $y = (-4)^4$
b) $x = 5^4$, $y = (-5)^6$ d) $x = (-5)^3$, $y = (-7)^3$

6. Przedstaw podaną liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 2^6$ f) $2 \cdot 2^4 \cdot 2^5$
b) $4^2 \cdot 2^4$ g) $2^{-4} : 2^{-6}$
c) $2^7 : 2^3$ h) $(2^2)^3 \cdot 2$
d) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^0$ i) $2 \cdot 2^{15} : 2^3$
e) $2^{-3} \cdot 2^5$ j) $2^{-6} : (2^6 : 2^{-4})$

7. Przedstaw podaną liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 4^3 \cdot 2^{-1}$ c) $(16^{-2} : 2^{-3}) \cdot 4$ e) $32^{-3} \cdot (2^{-3})^{-5}$
b) $4^3 \cdot 2^4 : 8^{-4}$ d) $(4^3)^{-2} : 64^{-3}$ f) $(8^{-6} : 4^{-6})^{-1}$

Dla $a, b \neq 0$ i $m, n \in \mathbb{Z}$:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^m \cdot b^m = (ab)^m$
- $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

1.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

a) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ b) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ c) $(\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $81^{\frac{1}{2}}$ c) $(\frac{1}{64})^{\frac{1}{2}}$ e) $169^{\frac{1}{2}}$ g) $8^{\frac{1}{3}}$ i) $81^{\frac{1}{4}}$ k) $256^{\frac{1}{4}}$
b) $100^{\frac{1}{2}}$ d) $(\frac{1}{121})^{\frac{1}{2}}$ f) $441^{\frac{1}{2}}$ h) $27^{\frac{1}{3}}$ j) $64^{\frac{1}{6}}$ l) $1024^{\frac{1}{10}}$

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Przykład 2

a) $8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$ b) $9^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $32^{\frac{4}{5}}$ c) $81^{2,5}$ d) $625^{-\frac{1}{4}}$ e) $64^{-\frac{2}{3}}$ f) $(\frac{1}{81})^{-\frac{3}{2}}$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Przykład 3

a) $2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}} = 2^4 = 16$
b) $8^{\frac{7}{3}} : 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{7}{3} - \frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$
c) $25^{\frac{3}{2}} : 125^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} : (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5$

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{Q}$:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $16^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{6}}$
- c) $3^{\frac{3}{2}} : \sqrt{3}$
- e) $15^{0,5} \cdot 0,36^{0,25}$
- g) $\left(6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}\right) : 6^{\frac{1}{6}}$
- b) $\left(\frac{3}{20}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{4}}$
- d) $25\sqrt{5} : 5^{\frac{3}{2}}$
- f) $20^{\frac{1}{3}} \cdot 2,5^{-\frac{1}{3}}$
- h) $7 : \left(7^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{7}\right)$

Zadania

1. Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi o podstawie 5.
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt[4]{125}$
2. Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.
a) $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{3^4}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3^3}}$ e) $3 \cdot \sqrt[4]{3}$
3. Zapisz podaną liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$.
a) $\sqrt[4]{5^{\frac{1}{2}}}$ c) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$ e) $2 : 8^{\frac{2}{3}}$ g) $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$
b) $(\sqrt{5})^3$ d) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}$ f) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$ h) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}$
4. Oblicz.
a) $9^{\frac{5}{2}}$ d) $8^{-\frac{2}{3}}$ g) $10\,000^{1,25}$ j) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$
b) $125^{\frac{4}{3}}$ e) $27^{-\frac{4}{3}}$ h) $81^{-0,375}$ k) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$
c) $16^{\frac{3}{4}}$ f) $25^{-\frac{1}{2}}$ i) $144^{-0,5}$ l) $5^3 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$
5. Oblicz.
a) $0,09^{\frac{3}{2}}$ c) $0,008^{\frac{2}{3}}$ e) $0,0625^{-\frac{3}{4}}$ g) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$
b) $0,25^{-\frac{1}{2}}$ d) $0,0081^{-\frac{3}{4}}$ f) $0,00032^{\frac{4}{5}}$ h) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$

Sprawdź się

6. Oblicz.
a) $\sqrt{16^5}$ b) $\sqrt[3]{27^2}$ c) $\sqrt[5]{32^4}$ d) $(\sqrt[6]{125})^2$
7. Przedstaw podaną liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{Q}$.
a) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ e) $3^{\frac{2}{3}} : \left(3^{-\frac{4}{3}}\right)^{-1}$
b) $3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ d) $\frac{1}{5} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{3}}$ f) $25^{-0,5} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{-6}$
8. Przedstaw podaną liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{Q}$.
a) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$ c) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$ e) $25^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{4}}$
b) $5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} : 5^{\frac{1}{8}}$ d) $6^{\frac{3}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{5}} : 4^{\frac{3}{5}}$ f) $16^{\frac{1}{8}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} : 2$

1.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potrafimy już określić wartość liczbową potęgi a^x (nie określamy potęgi 0^0), gdy wykładnik x jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną.

Pokażemy na przykładach, jak można określić wartość liczbową potęgi a^x , gdy x jest liczbą niewymierną.

Przykład 1

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $3^{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$, zatem rozpatrujemy kolejno:

$3^{1,4}$	$\approx 4,655536722$
$3^{1,41}$	$\approx 4,706965002$
$3^{1,414}$	$\approx 4,727695035$
$3^{1,4142}$	$\approx 4,728733930$
$\vdots$	$\vdots$
$3^{1,414213562}$	$\approx 4,728804386$

Podane w tabeli przybliżenia możemy obliczyć, korzystając z odpowiedniego kalkulatora lub komputera.

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia liczby $3^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że gdy wykładnik x „zbliża się” do $\sqrt{2}$, to 3^x „zbliża się” do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczamy $3^{\sqrt{2}}$. Korzystając z kalkulatora, możemy obliczyć przybliżoną wartość $3^{\sqrt{2}} \approx 4,72880438784$.

Przykład 2

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $5^{\sqrt{2}}$.

$5^{1,4}$	$\approx 9,518269694$
$5^{1,4142}$	$\approx 9,738305174$
$5^{1,414213}$	$\approx 9,738508928$
$5^{1,414213562}$	$\approx 9,738517736$
$\vdots$	$\vdots$
$5^{\sqrt{2}}$	$\approx 9,738517742$

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia liczby $5^{\sqrt{2}}$.



Ćwiczenie 1

Podaj przybliżenia dziesiętne liczb $5^{\sqrt{3}}$ i $5^{\sqrt{5}}$ z dokładnością do:

- a) 0,01,
- b) 0,001,
- c) 0,0001.

Przykład 3

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby 2^π .

$2^{3,14}$	$\approx 8,815240927$
$2^{3,14159}$	$\approx 8,824961595$
$2^{3,14159265}$	$\approx 8,824977805$
$\vdots$	$\vdots$
2^π	$\approx 8,824977827$

$\pi = 3,14159265\dots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby π otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia liczby 2^π .



Ćwiczenie 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, podaj z dokładnością do 0,0001 przybliżenie dziesiętne podanej liczby.

- a) 3^π b) 5^π c) π^π

Podane w poprzedniej lekcji wzory dla potęg o wykładnikach wymiernych są prawdziwe również dla potęg o wykładnikach rzeczywistych (zarówno wymiernych, jak i niewymiernych).

Twierdzenie

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Ćwiczenie 3

Który z powyższych wzorów wykorzystano w obliczeniach?

- a) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 2^2 = 4$ c) $6^\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\pi = \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right)^\pi = 9^\pi$
b) $\frac{6^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$ d) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{1-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ c) $(5^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$ e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ g) $\frac{2^{\sqrt{3}+6}}{2^{\sqrt{3}+1}}$
b) $(3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$ d) $(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}})^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ f) $9^{\sqrt{5}} \cdot 3^{1-2\sqrt{5}}$ h) $\frac{6^{\sqrt{3}+1} \cdot 2^{-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}}$

Zadania

1. Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

- a) $3^4 \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$ c) $(3^{\sqrt{7}-\sqrt{3}})^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ e) $6^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}}$
b) $3^3 : 3^{2-\sqrt{2}}$ d) $(3^{\sqrt{3}})^{1-\sqrt{3}}$ f) $(\sqrt{3})^\pi \cdot (\sqrt{3})^\pi$

2. Oblicz.

- a) $6^{1-\sqrt{2}} \cdot 6^{\sqrt{2}+1}$ d) $2^{3\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}}$ g) $6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$
b) $5^{\pi+3} : 5^\pi$ e) $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}}$ h) $4^{\pi+3} \cdot 3^\pi : 12^\pi$
c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{6}-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{6}+2}$ f) $\frac{7^{\frac{5}{6}}}{7^{\frac{1}{3}}\sqrt{7}} \cdot \frac{7^{\sqrt{5}+5}}{7^{\sqrt{5}+2}}$ i) $\frac{6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{1}{6}}} \cdot (6^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2}$

3. Przedstaw podaną liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.

- a) $2^{\sqrt{7}-2} \cdot 4^3$ c) $9^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 27^{-1}$ e) $\frac{1}{3} \cdot 9^{\pi+\frac{1}{2}} : 81^{2\pi}$
b) $2^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$ d) $27 \cdot (3^{-\sqrt{3}})^2$ f) $7^{-2\sqrt{2}} : 49^{\pi+\sqrt{2}}$

4. Sprawdź, czy liczba q należy do przedziału $(3; 6)$. Nie korzystaj z kalkulatora, tylko z podanych przybliżeń.

- a) $q = 4^{\sqrt{3}-1} : \frac{1}{4}$ c) $q = 6^{\sqrt{3}} : (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$
b) $q = 0,5^{\sqrt{3}+1} \cdot 6^{\sqrt{3}}$ d) $q = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

$2^{\sqrt{3}} \approx 3,32199709$

$3^{\sqrt{3}} \approx 6,70499185$

$6^{\sqrt{3}} \approx 22,2739634$

5. Spośród liczb x, y, z wybierz takie dwie, z których jedna jest odwrotnością drugiej.

- a) $x = 2^{4\sqrt{2}}, y = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, z = 8^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$
b) $x = 1,5^{4-2\sqrt{3}}, y = \left(\frac{4}{9}\right)^{2+\sqrt{3}}, z = \left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{3}-2}$
c) $x = 125^{1-2\sqrt{5}}, y = 25^{2-3\sqrt{5}}, z = 0,0016 \cdot 5^{\sqrt{180}}$

Sprawdź się

6. Przedstaw podaną liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.

- a) $5^{\sqrt{3}-1} \cdot 5$ c) $7^{\sqrt{5}+5} : 7^5$ e) $9^{\sqrt{5}+1} : 81^{\frac{1}{2}}$
b) $4^{\sqrt{2}+3} \cdot 4^{-3}$ d) $9^{\sqrt{7}-2} : 9^{-2}$ f) $16^{\sqrt{3}-2} \cdot 4^4$

7. Oblicz.

- a) $(7^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$ c) $(2^{\sqrt{6}})^{\sqrt{6}}$ e) $3^{\sqrt{27}} : 3^{3\sqrt{3}}$
b) $4^{\sqrt{3}} \cdot 4^{2-\sqrt{3}}$ d) $5^{2+\sqrt{5}} \cdot 5^{2-\sqrt{5}}$ f) $7^{4+2\sqrt{2}} : 7^{2+\sqrt{8}}$

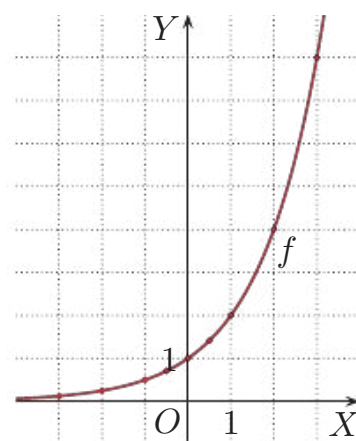
1.3. Funkcja wykładnicza

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.



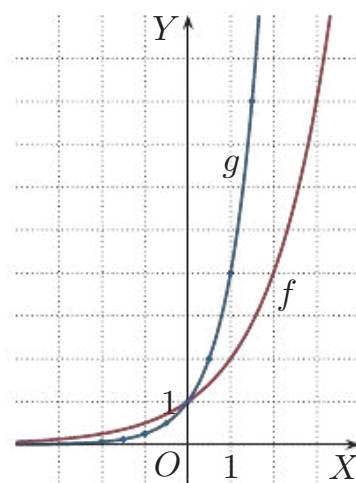
Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 4^x$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(0; \infty)$.

Wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $f(x) = 2^x$ dla porównania naszkicowano w tym samym układzie współrzędnych.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ i $h(x) = 4^x$ określonych dla $x \in \mathbb{R}$. Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

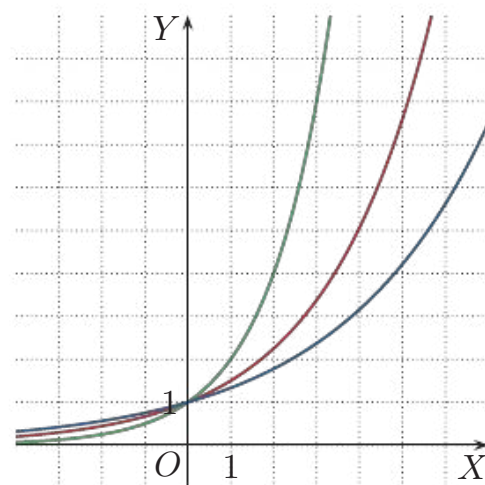
Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 2^x$, $g(x) = (\frac{3}{2})^x$ i $h(x) = (\frac{4}{3})^x$.

- Dobierz wzór do każdego wykresu.
- Punkty $P(4, a)$, $Q(-2, b)$, $R(c, 3\frac{3}{8})$ należą do wykresu funkcji g . Wyznacz niewiadome współrzędne tych punktów.
- Które spośród punktów:

$$A(4, 3\frac{15}{81}), B(-4, \frac{81}{256}), C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

należą do wykresu funkcji h ?

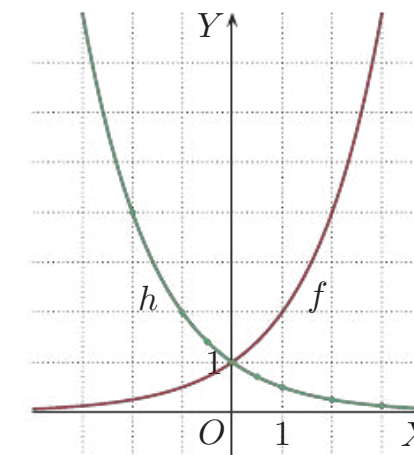


Przykład 3

Wykres funkcji $h(x) = (\frac{1}{2})^x$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

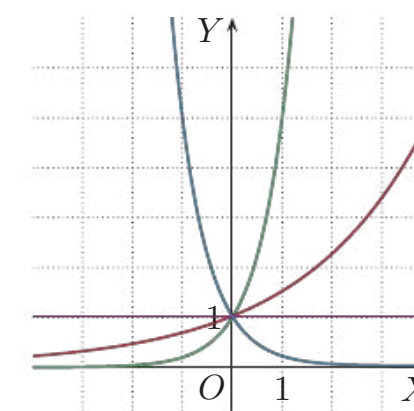
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h(x)$	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Zauważ, że wykresy funkcji $h(x) = (\frac{1}{2})^x$ i $f(x) = 2^x$ są symetryczne względem osi OY .



Ćwiczenie 3

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.
- Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $h(x) = (\frac{1}{4})^x$.

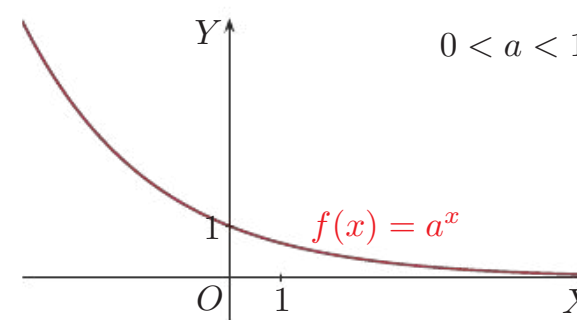


Ćwiczenie 4

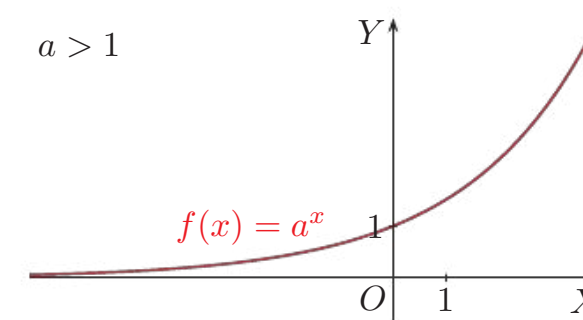
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 5^x$, $g(x) = 0,2^x$, $h(x) = 1,5^x$ i $k(x) = 1^x$. Dobierz wzór do każdego wykresu.

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla dowolnego $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej zbiorem wartości – przedział $(0; \infty)$. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$, natomiast nie ma punktów wspólnych z osią OX , która jest asymptotą poziomą tego wykresu.

Uwaga. Dla $a = 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją stałą: $f(x) = 1$.

Przykład 4

Zapisz liczby $10^{\sqrt{2}}$, $10^{1,4}$, $10^{1,5}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 10^x$ jest rosnąca i $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, zatem $10^{1,4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,5}$.

Przykład 5

Zapisz liczby $0,9^{\sqrt{3}}$, $0,9^{1,7}$, $0,9^{1,8}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 0,9^x$ jest malejąca i $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, zatem:

$$0,9^{1,8} < 0,9^{\sqrt{3}} < 0,9^{1,7}$$

Ćwiczenie 5

Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $5^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $5^{0,3}$, $5^{0,33}$

c) $0,6^{\frac{1}{2}}$, $0,6^{\frac{1}{3}}$, $0,6^{\frac{3}{7}}$, $0,6^{\frac{3}{8}}$, $0,6^{0,35}$

b) $7^{3,1}$, $7^{3,2}$, 7^{π} , $7^{\sqrt{5}}$

d) $(\frac{1}{3})^2$, $(\frac{1}{3})^{1,5}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}}$, $(\frac{1}{3})^{\frac{\pi}{2}}$

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji f dla $x \in \{-4, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, 4\}$.

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 4^x$ c) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ d) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

2. Punkt $P(2, 16)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?

a) $Q(\frac{1}{2}, 2)$ b) $Q(5, 1024)$ c) $Q(-3, \frac{1}{16})$ d) $Q(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

3. Punkt $P(2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?

a) $Q(1, 1)$ b) $Q(4, 4)$ c) $Q(8, 8)$ d) $Q(-8, \frac{1}{16})$

4. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt M . Naszkicuj ten wykres.

a) $M(2, \frac{1}{9})$ b) $M(-3, 8)$ c) $M(\frac{1}{2}, 2)$ d) $M(3, 3\frac{3}{8})$

Sprawdź się

5. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ b) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

6. Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{7}{5}}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt[3]{\pi}$, $\pi^{\frac{1}{2}}$, $\pi^{\frac{3}{7}}$, $\pi^{\frac{1}{\pi}}$

b) $(\frac{3}{4})^5$, $(\frac{3}{4})^6$, $(\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$, $(\frac{3}{4})^{\sqrt{26}}$

d) 9^0 , 9^{-2} , $9^{-\sqrt{3}}$, $9^{-\sqrt{\pi}}$

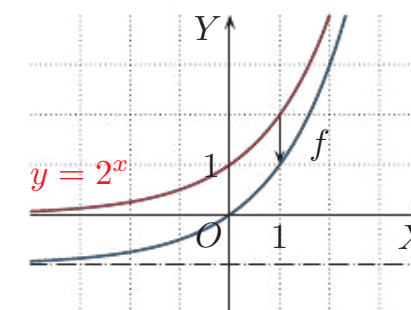
1.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2^x$ o 1 jednostkę w dół.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-1; \infty)$.

Prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f .



Przesunięcie wykresu w dół lub w górę to przesunięcie wzdłuż osi OY.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji i równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $f(x) = 2^x - 3$

b) $f(x) = 3^x + 1$

c) $f(x) = 4^x - 4$

Ćwiczenie 2

Dla jakiego a zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2^x + a$ jest podany przedział?

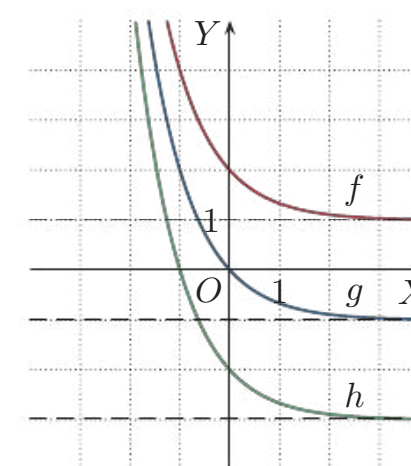
a) $(3; \infty)$

b) $(-6; \infty)$

c) $(-\frac{1}{4}; \infty)$

Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = (\frac{1}{3})^x + a$, $g(x) = (\frac{1}{3})^x + b$, $h(x) = (\frac{1}{3})^x + c$. Wyznacz współczynniki a , b i c .



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji i współrzędne punktu, w którym jej wykres przecina oś OY.

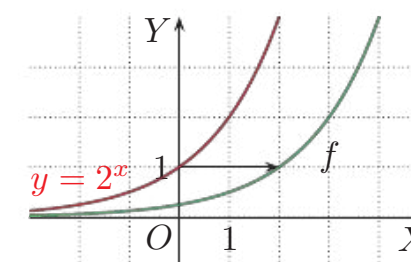
a) $f(x) = (\frac{1}{3})^x - 2$

b) $f(x) = (\frac{1}{3})^x + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-2}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2^x$ o 2 jednostki w prawo.

Funkcja f przyjmuje wartość równą 1 dla argumentu $x = 2$.



Przesunięcie wykresu w prawo lub w lewo to przesunięcie wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakiego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość równą 1?

a) $f(x) = 3^{x-1}$

b) $f(x) = 2^{x+2}$

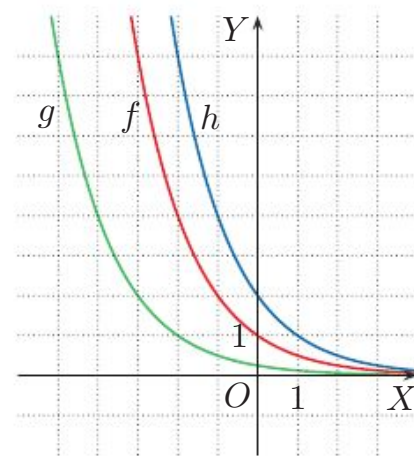
c) $f(x) = 4^{x-2}$

Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji f , g i h . Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Funkcja g dana jest wzorem $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}$. Do jej wykresu należy punkt $(-3, 2)$. Podaj wartość współczynnika a .

b) Funkcja h dana jest wzorem $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-b}$. Do jej wykresu należy punkt $(0, 2)$. Podaj wartość współczynnika b .



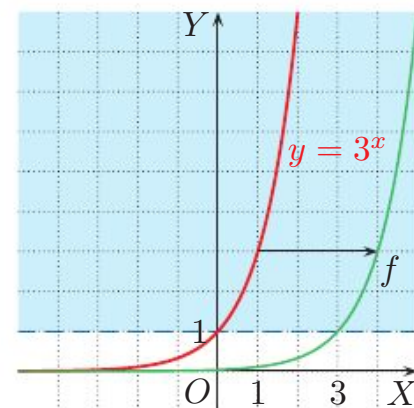
Przykład 3

Jak należy przekształcić wykres funkcji $y = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \frac{3^x}{27}$? Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości większe od 1?

$$f(x) = \frac{3^x}{27} = \frac{3^x}{3^3} = 3^{x-3}$$

Wykres funkcji $y = 3^x$ należy przesunąć o 3 jednostki w prawo.

Nierówność $f(x) > 1$ zachodzi dla $x \in (3; \infty)$.



Ćwiczenie 7

Jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji g ? Naszkicuj ten wykres. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 1$.

a) $g(x) = \frac{3^x}{3}$

b) $g(x) = \frac{3^x}{9}$

c) $g(x) = 3 \cdot 3^x$

d) $g(x) = \sqrt{3} \cdot 3^x$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $f(x) = 2^x - 4$

b) $f(x) = 2^x + 2$

c) $f(x) = 3^x - 1$

2. Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4$

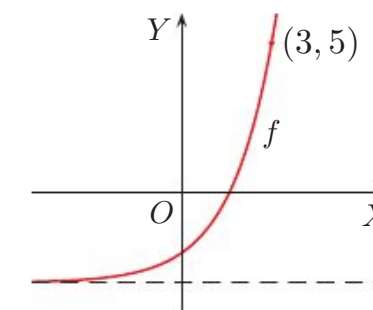
3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$. Podaj wartość współczynnika a .

4. Wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$ przechodzi przez punkt P . Podaj wartość współczynnika a .

a) $P(0, -3)$

b) $P(2, 7)$

c) $P(4, 0)$



5. Jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 2^x$, aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $g(x) = \frac{2^x}{16}$

b) $g(x) = \frac{2^x}{1024}$

c) $g(x) = 8 \cdot 2^x$

d) $g(x) = \sqrt{2} \cdot 2^x$

6. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

a) $f(x) = 2^{x-1}$

c) $f(x) = 4 \cdot 2^x$

e) $f(x) = \frac{27}{3^x}$

b) $f(x) = 2^{x+3}$

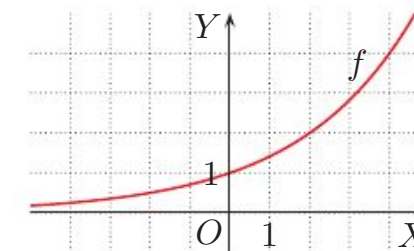
d) $f(x) = \frac{2^x}{8}$

f) $f(x) = \frac{0,04}{5^x}$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = (\sqrt{2})^x$. Podaj trzy punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do tego wykresu. Naszkicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = (\sqrt{2})^x - 1$

b) $g(x) = (\sqrt{2})^x - 4$



8. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = (\sqrt{2})^{x-1} \text{ i } g(x) = (\sqrt{2})^{x+2}$$

9. Jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = (\sqrt{2})^x$, aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $g(x) = 4(\sqrt{2})^x$

b) $g(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^x$

Sprawdź się

10. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsce zerowe oraz zbiór wartości.

a) $f(x) = 2^x + 4$

b) $f(x) = 3^x + 1$

c) $f(x) = 5^x - 5$

11. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj równanie jego asymptoty poziomej.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$

12. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 1$.

a) $f(x) = 2^{x-3}$

b) $f(x) = 3^{x+2}$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

1.5. Logarytm

Przypomnijmy, że **logarytmem** z liczby dodatniej b przy podstawie a (gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Przykład 1

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_2 1024 = 10$, ponieważ $2^{10} = 1024$.

c) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

$$\log_a b = x$$

liczba logarytmowana
logarytm
podstawa logarytmu

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log_2 32$

c) $\log_2 1$

e) $\log_2 \frac{1}{64}$

g) $\log_2 \sqrt{8}$

b) $\log_2 2$

d) $\log_2 \frac{1}{4}$

f) $\log_2 \sqrt{2}$

h) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\log_3 81$

d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$

g) $\log_7 7\sqrt{7}$

j) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

e) $\log_9 3$

h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

k) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

c) $\log_3 \frac{1}{27}$

f) $\log_9 \frac{1}{27}$

i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

l) $\log_6 216$

Zauważmy, że wartość logarytmu może być dodatnia, ujemna lub równa 0. Z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

Dla $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$



Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x$.

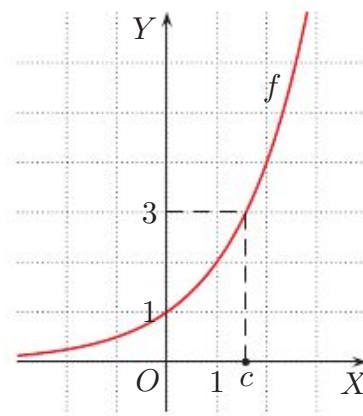
Zauważmy, że $\log_2 3$ to taka liczba c , że $2^c = 3$.

Z wykresu możemy odczytać, że:

$$1 < \log_2 3 < 2$$

Korzystamy z odpowiedniego kalkulatora i otrzymujemy przybliżenie: $\log_2 3 \approx 1,5849625$.

Udowodnimy, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.



Liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Przyjmijmy przeciwnie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Oznaczałoby to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n , takie że $\log_2 3 = \frac{m}{n}$. Zatem:

$$2^{\frac{m}{n}} = 3 \quad \text{Podnosimy obie strony}$$

$$2^m = 3^n \quad \text{równości do potęgi } n.$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ lewa strona równości jest liczbą podzieloną przez 2, a prawa nie. Zatem liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Uwaga. Ten typ dowodu polega na wykazaniu, że przyjęcie prawdziwości jakiegoś zdania prowadzi do sprzeczności. Zatem musi być prawdziwe zdanie przeciwne. Więcej o tego typu dowodach w klasie 4.



Ćwiczenie 3

Wykaż, że podana liczba jest liczbą niewymierną.

a) $\log_2 5$

b) $\log_3 5$

c) $\log_2 6$

d) $\log_6 2$

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

Dla $a > 0, a \neq 1, b > 0$:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\log_2 2^{100}$

b) $\log_6 6^{15}$

c) $\log_{1,1} 1,1^{10}$

d) $\log_{\pi} \pi^{-3}$

e) $2^{\log_2 3}$

Przykład 3

a) Oblicz $\log_3 (\log_2 512)$.

$512 = 2^9$, więc $\log_2 512 = 9$, zatem $\log_3 (\log_2 512) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$.

b) Oblicz $\log_{\sqrt{2}} (\log_{\sqrt{3}} 3)$.

$3 = (\sqrt{3})^2$, więc $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$, zatem $\log_{\sqrt{2}} (\log_{\sqrt{3}} 3) = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = 2$.

c) Oblicz $\log_6 (\log_4 (\log_5 625))$.

$625 = 5^4$, więc $\log_5 625 = 4$, zatem:

$$\log_6 (\log_4 (\log_5 625)) = \log_6 (\log_4 4) = \log_6 1 = \log_6 6^0 = 0$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $\log_4 (\log_6 36)$

c) $\log_8 (\log_2 4)$

e) $\log_4 (\log_{16} (\log_3 81))$

b) $\log_5 (\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32})$

d) $\log_2 (\log_9 (\log_5 125))$

f) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{\sqrt{2}} (\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}))$

Zadania

1. Oblicz.

- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|-------------------|----------------------------|
| a) $\log_2 64$ | c) $\log_2 \frac{1}{32}$ | e) $\log_2 0,125$ | g) $\log_4 8$ |
| b) $\log_2 \frac{1}{512}$ | d) $\log_2 \frac{1}{1024}$ | f) $\log_4 2$ | h) $\log_4 \frac{1}{1024}$ |

2. Zapisz liczbę b w postaci 2^x . Oblicz $\log_2 b$.

- | | | | |
|--------------------|------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| a) $b = 4\sqrt{2}$ | b) $b = 16\sqrt[3]{2}$ | c) $b = \frac{\sqrt{2}}{8}$ | d) $b = \frac{\sqrt[3]{2}}{32}$ |
|--------------------|------------------------|-----------------------------|---------------------------------|

3. Oblicz.

- | | | | |
|-------------------------|--------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $\log_4 \sqrt{2}$ | c) $\log_4 \frac{\sqrt{2}}{2}$ | e) $\log_{\sqrt{2}} 4$ | g) $\log_3 3\sqrt{3}$ |
| b) $\log_4 \sqrt[3]{2}$ | d) $\log_4 2\sqrt{2}$ | f) $\log_{\sqrt{2}} 32$ | h) $\log_3 9\sqrt[3]{3}$ |

4. Oblicz.

- | | | | |
|---------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ | c) $\log_{0,5} \frac{1}{128}$ | e) $\log_{0,2} 125$ | g) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ |
| b) $\log_{0,1} 10^6$ | d) $\log_{0,25} 16$ | f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ | h) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$ |

5. Oblicz.

- | | | | |
|--|--|----------------------|---------------------------|
| a) $2^{\log_2 9}$ | c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 9}$ | e) $4^{\log_2 9}$ | g) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$ |
| b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$ | d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 \frac{1}{3}}$ | f) $81^{\log_3 0,5}$ | h) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$ |

6. Oblicz.

- | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------|--|
| a) $\log_3 81 \cdot \log_3 \sqrt{27}$ | b) $\log_5 625 \cdot \log_5 0,04$ | c) $\log_3 9\sqrt{3} \cdot \log_3 \frac{\sqrt{3}}{81}$ |
|---------------------------------------|-----------------------------------|--|

7. Oblicz.

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| a) $\log_8 64 + \log_4 \frac{1}{8}$ | c) $\log_6 \frac{1}{36} + \log_4 \sqrt[3]{4}$ | e) $\log_{1,5} \frac{9}{4} - \log_{\pi} 1$ |
| b) $\log_5 5^8 - \log_{0,5} 8$ | d) $\log_9 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[4]{3}$ | f) $\log_{\frac{2}{3}} 1,5 - \log_{1,5} \frac{8}{27}$ |

8. Dla jakiej podstawy a logarytmu podana równość jest prawdziwa?

- | | | | |
|--------------------|-----------------------------|-----------------------|---------------------|
| a) $\log_a 25 = 2$ | b) $\log_a \frac{1}{8} = 3$ | c) $\log_a 0,25 = -1$ | d) $\log_a 64 = -3$ |
|--------------------|-----------------------------|-----------------------|---------------------|

9. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|---|--------------------------------|
| a) $\log_2 b = 5$ | c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ | e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ | g) $\log_{\sqrt{3}} b = 6$ |
| b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ | d) $\log_7 b = 0$ | f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ | h) $\log_{\frac{3}{4}} b = -1$ |

10. Oblicz.

- | | | |
|------------------------------|--|---|
| a) $\log_2(\log_{11} 121)$ | c) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 8)$ | e) $\log_9(\log_8(\log_3 9))$ |
| b) $\log_{0,1}(\log_2 1024)$ | d) $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}\right)$ | f) $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log_4 2))$ |

11. Wyznacz a .

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $4^x = 64$ i $x = \log_2 a$ | c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}$ i $x = \log_4 a$ |
| b) $5^x = 5\sqrt{5}$ i $x = \log_8 a$ | d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ i $x = \log_2 a$ |

12. Wyznacz a .

- | | |
|------------------------------------|--|
| a) $2^x = 16$, $a = \log_2 x$ | d) $3^x = 9$, $a = \log_8 x$ |
| b) $2^{x-1} = 4$, $a = \log_3 x$ | e) $3^{x+1} = 27$, $a = \log_{\frac{1}{2}} x$ |
| c) $2^{x+2} = 64$, $a = \log_2 x$ | f) $3^{x-1} = 81$, $a = \log_{25} x$ |

13. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Liczby x i y spełniają warunki: $2^x = 16$ i $3^y = 16$. Zapisz x i y jako logarytmy pewnych liczb. Która z liczb x , y jest całkowita?

$2^x = 16$, zatem $x = \log_2 16$ oraz $x \in \mathbb{Z}$, gdyż $\log_2 16 = 4$.

$3^y = 16$, zatem $y = \log_3 16$ oraz $y \notin \mathbb{Z}$.

Liczby x i y spełniają podane warunki. Zapisz x i y jako logarytmy pewnych liczb. Która z liczb x , y jest całkowita?

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $2^x = 27$, $3^y = 27$ | c) $6^x = 216$, $8^y = 216$ |
| b) $2^x = 1000$, $10^y = 1000$ | d) $3^x = \frac{1}{3}$, $9^y = \frac{1}{3}$ |

14. Dla jakich wartości x podana liczba jest dodatnia, a dla jakich – ujemna?

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------------------|------------------------|
| a) $\log_2 x$ | b) $\log_4 x$ | c) $\log_{\frac{1}{2}} x$ | d) $\log_{\sqrt{2}} x$ |
|---------------|---------------|---------------------------|------------------------|

Sprawdź się

15. Oblicz.

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|--|
| a) $\log_2 8 + \log_2 16$ | c) $\log_3 27 - \log_3 1$ | e) $\log_5 125 - \log_5 \frac{1}{5}$ |
| b) $\log_3 9 + \log_3 81$ | d) $\log_4 4 - \log_4 64$ | f) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_3 \frac{1}{3}$ |

16. Oblicz.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} 2$ | c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} - \log_2 \sqrt{2}$ | e) $\log_4 2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$ |
| b) $\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} 27$ | d) $\log_3 \sqrt{3} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3}$ | f) $\log_6 6\sqrt{6} - \log_{\frac{1}{6}} 36$ |

17. Dla jakiej podstawy a logarytmu podana równość jest prawdziwa?

- | | | |
|--------------------|------------------------------|---------------------|
| a) $\log_a 16 = 4$ | c) $\log_a 16 = 1$ | e) $\log_a 16 = -1$ |
| b) $\log_a 16 = 2$ | d) $\log_a 16 = \frac{1}{2}$ | f) $\log_a 16 = -2$ |

1.6. Logarytm dziesiętny

Przypomnijmy, że **logarytmy dziesiętne** to logarytmy o podstawie 10. Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$. Na przykład $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $\log 1000$
- c) $\log 0,1$
- e) $\log \sqrt{10}$
- b) $\log 1\,000\,000$
- d) $\log 0,0001$
- f) $\log 10\sqrt{10}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- a) $\log 10^2 + \log 10^6$
- b) $\log 10^{-1} + \log 10^{-3}$
- c) $\log 10^{\frac{3}{4}} + \log 10^{\frac{4}{3}}$

Poniżej zamieszczono fragment tablic, w których znajdują się przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych.

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784

Ćwiczenie 3

Odczytaj z tablicy logarytmów dziesiętnych przybliżoną wartość liczby:

- a) $\log 2$,
- b) $\log 1,5$,
- c) $\log 1,78$,
- d) $\log 2,29$.

Przykład 1

Skorzystaj z tablicy logarytmów dziesiętnych i podaj przybliżoną wartość liczby $10^{0,356}$.

Zauważmy, że $\log 10^{0,356} = 0,356$. Zatem znajdujemy w tablicy liczbę 0,356 i odczytujemy, że $0,356 \approx \log 2,27$, czyli $10^{0,356} \approx 2,27$.

Ćwiczenie 4

Skorzystaj z tablicy logarytmów dziesiętnych i podaj przybliżoną wartość liczby: a) $10^{0,301}$, b) $10^{0,1761}$, c) $10^{0,0043}$, d) $10^{0,3522}$.

Czy wiesz, że...

Przed wynalezieniem kalkulatorów dzięki tablicom logarytmów dziesiętnych można było szybciej wykonywać obliczenia. Tablice pozwalają bowiem zapisać dowolną liczbę jako potęgę liczby 10.

Na przykład iloczyn $1,22 \cdot 1,55$ możemy obliczyć w następujący sposób:

$$1,22 \cdot 1,55 \approx 10^{0,0864} \cdot 10^{0,1903} =$$
$$= 10^{0,0864 + 0,1903} = 10^{0,2767} \approx$$
$$\approx 1,89$$

Z tablicy odczytujemy:

$$1,22 \approx 10^{0,0864}$$
$$1,55 \approx 10^{0,1903}$$
$$10^{0,2767} \approx 1,89$$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log 10^9 - \log 10^8$

b) $\log 100 + \log_4 \frac{1}{16}$

c) $\log 10^7 - \log_{0,5} 8$

d) $\log \frac{1}{100} + \log \frac{1}{1000}$

e) $\log_8 \frac{1}{64} + \log \sqrt[3]{10}$

f) $\log \sqrt[4]{10} - \log_3 \sqrt[4]{27}$

g) $\log \frac{\sqrt{10}}{10} - \log \frac{\sqrt[3]{10}}{10}$

h) $\log_{1,5} \frac{27}{8} - \log 1$

i) $\log_{\frac{2}{5}} 2,5 - \log \sqrt{10}$
2. Oblicz.

a) $\log_2(\log 10\,000)$

b) $\log_3(\log 1000)$

c) $\log_{\frac{1}{9}}(\log 1000)$

d) $\log_{\sqrt{2}}(\log 10\,000)$

e) $\log_9(\log_8(\log 100))$

f) $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log \sqrt{10}))$
3. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = \log_2 32$, $y = \log 10^6$

b) $x = \log 0,01$, $y = \log_2 \frac{1}{8}$

c) $x = \log_8 2$, $y = \log \sqrt{10}$

d) $x = \log(\log 10)$, $y = \log_{\frac{1}{2}} 2$

e) $x = \log_4(\log_2 16)$, $y = \log 10\sqrt{10}$

f) $x = \log_{\frac{1}{4}}(\log 100)$, $y = \log_{\sqrt{2}} 2$

Sprawdź się

4. Czy x jest liczbą całkowitą? Czy jest liczbą wymierną?

a) $x = \log 100$

b) $x = \log \sqrt[3]{10}$

c) $x = \log 10^{\frac{2}{3}}$

d) $x = \log 0,01$

e) $x = \log 10\sqrt[3]{10}$

f) $x = \log 10^{\sqrt{2}}$
5. Oblicz.

a) $\log_2(3 + \log 10)$

b) $\log_2(3 - \log 100)$

c) $\log_2(\log \sqrt{10})$

d) $\log_9(\log \sqrt[3]{10})$

e) $\log_2 2^{100} - \log 100^{10}$

f) $\log 10^5 + \log_{0,1} 100$

1.7. Logarytm iloczynu i logarytm ilorazu

Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Niech a , x i y będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Niech $p = \log_a x$ oraz $q = \log_a y$, wtedy z definicji logarytmu:

$$x = a^p \quad \text{ i } \quad y = a^q$$

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q$$

$$x \cdot y = a^{p+q}$$

$$\log_a(x \cdot y) = p + q$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

Korzystamy z definicji logarytmu.

Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o logarytmie ilorazu.

Przykład 1

a) Sprawdź, czy równość $\log_2 96 = 5 + \log_2 3$ jest prawdziwa.

$\log_2 96 = \log_2(32 \cdot 3) = \log_2 32 + \log_2 3 = \log_2 2^5 + \log_2 3 = 5 + \log_2 3$, zatem równość jest prawdziwa.

b) Sprawdź, czy równość $\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - 2$ jest prawdziwa.

$\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - \log_3 9 = \log_3 7 - 2$, zatem równość jest prawdziwa.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$

c) $\log_2 \frac{8}{3} = 3 - \log_2 3$

b) $\log 500 = 2 + \log 5$

d) $\log 0,07 = -2 + \log 7$

Przykład 2

a) $\log 125 + \log 4 - \log 5 = \log \frac{125 \cdot 4}{5} = \log 100 = 2$

b) $\log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \left(\frac{36}{2} \cdot \frac{1}{6} \right) = \log_3 3 = 1$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\log_6 4 + \log_6 9$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15$

e) $\log_5 0,04 - \log_5 0,008$

b) $\log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$

d) $\log 6 - \log 2 - \log 3$

f) $\log \frac{7}{4} - \log 14 - \log 125$

Przykład 3

Przedstaw wyrażenie $3 + \log_2 7$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$3 + \log_2 7 =$$

Zapisujemy 3 jako $\log_2 8$.

$$= \log_2 8 + \log_2 7 =$$

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie iloczynu.

$$= \log_2(8 \cdot 7) = \log_2 56$$

Ćwiczenie 4

Przedstaw podane wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie a .

a) $2 + \log_3 5$, $a = 3$

b) $\log_2 10 - 1$, $a = 2$

c) $4 - \log_3 36$, $a = 3$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$

c) $\log 0,12 - \log 0,3 + \log 25$

b) $\log_3 \frac{1}{12} + \log_3 \frac{14}{15} + \log_3 \frac{10}{21}$

d) $\log_{0,2} 0,3 - \log_{0,2} 0,5 - \log_{0,2} 15$

2. Wiadomo, że $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log 50$,

b) $\log 500$,

c) $\log 0,05$,

d) $\log \frac{1}{5}$.

3. Wiadomo, że $\log_2 7 \approx 2,8$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log_2 14$,

b) $\log_2 28$,

c) $\log_2 3,5$,

d) $\log_2 \frac{7}{4}$.

4. Wiadomo, że $\log_5 2 \approx 0,43$, $\log_5 7 \approx 1,21$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log_5 14$,

b) $\log_5 70$,

c) $\log_5 0,4$,

d) $\log_5 0,7$.

5. Zapisz liczbę p w postaci $\log_a b$.

a) $p = \log_2 5 + \log_2 6$

b) $p = \log_3 8 - \log_3 2$

c) $p = 1 + \log_4 3$

Sprawdź się

6. Oblicz.

a) $\log_4 2 + \log_4 8$

c) $\log_{\frac{1}{6}} 3 + \log_{\frac{1}{6}} 2$

e) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$

b) $\log 2 + \log 50$

d) $\log_{0,1} 0,2 + \log_{0,1} 0,5$

f) $\log_{20} 100 + \log_{20} 4$

7. Oblicz.

a) $\log_4 12 - \log_4 3$

b) $\log_6 72 - \log_6 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 3,5 - \log_{\frac{1}{2}} 7$

1.8. Logarytm potęgi

Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeżeli a i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Niech a i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Niech $q = \log_a x$, wtedy z definicji logarytmu:

$$x = a^q \quad \text{Podnosimy obie strony równości do potęgi } p.$$

$$x^p = (a^q)^p \quad \text{Korzystamy z własności działań na potęgach.}$$

$$x^p = a^{p \cdot q} \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$\log_a x^p = p \cdot q$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Przykład 1

Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0,3$. Oblicz $\log_2 x^5$ i $\log_2 \frac{1}{x}$.

$$\log_2 x^5 = 5 \log_2 x = 5 \cdot 0,3 = 1,5$$

$$\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x = -0,3$$

Ćwiczenie 1

Niech x będzie taką liczbą, że $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

a) $\log x^6$ b) $\log \frac{1}{x^3}$ c) $\log \sqrt{x}$ d) $\log \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ e) $\log \frac{x^3}{\sqrt{x}}$

Przykład 2

Przedstaw wyrażenie $3 \log_4 8 - 2$ w postaci logarytmu o podstawie 4.

$$3 \log_4 8 - 2 = \quad \text{Korzystamy ze wzoru na logarytm potęgi. Zapisujemy 2 jako } \log_4 4^2.$$

$$= \log_4 8^3 - \log_4 4^2 = \quad \text{Korzystamy ze wzoru na logarytm ilorazu.}$$

$$= \log_4 \frac{8^3}{4^2} = \quad \text{Korzystamy z własności działań na potęgach.}$$

$$= \log_4 (2 \cdot 2 \cdot 8) = \log_4 32$$

Ćwiczenie 2

Przedstaw podane wyrażenie w postaci logarytmu pewnej liczby.

a) $3 + \log_2 5$ b) $2 \log_3 4 - 1$ c) $3 \log_{\frac{1}{2}} 3 + 1$ d) $4 - 2 \log_3 6$

Przykład 3

Wiadomo, że $\log_2 5 \approx 2,32$. Oblicz przybliżoną wartość $\log_2 250$.

$$\begin{aligned} \log_2 250 &= \log_2 (2 \cdot 125) = \log_2 2 + \log_2 125 = 1 + \log_2 5^3 = 1 + 3 \log_2 5 \approx \\ &\approx 1 + 3 \cdot 2,32 = 7,96 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wiadomo, że $\log_3 2 \approx 0,63$. Oblicz przybliżoną wartość podanej liczby.

a) $\log_3 4$ b) $\log_3 12$ c) $\log_3 96$ d) $\log_3 72$

Zadania

1. Wiadomo, że $\log 2 \approx 0,3$. Oblicz przybliżoną wartość podanej liczby.

a) $\log 4$ b) $\log 16$ c) $\log 0,04$ d) $\log 1600$

2. Wiadomo, że $\log 4 \approx 0,6$ oraz $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\log 25$, b) $\log 64$, c) $\log 0,64$, d) $\log 2,5$, e) $\log \frac{5}{4}$, f) $\log 20$.

D 3. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0,4$. Uzasadnij podaną równość.

a) $\log_2 2x^2 = 1,8$ b) $\log_2 16x^3 = 5,2$ c) $\log_2 \frac{x^4}{2} = 0,6$

4. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz wartość:

a) $\log_3 3x^2$, b) $\log_3 9x^8$, c) $\log_3 \frac{x^4}{81}$, d) $\log_3 27x^6$.

D 5. Niech $p = \log_2 3$ oraz $q = \log_2 5$. Uzasadnij podaną równość.

a) $\log_2 45 = 2p + q$ b) $\log_2 75 = p + 2q$ c) $\log_2 405 = 4p + q$

6. Niech $p = \log 2$. Wyraż podaną liczbę a za pomocą p .

a) $a = \log 200$ b) $a = \log 0,02$ c) $a = \log 0,04$ d) $a = \log 1600$

D 7. Wykaż, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ podana równość jest prawdziwa.

a) $\log \frac{x}{y} + \log \frac{y}{x} = 0$ c) $\log x^2 y - \log x y^2 = \log x - \log y$
b) $\log x^2 y^2 = 2 \log x + 2 \log y$ d) $\log x^3 y^4 - \log x^2 y^3 = \log x + \log y$

Sprawdź się

8. Dla jakiej liczby a prawdziwa jest podana równość?

a) $\log_2 3^5 = a \log_2 3$ c) $\log_2 81 = a \log_2 3$ e) $\log_7 625 = a \log_7 5$
b) $\log_5 2^{100} = a \log_5 2$ d) $\log_5 32 = a \log_5 2$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 64 = a \log_{\frac{1}{2}} 4$

9. Oblicz x .

a) $\log_5 x = 3 \log_5 2$ c) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3 \log_{\frac{1}{2}} 5$ e) $\log x = 2 \log \sqrt{2}$
b) $\log_7 x = 2 \log_7 3$ d) $\log_{\frac{1}{10}} x = 6 \log_{\frac{1}{10}} 10$ f) $\log x = 4 \log \sqrt{3}$

10. Wiadomo, że $\log 3 \approx 0,48$. Oblicz przybliżoną wartość podanej liczby.

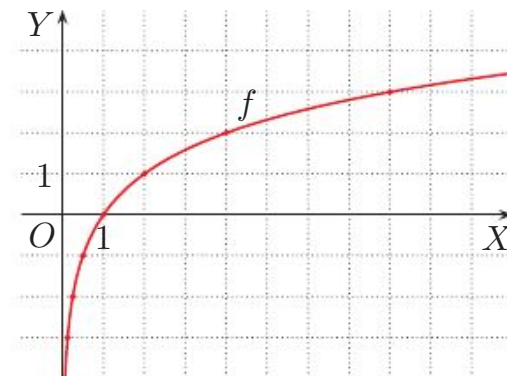
a) $\log 9$ b) $\log 27$ c) $\log 0,9$ d) $\log 0,81$

1.9. Funkcja logarytmiczna

Przykład 1

Jeśli każdej liczbie dodatniej x przyporządkujemy wartość $\log_2 x$, to otrzymamy funkcję $f(x) = \log_2 x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$. Jej wykres przedstawiono na rysunku obok.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. Asymptotą pionową jej wykresu jest oś OY . Jest to funkcja rosnąca.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

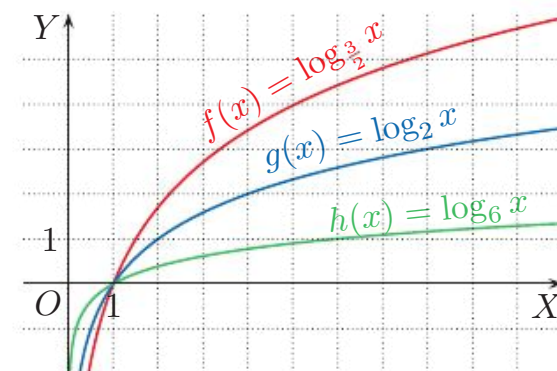
$$f(x) = \log_3 x \text{ oraz } g(x) = \log_4 x$$

Określ dziedziny, zbiory wartości oraz monotoniczność tych funkcji.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$, $g(x) = \log_2 x$ oraz $h(x) = \log_6 x$. Do którego z tych wykresów należy punkt P ?

- a) $P(216, 3)$ c) $P(1024, 10)$
b) $P(2\frac{1}{4}, 2)$ d) $P(1, 0)$



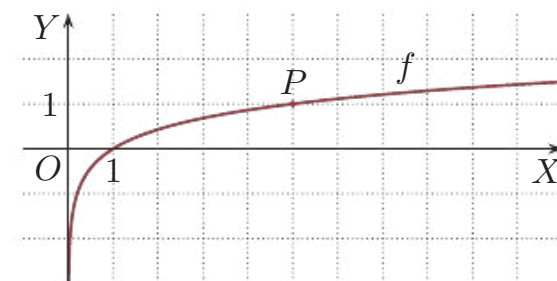
Przykład 2

Punkt $P(5, 1)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ (rysunek obok). Wyznacz a oraz oblicz $f(\frac{1}{5})$, $f(25)$.

$$\log_a 5 = 1, \text{ zatem } a = 5.$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \log_5 \frac{1}{5} = -1$$

$$f(25) = \log_5 25 = 2$$



Ćwiczenie 3

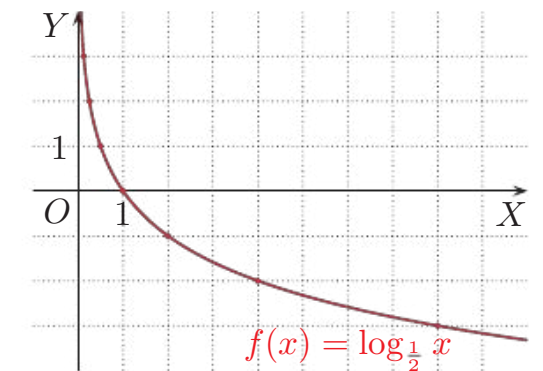
Czy punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_5 x$?

- a) $P(125, 3)$ b) $P(620, 4)$ c) $P(0,04, -2)$ d) $P(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ określonej dla $x \in (0; \infty)$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3



Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. Asymptotą pionową jej wykresu jest oś OY . Jest to funkcja malejąca.

Ćwiczenie 4

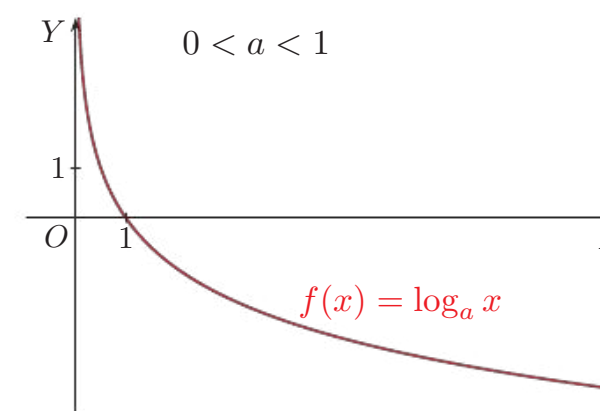
Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \text{ oraz } g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

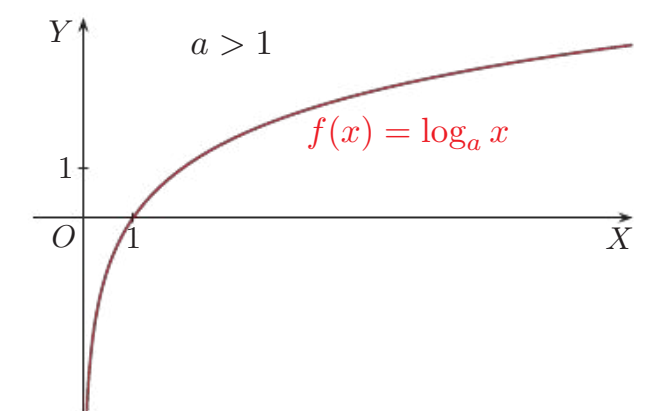
Określ dziedziny, zbiory wartości oraz monotoniczność tych funkcji.

Definicja

Funkcję $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ oraz $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0; \infty)$ nazywamy **funkcją logarytmiczną**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, a jej zbiorem wartości – zbiór liczb rzeczywistych.

Wykres funkcji logarytmicznej przecina oś OX w punkcie $(1, 0)$, natomiast nie ma punktów wspólnych z osią OY , która jest jego asymptotą pionową.

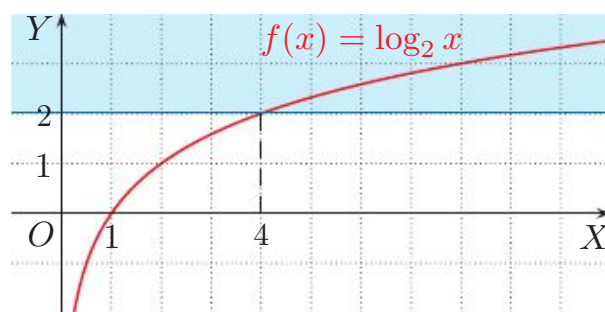
Ćwiczenie 5

Dla jakich argumentów x funkcja $f(x) = \log_a x$ przyjmuje wartości dodatnie w przypadku, gdy: a) $a \in (1; \infty)$, b) $a \in (0; 1)$?

Przykład 4

Z przedstawionego obok wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ możemy odczytać, że nierówność $\log_2 x \geq 2$ zachodzi dla:

$$x \in [4; \infty)$$

**Ćwiczenie 6**

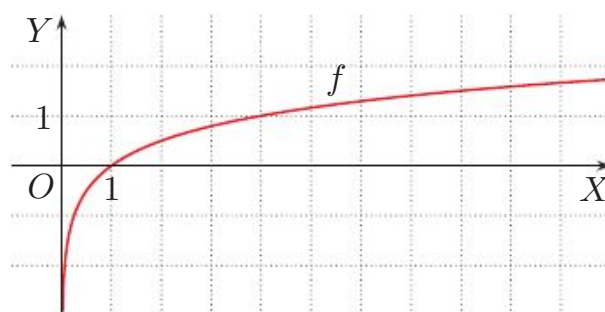
Odczytaj z wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$, dla jakich argumentów zachodzi podana nierówność.

- a) $\log_2 x \leq 1$ b) $\log_2 x > 1$

Ćwiczenie 7

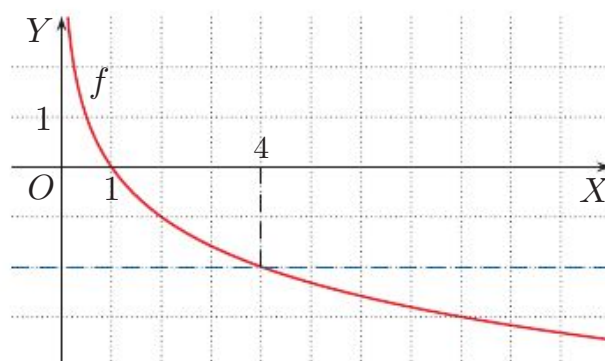
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_4 x$. Odczytaj z niego rozwiązanie podanej nierówności.

- a) $\log_4 x \geq 1$ c) $\log_4 x > \frac{3}{2}$
b) $\log_4 x < 1$ d) $\log_4 x \leq \frac{3}{2}$

**Przykład 5**

Z przedstawionego obok wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ możemy odczytać, że:

- a) nierówność $\log_{\frac{1}{2}} x > -2$ zachodzi dla $x \in (0; 4)$,
b) nierówność $\log_{\frac{1}{2}} x < -2$ zachodzi dla $x \in (4; \infty)$.

**Ćwiczenie 8**

Odczytaj z wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, dla jakich argumentów zachodzi podana nierówność.

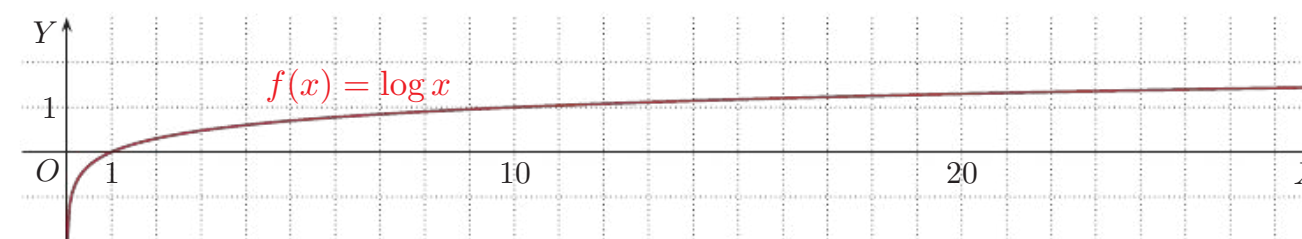
- a) $\log_{\frac{1}{2}} x > -1$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x \leq -1$ c) $\log_{\frac{1}{2}} x < -3$ d) $\log_{\frac{1}{2}} x \leq -3$

Zadania

- Czy punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ lub $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$?
a) $P(\frac{1}{8}, 3)$ b) $P(\frac{1}{16}, -4)$ c) $P(2\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ d) $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$
- Dla jakiej wartości a punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$?
a) $P(27, 3)$ b) $P(625, 4)$ c) $P(32, -5)$ d) $P(4, 4)$

- Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$ o dziedzinie D .
a) $D = (0; 1)$ b) $D = [2; \infty)$ c) $D = [\frac{1}{2}; 8]$ d) $D = [\sqrt{2}; 1024]$
- Określ monotoniczność funkcji f .
a) $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$ b) $f(x) = \log_{\sqrt{5}-1} x$ c) $f(x) = \log_{\sqrt{2}-1} x$
- Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?
a) $f(x) = \log_{2m} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{m}{4}} x$ c) $f(x) = \log_{m+1} x$
- Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?
a) $f(x) = \log_{3m} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{m}{2}} x$ c) $f(x) = \log_{m+2} x$
- Podaj cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f . Naskicuj ten wykres.
a) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$ b) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$

- Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log x$.



Dla jakich argumentów x zachodzi podana nierówność?

- a) $\log x > 1$ b) $\log x > 2$ c) $\log x > 3$ d) $\log x > 6$
- Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ i podaj rozwiązanie nierówności.
a) $0 \leq \log_2 x \leq 1$ b) $-1 < \log_2 x < 1$
 - Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ i podaj rozwiązanie nierówności.
a) $-1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$ b) $-2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x < 1$

Sprawdź się

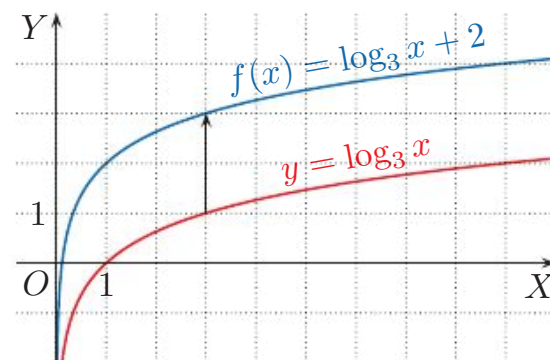
- Korzystając z monotoniczności odpowiedniej funkcji logarytmicznej, uporządkuj liczby x, y, z w kolejności rosnącej.
a) $x = 2 \log_3 2$, $y = \frac{1}{3} \log_3 27$, $z = \log_3 \frac{7}{2}$
b) $x = \frac{3}{4} \log_{\frac{1}{3}} 16$, $y = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{3}} 8$, $z = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 80$
- Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \log_5 x$ i odczytaj z niego rozwiązanie podanej nierówności.
a) $\log_5 x > 0$ b) $\log_5 x \leq 0$ c) $\log_5 x \geq -1$ d) $\log_5 x < -1$

1.10. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = \log_3 x + 2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_3 x$ o 2 jednostki w górę.

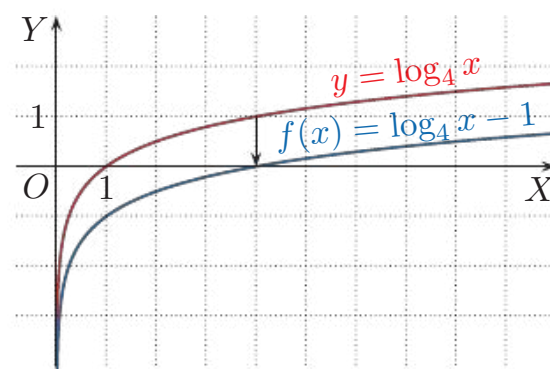
Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = \log_4 x - 1$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_4 x$ o 1 jednostkę w dół.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h .

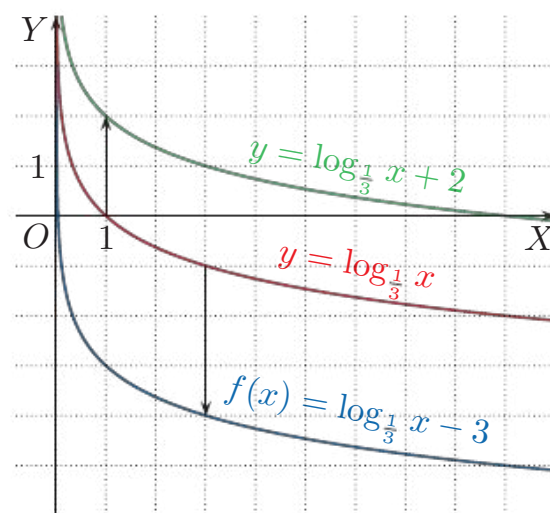
- a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2 x + 1$, $h(x) = \log_2 x - 3$
 b) $f(x) = \log_5 x$, $g(x) = \log_5 x + 2$, $h(x) = \log_5 x - 1$

Przykład 3

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + 2$.

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 3 jednostki w dół.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 2 jednostki w górę.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h .

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2, \quad h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 4$$

Przykład 4

a) Punkt $P(4, 5)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x + a$. Wyznacz współczynnik a .

$$\log_2 4 + a = 5, \text{ stąd } a = 5 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3.$$

b) Punkt $P(9, -6)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + a$. Wyznacz współczynnik a .

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 + a = -6, \text{ stąd } a = -6 - \log_{\frac{1}{3}} 9 = -6 - (-2) = -4.$$

Ćwiczenie 3

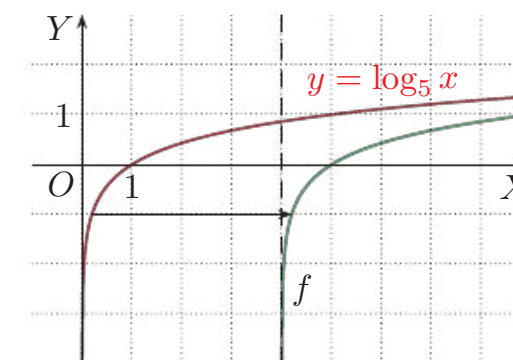
Punkt P należy do wykresu funkcji f . Wyznacz współczynnik a i naszkicuj wykres funkcji f .

- a) $f(x) = \log_3 x + a$, $P(3, 2)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + a$, $P(3, -3)$
 b) $f(x) = \log_4 x + a$, $P(4, -1)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + a$, $P(4, 0)$

Przykład 5

Wykres funkcji $f(x) = \log_5(x - 4)$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_5 x$ o 4 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (4; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 4$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 5.



Ćwiczenie 4

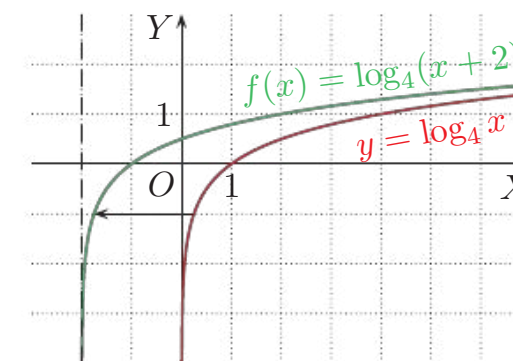
Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu.

- a) $f(x) = \log_2(x - 1)$ c) $f(x) = \log_3(x - 2)$ e) $f(x) = \log_4(x - 2)$
 b) $f(x) = \log_2(x - 3)$ d) $f(x) = \log_3(x - 4)$ f) $f(x) = \log_4(x - 1)$

Przykład 6

Wykres funkcji $f(x) = \log_4(x + 2)$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_4 x$ o 2 jednostki w lewo.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = -2$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1 .



Ćwiczenie 5

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu. Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

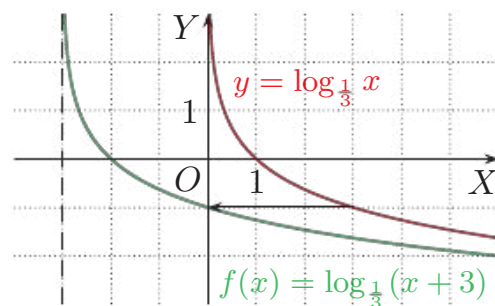
- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = \log_2(x + 1)$ | d) $f(x) = \log_3(x + 4)$ |
| b) $f(x) = \log_2(x + 2)$ | e) $f(x) = \log_4(x + 4)$ |
| c) $f(x) = \log_3(x + 1)$ | f) $f(x) = \log_4(x + 3)$ |

Przykład 7

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 3)$. Określ jej dziedzinę i wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu.

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 3 jednostki w lewo.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-3; \infty)$, miejscem zerowym jest liczba -2 , a asymptotą pionową wykresu tej funkcji – prosta $x = -3$.



Ćwiczenie 6

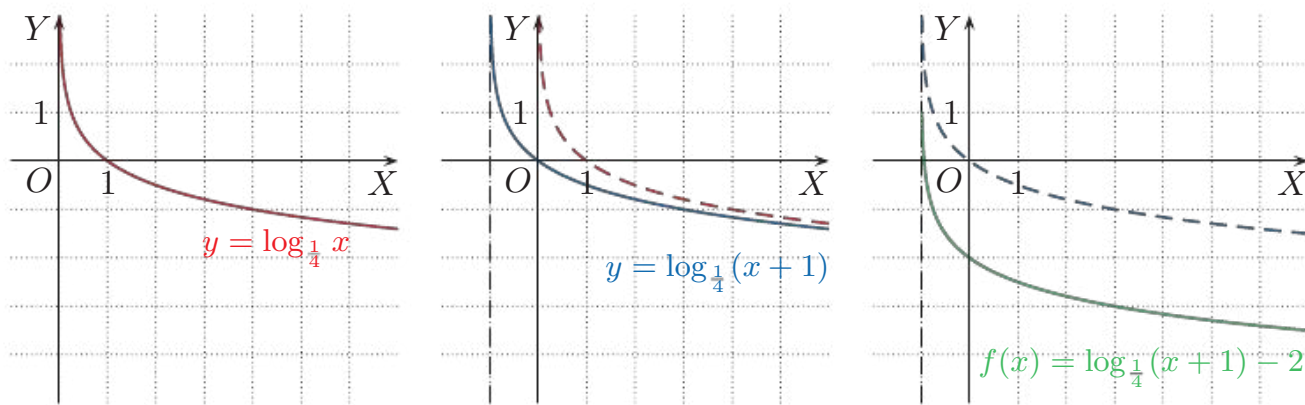
Naszkicuj wykres funkcji f . Określ jej dziedzinę i wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu. Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$ | c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$ |
| b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 4)$ | d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 4)$ |

Przykład 8

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x + 1) - 2$.

Wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ przesuwamy najpierw o 1 jednostkę w lewo, a następnie otrzymany wykres przesuwamy o 2 jednostki w dół.



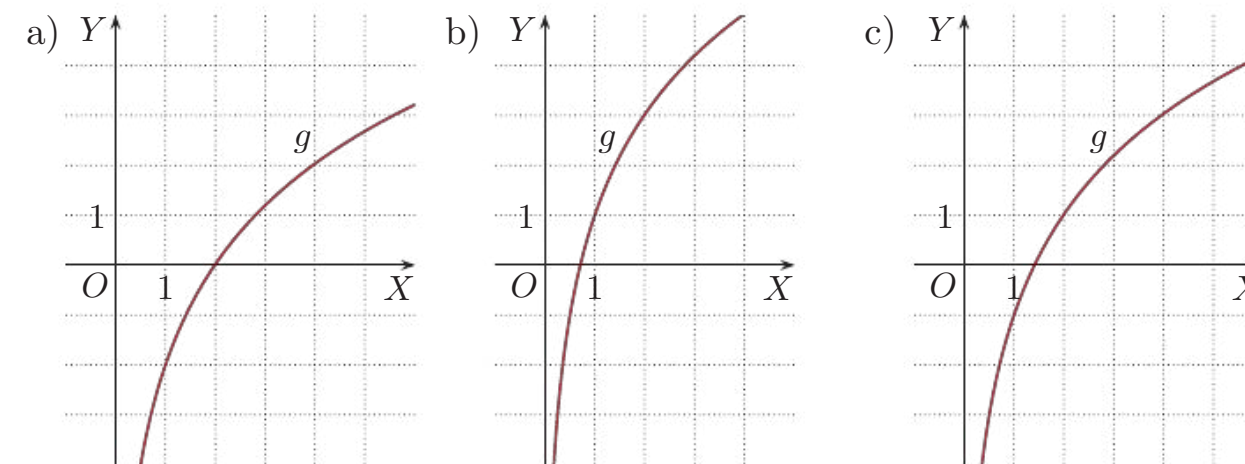
Zadania

- Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_6 x$:

a) o 2 jednostki w dół,	c) o 2 jednostki w prawo,
b) o 1 jednostkę w górę,	d) o 3 jednostki w lewo.

 Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.

- Przedstawiony na rysunku wykres funkcji g można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$ wzdłuż osi OY . Podaj wzór funkcji g i wyznacz jej miejsce zerowe.



- Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h .

a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2(x + 3)$, $h(x) = \log_2(x + 3) - 2$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - 1$
- Punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2(x + a)$. Wyznacz a oraz naszkicuj wykres funkcji f .

a) $P(-5, 0)$	b) $P(-2, 1)$	c) $P(-\frac{1}{2}, -1)$
---------------	---------------	--------------------------

Sprawdź się

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsce zerowe.

a) $f(x) = \log_2 x - 2$	c) $f(x) = \log_3 x + 1$	e) $f(x) = \log_4 x - 2$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$	d) $f(x) = \log_3 x - 2$	f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + 2$
- Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.

a) $f(x) = \log_2(x + 3)$	c) $f(x) = \log_3(x - 1)$	e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$
b) $f(x) = \log_2(x - 4)$	d) $f(x) = \log_3(x + 2)$	f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 3)$

Skala logarytmiczna

Gdy porównujemy wielkości fizyczne, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. W ten sposób powstaje **skala logarytmiczna**, na której w równych odstępach umieszczone są logarytmy wartości tych wielkości fizycznych.

Dźwięk

Natężenie dźwięku i poziom natężenia dźwięku to wielkości fizyczne związane z falą dźwiękową. Zachodzi między nimi zależność:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

gdzie:

I – natężenie badanej fali dźwiękowej w watach na metr kwadratowy (W/m^2),

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ – próg słyszalności (dolna granica zakresu słyszalności człowieka dla częstotliwości 1000 Hz),

L – poziom natężenia dźwięku.

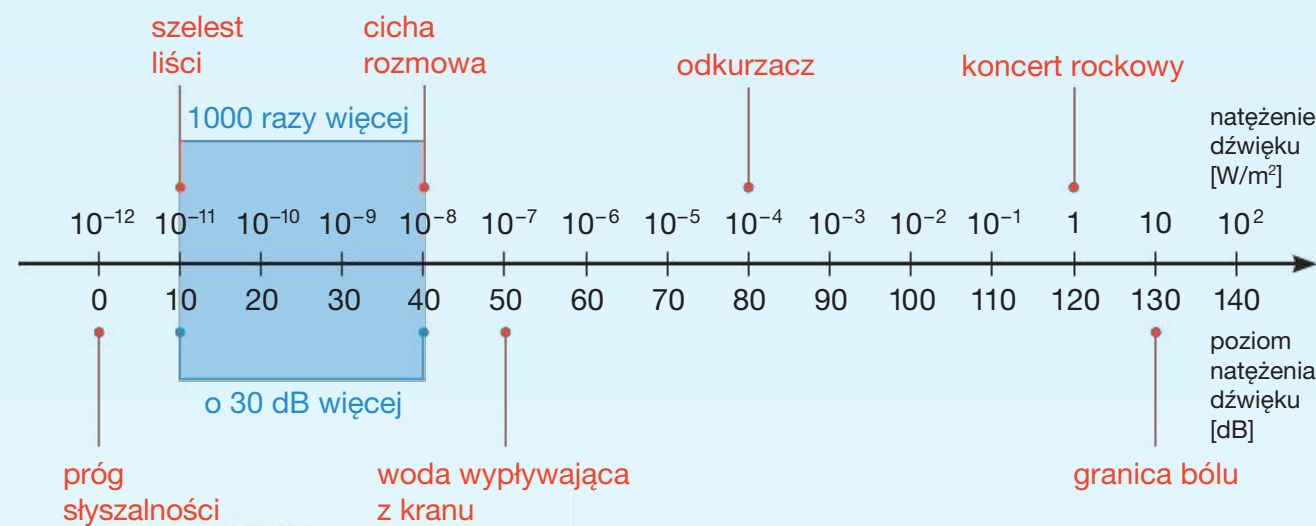
Poziom natężenia dźwięku podaje się w **decybelach** (dB).

Na przykład jeżeli podczas koncertu rockowego natężenie dźwięku jest równe 1 W/m^2 , to poziom natężenia dźwięku wynosi:

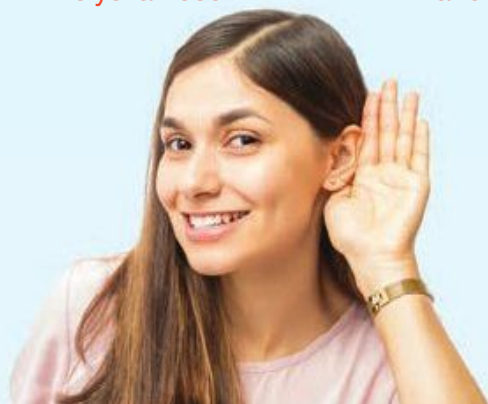
$$L = 10 \cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120 \text{ [dB]}$$



Na osi poniżej pokazano natężenia dźwięków z różnych źródeł (skala liniowa) i odpowiadające im poziomy natężenia dźwięków (skala logarytmiczna). Zwróć uwagę, że wzrost poziomu natężenia dźwięku o 30 dB oznacza tysiąckrotny wzrost natężenia tego dźwięku.



1 O ile decybeli wzrośnie poziom natężenia dźwięku, jeżeli natężenie dźwięku wzrośnie dwukrotnie?



1.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

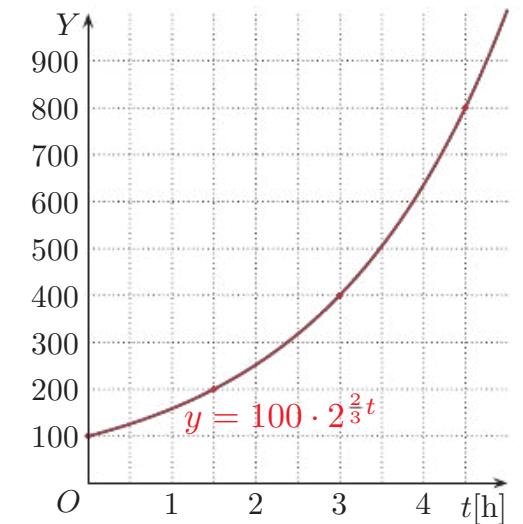
Wzrost wykładniczy

Liczbę bakterii hodowanych w warunkach laboratoryjnych, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór: $y = y_0 \cdot a^t$, gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – stałą zależną m.in. od typu bakterii.

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 100 bakterii. Ustalono, że liczba bakterii podwaja się w ciągu 1,5 godziny. Wyznacz wzór opisujący liczebność kolonii bakterii w zależności od czasu.

Zauważmy, że $y_0 = 100$ oraz dla $t = 1,5$ zachodzi równość $200 = 100 \cdot a^{1,5}$. Stąd $a = 2^{\frac{2}{3}}$. Otrzymujemy więc wzór $y = 100 \cdot 2^{\frac{2}{3}t}$.



Ćwiczenie 1

Po dwóch godzinach od rozpoczęcia pewnego doświadczenia liczba bakterii była równa 1200, a po sześciu godzinach wzrosła do 10 800. Oblicz, ile było bakterii na początku doświadczenia, a ile po 10 godzinach.

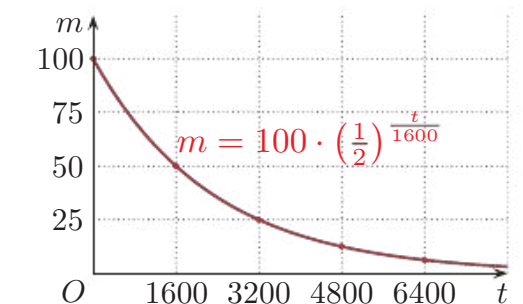
Rozpad promieniotwórczy

Okres połowicznego rozpadu to czas, po którym masa izotopu zmniejsza się o połowę. Wzór $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje masę próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T po upływie czasu t (m_0 oznacza masę początkową próbki).

Przykład 2

Okres połowicznego rozpadu radu-226 jest równy 1600 lat. Jeśli masa początkowa m_0 próbki tego izotopu była równa 100 mg, to jego masa po upływie t lat wyraża się wzorem:

$$m = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$



Ćwiczenie 2

Po jakim czasie z próbki radu-226 o masie:

- a) 100 mg zostanie 12,5 mg tego izotopu,
- b) 10,24 mg zostanie 0,01 mg tego izotopu?

$(\frac{1}{2})^a = (\frac{1}{2})^b$, gdy $a = b$.

Ćwiczenie 3

Okres połowicznego rozpadu strontu-90 jest równy 28 lat. Po jakim czasie początkowa masa próbki tego izotopu zmniejszy się o 75%, a po jakim czasie o 87,5%?

W żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ¹⁴C do izotopu nieradioaktywnego ¹²C wynosi około 1,5 · 10⁻¹². Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ¹⁴C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ¹²C pozostaje niezmienną. Podczas prac archeologicznych pomiar zawartości izotopu ¹⁴C może więc stanowić podstawę określenia wieku znalezisk organicznych.



Przykład 3

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ¹⁴C jest równa 66% początkowej zawartości tego izotopu.

Korzystamy ze wzoru $m = m_0 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$, gdzie $T = 5700$ lat.

$m = 0,66m_0$, zatem otrzymujemy:

$$0,66 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{5700}}$$
$$\log 0,66 = \log (\frac{1}{2})^{\frac{t}{5700}}$$
$$\log 0,66 = \frac{t}{5700} \log 0,5$$
$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,66}{\log 0,5} \approx 3417$$

Jeśli $a = b > 0$,
to $\log a = \log b$.



Znalezisko ma około 3417 lat.

Ćwiczenie 4

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ¹⁴C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 50%, b) 75%.



Ćwiczenie 5

W pewnym znalezisku stosunek ilości izotopu węgla ¹⁴C do izotopu ¹²C wynosi 1,875 · 10⁻¹³. Oblicz przybliżony wiek znaleziska.

Zadania

1. W laboratorium obserwowano wzrost liczebności kolonii bakterii, która co pół godziny zwiększała się o 25%. Doświadczenie rozpoczęło się o godzinie 9.00, a o 10.00 populacja liczyła 10⁵ organizmów. Wyznacz początkową liczbę bakterii y_0 i stałą a we wzorze $y = y_0 \cdot a^t$ opisującym liczbę bakterii y po upływie czasu t w godzinach. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij (zastosuj notację wykładniczą).

Godzina	9.00	9.30	9.45	10.00	10.30	11.45	12.00
Liczba bakterii	?	?	?	10 ⁵	?	?	?

2. a) Z próbki jodu-131 o masie 4,8 g po szesnastu dniach zostało 1,2 g. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.
b) Po siedmiu dniach z 40 g neptunu-239 zostało 5 g tego izotopu. Oblicz okres jego połowicznego rozpadu.
3. Jednym z radioaktywnych odpadów w elektrowniach jądrowych jest pluton-239. Po 100 000 lat jego masa zmniejsza się o 75%. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.



4. Oblicz, ile procent początkowej zawartości izotopu ¹⁴C znajduje się w:
a) egipskiej mumii mającej 3330 lat,
b) kości zwierzęcia mającej 17 000 lat.

Sprawdź się

5. W tabeli podano, jaka część masy promieniotwórczego izotopu pozostała po upływie czasu $T, 2T, 3T, 4T, 5T, 6T$, gdzie T to okres połowicznego rozpadu. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.
6. W laboratorium obserwowano szybkość namnażania się pewnego rodzaju bakterii. Badana kolonia liczyła początkowo 1000 organizmów. Funkcja $y = 1000 \cdot (\sqrt[3]{2})^t$ opisuje liczbę bakterii po upływie czasu t (w godzinach) od rozpoczęcia obserwacji. Ile bakterii było po godzinie od rozpoczęcia obserwacji, a ile po dwóch godzinach? Po jakim czasie od rozpoczęcia obserwacji liczba bakterii się podwoiła?

Upływ czasu	Ułamek	Procent
T	$\frac{1}{2}$	50
$2T$	$\frac{1}{4}$	?
$3T$	$\frac{1}{8}$	?
$4T$	?	6,25
$5T$	$\frac{1}{32}$	3,125
$6T$	?	?



Powtórzenie

Zestaw I

1. Oblicz.

a) 4^{-3} c) $(-\frac{1}{2})^{-3}$ e) $\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5}$ g) $\frac{3^6 \cdot 9}{3^5}$
b) 3^{-4} d) $(\frac{3}{4})^{-2}$ f) $\frac{5^4 \cdot 5^{-2}}{5^3}$ h) $\frac{6^4 \cdot 36^{-1}}{6^{-1}}$

2. Oblicz.

a) $8^{\frac{1}{3}} + 9^{\frac{1}{2}}$ c) $4^{-\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}}$ e) $27^{\frac{2}{3}} + 32^{\frac{2}{5}}$ g) $(\frac{9}{4})^{\frac{3}{2}} - (\frac{81}{16})^{\frac{3}{4}}$
b) $64^{\frac{1}{6}} - 64^{\frac{1}{2}}$ d) $16^{-\frac{1}{4}} + 16^{-\frac{1}{2}}$ f) $25^{\frac{3}{2}} - 8^{-\frac{2}{3}}$ h) $(\frac{64}{125})^{\frac{2}{3}} + (\frac{4}{25})^{\frac{1}{2}}$

3. Oblicz.

a) $3^{\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ c) $81^{\frac{3}{4}} : 81^{\frac{1}{2}}$ e) $2^{\frac{2}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{5}}$ g) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$
b) $5^{-\frac{5}{4}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}$ d) $9^{\frac{1}{3}} : 9^{-\frac{1}{6}}$ f) $5^{-\frac{2}{7}} : 25^{-\frac{1}{7}}$ h) $9^{\frac{3}{10}} : 27^{-\frac{4}{5}}$

4. Zapisz podaną liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$.

a) $5\sqrt{5}$ c) $125\sqrt[3]{5}$ e) $16\sqrt{8}$ g) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$
b) $49\sqrt{7}$ d) $5\sqrt[3]{25}$ f) $8\sqrt[3]{16}$ h) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{2}}$

5. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{-4}$, $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ b) $x = (\frac{2^6}{6^3})^{-\frac{2}{3}}$, $y = (\sqrt[3]{1,6})^6$

6. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.

a) $\frac{(4x)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{(64x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x^2}$ c) $\frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}{x^{\frac{1}{3}}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$

7. Zapisz podane liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $8^{\frac{1}{2}}$, $16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$, $32^{\frac{\pi}{10}}$, $256^{\frac{1}{4}}$ b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{9})^{2,6}$, $(\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}}$, $(\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{243}$

8. Naskicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 4x + 1$ c) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$, $g(x) = x + 4$
b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ d) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$, $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$

9. Naskicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(x) + 1$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .

a) $f(x) = 2^x - 3$ b) $f(x) = 3^x + 1$ c) $f(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$

10. Oblicz.

a) $\log_3 27$ c) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ g) $\log_{\sqrt{3}} 27$
b) $\log_{27} 3$ d) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ f) $\log_{27} \sqrt{3}$ h) $\log_{27} 3\sqrt{3}$

11. Oblicz.

a) $\log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_9 81$ c) $\log_3 27 - \log_4 2 - \log_2 \frac{1}{8}$
b) $\log 0,1 + \log 1000 + \log_{0,1} 10$ d) $\log_{36} 6 + \log_{16} 4 - \log_8 2$

12. Oblicz.

a) $3^{\log_3 2}$ b) $9^{\log_3 2}$ c) $3^{1-\log_3 2}$ d) $4^{\log_4 0,5-2}$

13. Naskicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, dla jakiego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość a .

a) $f(x) = 2^x - 1$, $a = \log_4 64$ c) $f(x) = -3^x$, $a = \log_3 \frac{1}{27}$
b) $f(x) = 2^{x+1}$, $a = \log_{\frac{1}{2}} 0,25$ d) $f(x) = 3^{-x}$, $a = \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$

14. Oblicz.

a) $\log_2 6 + \log_2 8 - \log_2 3$ d) $\log 4 - \log 16 - \log 25$
b) $\log_3 2 + \log_3 27 - \log_3 6$ e) $2 \log 5 + \log 4 - \log 10^4$
c) $\log_4 10 - \log_4 5 + \log_4 8$ f) $3 \log 2 - \log 80 + 6 \log 1$

15. W karcie wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzaminie maturalnym z biologii, chemii i fizyki znajduje się tablica przybliżonych wartości logarytmów dziesiętnych. Korzystając z zamieszczonego obok fragmentu tablicy, podaj przybliżone wartości:

a) $\log 0,03$, $\log 0,3$, $\log 3$,
b) $\log 0,054$, $\log 0,0054$, $\log 5,4$,
c) $\log 3 + \log 9$, $\log 8 - \log 2$.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
0,01	-2,000	0,26	-0,585	0,51	-0,292
0,02	-1,699	0,27	-0,569	0,52	-0,284
0,03	-1,523	0,28	-0,553	0,53	-0,276
0,04	-1,398	0,29	-0,538	0,54	-0,268
0,05	-1,301	0,30	-0,523	0,55	-0,260
0,06	-1,222	0,31	-0,509	0,56	-0,252
0,07	-1,155	0,32	-0,495	0,57	-0,244

D 16. Wykaż, że dla dowolnego $x > 0$ prawdziwa jest podana równość.

a) $1 + 2 \log_3 x = \log_3 (3x^2)$ c) $2 + 3 \log_4 x = \log_4 (16x^3)$
b) $10 \log x - 1 = \log (0,1x^{10})$ d) $6 - 2 \log x = \log \frac{1000000}{x^2}$

17. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.

a) $f(x) = \log_6 (x - 3)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 3$

Zestaw II

1. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} (3^{-2})^2 & \text{c)} 2^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} & \text{e)} \frac{2^{-3} \cdot 4^{-2}}{2^{-6}} & \text{g)} \frac{6^4 \cdot 9^{-4}}{4^2 \cdot 12^{-1}} \\ \text{b)} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} & \text{d)} 9^3 \cdot 3^{-5} & \text{f)} \frac{10^{-2}}{5^{-6} \cdot 25^2} & \text{h)} \frac{16^{-2} \cdot 125^{-3}}{10^{-4} \cdot 25^{-2}} \end{array}$$

2. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 25^{\frac{1}{2}} \cdot 625^{\frac{1}{4}} & \text{c)} 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} & \text{e)} 25^{\frac{3}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}} & \text{g)} 8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{-\frac{3}{5}} \\ \text{b)} 8^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{-\frac{1}{4}} & \text{d)} 27^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{-\frac{1}{2}} & \text{f)} 64^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{5}{3}} & \text{h)} 0,001^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,09^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

3. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}} & \text{c)} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}} & \text{e)} \sqrt[3]{100} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \\ \text{b)} 5^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{4}{3}} & \text{d)} (\sqrt[6]{81})^{-\frac{3}{2}} & \text{f)} \frac{11^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{44}} \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^3 \end{array}$$

4. Zapisz podaną liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 8\sqrt{2} & \text{c)} \frac{\sqrt{27}}{9} & \text{e)} \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}} \\ \text{b)} 4\sqrt[3]{2} & \text{d)} \sqrt[4]{3\sqrt{3}} & \text{f)} \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{8}} \end{array}$$

5. Określ, czy podana liczba jest większa, czy mniejsza od 1. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej.

$$\text{a)} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}} \quad \text{b)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{c)} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \quad \text{d)} \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{e)} \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{f)} \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

6. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 5^{\sqrt{5}}, 25\sqrt{5}, 125^{\frac{4}{5}}, 25^{1,1} & \text{c)} 9^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \sqrt[4]{27}, (\sqrt[3]{3})^{-2} \\ \text{b)} \frac{1}{\sqrt[8]{8}}, (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}, 0,5, 16^{-\frac{1}{3}} & \text{d)} (4,5)^{-2}, \sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}, (2,5)^{-2,4}, 0,064 \end{array}$$

7. Wyznacz przybliżoną wartość podanej potęgi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Skorzystaj z przybliżenia $\sqrt[10]{10} \approx 1,258925$.

$$\text{a)} 10^{1,1} \quad \text{b)} 10^{-0,9} \quad \text{c)} 10^{-1,9} \quad \text{d)} 10^{-2,9}$$

8. Wykres funkcji wykładniczej $y = a^x$ przechodzi przez punkt P . Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres.

$$\text{a)} P\left(\frac{5}{2}, 32\right) \quad \text{b)} P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{c)} P(-6, 729)$$

9. Naskicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości mniejsze od 1.

$$\text{a)} f(x) = 5 \cdot 5^x \quad \text{b)} f(x) = 8 \cdot 2^{-x} \quad \text{c)} f(x) = 3 \cdot 3^{x+2}$$

10. Oblicz $\sqrt{ab}$.

$$\text{a)} a = \log_3 9, b = \log_2 256 \quad \text{b)} \log_2 a = 5, \log_4 b = \frac{1}{2}$$

11. Oblicz x .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \log_{\frac{1}{4}} x = -2 & \text{c)} \log_{81} x^2 = \frac{1}{2} & \text{e)} \log_9 |x| = \frac{3}{2} \\ \text{b)} \log_4 x = \frac{3}{2} & \text{d)} \log_{\frac{1}{8}} x^2 = \frac{1}{3} & \text{f)} \log_{2\sqrt{2}} |x| = 4 \end{array}$$

12. Oblicz x .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \log_6 x = \log_6 4 + \log_6 9 & \text{c)} \log x = 2 \log 5 + \log 4 \\ \text{b)} \log_3 x = \log_3 18 - \log_3 2 & \text{d)} \log x = \log 80 - 3 \log 2 \end{array}$$

13. Dla jakiej podstawy a logarytmu podana równość jest prawdziwa?

$$\text{a)} \log_a 2 = \frac{1}{2} \quad \text{b)} \log_a 8 = 6 \quad \text{c)} \log_a 32 = -5$$

14. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy punkt (x, y) ?

$$\text{a)} x = \log_{\frac{1}{4}} 1024, y = \log_{\sqrt{2}} 4 \quad \text{b)} x = \log_2 \pi, y = \log_{\frac{1}{2}} \pi$$

15. Dla podanej wartości x oblicz $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)$.

$$\text{a)} x = 3 \quad \text{b)} x = \sqrt{3} \quad \text{c)} x = 81 \quad \text{d)} x = 3^8$$

16. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \log_4 x$. Naskicuj wykres funkcji g i podaj jej wzór w przypadku, gdy przekształceniem tym było przesunięcie:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \text{ o 2 jednostki w dół,} & \text{c)} \text{ o 1 jednostkę w górę,} \\ \text{b)} \text{ o 1 jednostkę w lewo,} & \text{d)} \text{ o 2 jednostki w prawo.} \end{array}$$

17. Naskicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h . Dla każdej z tych funkcji podaj asymptotę jej wykresu i miejsce zerowe.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \log_2 x + 2, g(x) = \log_2(x + 2), h(x) = \log_2(x + 2) + 2 \\ \text{b)} f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x, g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2), h(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}(x - 2) \end{array}$$

18. Naskicuj wykresy funkcji f , g i h . Dla każdej z tych funkcji podaj jej dziedzinę oraz zbiór argumentów, dla których przyjmuje ona wartości ujemne.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \log_3 x, g(x) = \log_3(x - 3), h(x) = \log_3 9(x - 3) \\ \text{b)} f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 1), h(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3x + 3) \end{array}$$

19. Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a(x - 2) + 1$ należy punkt P . Wyznacz podstawę a logarytmu i naskicuj wykres funkcji f .

$$\text{a)} P(4, 2) \quad \text{b)} P(6, 2) \quad \text{c)} P\left(\frac{7}{3}, 0\right) \quad \text{d)} P(4, 3)$$

**D Przykład 1**

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y prawdziwa jest równość:

$$\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\frac{1}{2} \log y^4$$

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Przekształcamy lewą stronę równości tak, aby otrzymać jej prawą stronę:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} &= -\log xy^2 + \log x = -\log x - \log y^2 + \log x = \\ &= -\log y^2 = -\log(y^4)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log y^4 \end{aligned}$$

II sposób

Przekształcamy podaną równość w sposób równoważny:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} &= -\frac{1}{2} \log y^4 \\ \log x^{-1} y^{-2} - \log x^{-1} &= \log(y^4)^{-\frac{1}{2}} \\ \log \frac{x^{-1} y^{-2}}{x^{-1}} &= \log y^{-2} \\ \log y^{-2} &= \log y^{-2} \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, więc prawdziwa jest też równość wyjściowa.

→ **Zadanie 12, str. 50**

D Przykład 2

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y, z prawdziwa jest równość:

$$\log xy + \log \frac{z^2}{y} = \log xyz - \log \frac{y}{z}$$

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Przekształcamy lewą stronę równości tak, aby otrzymać jej prawą stronę:

$$\begin{aligned} \log xy + \log \frac{z^2}{y} &= \log \left(xy \cdot \frac{z^2}{y} \right) = \log \left(xyz \cdot \frac{z}{y} \right) = \\ &= \log \left(xyz : \frac{y}{z} \right) = \log xyz - \log \frac{y}{z} \end{aligned}$$

II sposób

Przekształcamy podaną równość w sposób równoważny:

$$\begin{aligned} \log xy + \log \frac{z^2}{y} &= \log xyz - \log \frac{y}{z} \\ \log \left(xy \cdot \frac{z^2}{y} \right) &= \log \frac{xyz}{\frac{y}{z}} \\ \log xz^2 &= \log xz^2 \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, więc prawdziwa jest też równość wyjściowa.

→ **Zadanie 28, str. 52**



W zadaniach 1–10, 16.2 i 17.1 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Do wykresu funkcji $f(x) = 4^x$ należy punkt o współrzędnych

- A. $(-1, -4)$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{4}, 1)$

Zadanie 2 (0–1)

Wartość funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ jest liczbą całkowitą dla

- A. $x = \frac{1}{2}$ C. $x = 2$
B. $x = -3$ D. $x = 10$

Zadanie 3 (0–1)

Wartość funkcji $f(x) = (\sqrt{2})^x$ jest liczbą wymierną dla

- A. $x = 1$ C. $x = -3$
B. $x = -1$ D. $x = -6$

Zadanie 4 (0–1)

Funkcją rosnącą jest funkcja

- A. $f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$ C. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
B. $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$ D. $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$

Zadanie 5 (0–1)

Która funkcja ma dodatnie miejsce zerowe?

- A. $f(x) = 6^x - 6$ C. $h(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$
B. $g(x) = 4^x + 4$ D. $k(x) = (\frac{1}{2})^x + 2$

Zadanie 6 (0–1)

Która nierówność jest prawdziwa?

- A. $3^{\sqrt{2}} \leq 3^{1,5}$ C. $2^\pi \leq 2^{3,14}$
B. $0,5^{\sqrt{2}} \leq 0,5^{1,5}$ D. $4^\pi \leq 4^{3,141}$

Zadanie 7 (0–1)

Która nierówność jest prawdziwa?

- A. $\log_2 8 < \log_3 9$ C. $\log_2 \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 3$
B. $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 9$ D. $\log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_3 3$

Zadanie 8 (0–1)

Punkt $(8, -3)$ należy do wykresu funkcji

- A. $f(x) = \log_6(x - 6) - 6$ C. $f(x) = \log_3(x - 3) - 3$
B. $f(x) = \log_4(x - 4) - 4$ D. $f(x) = \log_2(x - 2) - 2$

**Zadanie 9 (0-1)**

Wartość funkcji $f(x) = 10^{-2x}$ dla $x = -(\sqrt[6]{81})^{\frac{3}{2}}$ należy do przedziału

- A. $(0; 1]$ B. $(1; 100]$ C. $(100; 1000]$ D. $(10\,000; \infty)$

Zadanie 10 (0-1)

Jeśli $a = \log_3 2$ i $b = \log_3 5$, to $\log_3 31,25$ jest równy

- A. $3a - 2b$ B. $2a - 3b$ C. $3b - 2a$ D. $2b - 3a$

Zadanie 11 (0-1)

Dane są liczby $x = 25^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{5}$ i $y = 125^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn $x \cdot y$ jest równy 5.	P	F
Iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\sqrt{5}$.	P	F

Zadanie 12 (0-1) → Przykład 1, str. 48

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$\log x^2 y^3 = 2 \log xy + \log y$.	P	F
$\log x^2 y^3 = \log x + 2 \log y + \log xy$.	P	F

Zadanie 13 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = (\sqrt{2})^x - 8$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Miejsce zerowe funkcji f jest równe

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

2. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie

- E. $(-8, 0)$ F. $(-7, 0)$ G. $(0, -7)$ H. $(0, -8)$

Zadanie 14 (0-3)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Dziedzina funkcji $f(x) = \log_2(x + 4)$ jest przedział $?$, jej miejscem zerowym jest $?$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $?$.

**Zadanie 15 (0-1)**

Dane są funkcja $f(x) = 3^{-x}$ oraz liczby $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Prawdziwa jest nierówność

A.	$f(x_1) < f(x_2)$,	ponieważ	1.	$x_1 < x_2$ i f jest funkcją rosnącą.
B.	$f(x_1) > f(x_2)$,		2.	$x_1 > x_2$ i f jest funkcją malejącą.
			3.	$x_1 > x_2$ i f jest funkcją rosnącą.

Zadanie 16

Dane są liczby $x = \log_a(\sqrt{3} + 1)$ i $y = \log_a(\sqrt{3} - 1)$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$.

D Zadanie 16.1 (0-2)

Uzasadnij, że dla $a = 4$ zachodzi równość $x + y = \frac{1}{2}$.

Zadanie 16.2 (0-1)

Równość $x - y = 1$ zachodzi dla

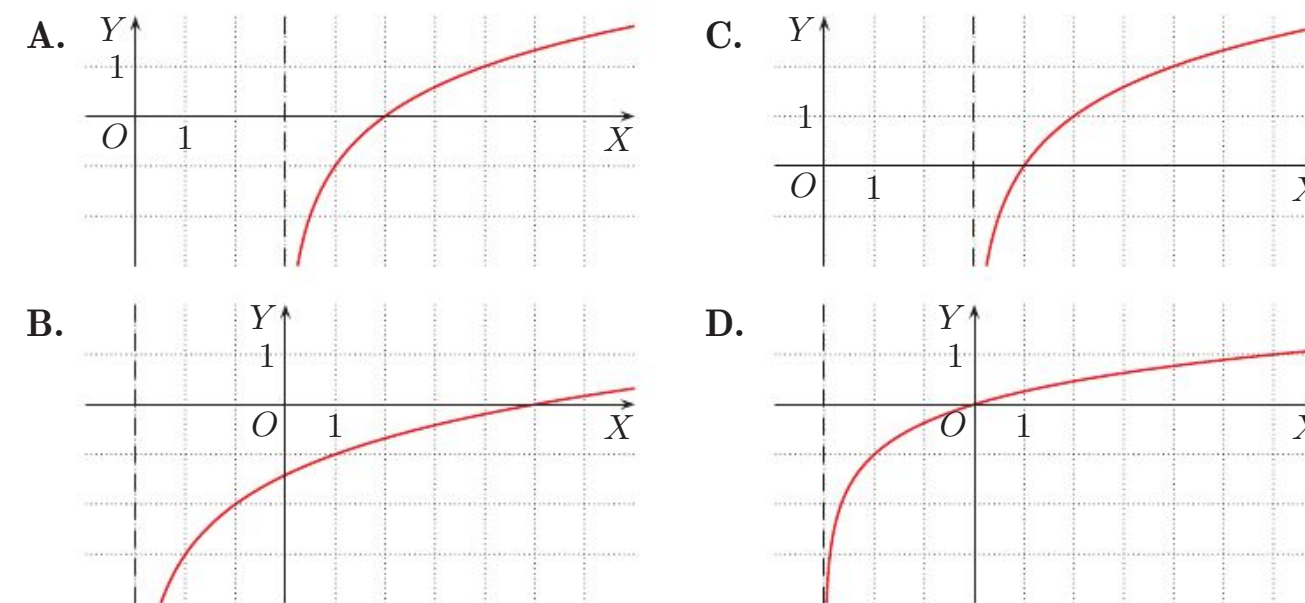
- A. $a = 2$ B. $a = 2\sqrt{3}$ C. $a = 2 - \sqrt{3}$ D. $a = 2 + \sqrt{3}$

Zadanie 17

Dana jest funkcja $f(x) = \log_2(x + 3) - 3$.

Zadanie 17.1 (0-1)

Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku

**Zadanie 17.2 (0-1)**

Oblicz $f(1) - f(13)$.



Zadanie 18 (0-2)

Wyznacz liczbę, której 80% jest równe $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}}$.

Zadanie 19 (0-2)

Ile dzielników będących liczbami naturalnymi ma liczba n spełniająca równanie $8 = (\sqrt[4]{2})^n$?

Zadanie 20 (0-2)

Punkt $P(8, \frac{3}{2})$ należy do wykresu funkcji $y = \log_a x$. Wyznacz a .

D Zadanie 21 (0-2)

Udowodnij równość $4 \log_9 3 + 9 \log_3 9 = 5 \log_3 81$.

D Zadanie 22 (0-2)

Uzasadnij, że liczba $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3}$ jest wymierna.

Zadanie 23 (0-3)

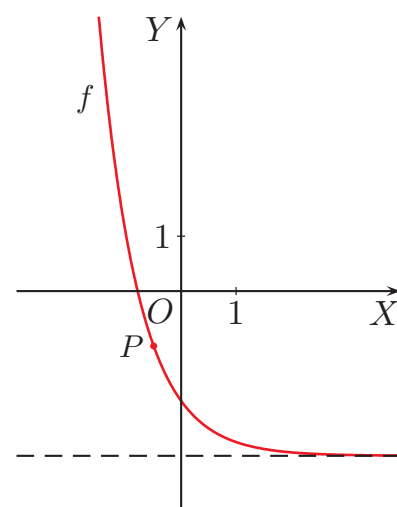
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = a^x - 3$$

Punkt P ma współrzędne $(-\frac{1}{2}, -1)$. Oblicz wartość funkcji f dla $x = -5$.

Zadanie 24 (0-4)

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 9 \cdot 3^x$. Prosta $y = 100$ przecina wykres funkcji f w punkcie P , a wykres funkcji g w punkcie Q . Oblicz długość odcinka PQ .



Zadanie 25 (0-4)

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-5}$ i $b = \log_3 3^{15} - \log_3 27$.

Zadanie 26 (0-4)

Liczba p jest rozwiązaniem równania $x \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, a liczba q – rozwiązaniem równania $4^6 x - 2^{10} = 4 \cdot 2^8$. Oblicz sumę odwrotności kwadratów tych liczb.

Zadanie 27 (0-4)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $a = \log_9 \sqrt{3}$ oraz $b = \log_3 \frac{1}{9}$.

D Zadanie 28 (0-3) → Przykład 2, str. 48

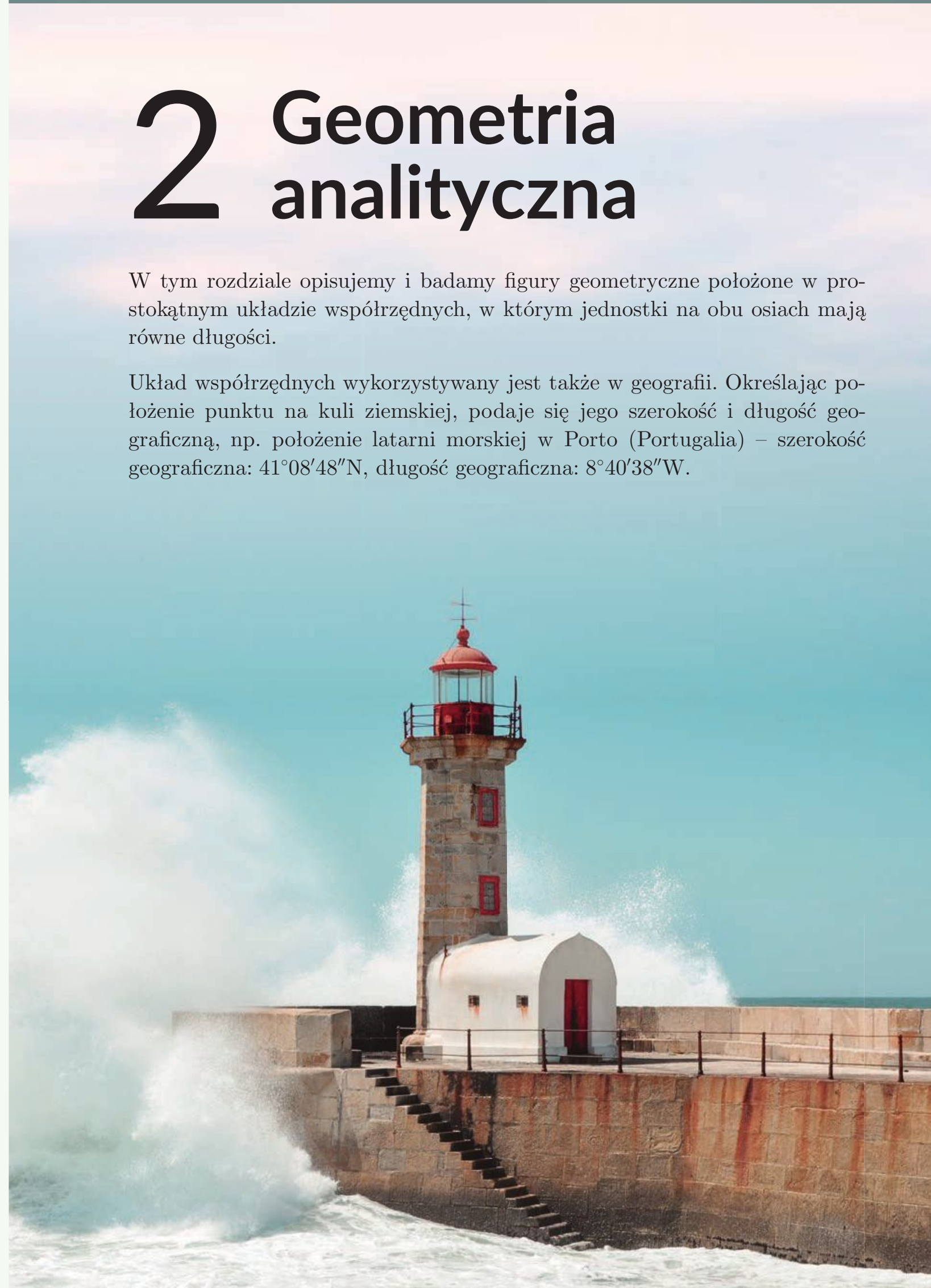
Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y, z prawdziwa jest równość:

$$2 \log \frac{x^3}{y} - 3 \log x^2 z = 2 \log \left(\frac{y}{z} \right)^{-1} - 5 \log z$$

2 Geometria analityczna

W tym rozdziale opisujemy i badamy figury geometryczne położone w prostokątnym układzie współrzędnych, w którym jednostki na obu osiach mają równe długości.

Układ współrzędnych wykorzystywany jest także w geografii. Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego szerokość i długość geograficzną, np. położenie latarni morskiej w Porto (Portugalia) – szerokość geograficzna: $41^\circ 08' 48'' \text{N}$, długość geograficzna: $8^\circ 40' 38'' \text{W}$.



2.1. Prosta w układzie współrzędnych – powtórzenie

Definicja

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

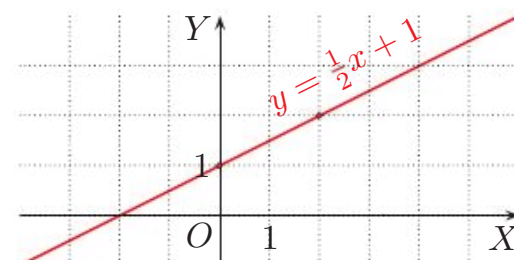
Przykład 1

Narysuj prostą $y = \frac{1}{2}x + 1$. Czy punkty $P(10, 6)$, $Q(20, 12)$ należą do niej?

Aby narysować prostą, wystarczy wyznaczyć dwa punkty, które do niej należą.

Dla $x = 0$ otrzymujemy $y = 1$, dla $x = 2$ mamy $y = 2$. Zatem prosta $y = \frac{1}{2}x + 1$ przechodzi przez punkty $(0, 1)$ i $(2, 2)$.

Punkt $P(10, 6)$ należy do tej prostej, ponieważ $\frac{1}{2} \cdot 10 + 1 = 6$, natomiast punkt $Q(20, 12)$ do niej nie należy (sprawdź to).



Czasami zamiast „prosta o równaniu $y = ax + b$ ” będziemy mówić krótko „prosta $y = ax + b$ ”.

Ćwiczenie 1

Narysuj prostą l . Czy punkt P należy do tej prostej?

- a) $l: y = 2x - 3$, $P(10, 17)$ c) $l: y = \frac{2}{3}x + 2$, $P(-6, -3)$
 b) $l: y = -2x + 4$, $P(10, -16)$ d) $l: y = -\frac{3}{2}x - 1$, $P(-6, 8)$

Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, jest dany wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(2, 1)$ i $B(3, 4)$.

Równanie prostej AB można zapisać w postaci kierunkowej $y = ax + b$. Obliczamy współczynnik a :

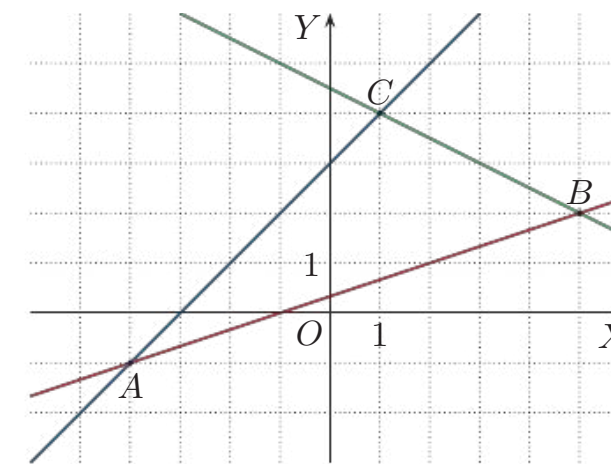
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{3 - 2} = 3$$

Równanie prostej AB ma więc postać $y = 3x + b$. Do tego równania podstawiamy współrzędne punktu A i otrzymujemy $1 = 3 \cdot 2 + b$, skąd $b = -5$.

Zatem równanie prostej AB to $y = 3x - 5$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz równania prostych AB , AC i BC (rysunek obok).



Ćwiczenie 3

Wyznacz równanie prostej PQ . Czy należy do niej punkt R ?

- a) $P(-2, 1)$, $Q(2, 5)$, $R(4, 8)$
 b) $P(-1, 7)$, $Q(3, -1)$, $R(-2, 9)$

Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

Przykład 3

Wyznacz równanie prostej k przechodzącej przez punkt $P(6, 4)$ i równoległej do prostej $l: y = -\frac{2}{3}x + 5$.

Prosta k jest równoległa do prostej l , więc jej równanie ma postać $y = -\frac{2}{3}x + b$. Punkt P należy do prostej k , stąd:

$$\begin{aligned} 4 &= -\frac{2}{3} \cdot 6 + b \\ b &= 8 \end{aligned}$$

Zatem równanie prostej k to $y = -\frac{2}{3}x + 8$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz równanie prostej k przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej l .

- a) $P(1, 3)$, $l: y = 4x + 2$ b) $P(20, 9)$, $l: y = -\frac{1}{5}x + 2$

Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Ćwiczenie 5

Czy proste k i l są prostopadłe?

- a) $k: y = \frac{3}{4}x + 2$, $l: y = -\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}$ b) $k: y = \frac{1}{3}x + 4$, $l: y = 4 - 3x$

Definicja

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Ćwiczenie 6

Zapisz równania prostych k : $2x + 4y - 6 = 0$, l : $-4x + 2y + 6 = 0$, m : $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 0$ w postaci kierunkowej. Wskaż pary prostych prostopadłych.

Przykład 4

Wyznacz punkt wspólny prostych k : $y = x - 3$ i l : $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Aby wyznaczyć punkt wspólny prostych k i l , rozwiązujemy układ równań:

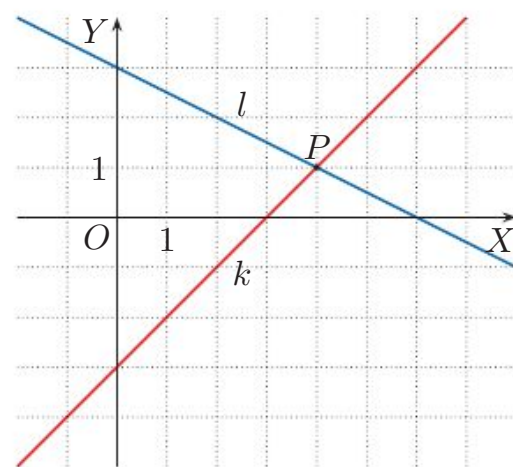
$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

$$x - 3 = -\frac{1}{2}x + 3$$

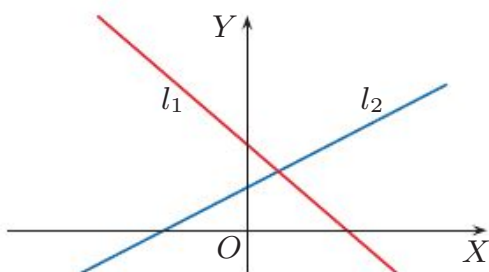
$$\frac{3}{2}x = 6$$

Zatem $x = 4$ oraz $y = 1$.

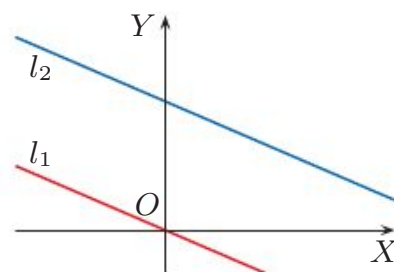
Proste k i l przecinają się w punkcie $(4, 1)$.



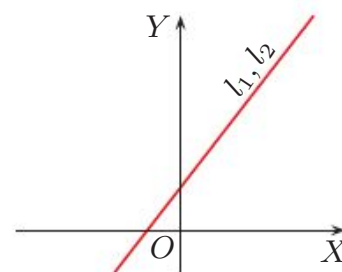
Przypomnijmy interpretację geometryczną układu równań liniowych. Jeśli proste l_1 i l_2 odpowiadają równaniom układu, to możliwa jest jedna z poniższych sytuacji.



Układ oznaczony – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ spreczny – proste są równoległe i różne.



Układ nieoznaczony – proste się pokrywają.

Ćwiczenie 7

Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} y = -x + 5 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x + y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = -5 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = 8 \end{cases} \end{array}$$

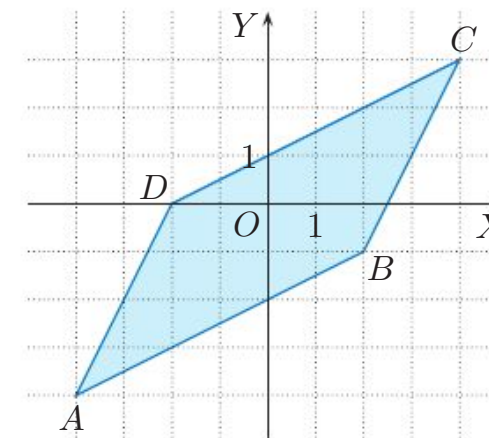
Zadania

1. Wyznacz równania prostych zawierających boki trójkąta ABC .

a) $A(-4, 1)$, $B(2, -5)$, $C(0, 3)$

b) $A(-3, -2)$, $B(3, 2)$, $C(-3, 5)$

2. Wyznacz równania prostych zawierających boki równoległoboku $ABCD$ przedstawionego na rysunku obok.



3. Wyznacz równania prostych zawierających przekątne równoległoboku $PQRS$.

a) $P(0, -1)$, $Q(4, 2)$, $R(7, 6)$, $S(3, 3)$

b) $P(0, 4)$, $Q(3, 3)$, $R(7, 5)$, $S(4, 6)$

D 4. Uzasadnij, że czworokąt o kolejnych wierzchołkach $A(-2, 2)$, $B(0, -2)$, $C(6, 1)$, $D(0, 3)$ jest trapezem prostokątnym.

5. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = -4 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 3y = -10 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 3x + y = -5 \\ 5x - 3y = -3 \end{cases} \end{array}$$

6. Boki trójkąta są zawarte w prostych $4x - 3y + 6 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$ oraz $7x + y - 27 = 0$. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków. Narysuj ten trójkąt.

Sprawdź się

7. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej QR .

a) $P(-3, 3)$, $Q(1, 2)$, $R(4, 2)$

b) $P(-4, -1)$, $Q(0, 2)$, $R(4, -1)$

8. Czy proste AB i BC są prostopadłe?

a) $A(2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(3, 6)$

b) $A(-3, 1)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 8)$

9. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} -3x + 2y = -8 \\ x + y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \end{array}$$

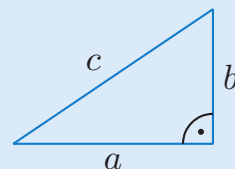
Przypomnij sobie

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne

Twierdzenie Pitagorasa

Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

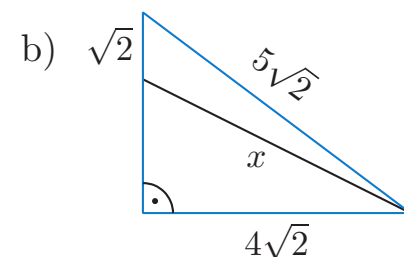
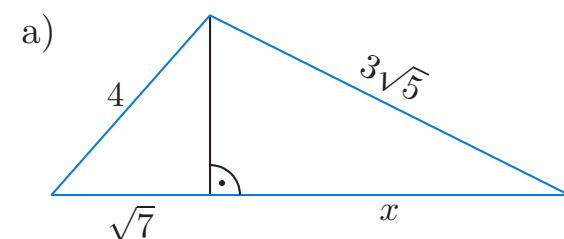
$$a^2 + b^2 = c^2$$



1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c . Oblicz jego obwód.

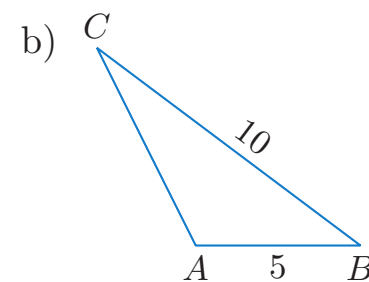
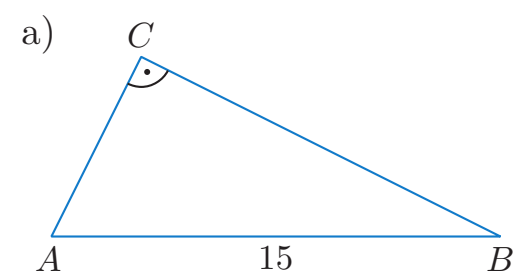
a) $a = 4$, $b = 2\sqrt{2}$ b) $a = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{5}$ c) $b = 2$, $c = \frac{5}{2}$

2. Oblicz x .



3. Podstawa trójkąta równoramiennego jest dłuższa od jego ramienia o 2 cm, a obwód tego trójkąta jest równy 32 cm. Oblicz jego pole.

4. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C jest równa 6. Oblicz obwód trójkąta ABC .



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

5. Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest prostokątny.

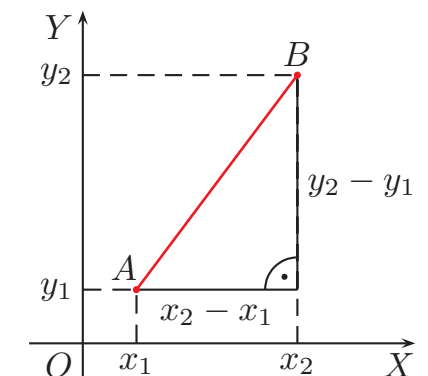
a) 5, 12, 13 c) $2\frac{1}{4}$, 3, $3\frac{3}{4}$ e) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$
 b) 8, 15, 17 d) 15, 18, 25 f) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, 6

2.2. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB .

Rozważmy punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ w prostokątnym układzie współrzędnych (rysunek obok). Odległość między nimi możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



Twierdzenie

Odległość między punktami $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Przykład 1

- a) Oblicz odległość między punktami $A(2, 1)$ i $B(6, 4)$.

$(x_1, y_1) = (2, 1)$ oraz $(x_2, y_2) = (6, 4)$, zatem:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

- b) Oblicz odległość między punktami $A(-3, 2)$ i $B(9, -3)$.

$(x_1, y_1) = (-3, 2)$ oraz $(x_2, y_2) = (9, -3)$, zatem:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(9 - (-3))^2 + (-3 - 2)^2} = \\ &= \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

- c) Oblicz odległość między punktami $A(2, 7)$ i $B(-1, 1)$.

$$|AB| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - 7)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz odległość między punktami A i B .

a) $A(-3, -1)$, $B(-5, -1)$ c) $A(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $B(\frac{1}{2}, -1)$
 b) $A(5, -6\frac{1}{2})$, $B(-7, -1\frac{1}{2})$ d) $A(3 + \sqrt{3}, \sqrt{7})$, $B(\sqrt{3}, -4 + \sqrt{7})$

Przykład 2

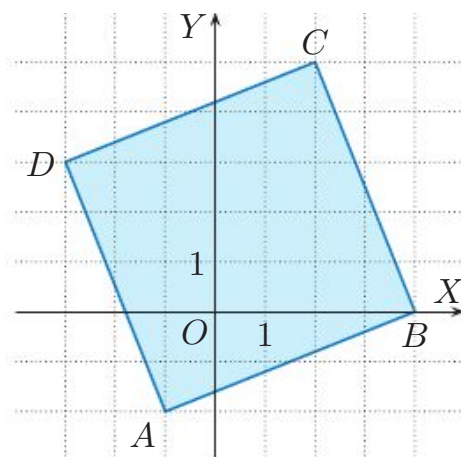
Oblicz obwód i pole kwadratu $ABCD$ przedstawionego na rysunku obok.

Z rysunku odczytujemy: $A(-1, -2)$, $B(4, 0)$, zatem długość boku kwadratu jest równa:

$$\sqrt{(4 - (-1))^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

Obwód kwadratu $ABCD$ jest równy $4\sqrt{29}$.

Pole tego kwadratu jest równe 29.

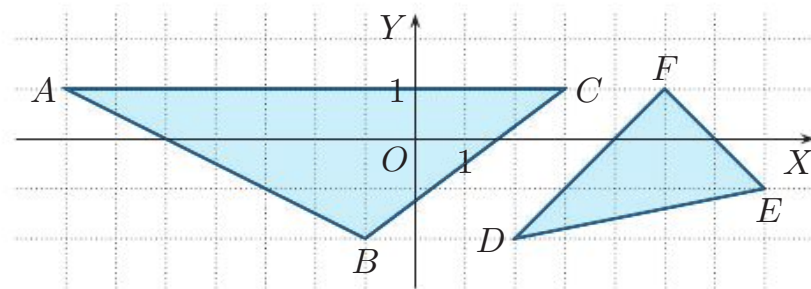


Ćwiczenie 2

Oblicz obwód i pole prostokąta o kolejnych wierzchołkach $A(-6, 1)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 3)$, $D(2, 7)$.

Ćwiczenie 3

Oblicz obwody trójkątów ABC i DEF przedstawionych na rysunku obok.



Ćwiczenie 4

Czy trójkąt ABC jest równoramienny?

- a) $A(1, 3)$, $B(6, 4)$, $C(4, -1)$ c) $A(-3, -3)$, $B(12, -3)$, $C(6, 9)$
b) $A(0, 0)$, $B(4, -1)$, $C(3, 3)$ d) $A(-1, 0)$, $B(2, \sqrt{3})$, $C(2 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$

Przykład 3

Czy trójkąt o wierzchołkach $A(-2, -4)$, $B(4, 2)$ i $C(1, 5)$ jest prostokątny?

$$|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

$$|AC| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - (-4))^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$$

$$|BC| = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

Zauważmy, że $|AB|^2 + |BC|^2 = 72 + 18 = 90 = |AC|^2$.

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Ćwiczenie 5

Czy trójkąt ABC jest równoramienny? Czy jest prostokątny?

- a) $A(-1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(2, 4)$ c) $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(-1, 6)$
b) $A(-3, 0)$, $B(1, -4)$, $C(5, 4)$ d) $A(-4, 0)$, $B(-1, -3)$, $C(5, 3)$

Przykład 4

Oblicz obwód trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt przecięcia prostych $k: y = -x + 4$ i $l: y = x - 2$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OY .

Oznaczmy wierzchołki trójkąta jak na rysunku. Prosta k przecina oś OY w punkcie $A(0, 4)$, a prosta l – w punkcie $B(0, -2)$. Aby wyznaczyć współrzędne wierzchołka C , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x - 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} -x + 4 &= x - 2 \\ 2x &= 6 \end{aligned}$$

Zatem $x = 3$ oraz $y = 1$. Punkt C ma współrzędne $(3, 1)$.

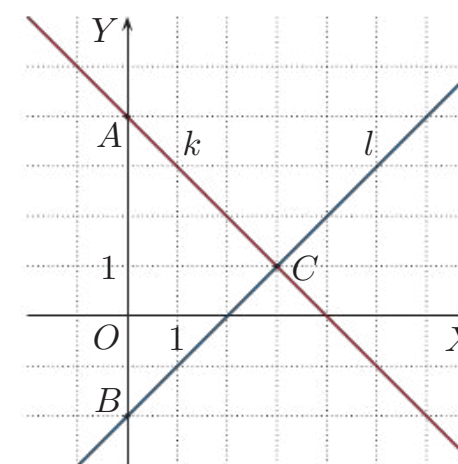
Obliczamy długości boków trójkąta ABC :

$$|AB| = 6$$

$$|AC| = \sqrt{(3 - 0)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

$$|BC| = \sqrt{(3 - 0)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

Obwód trójkąta ABC jest równy $6(\sqrt{2} + 1)$.



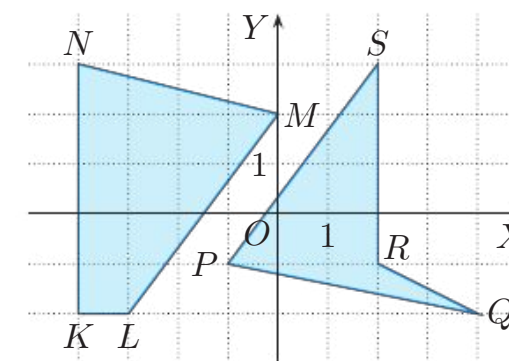
Ćwiczenie 6

Oblicz obwód trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt przecięcia:

- a) prostych $y = x + 2$ i $y = -\frac{1}{2}x - 4$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OY ,
b) prostych $y = 3x - 3$ i $y = -x + 5$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OX .

Zadania

- Który z czworokątów $KLMN$ i $PQRS$ (rysunek obok) ma większy obwód?
- Który z odcinków AB i CD jest dłuższy?
a) $A(1, -2)$, $B(4, 4)$, $C(2, 2)$, $D(8, -2)$
b) $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(-1, 1)$, $D(4, 6)$
c) $A(3, -2)$, $B(8, -2)$, $C(-2, 2)$, $D(2, 5)$
- Czy trójkąt ABC jest prostokątny?
a) $A(3, 0)$, $B(-6, 8)$, $C(-2, -2)$ b) $A(-5, -1)$, $B(4, 1)$, $C(3, 5)$



4. Czy trójkąty ABC i DEF są przystające lub podobne?
- a) $A(2, 2), B(8, 5), C(1, 4), D(-2, 0), E(4, -3), F(5, -1)$
b) $A(-1, 1), B(2, 5), C(0, 4), D(4, 4), E(0, 2), F(-2, -4)$
5. Dane są dwa wierzchołki kwadratu $ABCD$. Oblicz jego obwód i pole.
- a) $A(-2, -1), C(4, 5)$ b) $B(3, -4), C(1, 2)$
6. Oblicz obwód, długości przekątnych oraz wysokość rombu $ABCD$.
- a) $A(-3, 0), B(0, 1), C(1, 4), D(-2, 3)$
b) $A(-5, -2), B(2, -1), C(7, 4), D(0, 3)$
- D** 7. Uzasadnij, że czworokąt o kolejnych wierzchołkach $A(-4, 2), B(6, -3), C(4, 3)$ i $D(2, 4)$ jest trapezem równoramiennym. Oblicz jego pole.
8. Oblicz obwód oraz wysokości trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt przecięcia:
- a) prostych $y = x - 1$ i $y = -\frac{1}{2}x + 5$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OY ,
b) prostych $y = x + 2$ i $y = 3x - 6$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OX .
9. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia prostych $y = x + 3, y = -\frac{1}{2}x + 3, y = \frac{1}{2}x - 1$.

Sprawdź się

10. Narysuj łamaną $PQRST$ i oblicz jej długość.
- a) $P(-7, 0), Q(-1, 3), R(-3, 4), S(-1, 5), T(3, 3)$
b) $P(6, -2), Q(2, 1), R(-1, -1), S(6, -6), T(2, -6)$
11. Wierzchołkami kwadratu są punkty $A(-3, 0), B(0, 1), C(-1, 4)$ i $D(-4, 3)$. Oblicz obwód tego kwadratu oraz długość jego przekątnej.
- D** 12. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem, a następnie oblicz jego obwód i pole.
- a) $A(-3, 2), B(6, 2), C(4, 6), D(1, 6)$
b) $A(-3, -3), B(1, -5), C(1, 9), D(-3, 1)$
13. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny. Oblicz jego pole.
- a) $A(0, -2), B(3, 7), C(-3, 4)$ b) $A(3, 0), B(-4, -1), C(0, -4)$

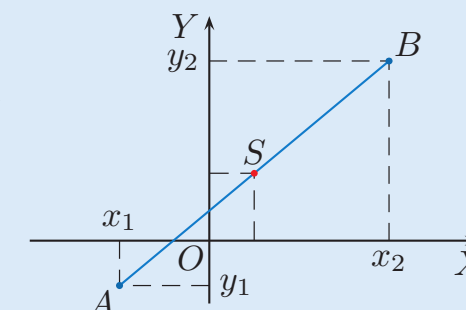
2.3. Środek odcinka

Jeżeli znamy współrzędne końców odcinka, możemy wyznaczyć współrzędne jego środka.

Środek odcinka

Środkiem odcinka AB o końcach w punktach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ jest punkt:

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Przykład 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka o końcach $A(-3, 2)$ i $B(5, -4)$.

Środek odcinka AB ma współrzędne $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB .

- a) $A(-2, -1), B(6, 3)$ b) $A(-4, 1), B(5, -8)$ c) $A(\frac{1}{2}, -2), B(3, \frac{1}{2})$

Przykład 2

Punkt $S(1, 5)$ jest środkiem odcinka AB . Punkt B ma współrzędne $(-3, 4)$.

Wyznacz współrzędne punktu A .

Niech punkt A ma współrzędne (x_1, y_1) , wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - 3}{2} &= 1 & \text{ i } & \frac{y_1 + 4}{2} = 5 \\ x_1 - 3 &= 2 & \text{ i } & y_1 + 4 = 10 \\ x_1 &= 5 & \text{ i } & y_1 = 6 \end{aligned}$$

Zatem punkt A ma współrzędne $(5, 6)$.

Ćwiczenie 2

a) Dane są punkt $A(5, 8)$ i punkt $S(-1, -3)$ będący środkiem odcinka AB .

Wyznacz współrzędne punktu B .

b) Punkt $S(2, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, -2)$ i $B(7, y)$. Oblicz długość odcinka AB .

c) Punkt $S(1, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, y)$ i $B(x + y, x - y)$. Oblicz długość odcinka AB .

Definicja

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek tego trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Przykład 3

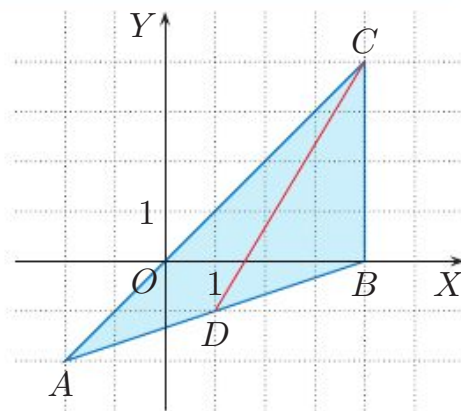
Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok). Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C .

Niech D będzie środkiem odcinka AB :

$$D\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = D(2, 1)$$

Obliczamy długość środkowej:

$$|CD| = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



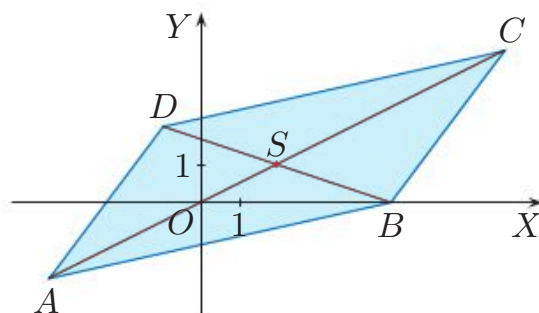
Ćwiczenie 3

Oblicz długości środkowych trójkąta ABC .

- $A(-2, -1)$, $B(6, 3)$, $C(-2, 3)$
- $A(-6, -1)$, $B(2, 3)$, $C(-4, 5)$

Przykład 4

Dane są wierzchołki $A(-4, -2)$, $B(5, 0)$, $C(8, 4)$ równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok). Wyznacz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego równoległoboku oraz współrzędne wierzchołka D .



Punkt S przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy, zatem punkt ten jest środkiem odcinka AC . Stąd:

$$S\left(\frac{-4+8}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = S(2, 1)$$

Punkt S jest również środkiem odcinka BD , zatem współrzędne (x, y) punktu D spełniają równania:

$$\frac{x+5}{2} = 2 \quad \text{i} \quad \frac{y+0}{2} = 1$$

Stąd $x = -1$, $y = 2$, czyli $D(-1, 2)$.

Ćwiczenie 4

Dane są wierzchołki $B(1, 0)$, $C(0, 5)$ i $D(-7, 4)$ równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego równoległoboku oraz współrzędne wierzchołka A .

Przykład 5

Czy punkt $P(4, 5)$ należy do okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $A(-2, -1)$ i $B(6, 3)$?

Środek S okręgu jest środkiem średnicy AB , więc:

$$S\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = S(2, 1)$$

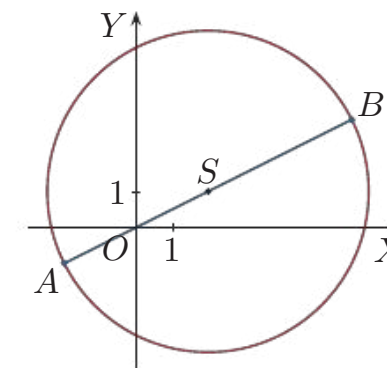
Promień r okręgu jest równy długości odcinka BS , zatem:

$$r = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Obliczamy odległość punktu P od środka okręgu:

$$|PS| = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Odległość punktu P od środka okręgu jest równa promieniowi tego okręgu, zatem punkt P należy do okręgu.

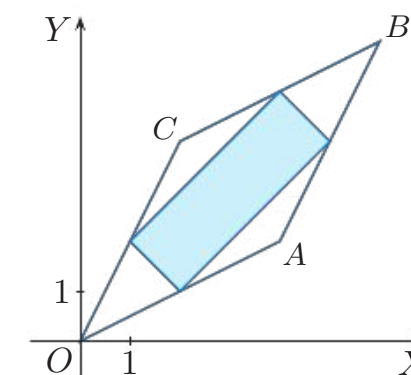


Ćwiczenie 5

Oblicz długość okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $A(-4, 3)$ oraz $B(8, -1)$. Czy punkt $P(7, 6)$ należy do tego okręgu?

Zadania

- Oblicz odległość środka odcinka AB od początku układu współrzędnych.
 - $A(1, 6)$, $B(-7, 2)$
 - $A(-7, 7)$, $B(11, 1)$
 - $A(9, \sqrt{7})$, $B(-4, -\sqrt{7})$
- Dane są punkt $A(4, 5)$ oraz punkt S będący środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .
 - $S(-2, 3)$
 - $S(6, 7)$
 - $S(-3, 1)$
- Dany jest odcinek o końcach $A(-5, -3)$ i $B(3, 1)$. Wyznacz współrzędne punktów dzielących ten odcinek na cztery odcinki równej długości.
- Dany jest punkt $A(-4, -3)$. Oblicz długość odcinka AB , którego:
 - środkiem jest punkt $S(-1, -2)$,
 - środek leży na osi OX , a odcięta punktu B jest równa 2.
- Oblicz pole rombu o wierzchołkach $O(0, 0)$, $A(4, 2)$, $B(6, 6)$ i $C(2, 4)$ oraz pole prostokąta, którego wierzchołkami są środki boków rombu $OABC$ (rysunek obok).



6. Dany jest prostokąt o wierzchołkach $A(-4, -3)$, $B(8, 3)$, $C(6, 7)$ i $D(-6, 1)$. Oblicz obwód tego prostokąta oraz obwód rombu, którego wierzchołkami są środki boków prostokąta $ABCD$.
7. Wyznacz współrzędne środków odcinka AC i odcinka BD . Czy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem?
- a) $A(-2, -1)$, $B(17, 2)$, $C(18, 5)$, $D(-1, 2)$
b) $A(1, -1)$, $B(7, 1)$, $C(8, 5)$, $D(2, 2)$
8. Punkty $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ i $C(5, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka AC , współrzędne wierzchołka D oraz obwód tego równoległoboku.
9. Wierzchołek D kwadratu $ABCD$ ma współrzędne $(3, 6)$. Punkt $S(2, 3)$ jest punktem przecięcia przekątnych tego kwadratu, a punkt $P(4, 4)$ jest środkiem boku CD . Wyznacz współrzędne wierzchołków A , B i C . Oblicz pole tego kwadratu.
10. Dany jest trapez o kolejnych wierzchołkach $A(-6, -4)$, $B(6, 2)$, $C(0, 4)$ i $D(-4, 2)$ oraz wysokości $2\sqrt{5}$. Wyznacz środki ramion AD i BC . Oblicz pole tego trapezu.
11. Czy punkt P należy do okręgu, którego średnicą jest odcinek AB ?
- a) $A(-1, -1)$, $B(5, 3)$, $P(0, 4)$ b) $A(-5, 5)$, $B(7, 1)$, $P(-1, -3)$

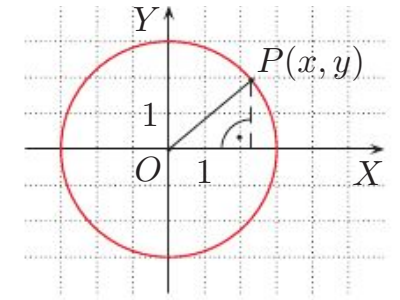
Sprawdź się

12. W której ćwiartce układu współrzędnych leży środek odcinka AB ?
- a) $A(-17, 3)$, $B(7, 19)$ b) $A(1, 2)$, $B(-2, -3)$ c) $A(\frac{3}{2}, \frac{1}{3})$, $B(-\frac{3}{4}, \frac{2}{3})$
13. Wyznacz współrzędne środków boków kwadratu o wierzchołkach $A(-3, 2)$, $B(1, 0)$, $C(3, 4)$ i $D(-1, 6)$.
14. Oblicz długości środkowych trójkąta ABC .
- a) $A(-3, 2)$, $B(1, 4)$, $C(-3, 8)$ b) $A(-2, -1)$, $B(10, 3)$, $C(2, 3)$
15. Oblicz współrzędne środka i promień okręgu o średnicy PQ .
- a) $P(-4, 2)$, $Q(2, -6)$ b) $P(-7, -1)$, $Q(5, 3)$
16. W trapezie o wierzchołkach $A(6, 5)$, $B(-6, -1)$, $C(-2, -3)$ oraz $D(2, -1)$ punkt P jest środkiem ramienia AD , a punkt Q – środkiem ramienia BC . Oblicz długości odcinków AB , CD i PQ .

2.4. Okrąg w układzie współrzędnych

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o promieniu 3 i środku w początku układu współrzędnych. Zauważ, że współrzędne dowolnego punktu $P(x, y)$ tego okręgu spełniają równanie:

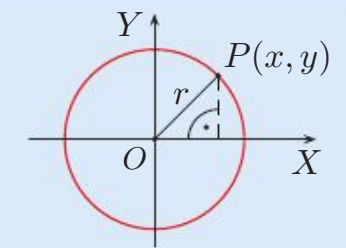
$$x^2 + y^2 = 3^2$$



Równanie okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Uwaga. Zamiast „okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$ ” będziemy też pisać krótko: „okrąg $x^2 + y^2 = r^2$ ”.

Przykład 1

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 10$ ma równanie:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

Punkt $P(-6, 8)$ należy do tego okręgu, ponieważ $(-6)^2 + 8^2 = 10^2$.

Ćwiczenie 1

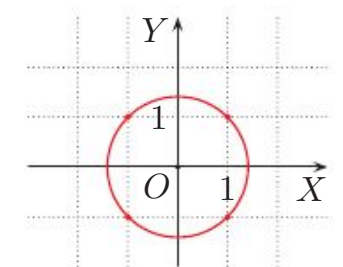
Czy do okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 3 należy punkt: a) $(1, 3)$, b) $(0, 3)$, c) $(-3, 0)$?

Przykład 2

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = \sqrt{2}$ (rysunek obok) ma równanie:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Do tego okręgu należą cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ i $(1, -1)$.



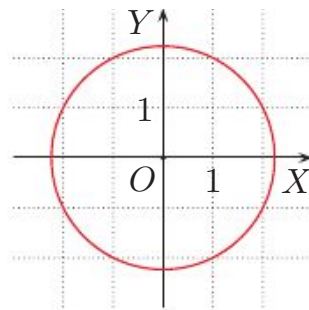
Ćwiczenie 2

Podaj równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r . Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego okręgu?

- a) $r = 2$ b) $r = 4$ c) $r = 5$ d) $r = 7$

Ćwiczenie 3

Do okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$ (rysunek obok) należy osiem punktów o obu współrzędnych całkowitych. Podaj równanie tego okręgu oraz współrzędne tych punktów.



Ćwiczenie 4

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$ i promieniu r oraz należące do tego okręgu punkty o obu współrzędnych całkowitych. Przedstaw to na rysunku.

- a) $r = 2\sqrt{2}$ b) $r = 3\sqrt{2}$ c) $r = \sqrt{10}$ d) $r = \sqrt{17}$

Ćwiczenie 5

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$ przechodzącego przez punkt: a) $(0,6)$, b) $(-8,0)$, c) $(\sqrt{3},0)$, d) $(0,5\sqrt{2})$.

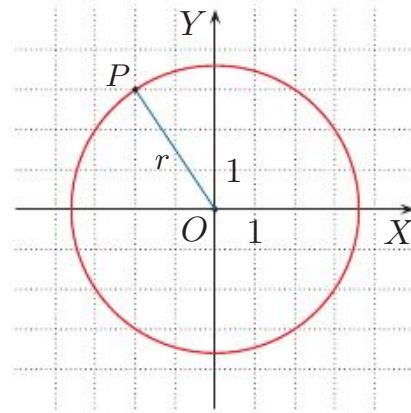
Przykład 3

Punkt $P(-2,3)$ leży na okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$. Wyznacz równanie i promień tego okręgu.

Do równania okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ podstawiamy $x = -2$ i $y = 3$:

$$(-2)^2 + 3^2 = r^2$$

Stąd $r^2 = 13$, czyli równanie okręgu ma postać $x^2 + y^2 = 13$, a jego promień $r = \sqrt{13}$.



Ćwiczenie 6

Okrąg o środku w punkcie $O(0,0)$ przechodzi przez punkt P . Wyznacz równanie i promień tego okręgu.

- a) $P(5, -12)$ b) $P(-3, -3)$ c) $P(-4, -5)$ d) $P(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$

Wzór na odległość między dwoma punktami można wykorzystać do wyznaczenia równania okręgu o środku w punkcie (a,b) i promieniu r .

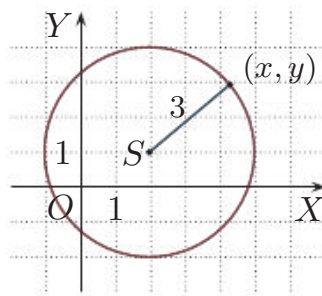
Przykład 4

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S(2,1)$ i promieniu $r = 3$.

Szukany okrąg jest zbiorem wszystkich punktów (x,y) , których odległość od punktu $S(2,1)$ jest równa 3, zatem równanie okręgu ma postać:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 3 \quad /^2$$

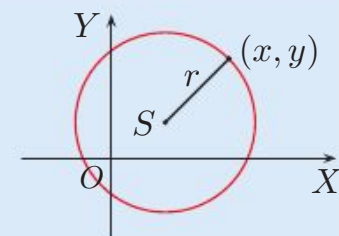
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$



Równanie okręgu o środku w punkcie (a,b)

Okrąg o środku w punkcie $S(a,b)$ i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów, których współrzędne (x,y) spełniają równanie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Ćwiczenie 7

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r , a następnie narysuj ten okrąg.

- a) $S(2,5)$, $r = 3$ b) $S(-7,6)$, $r = 2$ c) $S(-4,-3)$, $r = \sqrt{2}$

Ćwiczenie 8

Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu o podanym równaniu.

- a) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$ e) $(x+\frac{1}{2})^2 + (y-3)^2 = 2\frac{7}{9}$
 b) $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 9$ f) $x^2 + (y+\frac{9}{4})^2 = 10$
 c) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 100$ g) $(x-6)^2 + y^2 = 45$
 d) $(x+5)^2 + (y+9)^2 = 225$ h) $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 8$

Przykład 5

Czy punkt $P(4,7)$ należy do okręgu o środku w punkcie $S(1,3)$ i promieniu 5?

Do równania tego okręgu:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

podstawiamy współrzędne punktu P i otrzymujemy:

$$(4-1)^2 + (7-3)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Zatem punkt P należy do tego okręgu.

Ćwiczenie 9

Który z punktów: $P(3,4)$ czy $Q(-1,5)$ należy do okręgu o środku w punkcie $S(1,2)$ i promieniu $\sqrt{13}$?

Przykład 6

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(2,-1)$ przechodzącego przez punkt $P(3,1)$.

Obliczamy promień: $r = |SP| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Zatem równanie okręgu ma postać $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$.

Ćwiczenie 10

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie S przechodzącego przez punkt P . Narysuj ten okrąg.

- a) $S(0, -1), P(1, 1)$ b) $S(-3, -1), P(-1, 3)$ c) $S(-1, 1), P(2, 2)$

Zadania

1. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$ przechodzącego przez punkt P . Czy punkty A i B należą do tego okręgu?

- a) $P(0, -10), A(6, -8), B(-8, -6)$ c) $P(3, \sqrt{7}), A(0, -4), B(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
b) $P(-5, 3), A(-6, 0), B(-3, -5)$ d) $P(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), A(2, 4), B(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

2. Narysuj w jednym układzie współrzędnych okręgi K_1 i K_2 . Oblicz pole pierścienia kołowego ograniczonego tymi okręgami.

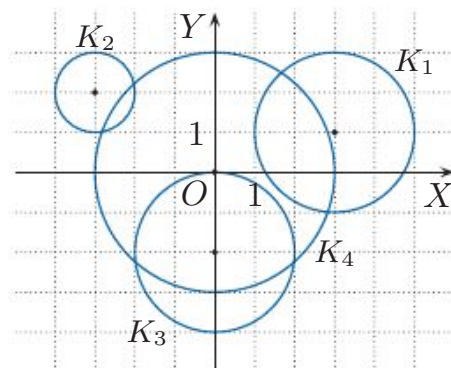
- a) $K_1: x^2 + y^2 = 5, K_2: x^2 + y^2 = 10$
b) $K_1: x^2 + y^2 = 13, K_2: x^2 + y^2 = 17$

3. Podaj współrzędne środka okręgu i jego promień.

- a) $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 8$ c) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 16$
b) $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ d) $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 18$

4. Dopasuj okręgi K_1, K_2, K_3 i K_4 (rysunek obok) do odpowiednich równań.

- I. $x^2 + y^2 = 9$
II. $x^2 + (y + 2)^2 = 4$
III. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
IV. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$



5. Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r .

- a) $S(1, 3), r = 2$ c) $S(-6, 2), r = \frac{3}{4}$ e) $S(-5, -1), r = 2\sqrt{5}$
b) $S(-2, -3), r = 7$ d) $S(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), r = 2\frac{1}{2}$ f) $S(\sqrt{3}, 0), r = 3\sqrt{3}$

6. Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie S i przechodzi przez punkt P .

- a) $S(2, 0), P(1, 3)$ c) $S(2, -3), P(4, -1)$ e) $S(-5, 2), P(-8, -2)$
b) $S(4, 1), P(1, -3)$ d) $S(-3, 1), P(1, 5)$ f) $S(-4, -2), P(-1, 0)$

7. Narysuj okrąg $(x - 5)^2 + y^2 = 25$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych do niego należy?

8. Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB . Narysuj ten okrąg.

- a) $A(1, 2), B(7, 2)$ c) $A(-1, -2), B(3, 6)$ e) $A(-3, -4), B(5, 2)$
b) $A(-3, 3), B(-3, -5)$ d) $A(-1, 1), B(3, 3)$ f) $A(-2, -3), B(6, -1)$

9. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC .

- a) $A(-1, 2), B(6, -2), C(3, 4)$ c) $A(2, 3), B(5, -1), C(-3, -7)$
b) $A(-2, -4), B(6, 0), C(0, 2)$ d) $A(-4, 1), B(4, -3), C(8, 5)$

10. Wyznacz równanie okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$ oraz równanie okręgu wpisanego w ten kwadrat.

- a) $A(0, 6), B(2, 0), C(8, 2), D(6, 8)$
b) $A(-2, 0), B(0, -4), C(4, -2), D(2, 2)$

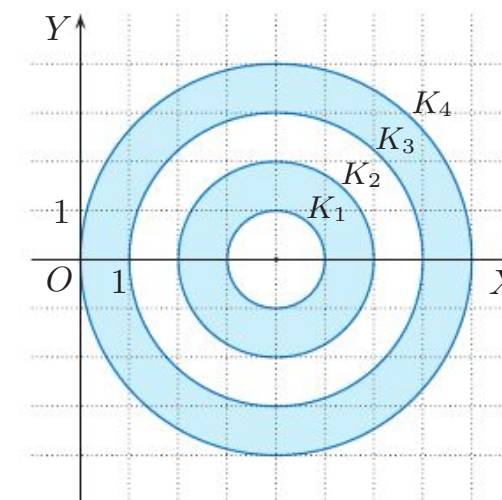
11. Wyznacz równanie okręgu, do którego należą wierzchołki prostokąta $ABCD$.

- a) $A(-3, -1), B(1, -3), C(4, 3), D(0, 5)$
b) $A(-9, 2), B(-1, -4), C(2, 0), D(-6, 6)$

12. a) Podaj równania okręgów K_1, K_2, K_3 i K_4 przedstawionych na rysunku obok.

- b) Jaki procent pola koła ograniczonego okręgiem K_4 został zacieniowany?

- c) Podaj równanie okręgu o środku $(1, 0)$, który ma z okręgiem K_4 jeden punkt wspólny.

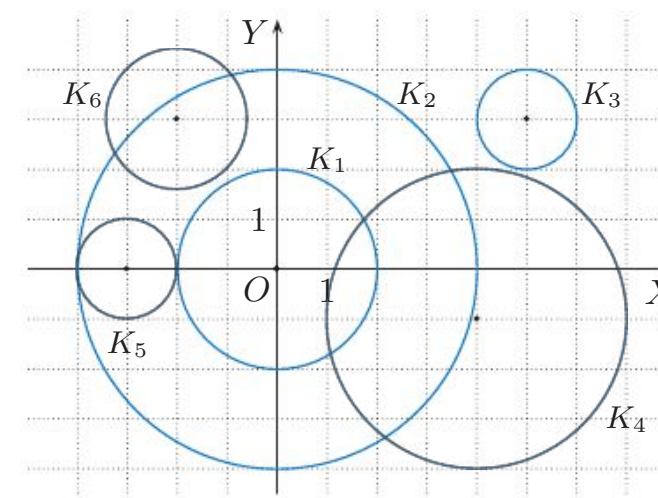


Sprawdź się

13. Podaj równania okręgów K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 i K_6 przedstawionych na rysunku obok.

14. Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku w punkcie S . Wyznacz równanie tego okręgu oraz oblicz współrzędne punktu A .

- a) $B(7, 1), S(3, -1)$
b) $B(1, 5), S(-2, 1)$



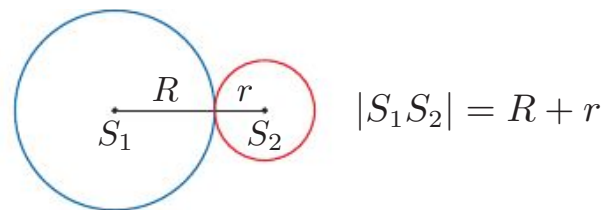
2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Przypomnijmy, jak mogą być położone względem siebie dwa różne okręgi.

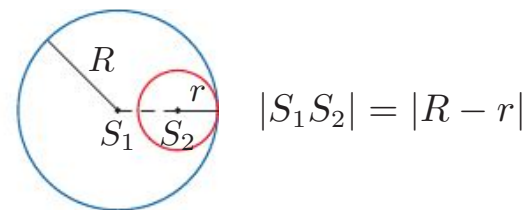
Okręgi styczne

(mają jeden punkt wspólny)

styczne zewnętrznie

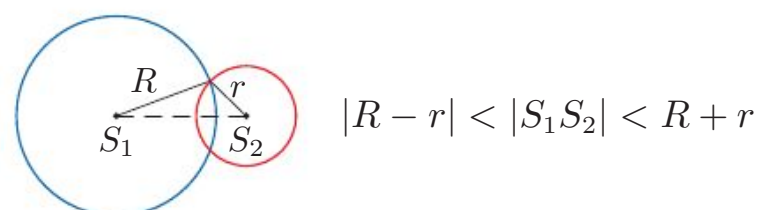


styczne wewnętrznie



Okręgi przecinające się

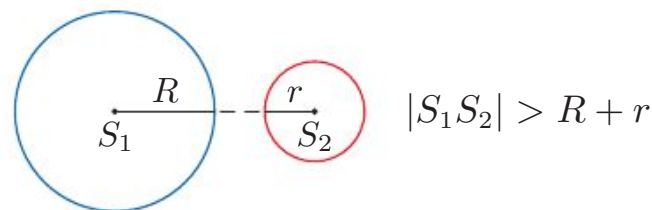
(mają dwa punkty wspólne)



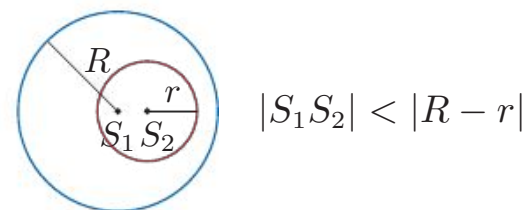
Okręgi rozłączne

(nie mają punktów wspólnych)

rozłączne zewnętrznie



rozłączne wewnętrznie

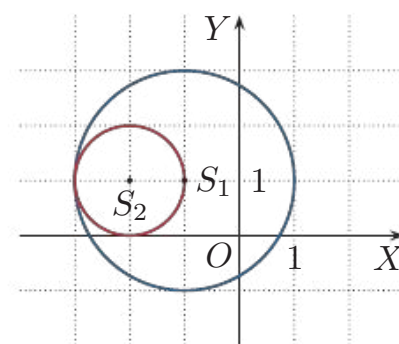


Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono:

- okrąg o środku $S_1(-1, 1)$ i promieniu $R = 2$,
- okrąg o środku $S_2(-2, 1)$ i promieniu $r = 1$.

Zauważ, że $|R - r| = 1 = |S_1S_2|$. Okręgi te mają jeden punkt wspólny (są styczne wewnętrznie).



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu R oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu r . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

- | | |
|---|--|
| a) $S_1(-1, 0)$, $R = 5$, $S_2(1, 0)$, $r = 2$ | c) $S_1(-2, 0)$, $R = 6$, $S_2(-2, 4)$, $r = 2$ |
| b) $S_1(0, 3)$, $R = 4$, $S_2(0, -2)$, $r = 1$ | d) $S_1(0, 0)$, $R = \frac{3}{2}$, $S_2(2, 2)$, $r = \frac{3}{2}$ |

Przykład 2

Ile punktów wspólnych mają okręgi:

$$K_1: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16 \quad \text{ i } \quad K_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4?$$

Środkiem okręgu K_1 jest punkt $S_1(3, 4)$, a promień tego okręgu $R = 4$.

Środkiem okręgu K_2 jest punkt $S_2(1, 2)$, a promień tego okręgu $r = 2$.

Obliczamy odległość między środkami tych okręgów:

$$|S_1S_2| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$R + r = 6$ oraz $|R - r| = 2$, zatem $|R - r| < |S_1S_2| < R + r$ (gdyż $2 < 2\sqrt{2} < 6$), więc okręgi K_1 i K_2 mają dwa punkty wspólne (przecinają się).

Ćwiczenie 2

Ile punktów wspólnych mają okręgi K_1 i K_2 ?

- $K_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$, $K_2: (x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 5$
- $K_1: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 49$, $K_2: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$
- $K_1: (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 36$, $K_2: (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
- $K_1: (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 40$, $K_2: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

Przykład 3

Dane są okrąg $K_1: (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ oraz okrąg K_2 o środku w punkcie $S_2(5, 4)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają jeden punkt wspólny?

Środkiem okręgu K_1 jest punkt $S_1(-3, -2)$, a promień tego okręgu $R = 5$.

Obliczamy odległość między środkami okręgów K_1 i K_2 :

$$|S_1S_2| = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

Dane okręgi mają jeden punkt wspólny, gdy:

- są styczne zewnętrznie, czyli $|S_1S_2| = 10 = 5 + r$, zatem $r = 5$,
lub
- są styczne wewnętrznie, czyli $|S_1S_2| = 10 = |5 - r|$, zatem $r = 15$.

Ćwiczenie 3

Dane są okrąg $K_1: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ oraz okrąg K_2 o środku w punkcie S_2 i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają jeden punkt wspólny?

- $S_2(4, 2)$
- $S_2(-4, 4)$

Ćwiczenie 4

Dane są okrąg $(x + 7)^2 + (y - 5)^2 = 25$ oraz okrąg o środku w punkcie $S(5, -4)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają dwa punkty wspólne?

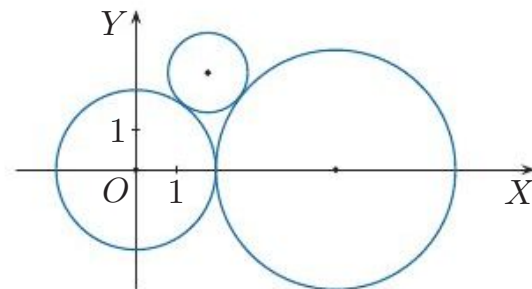
Zadania

- Dane są okręgi K_1 i K_2 . Oblicz odległość między środkami tych okręgów i określ ich wzajemne położenie.

a) $K_1: (x-3)^2 + y^2 = 4,$	$K_2: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 16$
b) $K_1: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 1,$	$K_2: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 36$
c) $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 90,$	$K_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$
d) $K_1: (x+4)^2 + (y-5)^2 = 84,$	$K_2: (x+5)^2 + (y+2)^2 = 16$
e) $K_1: (x+1)^2 + (y-8)^2 = 49,$	$K_2: (x-1)^2 + (y-6)^2 = 4$
f) $K_1: (x-7)^2 + (y-2)^2 = 49,$	$K_2: (x+5)^2 + (y+3)^2 = 25$
- Oblicz odległość między środkami okręgów K_1 i K_2 . Dla jakich wartości r , gdzie $r > 0$, okręgi te mają jeden punkt wspólny, a dla jakich – dwa punkty wspólne?

a) $K_1: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 64,$	$K_2: (x+7)^2 + (y-4)^2 = r^2$
b) $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16,$	$K_2: (x-3)^2 + (y-3)^2 = r^2$
c) $K_1: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 49,$	$K_2: (x+6)^2 + (y-1)^2 = r^2$
- Średnicą okręgu K_1 jest odcinek AB , a średnicą okręgu K_2 – odcinek CD . Wyznacz równania tych okręgów i określ ich wzajemne położenie.

a) $A(-3, -1), B(1, 3), C(3, 3), D(1, 5)$
b) $A(-5, 1), B(-1, -3), C(1, -1), D(1, 5)$
c) $A(-2, 1), B(4, 1), C(3, 2), D(1, 4)$
- Okręgi o promieniach 1, 2 i 3, parami styczne zewnętrznie, są położone w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wyznacz współrzędne środka najmniejszego okręgu.



Sprawdź się

- Ile punktów wspólnych mają okręgi $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$ i K_2 ?

a) $K_2: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$	c) $K_2: (x-4)^2 + (y+4)^2 = 5$
b) $K_2: (x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$	d) $K_2: (x-6)^2 + (y+7)^2 = 225$
- Dany jest okrąg K_1 o środku $S_1(1, 3)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okrąg ten ma jeden punkt wspólny z okręgiem K_2 , a dla jakich – dwa punkty wspólne?

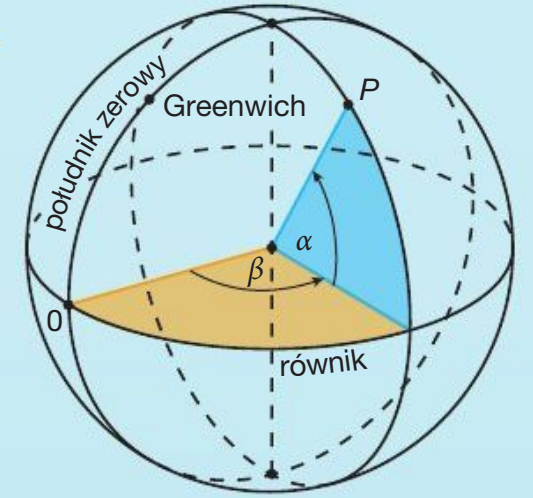
a) $K_2: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$	b) $K_2: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$
---------------------------------	----------------------------------

Współrzędne geograficzne

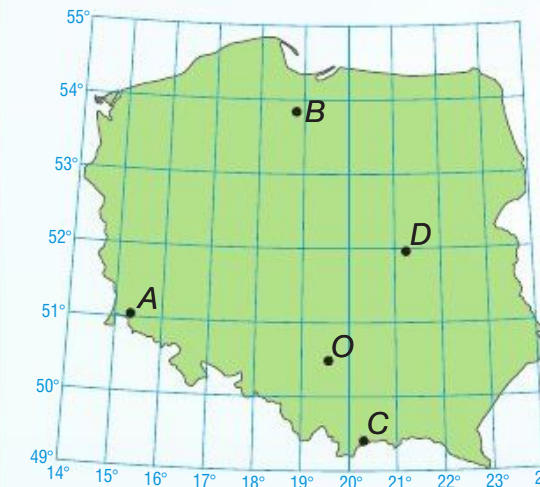
Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego:

szerokość geograficzną (kąt α mierzony od równika w kierunku północnym albo południowym),
długość geograficzną (kąt β mierzony od południka zerowego w kierunku wschodnim albo zachodnim).

Tak określony układ współrzędnych wykorzystuje się przy tworzeniu map.



Na mapie punkt O oznacza położenie Zamku Ogrodzieniec ($50^{\circ}27'N$, $19^{\circ}33'E$), pokazanego na zdjęciu obok.



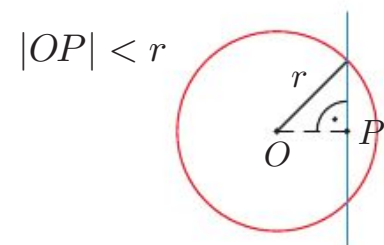
- 1** Punkty A, B, C, D odpowiadają położeniu czterech zamków pokazanych na zdjęciach. Dopasuj każdy punkt do właściwego zamku.



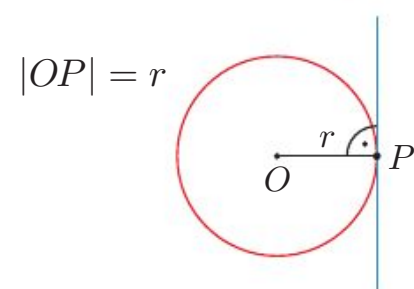
2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Przypomnijmy, że okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

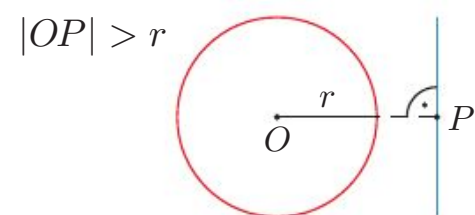
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.



Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia. Odcinek łączący punkty, w których sieczna przecina okrąg, nazywamy **cięciwą**.



Prostą, która ma z okręgiem jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.



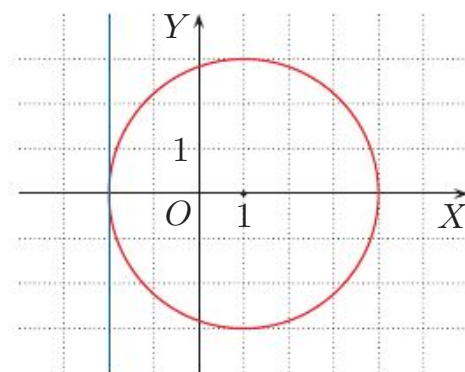
Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Przykład 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie $(1, 0)$ ma prosta $x = -2$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Dana prosta:

- ma jeden punkt wspólny z okręgiem dla $r = 3$ (rysunek obok),
- ma dwa punkty wspólne z okręgiem dla $r > 3$,
- nie ma punktów wspólnych z okręgiem dla $0 < r < 3$.

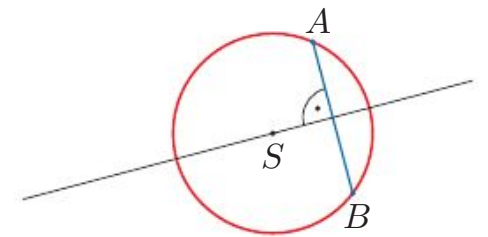


Ćwiczenie 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S ma prosta k w zależności od promienia r tego okręgu?

- | | |
|-----------------------------|---|
| a) $S(2, -2)$, $k: y = 2$ | c) $S(-2, 2)$, $k: x = \sqrt{3}$ |
| b) $S(-1, 3)$, $k: y = -4$ | d) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $k: x = 1 - \sqrt{2}$ |

Przypomnijmy, że jeśli odcinek AB jest cięciwą okręgu, to środek okręgu należy do symetralnej tej cięciwy.



Przykład 2

Dane są okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 16$ i prosta $l: x = 3$. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty ich przecięcia.

Niech $A(3, y_1)$, $B(3, y_2)$ będą punktami przecięcia okręgu z prostą $x = 3$ (rysunek obok). Współrzędne y_1 i y_2 wyznaczamy, podstawiając $x = 3$ do równania okręgu:

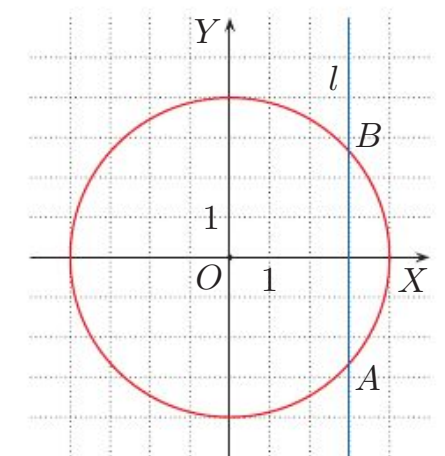
$$3^2 + y^2 = 16$$

$$y^2 = 7$$

$$y_1 = -\sqrt{7}, y_2 = \sqrt{7}$$

Zatem długość cięciwy jest równa:

$$|AB| = 2\sqrt{7}$$



Ćwiczenie 2

Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + y^2 = 25$.

- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| a) $l: x = 4$ | b) $l: x = -1$ | c) $l: y = -3$ |
|---------------|----------------|----------------|

Przykład 3

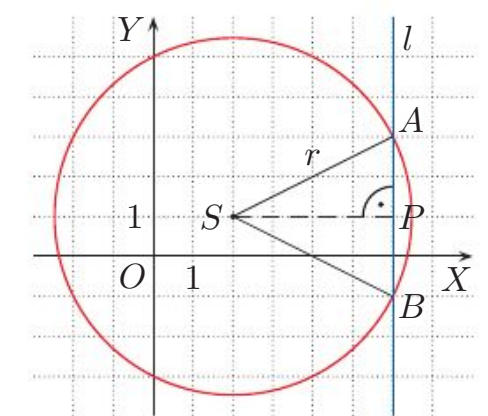
Punkty przecięcia okręgu o środku $S(2, 1)$ i prostej $l: x = 6$ są końcami cięciwy o długości 4. Wyznacz równanie tego okręgu.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Punkt P ma współrzędne $(6, 1)$, więc $|SP| = 4$ oraz $|AP| = 2$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SPA i obliczamy kwadrat promienia okręgu:

$$r^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

Zatem równanie okręgu ma postać:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$$



Ćwiczenie 3

Cięciwa o długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o środku w punkcie S . Wyznacz równanie tego okręgu.

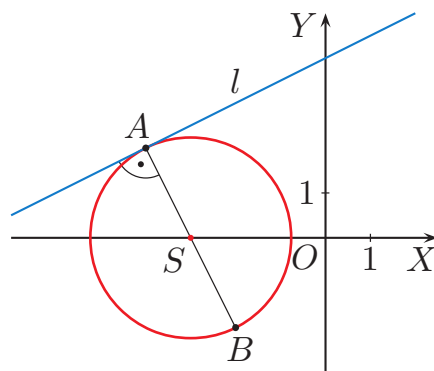
- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| a) $l: x = 3$, $S(-1, -2)$ | b) $l: y = -2$, $S(4, 1)$ |
|-----------------------------|----------------------------|

Ćwiczenie 4

Trójkąt równoramienny ABC jest wpisany w okrąg $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$. Punkty $A(-1, -1)$ i $B(3, -1)$ są wierzchołkami przy podstawie tego trójkąta. Wyznacz współrzędne wierzchołka C .

Zadania

- Ile punktów wspólnych z okręgiem $(x+3)^2 + (y-1)^2 = r^2$ ma prosta k w zależności od promienia r tego okręgu?
a) $k: y = 5$ b) $k: y = -2$ c) $k: x = 5$ d) $k: x = -\frac{1}{2}$
- Wyznacz równanie okręgu o środku S mającego jeden punkt wspólny z prostą k .
a) $S(1, 3), k: y = -1$ c) $S(-2, 2), k: x = 4$
b) $S(-3, -4), k: y = 4$ d) $S(4, -2), k: x = -6$
- Okrąg o środku $S(2, 0)$ przecina prostą $x = 4$ w punktach A i B . Wyznacz równanie tego okręgu oraz oblicz długość łuku AB .
a) $A(4, 2), B(4, -2)$ b) $A(4, 2\sqrt{3}), B(4, -2\sqrt{3})$
- Prosta $l: y = \frac{1}{2}x + 4$ jest styczna do okręgu o środku $S(-3, 0)$ w punkcie $A(-4, 2)$ (rysunek obok). Odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Wyznacz równanie okręgu oraz równanie stycznej do niego w punkcie B .



Sprawdź się

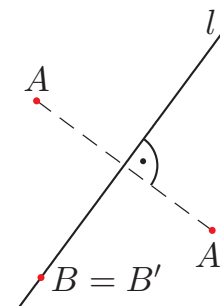
- Ile punktów wspólnych ma podany okrąg z prostą $y = -2$?
a) $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$ c) $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 4$
b) $(x-8)^2 + (y+1)^2 = 4$ d) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 8$
- Wyznacz równanie okręgu o środku S stycznego do prostej k .
a) $S(3, -4), k: y = 5$ b) $S(-2, -1), k: x = 10$
- Ile punktów wspólnych z prostą AB ma okrąg $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$?
a) $A(-2, -3), B(4, -3)$ b) $A(1, -3), B(1, 5)$ c) $A(1, \sqrt{35}), B(3, \sqrt{35})$
- Podaj równania stycznych do okręgu $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 49$ równoległych do osi: a) OX , b) OY .

2.7. Symetria osiowa

Założmy, że punkt A nie należy do prostej l .

Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem prostej l** , jeżeli punkty A i A' leżą na prostej prostopadłej do prostej l i środek odcinka AA' należy do prostej l (prosta l jest symetralną odcinka AA').

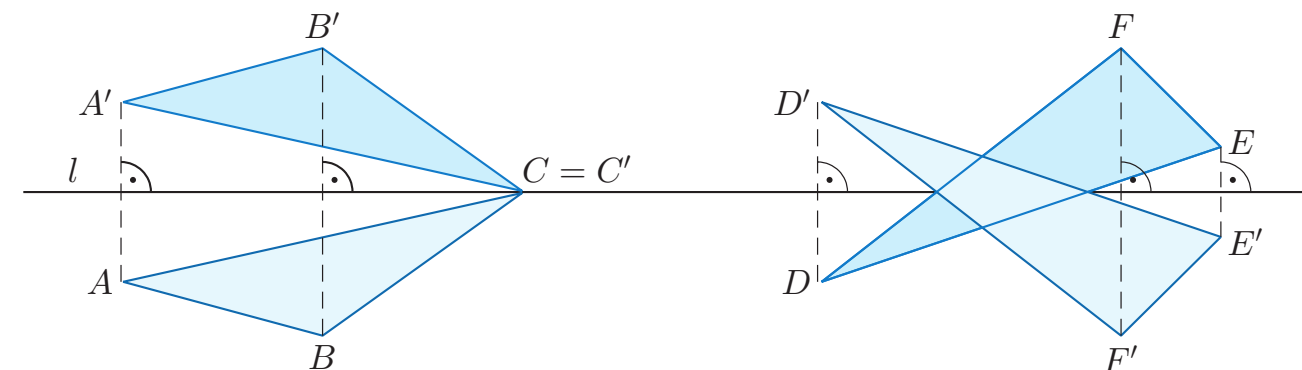
Punktem symetrycznym względem prostej l do punktu należącego do tej prostej jest ten sam punkt (patrz punkt B na rysunku obok).



Definicja

Symetrią osiową względem prostej l (lub symetrią względem prostej l) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej l . Prosta l nazywamy **osią symetrii**. Punkt A' symetryczny względem prostej l do punktu A nazywamy **obrazem** punktu A .

Na rysunku poniżej przedstawiono trójkąty ABC i DEF oraz ich obrazy w symetrii osiowej względem prostej l – odpowiednio trójkąty $A'B'C'$ i $D'E'F'$.

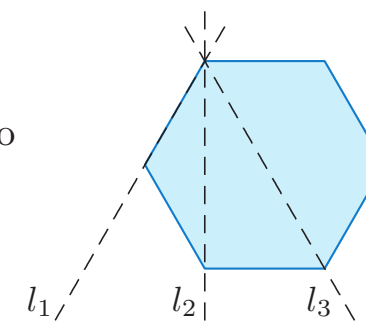


Obrazem dowolnej figury w symetrii osiowej jest figura do niej przystająca. Na przykład obrazem trójkąta jest trójkąt do niego przystający, a obrazem okręgu jest okrąg o takim samym promieniu.

Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie sześciokąt foremny, a następnie jego obraz w symetrii względem prostej (rysunek obok):

- a) l_1 , b) l_2 , c) l_3 .



Definicja

Figurę nazywamy **osiowosymetryczną**, jeśli jest ona swoim własnym obrazem w symetrii względem pewnej prostej l .

Prostą l nazywamy wówczas **osią symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

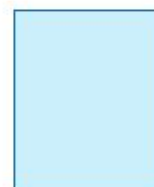
Podaj, ile osi symetrii mają poniższe figury.



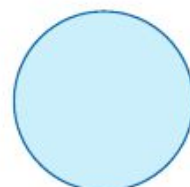
kwadrat



trójkąt równoboczny



prostokąt



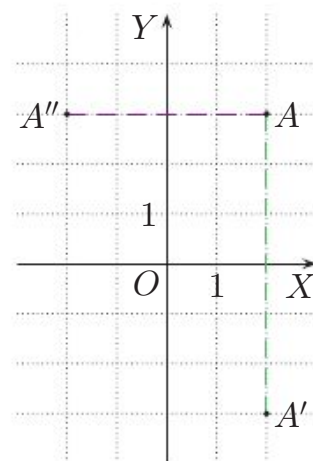
koło

Symetria względem osi układu współrzędnych

Przykład 1

W symetrii względem osi:

- OX obrazem punktu $A(2, 3)$ jest punkt $A'(2, -3)$,
- OY obrazem punktu $A(2, 3)$ jest punkt $A''(-2, 3)$.



W symetrii względem osi:

- OX obrazem punktu $P(x, y)$ jest punkt $P'(x, -y)$,
- OY obrazem punktu $P(x, y)$ jest punkt $P''(-x, y)$.

Ćwiczenie 3

Podaj współrzędne końców odcinka $A'B'$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OX oraz odcinka $A''B''$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OY . Narysuj w jednym układzie współrzędnych odcinki AB , $A'B'$ i $A''B''$.

- a) $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ b) $A(1, -2)$, $B(-4, 3)$ c) $A(-5, 1)$, $B(1, 4)$

Ćwiczenie 4

Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A(0, 3)$, $B(2, -1)$, $C(3, -1)$. Narysuj ten trójkąt oraz jego obraz w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Ćwiczenie 5

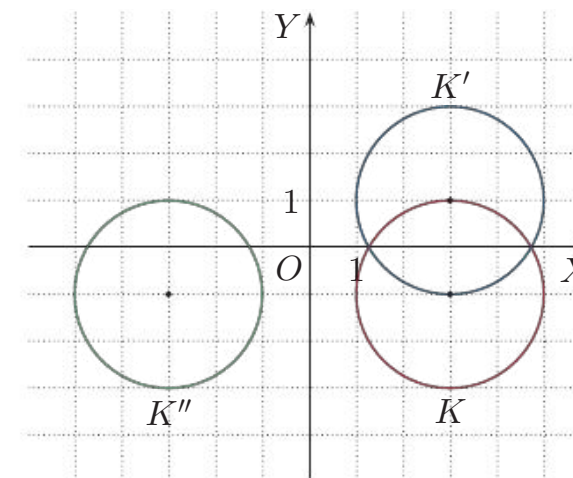
Dane są punkty $A(-2, 1)$, $B(2, -3)$, $C(4, -1)$ i $D(0, 3)$. Podaj współrzędne wierzchołków prostokąta będącego obrazem prostokąta $ABCD$ w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg K dany równaniem $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Okrąg K' jest symetryczny do okręgu K względem osi OX (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OX).

Okrąg K'' jest symetryczny do okręgu K względem osi OY (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OY).



Ćwiczenie 6

Podaj równania okręgów K' i K'' z powyższego przykładu.

Ćwiczenie 7

Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX oraz równanie okręgu K'' symetrycznego do okręgu K względem osi OY .

- a) $K: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ c) $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
b) $K: (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$ d) $K: (x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 49$

Zadania

- Sprawdź, czy odcinki AB i $A'B'$ są symetryczne względem osi OX lub osi OY .
a) $A(-2, 1)$, $B(3, -2)$, $A'(-2, -1)$, $B'(3, 2)$
b) $A(-3, 4)$, $B(-1, -2)$, $A'(3, 4)$, $B'(1, -2)$
c) $A(-4, -3)$, $B(2, 2)$, $A'(-4, 3)$, $B'(-2, 2)$
d) $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $A'(2, 0)$, $B'(0, -4)$
- Narysuj w jednym układzie współrzędnych trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OX oraz trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OY .
a) $A(-1, 2)$, $B(5, 3)$, $C(2, 5)$ c) $A(-3, 2)$, $B(0, -3)$, $C(3, 2)$
b) $A(-3, 0)$, $B(-2, -5)$, $C(0, 3)$ d) $A(-3, -1)$, $B(9, -2)$, $C(2, 1)$
- Oblicz pole części wspólnej kwadratu K o wierzchołkach $(-5, 1)$, $(-2, -2)$, $(1, 1)$, $(-2, 4)$ oraz kwadratu symetrycznego do kwadratu K względem:
a) osi OX , b) osi OY .

4. a) Prostokąt $A'B'C'D'$ jest symetryczny do prostokąta o wierzchołkach $A(-4, -2)$, $B(0, -4)$, $C(3, 2)$ i $D(-1, 4)$ względem osi OY . Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wielokąta będącego częścią wspólną tych prostokątów?
- b) Równoległobok $A'B'C'D'$ jest symetryczny do równoległoboku o wierzchołkach $A(-4, 0)$, $B(2, -2)$, $C(4, 2)$ i $D(-2, 4)$ względem osi OX . Oblicz pole i obwód deltoidu będącego częścią wspólną tych równoległoboków. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego deltoidu?
5. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem prostej $y = 0$. Sprawdź, czy punkt $P(-3, 2)$ należy do okręgu K' .
- a) $K: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ c) $K: (x + 3)^2 + y^2 = 4$
b) $K: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 41$ d) $K: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$
6. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem prostej $x = 0$. Narysuj te okręgi i odczytaj współrzędne ich punktów wspólnych. Sprawdź wynik, podstawiając współrzędne odczytanych punktów do równań okręgów K i K' . Oblicz pole rombu, którego wierzchołkami są środki okręgów K i K' oraz punkty wspólne tych okręgów.
- a) $K: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$ c) $K: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$
b) $K: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$ d) $K: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$
- D** 7. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem osi OX do okręgu $K: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$. Wykaż, że okręgi K i K' przecinają się w punktach $O(0, 0)$ i $P(6, 0)$. Oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych przez te okręgi.

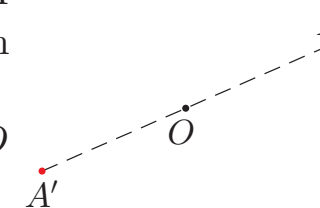
Sprawdź się

8. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta symetrycznego do trójkąta o wierzchołkach $A(-3, -1)$, $B(6, -4)$ i $C(0, 0)$ względem:
- a) osi OX , b) osi OY .
9. Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX oraz równanie okręgu K'' symetrycznego do okręgu K względem osi OY . Narysuj okręgi K , K' i K'' .
- a) $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ c) $K: (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$
b) $K: (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$ d) $K: (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 13$

2.8. Symetria środkowa

Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem punktu O** ($A \neq O$), jeżeli punkt O jest środkiem odcinka łączącego punkty A i A' .

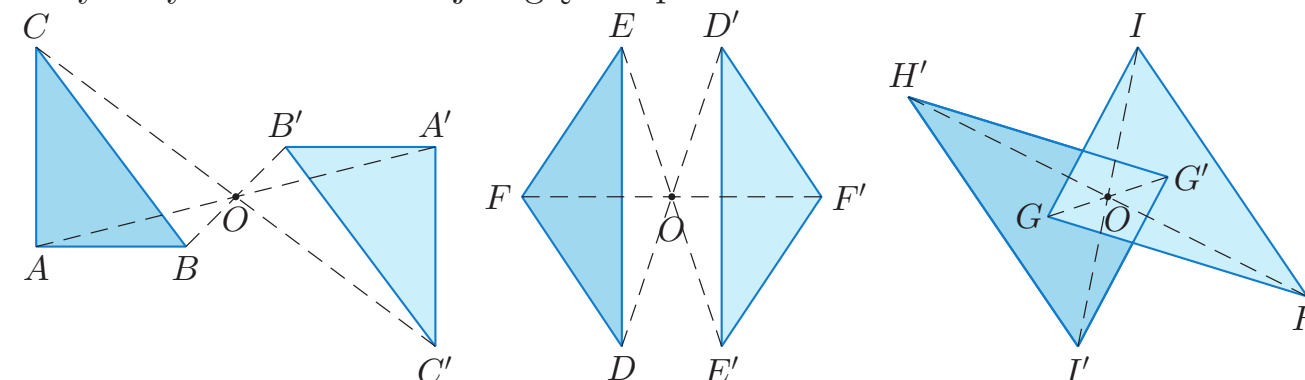
Punktem symetrycznym do punktu O względem punktu O jest on sam.



Definicja

Symetrią środkową względem punktu O (lub symetrią względem punktu O) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O . Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**. Punkt A' symetryczny względem punktu O do punktu A nazywamy **obrazem** punktu A .

Na rysunkach poniżej przedstawiono trójkąty ABC , DEF i GHI oraz ich obrazy w symetrii środkowej względem punktu O .



Obrazem dowolnej figury w symetrii środkowej jest figura do niej przystająca.

Ćwiczenie 1

Narysuj trójkąt równoboczny, a następnie przekształć go symetrycznie względem:

- a) jednego z jego wierzchołków, c) punktu przecięcia jego dwusiecznych,
b) środka jednego z jego boków, d) punktu leżącego na zewnątrz niego.

Figurę nazywamy **środkowosymetryczną**, jeśli jest ona swoim własnym obrazem w symetrii względem pewnego punktu O . Punkt O nazywamy wówczas **środkiem symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

Która z wymienionych figur ma środek symetrii: trójkąt, równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek, półprosta?

Symetria względem początku układu współrzędnych

Przykład 1

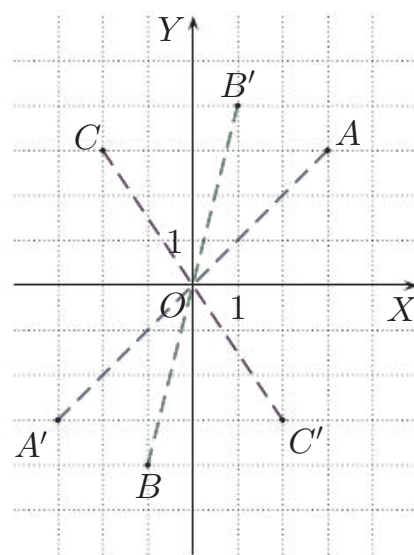
W symetrii względem początku układu współrzędnych obrazami punktów:

$$A(3, 3), B(-1, -4) \text{ i } C(-2, 3)$$

są odpowiednio punkty:

$$A'(-3, -3), B'(1, 4) \text{ i } C'(2, -3)$$

W symetrii względem początku układu współrzędnych obrazem punktu $P(x, y)$ jest punkt $P'(-x, -y)$.



Ćwiczenie 3

Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta ABC względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$.

$$\text{a) } A(3, -2), B(-2, -1), C(-1, 4) \quad \text{b) } A(2, -2), B(1, 3), C(-3, 1)$$

Ćwiczenie 4

Prostokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

$$\text{a) } A(-3, -2), B(5, -2), C(5, 3), D(-3, 3)$$

$$\text{b) } A(-3, 1), B(1, 3), C(3, -1), D(-1, -3)$$

$$\text{c) } A(-2, 1), B(1, -2), C(3, 0), D(0, 3)$$

Przykład 2

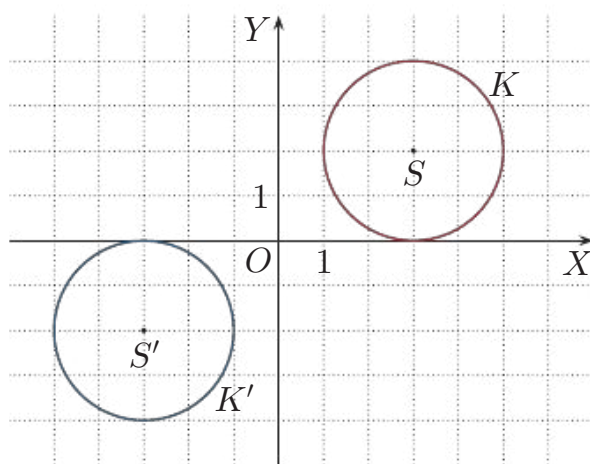
Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Narysuj te okręgi.

Środkiem okręgu K jest punkt $S(3, 2)$, a promień tego okręgu $r = 2$.

Zatem środkiem okręgu K' jest punkt S' symetryczny do S względem początku układu współrzędnych, czyli $S'(-3, -2)$, a promień tego okręgu $r' = 2$.

Oznacza to, że równanie okręgu K' ma postać:

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$$



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu K . Narysuj te okręgi.

$$\text{a) } K: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

$$\text{c) } K: (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

$$\text{b) } K: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$$\text{d) } K: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

Ćwiczenie 6

Okrąg K dany jest równaniem:

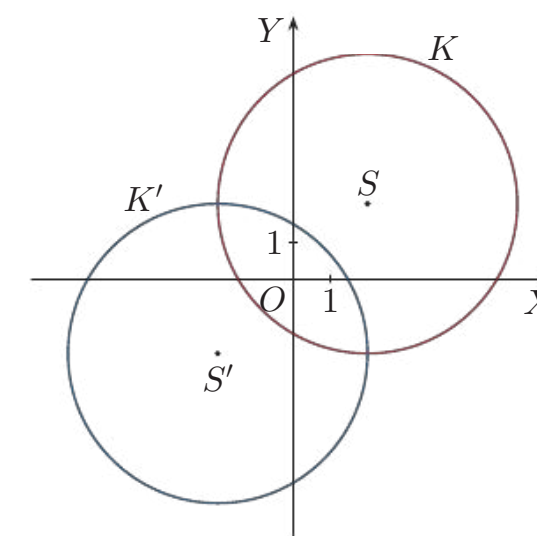
$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Okrąg K' jest symetryczny do okręgu K względem początku układu współrzędnych.

a) Wyznacz równanie okręgu K' .

D b) Uzasadnij, że punkty $P(-2, 2)$ i $Q(2, -2)$ są punktami wspólnymi okręgów K i K' .

c) Oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych przez te okręgi.



Zadania

1. Punkt A' jest położony symetrycznie do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AA' .

$$\text{a) } A(3, 4) \quad \text{b) } A(-1, 4) \quad \text{c) } A(-6, -8) \quad \text{d) } A(a, a)$$

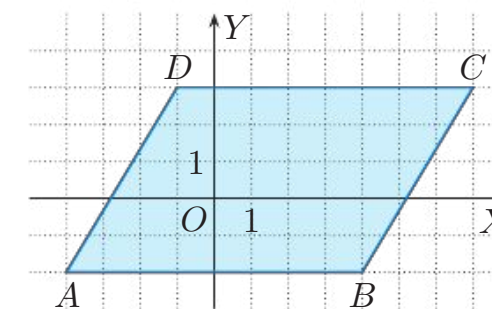
2. Narysuj w układzie współrzędnych prostokąt $ABCD$ i jego obraz w symetrii względem początku układu współrzędnych.

$$\text{a) } A(1, 1), B(4, 1), C(4, 3), D(1, 3)$$

$$\text{b) } A(-3, -1), B(1, -1), C(1, 2), D(-3, 2)$$

$$\text{c) } A(-4, -3), B(2, 0), C(1, 2), D(-5, -1)$$

3. Równoległobok $A'B'C'D'$ jest obrazem równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) w symetrii względem punktu $O(0, 0)$. Oblicz pole części wspólnej tych równoległoboków.



4. Wyznacz równanie okręgu K' będącego obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Narysuj okręgi K i K' .

$$\text{a) } K: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$\text{c) } K: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$$

$$\text{b) } K: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 17$$

$$\text{d) } K: (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 10$$



Powtórzenie

Zestaw I

- Oblicz długości odcinków AB , BC i AC . Czy punkty A , B i C są współliniowe?
 - $A(-4, 5)$, $B(0, 2)$, $C(8, -4)$
 - $A(13, 5)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 1)$
 - $A(-4, -12)$, $B(2, -4)$, $C(10, 2)$
 - $A(-2\sqrt{2}, 8)$, $B(0, 0)$, $C(\sqrt{2}, -4)$
- Oblicz odległość punktu A od środka odcinka BC .
 - $A(6, 3)$, $B(1, 4)$, $C(3, -2)$
 - $A(-1, 5)$, $B(0, -1)$, $C(6, 5)$
 - $A(-3, 3)$, $B(-5, \frac{3}{2})$, $C(3, -\frac{7}{2})$
 - $A(1, \frac{1}{2})$, $B(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$, $C(\frac{9}{2}, \frac{13}{2})$
- Wyznacz współrzędne punktów dzielących odcinek AB na cztery równe części.
 - $A(-2, 4)$, $B(6, -8)$
 - $A(-1, 3)$, $B(5, 7)$
- Dane są punkt $A(3, -2)$ oraz punkt S będący środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .
 - $S(-1, 0)$
 - $S(5, 4)$
 - $S(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
 - $S(\sqrt{3}, -1)$
- Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny oraz równoramienny. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.
 - $A(0, 6)$, $B(2, 0)$, $C(8, 2)$
 - $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$, $C(1, 2)$
 - $A(-7, -2)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 10)$
 - $A(2, -2)$, $B(4, 6)$, $C(-6, 0)$
- Oblicz obwód prostokąta $ABCD$. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu, do którego należą punkty A , B , C i D .
 - $A(-5, 1)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 1)$, $D(3, 5)$
 - $A(-4, 2)$, $B(4, -6)$, $C(8, -2)$, $D(0, 6)$
- W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD i BE . Oblicz ich długości.
 - $A(2, -1)$, $B(4, 5)$, $C(-4, 3)$
 - $A(6, 3)$, $B(2, 7)$, $C(-4, -5)$
- Sprawdź, czy prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są przystające lub podobne.
 - $A(-1, -1)$, $B(3, -3)$, $C(7, 5)$, $D(3, 7)$,
 $E(-8, 1)$, $F(4, -5)$, $G(7, 1)$, $H(-5, 7)$
 - $A(-7, -2)$, $B(-5, -5)$, $C(1, -1)$, $D(-1, 2)$,
 $E(1, 4)$, $F(5, -2)$, $G(8, 0)$, $H(4, 6)$

- Narysuj w jednym układzie współrzędnych okrąg $K: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$ oraz okrąg K' będący obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Wyznacz równanie okręgu K' i oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych przez te okręgi.

- Okrąg K' jest obrazem okręgu K w symetrii względem osi OX , a okrąg K'' jest obrazem okręgu K' w symetrii względem osi OY . Uzasadnij, że okrąg K'' jest obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych.

- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Dany jest okrąg $K: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 1$. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem punktu $P(3, 1)$.

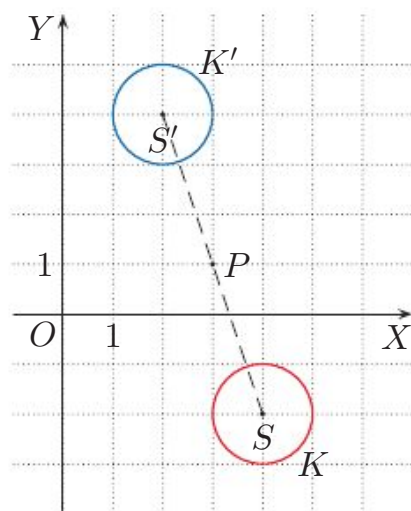
Środkiem okręgu K jest punkt $S(4, -2)$.
 Niech $S'(x_1, y_1)$ będzie środkiem okręgu K' .
 Wówczas punkt $P(3, 1)$ jest środkiem odcinka SS' , zatem:

$$\frac{4+x_1}{2} = 3 \quad \text{i} \quad \frac{-2+y_1}{2} = 1$$

$$x_1 = 2 \quad \text{i} \quad y_1 = 4$$

Środkiem okręgu K' jest punkt $S'(2, 4)$.
 Ponieważ promienie okręgów K i K' są równe, okrąg K' jest opisany równaniem:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$$



Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem punktu P . Narysuj okręgi K i K' .

- $K: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, $P(2, 1)$
- $K: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$, $P(3, 2)$

Sprawdź się

- Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.
 - $A(-3, 2)$, $B(3, -4)$, $C(6, 2)$
 - $A(-3, -4)$, $B(3, 2)$, $C(-3, 0)$
- Wyznacz równanie okręgu K' będącego obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Narysuj te okręgi.
 - $K: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$
 - $K: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$

9. Podaj równanie okręgu o środku S i promieniu r . Narysuj ten okrąg. Wyznacz jego punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.

- a) $S(-4, 0)$, $r = 5$ c) $S(-1, 2)$, $r = 4$
b) $S(2, 3)$, $r = 5$ d) $S(-3, -4)$, $r = 1$

10. Podaj współrzędne środka i promień okręgu K . Oblicz pole kwadratu wpisanego w ten okrąg.

- a) $K: x^2 + (y - 5)^2 = 64$ c) $K: (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$
b) $K: (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 81$ d) $K: (x + 11)^2 + (y + 13)^2 = 40$

11. Które z punktów P , Q , R należą do okręgu K ?

- a) $P(8, 2)$, $Q(-1, -1)$, $R(5, -2)$, $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$
b) $P(-4, 6)$, $Q(3, 2)$, $R(-4, 0)$, $K: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 18$
c) $P(5, -1)$, $Q(1, -4)$, $R(6, -7)$, $K: (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$

12. Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB .

- a) $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$ d) $A(0, 0)$, $B(4, 4)$
b) $A(-2, -2)$, $B(-2, 6)$ e) $A(-3, -1)$, $B(1, 1)$
c) $A(-2, 0)$, $B(5, 0)$ f) $A(-1, 3)$, $B(5, -1)$

Zestaw II

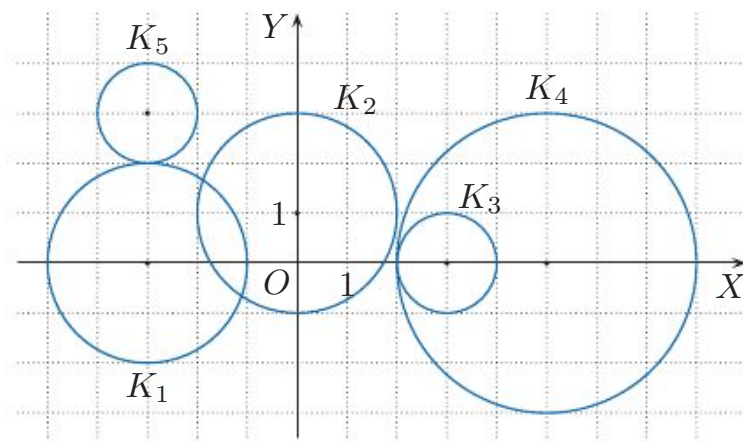
1. Wyznacz współrzędne wierzchołka D oraz obwód równoległoboku $ABCD$.

- a) $A(-1, 4)$, $B(5, -2)$, $C(7, 3)$ b) $A(0, -4)$, $B(-1, -6)$, $C(3, 3)$

2. Określ wzajemne położenie okręgów K_1 i K_2 .

- a) $K_1: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$, $K_2: (x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 25$
b) $K_1: (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 36$, $K_2: (x + 4)^2 + (y + 6)^2 = 3$
c) $K_1: (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 17$, $K_2: (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$
d) $K_1: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 5$, $K_2: (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$

3. Podaj równania okręgów K_1 , K_2 , K_3 , K_4 oraz K_5 przedstawionych na rysunku obok. Dla której pary okręgów odległość między ich środkami jest równa:
a) sumie ich promieni,
b) bezwzględnej wartości różnicy ich promieni?



4. Dane są okrąg K_1 o równaniu $x^2 + y^2 = 16$ i okrąg K_2 , którego średnicą jest odcinek o końcach $A(0, 4)$ i $B(4, 0)$. Oblicz pola kół ograniczonych przez te okręgi i pole części wspólnej tych kół.

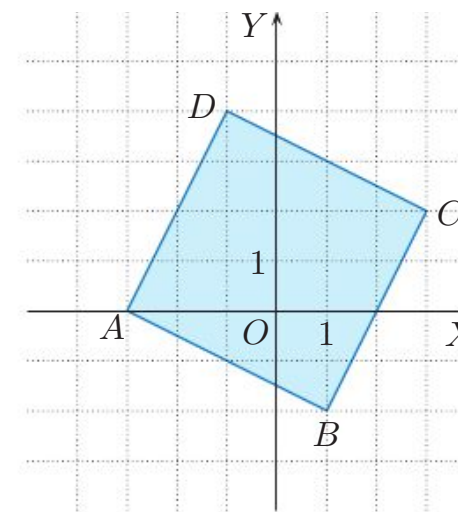
5. Okrąg o środku w punkcie S_1 jest styczny do prostej l , a okrąg o środku w punkcie S_2 jest styczny do prostej k . Oblicz promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

- a) $S_1(-1, 4)$, $l: x = 1$, $S_2(1, 4)$, $k: x = 3$
b) $S_1(-3, -3)$, $l: y = -2$, $S_2(-3, -4)$, $k: y = -6$

6. Okręgi K_1 i K_2 o środkach odpowiednio $S_1(-3, -1)$ i $S_2(5, 5)$ mają równe promienie i są styczne zewnętrznie. Wyznacz równania tych okręgów.

7. Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(-3, 0)$, $B(1, -2)$, $C(3, 2)$ i $D(-1, 4)$ (rysunek obok). Wyznacz równanie okręgu:

- a) wpisanego w ten kwadrat,
b) opisanego na tym kwadracie.



8. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-3, 3)$, $B(2, -2)$ i $C(7, 3)$. Oblicz pole części wspólnej tego trójkąta i jego obrazu w symetrii względem:

- a) osi OX , b) osi OY .

9. Dany jest równoległobok o wierzchołkach $A(-3, -1)$, $B(3, -1)$, $C(6, 2)$ i $D(0, 2)$. Oblicz pole części wspólnej tego równoległoboku i jego obrazu w symetrii względem początku układu współrzędnych.

10. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(-2, 4)$ i $B(4, 4)$, którego środek należy do prostej $l: y = -1$.

11. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 100$ w punktach A i B . Wyznacz równanie tej prostej w przypadku, gdy:

- a) $|AB| = 12$, b) $|AB| = 10\sqrt{2}$, c) $|AB| = 10$, d) $|AB| = 20$.

12. Wyznacz punkty wspólne okręgu K z osiami układu współrzędnych. Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem początku układu współrzędnych.

- a) $K: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $K: (x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$

**Przykład 1**

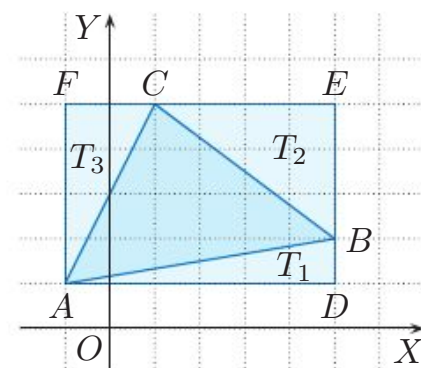
Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A(-1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(1, 5)$.

I sposób

Pole tego trójkąta możemy obliczyć następująco:

$$P = P_{ADEF} - P_1 - P_2 - P_3$$

gdzie $ADEF$ jest prostokątem, a P_1 , P_2 , P_3 są odpowiednio polami trójkątów T_1 , T_2 , T_3 (rysunek obok).



Obliczamy pola:

$$P_{ADEF} = 6 \cdot 4 = 24, \quad P_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3, \quad P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6, \quad P_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

$$\text{Zatem } P = 24 - 3 - 6 - 4 = 11.$$

II sposób

Możemy skorzystać ze wzoru zamieszczonego w tablicach matematycznych na egzamin maturalny.

Pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

Mamy $(x_A, y_A) = (-1, 1)$, $(x_B, y_B) = (5, 2)$, $(x_C, y_C) = (1, 5)$, zatem:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |(5 - (-1))(5 - 1) - (2 - 1)(1 - (-1))| = \\ &= \frac{1}{2} |6 \cdot 4 - 1 \cdot 2| = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11 \end{aligned}$$

Odpowiedź: $P = 11$

→ Zadanie 20, str. 94

Przykład 2

Dane są punkty $A(5, 0)$, $B(0, 3)$, $C(-2, -3)$ oraz $D(5, -3)$. Oblicz pole trójkąta ABC i pole czworokąta $ABCD$ (rysunek obok).

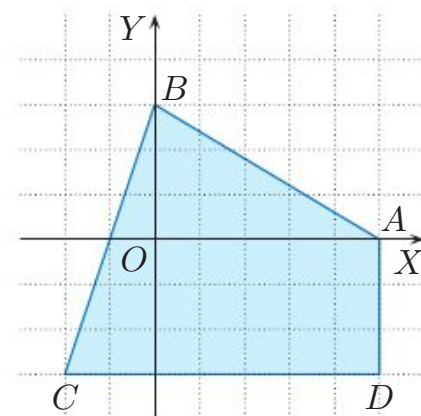
Mamy $(x_A, y_A) = (5, 0)$, $(x_B, y_B) = (0, 3)$, $(x_C, y_C) = (-2, -3)$, zatem:

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |(0 - 5)(-3 - 0) - (3 - 0)(-2 - 5)| = \\ &= \frac{1}{2} |15 + 21| = 18 \end{aligned}$$

Ponieważ $P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$, więc $P_{ABCD} = P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD} = 28\frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $P_{\triangle ABC} = 18$, $P_{ABCD} = 28\frac{1}{2}$

→ Zadanie 21, str. 94



W zadaniach 1–10, 12.1, 12.2 i 13.1 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Prosta $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej danej równaniem ogólnym $2x + \sqrt{2}y + 4 = 0$. Współczynnik a jest równy

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 2 (0–1)

Punkty $A(-2, -2)$ i $B(6, 2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Pole tego trójkąta jest równe

- A. $20\sqrt{3}$ B. $24\sqrt{3}$ C. $30\sqrt{3}$ D. $32\sqrt{3}$

Zadanie 3 (0–1)

Punkty $A(-3, 2)$, $B(1, 2)$, $C(5, 6)$ i $D(1, 6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Jego obwód jest liczbą należącą do przedziału

- A. $(13; 16]$ C. $(19; 22]$
B. $(16; 19]$ D. $(22; 25]$

Zadanie 4 (0–1)

Dane są wierzchołki $B(2, -1)$ i $C(4, 3)$ rombu $ABCD$. Jego przekątne przecinają się w punkcie $P(4, -1)$. Pozostałe wierzchołki tego rombu mają współrzędne

- A. $(4, -3)$, $(6, -1)$ C. $(4, -3)$, $(6, -3)$
B. $(4, -5)$, $(6, -1)$ D. $(4, -5)$, $(6, -3)$

Zadanie 5 (0–1)

Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do okręgu opisanego równaniem $x^2 + y^2 = 100$?

- A. 4 B. 8 C. 9 D. 12

Zadanie 6 (0–1)

Okrąg o środku w punkcie $S(-1, 2)$ i promieniu $\sqrt{10}$ przechodzi przez punkt

- A. $(-3, -1)$ B. $(1, -2)$ C. $(-2, 5)$ D. $(-2, 3)$

Zadanie 7 (0–1)

Okrąg o środku S_1 ma promień 3, a okrąg o środku S_2 ma promień 2. Okręgi te mają jeden punkt wspólny. Punkty S_1 i S_2 mogą mieć współrzędne

- A. $S_1(1, 2)$, $S_2(4, 5)$ C. $S_1(-6, 2)$, $S_2(-2, -1)$
B. $S_1(2, 1)$, $S_2(3, 2)$ D. $S_1(-4, -3)$, $S_2(-2, -2)$



Zadanie 8 (0-1)

Okrąg o środku w punkcie $S(-6, 3)$ jest styczny do osi OY . Wskaż równanie tego okręgu.

- A. $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 9$ C. $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$
B. $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 9$ D. $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 36$

Zadanie 9 (0-1)

Punkt B jest obrazem punktu $A(3, -2)$ w symetrii względem osi OX . Obrazem punktu B w symetrii względem osi OY jest punkt

- A. $(-3, -2)$ B. $(3, 2)$ C. $(-3, 2)$ D. $(-2, 3)$

Zadanie 10 (0-1)

Okrąg K_1 o środku $S_1(12, -8)$ jest styczny do osi OX . Okrąg K_2 – obraz okręgu K_1 w symetrii względem osi OY – jest styczny do jednej z osi układu współrzędnych w punkcie

- A. $(-8, 0)$ B. $(0, -8)$ C. $(-12, 0)$ D. $(0, -12)$

Zadanie 11 (0-2)

Dany jest okrąg K : $(x + 9)^2 + (y - 5)^2 = 1\frac{9}{16}$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Środkiem okręgu K jest punkt

- A. $(-9, -5)$ B. $(-9, 5)$ C. $(9, -5)$ D. $(9, 5)$

2. Promień okręgu K jest równy

- E. $1\frac{9}{16}$ F. $1\frac{3}{4}$ G. $1\frac{1}{2}$ H. $1\frac{1}{4}$

Zadanie 12

Punkty $A(-4, -4)$, $B(6, -4)$ i $C(14, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$.

Zadanie 12.1 (0-1)

Pole tego rombu jest równe

- A. 68 B. 60 C. 52 D. 48

Zadanie 12.2 (0-1)

Okrąg o środku w punkcie przecięcia przekątnych tego rombu, styczny do boku AB , jest dany równaniem

- A. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$ C. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$
B. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ D. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$



Zadanie 13

Punkty $A(-3, 7)$, $B(17, -3)$ oraz $C(13, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.

Zadanie 13.1 (0-1)

Wierzchołek D ma współrzędne

- A. $(-7, 15)$ B. $(-4, 10)$ C. $(-4, 8)$ D. $(-20, 10)$

Zadanie 13.2 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Krótszy bok równoległoboku ma długość $6\sqrt{3}$.	P	F
Dłuższy bok równoległoboku ma długość $10\sqrt{5}$.	P	F

Zadanie 14 (0-1)

Środek okręgu K_1 o promieniu 14 leży w II ćwiartce układu współrzędnych. Okrąg ten jest styczny do osi OX i do osi OY . Okrąg K_2 jest dany równaniem $(x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 196$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Okręgi K_1 i K_2 są symetryczne względem osi OX .	P	F
Odległość między środkami tych okręgów jest równa $20\sqrt{2}$.	P	F

Zadanie 15 (0-1)

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $D(-3, 5)$, $E(-3, -1)$ i $F(5, 5)$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Środek okręgu opisanego na trójkącie DEF leży

A.	na jednym z boków tego trójkąta	i ma współrzędne	1.	$(1, 2)$.
B.	wewnątrz tego trójkąta		2.	$(1, 3)$.
C.	na zewnątrz tego trójkąta		3.	$(1, 5)$.

Zadanie 16 (0-2)

Średnicą okręgu K jest odcinek o końcach $A(-2, 3)$ i $B(6, -1)$. Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do okręgu K względem początku układu współrzędnych.

**Zadanie 17 (0-2)**

Dane są punkty $A(-5, 1)$, $B(-3, 5)$, $C(5, -1)$ i $D(11, -3)$. Oblicz odległość między środkami odcinków AB i CD .

Zadanie 18 (0-2)

Wyznacz równanie okręgu o środku $S(4, 1)$ stycznego do prostej $y = -2$.

Zadanie 19 (0-2)

Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu $K: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$ względem osi OX . Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

Zadanie 20 (0-3) → Przykład 1, str. 90

Punkty $A(4, 2)$ i $B(1, 6)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Punkt $S(0, 3)$ jest środkiem boku BC . Wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 21 (0-3) → Przykład 2, str. 90

Dane są punkty $A(-1, 3)$, $B(-5, -3)$ i $C(5, -1)$. Punkt D jest symetryczny do punktu B względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

D Zadanie 22 (0-3)

Uzasadnij, że okręgi dane równaniami:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5 \quad \text{ i } \quad (x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$$

są styczne zewnętrznie.

D Zadanie 23 (0-4)

Uzasadnij, że czworokąt o kolejnych wierzchołkach $A(-2, -1)$, $B(4, 1)$, $C(6, 7)$ i $D(0, 5)$ jest rombem. Oblicz jego pole i wysokość.

Zadanie 24

W okrąg $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ wpisano trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku $C(-1, -3)$.

Zadanie 24.1 (0-2)

Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 24.2 (0-3)

Wierzchołek A ma współrzędne $(6, -2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka B oraz równanie prostej zawierającej przyprostokątną BC .

Zadanie 25 (0-4)

Prosta $k: y = 2x - 4$ przecina oś OY w punkcie A , a prosta $l: y = -\frac{1}{2}x + 6$ przecina tę oś w punkcie B . Punkt C jest punktem wspólnym tych prostych. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

3 Ciągi

Pojęciem ciągu posługujemy się w sytuacjach, gdy mamy do czynienia z kolejno ustawionymi i ponumerowanymi obiektami. Mogą to być obiekty matematyczne lub inne. W rozdziale tym omawiamy ciągi liczbowe, czyli takie, których kolejnymi wyrazami są liczby. Przykłady ciągów:

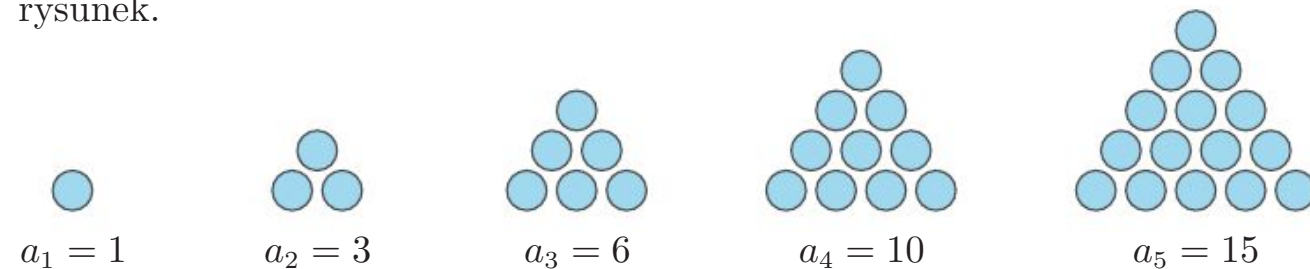
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$ – ciąg odwrotności kolejnych liczb pierwszych,

$1, 4, 1, 41, 1, 414, 1, 4142, 1, 41421, 1, 414214, 1, 4142136, \dots$ – ciąg kolejnych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$.



3.1. Pojęcie ciągu

Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, ... to kolejne liczby trójkątne – nazwę wyjaśnia poniższy rysunek.



Mówimy, że liczby trójkątne tworzą **ciąg**. Ciąg jest określony, jeśli kolejnym liczbom naturalnym dodatnim przyporządkowano wartości: $a_1, a_2, a_3, \dots$, które nazywamy **wyrazami ciągu**.

Przykład 1

W ciągu: 1, 4, 9, 16, ... wyrazy są kwadratami kolejnych liczb naturalnych dodatnich. Na przykład wyrazy $a_9 = 9^2 = 81$, $a_{10} = 10^2 = 100$.

Ogólnie, n -ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = n^2$.

Ćwiczenie 1

Odgadnij regułę, według której mogły powstać wyrazy danego ciągu, i podaj wyrazy a_7 oraz a_8 tego ciągu.

- a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... c) -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...
b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ d) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

Definicja

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

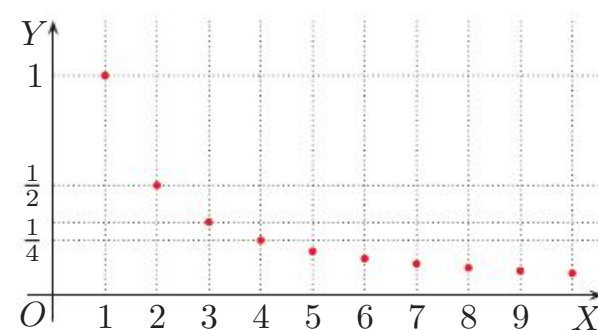
Uwaga. Zamiast „ciąg nieskończony” będziemy pisać krótko: „ciąg”.

Czasem za dziedzinę ciągu przyjmuje się zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

Kiedy mówimy o ciągach, używamy zwykle innych oznaczeń niż do opisu funkcji. I tak ciąg $a: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczamy (a_n) . Kolejne wartości funkcji a , czyli wyrazy ciągu: $a(1), a(2), a(3), \dots$, oznaczamy odpowiednio: $a_1, a_2, a_3, \dots$

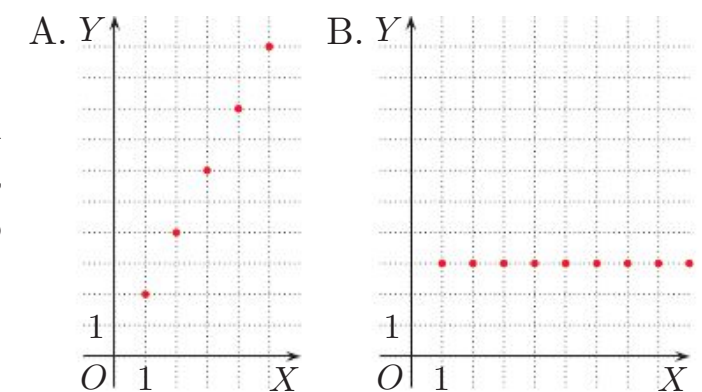
Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu odwrotności kolejnych liczb naturalnych dodatnich: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



Ćwiczenie 2

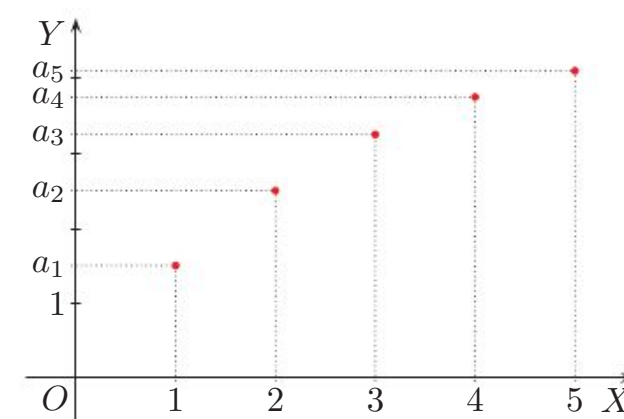
Na rysunku A przedstawiono wykres ciągu kolejnych liczb parzystych dodatnich: 2, 4, 6, 8, 10, ..., a na rysunku B – wykres ciągu stałego o wszystkich wyrazach równych 3. Podaj wyrazy siedemnasty oraz setny każdego z tych ciągów.



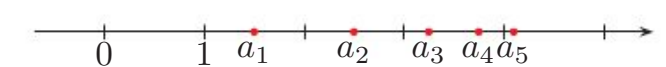
Ćwiczenie 3

Narysuj wykres ciągu:

- a) reszt z dzielenia kolejnych liczb naturalnych dodatnich przez 4,
b) naprzemiennego (o wyrazach na przemian dodatnich i ujemnych): 2, -2, 2, -2, 2, -2, ...



Czasami, zamiast rysować wykres ciągu w układzie współrzędnych (rysunek obok), wyrazy ciągu będziemy zaznaczać na osi liczbowej (rysunek poniżej).



Ćwiczenie 4

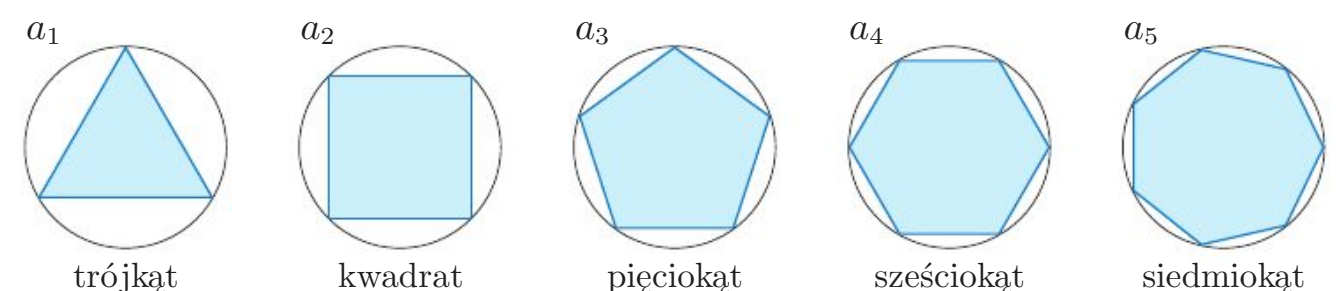
Zaznacz na osi liczbowej pięć początkowych wyrazów podanego ciągu.

- a) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots$ b) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ c) $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Ciągi, których wyrazami są liczby, nazywamy **ciągami liczbowymi**. Rozpatruje się również ciągi, których wyrazami są inne obiekty, np. figury geometryczne.

Przykład 3

Na poniższych rysunkach przedstawiono pięć początkowych wyrazów ciągu wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1.



Rozpatrujemy również **ciągi skończone**, czyli takie, których dziedziną jest zbiór skończony $\{1, 2, \dots, n\}$. Ciąg: $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy **ciągami n -wyrazowym**.

Przykład 4

W tabeli przedstawiono dwa różne ciągi siedmiowyrazowe: (a_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności następowania po sobie oraz (b_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności alfabetycznej.

Zwróć uwagę na to, że kolejność wyrazów w ciągu ma znaczenie. Jeżeli zmienimy kolejność wyrazów w ciągu, to otrzymamy nowy ciąg.

n	a_n	b_n
1	poniedziałek	czwartek
2	wtorek	niedziela
3	środa	piątek
4	czwartek	poniedziałek
5	piątek	sobota
6	sobota	środa
7	niedziela	wtorek

Zadania

1. Podaj wyrazy a_7 , a_8 , a_9 i a_{10} ciągu:

- a) kolejnych liczb nieparzystych dodatnich: 1, 3, 5, 7, 9, ...
- b) odwrotności kolejnych liczb parzystych dodatnich: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, ...
- c) kolejnych liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, ...

2. Naskicuj wykres ciągu o wyrazach:

- a) $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$
- b) $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots$
- c) $-3, 3, -3, 3, -3, 3, \dots$
- d) $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{6}, \dots$
- e) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$
- f) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$

3. Wyrazy $a_1, a_2, \dots, a_6$ ciągu są przybliżeniami dziesiętnymi liczby x do pierwszego, drugiego, ..., szóstego miejsca po przecinku. Wypisz te wyrazy.

- a) $x = \sqrt{2}$
- b) $x = \sqrt{3}$
- c) $x = \pi$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1,41421356237309505 \\ \sqrt{3} &\approx 1,73205080756887729 \\ \pi &\approx 3,14159265358979324\end{aligned}$$

Sprawdź się

4. Podaj wyrazy a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 ciągu:

- a) sześciątów kolejnych liczb naturalnych dodatnich,
- b) odwrotności kwadratów kolejnych liczb nieparzystych dodatnich.

5. Naskicuj wykres ciągu reszt z dzielenia kolejnych liczb naturalnych dodatnich przez 3.

Przypomnij sobie

Równania i nierówności

1. Rozwiąż równanie.

- a) $3x + 6 = \frac{3}{4}x$
- b) $\frac{5}{4}x + \frac{2}{3}x = 23$
- c) $2\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}x = 7$
- d) $\frac{7}{9}x + 1 = \frac{5}{6}x$
- e) $1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4}x = 2 - \frac{3}{4}x$
- f) $\frac{5}{8}x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}x + 6$

2. Rozwiąż nierówność.

- a) $6x + 8 > 3\frac{1}{2}x + 3$
- b) $4x - 5 < 8x - 3$
- c) $\frac{1}{3}x + 5 < \frac{2}{3}x$
- d) $\frac{2}{3}x + 2 \geq \frac{3}{4}x$
- e) $2\frac{3}{5}x - \frac{1}{4} \geq 3x + 1$
- f) $2\frac{1}{2}x - 3 \leq 3\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

3. Wyznacz dodatnie liczby naturalne spełniające nierówność.

- a) $3x + 2 \geq 5x - 4$
- b) $5x - 2\frac{3}{4} < 4\frac{1}{3}x + 4$
- c) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} > \frac{1}{3}x$
- d) $\frac{3}{5}x \leq \frac{5}{3}x - 8$
- e) $\frac{2}{5}x - \frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}x$
- f) $4\frac{1}{4}x - 6 > 12 - x$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{1}{4}x^2 + x = 0$
- b) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x = 0$
- c) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
- d) $16x^2 - 24x + 9 = 0$
- e) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
- f) $3x^2 + 16x + 5 = 0$

5. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 - 6x \leq 0$
- b) $2x^2 + 9x > 0$
- c) $9 - \frac{1}{4}x^2 \geq 0$
- d) $25x^2 - 144 < 0$
- e) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$
- f) $2x^2 + 9x + 4 > 0$

6. Wyznacz dodatnie liczby naturalne spełniające nierówność.

- a) $\frac{1}{2}x^2 \leq 2x$
- b) $\frac{2}{3}x^2 < 6x$
- c) $4x^2 \geq 9$
- d) $121 \geq 4x^2$
- e) $27 > \frac{3}{4}x^2$
- f) $\frac{1}{10}x^2 \geq 10$
- g) $x^2 - 9x + 14 \leq 0$
- h) $2x^2 - 3 < 5x$
- i) $x^2 + 4 > 4x$

7. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{x(x-5)}{x+1} = 0$
- b) $\frac{x(2x-3)}{4x-6} = 0$
- c) $\frac{x^2-9}{x(x+3)} = 0$

8. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+4}{x+1}$
- b) $\frac{x+4}{x-1} = \frac{2x+8}{x-2}$
- c) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{x+3}$
- d) $\frac{x+6}{x+2} = \frac{x+7}{x-1}$
- e) $\frac{2x+1}{x} = \frac{x+2}{2x+3}$
- f) $\frac{2x-5}{x-3} = \frac{x-7}{x-5}$

3.2. Sposoby określania ciągu

Ciąg można opisać słownie, podając warunki, które spełniają jego wyrazy.

Przykład 1

a) Ciąg kolejnych cyfr występujących w rozwinięciu dziesiętnym liczby π .

Jest to ciąg: 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, ...

b) Ciąg kolejnych liczb pierwszych większych od 10.

Jest to ciąg: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

Ćwiczenie 1

Wypisz siedem początkowych wyrazów ciągu kolejnych liczb naturalnych:

a) których pierwiastek jest liczbą niewymierną,

b) których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 2.

Innym sposobem określenia ciągu jest podanie wzoru na n -ty wyraz ciągu – taki wzór nazywamy **wzorem ogólnym ciągu** (zwanym też wzorem jawnym).

Przykład 2

a) Oblicz sześć początkowych wyrazów oraz wyraz a_{20} ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n+1}{n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, ..., 6 otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{2}{1} = 2, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{4}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad a_5 = \frac{6}{5}, \quad a_6 = \frac{7}{6}$$

Dla $n = 20$ mamy $a_{20} = \frac{21}{20}$.

b) Oblicz cztery początkowe wyrazy oraz wyraz a_{10} ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, 3, 4 otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}$$

Dla $n = 10$ mamy $a_{10} = \frac{10}{2^{10}} = \frac{10}{1024} = \frac{5}{512}$.

c) Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 5n^2 - n$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, 3, 4 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \cdot 1^2 - 1 = 4 & a_3 &= 5 \cdot 3^2 - 3 = 42 \\ a_2 &= 5 \cdot 2^2 - 2 = 18 & a_4 &= 5 \cdot 4^2 - 4 = 76 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz cztery początkowe wyrazy oraz wyraz a_{10} ciągu (a_n) .

$$\text{a) } a_n = \frac{n^2}{n+1} \quad \text{b) } a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad \text{c) } a_n = \frac{n(n+2)}{3^n} \quad \text{d) } a_n = n^3 - n^2$$

Przykład 3

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = (-1)^n \cdot n^2$.

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^1 \cdot 1^2 = -1 & a_3 &= (-1)^3 \cdot 3^2 = -9 \\ a_2 &= (-1)^2 \cdot 2^2 = 4 & a_4 &= (-1)^4 \cdot 4^2 = 16 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz następujące wyrazy ciągu (a_n) : a_1 , a_2 , a_3 , a_4 i a_{10} .

$$\text{a) } a_n = (-1)^{n+1} \quad \text{c) } a_n = (-1)^n \cdot n \quad \text{e) } a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

$$\text{b) } a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n \quad \text{d) } a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1} \quad \text{f) } a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$$

Czasem na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu można odgadnąć regułę, według której mogły one powstać, co pozwala zaproponować wzór ogólny tego ciągu.

Przykład 4

Kolejne wyrazy ciągu	Przykładowy wzór ogólny ciągu
3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	$a_n = 2n + 1$
4, 7, 12, 19, 28, ...	$a_n = n^2 + 3$
-3, 3, -3, 3, -3, ...	$a_n = (-1)^n \cdot 3$

Ćwiczenie 4

Zaproponuj wzór na n -ty wyraz ciągu.

$$\text{a) } 1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots \quad \text{c) } \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \dots$$

$$\text{b) } 0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots \quad \text{d) } \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \frac{11}{36}, \dots$$

Zauważmy, że na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu możemy podać różne wzory na n -ty wyraz ciągu. Na przykład liczby -1 , 0 i 1 są trzema początkowymi wyrazami ciągów określonych za pomocą wzorów:

$$a_n = n - 2, \quad b_n = (n - 2)^3, \quad c_n = 1 - |n - 3|$$

Następne wyrazy tych ciągów nie są równe (sprawdź).

Przykład 5

Które wyrazy ciągu określonego za pomocą wzoru $a_n = 25 - n^2$ są równe zeru?

$$25 - n^2 = 0$$

$$n = -5 \text{ lub } n = 5$$

Z założenia $n \in \mathbb{N}_+$, zatem jedynym wyrazem ciągu (a_n) równym zeru jest a_5 .

Przykład 6

a) Które wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = -2n + 11$ są dodatnie?

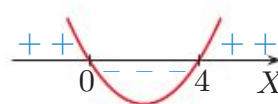
Nierówność $-2n + 11 > 0$ zachodzi dla $n < 5\frac{1}{2}$. Ponieważ $n \in \mathbb{N}_+$, więc $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Dodatnie wyrazy ciągu (a_n) to a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 .

b) Które wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = n(n - 4)$ są ujemne?

Należy rozwiązać nierówność $n(n - 4) < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.

Równanie $n(n - 4) = 0$ spełniają liczby $n = 0$ i $n = 4$. Szkicujemy odpowiednią parabolę i odczytujemy rozwiązanie nierówności: $n \in (0, 4)$. Ponieważ $n \in \mathbb{N}_+$, więc $n \in \{1, 2, 3\}$.



Ujemne wyrazy ciągu (a_n) to a_1, a_2 i a_3 .

Ćwiczenie 5

Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero? Które wyrazy tego ciągu są dodatnie?

a) $a_n = 12 - 3n$ b) $a_n = 14 - 3n$ c) $a_n = n^2 - 4$ d) $a_n = 40 - n^2$

Ćwiczenie 6

Ile jest ujemnych wyrazów ciągu (a_n) ?

a) $a_n = 2n - 9$ b) $a_n = \frac{1}{2}n - 7$ c) $a_n = n^2 - 9n$ d) $a_n = n^2 - n - 20$

Zadania

1. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

a) $a_n = 4n - 2$ d) $a_n = 2^n - n$ g) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
 b) $a_n = 2n^2 - n$ e) $a_n = (-2)^n + n$ h) $a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$
 c) $a_n = 3n - n^2$ f) $a_n = (-1)^{n+1}n^3$ i) $a_n = (-1)^{n+1} + n$

2. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ b) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

3. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero?

a) $a_n = n^2 - 9$ c) $a_n = n^2(n - 3)$ e) $a_n = n^2 - 6n - 7$
 b) $a_n = (3n - 6)^2$ d) $a_n = n^2 - 6n + 8$ f) $a_n = n(n^2 - 3n + 4)$

4. Które wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie?

a) $a_n = (n - 1)(9 - n)$ b) $a_n = 2n^2 - 25n + 12$ c) $a_n = 250 - n^3$

5. Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne?

a) $a_n = n^2 - 5n - 10$ b) $a_n = n^2 - 11n + 10$ c) $a_n = 3n^2 - 10n + 8$

6. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe 1?

a) $a_n = n^2 - 2n - 14$ b) $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$ c) $a_n = \frac{6n+3}{n+3} - 2$

7. Dla jakich n zachodzi nierówność $a_n < b_n$?

a) $a_n = n(n + 5)$, $b_n = n^2 + 34$ b) $a_n = n^2 - 4n$, $b_n = 5n - 8$

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej l (rysunek obok). Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

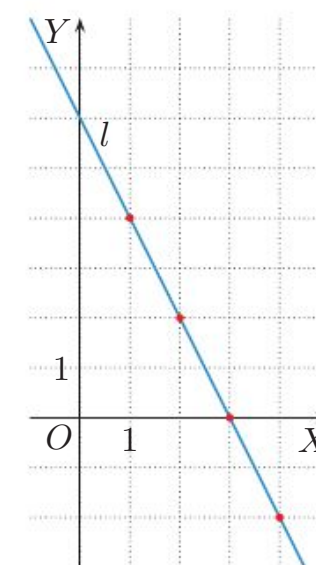
Równanie prostej l zapisujemy w postaci:

$$y = ax + b$$

Punkty $(1, 4)$ i $(3, 0)$ należą do tej prostej. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$

i otrzymujemy $a = -2$ i $b = 6$. Zatem $y = -2x + 6$, czyli wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = -2n + 6$.



Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , którego wykres zawiera się w prostej przechodzącej przez punkty $(2, 2)$ i $(6, 0)$.

Sprawdź się

9. Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

a) $a_n = 6 - \frac{3}{2}n$ c) $a_n = (-1)^n(2n + 1)$ e) $a_n = |n - 5| - 3$
 b) $a_n = n^2 - 2n$ d) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n + 1$ f) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

D 10. Uzasadnij, że ciąg (a_n) ma dwa wyrazy równe zero.

a) $a_n = n^2 - 7n + 12$ b) $a_n = n^2 - 14n + 33$ c) $a_n = |n - 4| - 2$

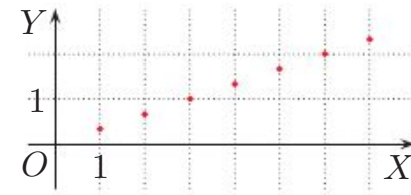
11. Ile wyrazów dodatnich ma ciąg (a_n) ?

a) $a_n = -3n - 23$ b) $a_n = 7n - n^2$ c) $a_n = 18 + 7n - n^2$

3.3. Ciągi monotoniczne

Przykład 1

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{3}$ (wykres obok) to: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.



Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami rosnącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} > a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n > 0$).

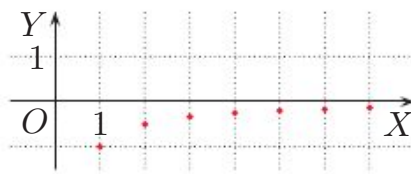
Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m > a_n$.

Przykład 2

Ciąg kolejnych liczb naturalnych dodatnich $a_n = n$ oraz ciąg kwadratów kolejnych liczb naturalnych dodatnich $b_n = n^2$ są ciągami rosnącymi.

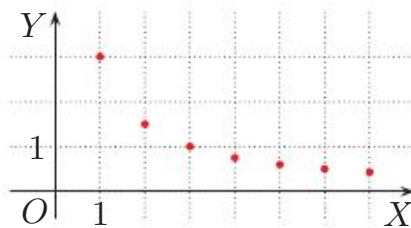
Przykład 3

Ciąg $a_n = -\frac{1}{n}$ (wykres obok) jest ciągiem rosnącym o wszystkich wyrazach ujemnych. Jego kolejne wyrazy to: $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \dots$



Przykład 4

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{3}{n}$ (wykres obok) to: $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest malejący.



Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami malejącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} < a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n < 0$).

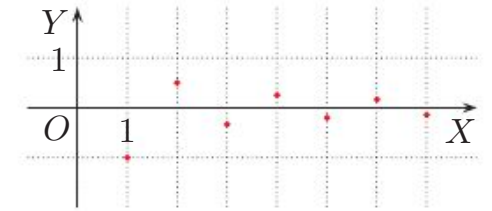
Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest malejący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m < a_n$.

Ćwiczenie 1

Podaj przykład ciągu malejącego o wszystkich wyrazach większych od 2.

Przykład 5

Uzasadnij, że ciąg $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ (wykres obok) nie jest ani rosnący, ani malejący.



Kolejne wyrazy ciągu (a_n) to:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Aby stwierdzić, że ciąg ten nie jest ani rosnący, ani malejący, wystarczy zauważyć, że na przykład drugi wyraz jest większy od pierwszego ($a_2 > a_1$), natomiast trzeci wyraz jest mniejszy od drugiego ($a_3 < a_2$).

Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest ani rosnący, ani malejący.

- a) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$ b) $-1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -5, -3, -3\frac{1}{2}, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg rosnący lub malejący?

- a) $a_n = (n - 3)^2$ b) $a_n = -n^2 + 4n$ c) $a_n = n^2 - 7n + 5$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest rosnący lub malejący, nie wystarczy obliczenie kilku jego początkowych wyrazów. Należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 6

- a) Wykaż, że ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 6n - 2$ jest rosnący.

Wyznaczamy wyraz a_{n+1} :

$$a_{n+1} = 6(n + 1) - 2 = 6n + 6 - 2 = 6n + 4$$

Aby wyznaczyć wyraz a_{n+1} , do wzoru ogólnego ciągu wstawiamy $n + 1$ w miejsce n .

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = 6n + 4 - (6n - 2) = 6n + 4 - 6n + 2 = 6$$

Zatem dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $a_{n+1} - a_n > 0$, czyli ciąg (a_n) jest rosnący.

- b) Wykaż, że ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = -3n + 8$ jest malejący.

Wyznaczamy wyraz a_{n+1} :

$$a_{n+1} = -3(n + 1) + 8 = -3n - 3 + 8 = -3n + 5$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = -3n + 5 - (-3n + 8) = -3n + 5 + 3n - 8 = -3$$

Zatem dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $a_{n+1} - a_n < 0$, czyli ciąg (a_n) jest malejący.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest rosnący lub malejący.

- a) $a_n = 4n + 7$ b) $a_n = -3n + 5$ c) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}$

D Przykład 7

Wykaż, że ciąg $a_n = n^2 + 4n$ jest ciągiem rosnącym.

Wyznaczamy wyraz a_{n+1} :

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 = n^2 + 6n + 5$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 6n + 5 - (n^2 + 4n) = n^2 + 6n + 5 - n^2 - 4n = 2n + 5$$

Zatem dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $a_{n+1} - a_n > 0$, czyli ciąg (a_n) jest rosnący.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest rosnący lub malejący.

- a) $a_n = n^2 + 6n$ b) $a_n = 2n^2 + n$ c) $a_n = -8n - n^2$

Ciągami monotonicznymi, oprócz ciągów rosnących i ciągów malejących, są ciągi stałe, ciągi niemalejące i ciągi nierosnące.

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **niemalejącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} \geq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \geq 0$).

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **nierosnącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ jest spełniona nierówność $a_{n+1} \leq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \leq 0$).

Uwaga. Każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym, a każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym.

Ćwiczenie 6

Jakie liczby można wstawić w miejsce ?, aby otrzymać ciąg niemalejący?

- a) 1, 2, 3, 4, ?, ?, 4, 5, 6, ... b) 1, $\frac{3}{2}$, ?, 2, ?, ?, 3, 3, 3, ...

Ćwiczenie 7

Wypisz osiem początkowych wyrazów dowolnego nierosnącego ciągu (a_n) , dla którego:

- a) $a_2 = a_3 = 2$, $a_5 = 1$, b) $a_4 = a_6 = -1$, $a_7 = -2$.

Zadania

1. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu o podanym wzorze ogólnym.

- a) $a_n = 3n - 4$ c) $a_n = n^2 - 1$ e) $a_n = \frac{3+n}{n}$ g) $a_n = \frac{3n-4}{2n+1}$
b) $a_n = -2n + 6$ d) $a_n = 2n - n^2$ f) $a_n = \frac{2n}{n+5}$ h) $a_n = \frac{2-3n}{4n-5}$

D 2. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $a_n = 2n - 9$ b) $a_n = -3n + 6$ c) $a_n = \frac{1}{4}n + 1$ d) $a_n = \sqrt{2}n - 1$

D 3. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $a_n = n^2 - 2n$ b) $a_n = 1 - n^2$ c) $a_n = 4n^2 + n$ d) $a_n = \frac{1}{2}n^2 + 2n$

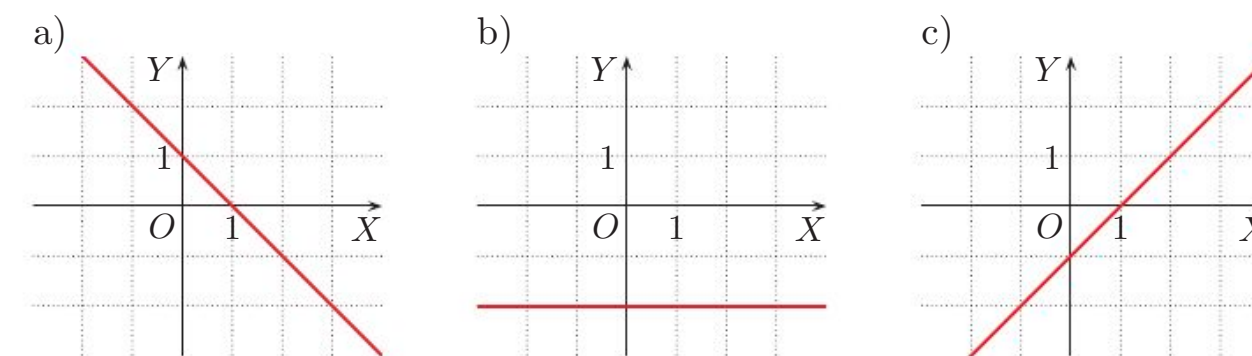
D 4. Dany jest ciąg (a_n) o wszystkich wyrazach dodatnich. Uzasadnij, że:

- a) jeśli $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, to ciąg (a_n) jest rosnący,
b) jeśli $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, to ciąg (a_n) jest malejący.

5. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

- a) $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n$ c) $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$
b) $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d) $a_n = (\sqrt{2} - 1)^n$

6. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej przedstawionej na rysunku. Określ monotoniczność tego ciągu.



Sprawdź się

D 7. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Uzasadnij, że ciąg ten nie jest monotoniczny.

- a) $a_n = (2 - n)^2$ b) $a_n = n^2 - 6n$ c) $a_n = |n - 4|$ d) $a_n = |n^2 - 4n|$

D 8. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $a_n = 4n - 2$ c) $a_n = n^2 - 8$ e) $a_n = n^2 + 3n$
b) $a_n = -n + 7$ d) $a_n = 3 - n^2$ f) $a_n = -n^2 - 2n$

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

Ciąg (a_n) możemy określić, podając jego pierwszy wyraz a_1 (lub kilka początkowych wyrazów) oraz wzór na wyraz a_{n+1} wyrażony za pomocą poprzedniego wyrazu (lub kilku poprzednich). Taki sposób określenia ciągu nazywamy **rekurencyjnym**.

Przykład 1

Oblicz wyrazy a_2, a_3 i a_4 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Podstawiamy za n kolejno 1, 2, 3 i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 3 = 10 + 3 = 13 \\ a_3 &= a_2 + 3 = 13 + 3 = 16 \\ a_4 &= a_3 + 3 = 16 + 3 = 19 \end{aligned}$$

Przykład 2

Oblicz wyrazy a_2, a_3 i a_4 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Podstawiamy za n kolejno 1, 2, 3 i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2 \\ a_3 &= a_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5 \\ a_4 &= a_3^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Poniżej podano rekurencyjne określenie ciągu (a_n) i obliczono wyrazy a_2 i a_3 . Oblicz wyrazy a_4, a_5 i a_6 .

a)	$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a_2 &= a_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0 \\ a_3 &= a_2^2 - 1 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$
b)	$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \end{aligned}$
c)	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + (-1)^1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ a_3 &= 2a_2 + (-1)^2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \end{aligned}$

Przykład 3

Oblicz wyrazy a_2, a_3 i a_4 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Obliczamy kolejno:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ a_3 &= 2a_2 + 2 = 2 \cdot 3 + 2 = 8 \\ a_4 &= 2a_3 + 3 = 2 \cdot 8 + 3 = 19 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz wyrazy $a_2, a_3, \dots, a_6$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

a) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

Przykład 4

Oblicz wyrazy a_3, a_4 i a_5 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Obliczamy kolejno:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (z wyjątkiem pierwszego i drugiego) jest sumą dwóch poprzednich wyrazów. Jego dziesięć początkowych wyrazów to:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

Ciąg ten znany jest jako **ciąg Fibonacciego** [czyt. fibonacczkiego]. Nazwano go tak na cześć Leonarda z Pizy (ok. 1180–1250), zwanego Fibonaccim.

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_3, a_4, a_5 i a_6 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

a) $\begin{cases} a_1 = 0, a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - n \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

D Przykład 5

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + 3n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$ i określamy jej znak:

$$a_{n+1} - a_n = a_n + 3n - a_n = 3n > 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_+$$

Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

D Przykład 6

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - n^2 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$ i określamy jej znak:

$$a_{n+1} - a_n = a_n - n^2 - a_n = -n^2 < 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_+$$

Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 8 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n + 4n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = a_n - 2^n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

Podanie wzoru ogólnego ciągu, który jest określony rekurencyjnie, może być trudne. Natomiast jeśli znamy wzór ogólny ciągu, to ciąg ten możemy zdefiniować rekurencyjnie.

Przykład 7

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n(n+1)$. Określ ten ciąg rekurencyjnie.

Wyznaczamy wyrazy $a_1 = 1 \cdot 2 = 2$ oraz $a_{n+1} = (n+1)(n+2)$.

Ciąg możemy określić rekurencyjnie na podstawie różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2n + 2$$

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 2$$

Stąd otrzymujemy rekurencyjne określenie ciągu (a_n) :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Zadania

1. Oblicz wyrazy a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu (a_n) . Ile jest liczb dodatnich wśród dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = 2a_n + 10, \quad n \geq 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (-2)^n, \quad n \geq 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n - 2^n, \quad n \geq 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + (n-1)^2, \quad n \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

2. Ile jest liczb ujemnych wśród sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) ?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 4a_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2 - na_n, \quad n \geq 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - na_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

3. Oblicz wyraz a_5 ciągu (a_n) .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad n \geq 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} a_1 = 32, \quad a_2 = 64 \\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad n \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

4. O ciągu (a_n) wiadomo, że $a_2 + a_5 = 9$. Oblicz x . Czy ciąg (a_n) jest monotoniczny?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = a_n + 2n, \quad n \geq 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

Sprawdź się

5. Oblicz wyrazy a_3 , a_4 , a_5 i a_6 ciągu (a_n) .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2n, \quad n \geq 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = na_n - n, \quad n \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

6. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek $a_{n+1} = a_n^2 + na_n$. Oblicz a_4 w przypadku, gdy: a) $a_1 = 0$, b) $a_1 = 1$, c) $a_1 = 2$, d) $a_1 = -2$.

Ciąg Fibonacciego

Początkowe dwa wyrazy ciągu Fibonacciego są równe 1, a każdy następny wyraz jest sumą dwóch poprzednich wyrazów:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 ...

Złota liczba a ciąg Fibonacciego

Niech ciąg (f_n) będzie ciągiem Fibonacciego. Rozpatrzmy kolejne ilorazy $\frac{f_{n+1}}{f_n}$.

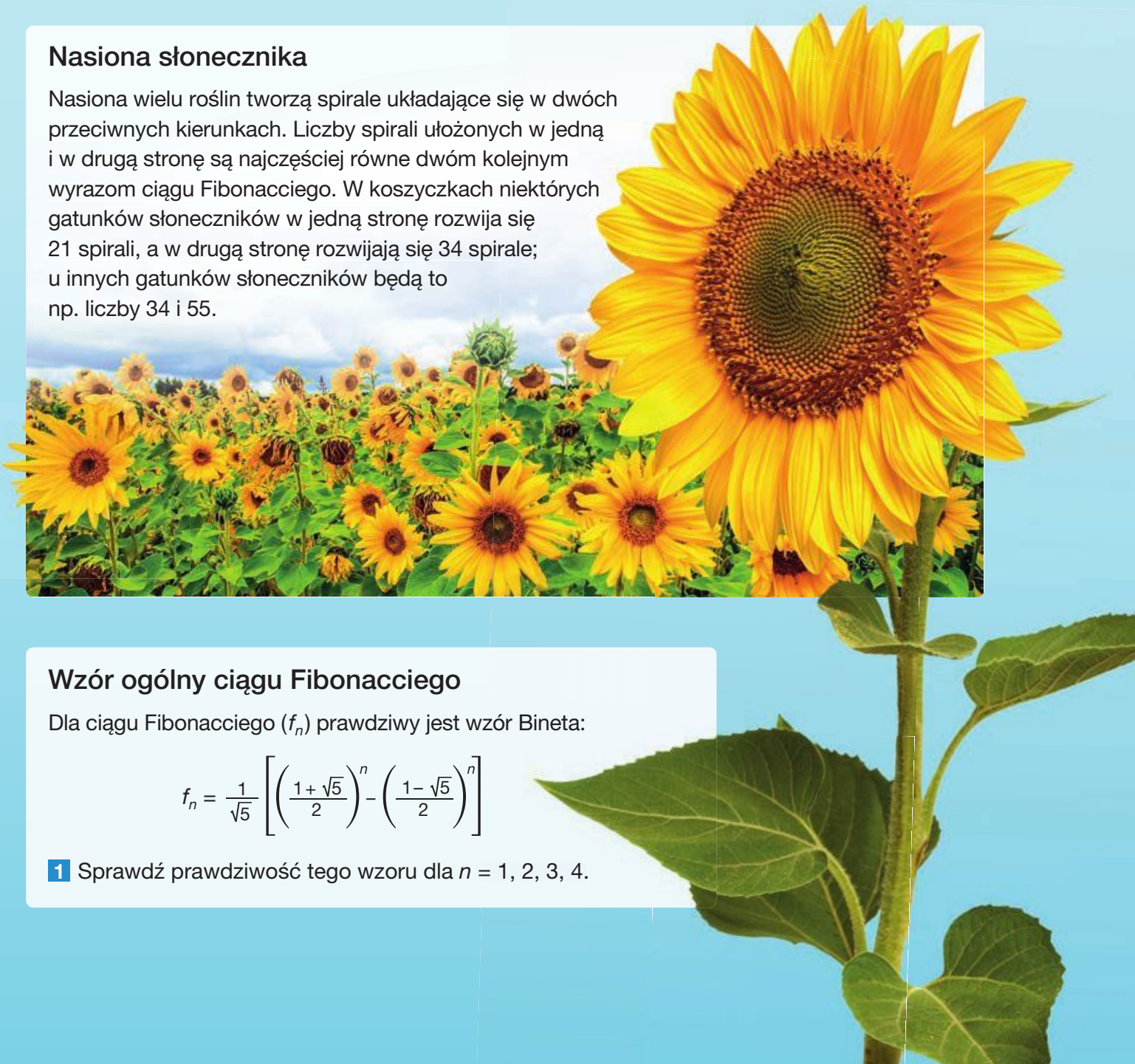
$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{5}{3} = 1,(6); \quad \frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{13}{8} = 1,625; \quad \frac{21}{13} = 1,61538...$$

Wartości tych ułamków są coraz bliższe złotej liczbie:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$

Nasiona słonecznika

Nasiona wielu roślin tworzą spirale układające się w dwóch przeciwnych kierunkach. Liczby spirali ułożonych w jedną i w drugą stronę są najczęściej równe dwóm kolejnym wyrazom ciągu Fibonacciego. W koszyczkach niektórych gatunków słoneczników w jedną stronę rozwija się 21 spirali, a w drugą stronę rozwijają się 34 spirale; u innych gatunków słoneczników będą to np. liczby 34 i 55.



Wzór ogólny ciągu Fibonacciego

Dla ciągu Fibonacciego (f_n) prawdziwy jest wzór Bineta:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

1 Sprawdź prawdziwość tego wzoru dla $n = 1, 2, 3, 4$.

3.5. Ciąg arytmetyczny (1)

Przykład 1

Pani Jola postanowiła kupić sprzęt narciarski za 2700 zł. W tym celu w pierwszym miesiącu odłożyła 500 zł, a w każdym następnym odkładała po 200 zł. W tabeli podano stan oszczędności pani Joli w kolejnych miesiącach.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
500	700	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2300	2500	2700

Zauważ, że każda z wymienionych w tabeli kwot (oprócz pierwszej) jest większa od poprzedniej o tę samą stałą wartość. Wymienione liczby stanowią przykład ciągu arytmetycznego.

Przykład 2

Ciąg kolejnych liczb nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9, ... jest ciągiem arytmetycznym. Każdy następny wyraz ciągu jest większy od poprzedniego o 2.

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) o co najmniej trzech wyrazach nazywamy **ciągami arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}_+$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 1

Podaj różnicę ciągu arytmetycznego i wypisz jego cztery następne wyrazy.

- a) 3, 12, 21, 30, ... b) $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, \dots$ c) 7, 3, -1, -5, ...

Przykład 3

Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = 6$ i $r = 5$.

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \\ a_2 &= 6 + 5 = 11 \\ a_3 &= 6 + 2 \cdot 5 = 16 \\ a_4 &= 6 + 3 \cdot 5 = 21 \\ &\vdots \\ a_{11} &= 6 + 10 \cdot 5 = 56 \end{aligned}$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu arytmetycznego, obliczamy $a_1 + (11 - 1)r$.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład 4

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego: 1, 11, 21, 31, 41, ... Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = a_2 - a_1 = 11 - 1 = 10$. Wyznaczamy wzór ogólny ciągu:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1) \cdot 10 = 10n - 9$$

Obliczamy dwudziesty wyraz: $a_{20} = 10 \cdot 20 - 9 = 191$.

Ćwiczenie 2

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

- a) 2, 4, 6, 8, 10, ... c) 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...
b) $4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6, \dots$ d) $2, 1\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \dots$

Przykład 5

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = 2$ i $a_6 = 17$.

Niech r będzie różnicą tego ciągu. Wówczas:

$$a_6 = a_1 + (6 - 1)r$$

$$2 + 5r = 17$$

$$r = 3$$

Wzór ogólny ciągu: $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, w którym:

- a) $a_1 = 4, a_4 = 10$, b) $a_1 = -5, a_6 = 20$, c) $a_1 = 5, a_{10} = 2\frac{3}{4}$.

Twierdzenie

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:

- **rosnący**, gdy $r > 0$, ■ **malejący**, gdy $r < 0$, ■ **stały**, gdy $r = 0$.

Ćwiczenie 4

Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego i określ jego monotoniczność. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

- a) 9, 3, -3, -9, -15, -21, ... b) $1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 4, \dots$ c) 2, 2, 2, 2, ...

Ćwiczenie 5

Dla jakiej wartości parametru k liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, gdy:

$$b - a = c - b$$

- a) $a = 3, b = k + 1, c = 3k - 6$ b) $a = 1, b = 4k + 2, c = 2k - 5$

Przykład 6

Jaką liczbę należy wstawić między liczby a i b , aby otrzymany w ten sposób ciąg był arytmetyczny?

Oznaczmy szukaną liczbę przez x . Rozpatrujemy więc ciąg: a, x, b . Wówczas:

$$x - a = b - x$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Szukaną liczbą jest więc **średnia arytmetyczna** liczb a i b . Otrzymujemy zatem ciąg: $a, \frac{a+b}{2}, b$.

Twierdzenie

W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiadnych:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Ćwiczenie 6

Podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x .

- a) 9, x , 37 b) 4, x , -8 c) $\frac{1}{2}, x, \frac{1}{3}$

Zadania

1. Oblicz n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Określ monotoniczność tego ciągu.

- a) $a_1 = -5, r = 3, n = 7$ c) $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}, n = 9$
b) $a_1 = 4, r = -4, n = 11$ d) $a_1 = 2, r = 0,1, n = 15$

2. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .

- a) $a_1 = 6, a_3 = 20$ b) $a_1 = -4, a_4 = 5$ c) $a_1 = 9, a_6 = 6\frac{1}{2}$

3. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
- a) $r = 2, a_3 = 5$ b) $r = -3, a_5 = 0$ c) $r = \frac{1}{2}, a_7 = -4$
4. Wyznacz liczby a, b tak, aby ciąg: $1, a, b, 10$ był arytmetyczny.
5. Między liczby 1 i 25 wstaw n liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny.
- a) $n = 3$ b) $n = 5$ c) $n = 7$
6. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_{12} .
- a) $\begin{cases} a_6 = 20 \\ a_{10} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_3 = -9 \\ a_{15} = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_5 = 4 \\ a_{21} = 8 \end{cases}$
7. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.
- a) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 22 \\ a_1 + a_6 = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 + a_5 = 16 \\ 2a_2 + 3a_4 = 42 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_5 + a_6 = 16 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 11 \\ a_7 - a_3 = 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_3 + a_5 = 4 \\ 4a_2 - 2a_4 = 8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 - a_2 + a_4 = 2 \\ a_3 + a_5 = 8 \end{cases}$
8. Podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz x .
- a) $x + 1, 2x + 5, 4x + 7$ b) $-2, x^2 - 6, x^2 - 1$
9. Suma drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 2, a różnica szóstego i trzeciego wyrazu jest równa 9. Który wyraz tego ciągu jest równy 40?
10. Cztery liczby tworzą ciąg arytmetyczny, którego różnica jest równa 3, a iloczyn wyrazów trzeciego i czwartego jest równy 70. Wyznacz te liczby.

Sprawdź się

11. a) Liczby $3, x, y, 15$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz liczby x i y .
b) Liczby $4, x, y, z, 50$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz liczby x, y i z .
12. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_6 .
- a) $\begin{cases} a_3 = 5 \\ a_8 = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_5 = 0 \\ a_8 = -12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_{10} = -1 \\ a_{16} = 2 \end{cases}$
13. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego poniższe warunki. Który wyraz tego ciągu jest równy 0?
- a) $\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_4 = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 + a_2 = 5 \\ a_1 + a_3 = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 12 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 27 \end{cases}$

3.6. Ciąg arytmetyczny (2)

Przykład 1

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg arytmetyczny?

a) $a_n = n^2 + n + 1$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

$$a_4 = 4^2 + 4 + 1 = 21$$

Aby wykazać, że ciąg nie jest arytmetyczny, wystarczy wskazać wyrazy a_k, a_{k+1} oraz a_n, a_{n+1} takie, że $a_{k+1} - a_k \neq a_{n+1} - a_n$.

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$ oraz $a_3 - a_2 = 13 - 7 = 6$, zatem $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

b) $a_n = (n - 2)^3 + 2$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = (1 - 2)^3 + 2 = 1$$

$$a_3 = (3 - 2)^3 + 2 = 3$$

$$a_2 = (2 - 2)^3 + 2 = 2$$

$$a_4 = (4 - 2)^3 + 2 = 10$$

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1$, ale $a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że ciąg o podanych początkowych wyrazach nie jest arytmetyczny.

a) $2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, \dots$

b) $1, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -5, -6\frac{1}{2}, \dots$

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest arytmetyczny.

a) $a_n = n^2 - 4$

b) $a_n = 4n - n^2$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny, nie wystarczy sprawdzić różnicy między kilkoma początkowymi wyrazami tego ciągu. Należy wykazać, że różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

D Przykład 2

Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{3n+2}{2}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+2}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3n+5}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Różnica ta jest stała dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 6n - 2$ b) $a_n = 10n + 4$ c) $a_n = -2n + 8$ d) $a_n = \frac{2n-5}{3}$

Przykład 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego:

$$-3, -1, 1, 3, 5, \dots$$

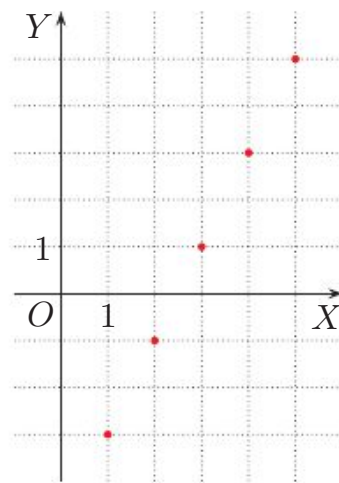
Narysuj wykres tego ciągu.

Różnica tego ciągu jest równa 2.

Wyznaczamy wzór ogólny:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r = -3 + (n-1) \cdot 2 = \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

Zauważmy, że wykres tego ciągu jest zawarty w prostej $y = 2x - 5$.



Ćwiczenie 4

a) Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego: 6, 4, 2, 0, -2, ... Naszkicuj jego wykres i podaj równanie prostej, w której się on zawiera.

b) Wykres ciągu arytmetycznego jest zawarty w prostej $y = 3x - 2$. Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu oraz jego wzór ogólny.

c) Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wykres ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 2$.

Zadania

- D 1. Wykaż, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.
a) $a_n = n^2 - 3n$ b) $a_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ c) $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)(7-n)$

2. Dany jest ciąg $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n$. Oblicz kilka początkowych wyrazów tego ciągu. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

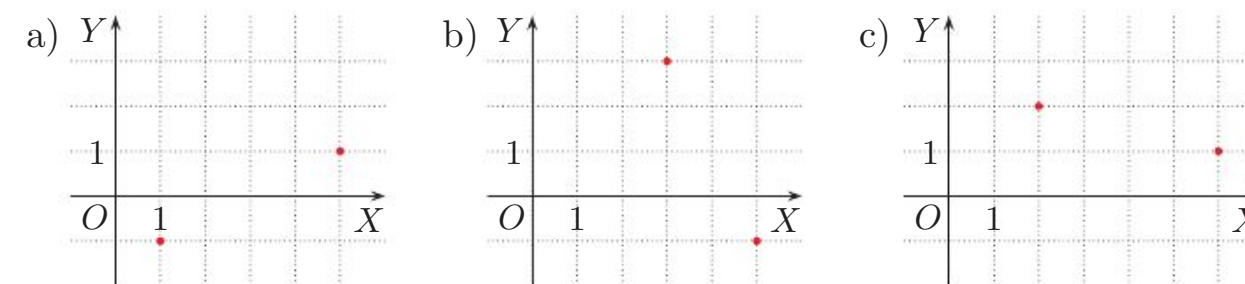
- D 3. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 3n - 1$ c) $a_n = \frac{n+2}{6}$ e) $a_n = \frac{5n+1}{2}$
b) $a_n = 4 - 2n$ d) $a_n = \frac{1}{2}(n-7)$ f) $a_n = \frac{9n^2-4}{3n+2}$

4. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w podanej prostej. Podaj wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

a) $y = 5x - 4$ b) $y = -3x + 1$ c) $y = \sqrt{3}x - 2$

5. Na rysunku przedstawiono dwa punkty należące do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od zera?



- D 6. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Uzasadnij, że jest on arytmetyczny i rosnący. Zapisz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego dziesiąty wyraz.

a) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$ dla $n \geq 1$ b) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$ dla $n \geq 1$

- D 7. Dana jest funkcja kwadratowa f . Wykaż, że ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

8. a) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Oblicz obwód tego trójkąta.

b) Długości boków trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna ma długość 10, tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

- D 9. Wykaż, że długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5.

Sprawdź się

10. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 4n - 7$ b) $a_n = 1 - 2n$ c) $a_n = \frac{1}{2}n + 3$

11. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = n^2 - 1$ b) $a_n = 8 - n^3$ c) $a_n = (-1)^{n+1}n$

12. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wykres ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Który wyraz ciągu (a_n) jest równy 0?

a) $a_1 = 5, r = 2$ b) $a_6 = 8, r = -\frac{1}{3}$ c) $a_{10} = -4, r = 1$

Przykład 5

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1.

Liczby naturalne, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1, mają postać $6n + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Warunki zadania spełniają zatem liczby:

$$6 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 6 \cdot 1 + 1 = 7, \quad 6 \cdot 2 + 1 = 13, \quad \dots, \quad 6 \cdot 16 + 1 = 97$$

Tworzą one 17-wyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 6$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ostatnim wyrazie $a_{17} = 97$. Zatem:

$$S_{17} = \frac{1+97}{2} \cdot 17 = 49 \cdot 17 = 833$$

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 5.

Ćwiczenie 6

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 200, których reszta z dzielenia:

- a) przez 4 jest równa 1, b) przez 3 jest równa 2.

Zadania

- Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
a) $a_1 = -2$ i $r = 3$ b) $a_1 = 4$ i $r = -5$ c) $a_1 = 1,5$ i $r = -0,1$
- Oblicz wyrazy a_1 i a_{10} oraz sumę S_{10} ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_4 = 6$ i $a_8 = 14$ b) $a_6 = 1$ i $a_8 = 3$ c) $a_2 = 12$ i $a_4 = 0$
- Ustal, ile wyrazów ma podany skończony ciąg arytmetyczny, oraz oblicz ich sumę.
a) 4, 7, 10, ..., 34 b) $\frac{1}{3}$, 1, $1\frac{2}{3}$, ..., $9\frac{2}{3}$ c) -3, -5, -7, ..., -41
- a) Oblicz sumę wszystkich liczb parzystych zawartych między 13 a 2027.
b) Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych nieparzystych dodatnich.
- Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich podzielnych przez:
a) 3, b) 5, c) 7.
- Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, które:
a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe, c) są mniejsze od 500.

- Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, których reszta z dzielenia:
a) przez 5 jest równa 1 i które są mniejsze od 100,
b) przez 4 jest równa 3 i które są większe od 10 oraz mniejsze od 80,
c) przez 6 jest równa 4 i które są większe od 30 oraz mniejsze od 120.

- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich podzielnych przez 4 lub 5.

Najmniejszą liczbą dwucyfrową dodatnią podzielną przez 4 jest liczba $12 = 3 \cdot 4$, a największą taką liczbą jest $96 = 24 \cdot 4$. Są 22 takie liczby. Ich suma $S_1 = \frac{12+96}{2} \cdot 22 = 1188$.

Najmniejszą liczbą dwucyfrową dodatnią podzielną przez 5 jest liczba $10 = 2 \cdot 5$, a największą taką liczbą jest $95 = 19 \cdot 5$. Jest 18 takich liczb. Ich suma $S_2 = \frac{10+95}{2} \cdot 18 = 945$.

Rozpatrzmy liczby dwucyfrowe dodatnie podzielne przez 4 i 5 – są to liczby podzielne przez 20. Ich suma $S_3 = 20 + 40 + 60 + 80 = 200$.

Suma S wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest równa $S = S_1 + S_2 - S_3$ (uzasadnij, dlaczego).

Zatem $S = 1188 + 945 - 200 = 1933$.

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1001, które są podzielne przez: a) 2 lub 3, b) 3 lub 5, c) 5 lub 9.

Sprawdź się

- Oblicz sumy S_9 i S_{18} podanego ciągu arytmetycznego.
a) 1, 3, 5, 7, ... b) 5, 2, -1, -4, ... c) $-\frac{1}{2}$, 1, $\frac{5}{2}$, 4, ...
- Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
a) $a_1 = 23$, $r = -2$ b) $a_1 = -5$, $r = 4$ c) $a_1 = 2,5$, $r = -0,2$
- Oblicz sumę, której składnikami są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.
a) $7 + 11 + 15 + \dots + 47 + 51$ c) $-5 - 7 - 9 - \dots - 29 - 31$
b) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \dots + 99\frac{1}{2} + 100$ d) $-18 - 15 - 12 - \dots + 15 + 18$
- Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa:
a) 3, b) 4, c) 3 lub 4.

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (2)

Przykład 1

Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: 5, 8, 11, ... należy dodać, aby otrzymać sumę 185?

W danym ciągu mamy: $a_1 = 5$, $r = 3$, $S_n = 185$, zatem:

$$\begin{aligned}\frac{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n &= 185 / : 2 \\ 3n^2 + 7n &= 370 \\ 3n^2 + 7n - 370 &= 0 \\ \Delta &= 4489, \sqrt{\Delta} = 67 \\ n_1 &= \frac{-7-67}{6} \notin \mathbb{N}_+, \quad n_2 = \frac{-7+67}{6} = 10\end{aligned}$$

Należy dodać 10 początkowych wyrazów.

Ćwiczenie 1

Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: 3, 5, 7, 9, ... należy dodać, aby otrzymać sumę: a) 255, b) 1023?

Ćwiczenie 2

Ile co najmniej początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) należy dodać, aby otrzymać sumę większą od S ?

a) $a_n = 4n - 2$, $S = 300$ b) $a_n = 6n - 3$, $S = 750$

D Przykład 2

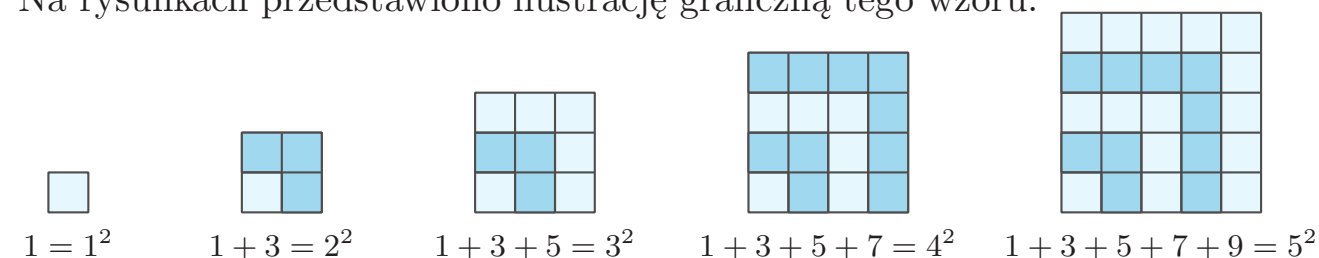
Uzasadnij wzór na sumę n początkowych liczb nieparzystych dodatnich:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $a_n = 2n - 1$. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2$$

Na rysunkach przedstawiono ilustrację graficzną tego wzoru.



D Ćwiczenie 3

Uzasadnij wzór $n + 2n + 3n + \dots + n^2 = \frac{n^3 + n^2}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.

Zadania

- Ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać sumę 546?
a) 6, 8, 10, ... b) 13, 17, 21, ... c) -24, -22, -20, ...
- Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r . Wyznacz największą wartość n , dla której $S_n < 100$.
a) $a_1 = 4$, $r = 8$ b) $a_1 = -5$, $r = 5$ c) $a_1 = 1$, $r = \sqrt{2}$
- Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 4 jest równa 260. Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu.
- Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 40, a suma pierwszego i drugiego wyrazu jest równa 16. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?
- Ciąg arytmetyczny składa się z dziesięciu wyrazów. Suma wyrazów skrajnych jest równa 42, a suma trzech ostatnich wyrazów jest równa 105. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu oraz sumę wszystkich jego wyrazów.
- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
a) $a_n = \frac{5 + 10 + 15 + \dots + 5n}{n + 1}$ b) $a_n = \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{-1 - n}$
- Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbb{N}_+$.
a) $6 + 12 + 18 + \dots + 6n = 3n(n + 1)$
b) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = n(3n + 1)$

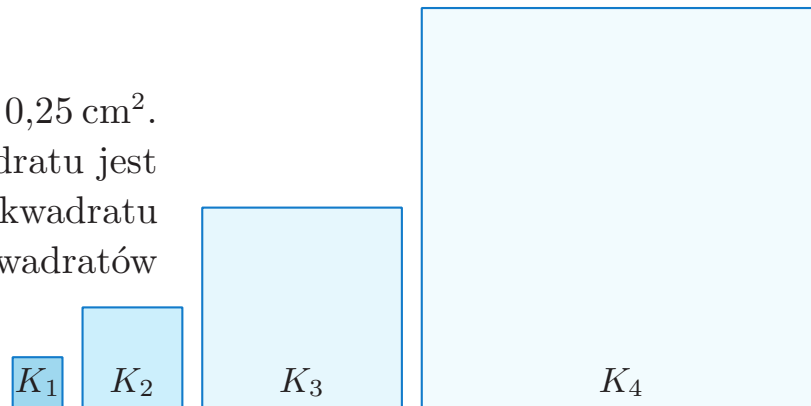
Sprawdź się

- Ile początkowych wyrazów ciągu (a_n) należy dodać, aby otrzymać sumę równą S ?
a) $a_n = 2n + 3$, $S = 221$ b) $a_n = 3n - 1$, $S = 672$
- Ile co najmniej początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać sumę większą od 200?
a) -9, -7, -5, -3, -1, 1, ... b) -4, -3, -2, -1, 0, 1, ...

3.9. Ciąg geometryczny (1)

Ćwiczenie 1

Pole kwadratu K_1 jest równe $0,25 \text{ cm}^2$. Pole każdego kolejnego kwadratu jest cztery razy większe od pola kwadratu poprzedniego. Oblicz pola kwadratów K_2 , K_3 i K_4 .



Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) o co najmniej trzech wyrazach nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_+$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n) .

Przykład 1

Podaj iloraz ciągu geometrycznego: 5, 10, 20, ... i wypisz jego dwa następne wyrazy.

Iloraz tego ciągu jest równy 2. Kolejne wyrazy ciągu to $20 \cdot 2 = 40$ i $40 \cdot 2 = 80$.

Ćwiczenie 2

Podaj iloraz ciągu geometrycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

- | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|
| a) 3, 6, 12, ... | c) 4, 2, 1, ... | e) 1, -2, 4, ... |
| b) 1, 5, 25, ... | d) 64, 16, 4, ... | f) -27, 9, -3, ... |

Przykład 2

Oblicz wyrazy a_2 , a_3 , a_4 ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 9$ i ilorazie $q = \frac{1}{3}$.

$$a_2 = a_1 \cdot q = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3, \quad a_3 = a_2 \cdot q = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1, \quad a_4 = a_3 \cdot q = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|---|
| a) $a_1 = 1, q = 3$ | c) $a_1 = 5, q = -1$ | e) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, q = \sqrt{2}$ |
| b) $a_1 = 16, q = \frac{1}{2}$ | d) $a_1 = \frac{1}{4}, q = -2$ | f) $a_1 = \sqrt{2}, q = \sqrt{6}$ |

Twierdzenie

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Przykład 3

Oblicz iloraz q ciągu geometrycznego, którego dwoma kolejnymi wyrazami są liczby 13 i 65.

$$q = \frac{65}{13} = 5$$

Ćwiczenie 4

Oblicz iloraz ciągu geometrycznego o podanych dwóch kolejnych wyrazach.

- | | | |
|------------|----------|-------------|
| a) 25 i 75 | c) 4 i 6 | e) 9 i -36 |
| b) 75 i 25 | d) 6 i 4 | f) -9 i -45 |

D Przykład 4

Uzasadnij, że ciąg o kolejnych wyrazach $a_1 = 6$, $a_2 = 9$ i $a_3 = 12$ nie jest ciągiem geometrycznym.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \text{ oraz } \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Iloraz dwóch kolejnych wyrazów ciągu nie jest stały ($\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$), zatem nie jest to ciąg geometryczny.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest ciągiem geometrycznym.

- a) 4, 8, 16, 32, 60, 120, ... b) 1, -2, 4, -8, 16, 32, ... c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{27}{32}, \frac{81}{64}, \dots$

Przykład 5

Oblicz jedenasty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ oraz ilorazie $q = 2$.

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 3 \cdot 2 = 6 \\ a_3 &= 3 \cdot 2^2 = 12 \\ a_4 &= 3 \cdot 2^3 = 24 \\ &\vdots \\ a_{11} &= 3 \cdot 2^{10} = 3072 \end{aligned}$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu geometrycznego, obliczamy $a_1 \cdot q^{11-1}$.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Przykład 6

Oblicz wyrazy a_5 i a_{11} ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i ilorazie $q = 2$.

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$
$$a_{11} = a_1 \cdot q^{10} = 3 \cdot 2^{10} = 3 \cdot 1024 = 3072$$

Ćwiczenie 6

Oblicz n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- | | |
|--|---|
| a) $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2, n = 6$ | e) $a_1 = -2, q = -3, n = 5$ |
| b) $a_1 = 25, q = \frac{1}{5}, n = 7$ | f) $a_1 = -7, q = -1, n = 15$ |
| c) $a_1 = 8, q = \frac{2}{3}, n = 4$ | g) $a_1 = 5, q = \sqrt{2}, n = 9$ |
| d) $a_1 = \frac{1}{10}, q = 2\frac{1}{2}, n = 6$ | h) $a_1 = \sqrt{3}, q = -\frac{\sqrt{3}}{3}, n = 8$ |

Przykład 7

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_4 = 250$ i $q = 5$.

Ze wzoru ogólnego $a_4 = a_1 \cdot q^3$, czyli $250 = a_1 \cdot 5^3$. Zatem $a_1 = \frac{250}{125} = 2$.

Ćwiczenie 7

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $a_4 = 1, q = \frac{1}{2}$ | b) $a_6 = 16, q = -2$ | c) $a_8 = 81, q = 3$ |
|-------------------------------|-----------------------|----------------------|

Przykład 8

Dane są wyrazy $a_4 = 4$ i $a_7 = 32$ ciągu geometrycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Niech q będzie ilorazem tego ciągu. Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 4 \\ a_1 \cdot q^6 = 32 \end{cases}$$

Drugie równanie dzielimy stronami przez pierwsze i otrzymujemy:

$$\frac{a_1 \cdot q^6}{a_1 \cdot q^3} = \frac{32}{4}$$

Stąd $q^3 = 8$, czyli $q = 2$. Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$4 = a_1 \cdot 8$$

Zatem $a_1 = \frac{1}{2}$. Wzór ogólny ciągu: $a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$.

Ćwiczenie 8

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) .

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| a) $a_2 = \frac{5}{8}, a_5 = 5$ | b) $a_3 = -3, a_6 = -24$ | c) $a_4 = 1, a_7 = \frac{27}{8}$ |
|---------------------------------|--------------------------|----------------------------------|

Zadania

1. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) o podanych wyrazach początkowych. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz a_7 .

- | | | |
|--|--|---|
| a) 128, 64, 32, ... | c) $\frac{1}{243}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \dots$ | e) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$ |
| b) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, \dots$ | d) $\frac{625}{256}, \frac{125}{64}, \frac{25}{16}, \dots$ | f) $\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \dots$ |

2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_4 = 6$ oraz $a_6 = 54$.

Jeżeli q jest ilorazem ciągu (a_n) , to $a_4 = a_1 \cdot q^3$ oraz $a_6 = a_1 \cdot q^5$, zatem otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 6 \\ a_1 \cdot q^5 = 54 \end{cases}$$

Dzielimy stronami drugie równanie przez pierwsze:

$$\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^3} = \frac{54}{6}$$

Stąd $q^2 = 9$, czyli $q = -3$ lub $q = 3$.

Dla $q = -3$ mamy $a_1 = -\frac{2}{9}$. Wzór ogólny ciągu: $a_n = -\frac{2}{9} \cdot (-3)^{n-1}$.

Dla $q = 3$ mamy $a_1 = \frac{2}{9}$. Wzór ogólny ciągu: $a_n = \frac{2}{9} \cdot 3^{n-1}$.

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) .

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------|---------------------------|
| a) $a_2 = 5, a_4 = 80$ | c) $a_2 = 7, a_4 = 28$ | e) $a_6 = 32, a_{10} = 2$ |
| b) $a_2 = 6, a_4 = \frac{9}{2}$ | d) $a_3 = 27, a_5 = 243$ | f) $a_6 = 1, a_8 = 9$ |

Sprawdź się

3. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) oraz wyrazy a_3 , a_4 i a_5 .

- | | | |
|------------------------|----------------------------------|------------------------------|
| a) $a_1 = 8, a_2 = 24$ | c) $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 1$ | e) $a_1 = -12, a_2 = -8$ |
| b) $a_1 = 2, a_2 = -6$ | d) $a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = 2$ | f) $a_1 = 2, a_2 = \sqrt{2}$ |

4. Oblicz wyrazy a_2 i a_3 ciągu geometrycznego (a_n) .

- | | | |
|------------------------|---|------------------------------------|
| a) $a_1 = 15, a_4 = 5$ | b) $a_1 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{2}$ | c) $a_1 = -\frac{1}{10}, a_4 = 10$ |
|------------------------|---|------------------------------------|

5. Oblicz wyrazy a_2 i a_3 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| a) $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2$ | b) $a_1 = 64, q = -\frac{1}{2}$ | c) $a_1 = -\frac{1}{256}, q = -4$ |
|-------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|

3.10. Ciąg geometryczny (2)

Przykład 1

Pani Kasia ulokowała 2000 zł na koncie o stałym oprocentowaniu 5% w skali roku. W tabeli obok przedstawiono stan oszczędności pani Kasi po upływie kolejnych lat. I tak po upływie roku stan jej konta wyniesie:

2000 · 105% = 2000 · 1,05 = 2100 [zł]

a po upływie dwóch lat:

2100 · 105% = 2100 · 1,05 = 2205 [zł]

Otrzymany ciąg jest przykładem rosnącego ciągu geometrycznego.

Wpłata:	2000,00
2000,00 · 1,05 =	2100,00
2100,00 · 1,05 =	2205,00
2205,00 · 1,05 =	2315,25
2315,25 · 1,05 ≈	2431,01
2431,01 · 1,05 ≈	2552,56

Twierdzenie

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ i ilorazie q jest:

- **rosnący**, gdy $q > 1$, ■ **malejący**, gdy $0 < q < 1$, ■ **stały**, gdy $q = 1$.

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 < 0$ i ilorazie q jest:

- **rosnący**, gdy $0 < q < 1$, ■ **malejący**, gdy $q > 1$, ■ **stały**, gdy $q = 1$.

Przykład 2

- a) Ciąg geometryczny: 1, 2, 4, 8, 16, ... jest rosnący.
- b) Ciąg geometryczny: 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ... jest malejący.
- c) Ciąg geometryczny: -1, -2, -4, -8, -16, ... jest malejący.
- d) Ciąg geometryczny: -1, -1/2, -1/4, -1/8, -1/16, ... jest rosnący.

Ćwiczenie 1

Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij. Podaj przykłady odpowiednich ciągów geometrycznych i określ ich monotoniczność.

	$a_1 < 0$	$a_1 > 0$
$q < 0$	?	1, -2, 4, -8, 16, ... nie jest monotoniczny
$q = 0$	-3, 0, 0, 0, 0, ... niemalejący	?
$0 < q < 1$	?	?
$q > 1$	?	?

Stałym ciągiem geometrycznym jest również ciąg: 0, 0, 0, 0, ... Jego pierwszy wyraz $a_1 = 0$, a iloraz może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Przykład 3

a) Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach $a_1 = 6$ i $a_3 = 24$.

Niech q będzie ilorazem ciągu (a_n) . Wówczas $a_3 = a_1q^2$, czyli $24 = 6q^2$. Stąd $q^2 = 4$, zatem $q = -2$ lub $q = 2$.

Dla $q = -2$ ciąg ten nie jest monotoniczny.

Dla $q = 2$ ciąg jest rosnący. Wzór ogólny ciągu: $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$.

b) Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach $a_1 = -6$ i $a_3 = -54$.

Niech q będzie ilorazem ciągu (a_n) . Wówczas $a_3 = a_1q^2$, czyli $-54 = -6q^2$. Stąd $q^2 = 9$, zatem $q = -3$ lub $q = 3$.

Dla $q = -3$ ciąg nie jest monotoniczny.

Dla $q = 3$ ciąg jest malejący. Wzór ogólny ciągu: $a_n = -6 \cdot 3^{n-1}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) .

- a) $a_1 = 1, a_3 = 25$ b) $a_1 = -8, a_3 = -\frac{1}{2}$ c) $a_2 = -4, a_6 = -64$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest geometryczny, należy wykazać, że iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

D Przykład 4

Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 3 \cdot 4^n$ jest ciągiem geometrycznym. Określ jego monotoniczność.

Wyznaczamy iloraz ciągu:

a_{n+1} / a_n = (3 · 4^{n+1}) / (3 · 4^n) = 4

Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest geometryczny. Jest to ciąg rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q = 4 > 1$.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.

- a) $a_n = 5 \cdot 6^n$ c) $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 2^n$ e) $a_n = 6 \cdot (-4)^n$
- b) $a_n = \frac{5}{2^n}$ d) $a_n = -2 \cdot (\frac{1}{3})^n$ f) $a_n = 4^{2n+1}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Jeżeli liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to:

$$b^2 = a \cdot c$$

Przykład 5

Liczby $x - 5$, $x - 2$ i $x + 4$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &= (x - 5)(x + 4) \\ x^2 - 4x + 4 &= x^2 - x - 20 \\ -3x &= -24\end{aligned}$$

Stąd $x = 8$. Szukane liczby: 3, 6, 12.

Ćwiczenie 5

Podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

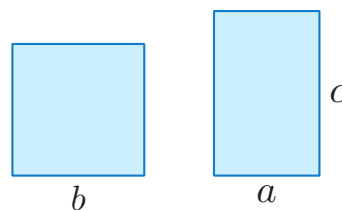
- a) $x - 3, x - 1, x + 5$ b) $x, x + 1, x - 3$ c) $x + 2, x + 1, x - 7$

■ Średnia geometryczna

Jeśli dodatnie liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, to $b = \sqrt{a \cdot c}$.

Liczbę $\sqrt{a \cdot c}$ nazywamy **średnią geometryczną** liczb a i c .

Pole kwadratu o boku b jest równe polu prostokąta o bokach a i c , jeśli b jest równe średniej geometrycznej liczb a i c .



Ćwiczenie 6

Oblicz długość boku kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta o podanych długościach boków.

- a) 4 cm i 9 cm b) 9 cm i 25 cm c) 10 cm i 40 cm

Twierdzenie

W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Ćwiczenie 7

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie. Oblicz wyraz a_6 .

- a) $a_5 = 4$ i $a_7 = 25$ b) $a_5 = 20$ i $a_7 = 45$ c) $a_5 = \frac{1}{15}$ i $a_7 = \frac{1}{60}$

Zadania

1. Określ monotoniczność ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- a) $a_1 = \frac{1}{4}, q = \frac{4}{3}$ c) $a_1 = -3, q = 2$ e) $a_1 = -2, q = \sqrt{3} - 1$
b) $a_1 = 4, q = \frac{3}{4}$ d) $a_1 = -2, q = \frac{1}{4}$ f) $a_1 = 2, q = 1 - \sqrt{2}$

- D 2. Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.

- a) $a_n = \frac{4}{3^n}$ c) $a_n = -2 \cdot 5^n$ e) $a_n = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{2})^n$
b) $a_n = -\frac{4}{5^n}$ d) $a_n = 2 \cdot (-5)^n$ f) $a_n = 4 \cdot (\sqrt{3})^{n+1}$

- D 3. Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i określ jego monotoniczność.

- a) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ a_{n+1} = -6a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

4. Liczby 11, x, y tworzą monotoniczny ciąg geometryczny. Podwojona suma pierwszej i drugiej liczby jest równa sumie drugiej i trzeciej liczby. Wyznacz liczby x i y .

5. Liczby 32, a, b są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego. Różnica liczb pierwszej i drugiej jest o 8 większa od różnicy liczb trzeciej i drugiej. Wyznacz liczby a i b .

6. Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) .

- a) $\begin{cases} a_6 = -4 \\ a_{10} = -\frac{1}{64} \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 1 \\ a_2^2 = 25a_3^2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 1 \\ a_2^2 + a_3^2 = 5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_4 = 3a_2 \\ a_1 \cdot a_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_2 + a_3 = 30 \\ a_4 - a_2 = 120 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 6 \\ a_3^2 - a_2^2 = 12 \end{cases}$

Sprawdź się

7. Określ monotoniczność ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- a) $a_1 = \frac{1}{15}, q = \frac{6}{5}$ c) $a_1 = -6, q = \frac{2}{3}$ e) $a_1 = -\frac{1}{6}, q = -9$
b) $a_1 = 10, q = \frac{5}{6}$ d) $a_1 = -8, q = 8$ f) $a_1 = -4, q = \sqrt{2}$

8. Wyznacz x i y tak, aby podane liczby były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Określ monotoniczność tego ciągu.

- a) 2, x , 32, y b) 1, x , 2, y c) 18, x , 8, y d) $x, \frac{1}{10}, y, 10$

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Przykład 1

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

Aby obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, można skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Dowód

Kolejne wyrazy ciągu to: $a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_1q^2, \dots, a_n = a_1q^{n-1}$, zatem:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \\ qS_n &= a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n \end{aligned}$$

Mnożymy obie strony równania przez q .

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= a_1 - a_1q^n \\ S_n(1 - q) &= a_1(1 - q^n) \\ S_n &= a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

Dzielimy obie strony równania przez $1 - q$ (z założenia $q \neq 1$).

Uwaga. Jeśli iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 1, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu dana jest wzorem $S_n = n \cdot a_1$.

Przykład 2

Oblicz sumę $1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$. Skorzystaj ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Do wzoru podstawiamy $a_1 = 1, q = 2, n = 10$:

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{1 - 1024}{-1} = 1023$$

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 10 i ilorazie 2 dla: a) $n = 5$, b) $n = 7$, c) $n = 9$.

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów podanego ciągu geometrycznego, korzystając ze wzoru. Sprawdź otrzymany wynik, dodając wyrazy ciągu.

a) $1, 3, 9, 27, \dots$ b) $1, -2, 4, -8, \dots$ c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{32}$ i ilorazie: a) $q = 2$, b) $q = 4$, c) $q = 1$.

Ćwiczenie 4

Oblicz sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_1 = 3, a_2 = -6, n = 6$ b) $a_1 = -4, a_2 = -12, n = 5$

Przykład 3

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie 3. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 1456?

Niech n będzie szukaną liczbą wyrazów. Wówczas:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{1 - 3^n}{1 - 3} &= 1456 \\ 1 - 3^n &= -728 \\ 3^n &= 729 \\ 3^n &= 3^6 \end{aligned}$$

Zatem $n = 6$. Należy dodać sześć początkowych wyrazów tego ciągu.

Przykład 4

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 10 i ilorazie 0,5. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 18,75?

Niech n będzie szukaną liczbą wyrazów. Wówczas:

$$\begin{aligned} 10 \cdot \frac{1 - 0,5^n}{1 - 0,5} &= 18,75 \\ 20 \cdot (1 - 0,5^n) &= \frac{75}{4} \quad / : 20 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{15}{16} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{16} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

Zatem $n = 4$. Należy dodać cztery początkowe wyrazy tego ciągu.

Ćwiczenie 5

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 635?

Ćwiczenie 6

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie $\frac{3}{2}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać $16\frac{1}{4}$?



Ćwiczenie 7

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q . Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać sumę równą S ?

- a) $a_1 = 10, q = 0,9, S = 34,39$ b) $a_1 = 100, q = 0,4, S = 164,96$

Ciąg (b_n) nazywamy **podciągami** ciągu (a_n) , jeśli możemy go otrzymać poprzez wybranie jego wyrazów spośród wyrazów ciągu (a_n) bez zmiany ich kolejności. Na przykład podciągami ciągu geometrycznego: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... są:

- 2, 8, 32, 128, 512, ... – podciąg wyrazów o numerach parzystych,
- 1, 4, 16, 64, 256, ... – podciąg wyrazów o numerach nieparzystych,
- 512, 1024, 2048, 4096, ... – podciąg wyrazów podzielnych przez 512.

Ćwiczenie 8

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie $\frac{1}{2}$ jest równy 1. Wypisz pięć początkowych wyrazów jego podciągu złożonego z wyrazów o numerach:

- a) nieparzystych, b) parzystych.

Ćwiczenie 9

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie -2 jest równy 3. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów jego podciągu złożonego z wyrazów o numerach:

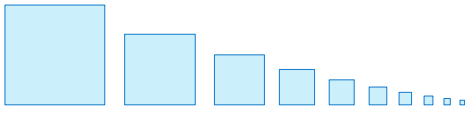
- a) nieparzystych, b) parzystych.

Zadania

1. Oblicz sumę S_8 ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $a_1 = \frac{1}{16}, a_2 = \frac{1}{8}$ b) $a_1 = 18, a_2 = 6$ c) $a_1 = 15, a_2 = -30$
2. Oblicz sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
a) $a_1 = -1, q = 2, n = 8$ b) $a_1 = 3, q = -\sqrt{2}, n = 10$
3. Ciąg (a_n) jest geometryczny. Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij.

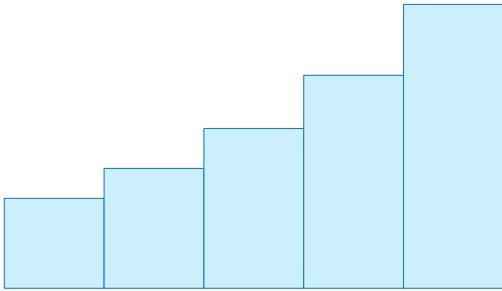
a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	?	?	242
?	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$	?
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{2}$	8	?	?

4. Pola dziesięciu kwadratów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$. Największy spośród tych kwadratów ma pole równe 1 cm^2 . Oblicz sumę ich:



- a) pól, b) obwodów.
5. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
a) $q = 2, S_4 = 60$ c) $q = 3, S_6 = 728$ e) $q = -\sqrt{2}, S_6 = -7$
b) $q = \frac{1}{2}, S_4 = 2046$ d) $q = -\frac{1}{2}, S_5 = 33$ f) $q = -1, S_{13} = 9$
6. Kartki pocztowe ułożono w stosy. W pierwszym stosie ułożono 4 kartki, a w każdym następnym – dwukrotnie więcej kartek niż w poprzednim. Ile kartek było w największym stosie, jeżeli wiadomo, że łącznie ułożono:
a) 60 kartek, b) 1020 kartek, c) 4092 kartki?
7. Pierwszy odcinek łamanej ma długość 64 cm, a każdy następny jest 2 razy krótszy od poprzedniego. Z ilu odcinków składa się ta łamana, jeśli wiadomo, że ma ona długość:
a) 124 cm, b) 127,5 cm, c) 127,875 cm?

8. Pola pięciu prostokątów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{4}{3}$. Suma tych pól jest równa $\frac{781}{90} \text{ cm}^2$. Oblicz pole najmniejszego prostokąta.



Sprawdź się

9. Oblicz sumę S_5 podanego ciągu geometrycznego.
a) 2, 8, 32, ... b) $-2, -6, -18, \dots$ c) 4, $-6, 9, \dots$
10. Oblicz sumy S_6 i S_7 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
a) $a_1 = 2, q = -3$ b) $a_1 = 7, q = -1$ c) $a_1 = 81, q = -\frac{1}{3}$
11. Ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2 należy dodać, aby otrzymać:
a) 315, b) 2555, c) 5115?
12. Wyznacz liczbę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q i sumie wszystkich wyrazów S .
a) $S = 258, a_1 = 6, q = -2$ b) $S = 1820, a_1 = 5, q = 3$

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Przykład 1

Liczby x , 4, y tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Suma kwadratów tych liczb jest równa 56. Wyznacz x i y .

Niech $r > 0$ będzie różnicą ciągu. Wówczas $x = 4 - r$ oraz $y = 4 + r$. Otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}(4 - r)^2 + 4^2 + (4 + r)^2 &= 56 \\ 16 - 8r + r^2 + 16 + 16 + 8r + r^2 &= 56 \\ 2r^2 &= 8 \\ r &= -2 \text{ lub } r = 2\end{aligned}$$

Zgodnie z założeniem $r > 0$, czyli $x = 4 - r = 4 - 2 = 2$ oraz $y = 4 + r = 6$.

Ćwiczenie 1

a) Liczby a , 5, c tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Suma kwadratów tych liczb jest równa 93. Wyznacz a i c .

b) Liczby 4, b , c tworzą malejący ciąg arytmetyczny. Suma kwadratów tych liczb jest równa 165. Wyznacz b i c .

Przykład 2

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 21. Jeśli od pierwszej i drugiej liczby odejmiemy 3, a od trzeciej odejmiemy 1, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

Zapisujemy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: $a - r$, a , $a + r$.

Ich suma to:

$$\begin{aligned}a - r + a + a + r &= 21 \\ a &= 7\end{aligned}$$

Zatem szukane liczby mają postać: $7 - r$, 7, $7 + r$.

Zgodnie z warunkami zadania liczby $4 - r$, 4, $6 + r$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, zatem zachodzi równość:

$$\begin{aligned}4^2 &= (4 - r)(6 + r) \\ r^2 + 2r - 8 &= 0 \\ r &= -4 \text{ lub } r = 2\end{aligned}$$

Dla $r = -4$ otrzymujemy liczby: 11, 7, 3.

Dla $r = 2$ otrzymujemy liczby: 5, 7, 9.

Ćwiczenie 2

a) Liczby a , b , c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 3, a liczby $a - 1$, $b - 2$, $c + 2$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz liczby a , b , c .

b) Liczby a , b , c , których suma jest równa 12, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby $a + 1$, $b + 2$, $c + 6$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz liczby a , b , c .

Przykład 3

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:

$$a_1 + a_2 = 20 \text{ i } a_2 + a_3 = 60$$

Wyznacz wzór ogólny tego ciągu oraz oblicz sumę jego sześciu początkowych wyrazów.

Niech q będzie ilorazem ciągu (a_n) . Wówczas:

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 q \text{ oraz } a_3 = a_1 q^2 \\ a_2 + a_3 &= a_1 q + a_1 q^2 = q(a_1 + a_1 q) = q(a_1 + a_2) = q \cdot 20 = 60\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy $q = 3$.

$$a_1 + a_2 = a_1 + a_1 \cdot 3 = 4a_1 = 20$$

Zatem $a_1 = 5$. Wzór ogólny ciągu: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$.

$$S_6 = a_1 \frac{1 - q^6}{1 - q} = 5 \cdot \frac{1 - 3^6}{1 - 3} = 5 \cdot \frac{1 - 729}{-2} = 5 \cdot \frac{728}{2} = 1820$$

Ćwiczenie 3

a) Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:

$$a_1 + a_5 = 68 \text{ i } a_2 + a_6 = 136$$

Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 2044?

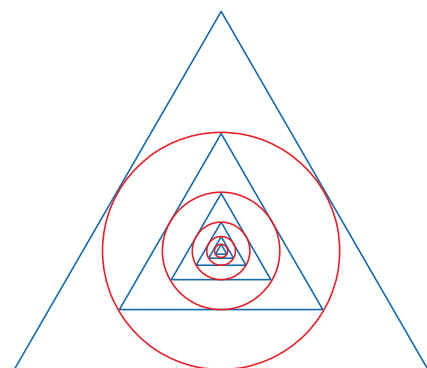
b) W sześciowyrazowym ciągu geometrycznym suma pięciu początkowych wyrazów jest równa 11, a suma pięciu ostatnich – jest równa 33. Oblicz iloraz oraz wyrazy pierwszy i szósty tego ciągu.

Zadania

- a) W dziewięciowyrazowym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy 4, wyrazy pierwszy, trzeci i siódmy tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.
b) W sześciowyrazowym malejącym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy -1 , wyrazy pierwszy, drugi i piąty tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.

2. Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od drugiej z nich odejmiemy 1, a do trzeciej dodamy 6, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
3. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 15. Jeśli pierwszą i drugą z tych liczb zwiększymy o 1, a trzecią – o 4, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
4. Liczby 4, b , c tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również kolejno wyrazami pierwszym, drugim i czwartym ciągu arytmetycznego. Wyznacz liczby b i c .
5. Liczby a , b , 1 tworzą malejący ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej liczby odejmiemy 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz liczby a i b .
6. a) Wstaw między liczby 5 i 30 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.
b) Wstaw między liczby -4 i 32 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy – ciąg geometryczny.
7. W trójkąt równoboczny wpisujemy okrąg, a następnie w okrąg wpisujemy trójkąt równoboczny itd. (rysunek poniżej). Otrzymujemy w ten sposób ciąg trójkątów równobocznych i ciąg okręgów.

- D** a) Uzasadnij, że ciąg obwodów kolejnych trójkątów jest geometryczny. Podaj jego iloraz.
b) Bok największego trójkąta ma długość 4. Oblicz sumę obwodów pięciu największych trójkątów oraz sumę ich pól.



Sprawdź się

8. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 21, a suma ich kwadratów wynosi 155. Wyznacz te liczby.
9. Suma pierwszego i czwartego wyrazu ciągu geometrycznego jest równa 130, a suma drugiego i piątego wyrazu jest równa 520. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 682?
10. Liczby a , b , 2 tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 8, a drugą i trzecią zostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz liczby a i b .

Przypomnij sobie

Procenty

1. Oblicz:
a) 1%, 5%, 25%, 75% liczby 400, b) 2%, 8%, 40%, 120% liczby 500.
2. Oblicz:
a) 20% liczby 300, c) 15% liczby 200, e) 150% liczby 80,
b) 40% liczby 600, d) 80% liczby 30, f) 210% liczby 40.
3. Która liczba jest większa:
a) 15% liczby 200 czy 20% liczby 160,
b) 30% liczby 120 czy 8% liczby 400?
4. Oblicz, jakim procentem liczby 800 jest podana liczba.
a) 160 b) 600 c) 840 d) 960
5. Oblicz, jakim procentem liczby a jest liczba b .
a) $a = 60$, $b = 15$ c) $a = 300$, $b = 93$ e) $a = 600$, $b = 750$
b) $a = 80$, $b = 64$ d) $a = 140$, $b = 21$ f) $a = 900$, $b = 1125$
6. Oblicz liczbę, której:
a) 20% jest równe 16, c) 45% jest równe 180,
b) 30% jest równe 36, d) 120% jest równe 720.
7. O ile procent podrożał towar, którego cenę podniesiono dwa razy o $p\%$?
a) $p = 10$ b) $p = 20$ c) $p = 30$ d) $p = 50$
8. Cenę pewnego towaru podniesiono najpierw o $p\%$, a następnie o $q\%$. O ile procent podrożał ten towar?
a) $p = 10$, $q = 20$ b) $p = 20$, $q = 10$ c) $p = 10$, $q = 30$
9. Rozpatrujemy trzy warianty obniżki ceny towaru:
A. najpierw o 40%, a następnie o 10%,
B. dwa razy o 30%,
C. jednorazowo o 50%.
Dla którego wariantu ostateczna cena będzie najniższa?
10. Cenę pewnego towaru obniżono o $p\%$. O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby towar ten kosztował tyle samo co przed obniżką?
a) $p = 20$ b) $p = 50$ c) $p = 60$

3.13. Procent składany

Kapitał w wysokości k złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym (rocznej stopie procentowej) $p\%$ wzrośnie po roku do kwoty:

$$k \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Przykład 1

Pani Kowalska wpłaciła do banku 1000 zł na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku. Jaką kwotę będzie miała po trzech latach, a jaką – po dwudziestu, jeśli odsetki są co roku dopisywane do kapitału i w kolejnych latach także podlegają oprocentowaniu?

Kwota po roku: $1000 + 6\% \cdot 1000 = 1060$ [zł]

Kwota po 2 latach: $1060 + 6\% \cdot 1060 = 1060 + 63,6 = 1123,6$ [zł]

Kwota po 3 latach: $1123,6 + 6\% \cdot 1123,6 = 1123,6 + 67,416 \approx 1191,02$ [zł]

Zauważ, że otrzymane kwoty są zaokrąglane do pełnych groszy.

Wyznaczenie powyższą metodą kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po dwudziestu latach, jest bardzo pracochłonne. Zauważmy jednak, że co roku kapitał powiększa się 1,06 razy.

Kapitał wynosi więc:

po roku: $k \cdot 1,06$

po 2 latach: $k \cdot (1,06)^2$

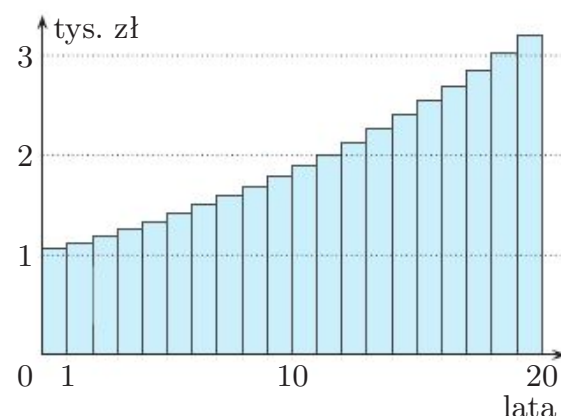
po 3 latach: $k \cdot (1,06)^3$

:

po 20 latach:

$k \cdot (1,06)^{20} \approx 1000 \cdot 3,20714 = 3207,14$ [zł]

Jeżeli w kolejnych latach odsetki są dopisywane do kapitału powiększonego o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kapitał został złożony na **procent składany**.



Kapitał w wysokości k złożony w banku na n lat na procent składany przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ po n latach wzrośnie do kwoty $k \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Ćwiczenie 1

Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku 5000 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym $p\%$?

a) $n = 5$, $p = 4,5$

b) $n = 8$, $p = 5,5$

c) $n = 10$, $p = 3$

Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się **kapitalizacją odsetek** lub krótko **kapitalizacją**, a czas, po jakim ona następuje, nazywa się **okresem kapitalizacji**.

Przykład 2

Rodzice Basi złożyli w banku 5000 zł na trzy lata. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 6%, w ostatnich dwóch latach 5%, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Do jakiej kwoty wzrósłby ten kapitał po trzech latach, gdyby odsetki nie były opodatkowane, a do jakiej – gdyby od naliczanych odsetek był pobierany co roku podatek w wysokości 20%?

Jeśli odsetki nie byłyby opodatkowane, to oszczędności po trzech latach wyniosłyby:

$$5000 \cdot 1,06 \cdot (1,05)^2 = 5843,25 \text{ [zł]}$$

Jeśli od naliczanych odsetek byłby pobierany podatek, to odsetki te byłyby pomniejszane o 20%, zatem w pierwszym roku wpłacona kwota wzrosłaby o:

$$0,06 \cdot 0,8 = 0,048 = 4,8\%$$

a w drugim i trzecim roku o:

$$0,05 \cdot 0,8 = 0,04 = 4\%$$

Zatem po trzech latach kapitał wzrósłby do:

$$5000 \cdot (1,048) \cdot (1,04)^2 \approx 5667,58 \text{ [zł]}$$

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%. W tym rozdziale, dla ułatwienia obliczeń, podatek ten pomijamy lub przyjmujemy, że wynosi 20%. Zwróć uwagę na to, że podatek płaci się tylko od dopisywanych odsetek, a nie zgromadzonego kapitału.

Ćwiczenie 2

Kapitał 5000 zł złożono w banku na dziesięć lat przy oprocentowaniu wynoszącym 5% i rocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz wysokość dopisanych odsetek. O ile mniejszy będzie zgromadzony kapitał, jeśli od odsetek jest naliczany podatek w wysokości 20% w skali roku?

Ćwiczenie 3

Kapitał 800 zł złożono w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego czasu w przypadku, gdy kapitalizacja odsetek była roczna, od odsetek naliczano podatek w wysokości 20% w skali roku, a oprocentowanie:

a) w pierwszych dwóch latach wynosiło 8%, w ostatnich trzech – 4%,

b) w pierwszych trzech latach wynosiło 4%, w ostatnich dwóch – 8%,

c) w pierwszych dwóch latach wynosiło 7%, w kolejnych dwóch – 5%, w ostatnim roku – 2%.

Odsetki mogą być dopisywane częściej niż co rok. Jeżeli są dopisywane co kwartał, mówimy o kapitalizacji kwartalnej, jeśli co miesiąc – o kapitalizacji miesięcznej.

Twierdzenie

Kapitał w wysokości k złożony w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i kapitalizacji m razy w roku po n latach wzrośnie do kwoty:

$$k \left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{m \cdot n}$$

Przykład 3

W bankach A , B i C lokaty terminowe są oprocentowane 6% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane: w banku A – co rok, w banku B – co kwartał, a w banku C – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 1000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

Kapitał po roku wyniesie:

w banku A : $1000 \cdot (1 + 0,06) = 1060$ [zł],

w banku B : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{4} \right)^4 = 1000 \cdot (1,015)^4 \approx 1000 \cdot 1,06136 = 1061,36$ [zł],

w banku C : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{12} = 1000 \cdot (1,005)^{12} \approx 1000 \cdot 1,06168 = 1061,68$ [zł].

Zatem odsetki dopisane w tych bankach to kolejno: 60 zł, $61,36$ zł i $61,68$ zł. Kapitał wzrośnie więc: w banku A – o 6% , w banku B – o $\frac{61,36}{1000} = 0,06136 \approx 6,14\%$, a w banku C – o $\frac{61,68}{1000} = 0,06168 \approx 6,17\%$.

Ćwiczenie 4

Bank X oferuje kapitalizację półroczną przy rocznej stopie 8% , a bank Y – kapitalizację kwartalną przy rocznej stopie $p\%$. Dla której wartości p oprocentowanie w skali roku jest w obu bankach najbardziej zbliżone?

A. $p = 4$ B. $p = 7,92$ C. $p = 8$

Czy wiesz, że...

Roczną stopę procentową $p\%$ taką, że odsetki w wysokości $\frac{0,01p}{m}$ są kapitalizowane m razy w roku, nazywa się **nominalną stopą** procentową. Rzeczywisty przyrost kapitału pokazuje **efektywna stopa** procentowa $r\%$, przy której odsetki są kapitalizowane raz, na koniec roku. Między tymi stopami zachodzi następująca zależność:

$$1 + 0,01r = \left(1 + \frac{0,01p}{m} \right)^m$$

Ćwiczenie 5

Pani Katarzyna złożyła w banku kwotę $10\,000$ zł na lokatę oprocentowaną 4% rocznie. Do jakiej kwoty wzrośnie jej kapitał po pięciu latach, jeśli odsetki będą kapitalizowane:

a) co rok, b) co pół roku, c) co kwartał, d) co miesiąc?

Ćwiczenie 6

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rodzice założyli konto córce. Postanowili wpłacać na nie 200 zł na początku każdego roku przez pięć lat. Oprocentowanie roczne w całym tym okresie wynosi 5% , a kapitalizacja następuje co rok. Jaką kwotę będzie miała na koncie ich córka po pięciu latach od pierwszej wpłaty?

Pierwsza wpłata w wysokości 200 zł będzie kapitalizowana pięć razy, druga – wpłacona rok później – cztery razy i każda kolejna wpłata będzie kapitalizowana o jeden raz mniej. Zatem kapitał po pięciu latach będzie wynosił:

$$\begin{aligned} & 200 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot 1,05^4 + 200 \cdot 1,05^3 + 200 \cdot 1,05^2 + 200 \cdot 1,05 = \\ & = 200(1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5) = \text{Korzystamy ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego.} \\ & = 200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1 - (1,05)^5}{1 - 1,05} \approx 1160,38 \text{ [zł]} \end{aligned}$$

Jaka kwota byłaby na koncie opisanym w powyższym przykładzie, gdyby okres oszczędzania był dłuższy o pięć lat?

Ćwiczenie 7

a) Pani Ania zamierza wpłacać 500 zł na konto na początku każdego roku. Oprocentowanie konta wynosi 4% w skali roku, a odsetki są kapitalizowane co rok. Jakie środki będą zgromadzone na koncie pani Ani po 8 latach, a jakie – po 20 latach oszczędzania?

b) Jaki kapitał znajdzie się na koncie osiemnastolatka, jeżeli rodzice, poczynszy od dnia jego urodzenia, wpłacali mu do banku co rok 300 zł? Oprocentowanie wynosiło 6% w skali roku, a odsetki były kapitalizowane co miesiąc.

Ćwiczenie 8

Paweł, który ma 25 lat, zamierza wpłacać 100 zł na fundusz emerytalny na początku każdego miesiąca. Oprocentowanie funduszu wynosi 6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek jest miesięczna. Jaki kapitał zostanie zgromadzony przez Pawła, gdy będzie on w wieku:

a) 60 lat, b) 65 lat, c) 67 lat?

Zadania

- Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku 2000 zł przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i rocznej kapitalizacji odsetek?
a) $n = 2, p = 5$ b) $n = 5, p = 5$ c) $n = 10, p = 3$
- Kapitał w wysokości 600 zł został złożony w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu w przypadku, gdy kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosiło:
a) w pierwszym roku 6%, w drugim roku – 5,5%, a w trzech ostatnich latach – 4%,
b) w pierwszym roku 5,5%, w trzech kolejnych latach – 4%, a w ostatnim roku – 6%.
- Oprocentowanie czteroletniej lokaty z roczną kapitalizacją odsetek wynosiło w kolejnych latach 9%, 8%, 7% i 6%. Zaproponuj stałą roczną stopę procentową $r\%$, przy której wpłacenie kapitału na cztery lata, z roczną kapitalizacją odsetek, przyniosłoby porównywalny zysk. Wartość r podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.
- Jaką kwotę w pełnych złotych należy ulokować na koncie o rocznym oprocentowaniu 4% i przy rocznej kapitalizacji odsetek, aby po pięciu latach uzyskać co najmniej 1216 zł? Jaką kwotę w pełnych złotych należałoby wpłacić, aby uzyskać co najmniej 1216 zł po trzech latach?
- Do banku wpłacono 3000 zł na trzy lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeśli odsetki są kapitalizowane: a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc, d) codziennie?
- Firma X zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 10 000 zł. Co roku bank nalicza odsetki w wysokości 10%. Kredyt wraz z odsetkami ma być spłacony jednorazowo po n latach. Na ile lat został zaciągnięty kredyt, jeżeli wiadomo, że firma X będzie musiała spłacić 13 310 zł?
- Dziadkowie w dniu narodzin wnuka zdeponowali dla niego w banku kwotę k zł na osiemnaście lat, oprocentowaną 5% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Obecnie chłopiec ma dziewięć lat i kwota ta wzrosła do 7757 zł. Ile wynosił kapitał początkowy k zł? Jaka kwota będzie na rachunku na koniec okresu oszczędzania?
- Kuba zamierza kupić samochód, który kosztuje 40 000 zł. Zakup finansuje ze środków własnych i zaciągniętego na ten cel kredytu. Kredyt wraz z odsetkami, które wyniosą 1200 zł, ma być spłacony po roku. Ile środków własnych ma Kuba, jeżeli oprocentowanie kredytu wynosi 8% w skali roku?

- Kapitał w wysokości 1000 zł wpłacono do banku na lokatę z miesięczną kapitalizacją odsetek. Po ilu latach kapitał ten się podwoi, jeżeli wiadomo, że oprocentowanie w skali roku wynosi: a) 6%, b) 3%?
- Pan Lech zaciągnął kredyt w wysokości 100 000 zł, oprocentowany 10% w skali roku. Kredyt będzie spłacany w równych ratach po 30 000 zł na koniec każdego roku, przy czym ostatnia rata może być mniejsza. Odsetki są naliczane rocznie tylko od niespłaconej części kredytu. W tabeli przedstawiono sposób obliczania stanu zadłużenia po kolejnych latach.

Rok	Doliczone odsetki [zł]	Stan zadłużenia [zł]
1.	$0,1 \cdot 100\,000 = 10\,000$	$100\,000 + 10\,000 - 30\,000 = 80\,000$
2.	$0,1 \cdot 80\,000 = 8000$	$80\,000 + 8000 - 30\,000 = 58\,000$
3.	$0,1 \cdot 58\,000 = 5800$	$58\,000 + 5800 - 30\,000 = 33\,800$
4.	$0,1 \cdot 33\,800 = 3380$	$33\,800 + 3380 - 30\,000 = 7180$
5.	$0,1 \cdot 7180 = 718$	$7180 + 718 - 7898 = 0$

Zatem łącznie trzeba spłacić $4 \cdot 30\,000 + 7898 = 127\,898$ [zł].

- Sporządź analogiczną tabelę dla kredytu w wysokości 100 000 zł, oprocentowanego 20% w skali roku, spłacanego na tych samych zasadach co kredyt pana Lecha. Jaką kwotę trzeba łącznie spłacić?
- Ile czasu trwałoby spłacanie takiego kredytu, gdyby oprocentowanie wynosiło 25% w skali roku?

Sprawdź się

- Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 4000 zł przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i rocznej kapitalizacji odsetek?
a) $n = 2, p = 4$ b) $n = 5, p = 3$ c) $n = 10, p = 4$
- Bank przyjął kwotę 50 000 zł na 5% rocznie, a następnie pożyczył ją na 6% rocznie. Ile zyskał bank w ciągu pięciu lat, a ile by zyskał w ciągu dziesięciu lat?
- Warunki oferowane przez banki dla lokat dwuletnich są następujące:
bank A – 5,44% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
bank B – 5,5% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,
bank C – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,
bank D – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.
Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?



Powtórzenie

Zestaw I

- Oblicz $a_{10} - b_8$.
 - $a_n = 2n + 1, b_n = 3n$
 - $a_n = \frac{8-n}{4}, b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{2}$
 - $a_n = \frac{n^2+5}{n}, b_n = \frac{5n-8}{n^2}$
 - $a_n = \sqrt[3]{2-n}, b_n = n^{\frac{2}{3}}$
- Oblicz $4a_2 - 6b_4$.
 - $a_n = \log_4 n, b_n = \log_5(2n-3)$
 - $a_n = (-1)^{n^2-1}, b_n = (\sqrt{2})^{n-6}$
- Czy ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym? Określ jego monotoniczność.
 - $b_n = n + 1$
 - $b_n = -2n + 3$
 - $b_n = 4 - \frac{n}{2}$
 - $b_n = (\sqrt{3} - 2)n$
 - $b_n = n^2$
 - $b_n = n - n^2$
- Oblicz wyrazy a_6 i a_9 ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
 - $a_1 = 2, r = 2$
 - $a_1 = -5, r = -5$
 - $a_1 = 3, r = 1$
 - $a_1 = 5, r = -2$
 - $a_1 = 0, r = 10$
 - $a_1 = 8, r = -\frac{1}{2}$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz wyraz a_8 .
 - $a_2 = 2, a_4 = 6$
 - $a_2 = 0, a_5 = 9$
 - $a_4 = 2, a_{10} = -10$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_1 - a_3 = 6 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_6 + a_1 = 10 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 2a_3 - a_1 = 14 \\ a_2 + a_4 = 8 \end{cases}$
- Oblicz sumę S_{12} ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $a_1 = 2, a_{10} = 29$
 - $a_1 = 3, r = 2$
 - $a_2 = 5, a_{10} = 21$
 - $a_2 = -8, r = 3$
 - $a_1 = 16, S_4 = 52$
 - $a_3 = -4, S_{10} = -15$
- Oblicz sumę S_{100} ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $a_1 = \frac{1}{3}, a_{100} = \frac{2}{3}$
 - $a_{10} = -1, a_{100} = -11$
 - $a_1 = 5, a_{99} + a_{101} = 150$
 - $a_3 + a_6 = 4\frac{1}{2}, a_{10} - a_4 = 3$
- Kula tocząca się po równi pochyłej w pierwszej sekundzie przebyła drogę 0,5 m, a w każdej następnej sekundzie – drogę o 1 m dłuższą niż w poprzedniej. Oblicz drogę, którą przebyła kula w ciągu początkowych dziesięciu sekund.

- Oblicz wyrazy a_1, a_2, a_3 i a_8 ciągu $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Uzasadnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.
- Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Określ jego monotoniczność.
 - $b_n = 2^{-n}$
 - $b_n = 3 \cdot 5^n$
 - $b_n = 2^{3n-1}$
- Oblicz wyrazy od czwartego do ósmego ciągu geometrycznego (a_n) .
 - $a_1 = 3, q = 2$
 - $a_1 = -4, q = \frac{1}{2}$
 - $a_2 = -25, a_3 = 5$
- Oblicz wyraz a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
 - $a_1 = 2, a_4 = 250$
 - $a_1 = 64, a_6 = 2$
- Oblicz wyrazy a_3 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
 - $a_6 = 100, q = 10$
 - $a_2 = 4, a_7 = 128$
 - $a_4 = 1, a_3 \cdot a_4 = 3$
 - $a_1 = -2, a_1 \cdot a_3 = 36$
- Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
 - $a_1 = 3, q = \frac{1}{2}$
 - $a_1 = -10, q = -\frac{1}{2}$
 - $a_1 = 1, a_2 + a_3 = 20$
 - $a_1 = -4, S_3 = -12$
- Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu $a_1 = 9$, a iloraz $q = 4$. Ile wyrazów ma ten ciąg?
- Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 21, a suma trzech następnych jest równa 168. Który wyraz tego ciągu jest równy 192?
- Który z ciągów, (a_n) czy (b_n) , ma większy czwarty wyraz?

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = (b_n)^2 - n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$
- Oblicz $2a_5 - b_7$.
 - $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = (-2)^n \cdot a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_{n+1} = b_n - (-1)^n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
- Podaj rekurencyjne określenie ciągu (a_n) .
 - $a_n = 2n^2 + n$
 - $a_n = n - n^2$
 - $a_n = n^2 - 3n + 1$

Zestaw II

1. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) :

a) $a_n = n^2 - n$ b) $a_n = n^2 + 2n - 8$ c) $a_n = \frac{1}{2}n - n^2$

2. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 - a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

3. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , którego wykres jest zawarty w paraboli przedstawionej na rysunku obok. Które wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \leq -18$?

4. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez początek układu współrzędnych i mającej wierzchołek w punkcie $(3, -3)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_9 i a_{18} .

5. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych dodatnich, które są:

a) podzielne przez 3, b) podzielne przez 6.

6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 5, które:

a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe.

7. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez k jest równa r .

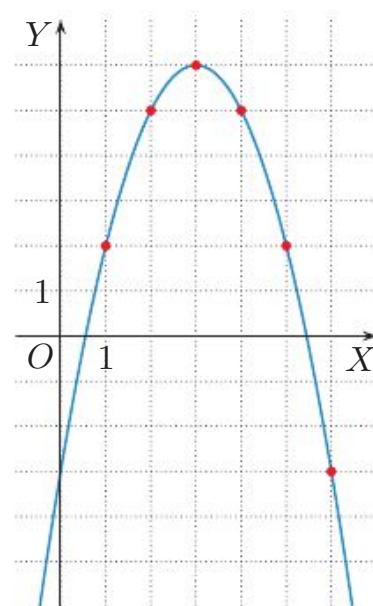
a) $k = 4, r = 3$ b) $k = 7, r = 2$

8. Lewa strona równania jest sumą kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

a) $3 + 5 + 7 + \dots + x = 48$ c) $2 + 7 + 12 + \dots + x = 156$
 b) $8 + 6 + 4 + \dots + x = -220$ d) $-7 - 3 + 1 + \dots + x = 110$

9. Dla jakich wartości x liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

a) $a = x - 2, b = \frac{x+1}{3}, c = 5x$ b) $a = -16, b = 3x, c = x^2$



D 10. Uzasadnij, że jeśli liczby a, b, c tworzą jednocześnie ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny, to jest to ciąg stały.

11. a) Liczby $a, 2, c$ tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do ostatniej z nich dodamy 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz liczby a i c .

b) Liczby $1, b, c$ tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby $1, b - 1, c + 7$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz liczby b i c .

12. a) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 4. Liczby $a_1 - 1, a_2 - 1$ i $a_5 - 4$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .

D b) Suma pierwszego, drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 40, a suma jego pięciu początkowych wyrazów jest równa 90. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Uzasadnij, że liczby $a_1, a_2 - 1, a_4$ tworzą ciąg geometryczny.

13. Suma trzech wyrazów: a_1, a_2, a_3 ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 0. Jeśli do pierwszego wyrazu dodamy 1, do drugiego dodamy 2, a od trzeciego odejmiemy 6, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz a_1, a_2, a_3 .

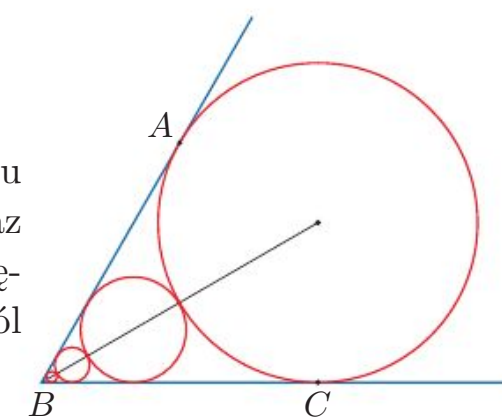
14. Kwotę 20 000 zł podzielono na dwie części. Jedną część wpłacono do banku A na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku, a drugą – do banku B na lokatę oprocentowaną 4% w skali roku. W obu bankach kapitalizacja odsetek była roczna. Po roku odebrano z obu banków łącznie 21 100 zł. Jaką kwotę wpłacono do banku A, a jaką – do banku B?

15. Kapitał w wysokości 1000 zł został złożony w banku oferującym kapitalizację miesięczną. Oblicz wysokość kapitału po dwóch latach, jeśli w pierwszym roku roczna stopa procentowa wynosiła:

a) 6%, a w drugim roku – 3%,

b) 3%, a w drugim roku – 6%.

D 16. Cztery okręgi są położone jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$ oraz $|AB| = 2\sqrt{3}$ cm, to suma długości tych okręgów jest większa od 18,6 cm. Oblicz sumę pól kół ograniczonych tymi okręgami.



17. Pola pięciu trójkątów równobocznych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$, a suma tych pól jest równa $31\sqrt{3}$. Oblicz obwód największego spośród tych trójkątów.

**Przykład 1**

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = 2n^2$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, należy sprawdzić, czy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$.

Dla $n > 1$ wyraz a_n możemy wyznaczyć ze wzoru $a_n = S_n - S_{n-1}$:

$$a_n = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 2n^2 - 2(n^2 - 2n + 1) = 4n - 2$$

Stąd $a_{n+1} = 4(n+1) - 2 = 4n + 2$.

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4n + 2 - (4n - 2) = 4$ dla $n > 1$.

Należy jeszcze obliczyć różnicę $a_2 - a_1$:

$$a_2 - a_1 = (4 \cdot 2 - 2) - 2 = 4$$

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, więc ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

→ Zadanie 20, str. 156

Przykład 2

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = n^2 - 4$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = S_1 = 1^2 - 4 = -3$.

Wyznaczamy wyraz a_n dla $n > 1$:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 4) - ((n-1)^2 - 4) = 2n - 1$$

Stąd $a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1$.

Różnica $a_{n+1} - a_n = 2n + 1 - (2n - 1) = 2$ dla $n > 1$.

Obliczamy $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ oraz różnicę $a_2 - a_1 = 3 - (-3) = 6 \neq 2$.

Otrzymaliśmy $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

→ Zadanie 20, str. 156

Przykład 3

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = 2n + 3$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

Wyznaczamy wyraz a_n dla $n > 1$:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n + 3) - (2(n-1) + 3) = 2$$

Zatem dla $n > 1$ wszystkie wyrazy są równe 2, ale $a_1 = 5$.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

→ Zadanie 20, str. 156



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Liczba 6 jest piątym wyrazem ciągu (a_n) o wzorze ogólnym

A. $a_n = (n-1)^2 + 5$

C. $a_n = (n-3)^2 + 5$

B. $a_n = (n-2)^2 + 5$

D. $a_n = (n-4)^2 + 5$

Zadanie 2 (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n+6}{n}$. Żaden wyraz tego ciągu nie jest równy

A. 8

B. 6

C. 5

D. 3

Zadanie 3 (0–1)

Ciągiem malejącym jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym

A. $a_n = n(2-n)$

C. $a_n = n(4-n)$

B. $a_n = n(3-n)$

D. $a_n = n(5-n)$

Zadanie 4 (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 7(n-1) + 4$. Jest to ciąg arytmetyczny o różnicy równej

A. -4

B. -3

C. 4

D. 7

Zadanie 5 (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \sqrt{2} \cdot n - 1$. Suma S_5 tego ciągu jest równa

A. $5\sqrt{2} - 1$

B. $10\sqrt{2} - 1$

C. $10\sqrt{2} - 5$

D. $15\sqrt{2} - 5$

Zadanie 6 (0–1)

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym wyraz $a_4 = 36$ i iloraz $q = 3$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{4}{9}$

B. $1\frac{1}{3}$

C. 4

D. 12

Zadanie 7 (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 54 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest liczbą należącą do przedziału

A. $[-18; -16]$

B. $[-16; -14]$

C. $[-14; -12]$

D. $[-12; -10]$

Zadanie 8 (0–1)

Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 2. Suma wyrazów a_{11} i a_{21} tego ciągu jest równa

A. 120

B. 124

C. 128

D. 132



Zadanie 9 (0–1)

Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1. Suma wyrazów ciągu (a_n) większych od 10 i mniejszych od 100 jest równa

- A. 1535 B. 1540 C. 1595 D. 1760

Zadanie 10 (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}n - 6$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.	P	F
Ciąg (a_n) ma dziewięć wyrazów ujemnych.	P	F

Zadanie 11

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 4n^2 - 40n + 96$.

Zadanie 11.1 (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) ma dwa wyrazy równe 0.	P	F
Najmniejszy wyraz ciągu (a_n) jest równy -4 .	P	F

Zadanie 11.2 (0–2)

Wyznacz liczbę wyrazów ciągu (a_n) mniejszych od 32.

Zadanie 12 (0–1)

Ciąg geometryczny (a_n) dany jest wzorem $a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. Oznaczmy przez q iloraz tego ciągu.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) jest ciągiem

A.	rosnącym	oraz	1.	$a_1 = -3$ i $q = \frac{1}{2}$.
			2.	$a_1 = -3$ i $q = \frac{1}{4}$.
B.	malejącym		3.	$a_1 = -\frac{3}{4}$ i $q = \frac{1}{4}$.



Zadanie 13 (0–2)

Dany jest ciąg arytmetyczny o różnicy r .

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Ciąg ten jest malejący dla

- A. $r = 3 - 2\sqrt{2}$ C. $r = 3\sqrt{3} - 5$ E. $r = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$
B. $r = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $r = 2\sqrt{3} - \frac{7}{2}$ F. $r = \pi - 3\sqrt{3}$

Zadanie 14 (0–1)

Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb nieparzystych dodatnich.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Suma stu początkowych wyrazów tego ciągu jest

liczbą podzielną przez 11.	P	F
równa 9999.	P	F

Zadanie 15 (0–1)

Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie 8 jest równa 57,5.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy $3\frac{1}{2}$.	P	F
Różnica tego ciągu jest równa $\frac{1}{2}$.	P	F

Zadanie 16 (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = -\sqrt{2}a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ jest równy

- A. 2048 B. 1024 C. -1024 D. -2048

2. Suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ jest równa

- E. $32 - 16\sqrt{2}$ F. $28 - 12\sqrt{2}$ G. $24 - 10\sqrt{2}$ H. $20 - 8\sqrt{2}$

**Zadanie 17**

Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym.

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 - n + 3 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Zadanie 17.1 (0-2)

Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

D Zadanie 17.2 (0-2)

Wykaż, że jest to ciąg monotoniczny.

Zadanie 18 (0-2)

Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a iloraz 4. Z ilu wyrazów składa się ten ciąg?

Zadanie 19 (0-3)

Suma trzech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie 2 jest równa 26. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

Zadanie 20 (0-4) → Przykłady 1-3, str. 152

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest wzorem $S_n = 6n - 2n^2$. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 21 (0-4)

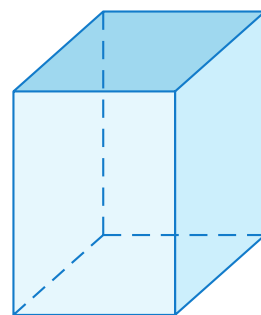
Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 24, a długości jego boków tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Zadanie 22 (0-4)

Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Zadanie 23 (0-4)

Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny. Suma długości tych krawędzi jest równa 14 cm, a objętość prostopadłościanu jest równa 64 cm^3 . Oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

**Zadanie 24 (0-4)**

Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 30 oraz $a_2 \cdot a_4 = 11$. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?

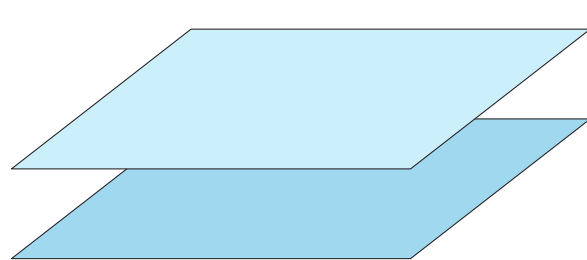
4 Graniastopy i ostropy

Piramidy w Gizie zbudowano na przełomie XXVI i XXV w. p.n.e. Największa z nich – Piramida Cheopsa (po lewej na zdjęciu) – miała około 146 m wysokości, a jej podstawą był kwadrat o boku długości 230 m. Aby obliczyć objętość piramidy, korzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$, gdzie P_p jest polem podstawy ostrosłupa, a H – jego wysokością. Objętość Piramidy Cheopsa wynosiła około $2\,600\,000 \text{ m}^3$. Obecnie jej wymiary są nieco mniejsze.

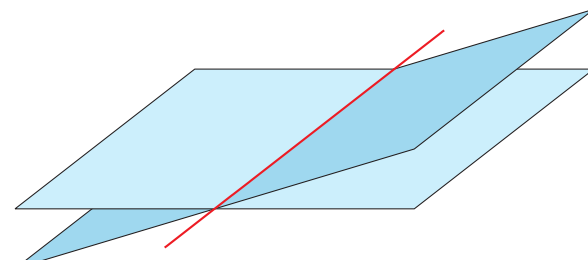


4.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn



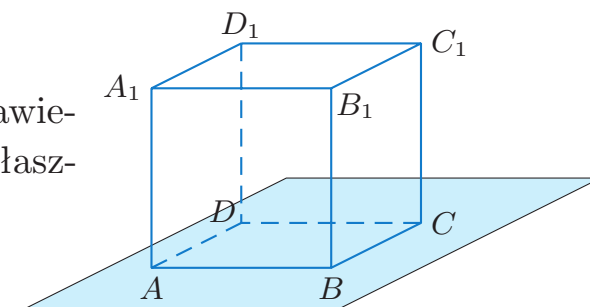
Płaszczyzny **równoległe** – nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Płaszczyzny **przecinające się** – ich częścią wspólną jest prosta.

Przykład 1

W sześcianie (rysunek obok) płaszczyzna zawierająca podstawę $ABCD$ jest równoległa do płaszczyzny zawierającej podstawę $A_1B_1C_1D_1$.



Ćwiczenie 1

Wskaż na rysunku powyżej ścianę sześcianu zawartą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny zawierającej ścianę:

- a) ADD_1A_1 , b) DCC_1D_1 .

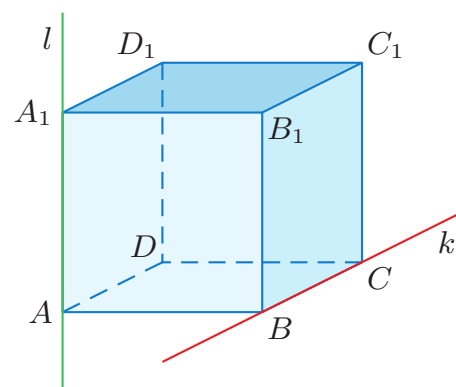
Przez każde trzy punkty nieleżące na jednej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna. Dlatego aby opisać płaszczyznę, wystarczy podać trzy niewspółliniowe punkty należące do niej.

Ćwiczenie 2

Wymienione wierzchołki sześcianu przedstawionego na rysunku obok należą odpowiednio do płaszczyzn P_1, P_2, P_3, P_4 :

- $P_1: A, D, D_1$, $P_3: B, B_1, C_1$,
 $P_2: A, B, D$, $P_4: B, B_1, A_1$.

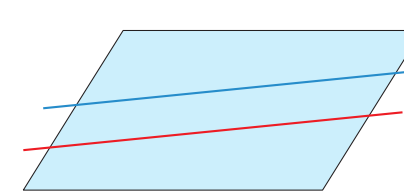
Które z tych płaszczyzn przecinają się wzdłuż prostej l , a które – wzdłuż prostej k ?



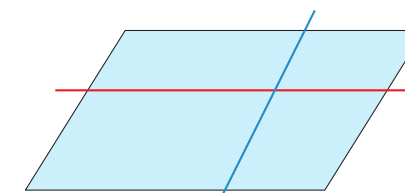
Ćwiczenie 3

Ściany sześcianu są zawarte w sześciu różnych płaszczyznach. Wskaż na rysunku z ćwiczenia 2. dowolne trzy wierzchołki sześcianu należące do płaszczyzny przecinającej te sześć płaszczyzn.

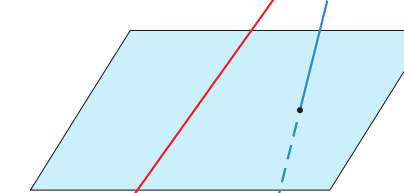
Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni



Proste **równoległe** leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Proste **przecinające się** leżą w jednej płaszczyźnie i mają dokładnie jeden punkt wspólny.

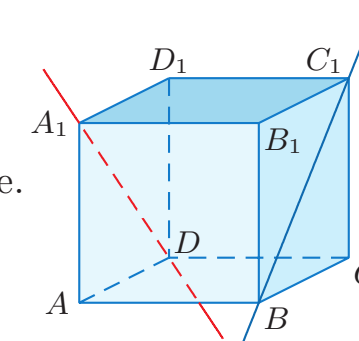


Proste **skośne** nie leżą w jednej płaszczyźnie, zatem nie mają punktów wspólnych.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono sześcian.

- Proste zawierające krawędzie AB i DC są równoległe.
- Proste zawierające krawędzie AB i CC_1 są skośne.
- Proste zawierające odcinki A_1D i BC_1 są skośne.



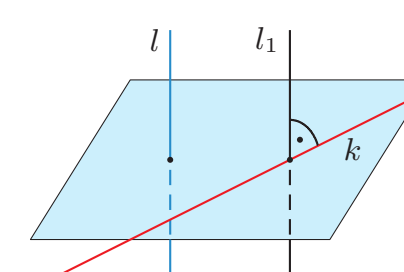
Ćwiczenie 4

Czy podane odcinki w sześcianie na rysunku powyżej są skośne?

- a) AC i A_1C_1 b) AC i DD_1 c) AB_1 i DC_1

Mówimy, że prosta l , skośna do prostej k , jest do prostej k **prostopadła**, jeśli istnieje prosta l_1 równoległa do prostej l i przecinająca prostą k pod kątem prostym.

Zauważmy, że każda prosta równoległa do prostej l_1 jest również prostopadła do prostej k .

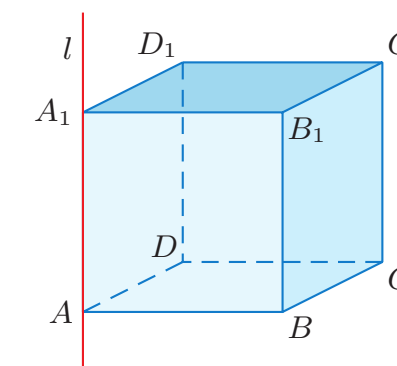


Uwaga. Proste prostopadłe są skośne lub się przecinają (gdy leżą w jednej płaszczyźnie).

Ćwiczenie 5

Prosta l zawiera krawędź AA_1 sześcianu (rysunek obok). Wskaż pozostałe krawędzie tego sześcianu, które są:

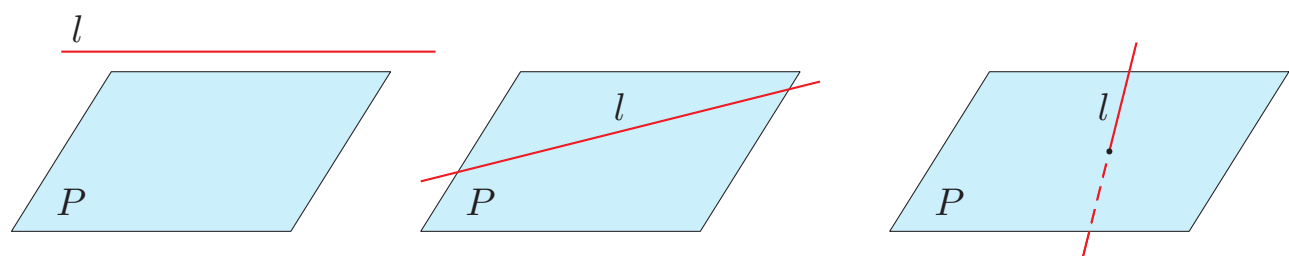
- a) równoległe do prostej l ,
 b) prostopadłe do prostej l .



Ćwiczenie 6

Wskaż na rysunku z ćwiczenia 5. pary wierzchołków sześcianu wyznaczające proste skośne nieprostopadłe do prostej l .

Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni



Prosta l jest **równoległa** do płaszczyzny P , jeśli nie ma ona punktów wspólnych z tą płaszczyzną lub jest w niej zawarta.

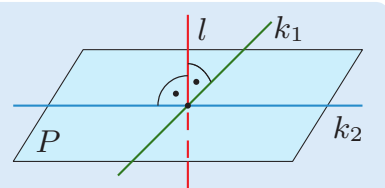
Jeśli prosta l ma z płaszczyzną P dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że prosta l **przecina** płaszczyznę P .

O prostej l , która jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie P , mówimy, że jest **prostopadła** do płaszczyzny P .

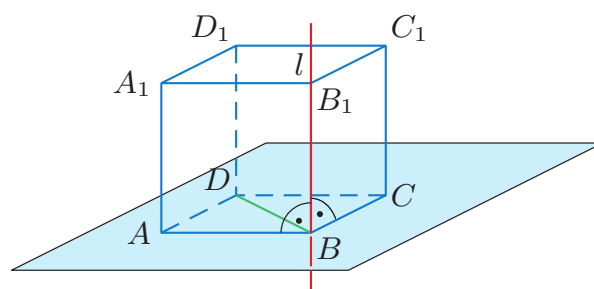
Aby wykazać, że prosta jest prostopadła do płaszczyzny, nie musimy wykazywać, że jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie.

Warunek prostopadłości prostej do płaszczyzny

Jeśli prosta l jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie P , to jest ona prostopadła do płaszczyzny P .



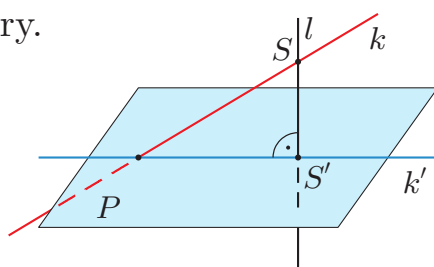
Prosta l zawierająca krawędź BB_1 sześcianu (rysunek obok) jest prostopadła do krawędzi AB i BC jego podstawy. Zatem jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej podstawę sześcianu. W szczególności jest prostopadła do przekątnej BD podstawy.



Dla dowolnego punktu S możemy poprowadzić prostą l przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do płaszczyzny P . Punkt przecięcia prostej l z płaszczyzną P nazywamy **rzutem prostokątnym** punktu S na płaszczyznę P .

Rzutem prostokątnym figury na płaszczyznę jest figura składająca się z rzutów prostokątnych wszystkich punktów rzutowanej figury.

Na rysunku obok rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę P jest punkt S' , a rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę jest prosta k' .

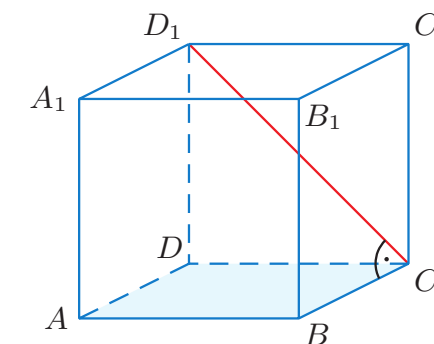


Ćwiczenie 7

Odcinek $R'S'$ jest rzutem prostokątnym odcinka RS na płaszczyznę P . Czy odcinek $R'S'$ może być dłuższy od odcinka RS ? Odpowiedź uzasadnij.

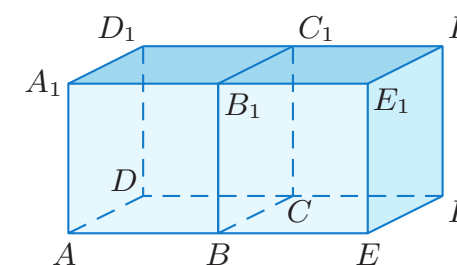
Zadania

- Które krawędzie sześcianu przedstawionego na rysunku obok są prostopadłe do płaszczyzny zawierającej podstawę $ABCD$?
 - Odcinek CD_1 tworzy kąt prosty z krawędzią BC podstawy sześcianu. Czy odcinek CD_1 jest prostopadły do podstawy $ABCD$? Odpowiedź uzasadnij.

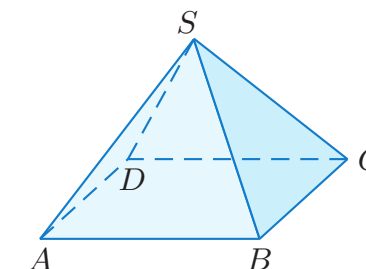


- Wskaż na rysunku z zadania 1. proste zawierające krawędzie sześcianu i prostopadłe do prostej BD . Które z tych prostych przecinają prostą BD , a które są do niej skośne?

- Dwa sześciany mają wspólną ścianę BCC_1B_1 (rysunek obok). Wskaż pary wierzchołków tych sześcianów wyznaczające proste równoległe do podanej prostej oraz pary wierzchołków wyznaczające proste do niej prostopadłe.
 - EF_1
 - A_1C_1



- Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat. Wskaż krawędzie tego ostrosłupa zawarte w prostych:
 - równoległych,
 - skośnych.

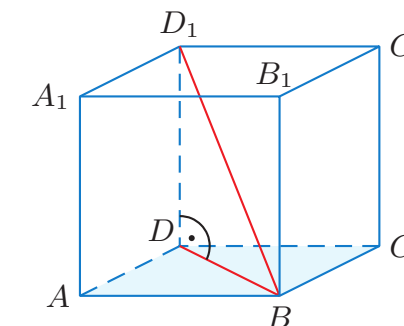


- D** 5. Dla prostych k, l, m leżących w tej samej płaszczyźnie zachodzi zależność: jeśli $k \perp l$ i $l \perp m$, to $k \parallel m$. Uzasadnij, że analogiczna zależność nie zachodzi dla prostych w przestrzeni.

Sprawdź się

- Prosta k zawiera jedną z krawędzi sześcianu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ile różnych płaszczyzn przechodzących przez dowolne cztery wierzchołki tego sześcianu przecina się wzdłuż prostej k ?

- Rzutem prostokątnym odcinka BD_1 na ścianę $ABCD$ sześcianu jest odcinek BD (rysunek obok). Wskaż odcinek będący rzutem prostokątnym odcinka BD_1 na ścianę:
 - $A_1 B_1 C_1 D_1$,
 - $ADD_1 A_1$,
 - $BCC_1 B_1$.



Przedstawianie graniastosłupów na rysunkach

Podstawową zasadą przy rysowaniu graniastosłupów jest zachowanie równoległości odcinków odpowiadających równoległym krawędziom graniastosłupa.

■ Prostopadłościan

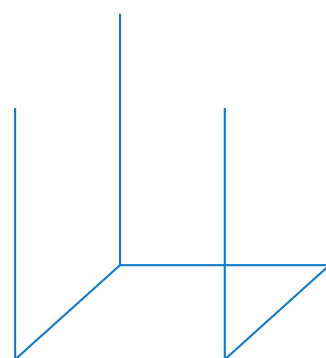
Krok 1.

Rysujemy dolną podstawę prostopadłościanu – w rzeczywistości jest ona prostokątem, ale na rysunku ma kształt równoległoboku.



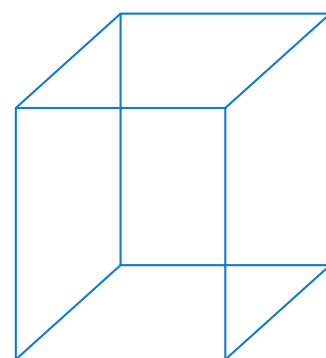
Krok 2.

Rysujemy krawędzie boczne w postaci czterech odcinków równoległych i równej długości.



Krok 3.

Łączymy wolne końce odcinków reprezentujących krawędzie boczne i otrzymujemy górną podstawę prostopadłościanu.

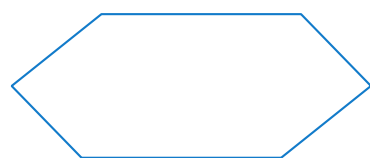


■ Graniastosłup o podstawie sześciokąta

Na rysunkach poniżej pokazano, jak narysować graniastosłup prosty, którego podstawą jest sześciokąt foremny.

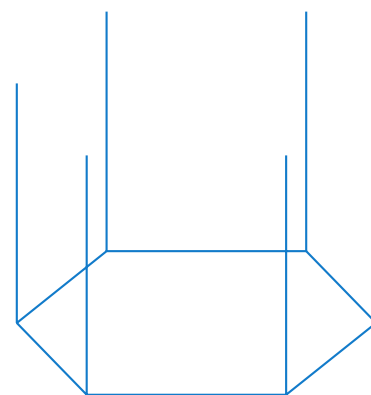
Krok 1.

Rysujemy dolną podstawę graniastosłupa – w rzeczywistości jest ona sześciokątem foremnym, ale na rysunku ma kształt sześciokąta o trzech parach boków równoległych różnej długości.



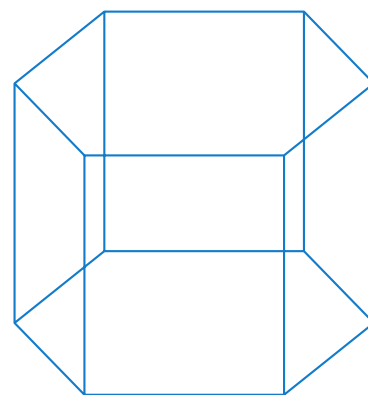
Krok 2.

Rysujemy krawędzie boczne w postaci sześciu odcinków równoległych i równej długości.



Krok 3.

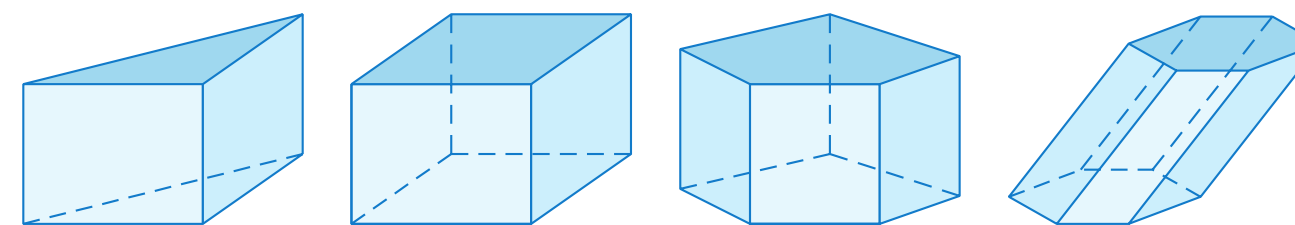
Łączymy wolne końce odcinków reprezentujących krawędzie boczne i otrzymujemy górną podstawę graniastosłupa.



1. Narysuj graniastosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt.
2. Narysuj graniastosłup prosty, którego podstawą jest pięciokąt.

4.2. Graniastosłupy

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane **podstawami**, są przystającymi wielokątami zawartymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane **ścianami bocznymi**, są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.



Jeśli krawędzie boczne graniastosłupa są prostopadłe do podstaw, to graniastosłup nazywamy **prostym**, w przeciwnym razie graniastosłup nazywamy **pochyłym**. Ściany boczne dowolnego graniastosłupa prostego są prostokątami. Dowolny odcinek, który łączy płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i jest do nich prostopadły, nazywamy **wysokością** graniastosłupa.

Powierzchnię boczną graniastosłupa stanowią wszystkie jego ściany boczne.

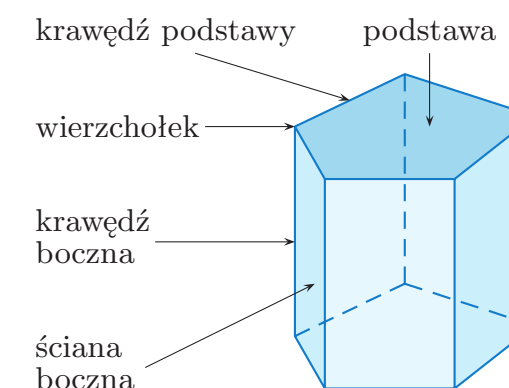
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Ćwiczenie 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego, którego wysokość jest równa 30 cm, a podstawą jest trójkąt o bokach 6 cm, 8 cm i 10 cm.

W zależności od tego, jakim wielokątem jest podstawa graniastosłupa, mówimy o graniastosłupie trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. Graniastosłup pięciokątny przedstawiony na rysunku obok ma 7 ścian (2 podstawy i 5 ścian bocznych), 15 krawędzi (10 krawędzi podstawy i 5 krawędzi bocznych) oraz 10 wierzchołków.



Ćwiczenie 2

Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupa:

- a) trójkątnego, b) czworokątnego, c) sześciokątnego.

Ćwiczenie 3

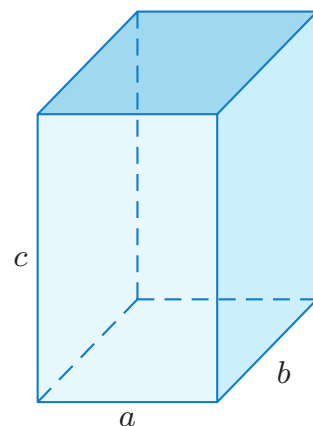
Czy istnieje graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa: a) 21, b) 25?

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt, nazywamy **prostopadłościanem**.

Uwaga. Za podstawę prostopadłościanu możemy przyjąć jego dowolną ścianę.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości a , b , c wyraża się wzorem:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

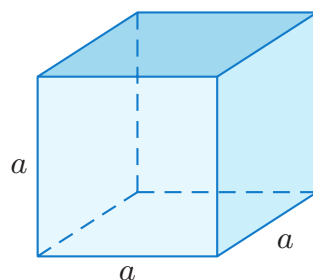


Ćwiczenie 4

Długości krawędzi podstawy prostopadłościanu są równe 4 cm i 6 cm. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu w przypadku, gdy jego pole powierzchni:

- całkowitej wynosi 100 cm^2 ,
- bocznej stanowi 60% pola powierzchni całkowitej.

Prostopadłościan o wszystkich krawędziach równych nazywamy **sześcianem**. Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a jest równe $6a^2$.

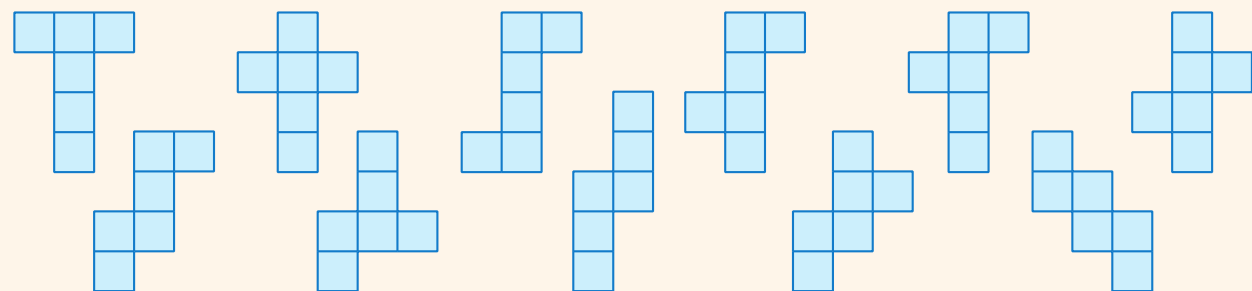


Ćwiczenie 5

Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 96 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.

Czy wiesz, że...

Istnieje 11 różnych siatek, z których można złożyć model sześcianu.



Ćwiczenie 6

Suma oczek znajdujących się na przeciwległych ścianach sześciennej kostki do gry jest równa 7. Czy przedstawiona siatka może być siatką tej kostki?

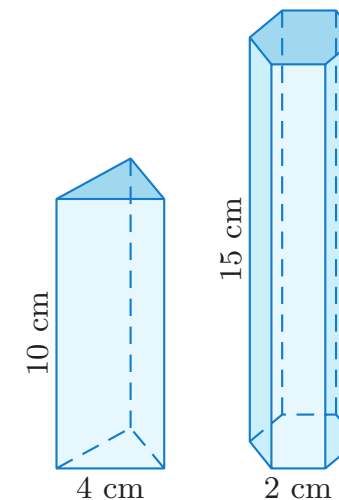


Definicja

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, nazywamy **prawidłowym**.

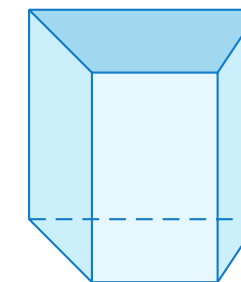
Ćwiczenie 7

Wymiary dwóch graniastosłupów prawidłowych, trójkątnego i sześciokątnego, podano na rysunku obok. Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej jednego z tych graniastosłupów jest o 50% większe od pola powierzchni całkowitej drugiego.

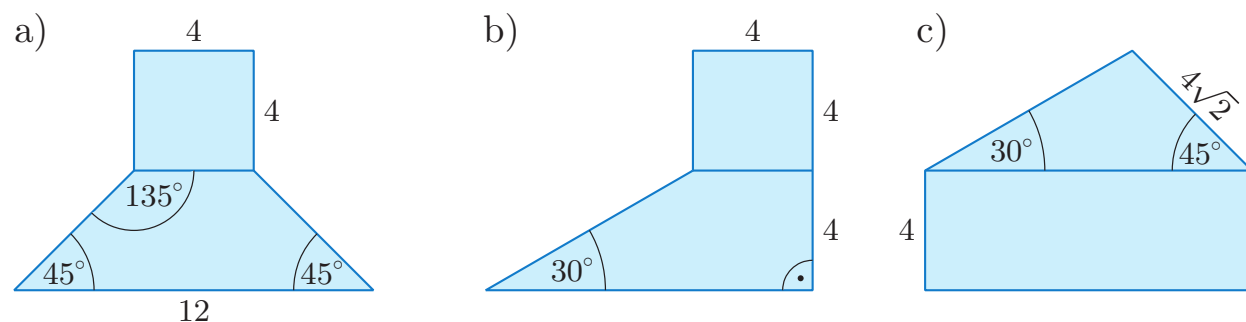


Zadania

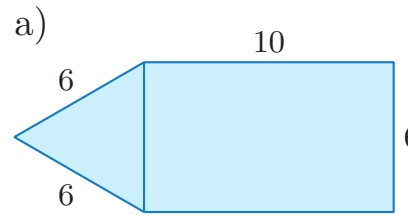
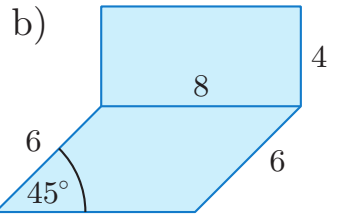
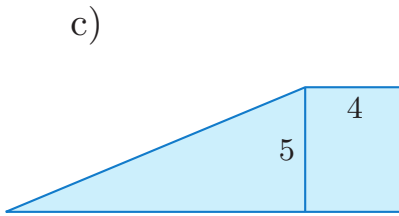
- Do wykonania modelu sześcianu zużyto 1620 cm^2 kartonu, z czego 20% stanowiły zakładki. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.
- Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego o wysokości 8 cm, którego podstawą jest:
 - romb o kącie ostrym 30° i boku długości 12 cm,
 - romb o przekątnych długości 15 cm i 20 cm.
- Podstawą graniastosłupa prostego (rysunek obok) jest trapez równoramienny o bokach długości 12 cm, 5 cm, 6 cm i 5 cm. Oblicz wysokość tego graniastosłupa w przypadku, gdy:
 - jego pole powierzchni bocznej jest równe 560 cm^2 ,
 - jego pole powierzchni całkowitej jest równe 492 cm^2 .
- Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prostego jest równa 78 cm. Jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 cm i 12 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
- Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o obwodzie 24 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa przeciwprostokątnej podstawy, a pole największej ściany bocznej jest równe 100 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego wielościanu.
- Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o kącie ostrym 60° i podstawach, których długości są w stosunku 2 : 1. Wysokość graniastosłupa jest równa 5 cm, a jego pole powierzchni bocznej wynosi 100 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



7. Prostokąt o bokach długości 2 cm i 4 cm jest jedną ze ścian bocznych graniastoslupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa oraz narysuj jego siatkę. Rozpatrz dwa przypadki.
8. Ściana boczna graniastoslupa prawidłowego czworokątnego to prostokąt o bokach długości x cm i $(x + 1)$ cm oraz przekątnej długości $(x + 2)$ cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa oraz narysuj jego siatkę. Rozpatrz dwa przypadki.
9. Wszystkie krawędzie graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego mają równe długości, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe $96 + 48\sqrt{3}$. Oblicz wysokość tego graniastoslupa oraz narysuj jego siatkę.
10. Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastoslupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.



Sprawdź się

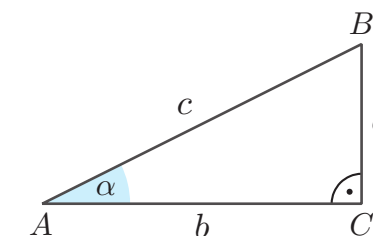
11. Podstawą graniastoslupa prostego o wysokości 11 cm jest trójkąt równoramienny o jednym z kątów 120° i ramionach długości 8 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastoslupa.
12. Na rysunku poniżej przedstawiono fragment siatki graniastoslupa prostego. Narysuj całą siatkę tego graniastoslupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.
- a)  b)  c) 
13. Narysuj siatkę graniastoslupa prawidłowego n -kątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 2 cm, i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.
- a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 6$

Przypomnij sobie

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Niech α będzie kątem ostrym trójkąta prostokątnego. Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

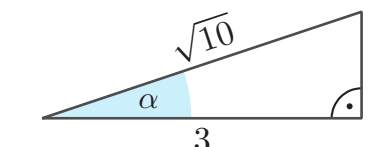


Cosinus i tangens kąta α definiujemy następująco:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

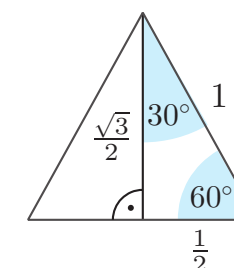
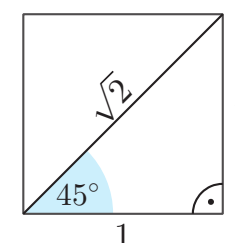
Na przykład dla kąta α na rysunku obok:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$



Wartości funkcji trygonometrycznych nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α .

Podane w tabeli wartości można wyznaczyć, korzystając z poniższych rysunków.



α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych przyprostokątnych.

a) $a = 3, b = 4$ b) $a = 9, b = 12$ c) $a = 5, b = 12$ d) $a = 1, b = 2$
- W trójkącie prostokątnym dane są długość przeciwprostokątnej c oraz sinus lub cosinus kąta ostrego α . Oblicz długości przyprostokątnych.

a) $c = 10, \sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $c = 25, \sin \alpha = 0,28$ c) $c = 9, \cos \alpha = \frac{2}{3}$
- W trójkącie prostokątnym dane są tangens kąta ostrego α oraz długość boku a leżącego naprzeciwko kąta α . Oblicz obwód tego trójkąta. Wyznacz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2,4, a = 10$ b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}, a = 4$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 2, a = 6$
- Uzasadnij, że między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α zachodzi podana zależność.

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ c) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

4.3. Odcinki w graniastosłupach

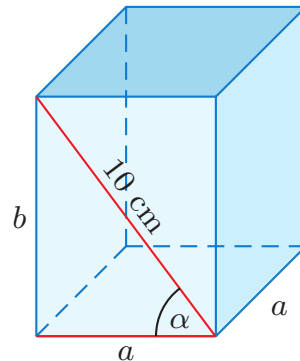
Przykład 1

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

Zauważmy, że $\cos \alpha = \frac{a}{10}$, więc $a = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$ [cm].

$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ [cm]}$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej: $P_b = 4ab = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$ [cm²].

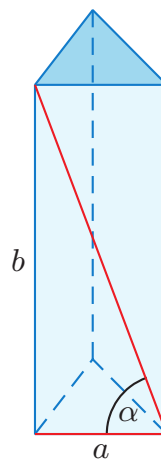


Ćwiczenie 1

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 25 cm i tworzy z krawędzią boczną kąt α taki, że $\sin \alpha = 0,28$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

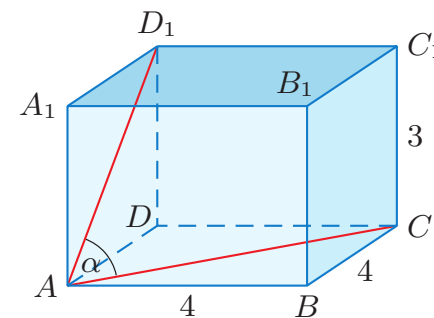
Ćwiczenie 2

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa w przypadku, gdy: a) $a = 6$ cm, b) $b = 6$ cm.



Przykład 2

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy równej 4 i wysokości 3 (rysunek obok). Oblicz cosinus kąta α zawartego między przekątną AD_1 ściany bocznej a przekątną AC podstawy tego graniastosłupa.



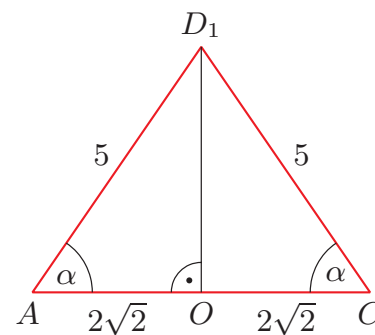
Ściany boczne tego graniastosłupa są prostokątami o bokach długości 3 i 4, zatem ich przekątne mają długość równą 5: $|AD_1| = |CD_1| = 5$.

Rozpatrujemy trójkąt równoramienny ACD_1 (rysunek obok). Odcinek AC jest przekątną podstawy graniastosłupa, więc $|AC| = 4\sqrt{2}$, stąd:

$$|AO| = \frac{1}{2}|AC| = 2\sqrt{2}$$

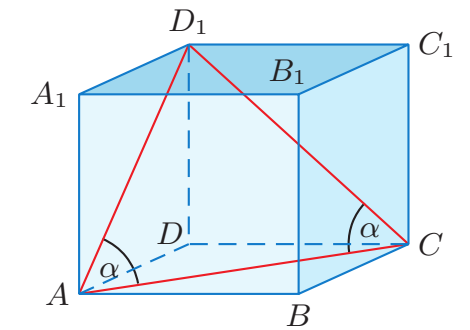
Zatem:

$$\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AD_1|} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$



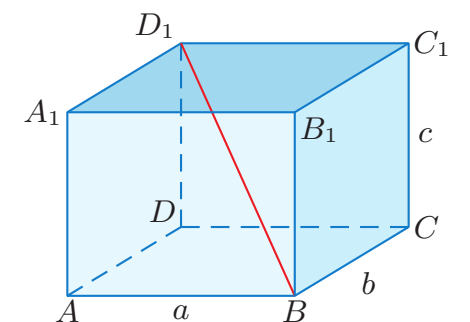
Ćwiczenie 3

Przekątne AD_1 i CD_1 ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego mają długość równą 8 cm (rysunek obok). Tworzą one z przekątną podstawy kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.



Przekątną graniastosłupa nazywamy taki odcinek łączący dwa jego wierzchołki, który nie jest zawarty w żadnej ścianie graniastosłupa.

Prostopadłościan ma cztery przekątne, wszystkie tej samej długości. Na rysunku obok są to odcinki AC_1 , BD_1 , CA_1 i DB_1 .



Zwróć uwagę na to, że przekątna ściany bocznej graniastosłupa nie jest przekątną graniastosłupa oraz że graniastosłup trójkątny nie ma przekątnych.

D Ćwiczenie 4

- Uzasadnij podany obok wzór.
- Uzasadnij, że przekątna sześcianu o krawędzi a ma długość równą $a\sqrt{3}$.

Przekątna prostopadłościanu o krawędziach długości a , b , c ma długość równą:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Przykład 3

Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy $|AB| = 5$ i $|BC| = 4$ oraz wysokości 3 (rysunek obok). Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu oraz kąt, który ta przekątna tworzy z przekątną ściany bocznej (kąt α na rysunku).

Przekątna prostopadłościanu ma długość:

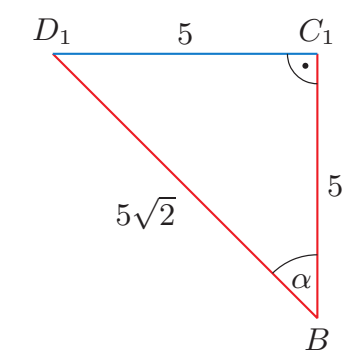
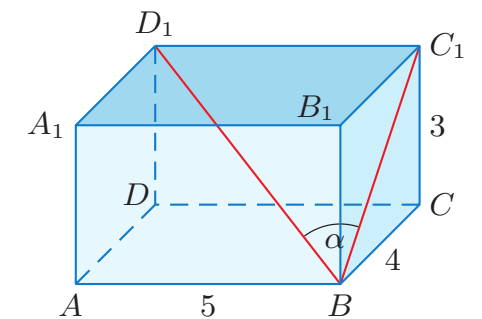
$$|BD_1| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Krawędź D_1C_1 jest prostopadła do krawędzi C_1B_1 i C_1C , jest więc również prostopadła do przekątnej BC_1 ściany bocznej. Zatem trójkąt BC_1D_1 jest prostokątny (rysunek obok).

Przekątna ściany bocznej BCC_1B_1 jest przekątną prostokąta o bokach długości 3 i 4, zatem:

$$|BC_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 = |C_1D_1|$$

Trójkąt BC_1D_1 jest równoramienny, więc $\alpha = 45^\circ$.



Ćwiczenie 5

Oblicz długości przekątnych wszystkich ścian oraz długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach:

- a) 5, 9, 12, b) 6, 8, 15.

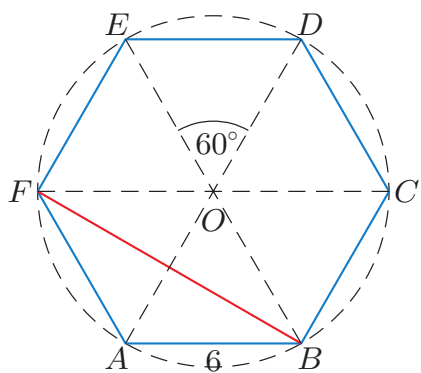
Ćwiczenie 6

Z tego samego wierzchołka sześcianu poprowadzono jego przekątną i przekątną podstawy (rysunek obok). Tworzą one kąt α . Oblicz cosinus tego kąta.

Przykład 4

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy 6 i wysokości 5.

- a) Oblicz długość przekątnej BF_1 tego graniastosłupa (rysunek obok).



Podstawą tego graniastosłupa jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku 6 (rysunek obok). Trójkąt BCF jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym w wierzchołku B , $|BC| = 6$ oraz $|CF| = 12$. Odcinek BF – krótsza przekątna podstawy – ma długość $6\sqrt{3}$ (uzasadnij to). Odcinek BF_1 jest przeciwprostokątną trójkąta BFF_1 , zatem:

$$|BF_1| = \sqrt{|BF|^2 + |FF_1|^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{108 + 25} = \sqrt{133}$$

- b) Oblicz długość przekątnej BE_1 tego graniastosłupa oraz cosinus kąta α , który ta przekątna tworzy z krawędzią boczną EE_1 (rysunek obok).

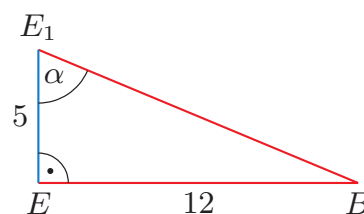
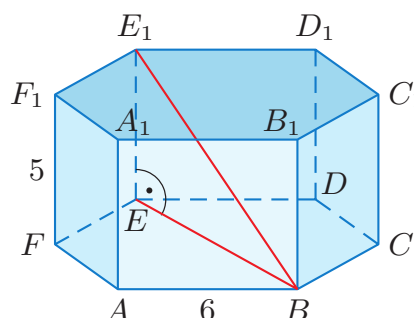
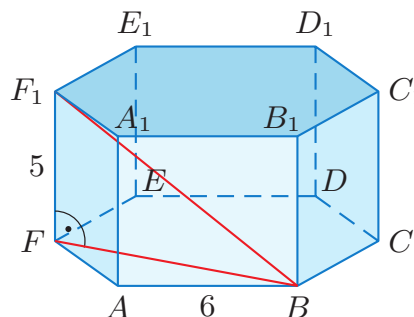
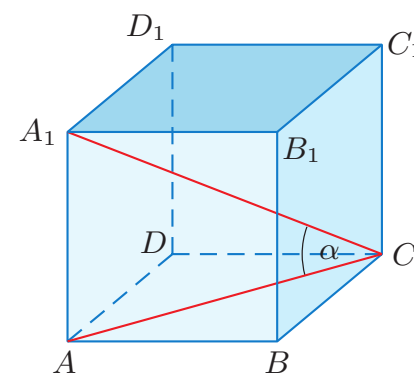
Odcinek BE – dłuższa przekątna podstawy – ma długość 12 (uzasadnij to). Odcinek BE_1 jest przeciwprostokątną trójkąta BEE_1 (rysunek poniżej), zatem:

$$|BE_1| = \sqrt{|BE|^2 + |EE_1|^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

oraz:

$$\cos \alpha = \frac{|EE_1|}{|BE_1|} = \frac{5}{13}$$

Uwaga. Każdy graniastosłup prawidłowy sześciokątny ma przekątne dokładnie dwóch długości.



Ćwiczenie 7

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa.

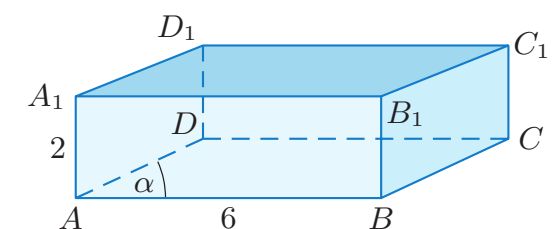
Ćwiczenie 8

Ile przekątnych ma graniastosłup prawidłowy n -kątny dla:

- a) $n = 5$, b) $n = 6$, c) $n = 8$?

Zadania

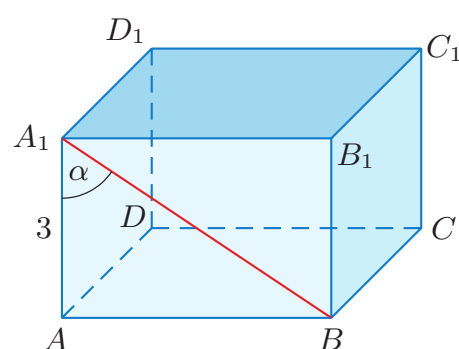
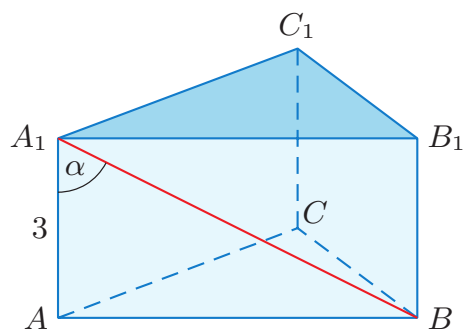
- Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 5 cm, a przekątna jego ściany bocznej tworzy:
 - z krawędzią podstawy kąt 30° ,
 - z krawędzią boczną kąt 30° ,
 - z przekątną graniastosłupa kąt 30° .
- Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{6}$, a jego wysokość jest równa 8. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
- Oblicz długość przekątnych prostopadłościanu o podanych długościach krawędzi.
 - 1 cm, 2 cm, 3 cm b) 2 cm, 4 cm, 6 cm c) $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm, 2 cm
- Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 3 cm jest dwa razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz długość przekątnej tego graniastosłupa i cosinus kąta, który ta przekątna tworzy z krawędzią boczną.
- Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest trzy razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego graniastosłupa a jego krawędzią boczną.
- Podstawą graniastosłupa o wysokości 2 jest romb o boku 6 i kącie ostrym $\alpha = 60^\circ$ (rysunek obok). Oblicz cosinusy kątów, które przekątne tego graniastosłupa tworzą z jego krawędziami bocznymi.
- Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 26 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.



- D** 8. Uzasadnij, że graniastosłup n -kątny ma $n(n - 3)$ przekątnych.
9. Ile wierzchołków ma graniastosłup, który ma 54 przekątne?
10. Liczba przekątnych graniastosłupa n -kątnego jest o 24 większa od liczby przekątnych jego wszystkich ścian bocznych. Oblicz n .
11. Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 cm, a jego wysokość jest równa 5 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
12. Różnica długości dłuższej przekątnej i krótszej przekątnej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie są równe, wynosi 2 cm. Oblicz długość krawędzi tego graniastosłupa.
13. Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a dłuższa przekątna jest trzy razy dłuższa od krótszej przekątnej podstawy.

Sprawdź się

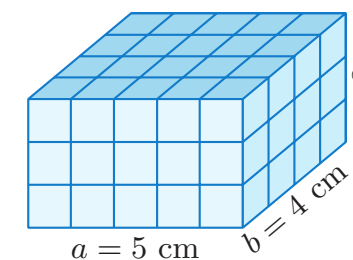
14. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy o krawędzi bocznej równej 3. Przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią boczną kąt α . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa w przypadku, gdy:
- a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, b) $\tan \alpha = \frac{3}{2}$.



15. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 cm, a przekątna ta tworzy:
- a) z przekątną podstawy kąt 45° ,
b) z krawędzią boczną kąt 30° ,
c) z przekątną ściany bocznej kąt 30° .
16. Wysokość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 4, a jego pole podstawy jest równe $6\sqrt{3}$. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa.

4.4. Objętość graniastosłupa

Objętość prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ wyraża się za pomocą wzoru $V = abc$.



Przykład 1

Prostopadłościan przedstawiony na rysunku powyżej ma objętość równą $5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$. Zauważ, że można go podzielić na 60 sześciątów, z których każdy ma objętość 1 cm^3 .

Ćwiczenie 1

Dane są prostopadłościany P_1 i P_2 o wymiarach:

$$P_1: 15 \text{ cm} \times 2 \text{ dm} \times 10 \text{ cm}, \quad P_2: 0,12 \text{ m} \times 1,2 \text{ dm} \times 22 \text{ cm}$$

Który z nich ma większą objętość?

Ćwiczenie 2

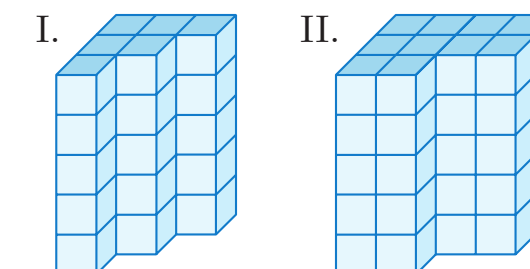
Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe $1,5 \text{ dm}^2$. Oblicz objętość tego sześcianu.

Objętość sześcianu o krawędzi długości a wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = a^3$$

Ćwiczenie 3

Na rysunkach obok przedstawiono graniastosłupy ułożone z sześciennych kostek, z których każda ma objętość 1 cm^3 . Oblicz objętości tych graniastosłupów.



Objętość dowolnego graniastosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie P_p jest polem podstawy graniastosłupa, a H – jego wysokością.

Przykład 2

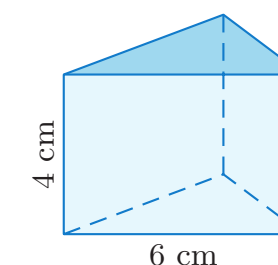
Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 4 cm.

Podstawą tego graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, zatem:

$$P_p = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obliczamy objętość graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot H = 9\sqrt{3} \cdot 4 = 36\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$



Ćwiczenie 4

- Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, który ma sześć krawędzi długości 12 cm i trzy krawędzie długości 5 cm.
- Wyznacz wzór na objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość a .
- Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 5 cm, a jego pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól jego podstaw. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Przykład 3

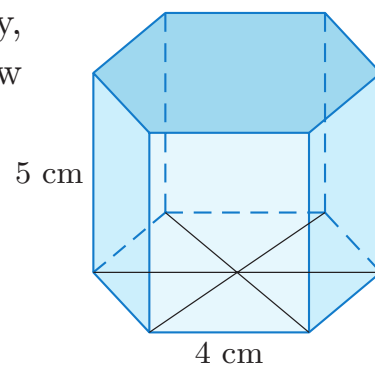
Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 5 cm.

Podstawą tego graniastosłupa jest sześciokąt foremny, który można podzielić na sześć przystających trójkątów równobocznych o boku 4 cm. Zatem:

$$P_p = 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obliczamy objętość graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot H = 24\sqrt{3} \cdot 5 = 120\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

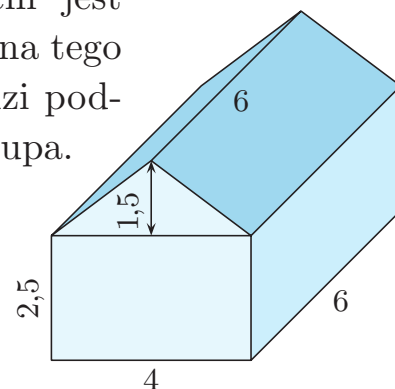


Ćwiczenie 5

- Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 4 cm, którego pole powierzchni bocznej jest równe 180 cm^2 .
- Wyznacz wzór na objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość a .

Ćwiczenie 6

- Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 6 cm i 8 cm. Wszystkie krawędzie tego graniastosłupa mają równą długość. Oblicz jego objętość.
- Podstawą graniastosłupa prostego o objętości 216 cm^3 jest romb, którego kąt ostry ma miarę 30° . Krawędź boczna tego graniastosłupa jest dwa razy dłuższa od jego krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.



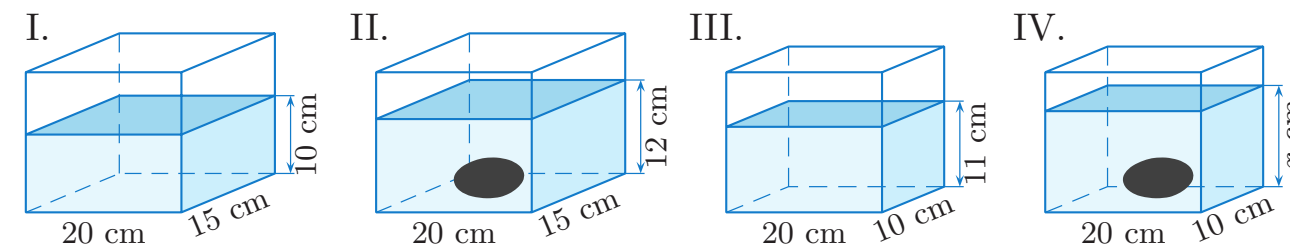
Ćwiczenie 7

Oblicz kubaturę (objętość) budynku przedstawionego obok na schematycznym rysunku. Wymiary tego budynku podano w metrach.

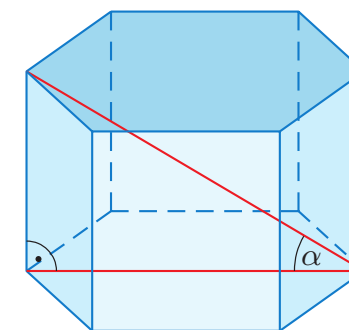
Zadania

- Oblicz objętość graniastosłupa o wysokości 8 cm, którego podstawą jest trójkąt prostokątny:
 - równoramienny o obwodzie $(6 + 3\sqrt{2}) \text{ cm}$,
 - o przeciwprostokątnej długości $4\sqrt{6} \text{ cm}$ i kącie ostrym α takim, że $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$.
- Wysokość graniastosłupa jest równa 7 cm, a jego podstawą jest trapez o bokach długości 4 cm, 4 cm, 4 cm i 8 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.
 - Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 cm i 12 cm, a jego kąt ostry ma miarę 45° . Oblicz objętość graniastosłupa o wysokości 18 cm, którego podstawą jest ten trapez.
- Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm, a pole jego podstawy jest równe 16 cm^2 . Oblicz objętość tego graniastosłupa.
 - Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego przekątna o długości 10 cm tworzy z krawędzią podstawy kąt 60° .

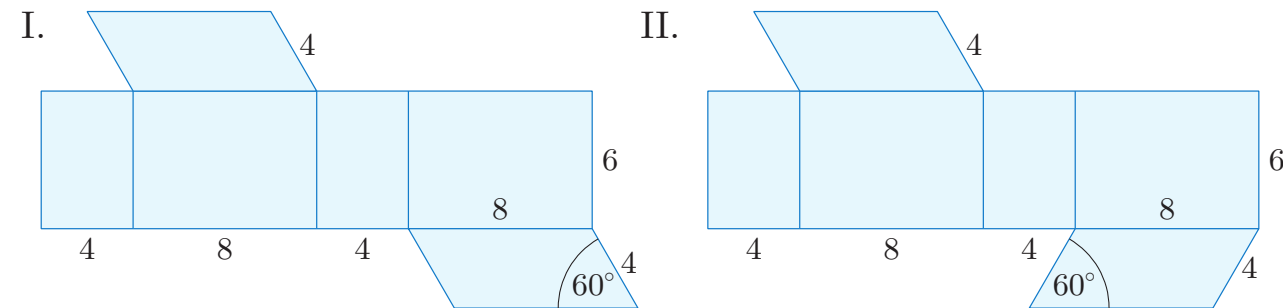
- Do dwóch akwariów (rysunki I i III) wrzucono kolejno ten sam kamień (rysunki II i IV). Za każdym razem kamień był całkowicie zanurzony w wodzie. Oblicz x .



- Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $4\sqrt{5} \text{ cm}$ i tworzy z jego krawędzią boczną kąt α taki, że:
 - $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{10}$,
 - $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.Oblicz objętość tego graniastosłupa.
- Wysokość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego na rysunku obok jest równa 16. Dłuższa przekątna tego graniastosłupa tworzy z dłuższą przekątną jego podstawy kąt α taki, że:
 - $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 - $\sin \alpha = 0,8$,
 - $\tan \alpha = 2$.Oblicz objętość tego graniastosłupa.

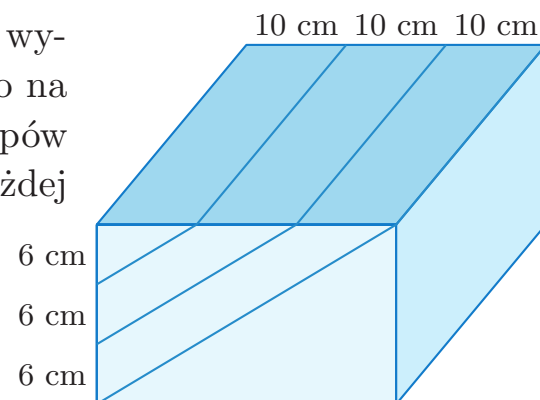
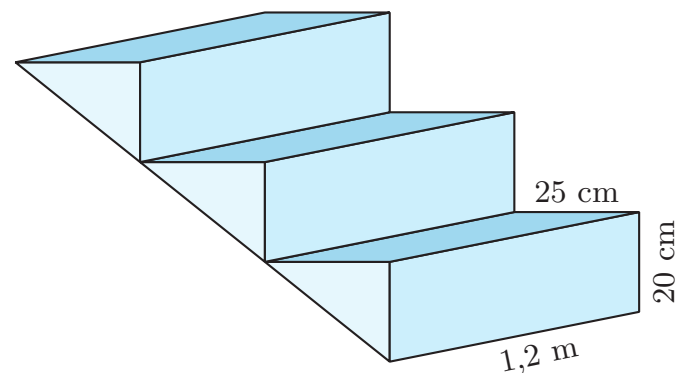


7. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono siatkę graniastosłupa? Oblicz objętość tego graniastosłupa.



8. Objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest romb o kącie ostrym 30° , jest równa 27 cm^3 , a jego pole powierzchni bocznej jest równe 36 cm^2 . Oblicz długości krawędzi tego graniastosłupa.

9. Prostopadłościenny drewniany klocek o wymiarach $18 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ przecięto na cztery części mające kształty graniastosłupów jak na rysunku obok. Oblicz objętość każdej z otrzymanych części.



10. Schody składają się z 15 jednakowych betonowych stopni o wymiarach podanych na rysunku obok. Oblicz objętość betonu zużytego na wykonanie tych stopni.

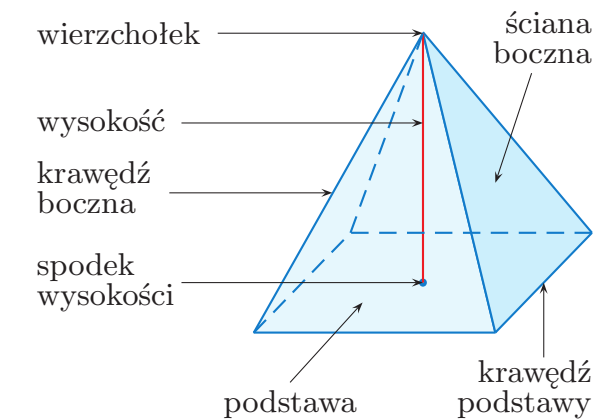
Sprawdź się

11. a) Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm.
b) Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni bocznej jest równe 144 cm^2 , a pole powierzchni całkowitej jest równe 306 cm^2 .
12. Wysokość graniastosłupa prawidłowego jest równa 12 cm. Przekątna jego ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt ostry α . Oblicz objętość tego graniastosłupa w przypadku, gdy jego podstawą jest:
- a) trójkąt oraz dany jest $\tan \alpha = \frac{3}{2}$,
b) sześciokąt oraz dany jest $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.5. Ostrosłupy

Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana, zwana **podstawą**, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane **ścianami bocznymi**, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim – rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy, zwany **spodkiem wysokości**.



Ostrosłup nazywamy trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. – w zależności od tego, jakim wielokątem jest jego podstawa. Na rysunku przedstawiono ostrosłup czworokątny.

Definicja

Ostrosłup nazywamy **prostym**, jeśli wszystkie jego krawędzie boczne mają tę samą długość.

Jeśli podstawą ostrosłupa prostego jest wielokąt foremny, to taki ostrosłup nazywamy **prawidłowym**.

Przykład 1

Spodkiem wysokości ostrosłupa prostego, którego podstawą jest prostokąt, jest punkt przecięcia przekątnych prostokąta. Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

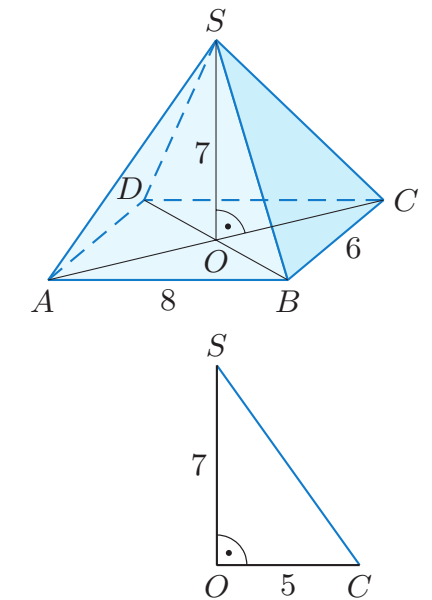
Przekątna AC podstawy ostrosłupa ma długość:

$$|AC| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

zatem $|OC| = \frac{1}{2}|AC| = 5$.

Obliczamy długość krawędzi bocznej (rysunek obok):

$$|SC| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$$



Ćwiczenie 1

- a) Oblicz długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości $3\sqrt{2} \text{ cm}$ i wysokości 4 cm.
b) Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wszystkich krawędziach długości 4 cm.
c) Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt o bokach 4 cm i 6 cm, a krawędź boczna ma długość 5 cm. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

Przykład 2

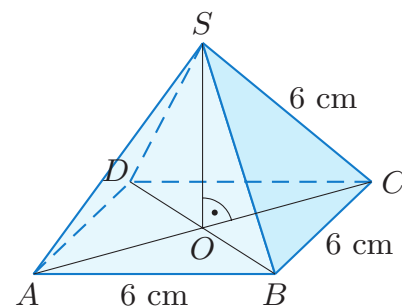
Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 6 cm.

Pole podstawy tego ostrosłupa: $P_p = 6^2 = 36 \text{ [cm}^2\text{]}$.

Pole ściany bocznej: $P_{\triangle ABS} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$.

Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 36 + 4 \cdot 9\sqrt{3} = 36(1 + \sqrt{3}) \text{ [cm}^2\text{]}.$$



Ćwiczenie 2

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a krawędź boczna ma 5 cm.

Przykład 3

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość 8, a krawędź boczna ma długość 10.

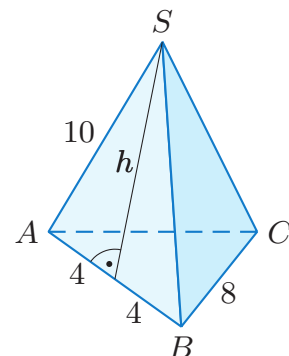
Pole podstawy tego ostrosłupa: $P_p = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

Ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o wysokości $h = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ (rysunek obok).

Pole ściany bocznej: $P_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$.

Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = P_p + P_b = 16\sqrt{3} + 3 \cdot 8\sqrt{21} = 8(2\sqrt{3} + 3\sqrt{21}).$$



Uwaga. W dalszym ciągu, jeżeli nie jest powiedziane inaczej, gdy mówimy o wysokości ściany bocznej ostrosłupa, rozpatrujemy wysokość wychodzącą z jego wierzchołka.

Ćwiczenie 3

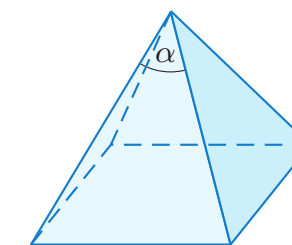
a) Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 20 cm, a jego krawędź boczna ma 25 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

b) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 10 cm, a jego krawędź boczna ma 13 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

c) Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest sześć razy większe od jego pola podstawy, które jest równe $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa.

Definicja

Kątem płaskim przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego nazywamy kąt między ramionami trójkąta równoramiennego będącego ścianą boczną tego ostrosłupa.



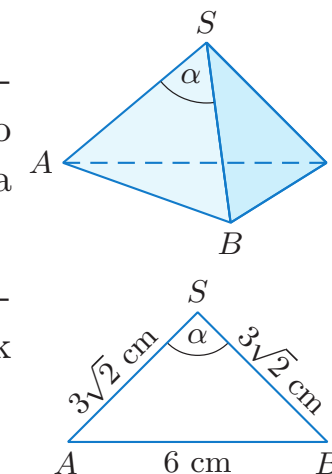
Przykład 4

Wyznacz miarę kąta płaskiego α przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego trójkątnego (rysunek obok), którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a krawędź boczna ma długość $3\sqrt{2}$ cm.

Każda ściana boczna tego ostrosłupa jest trójkątem równoramiennym o bokach 6 cm, $3\sqrt{2}$ cm i $3\sqrt{2}$ cm (rysunek obok). Zauważmy, że:

$$(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36 = 6^2$$

Zatem na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa stwierdzamy, że jest to trójkąt prostokątny. Miara kąta płaskiego przy wierzchołku tego ostrosłupa jest równa 90° .



Ćwiczenie 4

a) Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60° .

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź boczna ma długość 8 cm, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 90° .

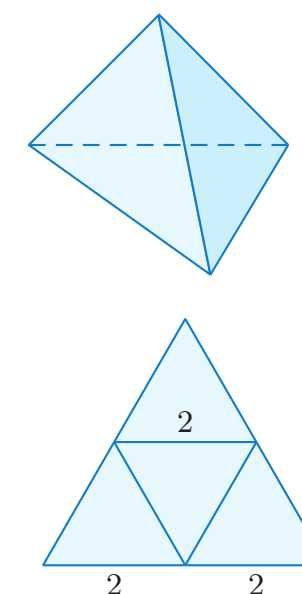
Definicja

Ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.

Przykład 5

Na rysunku obok przedstawiono siatkę czworościanu foremnego o krawędzi 2. Pole powierzchni całkowitej tego czworościanu jest równe:

$$P_c = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = 4\sqrt{3}$$

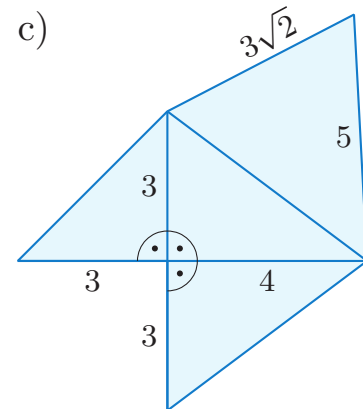
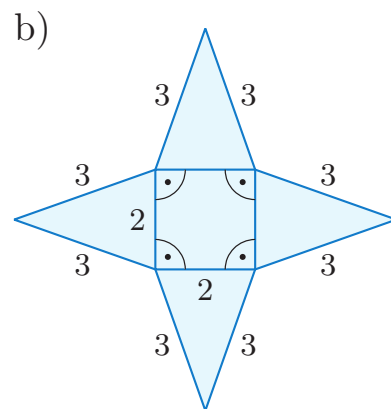
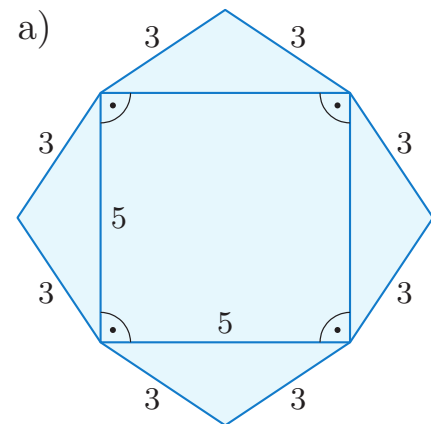
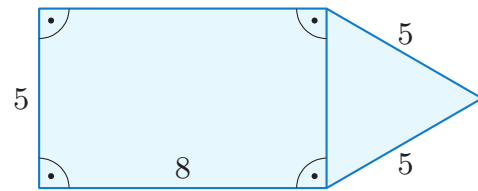


Ćwiczenie 5

- a) Oblicz pole powierzchni całkowitej czworścianu foremnego, którego każda krawędź ma długość 5 cm.
- b) Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi czworścianu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $49\sqrt{3}$ cm².

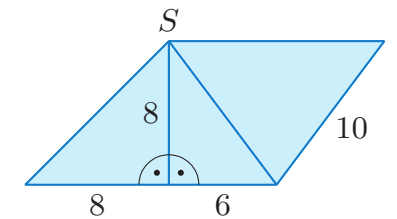
Zadania

1. Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
2. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 6 cm i 8 cm. Dwie spośród jego ścian bocznych są trójkątami równobocznymi. Oblicz wysokość tego ostrosłupa. Rozpatrz dwa przypadki.
3. Czy na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa? Jeśli tak, to oblicz jego pole powierzchni całkowitej. Czy jest to ostrosłup prosty?



4. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12 cm, a wysokość jego ściany bocznej jest równa 13 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
5. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 8 cm², a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
6. Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 48 cm, a jego pole podstawy jest równe $25\sqrt{3}$ cm². Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

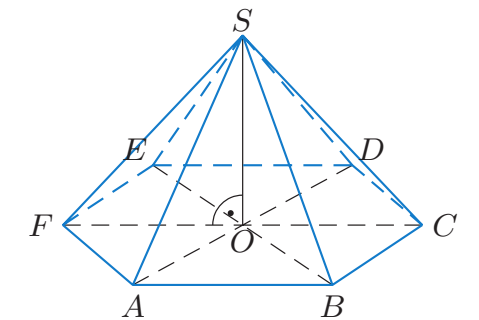
7. Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa trójkątnego o wierzchołku S . Narysuj całą siatkę tego ostrosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.



8. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 4 cm, a jego pole powierzchni bocznej jest dwa razy większe od pola podstawy. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

- D** 9. a) Uzasadnij, że w ostrosłupie prostym spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa.
b) Uzasadnij, że w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym spodek wysokości jest punktem przecięcia środkowych podstawy.

10. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego (rysunek obok) jest równe $54\sqrt{3}$. Krawędź boczna tego ostrosłupa jest o 50% dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.



11. Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 6 cm. Tworzy ona z wysokością ostrosłupa kąt 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

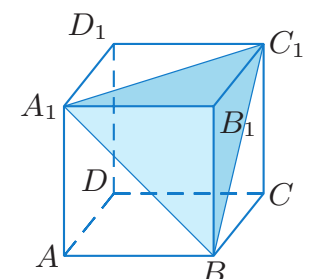
Sprawdź się

12. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa w przypadku, gdy jego podstawą jest:
a) kwadrat, b) sześciokąt.

13. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, a krawędź podstawy ma długość 4 cm.

14. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

15. Wierzchołki A_1, B, B_1, C_1 sześcianu o krawędzi 6 (rysunek obok) są wierzchołkami ostrosłupa. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Czy jest to ostrosłup prawidłowy?



Przypomnij sobie

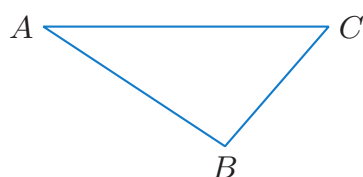
Przedstawianie ostrosłupów na rysunkach

Podczas rysowania ostrosłupa szczególną uwagę należy zwrócić na położenie jego spodka wysokości.

■ Ostrosłup prawidłowy trójkątny

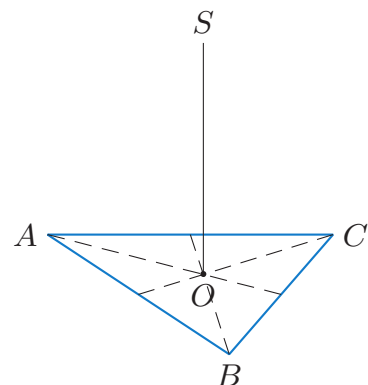
Krok 1.

Rysujemy podstawę ostrosłupa – w rzeczywistości jest ona trójkątem równobocznym, ale na rysunku długości boków trójkąta są różne.



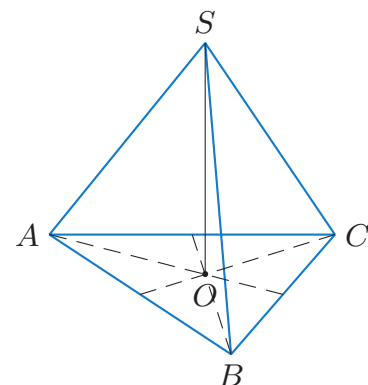
Krok 2.

Wyznaczamy spodek wysokości O – punkt przecięcia środkowych trójkąta ABC . Następnie rysujemy wysokość OS ostrosłupa.



Krok 3.

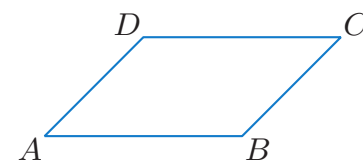
Łączymy wierzchołek ostrosłupa z wierzchołkami jego podstawy i otrzymujemy krawędzie boczne ostrosłupa.



■ Ostrosłup prawidłowy czworokątny

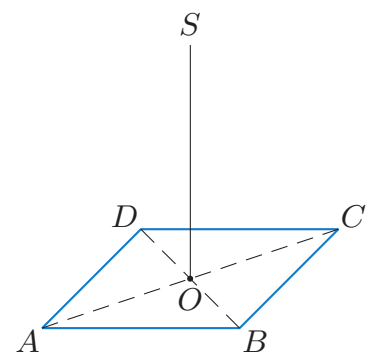
Krok 1.

Rysujemy podstawę ostrosłupa – w rzeczywistości jest ona kwadratem, ale na rysunku ma kształt równoległoboku $ABCD$.



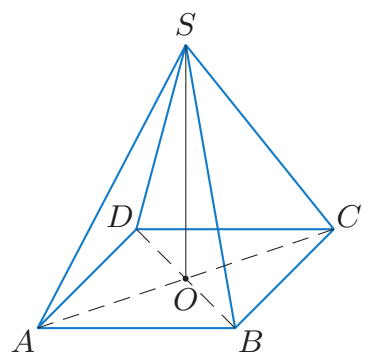
Krok 2.

Wyznaczamy spodek wysokości O – punkt przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Następnie rysujemy wysokość OS ostrosłupa.



Krok 3.

Łączymy wierzchołek ostrosłupa z wierzchołkami jego podstawy i otrzymujemy krawędzie boczne ostrosłupa.



1. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy sześciokątny.
2. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy pięciokątny.
3. Przedstaw na rysunku ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat $ABCD$, a spodkiem wysokości jest punkt A .

4.6. Objętość ostrosłupa

Twierdzenie

Objętość dowolnego ostrosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

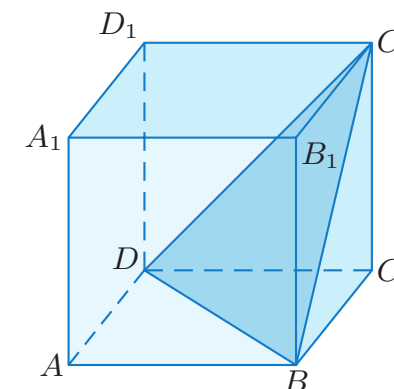
gdzie P_p jest polem podstawy ostrosłupa, a H – jego wysokością.

Przykład 1

Sześcian o krawędzi 6 cm został podzielony przez trójkąt BDC_1 na dwa wielościany (rysunek obok). Jednym z nich jest ostrosłup $BCDC_1$. Jego podstawą jest trójkąt BCD , a wysokością – krawędź boczna CC_1 .

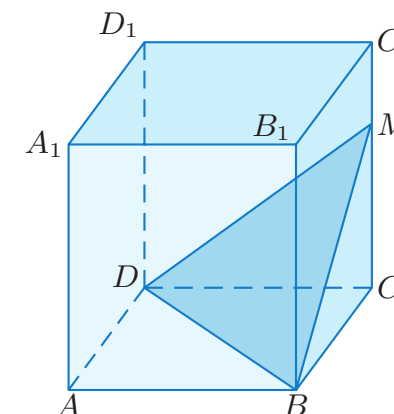
Pole podstawy ostrosłupa: $P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ [cm²].
Wysokość ostrosłupa $H = 6$ cm, zatem jego objętość:
 $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$ [cm³].

Natomiast objętość drugiego wielościanu jest równa różnicy objętości sześcianu i ostrosłupa, czyli $6^3 - 36 = 180$ [cm³].



Ćwiczenie 1

Wysokość graniastoslupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm, a przekątna jego podstawy ma długość 8 cm. Na krawędzi CC_1 tego graniastoslupa obrano taki punkt M , że $|CM| = 2|MC_1|$ (rysunek obok). Oblicz objętości wielościanów, na które trójkąt BMD podzielił ten graniastosłup.



Przykład 2

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm (rysunek poniżej). Krawędź boczna tworzy z przekątną podstawy kąt α taki, że $\tan \alpha = \frac{5}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przekątna podstawy ma długość $|AC| = 6\sqrt{2}$ cm, stąd $|OC| = \frac{1}{2}|AC| = 3\sqrt{2}$ cm.

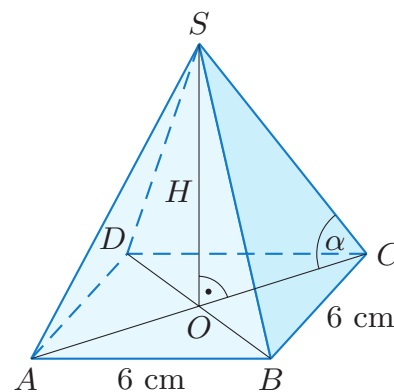
Z trójkąta prostokątnego OCS mamy:

$\tan \alpha = \frac{H}{|OC|}$, zatem $\frac{H}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{3}$, czyli $H = 5\sqrt{2}$ cm.

Pole podstawy: $P_p = 6^2 = 36$ [cm²].

Objętość ostrosłupa:

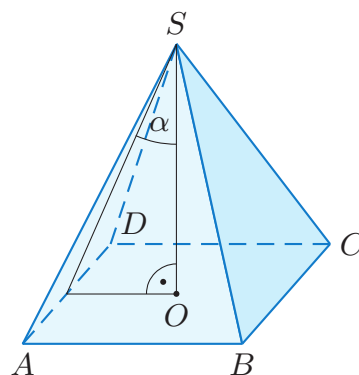
$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 5\sqrt{2} = 60\sqrt{2} \text{ [cm}^3\text{]}.$$



Ćwiczenie 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 9 w przypadku, gdy cosinus kąta między wysokością tego ostrosłupa:

- wysokością jego ściany bocznej jest równy 0,9 (rysunek obok),
- a jego krawędzią boczną jest równy 0,6.



Ćwiczenie 3

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 16 cm^2 , a wysokość jego ściany bocznej jest równa 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

Przykład 3

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 8 cm, a krawędź boczna ma długość 10 cm.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Odcinek AD jest wysokością trójkąta równobocznego ABC , zatem:

$$|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Spodek wysokości ostrosłupa – punkt O – jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, zatem:

$$|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym dzieli jego wysokość w stosunku 1:2.}$$

Rozpatrzmy trójkąt AOS . Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 8^2 = 10^2$$

$$\frac{a^2}{3} = 100 - 64$$

$$a^2 = 36 \cdot 3$$

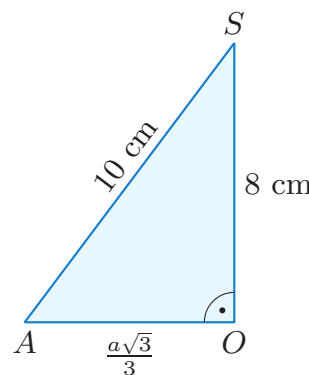
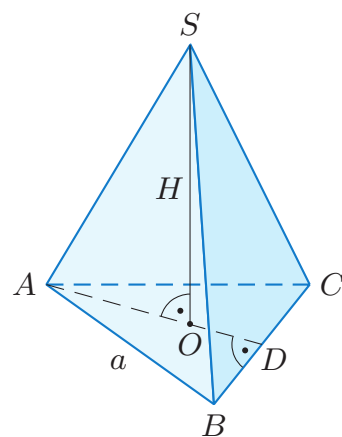
Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Zatem objętość ostrosłupa wynosi: $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 8 = 72\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$.

Ćwiczenie 4

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 12 cm, a wysokość ściany bocznej ma 15 cm.



Ćwiczenie 5

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 16 cm i tworzy:

- z krawędzią boczną kąt α taki, że $\text{tg } \alpha = 0,5$,
- z wysokością ściany bocznej kąt α taki, że $\cos \alpha = 0,8$.

Ćwiczenie 6

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4 cm. Wysokość ostrosłupa tworzy z jego krawędzią boczną kąt 30° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 7

- W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60° , a pole podstawy jest równe 16. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 90° , a krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

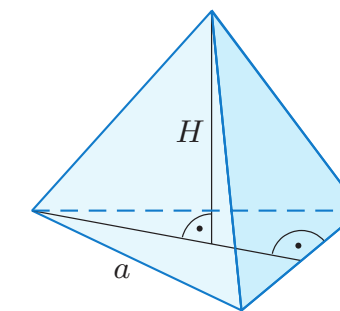
Twierdzenie

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi długości a wyraża się za pomocą wzoru:

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

a jego objętość – za pomocą wzoru:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



Dowód

Niech punkt O będzie spodkiem wysokości czworościanu foremnego o krawędzi a (rysunek poniżej). Rozpatrzmy trójkąt prostokątny AOS .

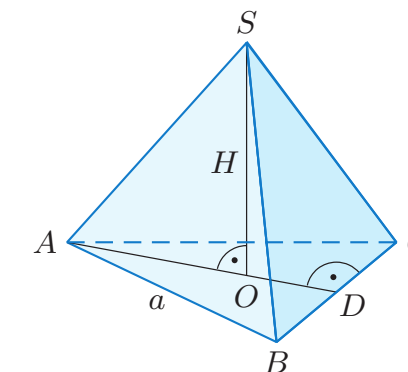
Zauważmy, że $|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz $|AS| = a$.

Zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

Stąd $H = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, a objętość czworościanu:

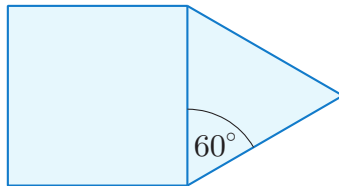
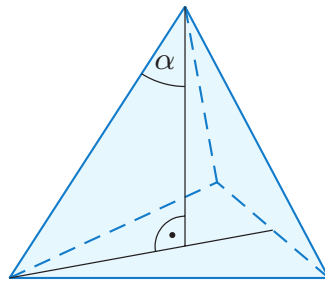
$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



Ćwiczenie 8

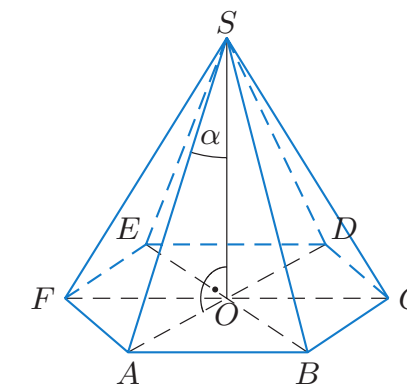
Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Zadania

1. Wysokość ostrosłupa prawidłowego wynosi 15 cm, a obwód jego podstawy jest równy 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa w przypadku, gdy:
 - a) jest on czworokątny, b) jest on trójkątny, c) jest on sześciokątny.
2. Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36(1+\sqrt{3})\text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
 
3. Oblicz objętość ostrosłupa prostego, którego wysokość tworzy z krawędzią boczną kąt 30° , a podstawą jest prostokąt o bokach 4 cm i 8 cm.
4. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 13 cm i tworzą kąt α taki, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
5. Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 24 cm^2 , a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
6. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12 cm, a jego objętość wynosi 256 cm^3 . Oblicz tangens kąta, który wysokość ostrosłupa tworzy z jego krawędzią boczną.
7.
 - a) Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość ma 24 cm, a objętość jest równa $50\sqrt{3}\text{ cm}^3$.
 - b) Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego objętość wynosi $21\sqrt{3}\text{ cm}^3$, a promień okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa jest równy $2\sqrt{3}\text{ cm}$.
8. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 12 cm (rysunek obok). Wysokość ostrosłupa tworzy z jego krawędzią boczną kąt α taki, że $\tan \alpha = \frac{5}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
 
9. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 10 cm. Objętość tego ostrosłupa wynosi $50\sqrt{3}\text{ cm}^3$. Oblicz tangens kąta, który wysokość ostrosłupa tworzy z wysokością jego ściany bocznej.

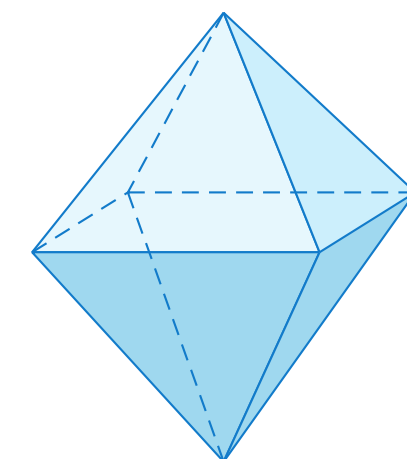
10. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wysokość jest dwa razy krótsza od wysokości jego ściany bocznej, a krawędź podstawy ma długość 6 cm.

11. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 13 cm i tworzy z wysokością ostrosłupa kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ (rysunek obok). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



12. Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości 4 cm jest równa $24\sqrt{3}\text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

13. Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego wysokość:
 - a) jest równa 2 cm,
 - b) jest o 1 cm krótsza od wysokości jego ściany.

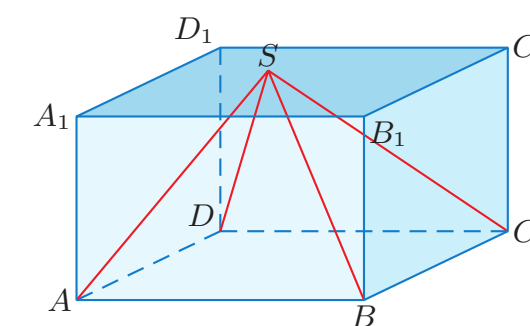


14. Dwa ostrosłupy prawidłowe czworokątne, których wszystkie krawędzie mają długość 4 cm, złożono podstawami i otrzymano ośmiościan przedstawiony na rysunku obok. Oblicz objętość tej bryły.

Sprawdź się

15. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z krawędzią boczną kąt 45° , a podstawa ostrosłupa ma pole równe 36 cm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

16. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|BB_1| = 2$ (rysunek obok).



- a) Oblicz objętość ostrosłupa $ABDA_1$.
- b) Punkt S jest dowolnym punktem należącym do ściany $A_1B_1C_1D_1$. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDS$.

17. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej równej 20 cm.

18. Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego każda ściana ma pole równe $25\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

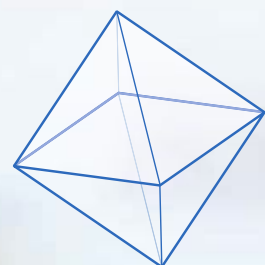
Szlify diamentów

Diamenty po oszlifowaniu często mają kształt wielościanu wypukłego.

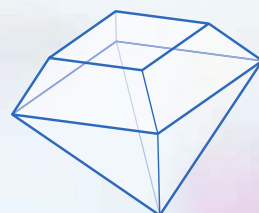
Wielościan nazywamy wypukłym, jeśli każdy odcinek, którego końce są punktami tego wielościanu, jest cały w nim zawarty.

Na szkicach poniżej pokazano najwcześniejsze szlify diamentów w Europie.

Pierwsze szlify diamentów polegały na wygładzaniu naturalnych ścianek kryształów. Dopiero wynalezienie tarczy szlifierskiej pozwoliło na skośne ścinanie krawędzi diamentów i tworzenie tzw. fasetek, czyli symetrycznie rozmieszczonych ścianek.



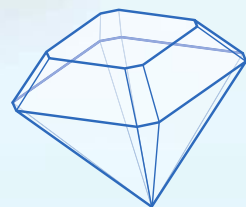
szpiczasty kamień
XIV w.



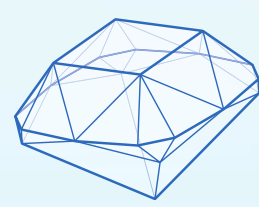
gruby kamień
XIV w.



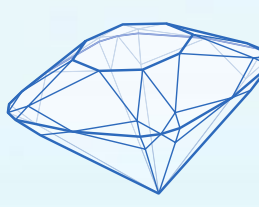
cienki kamień
XIV w.



pojedyncze dobro
XV w.



szlif Mazarina
XVII w.



szlif Peruzziego
XVIII w.

Wzór Eulera

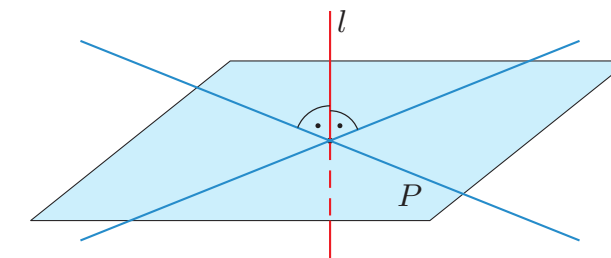
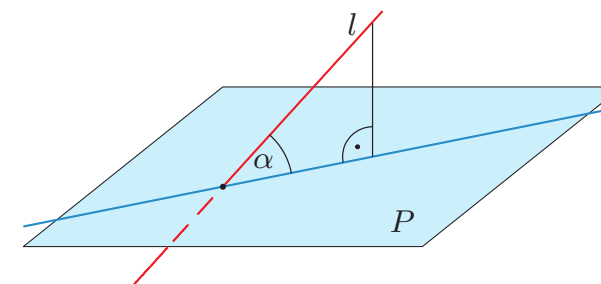
Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi zależność opisana tzw. wzorem Eulera:

$$s - k + w = 2$$

gdzie s oznacza liczbę ścian, k – liczbę krawędzi, w – liczbę wierzchołków.

1 Sprawdź prawdziwość wzoru Eulera dla wielościanów, których kształt mają pierwsze trzy szlify diamentów przedstawione na ilustracji.

4.7. Kąt między prostą a płaszczyzną



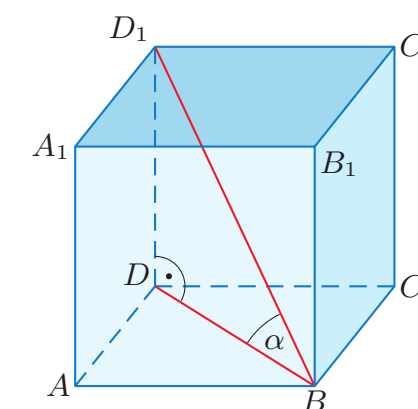
Kątem między prostą a płaszczyzną nazywamy kąt ostry, który ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Jeśli rzutem prostej jest punkt, to płaszczyzna i prosta tworzą kąt prosty. Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to tworzy z nią kąt 0° .

Przykład 1

Wyznacz miarę kąta między przekątną sześcianu a jego podstawą.

Rozpatrzmy przekątną BD_1 sześcianu i jej rzut prostokątny na płaszczyznę podstawy – odcinek BD (rysunek obok). Oznaczmy krawędź sześcianu przez a . Wówczas $|BD| = a\sqrt{2}$, zatem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|DD_1|}{|BD|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071, \text{ stąd } \alpha \approx 35^\circ.$$



Ćwiczenie 1

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 8 cm. Oblicz cosinus kąta, który przekątna graniastosłupa tworzy z jego podstawą.

Przykład 2

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 3 cm. Oblicz długość przekątnej BD_1 tego graniastosłupa (rysunek poniżej) oraz cosinus kąta α , który tworzy ona ze ścianą ABB_1A_1 .

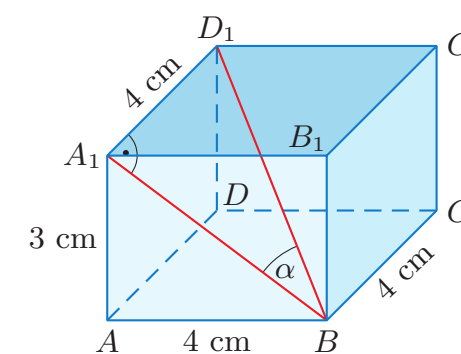
Rzutem prostokątnym odcinka BD_1 na ścianę ABB_1A_1 jest odcinek BA_1 . Jego długość:

$$|BA_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ [cm]}$$

Długość przekątnej graniastosłupa:

$$|BD_1| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \text{ [cm]}$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha = \frac{|BA_1|}{|BD_1|} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}.$$



Ćwiczenie 2

Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 5 cm jest prostokąt o bokach długości 3 cm i 4 cm. Oblicz sinusy kątów, które przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego ścianami bocznymi.

Ćwiczenie 3

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 8 cm, a jego przekątna tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Przykład 3

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 10, a krawędź boczna ma długość 13. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

- jego krawędź boczna,
- wysokość jego ściany bocznej.

a) Kąt między krawędzią boczną SB ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek OB) oznaczono na rysunku powyżej przez α . Odcinek OB jest połową przekątnej kwadratu o boku 10, więc $|OB| = 5\sqrt{2}$.

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny OBS :

$$\cos \alpha = \frac{|OB|}{|BS|} = \frac{5\sqrt{2}}{13}$$

b) Kąt między wysokością SE ściany bocznej ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek OE) oznaczono przez β . Na rysunku poniżej przedstawiono ścianę boczną ostrosłupa – jest to trójkąt równoramienny o wysokości SE . Na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $|SE|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, skąd $|SE| = 12$.

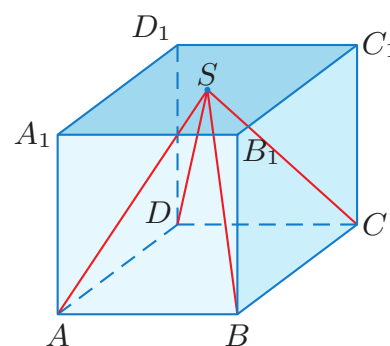
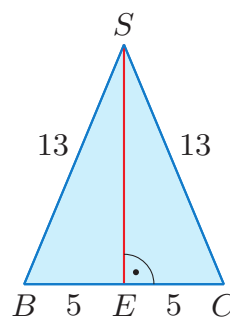
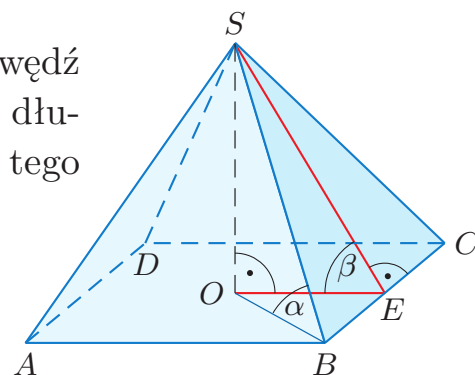
Rozpatrzmy trójkąt prostokątny OES :

$$\cos \beta = \frac{|OE|}{|SE|} = \frac{5}{12}$$

Ćwiczenie 4

Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $A_1B_1C_1D_1$ sześcienu (rysunek obok). Rozpatrzmy ostrosłup o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S . Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

- jego krawędź boczna,
- wysokość jego ściany bocznej.

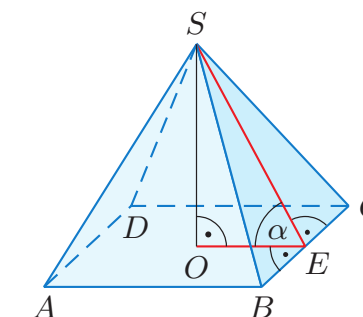
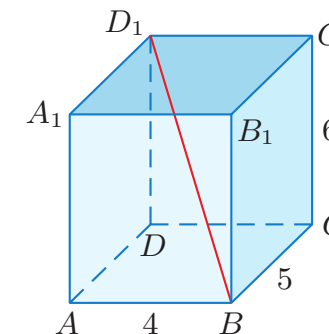


Ćwiczenie 5

- Oblicz cosinus kąta, który krawędź boczna czworościanu foremnego tworzy z jego podstawą.
- Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego pole powierzchni bocznej jest sześć razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta, który krawędź boczna tego ostrosłupa tworzy z jego podstawą.

Zadania

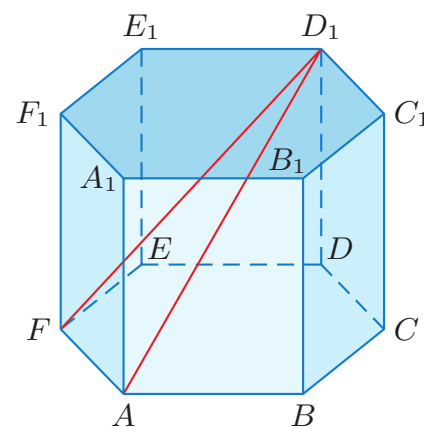
- Dany jest prostopadłościan o wymiarach podanych na rysunku obok. Oblicz sinus kąta zawartego między przekątną BD_1 a płaszczyzną:
 - podstawy $ABCD$,
 - ściany bocznej BCC_1B_1 ,
 - ściany bocznej DCC_1D_1 .
- Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 2 cm, 3 cm i $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego prostopadłościanu a jego ścianą o największym polu.
- Pole podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 64 cm^2 , a jego przekątna tworzy z podstawą kąt 45° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.
 - Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 cm i tworzy z podstawą kąt 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
-  Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają tę samą długość. Wyznacz miary kątów, które jego przekątne tworzą z podstawą.
- Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a kąt zawarty między wysokością ściany bocznej a podstawą ma miarę 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.



7. Podstawa graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma pole równe 49, a jego przekątna tworzy ze ścianą boczną kąt α taki, że $\sin \alpha = 0,28$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.
8. a) Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy jego krawędź boczna.
b) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy wysokość jego ściany bocznej.
9. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy 4 cm kąt między wysokością ściany bocznej a podstawą ma miarę 45° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
10. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy 6 cm i objętości równej $18\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą ostrosłupa tworzy: a) krawędź boczna, b) wysokość ściany bocznej.

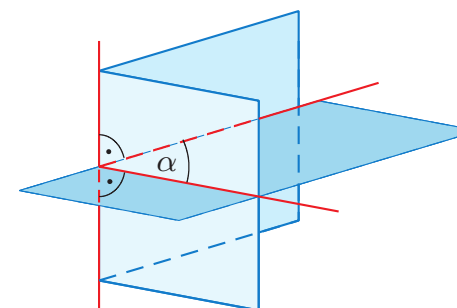
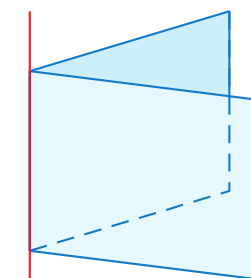
Sprawdź się

11. Przedstaw na rysunku graniastosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz:
a) kąt α między przekątną ściany bocznej a podstawą,
b) kąt β między przekątną graniastosłupa a podstawą,
c) kąt γ między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną.
12. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy trójkątny i zaznacz:
a) kąt α między krawędzią boczną a podstawą,
b) kąt β między wysokością ściany bocznej a podstawą.
13. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 5 i wysokości 6 (rysunek obok).
a) Oblicz sinus kąta, który przekątna AD_1 tworzy z podstawą tego graniastosłupa.
b) Oblicz tangens kąta, który przekątna FD_1 tworzy z podstawą tego graniastosłupa.
14. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym kąt między wysokością ściany bocznej a podstawą ma miarę α , a pole podstawy jest równe P .
a) $\alpha = 30^\circ$, $P = 16$ b) $\alpha = 45^\circ$, $P = 18$ c) $\alpha = 60^\circ$, $P = 36$



4.8. Kąt dwuścienny

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części, łącznie z półpłaszczyznami, nazywamy **kątem dwuściennym**, półpłaszczyzny – **ścianami** tego kąta, a wspólną krawędź półpłaszczyzn – jego **krawędzią**.

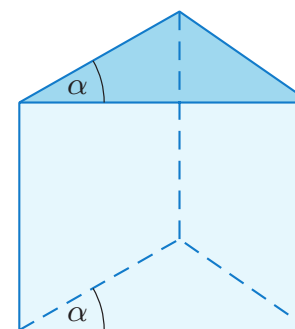


Definicja

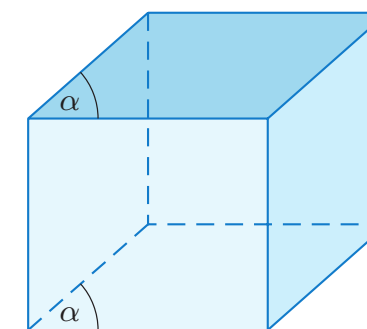
Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego, który jest częścią wspólną kąta dwuściennego oraz płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.

Uwaga. W dalszym ciągu, kiedy będziemy mówić o kącie dwuściennym, będziemy rozważać ten z kątów między półpłaszczyznami, który ma mniejszą miarę.

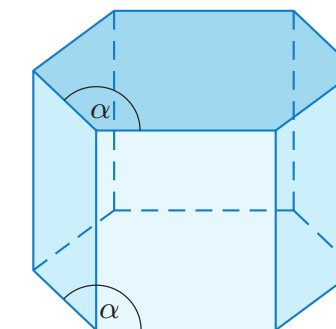
W graniastosłupie prostym miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi to miara odpowiedniego kąta jego podstawy.



Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma miarę 60° .



Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi graniastosłupa prostokątnego ma miarę 90° .



Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma miarę 120° .

Przykład 1

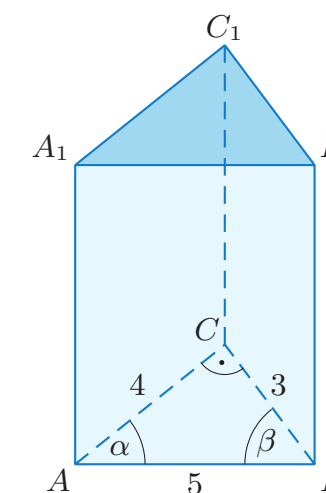
Dany jest graniastosłup prosty trójkątny, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4 i 5. Wyznacz miary kątów, które tworzą ze sobą ściany boczne tego graniastosłupa.

Ściany BCC_1B_1 i ACC_1A_1 tworzą kąt 90° .

Ściany ABB_1A_1 i ACC_1A_1 tworzą kąt α taki, że:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \text{ więc } \alpha \approx 37^\circ$$

Ściany ABB_1A_1 i BCC_1B_1 tworzą kąt $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53^\circ$.



Ćwiczenie 1

Podaj miary kątów między sąsiednimi ścianami bocznymi graniastosłupa prostego trójkątnego, którego krawędzie podstawy mają podane długości.

- a) 4 cm, 4 cm, $4\sqrt{2}$ cm b) 3 cm, 6 cm, $3\sqrt{3}$ cm

Przykład 2

Płaszczyzna przechodząca przez krawędzie BB_1 i DD_1 graniastosłupa prawidłowego czworokątnego (rysunek obok) tworzy ze ścianami bocznymi graniastosłupa kąt $\alpha = 45^\circ$.

Przykład 3

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a (rysunek obok). Na krawędziach AD oraz A_1D_1 wybrano odpowiednio punkty E oraz E_1 takie, że $|AE| = |A_1E_1| = \frac{3}{4}a$. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź BB_1 i odcinek EE_1 tworzy ze ścianą AA_1D_1D kąt α . Oblicz cosinus tego kąta.

Długość przeciwprostokątnej trójkąta ABE :

$$|BE| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}a^2} = \frac{5}{4}a$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha = \frac{|AE|}{|BE|} = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{5}{4}a} = \frac{3}{5}.$$

Ćwiczenie 2

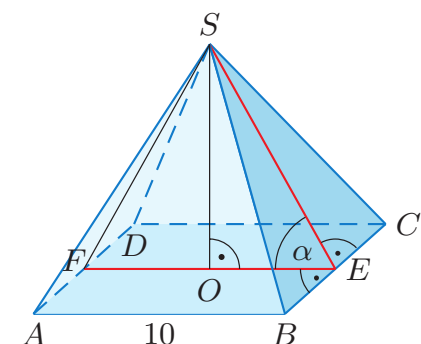
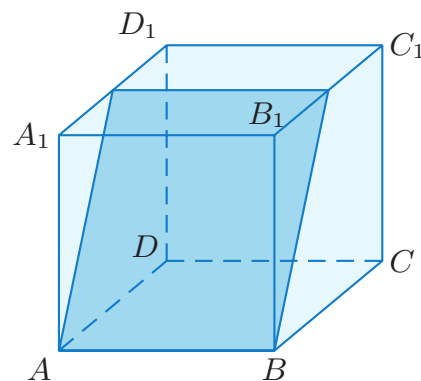
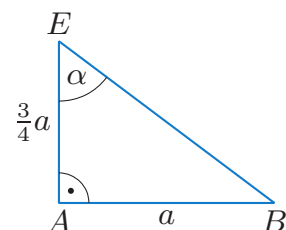
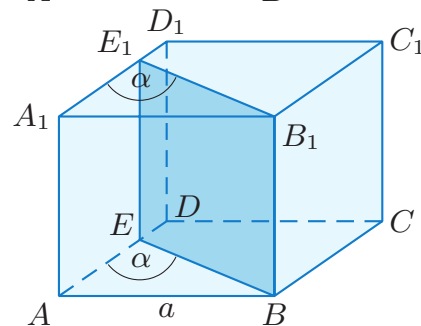
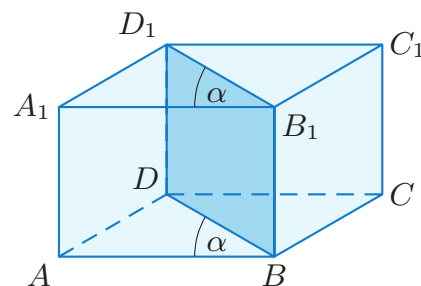
Oblicz cosinus kąta, który z podstawą $ABCD$ sześciąnu tworzy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołki A i B oraz środki krawędzi A_1D_1 i B_1C_1 (rysunek obok).

Przykład 4

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o wysokości $5\sqrt{3}$ i krawędzi 10 (rysunek poniżej). Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Odcinki FE i SE są prostopadłe do BC – krawędzi kąta dwuściennego zawartego między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa. Miarą tego kąta jest więc miara kąta płaskiego OES . Zatem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|OS|}{|OE|} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}, \text{ czyli } \alpha = 60^\circ$$



Ćwiczenie 3

a) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12 cm, a jego wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

b) Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do jego podstawy pod kątem 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przykład 5

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z jego podstawą kąt 60° (rysunek poniżej). Krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

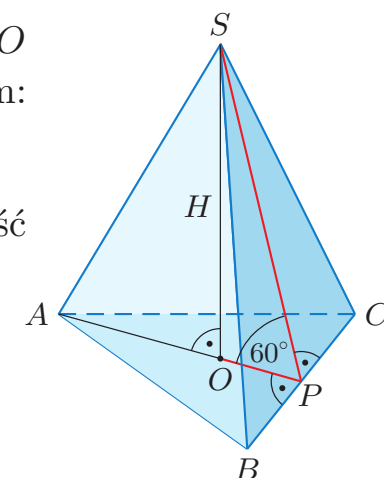
Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym, a punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, zatem:

$$|AP| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ oraz } |OP| = \frac{1}{3}|AP| = \sqrt{3}$$

W trójkącie OPS mamy $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{|OP|}$, zatem wysokość ostrosłupa: $H = |OP| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$$



Ćwiczenie 4

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z jego podstawą kąt 45° . Pole podstawy jest równe $16\sqrt{3}$ cm². Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przykład 6

Oblicz cosinus kąta między dwiema ścianami czworościanu foremnego.

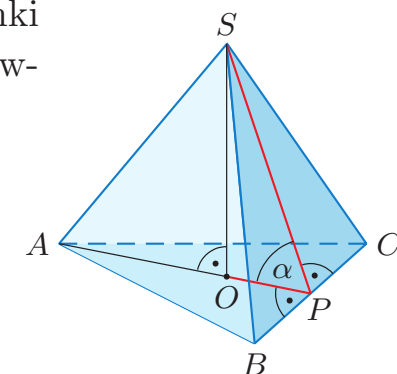
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Odcinki AP i PS są wysokościami przystających trójkątów równobocznych, więc:

$$|AP| = |PS|$$

Ponadto:

$$|OP| = \frac{1}{3}|AP|$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha = \frac{|OP|}{|PS|} = \frac{|OP|}{|AP|} = \frac{1}{3}.$$



Ćwiczenie 5

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $72\sqrt{3}$ cm³, a jego wysokość jest równa 2 cm. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Przykład 7

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

Szukamy cosinusa kąta BED , gdzie E jest wierzchołkiem kąta płaskiego otrzymanego przez przecięcie płaszczyzną prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego zawartego między sąsiednimi ścianami ostrosłupa.

Oznaczmy długość krawędzi ostrosłupa przez a .

Wówczas przekątna podstawy $|DB| = a\sqrt{2}$.

Odcinek EB jest wysokością trójkąta równobocznego BCS o boku a , zatem $|EB| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Podobnie $|ED| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

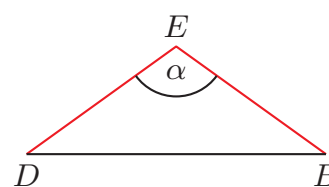
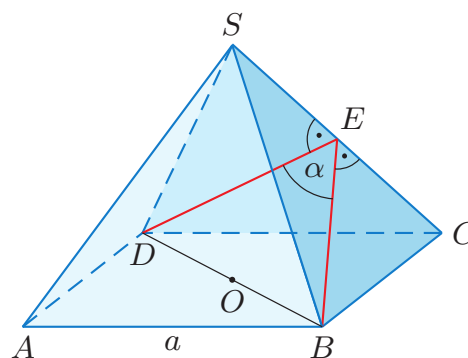
Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBE :

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos \alpha / : a^2$$

$$2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

Zauważ, że $\cos \alpha < 0$, więc α jest kątem rozwartym.



Ćwiczenie 6

a) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od jego krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

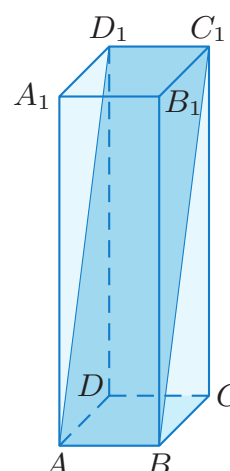
b) Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm.

Zadania



1. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 7 cm i 24 cm. Wyznacz miary kątów zawartych między sąsiednimi ścianami bocznymi tego graniastosłupa.

2. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego pole powierzchni bocznej jest równe 480 cm^2 , a pole powierzchni całkowitej – 530 cm^2 (rysunek obok). Oblicz sinus kąta, który tworzy płaszczyzna zawierająca krawędzie AB i C_1D_1 tego graniastosłupa z jego podstawą.



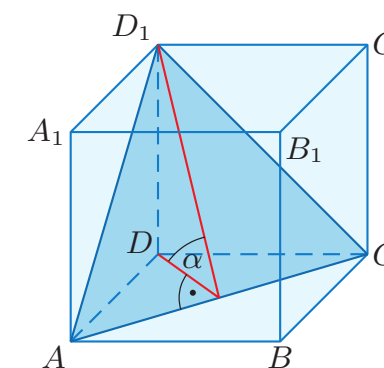
3. Oblicz tangens kąta, który z podstawą $ABCD$ sześcianu tworzy płaszczyzna zawierająca trójkąt ACD_1 (kąt α na rysunku obok).

4. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między ścianą boczną a podstawą ma miarę 30° . Oblicz sinus kąta, który tworzy krawędź boczna tego ostrosłupa z jego podstawą.



5. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 24 cm, a jego wysokość jest równa 12 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

6. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $20\sqrt{3} \text{ cm}^3$, a jego pole podstawy jest równe $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz tangens kąta zawartego między ścianą boczną tego ostrosłupa a jego podstawą.



Sprawdź się

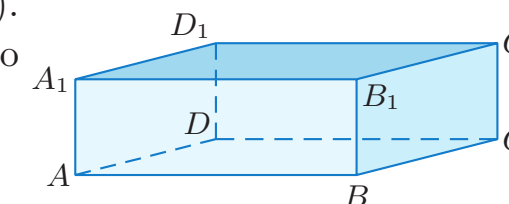
7. Podaj miarę kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi graniastosłupa prawidłowego: a) pięciokątnego, b) ośmiokątnego.

8. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, w którym stosunek miar kątów przy jednym boku jest równy $1:3$. Podaj miary kątów między sąsiednimi ścianami bocznymi tego graniastosłupa.

9. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości: $|AB| = 3 \text{ cm}$, $|AD| = 2 \text{ cm}$, $|AA_1| = 1 \text{ cm}$ (rysunek obok).

Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego prostopadłościanu tworzy płaszczyzna:

a) ABC_1D_1 , b) BCD_1A_1 .



10. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz:

a) kąt α między ścianą boczną a podstawą,
b) kąt β między sąsiednimi ścianami bocznymi.

11. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy trójkątny i zaznacz:

a) kąt α między ścianą boczną a podstawą,
b) kąt β między sąsiednimi ścianami bocznymi.

12. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 18 cm, a wysokość ostrosłupa jest równa 12 cm. Oblicz sinus kąta, który ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z jego podstawą.



Powtórzenie

Zestaw I

1. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego ma długość 2, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 24. Oblicz wysokość tego graniastosłupa w przypadku, gdy jego podstawą jest:

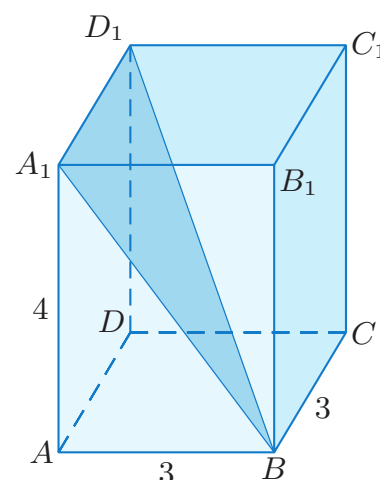
a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

2. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, którego przekątna jest o 2 dłuższa od jego krawędzi.

3. Wysokość prostopadłościanu jest równa 4, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 (rysunek obok).

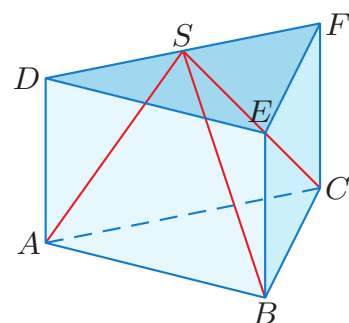
a) Oblicz cosinus kąta A_1BD_1 .

b) Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka.



4. Wykaż, że objętość prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = \sqrt{P_1 P_2 P_3}$, gdzie P_1, P_2, P_3 są polami jego ścian o wspólnym wierzchołku.

5. Podstawą graniastosłupa prawidłowego jest trójkąt ABC o boku 6 (rysunek obok). Wysokość graniastosłupa jest równa 4. Środek S krawędzi DF połączono odcinkami z wierzchołkami A, B i C . Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa $ABCS$.



6. Wysokość ostrosłupa prawidłowego wynosi 6, a promień okręgu opisanego na jego podstawie jest równy 4. Oblicz objętość tego ostrosłupa w przypadku, gdy jego podstawą jest: a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

7. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 i jest nachylona do podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{1}{4}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

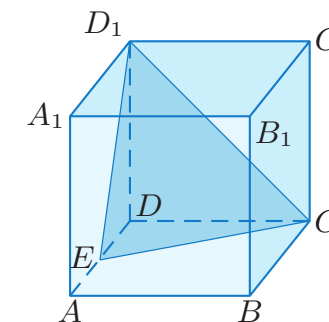
8. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6 cm, a wysokość jego ściany bocznej jest równa 2 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają taką samą długość. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.

Zestaw II

1. Spośród wszystkich prostopadłościanów, których suma długości krawędzi wynosi 488 cm, a stosunek długości krawędzi podstawy jest równy 5:4, wybieramy ten o największym polu powierzchni całkowitej. Oblicz pole podstawy tego prostopadłościanu.

2. Sześcian o krawędzi długości 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki C i D_1 oraz środek krawędzi AD (rysunek obok). Oblicz długości boków trójkąta CD_1E oraz cosinus kąta położonego naprzeciwko najdłuższego boku tego trójkąta.



3. Ściany boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są kwadratami, z których każdy ma pole równe 3. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa oraz długości jego przekątnych.

4. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią boczną tego ostrosłupa kąt α taki, że $\cos \alpha = 0,8$. Krawędź podstawy ma długość 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 2 cm, a kąt między nimi jest równy 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6. W sześcianie o objętości 64 środek S jednej z krawędzi bocznych połączono z wierzchołkami A, B, C, D podstawy. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa $ABCD S$ oraz jego pole powierzchni bocznej.

7. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają taką samą długość. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do podstawy.

8. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym pole ściany bocznej jest cztery razy większe od pola podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

9. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy większe od jego pola podstawy. Oblicz tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

10. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego jest nachylona do podstawy pod kątem 30° , a krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa w przypadku, gdy jego podstawą jest: a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

**Przykład 1**

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4, a jego wysokość jest równa 3 (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa $ABCDD_1$.

Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami prostokątnymi. Ponadto trójkąty ADD_1 i CDD_1 są przystające. Przystające są również pozostałe dwa trójkąty: ABD_1 i CBD_1 .

Obliczamy pole trójkąta ADD_1 :

$$P_{\triangle ADD_1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

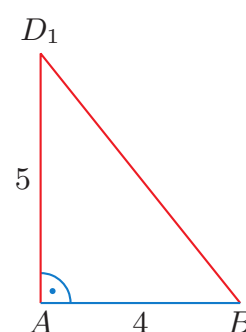
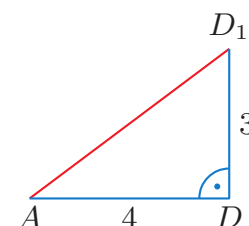
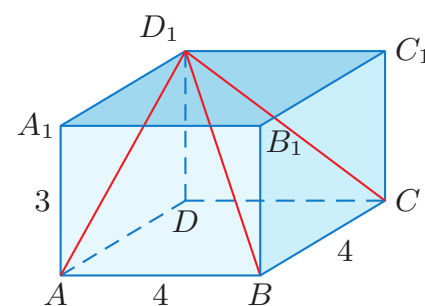
Przyprostokątna AD_1 trójkąta ABD_1 jest równocześnie przeciwprostokątną trójkąta ADD_1 . Na podstawie twierdzenia Pitagorasa $|AD_1| = 5$.

Obliczamy pole trójkąta ABD_1 :

$$P_{\triangle ABD_1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa $ABCDD_1$:

$$P_b = 2(P_{\triangle ADD_1} + P_{\triangle ABD_1}) = 32$$



Odpowiedź: $P_b = 32$

→ Zadanie 11.2, str. 203

Przykład 2

W sześciacie na rysunku obok punkty E i F są odpowiednio środkami krawędzi A_1D_1 i AD oraz $|BE| = 15$. Oblicz sinus kąta α , który odcinek BE tworzy z podstawą $ABCD$, oraz objętość tego sześciacu.

Długości przyprostokątnych trójkąta ABF (rysunek poniżej): $|AB| = a$ oraz $|AF| = \frac{1}{2}a$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta:

$$|BF|^2 = |AB|^2 + |AF|^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BEF :

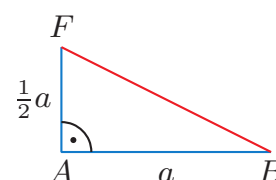
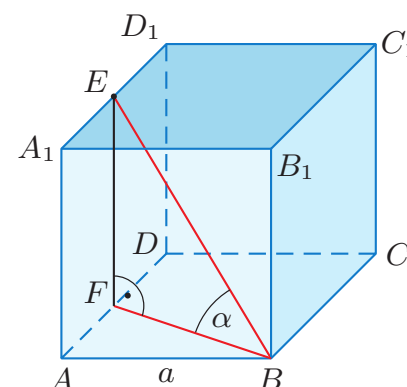
$$|BE| = \sqrt{|BF|^2 + |EF|^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \frac{3}{2}a$$

Obliczamy a : $|BE| = 15 = \frac{3}{2}a$, więc $a = 10$. Zatem $\sin \alpha = \frac{|EF|}{|BE|} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Objętość sześciacu: $V = a^3 = 10^3 = 1000$.

Odpowiedź: $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $V = 1000$

→ Zadanie 21, str. 204



W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Przekątna prostopadłościanu o krawędziach długości 4 cm, 6 cm i 8 cm ma długość równą

- A. $2\sqrt{29}$ cm B. $2\sqrt{26}$ cm C. $4\sqrt{19}$ cm D. $4\sqrt{17}$ cm

Zadanie 2 (0–1)

Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm i jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Pole podstawy tego graniastosłupa jest równe

- A. 32 cm^2 B. 16 cm^2 C. 8 cm^2 D. 4 cm^2

Zadanie 3 (0–1)

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 6 cm, a kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do ściany bocznej ma miarę 30° . Przekątna ta ma długość

- A. $3\sqrt{2}$ cm B. $3\sqrt{3}$ cm C. $6\sqrt{3}$ cm D. 12 cm

Zadanie 4 (0–1)

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 6 cm i 8 cm. Jeśli przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa ma długość 13 cm, to jego pole powierzchni bocznej jest równe

- A. 180 cm^2 B. 200 cm^2 C. 210 cm^2 D. 240 cm^2

Zadanie 5 (0–1)

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45° . Objętość tego ostrosłupa jest równa

- A. $36\sqrt{2}$ B. $48\sqrt{2}$ C. $72\sqrt{2}$ D. $108\sqrt{2}$

Zadanie 6 (0–1)

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości równej 8 cm wynosi $96\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Obwód podstawy tego ostrosłupa jest równy

- A. 24 cm B. $24\sqrt{3}$ cm C. 36 cm D. $36\sqrt{3}$ cm

Zadanie 7 (0–1)

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy 2 cm pole podstawy jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe

- A. 12 cm^2 B. 18 cm^2 C. $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ D. $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$

**Zadanie 8 (0–1)**

Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi graniastoslupa prawidłowego pięciokątnego ma miarę

- A. 108° B. 112° C. 120° D. 124°

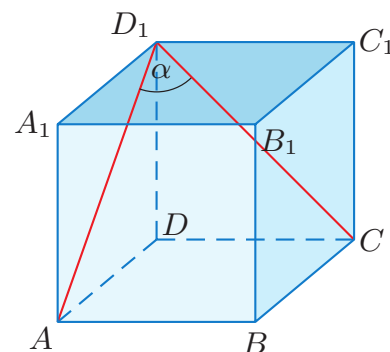
Zadanie 9

Na rysunku obok przedstawiono sześcian oraz przekątne jego ścian bocznych poprowadzone z jednego wierzchołka.

Zadanie 9.1 (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Sinus kąta α , który tworzą te przekątne, jest większy od 0,85.	P	F
Sinus kąta zawartego między przekątną AD_1 a podstawą sześcianu jest większy od 0,7.	P	F

**Zadanie 9.2 (0–1)**

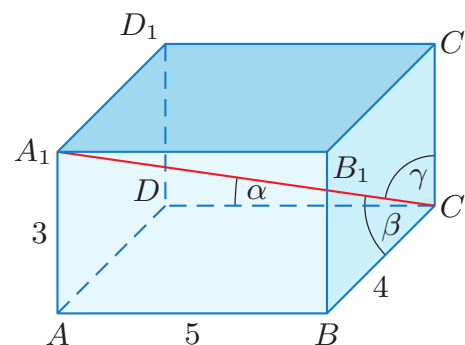
Suma długości odcinków AD_1 i CD_1 jest równa $4\sqrt{6}$.

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Długość przekątnej sześcianu jest równa .

Zadanie 10

Przekątna A_1C prostopadłościanu o krawędziach długości 3, 4 i 5 (rysunek obok) tworzy z krawędziami wychodzącymi z wierzchołka C kąty α , β i γ .

**Zadanie 10.1 (0–1)**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Kąt α ma miarę równą 45° .	P	F
Kąt γ ma miarę równą 60° .	P	F

Zadanie 10.2 (0–1)

Oblicz cosinus kąta β .

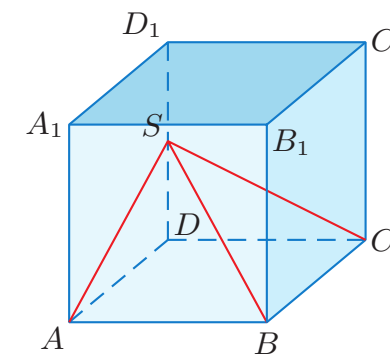
**Zadanie 11**

W sześcianie o krawędzi 6 punkt S jest środkiem krawędzi DD_1 (rysunek obok).

Zadanie 11.1 (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

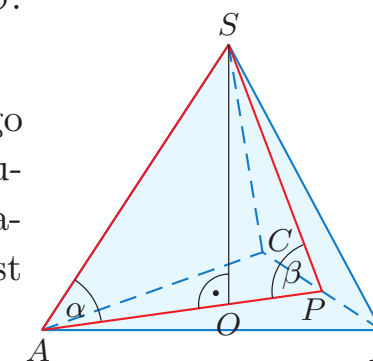
Odcinek BS ma długość równą 9.	P	F
Objętość ostrosłupa $ABCD S$ jest równa 108.	P	F

**Zadanie 11.2 (0–4) → Przykład 1, str. 200**

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $ABCD S$.

Zadanie 12

Wysokość SO ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ przedstawionego na rysunku obok jest równa długości krawędzi podstawy. Kąt α jest kątem między krawędzią boczną ostrosłupa a jego podstawą, a kąt β jest kątem między wysokością ściany bocznej a podstawą.

**Zadanie 12.1 (0–1)**

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Tangensy kątów α i β spełniają warunek

A.	$\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha,$	ponieważ	1.	$\beta = 2\alpha.$
B.	$\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha,$		2.	$ PO : AO = 1 : 2.$
			3.	$ PO : AO = 1 : 3.$

Zadanie 12.2 (0–2)

Objętość ostrosłupa $ABCS$ jest równa $18\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz jego wysokość.

Zadanie 13 (0–1)

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od jego krawędzi podstawy.

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Cosinus kąta między krawędzią boczną a podstawą ostrosłupa jest równy .



Zadanie 14 (0-2)

Sześcian o krawędzi 4 cm i graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy $2\sqrt{2}$ cm mają taką samą objętość. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa.

Zadanie 15 (0-2)

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych długości 2 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadanie 16 (0-2)

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi jego podstawy. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Zadanie 17 (0-3)

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 60° . Wysokość graniastosłupa jest równa 12 cm, a przekątna ściany bocznej ma długość 15 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 18 (0-4)

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 4 ma przekątną tworzącą z tą krawędzią kąt 60° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 19 (0-4)

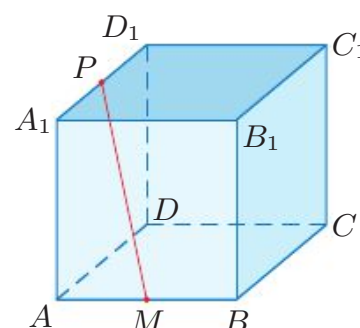
Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 6 cm, a pole podstawy jest cztery razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 20 (0-4)

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $\sqrt{119}$. Przekątna tego graniastosłupa i przekątna jego ściany bocznej wychodzące z jednego wierzchołka tworzą kąt, którego tangens jest równy $\frac{5}{12}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 21 (0-4) → Przykład 2, str. 200

W sześcianie na rysunku obok punkty M i P są środkami jego krawędzi oraz $|MP| = 2\sqrt{6}$ cm. Oblicz sinus kąta, który odcinek MP tworzy z podstawą $ABCD$. Oblicz objętość tego sześcianu.



Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

Potęga o wykładniku całkowitym

- a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024
b) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729
- a) 81 b) -32 c) -216 d) 1
- a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{625}$ c) $\frac{1}{216}$ d) $\frac{1}{729}$
e) $-\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{25}$ g) $\frac{1}{16}$ h) $-\frac{1}{243}$
- a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{16}{81}$ c) $11\frac{25}{64}$ d) 1
e) $1\frac{4}{5}$ f) $3\frac{3}{8}$ g) $\frac{64}{125}$ h) $\frac{81}{10000}$
- a) x b) y c) y d) x
- a) 2^{10} b) 2^8 c) 2^4 d) 2^7 e) 2^2
f) 2^{10} g) 2^2 h) 2^7 i) 2^{13} j) 2^{-16}
- a) 2^9 b) 2^{22} c) 2^{-3}
d) 2^6 e) 2^0 f) 2^6

1.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie

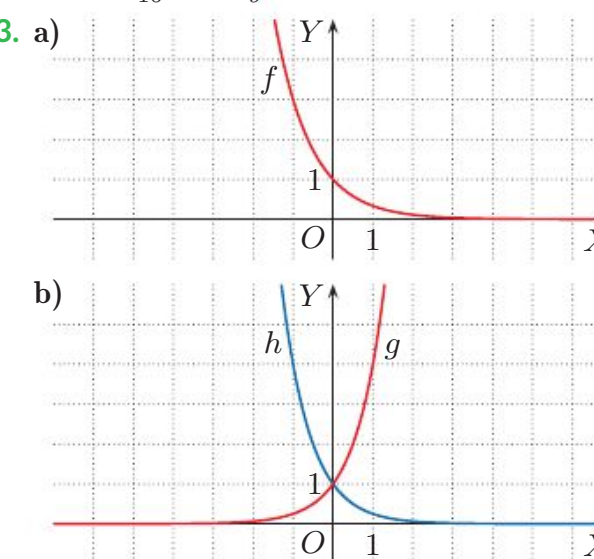
- a) 9 b) 10 c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{11}$
e) 13 f) 21 g) 2 h) 3 i) 3
j) 2 k) 4 l) 2
- a) 4 b) 16 c) 59 049 d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{16}$ f) 729
- a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) 5 e) 3
f) 2 g) 36 h) $\sqrt[6]{7}$
- a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{1}{3}}$ c) $5^{\frac{2}{3}}$ d) $5^{\frac{2}{3}}$ e) $5^{\frac{3}{4}}$
- a) $3^{\frac{1}{4}}$ b) $3^{\frac{4}{3}}$ c) $3^{-\frac{1}{5}}$ d) $3^{-\frac{3}{2}}$ e) $3^{\frac{5}{4}}$
- np.: a) $5^{\frac{1}{8}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{12}}$ d) $3^{\frac{5}{8}}$
e) 2^{-1} f) $2^{\frac{3}{2}}$ g) $3^{\frac{7}{8}}$ h) $3^{\frac{5}{3}}$
- a) 243 b) 625 c) 8 d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{81}$ f) $\frac{1}{5}$ g) 100 000 h) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
i) $\frac{1}{12}$ j) $\frac{1}{3}$ k) 16 l) 25
- a) 0,027 b) 2 c) 0,04 d) $\frac{1000}{27}$
e) 8 f) 0,0016 g) 1 h) 64
- a) 1024 b) 9 c) 16 d) 5
- np.: a) $7^{\frac{5}{8}}$ b) $3^{\frac{13}{4}}$ c) $3^{\frac{5}{8}}$ d) $5^{-\frac{5}{3}}$
e) $3^{-\frac{2}{3}}$ f) 5^{-3}
- np.: a) $3^{\frac{13}{12}}$ b) $5^{\frac{9}{8}}$ c) $12^{\frac{2}{3}}$ d) $3^{\frac{3}{5}}$
e) $5^{\frac{11}{4}}$ f) 2^0

1.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

- a) $5^{\sqrt{3}} \approx 16,24$, $5^{\sqrt{5}} \approx 36,55$
b) $5^{\sqrt{3}} \approx 16,242$, $5^{\sqrt{5}} \approx 36,555$
c) $5^{\sqrt{3}} \approx 16,2425$, $5^{\sqrt{5}} \approx 36,5548$
- a) $3^\pi \approx 31,5443$ b) $5^\pi \approx 156,9925$
c) $\pi^\pi \approx 36,4622$
- a) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ b) $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$
c) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ d) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- a) 125 b) 81 c) 25 d) 32 e) 1
f) 3 g) 32 h) 6
- a) $3^{5-\sqrt{2}}$ b) $3^{1+\sqrt{2}}$ c) 3^4 d) $3^{\sqrt{3}-3}$
e) $3^{\sqrt{7}}$ f) 3^π
- a) 36 b) 125 c) $\frac{125}{27}$ d) 1 e) 1
f) 343 g) 3 h) 64 i) 216
- np.: a) $2^{\sqrt{7}+4}$ b) $2^{\sqrt{3}+\frac{1}{2}}$ c) $3^{\sqrt{5}-3}$
d) $3^{3-2\sqrt{3}}$ e) $3^{-6\pi}$ f) $7^{-4\sqrt{2}-2\pi}$
- a), c), d) nie b) tak
- a) y, z b) x, z c) y, z
- np.: a) $5^{\sqrt{3}}$ b) $4^{\sqrt{2}}$ c) $7^{\sqrt{5}}$
d) $9^{\sqrt{7}}$ e) $9^{\sqrt{5}}$ f) $16^{\sqrt{3}}$
- a) 49 b) 16 c) 64 d) 625 e) 1 f) 49

1.3. Funkcja wykładnicza

- (0, 1)
- a) zielony – f , czerwony – g ,
niebieski – h
b) $a = \frac{81}{16}$, $b = \frac{4}{9}$, $c = 3$ c) B, C
- a)



4. zielony – f , niebieski – g ,
czerwony – h , fioletowy – k

5. a) $5^{0,3} < 5^{0,33} < 5^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}}$
b) $7^{\sqrt{5}} < 7^{3,1} < 7^{\pi} < 7^{3,2}$
c) $0,6^{\frac{1}{2}} < 0,6^{\frac{3}{7}} < 0,6^{\frac{3}{8}} < 0,6^{0,35} < 0,6^{\frac{1}{3}}$
d) $(\frac{1}{3})^2 < (\frac{1}{3})^{\sqrt{3}} < (\frac{1}{3})^{\frac{\pi}{2}} < (\frac{1}{3})^{1,5} < (\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$

1. a) $f(-4) = \frac{1}{81}$, $f(-3) = \frac{1}{27}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$,
 $f(3) = 27$, $f(4) = 81$
b) $f(-4) = \frac{1}{256}$, $f(-3) = \frac{1}{64}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$,
 $f(3) = 64$, $f(4) = 256$
c) $f(-4) = 256$, $f(-3) = 64$,
 $f(-\frac{1}{2}) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,
 $f(3) = \frac{1}{64}$, $f(4) = \frac{1}{256}$
d) $f(-4) = 16$, $f(-3) = 8$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $f(3) = \frac{1}{8}$, $f(4) = \frac{1}{16}$

2. a), b), d) tak c) nie

3. a), c) nie b), d) tak

4. a) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
c) $f(x) = 4^x$ d) $f(x) = (\frac{3}{2})^x$

5. a), b) $f(x) = g(x)$ dla $x = 0$

6. a) $2^{\frac{7}{5}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\sqrt{3}}$
b) $(\frac{3}{4})^6 < (\frac{3}{4})^{\sqrt{26}} < (\frac{3}{4})^5 < (\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$
c) $\pi^{\frac{1}{\pi}} < \sqrt[3]{\pi} < \pi^{\frac{3}{7}} < \pi^{\frac{1}{2}}$
d) $9^{-2} < 9^{-\sqrt{\pi}} < 9^{-\sqrt{3}} < 9^0$

1.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

1. a) $f(D) = (-3; \infty)$,
asymptota: $y = -3$
b) $f(D) = (1; \infty)$,
asymptota: $y = 1$
c) $f(D) = (-4; \infty)$,
asymptota: $y = -4$

2. a) $a = 3$ b) $a = -6$
c) $a = -\frac{1}{4}$

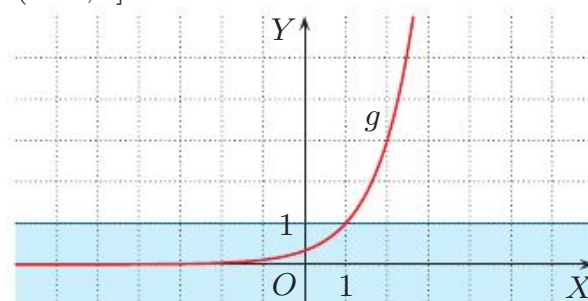
3. $a = 1$, $b = -1$, $c = -3$

4. a) $f(D) = (-2; \infty)$; $(0, -1)$
b) $f(D) = (2; \infty)$; $(0, 3)$

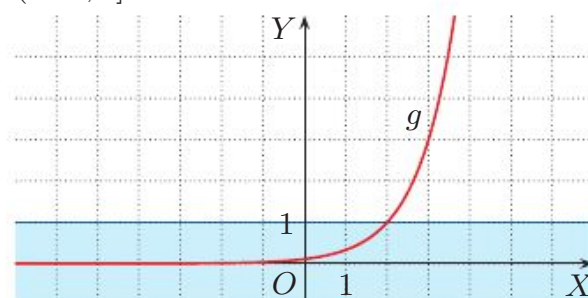
5. a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = 2$

6. a) $a = 2$ b) $b = 1$

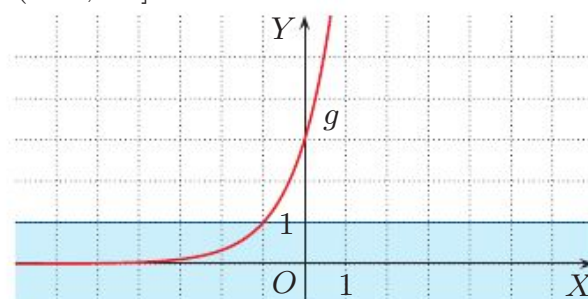
7. a) przesunąć o 1 jednostkę w prawo;
 $(-\infty; 1]$



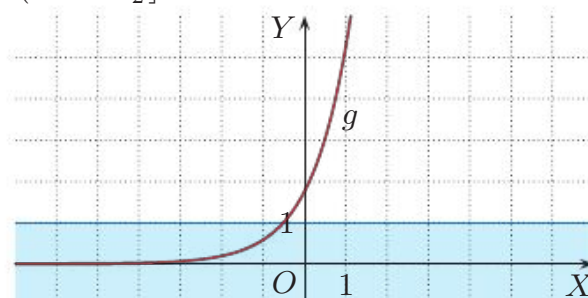
b) przesunąć o 2 jednostki w prawo;
 $(-\infty; 2]$



c) przesunąć o 1 jednostkę w lewo;
 $(-\infty; -1]$

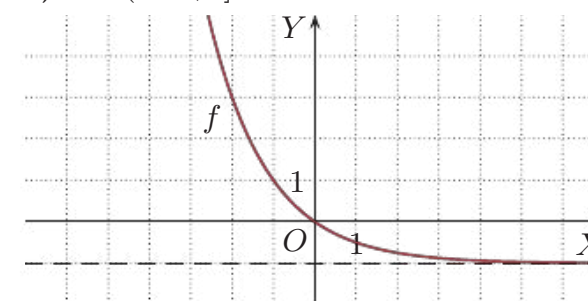


d) przesunąć o $\frac{1}{2}$ jednostki w lewo;
 $(-\infty; -\frac{1}{2}]$

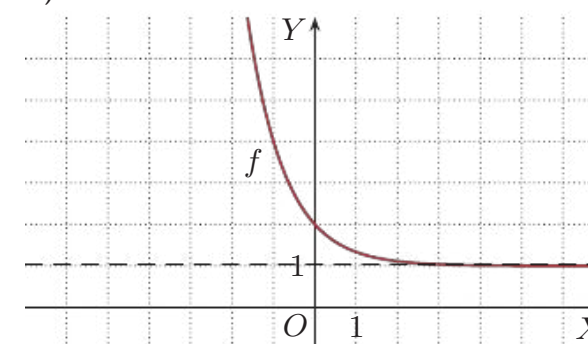


1. a) $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
asymptota: $y = -4$
b) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych,
asymptota: $y = 2$
c) $f(D) = (-1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$,
asymptota: $y = -1$

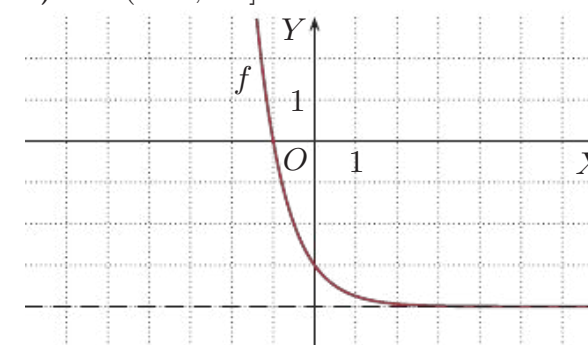
2. a) $x \in (-\infty; 0]$



b) $x \in \mathbb{R}$



c) $x \in (-\infty; -1]$



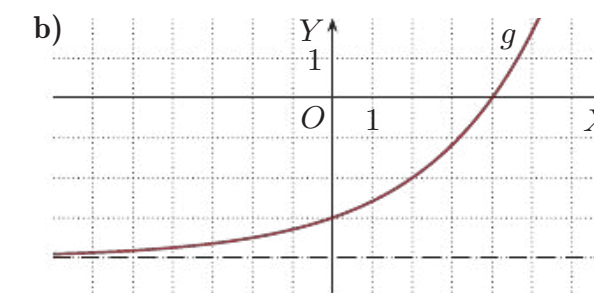
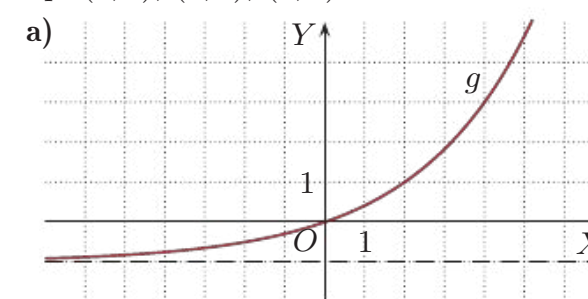
3. $a = -3$

4. a) $a = -4$ b) $a = 3$ c) $a = -16$

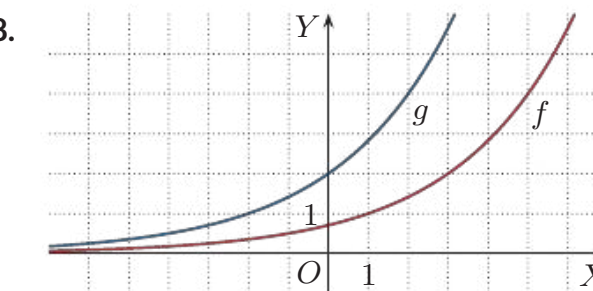
5. a) przesunąć o 4 jednostki w prawo
b) przesunąć o 10 jednostek w prawo
c) przesunąć o 3 jednostki w lewo
d) przesunąć o $\frac{1}{2}$ jednostki w lewo

6. a) $x \in [1; \infty)$ b) $x \in [-3; \infty)$
c) $x \in [-2; \infty)$ d) $x \in [3; \infty)$
e) $x \in (-\infty; 3]$ f) $x \in (-\infty; -2]$

7. np. $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$



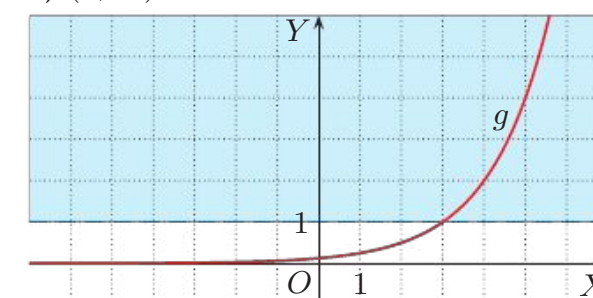
8.



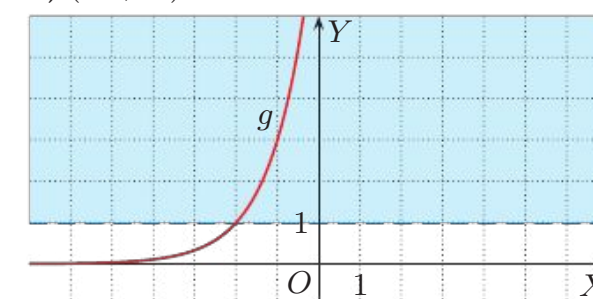
9. a) przesunąć o 4 jednostki w lewo
b) przesunąć o 2 jednostki w prawo
10. a) brak miejsc zerowych, $f(D) = (4; \infty)$
b) brak miejsc zerowych, $f(D) = (1; \infty)$
c) $f(x) = 0$ dla $x = 1$, $f(D) = (-5; \infty)$

11. a) $y = -3$ b) $y = 2$ c) $y = 1$

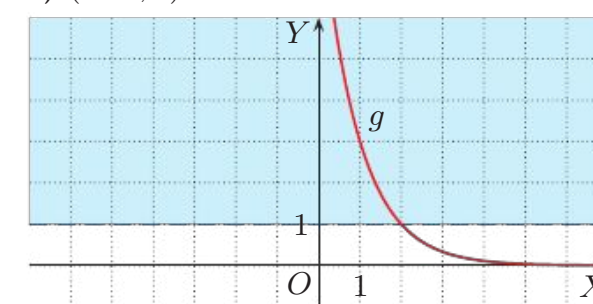
12. a) $(3; \infty)$



b) $(-2; \infty)$



c) $(-\infty; 2)$



1.5. Logarytm

- Ć 1. a) 5 b) 1 c) 0 d) -2
e) -6 f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{2}{3}$
2. a) 4 b) -2 c) -3 d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{3}{2}$
g) $\frac{3}{2}$ h) 3 i) $-\frac{1}{2}$ j) -4 k) $\frac{2}{3}$ l) 3
4. a) 100 b) 15 c) 10 d) -3 e) 3
5. a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) -1 e) $-\frac{1}{2}$ f) -1
- Z 1. a) 6 b) -9 c) -5 d) -10
e) -3 f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) -5
2. a) $b = 2^{\frac{5}{2}}$, $\log_2 b = \frac{5}{2}$
b) $b = 2^{\frac{13}{3}}$, $\log_2 b = \frac{13}{3}$
c) $b = 2^{-\frac{5}{2}}$, $\log_2 b = -\frac{5}{2}$
d) $b = 2^{-\frac{14}{3}}$, $\log_2 b = -\frac{14}{3}$
3. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$
e) 4 f) 10 g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{7}{3}$
4. a) -1 b) -6 c) 7 d) -2
e) -3 f) 3 g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{3}{2}$
5. a) 9 b) 5 c) $\frac{1}{9}$ d) 3
e) 81 f) $\frac{1}{16}$ g) 3 h) 4
6. a) 6 b) -8 c) $-\frac{35}{4}$
7. a) $\frac{1}{2}$ b) 11 c) $-\frac{5}{3}$ d) 0 e) 2 f) 2
8. a) $a = 5$ b) $a = \frac{1}{2}$ c) $a = 4$ d) $a = \frac{1}{4}$
9. a) $b = 32$ b) $b = 2$ c) $b = 9$ d) $b = 1$
e) $b = 8$ f) $b = \frac{1}{8}$ g) $b = 27$ h) $b = \frac{4}{3}$
10. a) 1 b) -1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 4 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{3}$
11. a) $a = 8$ b) $a = 16\sqrt{2}$
c) $a = 1024$ d) $a = \frac{1}{4}$
12. a) $a = 2$ b) $a = 1$ c) $a = 2$
d) $a = \frac{1}{3}$ e) $a = -1$ f) $a = \frac{1}{2}$
13. a) $x = \log_2 27$, $y = \log_3 27 \in \mathbb{Z}$
b) $x = \log_2 1000$, $y = \log_{10} 1000 \in \mathbb{Z}$
c) $x = \log_6 216 \in \mathbb{Z}$, $y = \log_8 216$
d) $x = \log_3 \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$, $y = \log_9 \frac{1}{3}$
14. a), b, d) dodatnia dla $x \in (1; \infty)$,
ujemna dla $x \in (0; 1)$
c) dodatnia dla $x \in (0; 1)$,
ujemna dla $x \in (1; \infty)$
15. a) 7 b) 6 c) 3 d) -2 e) 4 f) -1
16. a) 0 b) -5 c) $1\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{6}$ e) 2 f) $3\frac{1}{2}$
17. a) $a = 2$ b) $a = 4$ c) $a = 16$
d) $a = 256$ e) $a = \frac{1}{16}$ f) $a = \frac{1}{4}$

1.6. Logarytm dziesiętny

- Ć 1. a) 3 b) 6 c) -1 d) -4 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{2}$
2. a) 8 b) -4 c) $\frac{25}{12}$
3. a) 0,3010 b) 0,1761
c) 0,2504 d) 0,3598
4. a) 2 b) 1,5 c) 1,01 d) 2,25
- Z 1. a) 1 b) 0 c) 10
d) -5 e) $-\frac{5}{3}$ f) $-\frac{1}{2}$
g) $\frac{1}{6}$ h) 3 i) $-\frac{3}{2}$
2. a) 2 b) 1 c) $-\frac{1}{2}$
d) 4 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{3}$
3. a), c), e), f) y b), d) x
4. a), d) całkowita
b), c), e) wymierna, ale nie całkowita
f) niewymierna
5. a) 2 b) 0 c) -1 d) $-\frac{1}{2}$ e) 80 f) 3

1.7. Logarytm iloczynu i logarytm ilorazu

- Ć 2. Wszystkie równości są prawdziwe.
3. a) 2 b) 2 c) -2
d) 0 e) 1 f) -3
4. a) $\log_3 45$ b) $\log_2 5$ c) $\log_3 \frac{9}{4}$
- Z 1. a) 2 b) -3 c) 1 d) 2
2. a) 1,7 b) 2,7 c) -1,3 d) -0,7
3. a) 3,8 b) 4,8 c) 1,8 d) 0,8
4. a) 1,64 b) 2,64 c) -0,57 d) -0,22
5. a) $\log_2 30$ b) $\log_3 4$ c) $\log_4 12$
6. a) 2 b) 2 c) -1 d) 1 e) 1 f) 2
7. a) 1 b) 2 c) 1

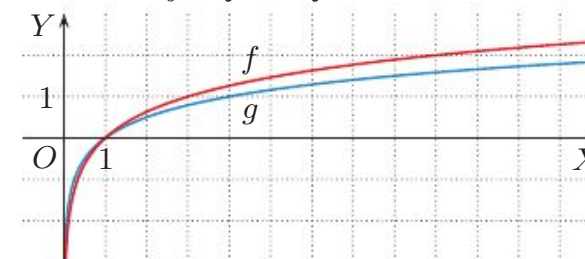
1.8. Logarytm potęgi

- Ć 1. a) 2 b) -1 c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{6}$
2. a) $\log_2 40$ b) $\log_3 \frac{16}{3}$
c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{27}{2}$ d) $\log_3 \frac{9}{4}$
3. a) 1,26 b) 2,26 c) 4,15 d) 3,89
- Z 1. a) 0,6 b) 1,2 c) -1,4 d) 3,2
2. a) 1,4 b) 1,8 c) -0,2
d) 0,4 e) 0,1 f) 1,3
4. a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) -5 d) $\frac{3}{2}$
6. a) $p + 2$ b) $p - 2$
c) $2p - 2$ d) $4p + 2$

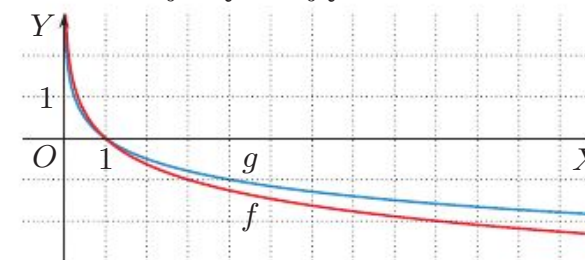
8. a) $a = 5$ b) $a = 100$
c) $a = 4$ d) $a = 5$
e) $a = 4$ f) $a = 3$
9. a) $x = 8$ b) $x = 9$
c) $x = 125$ d) $x = 1\,000\,000$
e) $x = 2$ f) $x = 9$
10. a) 0,96 b) 1,44
c) -0,04 d) -0,08

1.9. Funkcja logarymiczna

- Ć 1. $D_f = D_g = (0; \infty)$,
 $f(D_f) = g(D_g) = \mathbb{R}$,
obie funkcje są rosnące

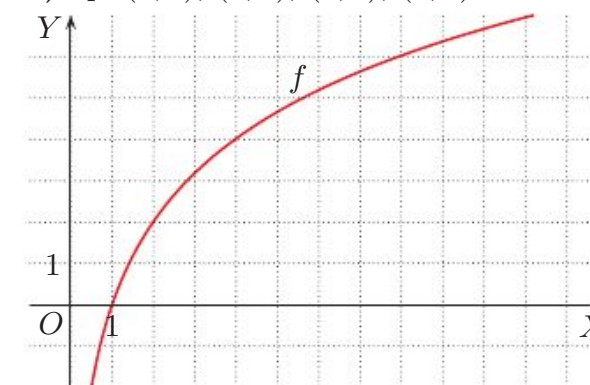


2. a) h b) f c) g
d) do wszystkich
3. a), c), d) tak b) nie
4. $D_f = D_g = (0; \infty)$,
 $f(D_f) = g(D_g) = \mathbb{R}$,
obie funkcje są malejące

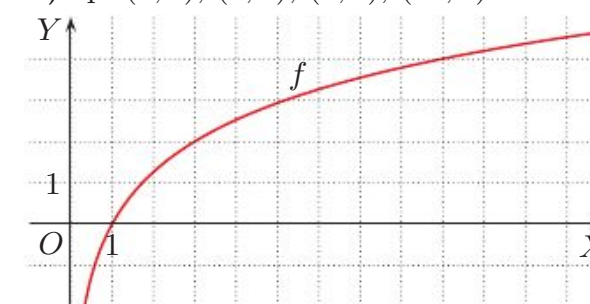


5. a) $x \in (1; \infty)$ b) $x \in (0; 1)$
6. a) $x \in (0; 2]$ b) $x \in (2; \infty)$
7. a) $x \in [4; \infty)$ b) $x \in (0; 4)$
c) $x \in (8; \infty)$ d) $x \in (0; 8]$
8. a) $x \in (0; 2)$ b) $x \in [2; \infty)$
c) $x \in (8; \infty)$ d) $x \in [8; \infty)$
- Z 1. a), d) g b), c) f
2. a) $a = 3$ b) $a = 5$
c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = \sqrt{2}$
3. a) $(-\infty; 0)$ b) $[1; \infty)$
c) $[-1; 3]$ d) $[\frac{1}{2}; 10]$

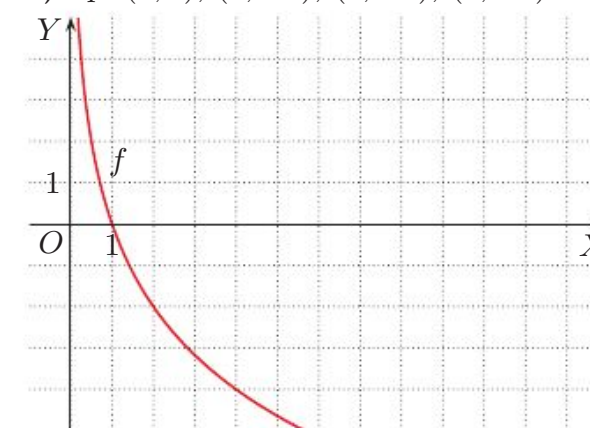
4. a), c) malejąca b) rosnąca
5. a) $m \in (\frac{1}{2}; \infty)$ b) $m \in (4; \infty)$
c) $m \in (0; \infty)$
6. a) $m \in (0; \frac{1}{3})$ b) $m \in (0; 2)$
c) $m \in (-2; -1)$
7. a) np. (1, 0), (2, 2), (4, 4), (8, 6)



- b) np. (1, 0), (3, 2), (9, 4), (27, 6)

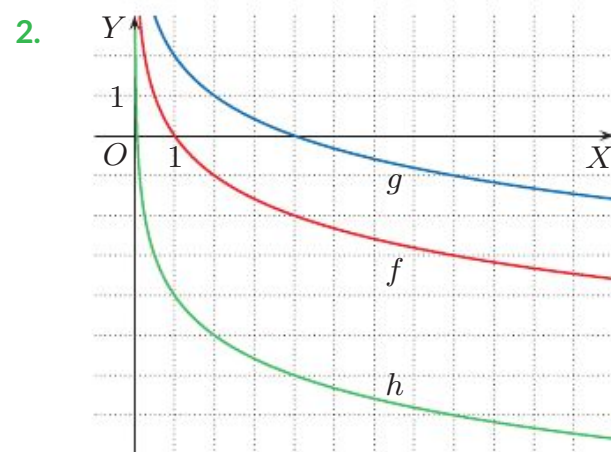
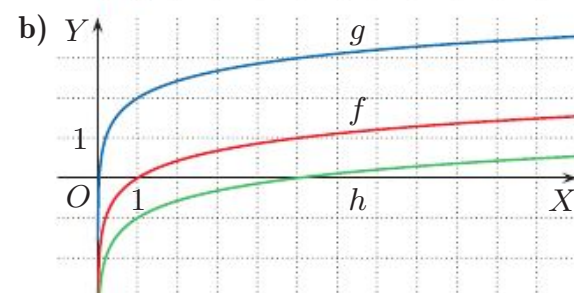
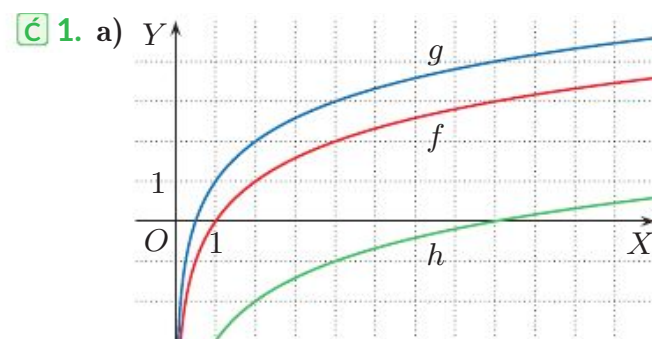


- c) np. (1, 0), (2, -2), (4, -4), (8, -6)



8. a) $x \in (10; \infty)$
b) $x \in (100; \infty)$
c) $x \in (1000; \infty)$
d) $x \in (1\,000\,000; \infty)$
9. a) $x \in [1; 2]$ b) $x \in (\frac{1}{2}; 2)$
10. a) $x \in [1; 2)$ b) $x \in (\frac{1}{2}; 4]$
11. a) $y < z < x$ b) $z < x < y$
12. a) $x \in (1; \infty)$ b) $x \in (0; 1]$
c) $x \in [\frac{1}{5}; \infty)$ d) $x \in (0; \frac{1}{5})$

1.10. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

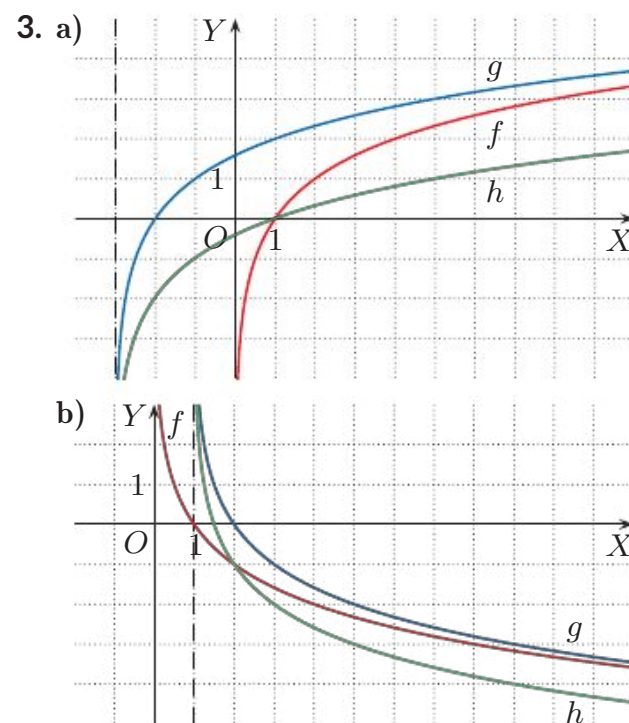


3. a), d) $a = 1$ b), c) $a = -2$
4. a) $D = (1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$, asymptota: $x = 1$
 b) $D = (3; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 4$, asymptota: $x = 3$
 c) $D = (2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 3$, asymptota: $x = 2$
 d) $D = (4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 5$, asymptota: $x = 4$
 e) $D = (2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 3$, asymptota: $x = 2$
 f) $D = (1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$, asymptota: $x = 1$
5. a) $D = (-1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$, asymptota: $x = -1$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 1$
 b) $D = (-2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$, asymptota: $x = -2$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 1$

- c) $D = (-1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$, asymptota: $x = -1$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 2$
 d) $D = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -3$, asymptota: $x = -4$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq -1$
 e) $D = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -3$, asymptota: $x = -4$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 0$
 f) $D = (-3; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -2$, asymptota: $x = -3$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 1$

6. a) $D = (2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 3$, asymptota: $x = 2$, $f(x) \geq 1$ dla $x \in (2; 2\frac{1}{2}]$
 b) $D = (4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 5$, asymptota: $x = 4$, $f(x) \geq 1$ dla $x \in (4; 4\frac{1}{2}]$
 c) $D = (-2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$, asymptota: $x = -2$, $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-2; -1\frac{2}{3}]$
 d) $D = (4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 5$, asymptota: $x = 4$, $f(x) \geq 1$ dla $x \in (4; 4\frac{1}{3}]$

- Z 1. a), b) $D = (0; \infty)$, $f(D) = \mathbb{R}$
 c) $D = (2; \infty)$, $f(D) = \mathbb{R}$
 d) $D = (-3; \infty)$, $f(D) = \mathbb{R}$
2. a) $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x - 2$, $g(x) = 0$ dla $x = 2$
 b) $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x + 1$, $g(x) = 0$ dla $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 c) $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x - 1$, $g(x) = 0$ dla $x = \sqrt{2}$



4. a) $a = 6$ b) $a = 4$ c) $a = 1$
5. a) 4 b) 2 c) $\frac{1}{3}$ d) 9 e) 16 f) 16
6. a) $D = (-3; \infty)$, asymptota: $x = -3$
 b) $D = (4; \infty)$, asymptota: $x = 4$
 c) $D = (1; \infty)$, asymptota: $x = 1$
 d), e) $D = (-2; \infty)$, asymptota: $x = -2$
 f) $D = (3; \infty)$, asymptota: $x = 3$

Skala logarytmiczna

1. o 3 dB

1.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna - zastosowania

- Ć 1. $y_0 = 400$, po 10 godzinach: 97 200
2. a) po 4800 latach b) po 16 000 lat
3. o 75% po 56 latach,
o 87,5% po 84 latach
4. a) 5700 lat b) 11 400 lat
5. 17 100 lat
- Z 1. $y_0 = 6,4 \cdot 10^4$, $a = \frac{25}{16}$,
 $9,00 - 6,4 \cdot 10^4$, $9,30 - 8 \cdot 10^4$,
 $9,45 - 8,94 \cdot 10^4$, $10,30 - 1,25 \cdot 10^5$,
 $11,45 - 2,18 \cdot 10^5$, $12,00 - 2,44 \cdot 10^5$
2. a) 8 dni b) 56 h
3. 50 000 lat
4. a) około 67% b) około 13%
5. $\frac{1}{4} - 25$, $\frac{1}{8} - 12,5$, $\frac{1}{16} - 6,25$,
 $\frac{1}{64} - 1,5625$
6. $y(1) \approx 1260$, $y(2) \approx 1587$;
po 3 godzinach

Zestaw I

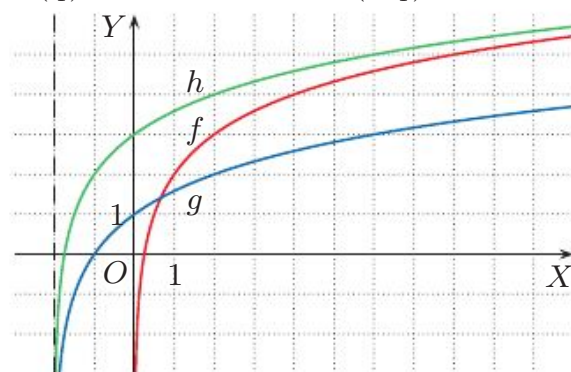
1. a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{1}{81}$ c) -8 d) $1\frac{7}{9}$
 e) 4 f) $\frac{1}{5}$ g) 27 h) 216
2. a) 5 b) -6 c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{3}{4}$
 e) 13 f) $124\frac{3}{4}$ g) 0 h) $1\frac{1}{25}$
3. a) 9 b) $\sqrt[12]{5}$ c) 3 d) 3
 e) 2 f) 1 g) 4 h) 27
4. a) $5\frac{3}{8}$ b) $7\frac{5}{8}$ c) $5\frac{10}{3}$
 d) $5\frac{5}{8}$ e) $2\frac{11}{2}$ f) $2\frac{13}{8}$
 g) $2\frac{5}{8}$ h) $2\frac{7}{8}$
5. a), b) y

6. a) $x > 0$, $2x^{\frac{2}{3}}$ b) $x \neq 0$, $\frac{4}{x}$
 c) $x > 0$, $x\sqrt{x}$ d) $x > 0$, x
7. a) $256^{\frac{1}{4}} > 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} > 32^{\frac{\pi}{10}} > 8^{\frac{1}{2}} > 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
 b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}} > (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}} > \frac{1}{243} > (\frac{1}{9})^{2,6} > (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}$
8. a), b) $x \in \{0, 2\}$ c), d) $x = -1$
9. a) $f(D_f) = (-3; \infty)$, $g(D_g) = (-2; \infty)$
 b) $f(D_f) = (1; \infty)$, $g(D_g) = (2; \infty)$
 c) $f(D_f) = (-2; \infty)$, $g(D_g) = (-1; \infty)$
10. a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -3 d) $-\frac{1}{3}$
 e) -3 f) $\frac{1}{6}$ g) 6 h) $\frac{1}{2}$
11. a) 3 b) 1 c) $\frac{11}{2}$ d) $\frac{2}{3}$
12. a) 2 b) 4 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{32}$
13. a) $x = 2$ b) $x = 0$
 c) $x = 1$ d) $x = -1$
14. a) 4 b), c) 2 d), e) -2 f) -1
15. a) $-1,523$, $-0,523$, $0,477$
 b) $-1,268$, $-2,268$, $0,732$
 c) $1,431$, $0,602$
17. a) $D = (3; \infty)$, asymptota $x = 3$
 b) $D = (0; \infty)$, asymptota $x = 0$

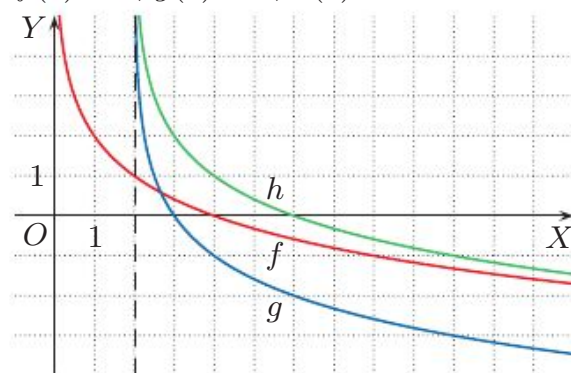
Zestaw II

1. a) $\frac{1}{81}$ b) 16 c) 1 d) 3
 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}$ g) $\frac{4}{27}$ h) $\frac{1}{80}$
2. a) 25 b) 1 c) 2 d) 1
 e) 25 f) 4 g) $\frac{1}{2}$ h) 3
3. a) 7 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{3}$ e) 20 f) $\frac{4}{121}$
4. a) $2\frac{7}{2}$ b) $2\frac{7}{3}$ c) $3^{-\frac{1}{2}}$
 d) $3\frac{3}{8}$ e) $5\frac{7}{8}$ f) $2\frac{53}{24}$
5. a), f) – mniejsza
 b), c), d), e) – większa
6. a) $25^{1,1} < 5^{\sqrt{5}} < 125^{\frac{4}{5}} < 25\sqrt{5}$
 b) $\frac{1}{\sqrt{8}} < 16^{-\frac{1}{3}} < 0,5 < (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$
 c) $(\sqrt[3]{3})^{-2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27}$
 d) $(4,5)^{-2} < 0,064 < (2,5)^{-2,4} < \sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$
7. a) 12,5893 b) 0,1259
 c) 0,0126 d) 0,0013
8. a) $y = 4^x$ b) $y = (\frac{1}{2})^x$ c) $y = (\frac{1}{3})^x$
9. a) $x \in (-\infty; -1)$ b) $x \in (3; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -3)$

10. a) 4 b) 8
 11. a) $x = 16$ b) $x = 8$ c) $x = -3, x = 3$
 d) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 e) $x = -27, x = 27$ f) $x = -64, x = 64$
 12. a) $x = 36$ b) $x = 9$
 c) $x = 100$ d) $x = 10$
 13. a) $a = 4$ b) $a = \sqrt{2}$ c) $a = \frac{1}{2}$
 14. a) II b) IV
 15. a) 0 b) 1 c) -2 d) -3
 16. a) $g(x) = \log_4 x - 2$ b) $g(x) = \log_4(x+1)$
 c) $g(x) = \log_4 x + 1$ d) $g(x) = \log_4(x-2)$
 17. a) asymptota $f: x = 0, g$ i $h: x = -2, f(\frac{1}{4}) = 0, g(-1) = 0, h(-\frac{7}{4}) = 0$



b) asymptota $f: x = 0, g$ i $h: x = 2, f(4) = 0, g(3) = 0, h(6) = 0$



18. a) $D_f = (0; \infty), f(x) < 0$ dla $x \in (0; 1), D_g = (3; \infty), g(x) < 0$ dla $x \in (3; 4), D_h = (3; \infty), h(x) < 0$ dla $x \in (3; 3\frac{1}{9})$
 b) $D_f = (0; \infty), f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty), D_g = (-1; \infty), g(x) < 0$ dla $x \in (0; \infty), D_h = (-1; \infty), h(x) < 0$ dla $x \in (-\frac{2}{3}; \infty)$
 19. a) $a = 2$ b) $a = 4$ c) $a = 3$ d) $a = \sqrt{2}$

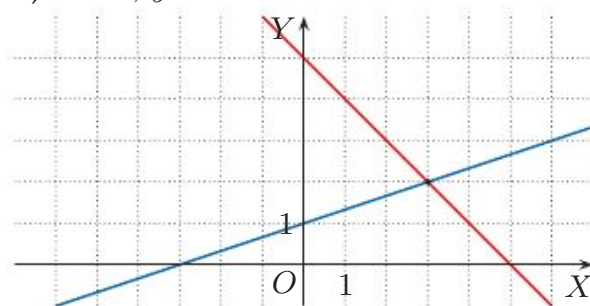
Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. C 2. B 3. D 4. B 5. A 6. A 7. B 8. B
 9. D 10. C

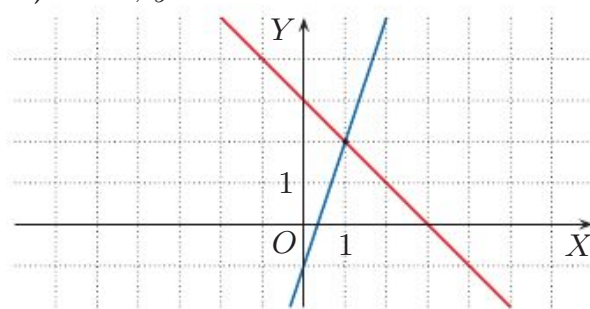
11. PP
 12. PP
 13. CG
 14. $(-4; \infty), x = -3, x = -4$
 15. A2
 16.2. D
 17.1. B 17.2. -2
 18. 10
 19. sześć
 20. $a = 4$
 23. 1021
 24. $|PQ| = 2$
 25. 30
 26. 13
 27. $f(x) = (\frac{1}{4})^x - 2$

2.1. Prosta w układzie współrzędnych - powtórzenie

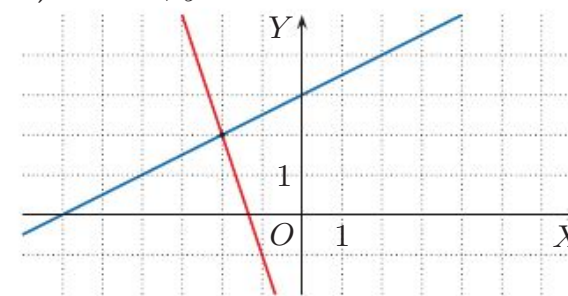
- Ć 1. a), b), d) należy c) nie należy
 2. $AB: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, AC: y = x + 3, BC: y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$
 3. a) $y = x + 3$, nie b) $y = -2x + 5$, tak
 4. a) $y = 4x - 1$ b) $y = -\frac{1}{5}x + 13$
 5. a) nie b) tak
 6. $k: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, l: y = 2x - 3, m: y = 2x, k \perp l, k \perp m$
 7. a) $x = 3, y = 2$



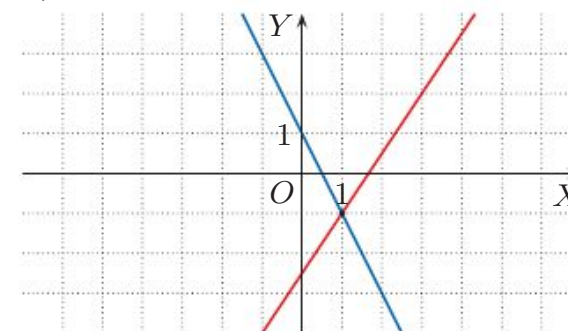
b) $x = 1, y = 2$



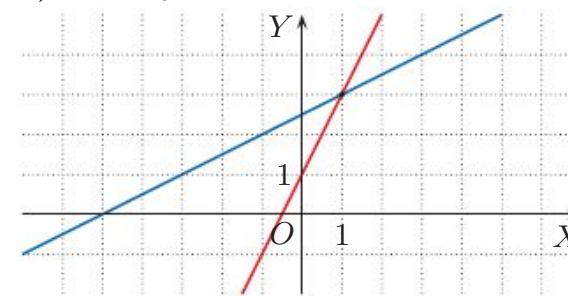
7. c) $x = -2, y = 2$



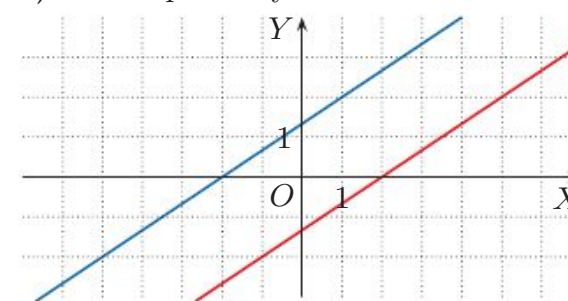
d) $x = 1, y = -1$



e) $x = 1, y = 3$

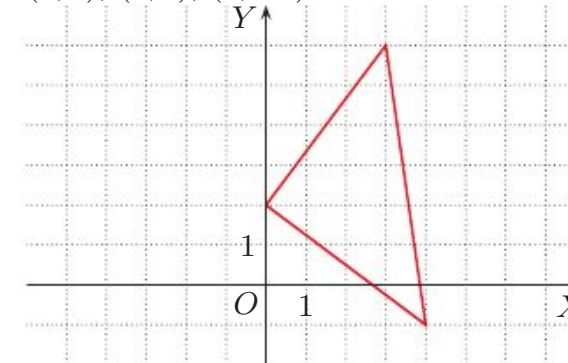


f) układ sprzeczny



- Z 1. a) $AB: y = -x - 3, AC: y = \frac{1}{2}x + 3, BC: y = -4x + 3$
 b) $AB: y = \frac{2}{3}x, AC: x = -3, BC: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
 2. $AB: y = \frac{1}{2}x - 2, AD: y = 2x + 4, BC: y = 2x - 5, CD: y = \frac{1}{2}x + 1$
 3. a) $PR: y = x - 1, QS: y = -x + 6$
 b) $PR: y = \frac{1}{7}x + 4, QS: y = 3x - 6$
 5. a) $x = -1, y = -3$ b) $x = -3, y = 1$
 c) $x = 1, y = 0$ d) $x = 2, y = 4$
 e) $x = -1, y = 2$ f) $x = -\frac{9}{7}, y = -\frac{8}{7}$

6. $(0, 2), (3, 6), (4, -1)$



7. a) $y = 3$ b) $y = -\frac{3}{4}x - 4$
 8. a) tak b) nie
 9. a) $x = 2, y = -1$
 b) $x = 3, y = -1$
 c) układ nieoznaczony

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne

1. a) $2(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$
 b) $3(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$ c) 6
 2. a) $x = 6$ b) $x = 2\sqrt{10}$
 3. 48 cm^2
 4. a) $3(5 + 3\sqrt{5})$ b) $3(5 + \sqrt{5})$
 5. a), b), c), e) jest
 d), f) nie jest

2.2. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

- Ć 1. a) 2 b) 13 c) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ d) 5
 2. $Ob = 30, P = 50$
 3. $Ob_{\triangle ABC} = 15 + 3\sqrt{5}, Ob_{\triangle DEF} = \sqrt{26} + 5\sqrt{2}$
 4. a), d) nie jest b), c) jest
 5. a) równoramienny i prostokątny
 b) równoramienny
 c) nie jest równoramienny i nie jest prostokątny
 d) prostokątny
 6. a) $6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$
 b) $4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$
 Z 1. PQRS
 2. a), b) CD c) $|AB| = |CD|$
 3. a) jest b) nie jest

4. a) przystające b) podobne
 5. a) $Ob = 24, P = 36$
 b) $Ob = 8\sqrt{10}, P = 40$
 6. a) $Ob = 4\sqrt{10}, |AC| = 4\sqrt{2},$
 $|BD| = 2\sqrt{2}, h = \frac{4\sqrt{10}}{5}$
 b) $Ob = 20\sqrt{2}, |AC| = 6\sqrt{5},$
 $|BD| = 2\sqrt{5}, h = 3\sqrt{2}$
 7. $P = 30$
 8. a) $Ob = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 6,$
 wysokości: $4, 3\sqrt{2}, \frac{12\sqrt{5}}{5}$
 b) $Ob = 2\sqrt{10} + 6\sqrt{2} + 4,$
 wysokości: $6, 2\sqrt{2}, \frac{6\sqrt{10}}{5}$
 9. $8(\sqrt{2} + \sqrt{5})$
 10. a) $7\sqrt{5}$ b) $9 + \sqrt{13} + \sqrt{74}$
 11. $Ob = 4\sqrt{10}, |AC| = 2\sqrt{5}$
 12. a) $Ob = 12 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}, P = 24$
 b) $Ob = 18 + 6\sqrt{5}, P = 36$
 13. a) jest, $P = \frac{45}{2}$ b) jest, $P = \frac{25}{2}$
- 2.3. Środek odcinka**
- Ć 1. a) $S(2, 1)$ b) $S(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$ c) $S(\frac{7}{4}, -\frac{3}{4})$
 2. a) $B(-7, -14)$ b) $2\sqrt{34}$ c) $2\sqrt{10}$
 3. a) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{2}, 2\sqrt{17}$ b) $2\sqrt{5}, 5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}$
 4. $(-3, 2), A(-6, -1)$
 5. $4\sqrt{10}\pi$; nie należy
- Z 1. a) 5 b) $2\sqrt{5}$ c) 2,5
 2. a) $B(-8, 1)$ b) $B(8, 9)$ c) $B(-10, -3)$
 3. $(-3, -2), (-1, -1), (1, 0)$
 4. a) $2\sqrt{10}$ b) $6\sqrt{2}$
 5. $P_r = 12, P_p = 6$
 6. $Ob_p = 16\sqrt{5}, Ob_r = 20\sqrt{2}$
 7. a) $S_{AC}(8, 2), S_{BD}(8, 2)$, jest
 b) $S_{AC}(4\frac{1}{2}, 2), S_{BD}(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, nie jest
 8. $S(3, 2), D(7, 5), Ob = 6\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$
 9. $A(-1, 4), B(1, 0), C(5, 2), P = 20$
 10. $S_{AD}(-5, -1), S_{BC}(3, 3), P = 40$
 11. a), b) należy
 12. a) II b) III c) I
 13. $S_{AB}(-1, 1), S_{BC}(2, 2),$
 $S_{CD}(1, 5), S_{AD}(-2, 4)$
 14. a) $2\sqrt{5}, \sqrt{17}, \sqrt{29}$ b) $2\sqrt{2}, 4\sqrt{5}, 2\sqrt{26}$

15. a) $(-1, -2), r = 5$
 b) $(-1, 1), r = 2\sqrt{10}$
 16. $|AB| = 6\sqrt{5}, |CD| = 2\sqrt{5},$
 $|PQ| = 4\sqrt{5}$
- 2.4. Okrąg w układzie współrzędnych**
- Ć 1. a) nie należy b), c) należy
 2. a) $x^2 + y^2 = 4$, 4 punkty
 b) $x^2 + y^2 = 16$, 4 punkty
 c) $x^2 + y^2 = 25$, 12 punktów
 d) $x^2 + y^2 = 49$, 4 punkty
 3. $x^2 + y^2 = 5$, $(1, 2), (2, 1), (-1, 2), (-2, 1),$
 $(-2, -1), (-1, -2), (1, -2), (2, -1)$
 4. a) $x^2 + y^2 = 8,$
 $(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)$
 b) $x^2 + y^2 = 18,$
 $(3, 3), (-3, 3), (-3, -3), (3, -3)$
 c) $x^2 + y^2 = 10,$
 $(3, 1), (1, 3), (-1, 3), (-3, 1),$
 $(-3, -1), (-1, -3), (1, -3), (3, -1)$
 d) $x^2 + y^2 = 17,$
 $(4, 1), (1, 4), (-1, 4), (-4, 1),$
 $(-4, -1), (-1, -4), (1, -4), (4, -1)$
 5. a) $x^2 + y^2 = 36$ b) $x^2 + y^2 = 64$
 c) $x^2 + y^2 = 3$ d) $x^2 + y^2 = 50$
 6. a) $r = 13, x^2 + y^2 = 169$
 b) $r = 3\sqrt{2}, x^2 + y^2 = 18$
 c) $r = \sqrt{41}, x^2 + y^2 = 41$
 d) $r = 2\sqrt{2}, x^2 + y^2 = 8$
 7. a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$
 b) $(x + 7)^2 + (y - 6)^2 = 4$
 c) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 2$
 8. a) $S(2, 5), r = 4$ b) $S(4, -5), r = 3$
 c) $S(-3, 2), r = 10$
 d) $S(-5, -9), r = 15$
 e) $S(-\frac{1}{2}, 3), r = \frac{5}{3}$
 f) $S(0, -\frac{9}{4}), r = \sqrt{10}$
 g) $S(6, 0), r = 3\sqrt{5}$
 h) $S(\sqrt{2}, \sqrt{3}), r = 2\sqrt{2}$
 9. Q
 10. a) $x^2 + (y + 1)^2 = 5$
 b) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$
 c) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$

- Z 1. a) $x^2 + y^2 = 100, A$ i B należą
 b) $x^2 + y^2 = 34, B$ należy
 c) $x^2 + y^2 = 16, A$ należy
 d) $x^2 + y^2 = 20, A$ należy
 2. a) 5π b) 4π
 3. a) $S(-3, 6), r = 2\sqrt{2}$ b) $S(0, 1), r = \sqrt{3}$
 c) $S(1, -5), r = 4$ d) $S(\sqrt{2}, 0), r = 3\sqrt{2}$
 4. $K_1 - \text{III}, K_2 - \text{IV}, K_3 - \text{II}, K_4 - \text{I}$
 5. a) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$
 b) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$
 c) $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{16}$
 d) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{25}{4}$
 e) $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 20$
 f) $(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 27$
 6. a) $(x - 2)^2 + y^2 = 10$
 b) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$
 c) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 8$
 d) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 32$
 e) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$
 f) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 13$
 7. 12 punktów
 8. a) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$
 b) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$
 c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$
 d) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$
 e) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$
 f) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 17$
 9. a) $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{65}{4}$
 b) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 20$
 c) $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{125}{4}$
 d) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$
 10. a) opisany: $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 20,$
 wpisany: $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 10$
 b) opisany: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10,$
 wpisany: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$
 11. a) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{65}{4}$
 b) $(x + \frac{7}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{125}{4}$
 12. a) $K_1: (x - 4)^2 + y^2 = 1,$
 $K_2: (x - 4)^2 + y^2 = 4,$
 $K_3: (x - 4)^2 + y^2 = 9,$
 $K_4: (x - 4)^2 + y^2 = 16$
 b) 62,5% c) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
 lub $(x - 1)^2 + y^2 = 49$

13. $K_1: x^2 + y^2 = 4,$
 $K_2: x^2 + y^2 = 16,$
 $K_3: (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 1,$
 $K_4: (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9,$
 $K_5: (x + 3)^2 + y^2 = 1,$
 $K_6: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$
 14. a) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20, A(-1, -3)$
 b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25, A(-5, -3)$

2.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

- Ć 1. a) $|S_1 S_2| = 2$, brak punktów wspólnych
 b) $|S_1 S_2| = 5$, 1 punkt wspólny
 c) $|S_1 S_2| = 4$, 1 punkt wspólny
 d) $|S_1 S_2| = 2\sqrt{2}$, 2 punkty wspólne
 2. a) 1 b) 0 c) 2 d) 1
 3. a) $r \in \{3, 11\}$
 b) $r \in \{4 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{5}\}$
 4. $r \in (10; 20)$
- Z 1. a) $d = 6$, styczne zewnętrznie
 b) $d = 5$, styczne wewnętrznie
 c) $d = 5$, przecinają się
 d) $d = 5\sqrt{2}$, przecinają się
 e) $d = 2\sqrt{2}$, rozłączne wewnętrznie
 f) $d = 13$, rozłączne zewnętrznie
 2. a) $d = 13$, 1 punkt dla $r \in \{5, 21\},$
 2 punkty dla $r \in (5; 21)$
 b) $d = \sqrt{41},$
 1 punkt dla $r \in \{\sqrt{41} - 4, \sqrt{41} + 4\},$
 2 punkty dla $r \in (\sqrt{41} - 4; \sqrt{41} + 4)$
 c) $d = 4\sqrt{5},$
 1 punkt dla $r \in \{4\sqrt{5} - 7, 4\sqrt{5} + 7\},$
 2 punkty dla $r \in (4\sqrt{5} - 7; 4\sqrt{5} + 7)$
 3. a) $K_1: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8,$
 $K_2: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2,$
 styczne zewnętrznie
 b) $K_1: (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 8,$
 $K_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9,$
 przecinają się
 c) $K_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9,$
 $K_2: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2,$
 przecinają się
 4. $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$
 5. a) 0 b) 0 c) 2 d) 1

6. a) 1 punkt dla $r \in \{3, 7\}$,
2 punkty dla $r \in (3; 7)$
b) 1 punkt dla $r \in \{3\sqrt{5} - 5, 3\sqrt{5} + 5\}$,
2 punkty dla $r \in (3\sqrt{5} - 5; 3\sqrt{5} + 5)$

Współrzędne geograficzne

1. w Niedzicy – C, w Czersku – D,
Czocha – A, w Gniewie – B

2.6. Wzajemne położenie okręgu i prostej

- ☑ 1. a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
1 punkt dla $r = 4$,
2 punkty dla $r \in (4; \infty)$
b) 0 punktów dla $r \in (0; 7)$,
1 punkt dla $r = 7$,
2 punkty dla $r \in (7; \infty)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; 2 + \sqrt{3})$,
1 punkt dla $r = 2 + \sqrt{3}$,
2 punkty dla $r \in (2 + \sqrt{3}; \infty)$
d) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{3}{2} - \sqrt{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \infty)$
2. a) $2\sqrt{21}$ b), c) 8
3. a) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$
b) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 18$
4. $C(1, 1 - 2\sqrt{2})$ lub $C(1, 1 + 2\sqrt{2})$
- ☑ 1. a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
1 punkt dla $r = 4$,
2 punkty dla $r \in (4; \infty)$
b) 0 punktów dla $r \in (0; 3)$,
1 punkt dla $r = 3$,
2 punkty dla $r \in (3; \infty)$
c) 0 punktów dla $r \in (0; 8)$,
1 punkt dla $r = 8$,
2 punkty dla $r \in (8; \infty)$
d) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{5}{2})$,
1 punkt dla $r = \frac{5}{2}$,
2 punkty dla $r \in (\frac{5}{2}; \infty)$
2. a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$
b) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 64$
c) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 36$
d) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 100$
3. a) $(x-2)^2 + y^2 = 8$, łuk $AB: \sqrt{2}\pi$
b) $(x-2)^2 + y^2 = 16$, łuk $AB: \frac{8}{3}\pi$
4. $(x+3)^2 + y^2 = 5$, $y = \frac{1}{2}x - 1$

5. a) 1 b) 2 c) 0 d) 2
6. a) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 81$
b) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 144$
7. a) 0 b) 1 c) 2
8. a) $y = -8$, $y = 6$ b) $x = -4$, $x = 10$

2.7. Symetria osiowa

- ☑ 2. kwadrat: 4, trójkąt równoboczny: 3,
prostokąt: 2, koło: nieskończenie wiele
3. a) $A'(0, -3)$, $B'(3, 0)$, $A''(0, 3)$, $B''(-3, 0)$
b) $A'(1, 2)$, $B'(-4, -3)$,
 $A''(-1, -2)$, $B''(4, 3)$
c) $A'(-5, -1)$, $B'(1, -4)$,
 $A''(5, 1)$, $B''(-1, 4)$
5. a) $A'(-2, -1)$, $B'(2, 3)$, $C'(4, 1)$, $D'(0, -3)$
b) $A'(2, 1)$, $B'(-2, -3)$, $C'(-4, -1)$,
 $D'(0, 3)$
6. $K': (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$,
 $K'': (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$
7. a) $K': (x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$,
 $K'': (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$
b) $K': (x+2)^2 + (y-4)^2 = 13$,
 $K'': (x-2)^2 + (y+4)^2 = 13$
c) $K': (x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$,
 $K'': (x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$
d) $K': (x+1)^2 + (y-6)^2 = 49$,
 $K'': (x-1)^2 + (y+6)^2 = 49$

- ☑ 1. a) OX b) OY c), d) nie są
3. a) 8 b) 2
4. a) 26 b) $P = 14$, $Ob = 2(2\sqrt{10} + \sqrt{5})$,
18 punktów
5. a) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$, należy
b) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 41$, nie należy
c) $(x+3)^2 + y^2 = 4$, należy
d) $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 40$, należy
6. a) $K': (x+4)^2 + (y+2)^2 = 25$,
 $(0, 1)$, $(0, -5)$, $P = 24$
b) $K': (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$,
 $(0, 3)$, $(0, -1)$, $P = 8$
c) $K': (x-3)^2 + (y-1)^2 = 13$,
 $(0, 3)$, $(0, -1)$, $P = 12$
d) $K': (x+2)^2 + (y-3)^2 = 20$,
 $(0, 7)$, $(0, -1)$, $P = 16$

7. $K': (x-3)^2 + (y+3)^2 = 18$, $P = 9(\pi - 2)$
8. a) $A'(-3, 1)$, $B'(6, 4)$, $C'(0, 0)$
b) $A'(3, -1)$, $B'(-6, -4)$, $C'(0, 0)$
9. a) $K': (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$,
 $K'': (x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$
b) $K': (x+3)^2 + (y-3)^2 = 18$,
 $K'': (x-3)^2 + (y+3)^2 = 18$
c) $K': (x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$,
 $K'': (x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$
d) $K': (x+4)^2 + (y-2)^2 = 13$,
 $K'': (x-4)^2 + (y+2)^2 = 13$

2.8. Symetria środkowa

- ☑ 2. równoległobok, prosta, kwadrat,
odcinek
3. a) $A'(-3, 2)$, $B'(2, 1)$, $C'(1, -4)$
b) $A'(-2, 2)$, $B'(-1, -3)$, $C'(3, -1)$
4. a) 24 b) 20 c) 6
5. a) $K': (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$
b) $K': (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$
c) $K': (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
d) $K': (x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$
6. a) $K': (x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$ c) $8(\pi - 2)$
- ☑ 1. a) 10 b) $2\sqrt{17}$ c) 20 d) $2\sqrt{2}|a|$
3. 22,4
4. a) $K': (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$
b) $K': (x-4)^2 + (y+1)^2 = 17$
c) $K': (x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$
d) $K': (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$
5. $K': (x-3)^2 + (y+3)^2 = 36$,
 $P = 18(\pi - 2)$
7. a) $K': (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$
b) $K': (x-9)^2 + (y-5)^2 = 4$
8. a) 8 b) 6
9. a) $K': (x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$
b) $K': (x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$

Zestaw I

1. a) $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $|AC| = 15$,
współliniowe
b) $|AB| = 8\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$,
 $|AC| = 4\sqrt{5}$, współliniowe
c) $|AB| = 10$, $|BC| = 10$,
 $|AC| = 14\sqrt{2}$, niewspółliniowe

- d) $|AB| = 6\sqrt{2}$, $|BC| = 3\sqrt{2}$,
 $|AC| = 9\sqrt{2}$, współliniowe
2. a) $2\sqrt{5}$ b) 5 c) $2\sqrt{5}$ d) 2,5
3. a) $(0, 1)$, $(2, -2)$, $(4, -5)$
b) $(\frac{1}{2}, 4)$, $(2, 5)$, $(\frac{7}{2}, 6)$
4. a) $B(-5, 2)$ b) $B(7, 10)$
c) $B(-2, -1)$ d) $B(2\sqrt{3} - 3, 0)$
5. a) $S(4, 4)$ b) $S(1, -2)$
c) $S(-4, 4)$ d) $S(-1, 3)$
6. a) $Ob = 12\sqrt{5}$, $S(0, 1)$, $r = 5$
b) $Ob = 24\sqrt{2}$, $S(2, 0)$, $r = 2\sqrt{10}$
7. a) $|AD| = \sqrt{29}$, $|BE| = \sqrt{41}$
b) $|AD| = \sqrt{53}$, $|BE| = \sqrt{65}$
8. a) podobne b) przystające
9. a) $(x+4)^2 + y^2 = 25$,
 $(1, 0)$, $(-9, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$
b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$, $(-2, 0)$,
 $(6, 0)$, $(0, 3 - \sqrt{21})$, $(0, 3 + \sqrt{21})$
c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$,
 $(-2\sqrt{3} - 1, 0)$, $(2\sqrt{3} - 1, 0)$,
 $(0, 2 - \sqrt{15})$, $(0, 2 + \sqrt{15})$
d) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 1$,
nie ma punktów wspólnych z osiami
układu współrzędnych
10. a) $S(0, 5)$, $r = 8$, $P = 128$
b) $S(3, -4)$, $r = 9$, $P = 162$
c) $S(2, 5)$, $r = 2\sqrt{5}$, $P = 40$
d) $S(-11, -13)$, $r = 2\sqrt{10}$, $P = 80$

11. a) P , Q b) P , R c) Q

12. a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$
b) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 16$
c) $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = 12\frac{1}{4}$
d) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$
e) $(x+1)^2 + y^2 = 5$
f) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$

Zestaw II

1. a) $D(1, 9)$, $Ob = 2(6\sqrt{2} + \sqrt{29})$
b) $D(4, 5)$, $Ob = 2(\sqrt{5} + \sqrt{97})$
2. a) styczne zewnętrznie
b), c) przecinają się
d) rozłączne zewnętrznie

3. $K_1: (x+3)^2 + y^2 = 4$, $K_2: x^2 + (y-1)^2 = 4$,
 $K_3: (x-3)^2 + y^2 = 1$,
 $K_4: (x-5)^2 + y^2 = 9$,
 $K_5: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 1$
a) K_1 i K_5 b) K_3 i K_4
4. $P_1 = 16\pi$, $P_2 = 8\pi$, $P = 8(\pi - 1)$
5. a) $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $|S_1 S_2| = 2$,
przecinają się
b) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $|S_1 S_2| = 1$,
styczne wewnętrznie
6. $K_1: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$,
 $K_2: (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$
7. a) $x^2 + (y-1)^2 = 5$ b) $x^2 + (y-1)^2 = 10$
8. a) 8 b) 9
9. 8
10. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 34$
11. a) $x = -9$ lub $x = 7$
b) $x = -5\sqrt{2} - 1$ lub $x = 5\sqrt{2} - 1$
c) $x = -5\sqrt{3} - 1$ lub $x = 5\sqrt{3} - 1$
d) $x = -1$
12. a) $(3, 0)$, $(0, 3)$, $K': (x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$
b) $(-4, 0)$, $(0, 4)$,
 $K': (x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$

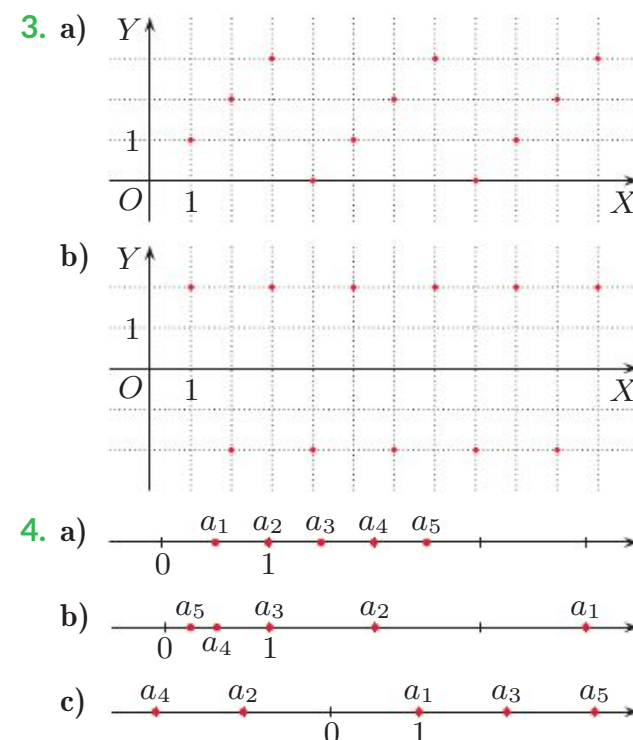
Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. B 2. A 3. C 4. B 5. D 6. C 7. C
8. C 9. C 10. C
11. BH
- 12.1. B 12.2. D
- 13.1. A 13.2. FP
14. FP
15. A1
16. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$
17. 13
18. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$
19. $K': (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$, $d = 6$
20. $C(-1, 0)$, $P = 13$
21. 38
23. $P = 32$, $h = \frac{8\sqrt{10}}{5}$
- 24.1. 25
- 24.2. $B(-2, 4)$, $y = -7x - 10$
25. $x^2 + (y-1)^2 = 25$

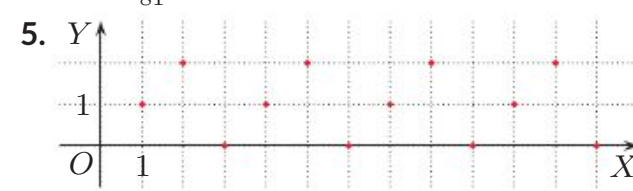
3.1. Pojęcie ciągu

1. a) $a_n = 2^n$, $a_7 = 128$, $a_8 = 256$
b) $a_n = (\frac{1}{2})^n$, $a_7 = \frac{1}{128}$, $a_8 = \frac{1}{256}$
c) $a_n = (-1)^n$, $a_7 = -1$, $a_8 = 1$
d) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $a_7 = \frac{1}{7}$, $a_8 = -\frac{1}{8}$

2. A: $a_{17} = 34$, $a_{100} = 200$
B: $a_{17} = 3$, $a_{100} = 3$



1. a) $a_7 = 13$, $a_8 = 15$, $a_9 = 17$, $a_{10} = 19$
b) $a_7 = \frac{1}{14}$, $a_8 = \frac{1}{16}$, $a_9 = \frac{1}{18}$, $a_{10} = \frac{1}{20}$
c) $a_7 = 17$, $a_8 = 19$, $a_9 = 23$, $a_{10} = 29$
3. a) $a_1 = 1,4$, $a_2 = 1,41$, $a_3 = 1,414$,
 $a_4 = 1,4142$, $a_5 = 1,41421$, $a_6 = 1,414214$
b) $a_1 = 1,7$, $a_2 = 1,73$, $a_3 = 1,732$,
 $a_4 = 1,7321$, $a_5 = 1,73205$,
 $a_6 = 1,732051$
c) $a_1 = 3,1$, $a_2 = 3,14$, $a_3 = 3,142$,
 $a_4 = 3,1416$, $a_5 = 3,14159$,
 $a_6 = 3,141593$
4. a) $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 27$, $a_4 = 64$,
 $a_5 = 125$
b) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{9}$, $a_3 = \frac{1}{25}$, $a_4 = \frac{1}{49}$,
 $a_5 = \frac{1}{81}$



Równania i nierówności

1. a) $x = -\frac{8}{3}$ b) $x = 12$ c) $x = 6$
d) $x = 18$ e) sprzeczne f) $x = 16$
2. a) $x > -2$ b) $x > -\frac{1}{2}$ c) $x > 15$
d) $x \leq 24$ e) $x \leq -\frac{25}{8}$ f) $x \geq -\frac{14}{3}$
3. a) $x \in \{1, 2, 3\}$
b), e) $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
c) $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
d) $x \in \{8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$
f) $x \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$
4. a) $x = -4$, $x = 0$ b) $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$
c) $x = -\frac{3}{2}$ d) $x = \frac{3}{4}$ e) $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$
f) $x = -5$, $x = -\frac{1}{3}$
5. a) $x \in [0; 6]$ b) $x \in (-\infty; -\frac{9}{2}) \cup (0; \infty)$
c) $x \in [-6; 6]$ d) $x \in (-\frac{12}{5}; \frac{12}{5})$
e) $x \in [1; 6]$ f) $x \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$
6. a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$
b) $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
c) $x \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$
d), e) $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
f) $x \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$
g) $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
h) $x \in \{1, 2\}$ i) $x \in \mathbb{N}_+ \setminus \{2\}$
7. a) $x = 0$, $x = 5$ b) $x = 0$ c) $x = 3$
8. a) $x = -13$ b) $x = -4$, $x = 0$ c) $x = 3$
d) $x = -5$ e) $x = -1$ f) $x = 1$, $x = 4$

3.2. Sposoby określania ciągu

1. a) 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10
b) 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20
2. a) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_4 = \frac{16}{5}$,
 $a_{10} = \frac{100}{11}$
b) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{4}{5}$, $a_4 = \frac{15}{17}$,
 $a_{10} = \frac{99}{101}$
c) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{8}{9}$, $a_3 = \frac{5}{9}$, $a_4 = \frac{8}{27}$,
 $a_{10} = \frac{40}{19683}$
d) $a_1 = 0$, $a_2 = 4$, $a_3 = 18$, $a_4 = 48$,
 $a_{10} = 900$
3. a) $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$,
 $a_{10} = -1$
b) $a_1 = 2$, $a_2 = -4$, $a_3 = 8$, $a_4 = -16$,
 $a_{10} = -1024$

- c) $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -3$, $a_4 = 4$,
 $a_{10} = 10$
d) $a_1 = -4$, $a_2 = 8$, $a_3 = -16$, $a_4 = 32$,
 $a_{10} = 2048$
e) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{3}{5}$,
 $a_{10} = \frac{9}{11}$
f) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -\frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{5}{7}$, $a_4 = -\frac{7}{9}$,
 $a_{10} = -\frac{19}{21}$

4. np.: a) $a_n = 3^{n-1}$ b) $a_n = n^2 - 1$
c) $a_n = \frac{3}{2^n}$ d) $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$

5. a) $a_4 = 0$; $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$
b) brak wyrazów równych zeru;
 $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4\}$
c) $a_2 = 0$; $a_n > 0$ dla $n \geq 3$ i $n \in \mathbb{N}$
d) brak wyrazów równych zeru;
 $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

6. a) 4 b) 13 c) 8 d) 4

1. a) 2, 6, 10, 14, 18 b) 1, 6, 15, 28, 45
c) 2, 2, 0, -4, -10
d) 1, 2, 5, 12, 27 e) -1, 6, -5, 20, -27
f) 1, -8, 27, -64, 125
g) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$
h) $3, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{5}$ i) 2, 1, 4, 3, 6

2. a) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}$ b) 0, 4, 0, 16, 0, 64

3. a) a_3 b) a_2 c) a_3 d) a_2, a_4 e) a_7
f) brak wyrazów równych zeru

4. a) $a_2, a_3, \dots, a_8$
b) $a_{13}, a_{14}, a_{15}, \dots$
c) $a_1, a_2, \dots, a_6$

5. a) $a_1, a_2, \dots, a_6$ b) $a_2, a_3, \dots, a_9$
c) brak wyrazów ujemnych

6. a) a_5 b) a_4 c) a_2

7. a) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

8. $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$

9. a) $\frac{9}{2}, 3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -3$
b) -1, 0, 3, 8, 15, 24
c) -3, 5, -7, 9, -11, 13
d) 2, -1, 4, -3, 6, -5
e) 1, 0, -1, -2, -3, -2
f) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$

11. a) 0 b) 6 c) 8

3.3. Ciągi monotoniczne

- ☑ 1. np. $a_n = 2 + \frac{1}{n}$
3. a) $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 4$; nie jest
b) $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 3, a_4 = 0, a_5 = -5$; nie jest
c) $a_1 = -1, a_2 = -5, a_3 = -7, a_4 = -7, a_5 = -5$; nie jest
4. a), c) rosnący b) malejący
5. a), b) rosnący c) malejący
6. a) $a_5 = a_6 = 4$
b) $a_3 \in [\frac{3}{2}; 2], a_5 \in [2; 3], a_6 \in [2; 3]$ i $a_5 \leq a_6$
7. np.: a) 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1
b) 2, 2, 2, -1, -1, -1, -2, -2
- ☑ 1. a) $3n - 1$ b) $-2n + 4$ c) $n^2 + 2n$
d) $-n^2 + 1$ e) $\frac{n+4}{n+1}$ f) $\frac{2n+2}{n+6}$
g) $\frac{3n-1}{2n+3}$ h) $\frac{-3n-1}{4n-1}$
5. a), c) rosnący
b), d) malejący
6. a) malejący b) stały
c) rosnący
7. a) 1, 0, 1, 4, 9
b) -5, -8, -9, -8, -5
c) 3, 2, 1, 0, 1
d) 3, 4, 3, 0, 5

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

- ☑ 1. a) $a_4 = 0, a_5 = -1, a_6 = 0$
b) $a_4 = 15, a_5 = 31, a_6 = 63$
c) $a_4 = 13, a_5 = 27, a_6 = 53$
2. a) $a_2 = -6, a_3 = -12, a_4 = -24, a_5 = -48, a_6 = -96$
b) $a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = -9, a_5 = -35, a_6 = -115$
c) $a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 46, a_5 = 2112, a_6 = 4460539$
d) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$
3. a) $a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 10$
b) $a_3 = 4, a_4 = 7, a_5 = 11, a_6 = 18$
c) $a_3 = 0, a_4 = -1, a_5 = 1, a_6 = 2$
d) $a_3 = 0, a_4 = -3, a_5 = -4, a_6 = 7$

- ☑ 1. a) $a_2 = 0, a_3 = 10, a_4 = 30, a_5 = 70$, 8 liczb dodatnich
b) $a_2 = 4, a_3 = 0, a_4 = -8, a_5 = -24$, 2 liczby dodatnie
c) $a_2 = -1, a_3 = 3, a_4 = -5, a_5 = 11$, 5 liczb dodatnich
d) $a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 14$, 8 liczb dodatnich
2. a) 4 b) 1 c) 6 d) 0
3. a) 16 b) 29 c) -4 d) 52
4. a) $x = -\frac{13}{2}$, rosnący
b) $x = 20$, malejący
5. a) $a_3 = 0, a_4 = -6, a_5 = 28, a_6 = 774$
b) $a_3 = 2, a_4 = -3, a_5 = -25, a_6 = -100$
c) $a_3 = 12, a_4 = 48, a_5 = 240, a_6 = 1440$
d) $a_3 = 0, a_4 = -3, a_5 = -16, a_6 = -85$
6. a) 0 b) 88 c) 2448 d) 88

3.5. Ciąg arytmetyczny (1)

- ☑ 1. a) $r = 9$,
kolejne wyrazy: 39, 48, 57, 66
b) $r = 1$,
kolejne wyrazy: $5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$
c) $r = -4$,
kolejne wyrazy: -9, -13, -17, -21
2. a) $a_n = 2n, a_{20} = 40$
b) $a_n = \frac{1}{2}n + 3\frac{1}{2}, a_{20} = 13\frac{1}{2}$
c) $a_n = -n + 4, a_{20} = -16$
d) $a_n = -\frac{1}{3}n + 2\frac{1}{3}, a_{20} = -4\frac{1}{3}$
3. a) $a_n = 2n + 2$ b) $a_n = 5n - 10$
c) $a_n = -\frac{1}{4}n + 5\frac{1}{4}$
4. a) $r = -6$, malejący, $a_n = -6n + 15$
b) $r = \frac{3}{4}$, rosnący, $a_n = \frac{3}{4}n + 1$
c) $r = 0$, stały, $a_n = 2$
5. a) $k = 5$ b) $k = -\frac{4}{3}$
6. a) $x = 23$ b) $x = -2$ c) $x = \frac{5}{12}$

- ☑ 1. a) $a_7 = 13$, rosnący
b) $a_{11} = -36$, malejący
c) $a_9 = 5$, rosnący
d) $a_{15} = 3, 4$, rosnący
2. a) $a_n = 7n - 1$ b) $a_n = 3n - 7$
c) $a_n = -\frac{1}{2}n + 9\frac{1}{2}$

3. a) $a_n = 2n - 1$
b) $a_n = -3n + 15$
c) $a_n = \frac{1}{2}n - 7\frac{1}{2}$
4. $a = 4, b = 7$
5. a) 7, 13, 19
b) 5, 9, 13, 17, 21
c) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
6. a) $a_n = -4n + 44, a_{12} = -4$
b) $a_n = \frac{1}{2}n - 10\frac{1}{2}, a_{12} = -4\frac{1}{2}$
c) $a_n = \frac{1}{4}n + 2\frac{3}{4}, a_{12} = 5\frac{3}{4}$
7. a) $a_1 = 21, r = -5$
b) $a_1 = -2, r = 5$
c) $a_1 = 4, r = 2$
d) $a_1 = \frac{7}{2}, r = -\frac{1}{2}$
e) $a_1 = -1, r = 2$
f) $a_1 = -2, r = 2$
8. a) $x = 2$
b) $x = -3$ lub $x = 3$
9. a_{16}
10. -16, -13, -10, -7 lub 1, 4, 7, 10
11. a) $x = 7, y = 11$
b) $x = 15, 5, y = 27, z = 38, 5$
12. a) $a_n = 3n - 4, a_6 = 14$
b) $a_n = -4n + 20, a_6 = -4$
c) $a_n = \frac{1}{2}n - 6, a_6 = -3$
13. a) $a_n = -4n + 8, a_2 = 0$
b) $a_n = -9n + 16, a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$
c) $a_n = 2n + 1, a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$

3.6. Ciąg arytmetyczny (2)

- ☑ 4. a) $a_n = -2n + 8, y = -2x + 8$
b) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10, a_5 = 13, a_n = 3n - 2$
c) $y = 2x + 1$
- ☑ 2. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 29$; nie jest
4. a) $a_n = 5n - 4, a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 11, a_4 = 16$
b) $a_n = -3n + 1, a_1 = -2, a_2 = -5, a_3 = -8, a_4 = -11$
c) $a_n = n\sqrt{3} - 2, a_1 = \sqrt{3} - 2, a_2 = 2\sqrt{3} - 2, a_3 = 3\sqrt{3} - 2, a_4 = 4\sqrt{3} - 2$

5. a) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}; a_n > 0$ dla $n \geq 4$ i $n \in \mathbb{N}$
b) $a_n = -2n + 9; a_n > 0$ dla $n \leq 4$ i $n \in \mathbb{N}_+$
c) $a_n = -\frac{1}{4}n + \frac{5}{2}; a_n > 0$ dla $n \leq 9$ i $n \in \mathbb{N}_+$
6. a) $a_n = 3n - 8, a_{10} = 22$
b) $a_n = 2n + 4, a_{10} = 24$
8. a) 36 b) 6, 8
10. a), b), c) jest
11. a), b), c) nie jest
12. a) $y = 2x + 3, a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$
b) $y = -\frac{1}{3}x + 10, a_{30} = 0$
c) $y = x - 14, a_{14} = 0$

3.7. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (1)

- ☑ 1. a) $S_{50} = 1275$
b) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. a) $a_6 = 16, S_6 = 51$
b) $a_{20} = 10, S_{20} = 105$
3. a) $S_{31} = 1953$ b) $S_{13} = -299$
4. a) 20 wyrazów, $S_{20} = 1070$
b) 12 wyrazów, $S_{12} = -246$
c) 9 wyrazów, $S_9 = 39$
5. 800
6. a) 4950 b) 6567
- ☑ 1. a) 115 b) -185 c) 10,5
2. a) $a_1 = 0, a_{10} = 18, S_{10} = 90$
b) $a_1 = -4, a_{10} = 5, S_{10} = 5$
c) $a_1 = 18, a_{10} = -36, S_{10} = -90$
3. a) 11 wyrazów, $S_{11} = 209$
b) 15 wyrazów, $S_{15} = 75$
c) 20 wyrazów, $S_{20} = -440$
4. a) 1027140 b) 2475
5. a) 1665 b) 945 c) 728
6. a) 3240 b) 329400 c) 83167
7. a) 970 b) 810 c) 1140
8. a) 334167 b) 234168 c) 145059
9. a) $S_9 = 81, S_{18} = 324$
b) $S_9 = -63, S_{18} = -369$
c) $S_9 = 49\frac{1}{2}, S_{18} = 220\frac{1}{2}$

10. a) 140 b) 130 c) 16
 11. a) 348 b) 10 050 c) -252 d) 0
 12. a) 1010 b) 1030 c) 2040

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (2)

Ć 1. a) 15 b) 31

2. a) 13 b) 16

Z 1. a) 21 b) 14 c) 39

2. a) 4 b) 7 c) 11

3. 920

4. 13

5. $a_1 = 3, r = 4, S_{10} = 210$

6. a) rosnący b) malejący

8. a) 13 b) 21

9. a) 21 b) 26

3.9. Ciąg geometryczny (1)

Ć 1. $P_2 = 1 \text{ cm}^2, P_3 = 4 \text{ cm}^2, P_4 = 16 \text{ cm}^2$

2. a) $q = 2, a_4 = 24, a_5 = 48$

b) $q = 5, a_4 = 125, a_5 = 625$

c) $q = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{4}$

d) $q = \frac{1}{4}, a_4 = 1, a_5 = \frac{1}{4}$

e) $q = -2, a_4 = -8, a_5 = 16$

f) $q = -\frac{1}{3}, a_4 = 1, a_5 = -\frac{1}{3}$

3. a) $a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 27, a_5 = 81$

b) $a_2 = 8, a_3 = 4, a_4 = 2, a_5 = 1$

c) $a_2 = -5, a_3 = 5, a_4 = -5, a_5 = 5$

d) $a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = 1, a_4 = -2, a_5 = 4$

e) $a_2 = 1, a_3 = \sqrt{2}, a_4 = 2, a_5 = 2\sqrt{2}$

f) $a_2 = 2\sqrt{3}, a_3 = 6\sqrt{2}, a_4 = 12\sqrt{3}, a_5 = 36\sqrt{2}$

4. a) $q = 3$ b) $q = \frac{1}{3}$ c) $q = \frac{3}{2}$

d) $q = \frac{2}{3}$ e) $q = -4$ f) $q = 5$

6. a) $a_6 = 4$ b) $a_7 = \frac{1}{625}$

c) $a_4 = \frac{64}{27}$ d) $a_6 = \frac{625}{64}$

e) $a_5 = -162$ f) $a_{15} = -7$

g) $a_9 = 80$ h) $a_8 = -\frac{1}{27}$

7. a) $a_1 = 8$ b) $a_1 = -\frac{1}{2}$ c) $a_1 = \frac{1}{27}$

8. a) $a_n = 5 \cdot 2^{n-5}$ b) $a_n = -3 \cdot 2^{n-3}$

c) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-4}$

Z 1. a) $q = \frac{1}{2}, a_n = 2^{8-n}, a_7 = 2$

b) $q = 4, a_n = 4^{n-3}, a_7 = 256$

c) $q = -3, a_n = (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-6}, a_7 = 3$

d) $q = \frac{4}{5}, a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-5}, a_7 = \frac{16}{25}$

e) $q = \frac{3}{2}, a_n = \frac{3^{n-3}}{2^{n-2}}, a_7 = \frac{81}{32}$

f) $q = -\sqrt{2}, a_n = -(-\sqrt{2})^n, a_7 = 8\sqrt{2}$

2. a) $a_n = 5 \cdot 4^{n-2}$ lub $a_n = 5 \cdot (-4)^{n-2}$

b) $a_n = (\sqrt{3})^n \cdot 2^{3-n}$ lub

$a_n = (-\sqrt{3})^n \cdot 2^{3-n}$

c) $a_n = -\frac{7}{2} \cdot (-2)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{7}{2} \cdot 2^{n-1}$

d) $a_n = 3^n$ lub $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 3^n$

e) $a_n = -1024 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

lub $a_n = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

f) $a_n = -\frac{1}{243} \cdot (-3)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{1}{243} \cdot 3^{n-1}$

3. a) $q = 3, a_3 = 72, a_4 = 216, a_5 = 648$

b) $q = -3, a_3 = 18, a_4 = -54, a_5 = 162$

c) $q = \frac{4}{3}, a_3 = 1\frac{1}{3}, a_4 = 1\frac{7}{9}, a_5 = 2\frac{10}{27}$

d) $q = -6, a_3 = -12, a_4 = 72, a_5 = -432$

e) $q = \frac{2}{3}, a_3 = -5\frac{1}{3},$

$a_4 = -3\frac{5}{9}, a_5 = -2\frac{10}{27}$

f) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_3 = 1, a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_5 = \frac{1}{2}$

4. a) $a_2 = 5\sqrt[3]{9}, a_3 = 5\sqrt[3]{3}$

b) $a_2 = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}, a_3 = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$

c) $a_2 = \frac{\sqrt[3]{100}}{10}, a_3 = -\sqrt[3]{10}$

5. a) $a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2}$ b) $a_2 = -32, a_3 = 16$

c) $a_2 = \frac{1}{64}, a_3 = -\frac{1}{16}$

3.10. Ciąg geometryczny (2)

Ć 2. a) $a_n = 5^{n-1}$ b) $a_n = -2^{5-2n}$

c) $a_n = -2^n$

3. a), d), f) rosnący b), c) malejący

e) nie jest monotoniczny

5. a) $x = 4; 1, 3, 9$

b) $x = -\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{16}{5}$

c) $x = -\frac{15}{7}; -\frac{1}{7}, -\frac{8}{7}, -\frac{64}{7}$

6. a) 6 cm b) 15 cm c) 20 cm

7. a) 10 b) 30 c) $\frac{1}{30}$

Z 1. a), d), e) rosnący b), c) malejący

f) nie jest monotoniczny

2. a), c) malejący

b), e), f) rosnący

d) nie jest monotoniczny

3. a) $a_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, malejący

b) $a_n = \frac{2}{3} \cdot (-6)^{n-1}$,

nie jest monotoniczny

4. $x = 22, y = 44$

5. $a = 16\sqrt{3}, b = 24$

6. a) $a_n = -4^{7-n}$

b) $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$ lub $a_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$

c) $a_n = 5^{3-n}$ lub $a_n = -5^{3-n}$

d) $a_n = 5^{n-1}$

e) $a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ lub $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

f) $a_n = -\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$ lub $a_n = \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$

7. a), c) rosnący

b), d), f) malejący

e) nie jest monotoniczny

8. a) $x = 8, y = 128$, rosnący

lub $x = -8, y = -128$,

nie jest monotoniczny

b) $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}$, rosnący

lub $x = -\sqrt{2}, y = -2\sqrt{2}$,

nie jest monotoniczny

c) $x = 12, y = 5\frac{1}{3}$, malejący

lub $x = -12, y = -5\frac{1}{3}$,

nie jest monotoniczny

d) $x = \frac{1}{100}, y = 1$, rosnący

lub $x = -\frac{1}{100}, y = -1$,

nie jest monotoniczny

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Ć 1. a) 310 b) 1270 c) 5110

2. a) 364 b) -21 c) $\frac{63}{32}$

3. a) $\frac{31}{32}$ b) $\frac{341}{32}$ c) $\frac{5}{32}$

4. a) -63 b) -484

5. 7

6. 4

7. a) 4 b) 5

8. a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, \frac{1}{512}$

9. a) 1023 b) -2046

Z 1. a) $15\frac{15}{16}$ b) $26\frac{242}{243}$ c) -1275

2. a) -255 b) $-93(\sqrt{2} - 1)$

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	5	162	242
-32	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$	$-63\frac{1}{2}$
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{2}$	8	-32	$30(\sqrt{2} - 2)$

4. a) $\frac{1023}{512} \text{ cm}^2$ b) $\frac{31}{8}(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$

5. a) 4 b) 1091,2 c) 2

d) 48 e) $1 + \sqrt{2}$ f) 9

6. a) 32 b) 512 c) 2048

7. a) 5 b) 8 c) 10

8. $0,9 \text{ cm}^2$

9. a) 682 b) -242 c) $13\frac{3}{4}$

10. a) $S_6 = -364, S_7 = 1094$

b) $S_6 = 0, S_7 = 7$

c) $S_6 = 60\frac{2}{3}, S_7 = 60\frac{7}{9}$

11. a) 6 b) 9 c) 10

12. a) 7 b) 6

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne - zadania

Ć 1. a) $a = 2, c = 8$

b) $b = -3,8, c = -11,6$

2. a) $a = 1,8, b = 4,8, c = 7,8$

b) $a = 2, b = 4, c = 6$

lub $a = 11, b = 4, c = -3$

3. a) 9 b) $q = 3, a_1 = \frac{1}{11}, a_6 = 22\frac{1}{11}$

Z 1. a) 108 lub 36 b) -36

2. 2, 7, 12 lub 18, 7, -4

3. 2, 5, 8 lub 11, 5, -1

4. $b = c = 4$ lub $b = 8, c = 16$

5. $a = 9, b = 3$

6. a) 10, 20 lub $-\frac{15}{2}, \frac{45}{4}$ b) 2, 8

7. a) $q = \frac{1}{2}$

b) suma obwodów: $23\frac{1}{4}$,
suma pól: $\frac{341}{64}\sqrt{3}$

8. 5, 7, 9

9. 5

10. $a = -6, b = -2$ lub $a = 10, b = 6$

Procenty

- a) 4, 20, 100, 300
b) 10, 40, 200, 600
- a) 60 b) 240 c) 30
d) 24 e) 120 f) 84
- a) 20% liczby 160
b) 30% liczby 120
- a) 20% b) 75%
c) 105% d) 120%
- a) 25% b) 80% c) 31%
d) 15% e) 125% f) 125%
- a) 80 b) 120 c) 400 d) 600
- a) 21% b) 44% c) 69% d) 125%
- a) 32% b) 32% c) 43%
- B
- a) 25% b) 100% c) 150%

3.13. Procent składany

- ☑ 1. a) 6230,91 zł b) 7673,43 zł
c) 6719,58 zł
2. odsetki: 3144,47 zł,
różnica kapitału: 743,25 zł
3. a), b) 995,43 zł c) 980,34 zł
4. B
5. a) 12 166,53 zł b) 12 189,94 zł
c) 12 201,90 zł d) 12 209,97 zł
6. 2641,36 zł
7. a) po 8 latach: 4791,40 zł,
po 20 latach: 15 484,60 zł
b) 10 001,43 zł
8. a) 143 183,39 zł b) 200 144,82 zł
c) 228 151,10 zł
- ☑ 1. a) 2205 zł b) 2552,56 zł
c) 2687,83 zł
2. a), b) 754,76 zł
3. $r \approx 7,49$
4. na 5 lat: co najmniej 1000 zł,
na 3 lata: co najmniej 1082 zł
5. a) 3582,16 zł b) 3586,85 zł
c) 3590,04 zł d) 3591,60 zł
6. 3 lata

7. $k = 5000$, po 18 latach: 12 033,10 zł
8. 25 000 zł
9. a) po 12 latach b) po 24 latach
10. a) 180 840,96 zł b) 9 lat
11. a) 4326,40 zł b) 4637,10 zł c) 5920,98 zł
12. w ciągu 5 lat: 3097,20 zł,
w ciągu 10 lat: 8097,65 zł
13. bank C

Zestaw I

- a) -3 b) 3 c) 10 d) -6
- a) -4 b) -7
- a), b), c), d) ciąg arytmetyczny
a), e) ciąg rosnący
b), c), d), f) ciąg malejący
- a) $a_6 = 12$, $a_9 = 18$
b) $a_6 = -30$, $a_9 = -45$
c) $a_6 = 8$, $a_9 = 11$
d) $a_6 = -5$, $a_9 = -11$
e) $a_6 = 50$, $a_9 = 80$
f) $a_6 = 5\frac{1}{2}$, $a_9 = 4$
- a) $a_n = 2n - 2$, $a_8 = 14$
b) $a_n = 3n - 6$, $a_8 = 18$
c) $a_n = -2n + 10$, $a_8 = -6$
- a) $a_n = 8 - 3n$ b) $a_n = 2n - 2$
c) $a_n = 5n - 11$
- a) 222 b) 168 c) 168
d) 66 e) 60 f) -6
- a) 50 b) -550 c) 4000 d) 2525
- 50 m
- $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = 20$, $a_8 = 240$
- a), b), c) ciąg geometryczny
a) ciąg malejący
b), c) ciąg rosnący
- a) 24, 48, 96, 192, 384
b) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{32}$
c) -1 , $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $-\frac{1}{625}$
- a) 1250 b) 4
- a) $a_3 = \frac{1}{10}$, $a_5 = 10$ b) $a_3 = 8$, $a_5 = 32$
c) $a_3 = 3$, $a_5 = \frac{1}{3}$
d) $a_3 = -18$, $a_5 = -162$

15. a) $5\frac{13}{16}$ b) $-6\frac{7}{8}$ c) 341 lub 521
d) -44 lub -20
16. 4
17. siódmy
18. (b_n)
19. a) 1024 b) $60\frac{1}{7}$
20. np.: a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 4n + 3 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n - 2n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n + 2(n-1) \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

Zestaw II

- a), b) ciąg rosnący c) ciąg malejący
- a), d) ciąg rosnący b) ciąg malejący
c) ciąg niemonotoniczny
- $a_n = -(n-3)^2 + 6$,
 $a_n \leq -18$ dla $n \geq 8$
- $a_n = \frac{1}{3}n^2 - 2n$, $a_9 = 9$, $a_{18} = 72$
- a) 165 150 b) 82 350
- a) 3960 b) 396 000
- a) 1265 b) 654
- a) $x = 13$ b) $x = -30$
c) $x = 37$ d) $x = 29$
- a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -2$ lub $x = 8$
- a) $a = 1$, $c = 3$ lub $a = 4$, $c = 0$
b) $b = -1$, $c = -3$ lub $b = 5$, $c = 9$
- a) $a_n = 3n + 1$ b) $a_n = 7n - 3$
- $a_1 = -5$, $a_2 = 0$, $a_3 = 5$
lub $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$
- bank A: 15 000 zł, bank B: 5000 zł
- a), b) 1093,97 zł
- $4\frac{364}{729}\pi \text{ cm}^2$
- 24

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. B 3. A 4. D 5. D 6. B 7. C
8. B 9. C
10. PF
- 11.1. PP 11.2. 5

12. A3
13. DF
14. FF
15. PF
16. AF
- 17.1. 14
18. 4
19. 54
20. jest
21. 6, 8, 10
22. 2, 4, 6
23. 112 cm^2
24. 8

4.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

- ☑ 1. a) BCC_1B_1 b) ABB_1A_1
2. Wzdłuż prostej l przecinają się płaszczyzny P_1 i P_4 . Wzdłuż prostej k przecinają się płaszczyzny P_2 i P_3 .
3. np. A , B_1 , C_1
4. a), c) nie b) tak
5. a) BB_1 , CC_1 , DD_1 b) AB , BC , CD ,
 AD , A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , A_1D_1
6. B i C_1 , B i D_1 , C i B_1 , C i D_1 , D i B_1 ,
 D i C_1
7. nie
- ☑ 1. a) AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1
b) nie
2. proste prostopadłe przecinające prostą BD : BB_1 , DD_1 , proste prostopadłe skośne do prostej BD : AA_1 , CC_1
3. a) proste równoległe: BC_1 , AD_1 ,
proste prostopadłe: BE , AB , AE , CF ,
 DC , DF , B_1E_1 , A_1B_1 , A_1E_1 , C_1F_1 ,
 D_1C_1 , D_1F_1 , E_1F , B_1C , A_1D
b) proste równoległe: B_1F_1 , AC , BF ,
proste prostopadłe: D_1B_1 , C_1E_1 , DB ,
 CE , AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 , FF_1 ,
 D_1B , B_1D , C_1E , E_1C
4. a) AB i DC , AD i BC

4. b) AS i BC , AS i CD , BS i CD ,
 BS i AD , CS i AD , CS i AB
 DS i BC , DS i AB

6. trzy

7. a) B_1D_1 b) AD_1 c) BC_1

4.2. Graniastopy

1. 768 cm²
2. a) 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków
 b) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków
 c) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków
3. a) tak – graniastopu siedmiokątny
 b) nie – liczba krawędzi graniastopu musi być podzielna przez 3
4. a) 2,6 cm b) 3,6 cm
5. 384 cm²
6. a), b), d) tak c) nie
1. $6\sqrt{6}$ cm
2. a) 528 cm² b) 700 cm²
3. a) 20 cm b) 15 cm
4. 240 cm²
5. 288 cm²
6. $4(25 + 6\sqrt{3})$ cm²
7. $8(3 + \sqrt{3})$ cm² lub $2(12 + \sqrt{3})$ cm²
8. 66 cm² lub 80 cm²
9. 4
10. a) $32(4 + \sqrt{2})$ b) $16(7 + 2\sqrt{3})$
 c) $16(4 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3})$
11. $88(2 + \sqrt{3})$ cm²
12. a) $18(10 + \sqrt{3})$ b) $16(7 + 3\sqrt{2})$
 c) 180
13. a) $2(6 + \sqrt{3})$ cm² b) 24 cm²
 c) $12(2 + \sqrt{3})$ cm²

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

1. a), b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{4}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$
 c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$

d) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = 2$

2. a) $a = 6$, $b = 8$
 b) $a = 7$, $b = 24$
 c) $a = 3\sqrt{5}$, $b = 6$
3. a) $Ob = 25$, $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$
 b) $Ob = 2(5 + \sqrt{13})$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$
 c) $Ob = 3(3 + \sqrt{5})$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

4.3. Odcinki w graniastopach

1. 770 cm²
2. a) $18(\sqrt{3} + 12\sqrt{2})$ cm²
 b) $9(3\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3})$ cm²
3. $32\sqrt{7}$ cm²
5. a) przekątne ścian: $\sqrt{106}$, 13, 15;
 przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{10}$
 b) przekątne ścian: 10, $3\sqrt{29}$, 17;
 przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{13}$
6. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
7. $4\sqrt{5}$ cm, 8 cm
8. a) 10 b) 18 c) 40
1. a) $50(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$ cm²
 b) $50(1 + 2\sqrt{3})$ cm²
 c) $50(1 + 2\sqrt{2})$ cm²
2. 160
3. a) $\sqrt{14}$ cm b) $2\sqrt{14}$ cm c) 3 cm
4. $d = 9$ cm, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$
5. $\frac{\sqrt{33}}{33}$
6. $\frac{\sqrt{7}}{14}$, $\frac{\sqrt{10}}{10}$
7. $80\sqrt{119}$ cm²
9. 18
10. $n = 8$
11. $\frac{525}{4}\sqrt{3}$ cm²
12. $2(2 + \sqrt{5})$ cm
13. $216\sqrt{23}$ cm²
14. a) $18(3 + \sqrt{3})$ b) 94,5
15. a) 8 cm b) $8\sqrt{2}$ cm c) 8 cm
16. $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{7}$

4.4. Objętość graniastopu

1. P_2
2. 0,125 dm³
3. $V_I = 30$ cm³, $V_{II} = 50$ cm³
4. a) $180\sqrt{3}$ cm³ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ c) $\frac{125}{8}$ cm³
5. a) $180\sqrt{3}$ cm³ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$
6. a) 120 cm³ b) 324 cm²
7. 78 m³
1. a) 36 cm³ b) $64\sqrt{5}$ cm³
2. a) $84\sqrt{3}$ cm³ b) 972 cm³
3. a) 112 cm³ b) $125\sqrt{2}$ cm³
4. $x = 14$ cm
5. a) $66\sqrt{3}$ cm³ b) $32\sqrt{3}$ cm³
6. a) $768\sqrt{3}$ b) $864\sqrt{3}$ c) $384\sqrt{3}$
7. I – nie, II – tak, $V = 96\sqrt{3}$
8. krawędź podstawy: 6 cm,
 krawędź boczna: 1,5 cm
9. $V_1 = 1500$ cm³, $V_2 = 4500$ cm³,
 $V_3 = 7500$ cm³, $V_4 = 13\,500$ cm³
10. 0,45 m³
11. a) $16\sqrt{3}$ cm³ b) 324 cm³
12. a) $192\sqrt{3}$ cm³ b) $864\sqrt{3}$ cm³

4.5. Ostrosłupy

1. a) 5 cm b) $2\sqrt{2}$ cm c) $2\sqrt{3}$ cm
2. 84 cm²
3. a) $225(4 + \sqrt{3})$ cm²
 b) $5(36 + 5\sqrt{3})$ cm² c) $10\sqrt{3}$ cm
4. a) $36(1 + \sqrt{3})$ cm² b) $32(3 + \sqrt{3})$ cm²
5. a) $25\sqrt{3}$ cm² b) 42 cm
1. $64 + \frac{25}{2}\sqrt{3}$
2. $h = \sqrt{11}$ cm lub $h = \sqrt{39}$ cm
3. a) nie
 b) ostrosłup prosty, $P_c = 4(1 + 2\sqrt{2})$
 c) ostrosłup, ale nie prosty,
 $P_c = \frac{3}{2}(11 + \sqrt{41})$
4. 360 cm²
5. $8(3 + \sqrt{3})$ cm²
6. $15\sqrt{11}$ cm²
7. $8(10 + \sqrt{34})$
8. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ cm

10. $108\sqrt{2}$

11. $54\sqrt{3}$

12. a) 340 cm² b) $30(12 + 5\sqrt{3})$ cm²

13. $4(3 + \sqrt{3})$ cm²

14. $36(1 + 2\sqrt{2})$ cm²

15. $18(3 + \sqrt{3})$; tak

4.6. Objętość ostrosłupa

1. $V_1 = \frac{64}{3}$ cm³, $V_2 = \frac{512}{3}$ cm³
2. a) 228 b) 864
3. $P_c = 64$ cm², $V = \frac{64\sqrt{2}}{3}$ cm³
4. $972\sqrt{3}$ cm³
5. a) $256\sqrt{3}$ cm³ b) $2304\sqrt{3}$ cm³
6. 96 cm³
7. a) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$ b) $9\sqrt{2}$
8. $18\sqrt{2}$ cm³
1. a) 180 cm³ b) $80\sqrt{3}$ cm³ c) $120\sqrt{3}$ cm³
2. $36\sqrt{2}$ cm³
3. $\frac{64\sqrt{15}}{3}$ cm³
4. $\frac{100}{3}\sqrt{119}$ cm³
5. $\frac{128}{3}\sqrt[4]{27}$ cm³
6. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
7. a) 5 cm b) 7 cm
8. 115,2 cm³
9. $\frac{5\sqrt{3}}{18}$
10. $54\sqrt{3}$ cm³
11. $150\sqrt{3}$ cm³
12. $30\sqrt{3}$ cm²
13. a) $\sqrt{3}$ cm³ b) $2\sqrt{3}(140 + 99\sqrt{2})$ cm³
14. $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ cm³
15. $36\sqrt{2}$ cm³
16. a) 4 b) 8
17. $\frac{1000\sqrt{2}}{3}$ cm³
18. $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ cm³

4.7. Kąt między prostą a płaszczyzną

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\frac{2\sqrt{2}}{5}$
3. $\frac{256}{3}$ cm³

4. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 5. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{1365}}{39}$
 1. a) $\frac{6\sqrt{77}}{77}$ b) $\frac{4\sqrt{77}}{77}$ c) $\frac{5\sqrt{77}}{77}$
 2. $\frac{\sqrt{21}}{5}$
 3. a) $512\sqrt{2} \text{ cm}^3$
 b) $25(3 + 2\sqrt{6}) \text{ cm}^2$
 4. 30° , około 27°
 5. $P_c = 16(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $V = 32 \text{ cm}^3$
 6. a) 288 cm^3 b) 96 cm^3
 7. $49\sqrt{527}$
 8. a) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$
 9. $V = \frac{8}{3} \text{ cm}^3$, $P_c = 4(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ cm}^2$
 10. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{13}$
 13. a) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
 14. a) $P_c = \frac{16(3+2\sqrt{3})}{3}$, $V = \frac{32\sqrt{3}}{9}$
 b) $P_c = 18(1 + \sqrt{2})$, $V = 9\sqrt{2}$
 c) $P_c = 108$, $V = 36\sqrt{3}$

4.8. Kąt dwuścienny

1. a) 45° , 45° , 90° b) 30° , 60° , 90°
 2. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 3. a) 30° b) $9\sqrt{2} \text{ cm}^3$
 4. $\frac{64}{3} \text{ cm}^3$
 5. $\frac{1}{3}$
 6. a) $-\frac{1}{15}$ b) $-\frac{25}{144}$
 1. 90° , około 74° , około 16°
 2. $\frac{24\sqrt{601}}{601}$
 3. $\sqrt{2}$
 4. $\frac{\sqrt{7}}{7}$
 5. około 49°
 6. $\frac{5}{2}$
 7. a) 108° b) 135°
 8. 45° , 135°
 9. a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
 12. $\frac{4}{5}$

Zestaw I

1. a) 2 b) $4 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $2 - \sqrt{3}$
 2. $12(2 + \sqrt{3})$

3. a) $\frac{5\sqrt{34}}{34}$ b) $\frac{16}{25}$
 5. $28 + \sqrt{43}$
 6. a) 64 b) $24\sqrt{3}$ c) $48\sqrt{3}$
 7. $4\sqrt{15}$
 8. 30°
 9. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Zestaw II

1. 1620 cm^2
 2. $|CD_1| = \sqrt{2}$, $|CE| = |ED_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$,
 $\cos \alpha = \frac{1}{5}$
 3. $V = \frac{27}{2}$, $P_c = 9(2 + \sqrt{3})$,
 $d_1 = \sqrt{15}$, $d_2 = 2\sqrt{3}$
 4. $\frac{3\sqrt{3}}{4}(3 + \sqrt{73}) \text{ cm}^2$
 5. $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$
 6. suma długości krawędzi: $4(6 + \sqrt{5})$,
 $P_b = 8(1 + \sqrt{5})$
 7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 8. $\frac{1}{12}$
 9. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
 10. a) $P_c = 12(3 + 2\sqrt{3})$, $V = 12\sqrt{3}$
 b) $P_c = 9(2 + \sqrt{3})$, $V = 3\sqrt{3}$
 c) $P_c = 54(2 + \sqrt{3})$, $V = 54\sqrt{3}$

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. A 2. B 3. D 4. D 5. A 6. C 7. C
 8. A
 9.1. PP 9.2. 6
 10.1. PF 10.2. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$
 11.1. PF 11.2. $18(3 + \sqrt{5})$
 12.1. A2 12.2. 6 cm
 13. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 14. $4\sqrt{5} \text{ cm}$
 15. $2(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$
 16. 4
 17. $486\sqrt{3} \text{ cm}^3$
 18. $64\sqrt{2}$
 19. $162\sqrt{15} \text{ cm}^3$
 20. $25\sqrt{119}$
 21. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $V = 64 \text{ cm}^3$

Indeks

ciąg 96

arytmetyczny 113
 Fibonacciego 109, 112
 geometryczny 126
 liczbowy 97
 malejący 104, 114, 130
 niemalejący 106
 nierosnący 106
 nieskończony 96
 n -wyrazowy 98
 określony rekurencyjnie 108
 rosnący 104, 114, 130
 skończony 98
 stały 106, 114, 130

cięciwa okręgu 76

cosinus kąta ostrego 167

czworościan foremny 179

długość geograficzna 75

działania na potęgach 10, 11, 14

dziedzina

funkcji logarytmicznej 33

funkcji wykładniczej 17

efektywna stopa procentowa 144

figura

osiowosymetryczna 80

środkowosymetryczna 83

funkcja

logarytmiczna 33

wykładnicza 17

graniastosłup 162, 163

pochyły 163

prawidłowy 165

prosty 163

iloraz ciągu geometrycznego 126

kapitalizacja odsetek 143

kąt

dwuścienny 193

między prostą a płaszczyzną 189

kąt płaski przy wierzchołku

ostrosłupa prawidłowego 179

krawędź

boczna graniastosłupa 163

boczna ostrosłupa 177

kąta dwuściennego 193

podstawy graniastosłupa 163

podstawy ostrosłupa 177

liczba logarytmowana 22

logarytm 22

dziesiętny 26

miara kąta dwuściennego 193

nominalna stopa procentowa 144

objętość

czworościanu foremnego 185

graniastosłupa 173

ostrosłupa 183

prostopadłościanu 173

sześcianu 173

obraz punktu w symetrii względem

osi układu współrzędnych 80

prostej 79

punktu 83

początku układu współrzędnych 84

odległość między punktami w układzie

współrzędnych 59

okres kapitalizacji 143

okręgi

przecinające się 72

rozłączne 72

styczne 72

ostrosłup 177, 182

prawidłowy 177, 182

prosty 177

oś symetrii 79, 80

płaszczyzny

przecinające się 158

równoległe 158

podciąg ciągu 136

podstawa
 graniastosłupa 163
 logarytmu 22
 ostrosłupa 177
pole
 powierzchni całkowitej
 graniastosłupa 163
 ostrosłupa 178
 prostopadłościanu 164
 trójkąta w układzie współrzędnych 90
potęga o wykładniku
 całkowitym 10
 rzeczywistym 14
 wymiernym 11
powierzchnia boczna graniastosłupa 163
procent składany 142
prosta
 prostopadła do płaszczyzny 160
 przecinająca płaszczyznę 160
 równoległa do płaszczyzny 160
proste
 prostopadłe w przestrzeni 159
 prostopadłe w układzie
 współrzędnych 55
 przecinające się w przestrzeni 159
 równoległe w przestrzeni 159
 równoległe w układzie
 współrzędnych 55
 skośne w przestrzeni 159
prostopadłościan 162, 164
przekątna
 graniastosłupa 169
 prostopadłościanu 169
punkt
 styczności prostej i okręgu 76
 symetryczny względem prostej 79
 symetryczny względem punktu 83

rekurencyjne określenie ciągu 108
rozpad promieniotwórczy 41
równanie
 kierunkowe prostej 54
 ogólne prostej 56
 okręgu 67, 69
różnica ciągu arytmetycznego 113

rzut prostokątny
 figury na płaszczyznę 160
 punktu na płaszczyznę 160

sieczna okręgu 76
sinus kąta ostrego 167
skala logarytmiczna 40
spodek wysokości ostrosłupa 177
styczna do okręgu 76
suma początkowych wyrazów ciągu
 arytmetycznego 120, 121
 geometrycznego 134
symetria
 osiowa 79
 środkowa 83
 względem osi układu
 współrzędnych 80
 względem początku układu
 współrzędnych 84
szerokość geograficzna 75
sześcian 164

ściana
 boczna graniastosłupa 163
 boczna ostrosłupa 177
 kąta dwuściennego 193
średnia
 arytmetyczna 115
 geometryczna 132
środek
 odcinka w układzie współrzędnych 63
 symetrii 83
środkowa trójkąta 64

tangens kąta ostrego 167
twierdzenie
 o logarytmie iloczynu 28
 o logarytmie ilorazu 28
 o logarytmie potęgi 30
 odwrotne do twierdzenia
 Pitagorasa 58
 Pitagorasa 58

układ równań
 nieoznaczony 56
 oznaczony 56
 sprzeczny 56

warunek prostopadłości prostej
 do płaszczyzny 160
wierzchołek
 graniastosłupa 163
 ostrosłupa 177
własności logarytmów 22, 23, 28, 30
współczynnik kierunkowy prostej 54
współrzędne
 geograficzne 75
 środką odcinka 63
wyraz ciągu 96
wysokość czworościanu
 foremnego 185

wysokość
 graniastosłupa 163
 ostrosłupa 177
wzór
 Eulera 188
 ogólny ciągu 100
 ogólny ciągu arytmetycznego 114
 ogólny ciągu geometrycznego 127
wzrost wykładniczy 41

zbiór wartości
 funkcji logarytmicznej 33
 funkcji wykładniczej 17

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,430
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,301
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,081
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,636
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,290

Działania na ułamkach

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz $b, d \neq 0$:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz $b, c, d \neq 0$:

- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Wartość bezwzględna

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$
- $|-a| = |a|$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $|a - b| = |b - a|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$:

- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

Pierwiastek kwadratowy

Dla $a \geq 0$:

- $\sqrt{a} = b$, gdy $b^2 = a$ i $b \geq 0$

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

Dla $a, b \geq 0$:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Dla $a \geq 0$ i $b > 0$:

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Pierwiastek sześcienny

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a} = b$, gdy $b^3 = a$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $b \neq 0$:

- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

Pierwiastek n -tego stopnia

Dla $a \geq 0$ i parzystego n :

- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b \geq 0$ i $b^n = a$

Dla $a \in \mathbb{R}$ i nieparzystego n :

- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Potęgi i pierwiastki

Dla $a > 0$, $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$:

- $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Dla $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Wzory skróconego mnożenia

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Równania

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$

Dla $b \neq 0, d \neq 0$:

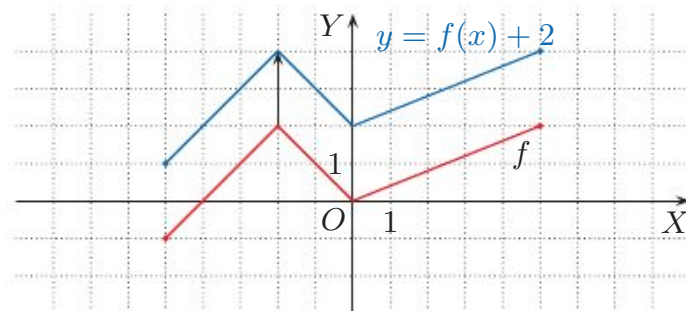
- równanie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jest równoważne równaniu $ad = bc$

Dla $a > 0$:

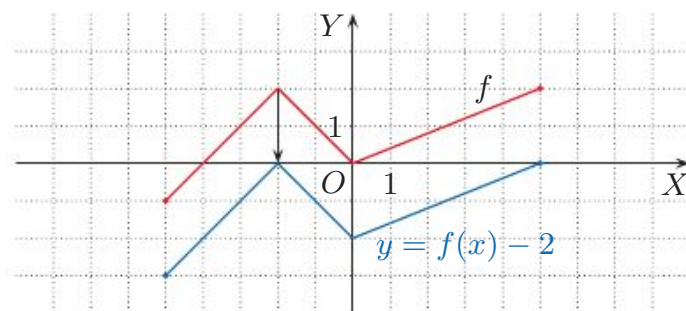
- $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$

Przesuwanie wykresów funkcji

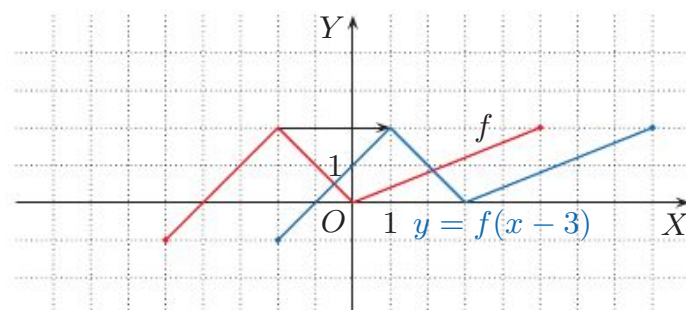
- Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w górę wzdłuż osi OY .



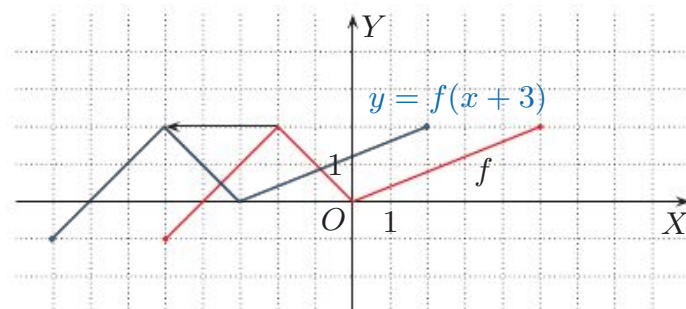
- Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w dół wzdłuż osi OY .



- Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX .



- Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX .



Logarytmy

Dla $a, b > 0, a \neq 1$:

- $\log_a b = x$, gdy $a^x = b$

Dla $a, b, c > 0, a \neq 1, p \in \mathbb{R}$:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^p = p \log_a b$

Równanie prostej

- Równanie kierunkowe: $y = ax + b$
- Równanie ogólne: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$
- Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) :
 $y - y_1 = a(x - x_1)$
- Współczynnik kierunkowy prostej:
 $y = ax + b$
przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$:
 $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:
– równoległe, gdy $a_1 = a_2$,
– prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Równanie kwadratowe

- Wyróżnik równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Pierwiastki równania kwadratowego:

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek (podwójny):

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Wzór funkcji kwadratowej

- Postać ogólna:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Współrzędne wierzchołka paraboli:

$$(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

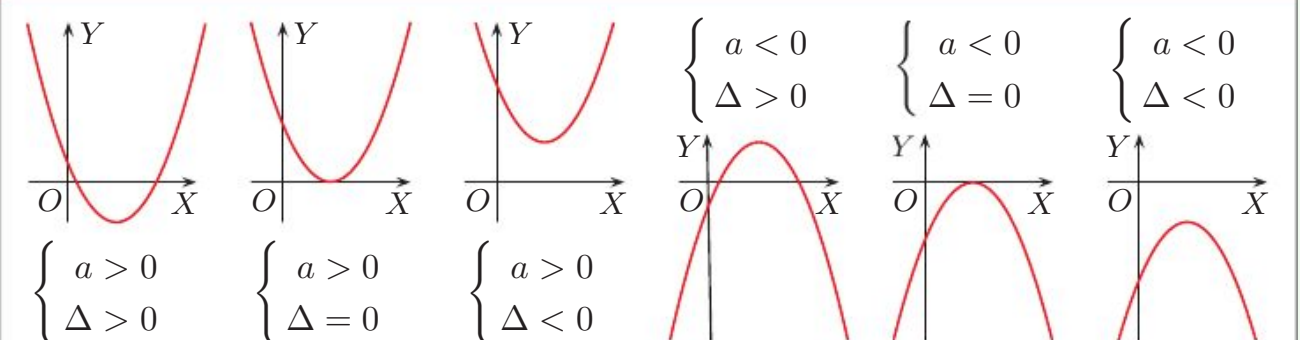
- Postać kanoniczna:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, a \neq 0$$

- Postać iloczynowa:

- jeśli $\Delta > 0$, to:
 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), a \neq 0$,
gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami,
- jeśli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$,
gdzie x_0 jest pierwiastkiem,
- jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma postaci iloczynowej.

Położenie paraboli względem osi OX



Ciągi monotoniczne

Ciąg (a_n) jest:

- **rosnący**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} > a_n$,
- **malejący**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$,
- **niemalejący**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} \geq a_n$,
- **nierosnący**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} \leq a_n$,
- **stały**, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} = a_n$.

Procent składany

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na procent składany:

- na rok przy oprocentowaniu rocznym $p\%$, wzrośnie do kwoty:

$$k\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

- na n lat przy oprocentowaniu rocznym $p\%$, po n latach wzrośnie do kwoty:

$$k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- na n lat przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i kapitalizacji m razy w roku, po n latach wzrośnie do kwoty:

$$k\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{m \cdot n}$$

Ciąg arytmetyczny

- Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

gdzie r jest różnicą ciągu.

- Wzór ogólny ciągu:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

- Liczby a , b , c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, gdy:

$$b - a = c - b$$

- Dla $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

- Suma n początkowych wyrazów ciągu:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

- Ciąg (a_n) jest:

- rosnący, gdy $r > 0$,
- malejący, gdy $r < 0$.

Ciąg geometryczny

- Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

gdzie q jest ilorazem ciągu.

- Wzór ogólny ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Jeśli liczby a , b , c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to:

$$b^2 = ac$$

- Dla $n \geq 2$: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

- Suma n początkowych wyrazów ciągu:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ gdy } q \neq 1$$

- Dla $a_1 > 0$ ciąg (a_n) jest:

- rosnący, gdy $q > 1$,
- malejący, gdy $0 < q < 1$.

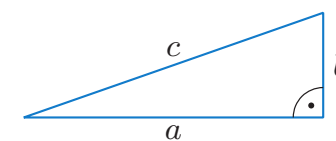
- Dla $a_1 < 0$ ciąg (a_n) jest:

- rosnący, gdy $0 < q < 1$,
- malejący, gdy $q > 1$.

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



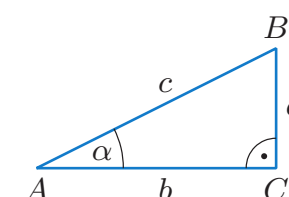
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

W trójkącie prostokątnym:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



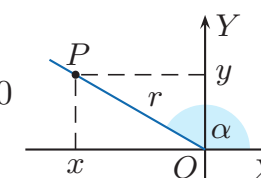
Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Dla $P(x, y)$ oraz $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0$$



Wzory trygonometryczne

Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \alpha \neq 90^\circ$$

Tożsamości trygonometryczne

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Dla $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ]$:

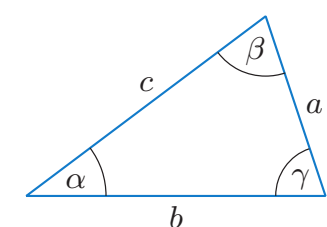
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

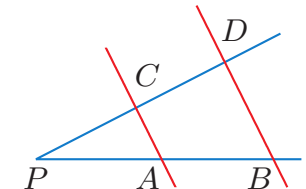
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to:

$$\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

$$\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$



Trójkąty i czworokąty

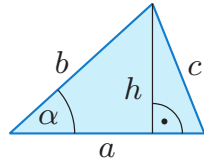
- Dowolny trójkąt

$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



R – promień okręgu opisanego,
 r – promień okręgu wpisanego

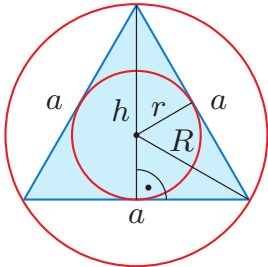
- Trójkąt równoboczny

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

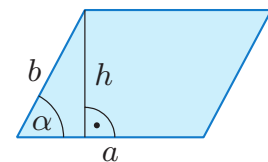
$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



- Równoległobok

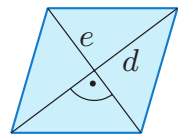
$$P = ah$$

$$P = ab \sin \alpha$$



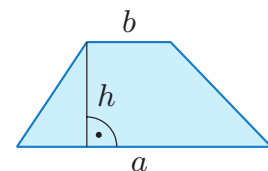
- Romb

$$P = \frac{1}{2}de$$



- Trapez

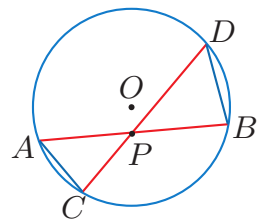
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Twierdzenie o cięciwach

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Koło i okrąg

- Długość okręgu:

$$l = 2\pi r$$

- Pole koła:

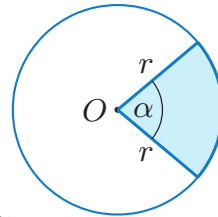
$$P = \pi r^2$$

- Pole wycinka koła:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

- Długość łuku okręgu:

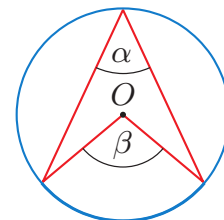
$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$



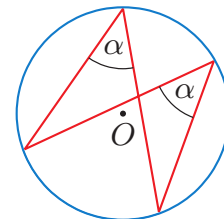
Kąty w okręgu

- Kąt wpisany α i kąt środkowy β oparte na tym samym łuku:

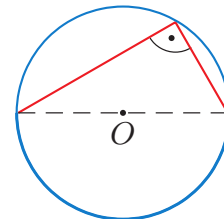
$$\beta = 2\alpha$$



- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.



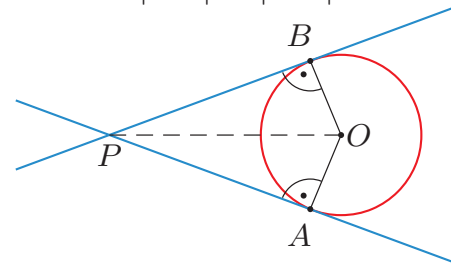
- Kąt wpisany oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

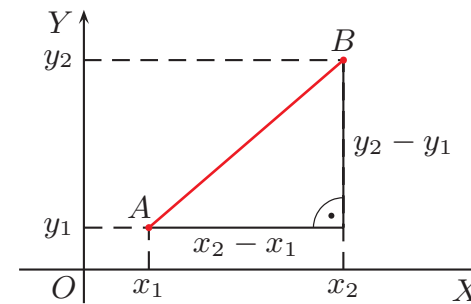
$$|PA| = |PB|$$



Odległość między punktami

Odległość między punktami $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

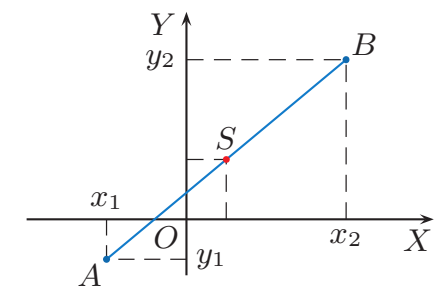
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Środek odcinka

Środek odcinka o końcach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

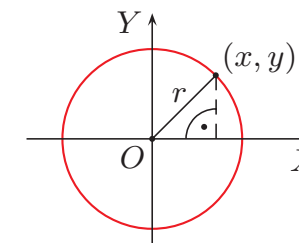
$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Równanie okręgu

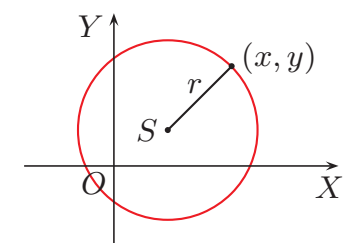
- Okrąg o środku w punkcie $O(0, 0)$ i promieniu $r > 0$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



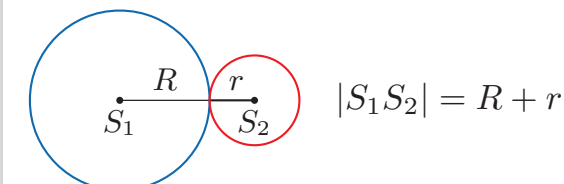
- Okrąg o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu $r > 0$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

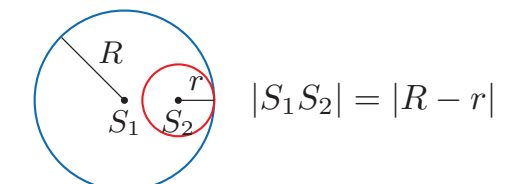


Wzajemne położenie dwóch okręgów

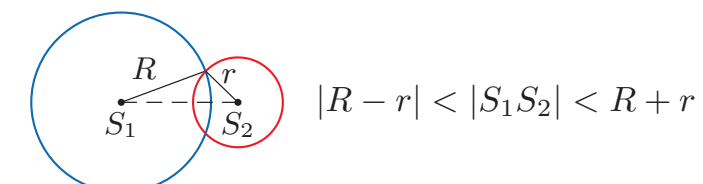
- Okręgi styczne zewnętrznie



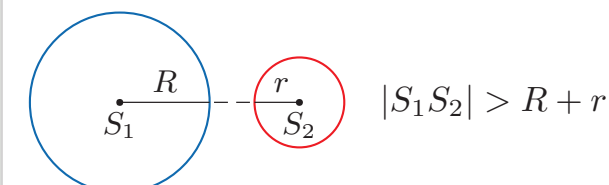
- Okręgi styczne wewnętrznie



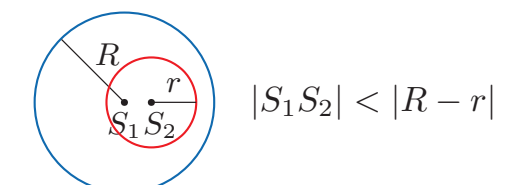
- Okręgi przecinające się



- Okręgi rozłączne zewnętrznie

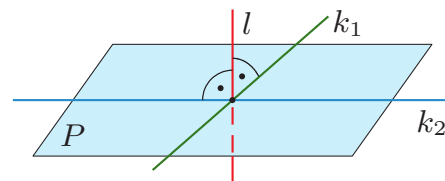


- Okręgi rozłączne wewnętrznie

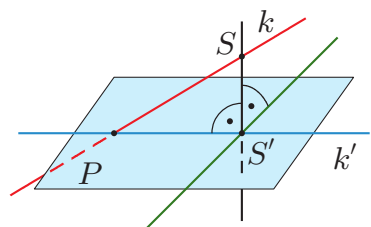


Warunek prostopadłości prostej do płaszczyzny

Jeśli prosta l jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie P , to jest ona prostopadła do płaszczyzny P .

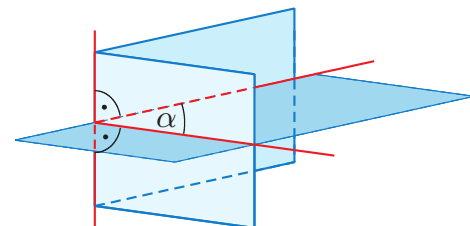


Rzut prostokątny



punkt S' – rzut prostokątny punktu S na płaszczyznę P
prosta k' – rzut prostokątny prostej k na płaszczyznę P

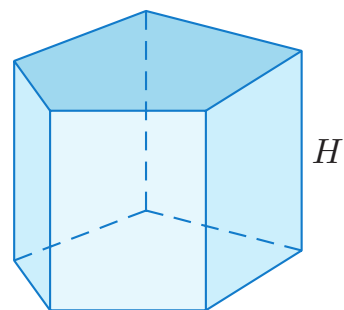
Kąt dwuścienny



Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego α , który jest częścią wspólną kąta dwuściennego oraz płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.

Graniastopy

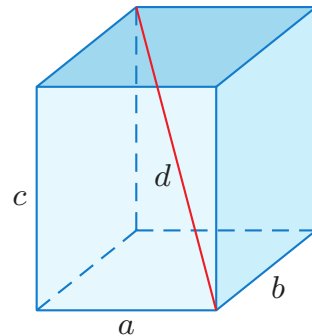
• Graniastosłup



$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$V = P_p \cdot H$$

• Prostopadłościan

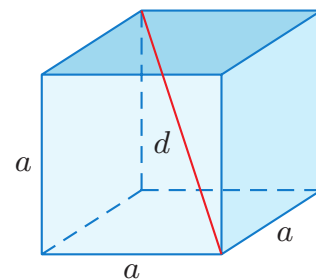


$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$V = abc$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

• Sześcian



$$P_c = 6a^2$$

$$V = a^3$$

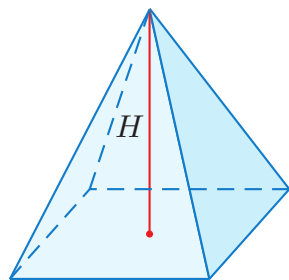
$$d = a\sqrt{3}$$

Ostrosłupy

• Ostrosłup

$$P_c = P_p + P_b$$

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$$

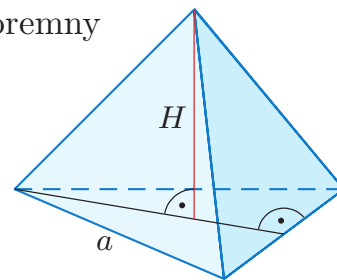


• Czworobój foremny

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$P_c = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



Za co polubisz podręcznik NOWA MATeMATyka 3?

Powód 1



Jest tu dokładnie tyle treści, ile trzeba. Ten podręcznik jest w pełni dostosowany do podstawy programowej, co oznacza, że zawiera tylko to, co jest aktualnie wymagane.

ZMIANY
W PODSTAWACH
2024

podręcznik w pełni
dostosowany

Powód 2



Wiele rozwiązanych przykładów. Czy to przydatne? Tak. Łatwiej poradzisz sobie z samodzielnym rozwiązaniem podobnych zadań.

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2^x$ o 1 jednostkę w dół.

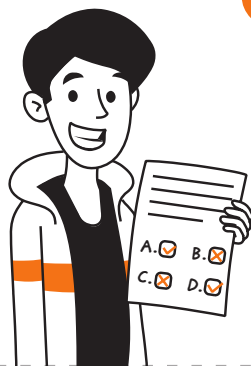
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-1; \infty)$. Prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej toty poziomej jej wykresu.

a) $f(x) = 2^x - 3$ b) $f(x) = 3^x + 1$

Powód 3



Matura. Dobrze jest mieć podręcznik, który uczy rozwiązywania takich zadań, jakie mogą pojawić się na maturze. Dzięki temu możesz mieć pewność, że wiesz, umiesz, zdasz.



Przed obowiązkową maturą

Zadanie 15 (0-1)

Dane są funkcja $f(x) = 3^{-x}$ oraz liczby. Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Prawdziwa jest nierówność

A.	$f(x_1) < f(x_2)$,	ponieważ	1.
B.	$f(x_1) > f(x_2)$,		2.
			3.

Nowa Era Sp. z o.o.



www.nowaera.pl



nowaera@nowaera.pl



Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5383-1



9 788326 753831