

Karolina Wej, Wojciech Babiański

To się liczy!

**Podręcznik do matematyki
dla branżowej szkoły pierwszego stopnia**

**DLA
ABSOLWENTÓW
SZKÓŁ
PODSTAWOWYCH**



KLASA DRUGA

**nowa
era**



Karolina Wej, Wojciech Babiański

To się liczy!

Podręcznik do matematyki
dla branżowej szkoły pierwszego stopnia

KLASA DRUGA



Twoje mocne strony

To się liczy!

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

mgr Kingi Gałązki, mgr Elżbiety Krzysztofiak, mgr Małgorzaty Brudzyńskiej.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: branżowa szkoła I stopnia

Rok dopuszczenia: 2020

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 967/2/2020

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania do matematyki w branżowej szkole I stopnia* autorstwa Danuty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020
ISBN 978-83-267-3950-7

Współpraca autorska Dorota Szymańska: z. 5, s. 16; z. 4, s. 20; z. 6, s. 33; z. 3, s. 44;
z. 1, s. 53; z. 4, s. 170; ów. 2, s. 186; z. 4, s. 201.

Konsultacje merytoryczne: Dorota Szymańska.

Koncepcja serii i opracowanie redakcyjne: Iwona Miklikowska.

Redakcja merytoryczna: Katarzyna Labudda. **Redakcja językowa:** Monika Ekert.

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler. **Opieka graficzna:** Ewa Kaletyn.

Projekt graficzny: Ultra. **Projekt okładki:** Maciej Galiński, Ultra.

Ilustracje: Ewelina Baran, Elżbieta Buczkowska, Andrzej Oziębło. **Opracowanie graficzne:** Ultra.

Realizacja projektu graficznego: Tomasz Włodarczyk.

Fotoedycja: Monika Ekert.

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:

FOTOGRAFIE NA OKŁADCE: Shutterstock, Ultra.

FOTOGRAFIE: Archiwum Nowej Ery: s. 10 (mapa Polski), 17 (szkice warzyw i owoców), 35 (reflektor), 101 (olowizor), 144, 150, 151, 165 (znaki drogowe), 167 (duża pizza), 180, 184 (alejki), 195 (mapa Polski), 193, 195, 213. Depositphotos: s. 49, 70 (pomarańczowy rower), 128 (drzewo). Forum/Wojciech Wojcik: s. 156. Getty Images/Stock: s. 3 (skok w dal), 7 (klauz), 7 (cykiet), 10 (fryzki), 14, 24, 27 (kalkulator), 27 (układanie kostki), 33, 44, 45, 48, 63, 67, 75 (skok w dal), 78 (basen), 80, 100, 110, 115, 119 (lis ewka), 126 (wieża Eifla – miniatura), 131, 133, 134, 136 (plan mieszkania 1), 137 (plan mieszkania 2), 141, 143, 146, 147 (latarnia), 152, 166 (puszki), 166 (koszykarz), 167, 171, 190, 219. Getty Images/Thinkstock: s. 123, 126, 175. Shutterstock: s. 3, 7, 9, 10, 11, 17, 21, 28, 35, 51, 58, 59, 70, 74, 78, 79, 87, 92, 95, 96, 105, 106, 117, 119, 128, 137, 147, 149, 151, 155, 159, 163, 166, 218. Ultra: 11 (tabliczka), 21 (kartka z rabatem), 136 (róża wiatrów).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby ocenić posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobylka

Kilka słów o podręczniku

Dlaczego nadal To się liczy!?

Bo warto umieć liczyć! Matematyka przydaje się nie tylko podczas robienia zakupów czy płacenia codziennych rachunków. Spotykacie się z nią także w sytuacjach zawodowych, np. kiedy liczycie proporcje mieszanych składników albo pola różnych powierzchni. Liczby są obecne w życiu każdego z nas!

W podręczniku do klasy drugiej znajdziecie...

1. Znałe Wam już z klasy pierwszej:

- ▶ Ćwiczenia **NA POCZĄTEK**
- ▶ **PRZYKŁADY**
- ▶ **ZADANIA**
- ▶ **ZADANIA BRANŻOWE**

Upewnście się, że matematyka wcale nie jest trudna.

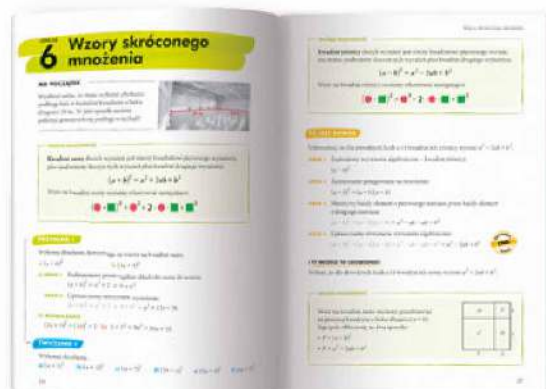
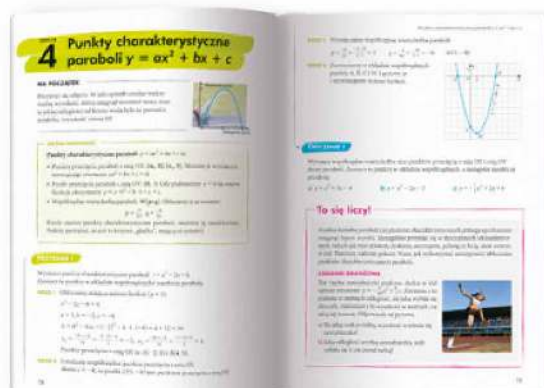
2. Lekcje branżowe, pokazujące praktyczne zastosowanie matematyki.

- ▶ **Podatki się liczy**
- ▶ **To jest zysk!**
- ▶ **Równania na co dzień**
- ▶ **Ważne plany**
- ▶ **Trygonometria na drodze**

Sprawdźcie, że matematyka przydaje się na co dzień.

3. Zupełnie nowy element **TO JEST DOWÓD**, który wprowadzi Was w świat logiki matematycznej i pokaże Wam, jak powstały np. różne wzory matematyczne.

Poznaćcie tajniki logiki matematycznej.



9
3
5

PODPOWIEDŹ

CND to skrót, którego będziemy używać zawsze na końcu dowodów.



Spis treści

Rozdział I. Wyrażenia algebraiczne

LEKCJA 1. Wyrażenia algebraiczne	7
LEKCJA 2. Redukcja wyrazów podobnych	11
LEKCJA 3. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych	14
LEKCJA 4. Mnożenie sum algebraicznych	17
LEKCJA 5. Wylączanie wspólnego czynnika przed nawias	21
LEKCJA 6. Wzory skróconego mnożenia	24
LEKCJA 7. Podatki się liczy	28
Powtórzenie rozdziału	32

Rozdział II. Wykres funkcji kwadratowej

LEKCJA 1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$	35
LEKCJA 2. Przesuwanie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY	40
LEKCJA 3. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej	45
LEKCJA 4. Postać ogólna funkcji kwadratowej	49
LEKCJA 5. Wartość największa i najmniejsza funkcji kwadratowej	54
LEKCJA 6. To jest zysk!	58
Powtórzenie rozdziału	60

Rozdział III. Równania i nierówności kwadratowe

LEKCJA 1. Proste równania kwadratowe	63
LEKCJA 2. Rozwiązywanie równań kwadratowych za pomocą wyróżnika	67
LEKCJA 3. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej	70
LEKCJA 4. Punkty charakterystyczne paraboli $y = ax^2 + bx + c$	74
LEKCJA 5. Równania na co dzień	78
LEKCJA 6. Nierówności kwadratowe	80
Powtórzenie rozdziału	84

Rozdział IV. Wielokąty

LEKCJA 1. Kąty w trójkącie	87
LEKCJA 2. Punkty specjalne w trójkącie	92
LEKCJA 3. Trójkąty przystające	96
LEKCJA 4. Trójkąty prostokątne	100
LEKCJA 5. Odległość punktów w układzie współrzędnych	103
LEKCJA 6. Pole trójkąta	106
LEKCJA 7. Trójkąty o kątach 45° , 45° , 90° oraz 30° , 60° , 90°	110
LEKCJA 8. Czworokąty – pola i obwody	115
Powtórzenie rozdziału	120

Rozdział V. Podobieństwo

LEKCJA 1. Figury podobne	123
LEKCJA 2. Trójkąty podobne	128
LEKCJA 3. Pola figur podobnych	133
LEKCJA 4. Ważne plany	136
Powtórzenie rozdziału	138

Rozdział VI. Trygonometria

LEKCJA 1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	141
LEKCJA 2. Wartości funkcji trygonometrycznych	144
LEKCJA 3. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	147
LEKCJA 4. Trygonometria na drodze	150
LEKCJA 5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi	152
LEKCJA 6. Obliczanie pól wielokątów z wykorzystaniem trygonometrii	156
Powtórzenie rozdziału	160

Rozdział VII. Okręgi i wielokąty

LEKCJA 1. Długość okręgu i pole koła	163
LEKCJA 2. Kąty środkowe	167
LEKCJA 3. Kąty wpisane	171
LEKCJA 4. Wzajemne położenie prostej i okręgu	175
LEKCJA 5. Okrąg wpisany w trójkąt	180
LEKCJA 6. Okrąg opisany na trójkącie	185
LEKCJA 7. Trójkąt równoboczny i kwadrat	189
LEKCJA 8. Wielokąty foremne	193
Powtórzenie rozdziału	196

Zbiór zadań

Dodatkowe zadania do wszystkich lekcji	198
--	-----

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych	226
---	-----

Odpowiedzi	227
------------------	-----

Szanuj swój podręcznik – zadbaj o to, żeby za rok wyglądał tak jak teraz.
Nie pisz w nim i nie rysuj, nie wykonuj zadań pisemnych, nie wpisuj brakujących treści.

Rozdział I

Wyrażenia algebraiczne

TEMATY LEKCJI

1	Wyrażenia algebraiczne	s. 7–10
2	Redukcja wyrazów podobnych	s. 11–13
3	Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych	s. 14–16
4	Mnożenie sum algebraicznych	s. 17–20
5	Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias	s. 21–23
6	Wzory skróconego mnożenia	s. 24–27
7	Podatki się liczy	s. 28–31
	Powtórzenie rozdziału	s. 32–33
	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ	

Wyrażenia algebraiczne

NA POCZĄTEK

Do pewnego miasta przyjechał cyrk.
W jaki sposób obliczysz koszt zakupu
biletów dla 2, 3, 4, 5, ... n osób?

Cena za bilet:
30 zł od osoby



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wyrażenia algebraiczne to liczby oraz litery, które mogą być połączone znakami działań, a niekiedy również nawiasami. Wyrażeniami algebraicznymi są:

- każda liczba i każda litera;
- każde działanie zapisane za pomocą liczb i liter.

Litery występujące w wyrażeniach algebraicznych nazywamy **zmiennymi**. Możemy je zastąpić liczbami, obliczając w ten sposób **wartość liczbową wyrażenia algebraicznego**.

PRZYKŁAD 1

Marek kupił m biletów normalnych w cenie 25 zł od osoby oraz n biletów ulgowych w cenie 15 zł od osoby. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego łączny koszt zakupu biletów.

KROK 1 Zapisujemy w postaci wyrażenia algebraicznego koszt zakupu m biletów normalnych: $25m$ [zł].

KROK 2 Zapisujemy koszt zakupu n biletów ulgowych: $15n$ [zł].

KROK 3 Podajemy łączny koszt zakupu biletów: $25m + 15n$ [zł].

ĆWICZENIE 1

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego łączny koszt zakupu x zeszytów i y długopisów.



PRZYKŁAD 2

Oblicz wartość wyrażenia $5x - 7y$ dla $x = 8$ i $y = 4$.

KROK 1 Zastępujemy zmienną x liczbą 8, a zmienną y – liczbą 4, pamiętając, że wyrażenie $5x$ oznacza iloczyn liczb 5 i x :

$$5x - 7y = 5 \cdot 8 - 7 \cdot 4$$

KROK 2 Obliczamy wartość wyrażenia, pamiętając o kolejności wykonywania działań:

$$5x - 7y = 5 \cdot 8 - 7 \cdot 4 = 40 - 28 = 12$$

PODPOWIEDŹ

Działania wykonujemy w następującej kolejności:

1. działania zapisane w nawiasie,
2. potęgowanie i pierwiastkowanie,
3. mnożenie i dzielenie,
4. dodawanie i odejmowanie.

ĆWICZENIE 2

Oblicz wartość wyrażenia $6m - 3n$ dla podanych wartości zmiennych m i n .

a) $m = 3, n = 8$ b) $m = 9, n = -5$ c) $m = \frac{1}{2}, n = \frac{5}{6}$

PRZYKŁAD 3

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego kwadrat sumy i sumę kwadratów liczb a i b . Oblicz wartość wyrażen dla $a = 1$ i $b = 2$. Porównaj otrzymane wyniki.

KROK 1 Zapisujemy wyrażenie „kwadrat sumy” jako wynik dodawania zmiennych podniesiony do potęgi drugiej:

$$(a + b)^2$$

KROK 2 Zapisujemy wyrażenie „suma kwadratów” jako dodawanie zmiennych podniesionych do potęgi drugiej:

$$a^2 + b^2$$

KROK 3 Obliczamy wartość obu wyrażen dla $a = 1, b = 2$:

$$(a + b)^2 = (1 + 2)^2 = 3^2 = 9$$

$$a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

KROK 4 Zauważamy, że otrzymaliśmy różne wyniki: $9 \neq 5$.

Kwadrat sumy dwóch dowolnych liczb nie jest równy sumie kwadratów tych liczb, pod warunkiem, że liczby te są różne od zera.

ĆWICZENIE 3

Zapisz podane wyrażenie algebraiczne. Oblicz jego wartość dla $x = 2$ i $y = 4$.

a) różnica kwadratów liczb x i y

b) kwadrat różnicy liczb x i y

PRZYKŁAD 4

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

- a) sumę iloczynu $5a$ i liczby b ,
- b) iloczyn liczby 5 oraz sumy liczb a i b ,
- c) iloczyn sumy liczb a i b oraz różnicy liczb c i d ,
- d) 40% liczby x ,
- e) liczbę o 20% większą od y .

ROZWIĄZANIE

- a) $5a + b$
- b) $5(a + b)$
- c) $(a + b)(c - d)$
- d) $0,4x$
- e) $1,2y$

PODPOWIEDŹ

Wyrażenie algebraiczne przyjmuje nazwę od ostatniego działania wykonanego zgodnie z zasadą kolejności działań. Suma to dodawanie, różnica to odejmowanie, iloczyn to mnożenie, a iloraz to dzielenie.

ĆWICZENIE 4

Zapisz jako wyrażenie algebraiczne:

- a) iloczyn liczby 3 oraz sumy liczb n i 8,
- b) iloczyn liczby o 3 mniejszej od n i liczby 12,
- c) sumę liczby trzy razy większej od n i liczby 11,
- d) 29% liczby y ,
- e) liczbę o 30% mniejszą od a .

PODPOWIEDŹ

W wyrażeniach algebraicznych procenty zamieniamy na ułamki:
 $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$.

To się liczy!

Umiejętność obliczania wartości wyrażeń algebraicznych często stosujemy w życiu codziennym. Na przykład kiedy kupujemy działkę i chcemy obliczyć pole jej powierzchni, możemy użyć odpowiednich wzorów. Natomiast gdy budujemy akwarium czy basen w ogrodzie, obliczamy pojemność zbiornika, stosując wzory na objętość. Poniższe zadanie pomoże Wam utrwalić umiejętność korzystania ze wzorów matematycznych.

ZADANIE BRANŻOWE

Klient zlecił Ci wykafelkowanie tarasu w kształcie prostokąta o wymiarach $4,5 \text{ m} \times 12 \text{ m}$. Oblicz.

- a) Ile metrów kwadratowych płytek musisz kupić?
- b) Ile sztuk płytek o wymiarach $60 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ musisz kupić, żeby wykafelkować taras?



ZADANIA

Zbiór zadań, s. 199

1. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

- a) Ile zapłacimy łącznie za x kilogramów jabłek w cenie 5 zł za kilogram i y kilogramów gruszek w cenie 6 zł za kilogram?
- b) Aleksander ma y lat, Ewa jest dwukrotnie starsza od Aleksandra. Ile lat mają razem?
- c) Ile zapłacimy za m hamburgerów, n hot dogów i p porcji frytek?

2. Karolina kupiła 2 kg jabłek po a złotych za kilogram i 3 kg śliwek. Cena śliwek była o b złotych większa od ceny jabłek. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile pieniędzy wydała Karolina.

3. Oblicz wartość wyrażenia dla danych x i y .

a) $5x + 6y$ dla $x = -2$, $y = 4$

b) $6x - xy$ dla $x = 5$, $y = -2$

c) $\frac{1}{2}x + y^2$ dla $x = -8$, $y = -2$

d) $2xy - 2y^2$ dla $x = 4$, $y = -\frac{1}{2}$



ZADANIA BRANŻOWE

4. W pewnym sadzie rośnie p jabłoni i r śliw oraz grusze i wiśnie. Liczba jabłoni jest o 2 większa od liczby grusz, a liczba śliw jest dwukrotnie większa niż liczba wiśni. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile drzew owocowych jest w tym sadzie.

5. Jarek w wakacje przez 2 tygodnie pracował w centrum handlowym przy wykładaniu towaru. Stawka godzinowa za jego pracę wynosiła 18 zł brutto. W pierwszym tygodniu pracował 7 godzin dziennie przez 5 dni, a w drugim pracował x godzin dziennie przez 6 dni. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile Jarek zarobił łącznie brutto w ciągu 2 tygodni.

6. Odległość z Krakowa do Gdańska jest równa n kilometrów. Kierowca przejechał już 45% tej trasy. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące, ile kilometrów zostało mu do pokonania.



Redukcja wyrazów podobnych

NA POCZĄTEK

Pewne bistro sprzedaje jedzenie na wagę. Ile zapłacisz, jeśli kupisz x g pieczonych ziemniaków, 200 g ryby i $2x$ g warzyw?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jednomianem nazywamy wyrażenie, które jest liczbą, zmienną lub iloczynem liczb i zmiennych. Liczbę występującą w jednomianie nazywamy **współczynnikiem liczbowym**.

Jednomiany zwykle zapisujemy w sposób uporządkowany. Przy porządkowaniu jednomianów stosujemy następujące zasady:

- na początku zapisujemy liczbę,
- iloczyn tych samych zmiennych zastępujemy ich potęgą,
- zmienne zapisujemy w kolejności alfabetycznej.

PRZYKŁAD 1

Uporządkuj jednomian.

a) $5xx y$

b) $0,2a^3cbab$

ROZWIĄZANIE

a) $5xx y = 5x^2y$

b) $0,2a^3cbab = 0,2a^4b^2c$

PODPÓWIEDŹ

Przy porządkowaniu jednomianów stosujemy prawa działań na potęgach:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

ĆWICZENIE 1

Zapisz w najprostszej postaci.

a) $2xyxyx$

b) $\frac{1}{4}abccbc$

c) $-9yxy^2$

d) $-0,4ab^3c^2a^4b$

PRZYKŁAD 2

Pomnóż jednomiany. Wynik podaj w postaci uporządkowanej.

a) $(4xy^2) \cdot (5x^2y)$ b) $(7xy^2) \cdot (-3x^3)$

a) **KROK 1** Opuszczamy nawiasy:

$$(4xy^2) \cdot (5x^2y) = 4xy^2 \cdot 5x^2y$$

KROK 2 Korzystamy z przemienności mnożenia i porządkujemy jednomian:

$$(4xy^2) \cdot (5x^2y) = 4xy^2 \cdot 5x^2y = 4 \cdot 5xx^2y^2y = 20x^3y^3$$

b) **ROZWIĄZANIE**

$$(7xy^2) \cdot (-3x^3) = -21x^4y^2$$

PODPOWIEDŹ

Kiedy pomnożymy kilka jednomianów, po uporządkowaniu otrzymamy jeden jednomian.

ĆWICZENIE 2

Wykonaj mnożenie i uporządkuj jednomiany.

a) $(9x^2y) \cdot (-4x^3)$ b) $(-6qr^2) \cdot (-\frac{1}{3}pr)$ c) $(-3a) \cdot (4ax) \cdot (\frac{1}{6}x)$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Suma algebraiczna to dodawanie jednomianów. Jednomiany te nazywamy **wyrazami sumy algebraicznej**.

PRZYKŁAD 3

Wypisz wyrazy sumy algebraicznej.

a) $-3x^2 + 8x + 7$ b) $x^4 - 7x^2 - 9$

a) **KROK 1** Zauważamy, że pomiędzy jednomianami mamy znak dodawania:

$$-3x^2 + 8x + 7$$

KROK 2 Wypisujemy wyrazy sumy: $-3x^2$, $8x$, 7 .

b) **KROK 1** Zamieniamy odejmowanie jednomianów na dodawanie jednomianów o przeciwnych współczynnikach:

$$x^4 - 7x^2 - 9 = x^4 + (-7x^2) + (-9)$$

KROK 2 Wypisujemy wyrazy sumy: x^4 , $-7x^2$, -9 .

ĆWICZENIE 3

Wypisz wyrazy sumy algebraicznej.

a) $0,5x^2 + \frac{1}{5}x + 0,9$ b) $6x^3y - 3x - 2y^2$ c) $-4a + 2b - 8c - 5$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wyrazy sumy algebraicznej, które różnią się co najwyżej współczynnikiem liczbowym, to **wyrazy podobne**. Możemy je dodawać lub odejmować. Jest to tzw. **redukcja wyrazów podobnych**, czyli sprowadzanie sumy algebraicznej do najprostszej postaci.

PRZYKŁAD 4

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $7x^2 + 6x - 3x^2 - 2x$

b) $4x^3 - 10 + 7y - 5x^3 - 9y$

a) **KROK 1** Podkreślamy wyrazy podobne, żeby łatwiej je było odnaleźć:

$$\underline{7x^2} + 6x - \underline{3x^2} - 2x$$

KROK 2 Wykonujemy działania na współczynnikach liczbowych wyrazów podobnych:

$$\underline{7x^2} + 6x - \underline{3x^2} - 2x = 4x^2 + 4x$$

b) **ROZWIĄZANIE**

$$\underline{4x^3} - 10 + \underline{7y} - \underline{5x^3} - \underline{9y} = -x^3 - 2y - 10$$

ĆWICZENIE 4

Zapisz w najprostszej postaci.

a) $-2x^2 - 5x + 3x - 5x^2$

b) $3x^4 - 2x^3 + 5 + x^2 - 2x^4 - 7x^2 + x^3$

ZADANIA

 **Zbiór zadań, s. 199**

1. Uporządkuj jednomian.

a) $-11xxyyy$

b) $-x^2yx^3y^3$

c) xy^2x^2y

d) $-\frac{1}{12}ac^4bbbc a^2$

2. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $a^2 + a^2$

b) $-5x^3 + 6x^3$

c) $-3xy^2 - 5xy^2$

d) $-5a^2b^3 + 3a^2b^3$

3. Zapisz w najprostszej postaci.

a) $-x \cdot 4x^2 + 3x^3$

b) $5aabb - 3a^3b^2 + 2a \cdot 4a^2b^2$

ZADANIA BRANŻOWE

4. Ogrodnik ma posiać trawę na trawniku w kształcie prostokąta o wymiarach $(5a)$ m $\times$ $(2b)$ m. Opakowanie nasion trawy wystarcza na obsianie 5 m^2 powierzchni ogródka. Ile opakowań trawy musi kupić?

Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

NA POCZĄTEK

Do pewnej hurtowni przywieziono $(x + 5)$ kg jabłek, $(2x - 3)$ kg gruszek, $(x + 12)$ kg bananów. Następnego dnia wydano z magazynu $(2x + 7)$ kg owoców. Czy potrafisz ustalić, ile kilogramów owoców zostało w hurtowni?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kiedy dodajemy lub odejmujemy sumy algebraiczne, musimy najpierw opuścić nawiasy. Jeśli przed nawiasem znajduje się minus, to po opuszczeniu nawiasu zmieniamy znak na przeciwny każdego wyrazu sumy algebraicznej w nawiasie.

PRZYKŁAD 1

Wykonaj działanie. Zapisz wynik w najprostszej postaci.

a) $(x + 4) + (2x - 3)$ b) $(3x - 4) - (-7x + 3)$

a) **KROK 1** Opuszczamy nawiasy bez zmiany znaków wyrazów w nawiasach:

$$(x + 4) + (2x - 3) = x + 4 + 2x - 3$$

KROK 2 Redukujemy wyrazy podobne:

$$(x + 4) + (2x - 3) = \underline{x} + 4 + \underline{2x} - 3 = 3x + 1$$

b) **KROK 1** Opuszczamy nawiasy, zmieniając znaki wyrazów z drugiego nawiasu:

$$(3x - 4) - (-7x + 3) = 3x - 4 + 7x - 3$$

KROK 2 Redukujemy wyrazy podobne:

$$(3x - 4) - (-7x + 3) = \underline{3x} - 4 + \underline{7x} - 3 = 10x - 7$$

ĆWICZENIE 1

Zapisz w najprostszej postaci.

a) $(3x + 9) + (-4x - 9)$ b) $(6a + 9b) - (8a - b)$ c) $-(2x - 3y + 5) - (4x + 3y - 7)$

PRZYKŁAD 2

Olek, Marek i Adam zbierają monety. Marek ma dwa razy więcej monet pięciozłotowych, a Adam trzy razy więcej tych monet od Olka. Marek ma pięć razy mniej monet dwuzłotowych od Olka i dwa razy mniej od Adama. Zapisz w postaci najprostszego wyrażenia łączną liczbę monet Olka i Marka.

KROK 1 Zapisujemy liczbę monet każdego chłopca za pomocą jednomianów.

Chłopcy	Monety 5 zł	Monety 2 zł
Olek	x	$5y$
Marek	$2x$	y
Adam	$3x$	$2y$

KROK 2 Zapisujemy liczbę monet Olka:
 $x + 5y$

KROK 3 Zapisujemy liczbę monet Marka:
 $2x + y$

KROK 4 Podajemy łączną liczbę monet Olka i Marka:
 $(x + 5y) + (2x + y) = 3x + 6y$

ĆWICZENIE 2

Na podstawie tabeli z przykładu 2. zapisz w najprostszej postaci łączną liczbę monet:

- a) Olka i Adama, b) wszystkich chłopców.

PRZYKŁAD 3

Zapisz wyrażenie $-[3x - (2x - y)]$ w najprostszej postaci.

KROK 1 Opuszczamy okrągły nawias, zmieniając znaki wyrazów zapisanych w tym nawiasie:

$$-[3x - (2x - y)] = -[3x - 2x + y]$$

KROK 2 Zauważamy, że została tylko jedna para nawiasów, więc zmieniamy nawias kwadratowy na okrągły:

$$-[3x - (2x - y)] = -(3x - 2x + y)$$

KROK 3 Opuszczamy nawiasy ze zmianą znaków wszystkich wyrazów w środku:

$$-[3x - (2x - y)] = -(3x - 2x + y) = -3x + 2x - y$$

KROK 4 Redukujemy wyrazy podobne:

$$-[3x - (2x - y)] = -(3x - 2x + y) = -3x + 2x - y = -x - y$$

PODPOWIEDŹ

Najpierw wykonujemy działania w nawiasach okrągłych $()$, potem – w nawiasach kwadratowych $[\]$, a na końcu – w nawiasach klamrowych $\{ \}$.

ĆWICZENIE 3

Uprość wyrażenie $-\{2a - [3b - (2a + 3b)]\}$.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 200

1. Przedstaw sumę $P + Q$ oraz różnicę $P - Q$ w najprostszej postaci.

a) $P = -4a^2b + ab - b^3$

$$Q = 4a^2b - 2ab + b^3$$

b) $P = 2x^3 - 6x^2y + 4xy - 3y$

$$Q = 5x^3 + 3x^2y - 2xy - 2y$$

2. Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $m + [n - (m + n)]$

b) $n - [m - (-n + m)]$

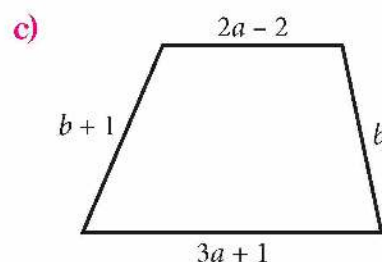
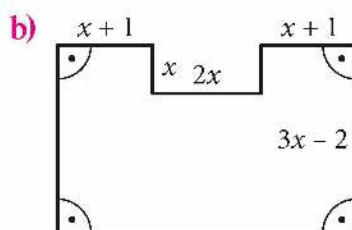
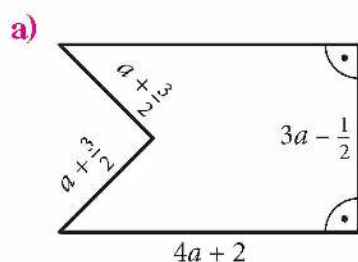
c) $[s + (t - s)] + [t - (s - t)]$

d) $[t - (-s + t)] - [s + (-s + t)]$

3. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2n$ jest liczbą parzystą. Podaj dwie kolejne liczby parzyste następujące po liczbie $2n$. Wyznacz sumę trzech kolejnych liczb parzystych, zaczynając od $2n$.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Deweloper chce ogrodzić działkę budowlaną, która ma kształt podanej figury. Zapisz w najprostszej postaci, ile siatki potrzebuje do ogrodzenia działki.

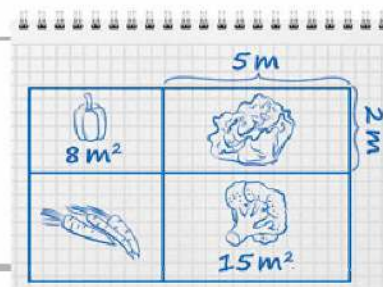


5. Do biura zamówiono trzy rodzaje papieru do drukarki o gramaturze 100 g, 120 g, 170 g w ryzach po 500 arkuszy. Papieru o gramaturze 120 g zamówiono o cztery opakowania więcej niż tego o gramaturze 100 g i o siedem opakowań mniej niż tego o gramaturze 170 g. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego łączną liczbę zamówionych ryz papieru.

Mnożenie sum algebraicznych

NA POCZĄTEK

Ogrodnik podzielił prostokątny ogródek warzywny tak, jak przedstawiono na rysunku. W jaki sposób ustalisz wymiary oraz pole powierzchni ogródka?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania: $a(b + c) = ab + ac$.

PRZYKŁAD 1

Wykonaj mnożenie, korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania.

a) $5 \cdot 37$

b) $6(2x + 5)$

c) $-4(x - 7y)$

a) **KROK 1** Liczbę 37 zamieniamy na sumę dziesiątek i jedności:

$$5 \cdot 37 = 5 \cdot (30 + 7)$$

KROK 2 Każdy składnik sumy z nawiasu mnożymy przez 5:

$$5 \cdot 37 = 5 \cdot (30 + 7) = 5 \cdot 30 + 5 \cdot 7$$

KROK 3 Wykonujemy działania:

$$5 \cdot 37 = 5 \cdot (30 + 7) = 5 \cdot 30 + 5 \cdot 7 = 150 + 35 = 185$$

b) **KROK 1** Opuszczamy nawiasy i mnożymy każdy wyraz w nawiasie przez 6:

$$6(2x + 5) = 6 \cdot 2x + 6 \cdot 5$$

KROK 2 Upraszczamy otrzymane wyrażenie:

$$6(2x + 5) = 6 \cdot 2x + 6 \cdot 5 = 12x + 30$$

c) **ROZWIĄZANIE**

$$-4(x - 7y) = -4 \cdot x - 4 \cdot (-7y) = -4x + 28y$$

ĆWICZENIE 1

Wykonaj mnożenie.

a) $7(4x - 9y)$

b) $y(9x - 8y)$

c) $8x(x - 3)$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Aby wykonać mnożenie dwóch sum algebraicznych: $(a + b)$ i $(x + y)$, mnożymy każdy składnik sumy $a + b$ przez każdy składnik sumy $x + y$. Możemy to zapisać w taki sposób:

$$(a + b) \cdot (x + y) = ax + ay + bx + by$$

To samo możemy zilustrować następująco:

$$(\text{red circle} + \text{red square}) \cdot (\text{green circle} + \text{green square}) = \text{red circle} \cdot \text{green circle} + \text{red circle} \cdot \text{green square} + \text{red square} \cdot \text{green circle} + \text{red square} \cdot \text{green square}$$

PRZYKŁAD 2

Wykonaj mnożenie $45 \cdot 23$.

KROK 1 Zapisujemy liczby 45 i 23 w postaci sumy dziesiątek i jedności:

$$45 \cdot 23 = (40 + 5)(20 + 3)$$

KROK 2 Mnożymy każdy wyraz pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy:

$$45 \cdot 23 = (40 + 5)(20 + 3) = 40 \cdot 20 + 40 \cdot 3 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 3$$

KROK 3 Obliczamy iloczyny i dodajemy wyniki:

$$45 \cdot 23 = (40 + 5)(20 + 3) = 40 \cdot 20 + 40 \cdot 3 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 3 = 800 + 120 + 100 + 15 = 1035$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz. Spróbuj liczyć w pamięci.

a) $28 \cdot 35$

b) $54 \cdot 23$

c) $102 \cdot 46$

PRZYKŁAD 3

Wykonaj mnożenie i przedstaw wynik w najprostszej postaci.

a) $(x + 2)(x + 6)$

b) $(4x + y)(2x - 5y)$

c) $(x + 2y)(x + y + 1)$

a) KROK 1 Mnożymy każdy wyraz pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy:

$$(x + 2)(x + 6) = x \cdot x + x \cdot 6 + 2 \cdot x + 2 \cdot 6$$

KROK 2 Porządkujemy jednomiany i redukujemy wyrazy podobne:

$$(x + 2)(x + 6) = x \cdot x + x \cdot 6 + 2 \cdot x + 2 \cdot 6 = x^2 + \underline{6x} + \underline{2x} + 12 = x^2 + 8x + 12$$

ROZWIĄZANIE

$$\text{b)} (4x + y)(2x - 5y) = 4x \cdot 2x + 4x \cdot (-5y) + y \cdot 2x + y \cdot (-5y) = \\ = 8x^2 - 20xy + 2xy - 5y^2 = 8x^2 - 18xy - 5y^2$$

$$\text{c)} (x + 2y)(x + y + 1) = x^2 + \underline{xy} + x + \underline{2xy} + 2y^2 + 2y = x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y$$

ĆWICZENIE 3

Wykonaj mnożenie i przedstaw wynik w najprostszej postaci.

a) $(x + 1)(x + 2)$

c) $(x - 4)(x - 5)$

e) $(3x + y)(x - y)$

b) $(4x - 3y)(x + 2y)$

d) $(3a - 5b)(2b + 6a)$

f) $(2a - 6b)(4b - 5a)$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Mnożenie sum algebraicznych możemy przedstawić za pomocą prostokąta o bokach $(a + b)$ oraz $(x + y)$. Jego pole oblicza się na dwa sposoby:

- $P = (a + b)(x + y)$
- $P = ax + ay + bx + by$

ax	ay	a
bx	by	b
x		y

PRZYKŁAD 4

Zapisz pole prostokąta o bokach $(x + 3)$ i $(y + 2)$ za pomocą wyrażenia algebraicznego.

ROZWIĄZANIE

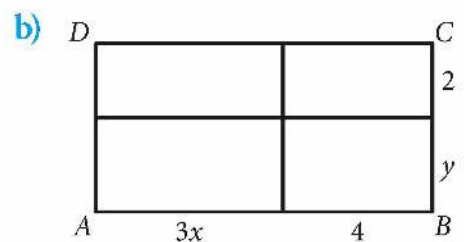
SPOSÓB I $P = (x + 3)(y + 2)$

SPOSÓB II $P = xy + 2x + 3y + 6$

$2x$	6	2
xy	$3y$	y
x		3

ĆWICZENIE 4

Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego pole prostokąta $ABCD$.



ZADANIA

Zbiór zadań, s. 200

1. Wykonaj mnożenie.

a) $(a+2)(b+4)$

c) $(2x-4y)(3x-5)$

e) $(x+y)(x+y-1)$

b) $(2a-4b)(b+1)$

d) $(-2x+y)(6x-7)$

f) $(x-y)(x-y+1)$

2. Wykonaj działania.

a) $-5x^2 + 3x(x-1) + (2x-1)(x+3)$

b) $3y^2 - 2x(x+2y) - (x-y)(2x+y)$

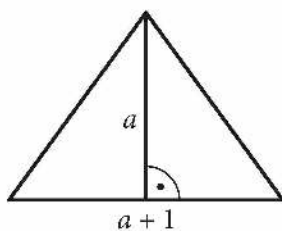
c) $(a-1)(a+b-2) - 9a^2$

d) $(a+2c)(a-c+2) - ac$

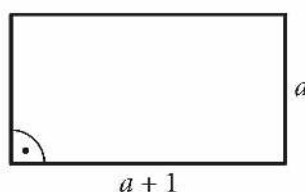
ZADANIA BRANŻOWE

3. Rolnik ma działkę w kształcie pewnej figury. Zapisz w postaci najprostszego wyrażenia algebraicznego pole powierzchni tej działki.

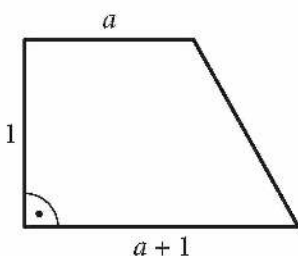
a)



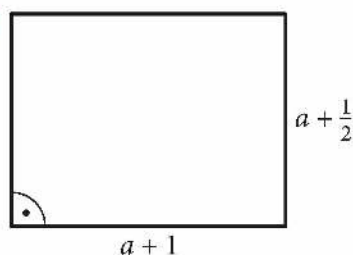
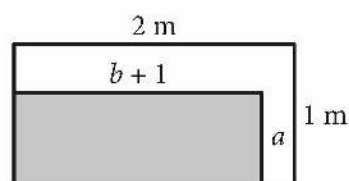
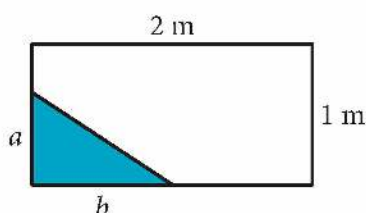
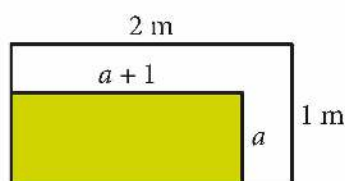
c)



b)



d)

4. Krawcowa ma trzy kupony materiału w kolorach: zielonym, niebieskim i szarym, każdy w kształcie prostokąta o wymiarach $1\text{ m} \times 2\text{ m}$. Z każdego wycina po jednym kawałku – jak na rysunkach. Zapisz w postaci sumy algebraicznej, ile metrów kwadratowych materiału zostanie łącznie ze wszystkich trzech kuponów.

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

NA POCZĄTEK

Właściciel salonu kosmetycznego włożył do pakietów reklamowych 75 próbek kremu, 30 próbek balsamu i 45 kuponów rabatowych tak, że zawartość każdego pakietu była taka sama. Jak sądzisz, ile pakietów przygotował? Czy wiesz, ile sztuk każdego produktu było w jednym pakiecie?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną: $ab + ac = a(b + c)$. Możemy to zilustrować w następujący sposób:

$$\color{red}\blacksquare \cdot \color{green}\bullet + \color{red}\blacksquare \cdot \color{blue}\blacktriangle = \color{red}\blacksquare \cdot (\color{green}\bullet + \color{blue}\blacktriangle)$$

W sumach algebraicznych wspólnym czynnikiem może być każda postać jednomianu: liczba, zmienna lub iloczyn liczby i zmiennej.

PRZYKŁAD 1

Oblicz sumę $5 \cdot 43 + 5 \cdot 57$.

KROK 1 Zauważamy, że w obu iloczynach występuje ta sama liczba: $5 \cdot 43 + 5 \cdot 57$.

KROK 2 Zapisujemy wspólną liczbę przed nawiasem, a pozostałe czynniki zapisujemy w postaci sumy w nawiasie:

$$5 \cdot 43 + 5 \cdot 57 = 5 \cdot (43 + 57)$$

KROK 3 Wykonujemy działania w odpowiedniej kolejności:

$$5 \cdot 43 + 5 \cdot 57 = 5 \cdot (43 + 57) = 5 \cdot 100 = 500$$

ĆWICZENIE 1

Oblicz, stosując wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

a) $2 \cdot 73 + 2 \cdot 27$

b) $6 \cdot 37 + 6 \cdot 163$

c) $9 \cdot 231 + 9 \cdot 269$

PRZYKŁAD 2

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $3x^2 + 3y$

b) $8x + 6y$

c) $64x - 16y$

a) **KROK 1** Zauważamy, że przed zmiennymi powtarza się liczba 3:

$$3x^2 + 3y$$

KROK 2 Wyłączamy liczbę 3 przed nawias, a pozostałe czynniki zapisujemy w nawiasie:

$$3x^2 + 3y = 3(x^2 + y)$$

b) **KROK 1** Szukamy wspólnego dzielnika dla liczb 6 i 8:

$$\text{NWD}(6, 8) = 2$$

$$8x + 6y = 2 \cdot 4x + 2 \cdot 3y$$

PODPOWIEDŹ

NWD to największy wspólny dzielnik podanych liczb.

KROK 2 Wyłączamy liczbę 2 przed nawias, a pozostałe czynniki zapisujemy w nawiasie:

$$8x + 6y = 2 \cdot 4x + 2 \cdot 3y = 2(4x + 3y)$$

c) **ROZWIĄZANIE**

Dla liczb 16 i 64 jest kilka wspólnych dzielników: 2, 4, 8, 16, ale $\text{NWD}(16, 64) = 16$.

$$64x - 16y = 16(4x - y)$$

ĆWICZENIE 2

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $4x + 4y$

b) $5x - 15y^2$

c) $-12x^2 + 18y^2$

PRZYKŁAD 3

Wyłącz wspólną zmienną przed nawias.

a) $a^2 + ab$

b) $x^2y + xy^2$

a) **KROK 1** Zamieniamy potęgi na iloczyny zmiennych: $a^2 - ab = aa - ab$

KROK 2 Wyłączamy powtarzającą się zmienną a przed nawias:

$$a^2 - ab = aa - ab = a(a - b)$$

b) **ROZWIĄZANIE**

$$x^2y + xy^2 = xxy + xyy = xy(x + y)$$

ĆWICZENIE 3

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $xy - yz$

b) $x^3 - x^2y$

c) $a^2 + 3ab - a$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Przed nawias wyłączamy zwykle:

- największy możliwy czynnik liczbowy (NWD współczynników liczbowych),
- wszystkie możliwe zmienne w najwyższych potęgach.

PRZYKŁAD 4

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias w wyrażeniu $12y^2 - 8x^2y$.

KROK 1 Znajdujemy wspólny czynnik zarówno dla liczb, jak i dla zmiennych:

$$12y^2 - 8x^2y = 4y \cdot 3y - 4y \cdot 2x^2$$

KROK 2 Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias:

$$12y^2 - 8x^2y = 4y \cdot 3y - 4y \cdot 2x^2 = 4y(3y - 2x^2)$$

ĆWICZENIE 4

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $8x^3 - 32x^2$

c) $20ax - 15ay$

e) $24x^2y + 16xy^2$

b) $-14y^4 - 7y^2$

d) $9ab + 12bc$

f) $48a^3b + 18a^2b$

ZADANIA

 **Zbiór zadań, s. 201**

1. Zapisz wyrażenie w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias podany jednomian.

a) $x^2yz + xy^2z$, xyz

b) $2x^3y - 8x^2y^2 + 6x^2yz$, $2x^2y$

2. Przedstaw sumę $8x^3 + 6x^2 + 4x$ w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias podany czynnik.

a) 2

b) x

c) $2x$

3. Oblicz wartość liczbową wyrażenia.

a) $a^2 - 2ab$ dla $a = 18,5$ i $b = 4,25$

b) $x^2 + 2xy$ dla $x = 17,5$ i $y = 6,25$

c) $2x^2 - 3xy$ dla $x = 14\frac{1}{2}$ i $y = 6\frac{1}{3}$

PODPÓWIEDŹ

Obliczenia będą łatwiejsze, jeśli wyłączymy wspólny czynnik przed nawias, np.
 $a^2 - 2ab = a(a - 2b)$.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Za wynajem autokaru na wycieczkę trzeba zapłacić 6000 zł. Nocleg z wyżywieniem dla jednej osoby kosztuje 100 zł za dobę. Sprawdź, czy wyrażenie $200(x + 30)$ opisuje całkowity koszt wycieczki w złotych z dwoma noclegami dla x osób.

Wzory skróconego mnożenia

NA POCZĄTEK

Wyobraź sobie, że masz wyłożyć płytkami podłogę hali w kształcie kwadratu o boku długości 29 m. W jaki sposób możesz policzyć powierzchnię podłogi w tej hali?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy kwadratowi pierwszego wyrażenia plus podwojony iloczyn tych wyrażeń plus kwadrat drugiego wyrażenia:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Wzór na kwadrat sumy możemy zilustrować następująco:

$$(\text{red circle} + \text{green square})^2 = \text{red circle}^2 + 2 \cdot \text{red circle} \cdot \text{green square} + \text{green square}^2$$

PRZYKŁAD 1

Wykonaj działanie, korzystając ze wzoru na kwadrat sumy.

a) $(x + 6)^2$

b) $(3x + 5)^2$

a) **KROK 1** Podstawiamy poszczególne składniki sumy do wzoru:

$$(x + 6)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2$$

KROK 2 Upraszczamy otrzymane wyrażenie:

$$(x + 6)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$$

b) **ROZWIĄZANIE**

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

ĆWICZENIE 1

Wykonaj działanie.

a) $(x + 1)^2$

b) $(x + 3)^2$

c) $(x + 7)^2$

d) $(3x + 1)^2$

e) $(2x + 4)^2$

f) $(4x + 2)^2$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy kwadratowi pierwszego wyrażenia minus podwojony iloczyn tych wyrażeń plus kwadrat drugiego wyrażenia:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Wzór na kwadrat różnicy możemy zilustrować następująco:

$$(\text{●} - \text{■})^2 = \text{●}^2 - 2 \cdot \text{●} \cdot \text{■} + \text{■}^2$$

TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że dla dowolnych liczb a i b kwadrat ich różnicy wynosi $a^2 - 2ab + b^2$.

KROK 1 Zapisujemy wyrażenie algebraiczne – kwadrat różnicy:

$$(a - b)^2$$

KROK 2 Zamieniamy potęgowanie na mnożenie:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

KROK 3 Mnożymy każdy element z pierwszego nawiasu przez każdy element z drugiego nawiasu:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

KROK 4 Upraszczamy otrzymane wyrażenie algebraiczne:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

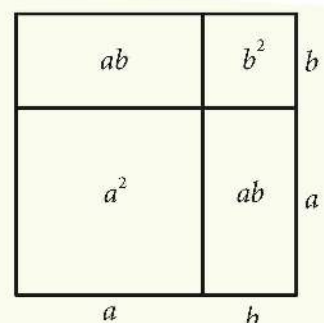
**I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!**

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b kwadrat ich sumy wynosi $a^2 + 2ab + b^2$.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wzór na kwadrat sumy możemy przedstawiać za pomocą kwadratu o boku długości $(a + b)$. Jego pole oblicza się na dwa sposoby:

- $P = (a + b)^2$
- $P = a^2 + 2ab + b^2$



PRZYKŁAD 2

Wykonaj działanie, korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy.

a) $(x - 2)^2$

b) $(2x - 5)^2$

ROZWIĄZANIE

a) $(x - 2)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$

b) $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

ĆWICZENIE 2

Wykonaj działanie.

a) $(x - 1)^2$

c) $(2x - 2)^2$

e) $(x - 3y)^2$

b) $(x - 3)^2$

d) $(4x - 7)^2$

f) $(3x - y)^2$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi różnicy tych wyrażeń przez sumę tych wyrażeń:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Wzór na różnicę kwadratów możemy zilustrować następująco:

$$\text{●}^2 - \text{■}^2 = (\text{●} - \text{■}) \cdot (\text{●} + \text{■})$$

PRZYKŁAD 3

Wykonaj działanie, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów.

a) $(x - 4)(x + 4)$

b) $(2x - 5y)(2x + 5y)$

ROZWIĄZANIE

a) $(x - 4)(x + 4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$

b) $(2x - 5y)(2x + 5y) = (2x)^2 - (5y)^2 = 4x^2 - 25y^2$

ĆWICZENIE 3

Wykonaj działanie.

a) $(x - 2)(x + 2)$

c) $(2x - 1)(2x + 1)$

e) $(3x - 8y)(3x + 8y)$

b) $(x - 9)(x + 9)$

d) $(6 + 4x)(4x - 6)$

f) $\left(\frac{1}{2}x + y\right)\left(y - \frac{1}{2}x\right)$

To się liczy!

Często na co dzień wykonujemy obliczenia, korzystając z tradycyjnych kalkulatorów lub tych w telefonach komórkowych czy innych urządzeniach mobilnych. Zdarza się jednak, że telefon się rozładuje, a kalkulator gdzieś zawieruszy, a my pilnie musimy coś policzyć, np. kwotę do zapłaty dla kontrahenta albo ilość potrzebnych materiałów. Poniższe zadanie pokaże Wam, jak wykorzystać wzory skróconego mnożenia do takich obliczeń.



ZADANIE BRANŻOWE

Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) 36^2

b) 58^2

c) $17 \cdot 23$

d) $102 \cdot 98$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 202

1. Podaj jednomian, który powinien być w miejscu $?$, by zachodziła podana równość.

a) $(x + 8)^2 = x^2 + ? + 64$

d) $(x - 7)^2 = x^2 - ? + 49$

b) $(3x + 1)^2 = 9x^2 + ? + 1$

e) $(5x - 2)^2 = 25x^2 - ? + 4$

c) $(6x + 3)^2 = 36x^2 + ? + 9$

f) $(2x - 9)^2 = 4x^2 - ? + 81$

2. Wykonaj mnożenie, stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $(x - 5)(x + 5)$

d) $\left(\frac{2}{3}a + b\right)\left(\frac{2}{3}a - b\right)$

b) $(10 + x)(10 - x)$

e) $(0,3s - 2t)(2t + 0,3s)$

c) $\left(a - \frac{1}{4}b\right)\left(a + \frac{1}{4}b\right)$

f) $(0,5s + 0,6t)(0,6t - 0,5s)$

ZADANIA BRANŻOWE

3. Pracownicy firmy budowlanej układają kostkę brukową na prostokątnym placu o powierzchni 45 m^2 . Oblicz obwód tego placu, jeśli jego wymiary wynoszą $(x - 2) \text{ m} \times (x + 2) \text{ m}$.



7 Podatki się liczy

Gdy podejmujemy pracę, otrzymujemy wynagrodzenie, od którego trzeba odprowadzić podatek. Najczęściej płacimy podatek dochodowy od osób fizycznych. Większość z nas ma do czynienia z formularzem PIT-11, który wystawia pracodawca, oraz PIT-37 służącym do rozliczenia podatku dochodowego za dany rok kalendarzowy.

PIT to dokument urzędowy przygotowany na ustalonym prawnie wzorze. Jest podstawą zapłaty podatku w określonej wysokości w związku z uzyskanymi dochodami.

Szczegółowe wskazówki, jak wypełnić zeznanie podatkowe, znajdziecie w broszurach informacyjnych do każdego rodzaju formularza, dostępnych na stronie internetowej Ministerstwa Finansów lub w broszurach urzędu skarbowego. Wypełnianie zeznania PIT-37 jest naprawdę łatwe! Możecie to zrobić samodzielnie, wystarczy umiejętność czytania ze zrozumieniem i podstawowa znajomość działań matematycznych. Wszystkie potrzebne umiejętności zdobyliście już na lekcjach matematyki.

POLTAX POLA JASNE WYPEŁNIA PODATNIK, POLA CIEMNE WYPEŁNIA URZĄD. WYPEŁNIĆ NA MASZYNIE, KOMPUTEROWO LUB RĘCZNIE, DUŻYMI, DROKOWANYMI LITERAMI, CZARNYM LUB NIEBIESZYM KOLOREM. Składanie w wersji elektronicznej: www.portalpodatkowy.mf.gov.pl

1. Identyfikator podatkowy NIP / numer PESEL (niepobocznie skróty) podatnika	3. Nr dokumentu	4. Status
2. Identyfikator podatkowy NIP / numer PESEL (niepobocznie skróty) małżonka		

PIT-37 Prawidłowe wypełnienie formularza ułatwi wcześniejsze zapoznanie się z broszurą informacyjną dostępną w urzędach.

ZEZNANIE O WYSOKOŚCI OSIĄGNIĘTEGO DOCHODU (PONIESIONEJ STRATY) W ROKU PODATKOWYM

5. Rok

Formularz przeznaczony jest dla podatników, którzy w roku podatkowym:

- wylącznie za pośrednictwem płatnika uzyskali przychody ze źródeł położonych na terytorium Rzeczypospolitej Polskiej, podlegające opodatkowaniu na ogólnych zasadach przy zastosowaniu skali podatkowej, tj. w szczególności z tytułu:
 - wynagrodzeń i innych przychodów ze stosunku służbowego, stosunku pracy (w tym spółdzielczego stosunku pracy) oraz pracy nakładczej,
 - emerytur lub rent krajowych (w tym rent strukturalnych, rent socjalnych),
 - świadczeń przedemerytalnych, zasiłków przedemerytalnych,
 - nalesności z tytułu członkostwa w rolniczych spółdzielniach produkcyjnych lub innych spółdzielniach zajmujących się produkcją rolną,
 - zasiłków pieniężnych z ubezpieczenia społecznego,
 - stypendiów,
 - przychodów z działalności wykonywanej osobiście (między innymi z umów zlecenia, kontraktów menedżerskich, zasiłkowania w radach nadzorczych, pełnienia obowiązków społecznych, działalności sportowej),
 - przychodów z praw autorskich i innych praw majątkowych,
 - świadczeń wypłaconych z Funduszu Pracy lub z Funduszu Gwarantowanych Świadczeń Pracowniczych,
 - nalesności za pracę przypadających tymczasowo aresztowanym oraz skazanym,
 - nalesności z umowy aktywizacyjnej,
- nie prowadzili pozarolniczej działalności gospodarczej oraz działań specjalnych produkcji rolnej opodatkowanych na ogólnych zasadach przy zastosowaniu skali podatkowej,
- nie są obywatelami doliczając do uzyskanych dochodów dochodów małoletnich dzieci,
- nie obniżają dochodów o straty z lat ubiegłych.

Podstawa prawna: Art. 45 ust. 1 ustawy z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych (Dz. U. z 2012 r. poz. 361, z późn. zm.), zwanej dalej "ustawą".

Termin składania: Do dnia 30 kwietnia roku następującego po roku podatkowym.

Miejsce składania: Urząd, o którym mowa w art. 45 ustawy, zwany dalej "urzędem".

Wybór sposobu opodatkowania (zaznaczyć właściwe kwadraty)

6. ☐ 1. indywidualnie	☐ 2. wspólnie z małżonkiem, o którym mowa w art. 6 ust. 2 ustawy	☐ 3. wspólnie z małżonkiem, zgodnie z wnioskiem, o którym mowa w art. 6a ust. 1 ustawy	☐ 4. w sposób przewidziany dla osób samotnie wychowujących dzieci
7. ☐ w sposób przewidziany dla podatników			
8. ☐ w sposób przewidziany dla małżonków			

Zaznaczenie opodatkowania oraz złożenie podpis(ów) w części I, traktuje się na równi ze złożeniem wniosku o zastosowanie wskazanego sposobu opodatkowania lub 8 zaznacza się łącznie z kwadratem 1, 2, 3 albo 4 w poz. 6.

A. PESEL SKŁADANIA ZEZNANIA

Adresat zeznania

1 Na pierwszej stronie wpisujemy swoje dane osobowe.

2 Formularz służy do rozliczania indywidualnego lub wspólnego z małżonkiem.

PRZYKŁADOWE ZEZNANIE PODATKOWE PIT-37 ZA 2017 R.

C.1. DOCHODY I STRATY PODATNIKA					
Źródła przychodów	Przychód zł, gr	Koszty uzyskania przychodów zł, gr	Dochód (b - c) zł, gr	Strata (c - b) zł, gr	Zaliczka pobrana przez płatnika zł
a	b	c	d	e	f
1. Należności ze stosunku: pracy, służbowego, spółdzielczego i z pracy nakładczej, a także zasiłki pieniężne z ubezpieczenia społecznego wypłacone przez zakład pracy W poz. 42 należy wykazać przychody, do których w poz. 43 podatnik stosuje 50% koszty uzyskania przychodów na podstawie art. 22 ust. 9 pkt 3 ustawy.	37. 56 108,77	38. 1335,00	39. 54 773,77	40.	41. 4317
2. Emerytury – renty oraz inne krajowe świadczenia, o których mowa w art. 34 ust. 7 ustawy	44.	45.	46.	47.	48.
3. Działalność wykonywana osobiście, o której mowa w art. 13 ustawy (w tym umowy o dzieło i zlecenia)	49.	50.	51.	52.	53.
4. Prawa autorskie i inne prawa, o których mowa w art. 18 ustawy W poz. 57 należy wykazać przychody, do których w poz. 58 podatnik stosuje 50% koszty uzyskania przychodów na podstawie art. 22 ust. 9 pkt 1-3 ustawy.	54. 57.	55. 58.	56. 59.	57. 60.	58. 61.
5. Inne źródła, niewymienione w wierszach od 1 do 4	62.	63.	64.	65.	66.
6. RAZEM Suma kwot z wierszy od 1 do 5.	67. 56 108,77	68. 1335,00	69. 54 773,77	70.	71. 4317

1 W rubrykach 37, 38, 39, 41 przepisujemy kwoty z PIT-11 otrzymanego od pracodawcy, w pozostałych wpisujemy inne dochody, np. wynagrodzenie za umowę zlecenie.

2 Koszty uzyskania przychodów są z góry ustalone i zależą od rodzaju wykonywanej działalności, miejsca wykonywania pracy (w miejscu zamieszkania lub poza nim) i od liczby umów o pracę.

Kwota 1335 zł dotyczy jednej umowy o pracę wykonywanej w miejscu zamieszkania.

3 Dochód brutto obliczamy, odejmując od kwoty przychodu (poz. 64) kwotę uzyskania przychodów (poz. 65):

$$56\,108,77 - 1\,335,00 = 54\,773,77 \text{ [zł]}$$

D. ODLICZENIA OD DOCHODU		podatnik zł, gr
Składki na ubezpieczenia społeczne	99.	4 7448,06
Odliczenie podatnika nie może przekroczyć kwoty z poz. 66. Odliczenie małżonka nie może przekroczyć kwoty z poz. 97. w tym zagraniczne, o których mowa w art. 26 ust. 1 pkt 2a ustawy	101.	
Dochód po odliczeniu składek na ubezpieczenia społeczne	103.	5 47 325,71
Dochód podatnika – od kwoty z poz. 66 należy odjąć kwotę z poz. 99. Dochód małżonka – od kwoty z poz. 97 należy odjąć kwotę z poz. 100.		

4 Ubezpieczenie społeczne obejmuje ubezpieczenie emerytalne, rentowe, chorobowe i wypadkowe, fundusz pracy i fundusz gwarantowanych świadczeń pracowniczych. Obliczane jest jako procent od przychodu. Płaci je częściowo pracodawca, częściowo pracownik. Kwotę przepisujemy z PIT-11.

Składki na ubezpieczenie społeczne pracownika wyniosły 7448,06 zł.

5 Od dochodu (poz. 66) odejmujemy składki na ubezpieczenie społeczne (poz. 99):

$$54\,773,77 - 7\,448,06 = 47\,325,71 \text{ [zł]}$$

Kiedy wypełniamy formularz PIT, stosujemy zasadę zaokrąglania liczb. Jeśli pierwszą cyfrą po przecinku jest 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią cyfrę przed przecinkiem zostawiamy bez zmian. Natomiast jeśli pierwszą cyfrą po przecinku jest 5, 6, 7, 8, 9, ostatnią cyfrę przed przecinkiem zwiększamy o 1.

E. OBLICZENIE PODATKU		zł	gr
Podstawa obliczenia podatku (po zaokrągleniu do pełnych złotych) Jeżeli w poz. 6 zaznaczono kwadrat nr 1, należy wpisać kwotę z poz. 111; w pozostałych przypadkach należy wpisać połowę kwoty z poz. 111.	112.	6	47 326
Obliczony podatek – zgodnie z art. 27 ust. 1 ustawy Podatek od podstawy z poz. 112; jeżeli w poz. 6 zaznaczono kwadrat nr 2, 3 albo 4, tak obliczony podatek należy pomnożyć przez dwa; jeżeli wynik jest liczbą ujemną należy wpisać 0.	113.	7	7962,66
Doliczenia do podatku	114.		
Podatek Do kwoty z poz. 113 należy dodać kwotę z poz. 114.	115.		7962,66

- 6 Podstawę obliczenia podatku zaokrąglamy do pełnych złotych:

$$47\,325,71 \approx 47\,326 \text{ [zł]}$$

- 7 Ustawa o podatku dochodowym od osób fizycznych określa, jaką skalę podatkową stosujemy. Podatek obliczamy według wzoru podanego w tabeli.

PODSTAWA OBLICZENIA PODATKU ZA 2017 R.		SKALA PODATKOWA DO 30.09.2019 R.	
Progi podatkowe	Kwota		
I	do 85 528 zł	18%	Od obliczonego podatku odejmujemy kwotę zmniejszającą podatek podaną w broszurze informacyjnej.
II	ponad 85 528 zł	15 395,04 + 32% z nadwyżki ponad 85 528 zł	

Jeżeli podstawa obliczenia podatku wynosi 47 326 zł, to kwota zmniejszająca podatek równa jest 556,02 zł. Wówczas podatek obliczamy w następujący sposób:

$$\frac{18}{100} \cdot 47\,326 - 556,02 = 8518,68 - 556,02 = 7962,66 \text{ [zł]}$$

Rozliczając podatek za dany rok kalendarzowy, zawsze sprawdzamy, czy nie nastąpiły zmiany w przepisach dotyczących skali podatkowej.

F. ODLICZENIA OD PODATKU		podatnik zł gr	małżonek zł gr
Składki na ubezpieczenie zdrowotne Suma kwot z poz. 116 i 117 nie może przekroczyć kwoty z poz. 115.	116.	8	3646,10
w tym zagraniczne, o których mowa w art. 27b ust. 1 pkt 2 ustawy	118.		119.
Odliczenia od podatku – wykazane w części C załącznika PIT-0 Suma odliczanych kwot nie może przekroczyć podatku z poz. 115 pomniejszonego o sumę kwot z poz. 116 i 117.	120.	9	2224,08
Podatek po odliczeniach Od kwoty z poz. 115 należy odjąć sumę kwot z poz. 116, 117, 120 i 121.	122.	10	2092,48

- 8 Składki na ubezpieczenie zdrowotne pozwalają na korzystanie z bezpłatnej opieki zdrowotnej w publicznych placówkach medycznych. Wysokość opłaconych składek znajdziemy w formularzu PIT-11 od pracodawcy.

W 2017 r. składki na ubezpieczenie zdrowotne pracownika wyniosły 3646,10 zł.

- 9 Z formularzem PIT-37 możemy złożyć załączniki z informacjami o odliczeniach od podstawy obliczania podatku lub od podatku. Najczęściej podatnicy korzystają z ulgi mieszkaniowej (PIT-D) i ulgi na dzieci (PIT-O). Ulga na dzieci wynosi 1112,04 zł na pierwsze i drugie dziecko. Za trzecie dziecko możemy odliczyć od podatku 2000,04 zł, a na czwarte i kolejne 2700 zł.

Kwota 2224,08 zł oznacza, że podatnik skorzystał z ulgi na dwoje dzieci:

$$1112,04 \cdot 2 = 2224,08 \text{ [zł]}$$

Taką kwotę możemy odliczyć, jeśli sprawujemy opiekę nad dziećmi przez cały rok kalendarzowy. Jeśli dziecko urodziło nam się w trakcie roku kalendarzowego, za który składamy zeznanie podatkowe, to obliczamy odpowiedni ułamek tej kwoty.

Na przykład, jeśli drugie dziecko urodziło się w kwietniu, to możemy odliczyć od podatku następującą kwotę:

$$1112,04 + \frac{9}{12} \cdot 1112,04 = 1112,04 + 834,03 = 1946,07 \text{ [zł]}$$

G. OBLICZENIE ZOBOWIĄZANIA PODATKOWEGO		zł
Podatek należny (po zaokrągleniu do pełnych złotych) Od kwoty z poz. 122 należy odjąć kwotę z poz. 124.	126.	10 2092
Suma zaliczek pobranych przez płatników Suma kwot z poz. 67 i 98.	127.	4317
Różnica pomiędzy podatkiem należnym a sumą zaliczek pobranych przez płatników DO ZAPŁATY Od kwoty z poz. 126 należy odjąć kwotę z poz. 127. Jeżeli różnica jest liczbą ujemną należy wpisać 0.	128.	0
Różnica pomiędzy sumą zaliczek pobranych przez płatników a podatkiem należnym NADPŁATA Od kwoty z poz. 127 należy odjąć kwotę z poz. 126. Jeżeli różnica jest liczbą ujemną należy wpisać 0.	129.	11 2225

- 10** Wykonujemy kolejne obliczenia zgodnie z instrukcjami w formularzu PIT-37 dotyczącymi danej pozycji:

$$7962,66 - 3646,10 - 2224,08 = 2092,48 \approx 2092 \text{ [zł]}$$

- 11** Otrzymaliśmy kwotę należnego podatku, która jest niższa od zaliczek pobranych przez płatnika, czyli przez pracodawcę:

$$2092 < 4317$$

Obliczamy kwotę nadpłaty, która zostanie zwrócona przez urząd skarbowy:

$$4317 - 2092 = 2225 \text{ [zł]}$$

Podatnik otrzyma zwrot nadpłaconego podatku za 2017 r. w wysokości 2225 zł.

ZADANIA BRANŻOWE

Kierowca otrzymał od pracodawcy PIT-11 za 2018 r. Oto fragmenty z formularza:

(część tę wypełniają składający będący płatnikami)					
Źródła przychodów	Przychód ¹²⁾ zł, gr	Koszty uzyskania przychodów ¹³⁾ zł, gr	Dochód (b - c) zł, gr	Dochód zwolniony od podatku ¹²⁾ zł, gr	Zaliczka pobrana przez płatnika ¹⁴⁾
1. Należności ze stosunku: pracy, służbowego, spółdzielczego i z pracy nakładczej, wypłacone przez zakład pracy, o którym mowa w art. 31 ustawy, oraz płatników, o których mowa w art. 42e ust. 1 ustawy, z wyjątkiem należności wykazanych w wierszu 2.	29. 47 557,56	30. 1335,00	31.	32.	33.
W poz. 34 należy wykazać przychody, do których zastosowano odliczenie kosztów uzyskania przychodów na podstawie art. 22 ust. 9 pkt 3 ustawy.	34. 0,00	35. 0,00	46 222,56	0,00	3483
Składki na ubezpieczenia społeczne, o których mowa w przepisach ustawy, ¹⁵⁾ w tym zagraniczne, o których mowa w art. 26 ust. 1 pkt 2a ustawy, których podstawę stanowi przychód wymieniony w wierszach 2 i 6 części E			70.	6379 zł, 60 gr	
Składki na ubezpieczenia społeczne, o których mowa w przepisach ustawy, których podstawę wymiaru stanowi przychód zwolniony na podstawie art. 21 ust. 1 pkt 148 ustawy, wykazany w poz. 86			71.	0 zł, 00 gr	
Składki na ubezpieczenie zdrowotne, o których mowa w przepisach ustawy, podlegające odliczeniu od podatku ¹⁶⁾ , w tym zagraniczne, o których mowa w art. 27b ust. 1 pkt 2 ustawy, z wyjątkiem wykazanych w poz. 73			72.	3132 zł, 91 gr	
Składki na ubezpieczenie zdrowotne, o których mowa w przepisach ustawy, ¹⁶⁾ w tym zagraniczne, o których mowa w art. 27b ust. 1 pkt 2 ustawy, których podstawę stanowi przychód wymieniony w wierszach 2 i 6 części E			73.	0 zł, 00 gr	

Na jego podstawie wykonaj polecenia.

- a) Oblicz podatek za 2018 r., jeżeli kierowca nie miał dochodów z innych źródeł, nie korzystał z ulgi mieszkaniowej, natomiast miał jedno dziecko.
- b) Oblicz wysokość podatku za 2019 r., jeśli wynagrodzenie kierowcy nie uległo zmianie, natomiast w lipcu 2019 r. urodziło mu się drugie dziecko.

Powtórzenie rozdziału

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Fryzjerka kupiła do salonu x butelek szamponu w cenie 45 zł za sztukę i o 5 mniej odżywek w cenie 50 zł za sztukę. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące koszt zakupów, a następnie je uprość.

2 Całkowity koszt pobytu w pewnym ośrodku wypoczynkowym grupy m osób przez n dni opisuje wyrażenie algebraiczne $(1400 + 70mn)$ zł. Wskaż zdania prawdziwe.

A. Za dwudniowy pobyt dla 10 osób zapłacono 2100 zł.

B. Jednodniowy pobyt dla grupy trzydziestoosobowej kosztował 3500 zł.

C. Wyrażenie algebraiczne $(1400 + 210mn)$ zł opisuje koszt trzydniowego pobytu w tym ośrodku dla m osób.

3 Zapisz wyrażenie bez nawiasów i zredukuj wyrazy podobne.

a) $x + (-5x + 4)$

c) $(a^2 - 4) + (6 - a^2)$

e) $(a + b + c) - (a - b - c)$

b) $9 - (4y + 5)$

d) $(2x - y) - (x - 2y)$

f) $(x^2 + 2x) - (x^2 + 6x)$

4 Wykonaj działanie.

a) $3a(a - 2)$

c) $(a + 7)(2a - 4)$

e) $(a + 5)^2 - 10a$

b) $-2a(6a + 4)$

d) $-(a - 1)\left(\frac{1}{2}a - 2\right)$

f) $(a - 4)^2 - 16$

5 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Wyrażenie $(x - 2)(x + 3) + (x + 2)(x - 3)$ można zapisać w postaci

A. 0.

B. $2x^2 - 2x - 12$.

C. $2x^2 - 12$.

D. $2x^2 - 2x$.

6 Które z wyrażeń opisuje pole prostokąta o wymiarach $(x + 2) \times (x + 1)$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

B. $x^2 + 3x + 2$

C. $2x + 3$

D. $4x + 6$

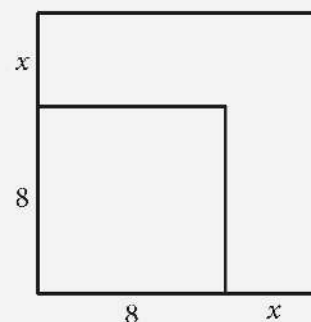
7 Dane są dwa kwadraty: jeden o boku długości 8 cm i drugi o boku długości $(8 + x)$ cm.

Wskaż zdania prawdziwe.

A. Obwód większego kwadratu jest równy $(4x + 32)$ cm.

B. Pole większego kwadratu jest równe $(x^2 + 16x + 64)$ cm².

C. Różnica pól obu kwadratów jest równa x^2 .



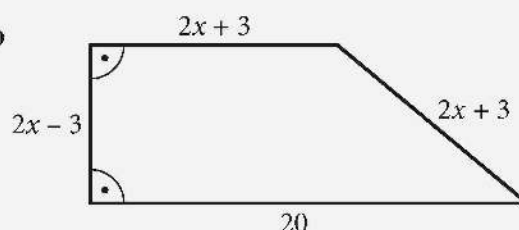
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 W sali konferencyjnej jest x rzędów po 8 krzeseł w każdym. Które z wyrażeń algebraicznych opisuje, ile krzeseł jest w tej sali? Wybierz właściwą odpowiedź.
- A. $x - 8$ B. $x + 8$ C. $8x$ D. $\frac{x}{8}$
- 2 W lipcu i sierpniu Maciek zarobił po x złotych, a we wrześniu zarobił $(\frac{1}{2}x + 1500)$ zł. Zapisz za pomocą najprostszego wyrażenia algebraicznego, ile zarobił łącznie przez 3 miesiące.

- 3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
- Wartość wyrażenia $3x^2 - 5x$ dla $x = -2$ jest równa
- A. -2 . B. 2 . C. 16 . D. 22 .

- 4 Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Suma długości ramion trapezu przedstawionego na rysunku jest równa $4x$.
- B. Obwód trapezu z rysunku jest równy $6x + 23$.
- C. Pole tego trapezu jest równe $2x^2 + 20x - 30$.

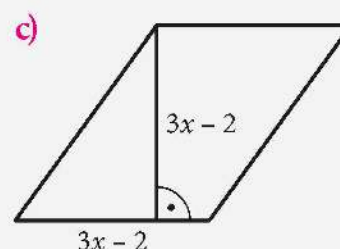
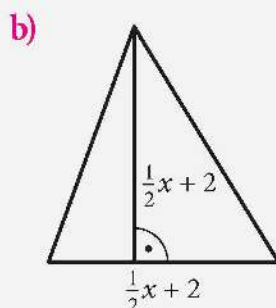
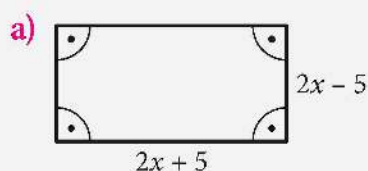


- 5 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
- Wyrażenie $(x - 5)^2$ jest równe
- A. $x^2 - 25$. B. $x^2 - 10x - 25$. C. $x^2 - 10x + 25$. D. $x^2 + 10x + 25$.

- 6 Oblicz w pamięci.

- a) $7 \cdot 235$ b) $13 \cdot 17$ c) 45^2

- 7 Projektant ogrodów zaprojektował rabaty kwiatowe w kształcie figur geometrycznych. Zapisz w postaci najprostszego wyrażenia algebraicznego pola rabat w kształcie wielokątów przedstawionych na rysunkach.



Rozdział II

Wykres funkcji kwadratowej

TEMATY LEKCJI

- | | | |
|---|--|----------|
| 1 | Wykres funkcji $f(x) = ax^2$ | s. 35–39 |
| 2 | Przesuwanie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY | s. 40–44 |
| 3 | Postać kanoniczna funkcji kwadratowej | s. 45–48 |
| 4 | Postać ogólna funkcji kwadratowej | s. 49–53 |
| 5 | Wartość największa i najmniejsza funkcji kwadratowej | s. 54–57 |
| 6 | To jest zysk! | s. 58–59 |
| Powtórzenie rozdziału | | s. 60–61 |
| ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ | | |

Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się przedmiotom na zdjęciu.
Czy wiesz, co mają ze sobą wspólnego?
Zwróć uwagę na ich kształt.



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Funkcja f określona wzorem $f(x) = ax^2$ dla $a \neq 0$ to funkcja kwadratowa. Jej wykresem jest **parabola** o wierzchołku w punkcie $(0, 0)$. Wzór funkcji możemy też zapisywać jako $y = ax^2$.

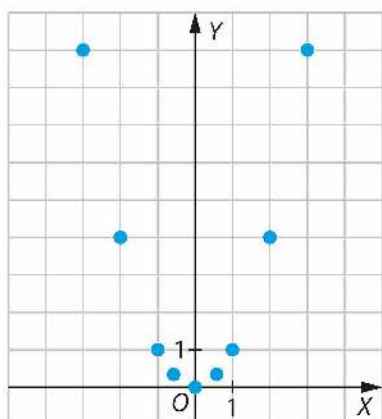
PRZYKŁAD 1

Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $y = x^2$ określonej na zbiorze liczb rzeczywistych. Odczytaj z wykresu własności funkcji.

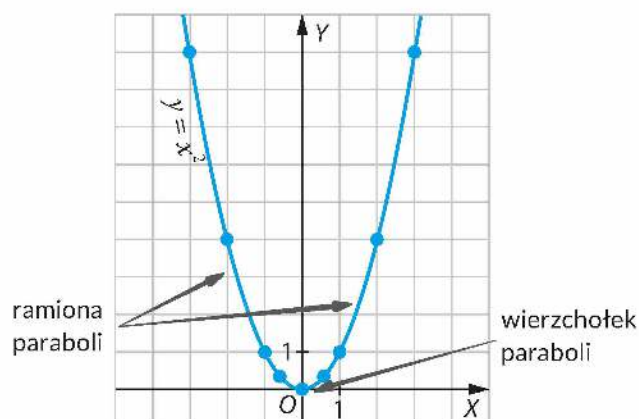
KROK 1 Sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów (wybieramy liczby przeciwne):

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

KROK 2 Zaznaczamy punkty z tabeli w układzie współrzędnych.



KROK 3 Łączymy punkty i otrzymujemy wykres funkcji $y = x^2$.



KROK 4 Odczytujemy z wykresu własności funkcji:

- ramiona paraboli są skierowane do góry,
- punkt $(0, 0)$ jest wierzchołkiem paraboli,
- dziedziną jest zbiór R ,
- zbiorem wartości funkcji $y = x^2$ jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$, czyli funkcja przyjmuje wartości nieujemne,
- funkcja $y = x^2$ przyjmuje dla $x = 0$ wartość najmniejszą równą 0,
- funkcja $y = x^2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i rosnąca w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$,
- oś OY jest osią symetrii paraboli.

ĆWICZENIE 1

Naszkicuj wykres funkcji. Odczytaj z niego własności funkcji.

a) $y = 3x^2$

b) $y = \frac{1}{4}x^2$

PRZYKŁAD 2

Naszkicuj wykres funkcji $y = -x^2$.
Odczytaj z wykresu własności tej funkcji.

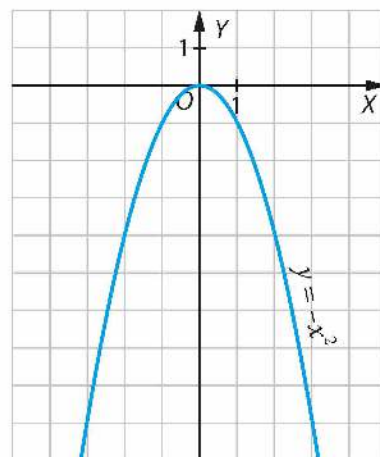
ROZWIĄZANIE

Własności funkcji:

- ramiona paraboli są skierowane w dół,
- punkt $(0, 0)$ jest wierzchołkiem paraboli,
- dziedziną jest zbiór R ,
- zbiorem wartości funkcji $y = -x^2$ jest przedział $(-\infty; 0]$, czyli funkcja przyjmuje wartości niedodatnie,
- funkcja $y = -x^2$ przyjmuje dla $x = 0$ wartość największą równą 0,
- funkcja $y = -x^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i malejąca w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$,
- oś OY jest osią symetrii paraboli.

PODPOWIEDŹ

Wykres funkcji $y = -x^2$ możemy też otrzymać, przekształcając wykres funkcji $y = x^2$ w symetrii względem osi OX .



ĆWICZENIE 2

Naszkicuj wykres funkcji. Odczytaj z niego własności funkcji.

a) $y = -3x^2$

b) $y = -\frac{1}{4}x^2$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wartość współczynnika a we wzorze funkcji $f(x) = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, wpływa na:

- skierowanie ramion paraboli

Jeżeli $a > 0$, to ramiona paraboli zwrócone są do góry.

Jeżeli $a < 0$, to ramiona skierowane są w dół.

- rozchylenie ramion paraboli

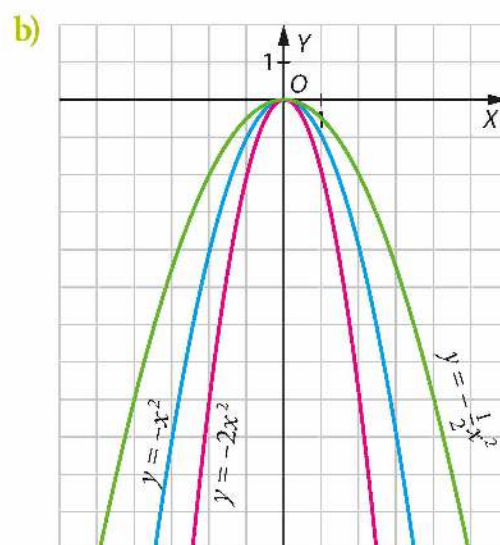
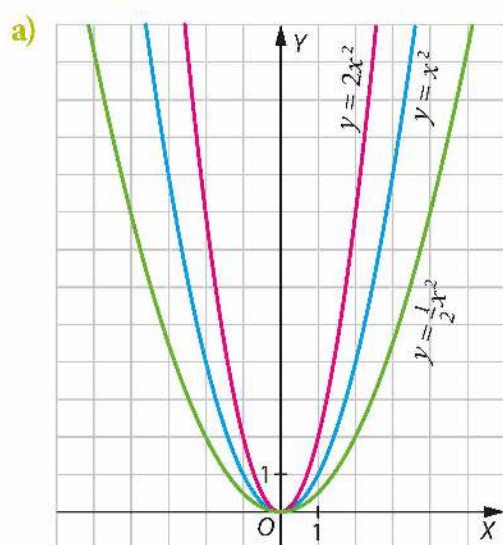
Ramiona paraboli zbiegają się wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej współczynnika a .

PRZYKŁAD 3

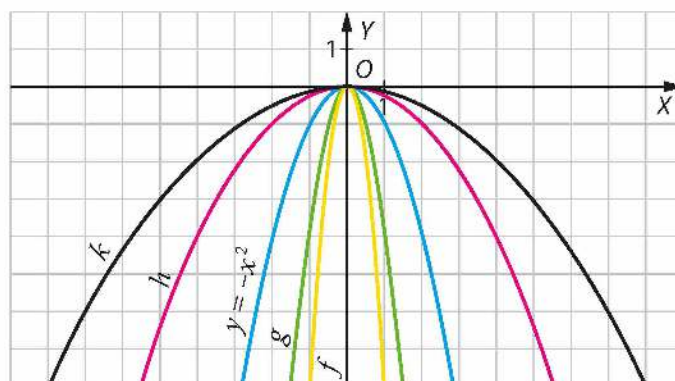
Naszkicuj wykresy funkcji w jednym układzie współrzędnych.

a) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$, $y = -2x^2$

ROZWIĄZANIE**ĆWICZENIE 3**

Dane są wzory funkcji: $y = -8x^2$,
 $y = -4x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2$, $y = -\frac{1}{8}x^2$.
 Przyporządkuj wzory funkcji
 do odpowiednich paraboli.



TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że pole dowolnego kwadratu jest równe połowie kwadratu długości jego przekątnej.

KROK 1 Zapisujemy wzór na pole kwadratu:

$$P = a^2$$

KROK 2 Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC:

$$a^2 + a^2 = d^2$$

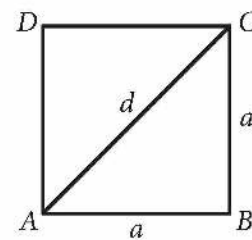
$$2a^2 = d^2 \quad | :2$$

$$a^2 = \frac{1}{2}d^2$$

KROK 3 Podstawiamy a^2 do wzoru na pole:

$$P = a^2 = \frac{1}{2}d^2$$

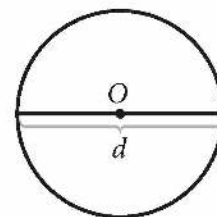
Pole kwadratu jest równe połowie kwadratu długości jego przekątnej.

**PODPowiedź**

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!

Udowodnij, że pole dowolnego koła równe jest $P = \frac{1}{4}\pi d^2$, gdzie d to średnica koła.

**PRZYKŁAD 4**

Sprawdź, czy podany punkt P należy do paraboli $y = 5x^2$.

a) $P(-2, 20)$ b) $P(5, 75)$

KROK 1 Podstawiamy pierwszą współrzędną $x = -2$ do wzoru funkcji:

$$y = 5 \cdot (-2)^2$$

KROK 2 Obliczamy wartość liczbową wyrażenia:

$$y = 5 \cdot (-2)^2 = 5 \cdot 4 = 20$$

KROK 3 Porównujemy wynik z drugą współrzędną punktu P .

Punkt P należy do tej paraboli, ponieważ $20 = 20$.

b) ROZWIĄZANIE

$$y = 5 \cdot 5^2 = 5 \cdot 25 = 125$$

Punkt P nie należy do tej paraboli, ponieważ $125 \neq 75$.

ĆWICZENIE 4

Sprawdź, czy punkt P należy do paraboli $y = 2x^2$.

- a) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ b) $P(4, 16)$ c) $P\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ d) $P(-3, 18)$

To się liczy!

W życiu codziennym często spotykamy przedmioty w kształcie koła, np. talerze, lustra, blaty stołów. Do obliczania ich powierzchni stosuje się wzór w postaci $P = \pi r^2$, gdzie r to długość promienia. Wymiary okrągłych przedmiotów, np. rurek, podaje się za pomocą średnicy. Zaznaczamy ją symbolem $\varnothing$ [czyt.: fi]. Poniższe zadanie pokaże Wam, jak zastosować średnicę w obliczeniach.



Czy wiesz, że najważniejsze wymiary rurki to średnica zewnętrzna (w mm lub w calach) oraz grubość jej ścianki (w mm)?

ZADANIE BRANŻOWE

Oblicz pole przekroju rurki stalowej o wymiarach:

- a) $\varnothing = 28$ mm i grubości ścianki 1 mm, b) $\varnothing = 54$ mm i grubości ścianki 2 mm.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 203

1. Oblicz współrzędną y punktu $P(x, y)$ należącego do wykresu funkcji $y = 4x^2$, jeśli dana jest jego współrzędna x .

- a) $x = -2$ b) $x = 3$ c) $x = \frac{1}{2}$

2. Podaj wartość współczynnika a , dla którego punkt P należy do wykresu funkcji $y = ax^2$.

- a) $P(1, 2)$ b) $P(1, -4)$ c) $P(-2, 8)$

ZADANIA BRANŻOWE

3. Hurtownia wysłała towar zapakowany w jednakowe, kartonowe pudła w kształcie sześcianu – każdy o krawędzi długości 0,4 m. Oblicz, ile metrów kwadratowych kartonu potrzebnych jest do wykonania 200 takich pudeł, jeżeli na wieko i dno pudła zużywa się dwa razy więcej kartonu niż na jeden bok pudła.

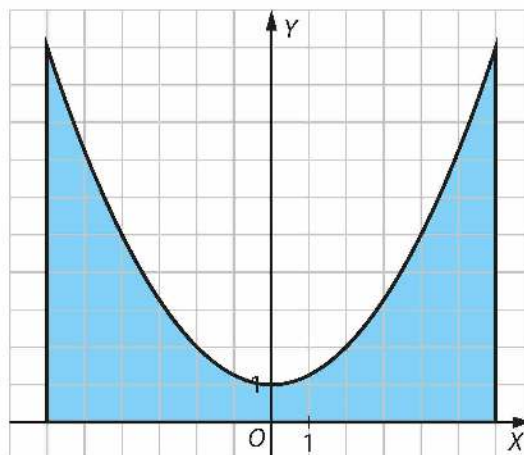
PODPOWIEDŹ

Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a wynosi $P_c = 6a^2$.

Przesuwanie wykresu funkcji $f(x)=ax^2$ wzdłuż osi OX i OY

NA POCZĄTEK

Projektant mody, aby sporządzić wykroj rękawa, może wykorzystać wykres przedstawiony na rysunku. Widać na nim parabolę $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Czy wiesz, w jaki sposób ją narysować?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wykres funkcji $y = ax^2 + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o:

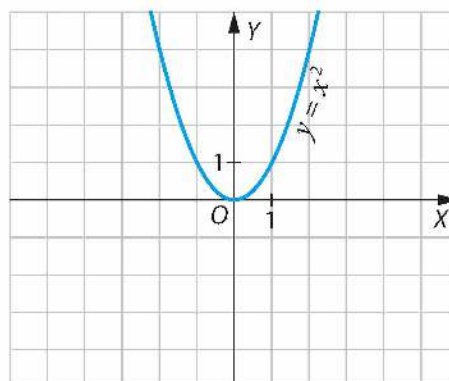
- q jednostek w górę, gdy $q > 0$
- q jednostek w dół, gdy $q < 0$

PRZYKŁAD 1

Naszkić wykres funkcji.

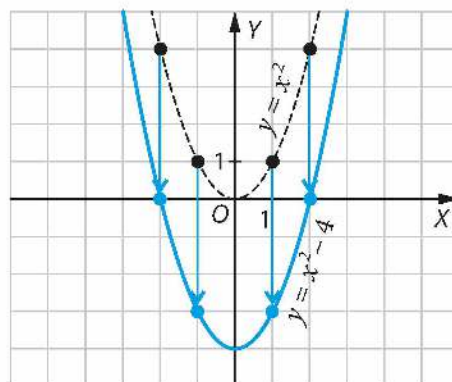
a) $y = x^2 - 4$ b) $y = x^2 + 2$

a) **KROK 1** Szkiujemy wykres funkcji $y = x^2$.



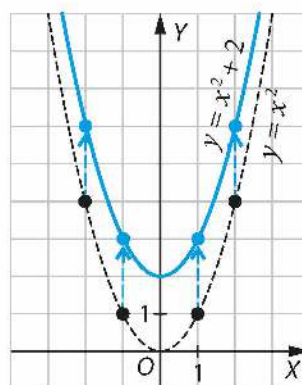
KROK 2 Odczytujemy ze wzoru funkcji, o ile jednostek przesuniemy parabolę $y = x^2$ i w którą stronę.

KROK 3 Przesuwamy wybrane punkty paraboli o 4 jednostki w dół i je łączymy.



b) ROZWIĄZANIE

Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2$ i przesuwamy go o dwie jednostki w górę.



ĆWICZENIE 1

Naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = 2x^2 - 5$ b) $y = -x^2 + 3$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wykres funkcji $y = a(x - p)^2$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o:

- p jednostek w prawo, gdy $p > 0$
- p jednostek w lewo, gdy $p < 0$

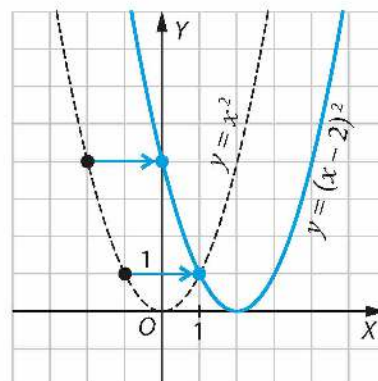
PRZYKŁAD 2

Naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = (x - 2)^2$ b) $y = -2(x + 3)^2$

ROZWIĄZANIE

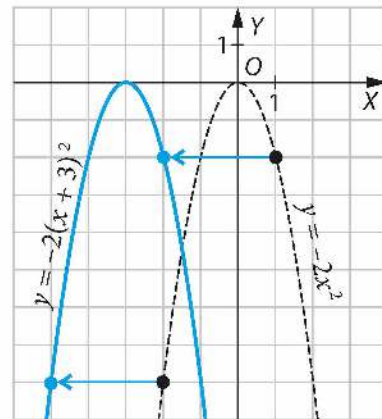
a) Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2$ i przesuwamy go o 2 jednostki w prawo, ponieważ $p = 2$ ($p > 0$).



- b) Przesuwamy wykres funkcji $y = -2x^2$ o 3 jednostki w lewo, ponieważ:

$$y = -2(x + 3)^2 = -2(x - (-3))^2$$

$$p = -3 (p < 0)$$



ĆWICZENIE 2

Naszkicuj wykres funkcji.

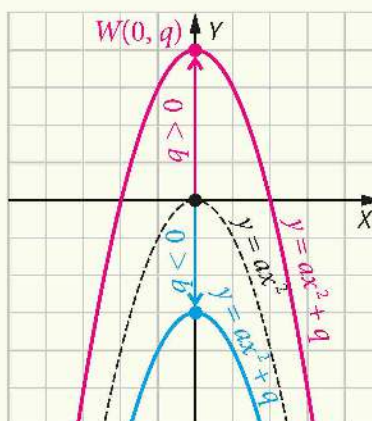
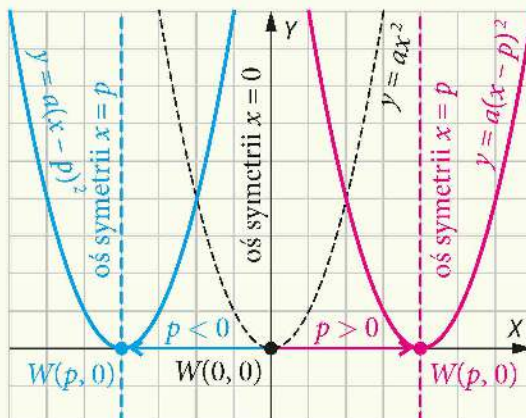
a) $y = -(x - 1)^2$

b) $y = 3(x + 2)^2$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$:

- wzdłuż osi **OX** zmienia:
 - współrzedną x wierzchołka paraboli,
 - przedziały monotoniczności funkcji, czyli przedziały, w których funkcja jest rosnąca lub malejąca,
 - oś symetrii paraboli.
- wzdłuż osi **OY** zmienia:
 - współrzedną y wierzchołka paraboli,
 - zbiór wartości funkcji.



PRZYKŁAD 3

Podaj współrzędne wierzchołka paraboli danej wzorem.

a) $y = 2x^2 - 1$ b) $y = (x - 4)^2$

a) **KROK 1** Zauważamy, że wykres funkcji $y = 2x^2 - 1$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu $y = 2x^2$ o 1 jednostkę w dół.

KROK 2 Stwierdzamy, że skoro wierzchołkiem paraboli $y = 2x^2$ jest punkt $(0, 0)$, to wierzchołkiem paraboli $y = 2x^2 - 1$ jest punkt $(0, -1)$.

b) ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji $y = (x - 4)^2$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = x^2$ o 4 jednostki w prawo, więc wierzchołek paraboli ma współrzędne $(4, 0)$.

ĆWICZENIE 3

Podaj współrzędne wierzchołka paraboli danej wzorem.

a) $y = (x + 1)^2$ b) $y = -x^2 + 3$ c) $y = 2(x - 1)^2$ d) $y = -2x^2 - 3$

PRZYKŁAD 4

Podaj zbiór wartości i równanie prostej będącej osią symetrii paraboli o podanym wzorze.

a) $y = x^2 + 5$ b) $y = -5(x - 3)^2$

a) **KROK 1** Zauważamy, że wykres funkcji $y = x^2 + 5$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu $y = x^2$ o 5 jednostek w górę.

KROK 2 Stwierdzamy, że skoro zbiorem wartości funkcji $y = x^2$ jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$, to zbiorem wartości funkcji $y = x^2 + 5$ jest przedział $\langle 5; \infty \rangle$.

KROK 3 Zauważamy, że przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY nie zmienia osi symetrii, zatem osią symetrii funkcji $y = x^2 + 5$ jest prosta $x = 0$.

Zbiór wartości: $\langle 5; \infty \rangle$, oś symetrii: $x = 0$.

b) ROZWIĄZANIE

Zbiór wartości: $(-\infty; 0]$, oś symetrii: $x = 3$.

ĆWICZENIE 4

Podaj zbiór wartości i równanie prostej będącej osią symetrii paraboli o podanym wzorze.

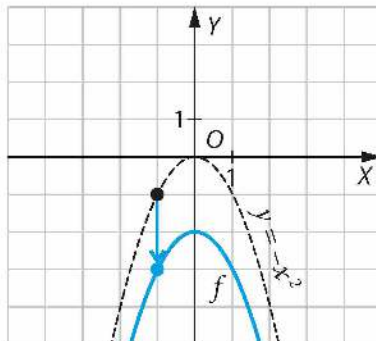
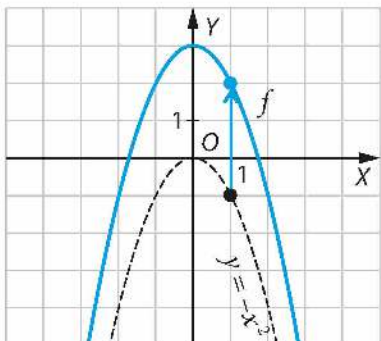
a) $y = (x + 2)^2$ b) $y = -x^2 - 2$ c) $y = -(x - 2)^2$

ZADANIA

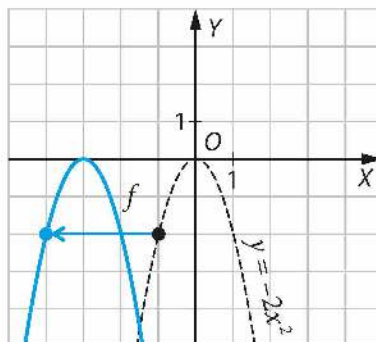
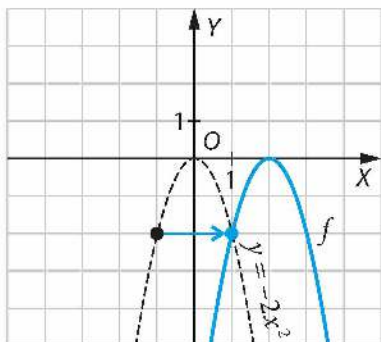
Zbiór zadań, s. 203

1. Podaj wzór funkcji, której wykresem jest niebieska parabola otrzymana przez przesunięcie paraboli:

a) $y = -x^2$ o pewną liczbę jednostek w górę lub w dół,



b) $y = -2x^2$ o pewną liczbę jednostek w prawo lub w lewo.



2. Naskicuj w zeszycie w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji. Podaj współrzędne wierzchołka, równanie prostej będącej osią symetrii oraz zbiór wartości każdej z narysowanych parabol.

a) $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 2$

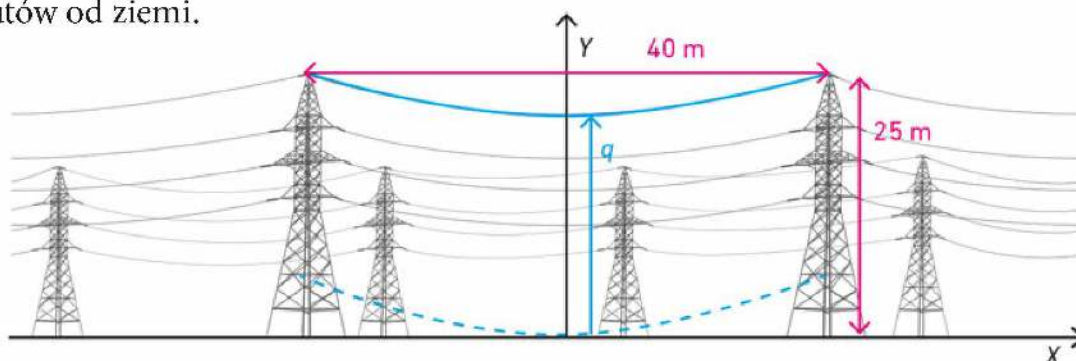
c) $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x + 3)^2$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$

d) $y = -x^2$, $y = -(x - 3)^2$, $y = -(x + 1)^2$

ZADANIA BRANŻOWE

3. Pracownicy elektrowni rozciągali druty między słupami elektrycznymi. Druty utworzyły fragment paraboli o równaniu $y = \frac{1}{100}x^2 + q$. Oblicz q , czyli odległość drutów od ziemi.



Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

NA POCZĄTEK

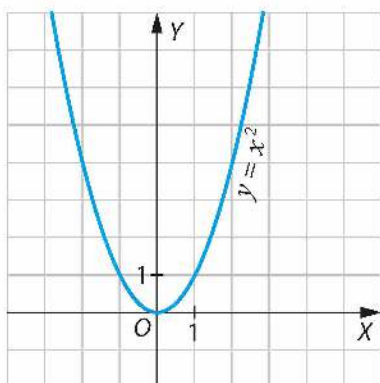
Kształt Gateway Arch [czyt.: gejtlej arcz] – budowli znajdującej się w Saint Louis [czyt.: sejnt luis] w Stanach Zjednoczonych – przypomina parabolę. W jaki sposób ustalisz wysokość budowli?



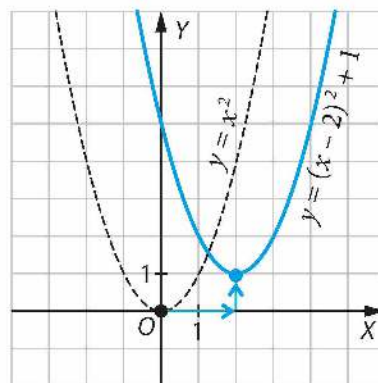
PRZYKŁAD 1

Naszkiej wykreś funkcji $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę.

KROK 1 Szkicujemy wykreś funkcji $y = x^2$.



KROK 2 Przesuwamy parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę.



ĆWICZENIE 1

Naszkiej wykreś funkcji:

- $f(x) = (x - 1)^2 - 3$, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 1 jednostkę w prawo i 3 jednostki w dół,
- $f(x) = (x + 1)^2 + 2$, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 1 jednostkę w lewo i 2 jednostki w górę.

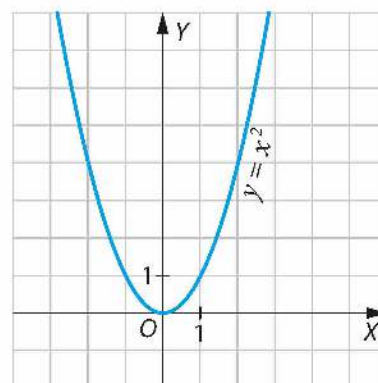
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Funkcja określona wzorem $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, to **postać kanoniczna** funkcji kwadratowej. Jej wykres otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o p jednostek wzdłuż osi OX i jednocześnie o q jednostek wzdłuż osi OY . Wierzchołek otrzymanej paraboli ma współrzędne (p, q) .

PRZYKŁAD 2

Naszkicuj wykres funkcji $y = (x + 1)^2 - 4$ i odczytaj jej własności.

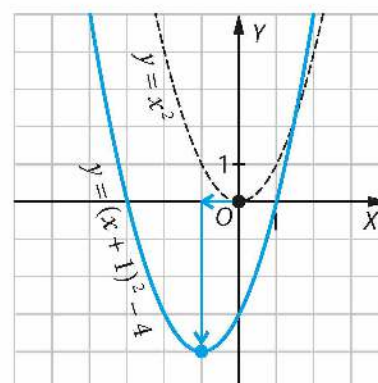
KROK 1 Szkicujemy parabolę $y = x^2$.



KROK 2 Odczytujemy ze wzoru funkcji współrzędne wierzchołka paraboli:

$$p = -1, q = -4$$

KROK 3 Przesuwamy parabolę $y = x^2$ o 1 jednostkę w lewo i 4 jednostki w dół.



KROK 4 Odczytujemy z wykresu własności funkcji $y = (x + 1)^2 - 4$:

- wykresem funkcji jest parabola o ramionach skierowanych do góry i wierzchołku w punkcie $(-1, -4)$,
- dziedziną funkcji jest zbiór R ,
- zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -4; \infty \rangle$,
- dla $x = -1$ funkcja osiąga najmniejszą wartość równą -4 ,
- funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$ i rosnąca w przedziale $(-1; \infty)$,
- osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x = -1$.

ĆWICZENIE 2

Naszkicuj wykres funkcji i odczytaj jej własności.

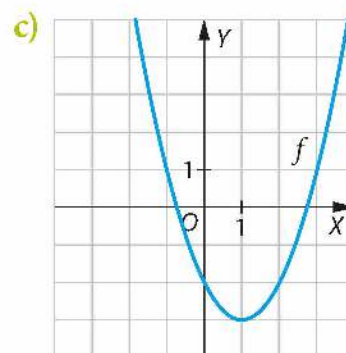
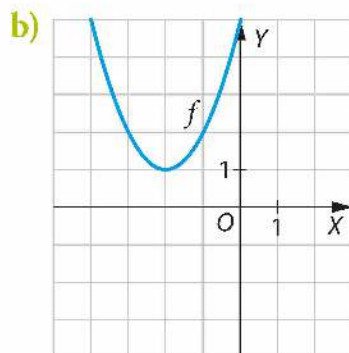
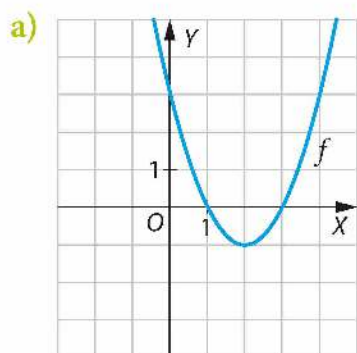
a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$

b) $f(x) = (x + 2)^2 + 1$

c) $f(x) = (x - 1)^2 + 3$

PRZYKŁAD 3

Podaj wzór funkcji, której wykresem jest parabola otrzymana po przesunięciu paraboli $y = x^2$.



a) **KROK 1** Odczytujemy współrzędne wierzchołka paraboli: $(2, -1)$.

KROK 2 Podstawiamy $p = 2$ oraz $q = -1$ do wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej:

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

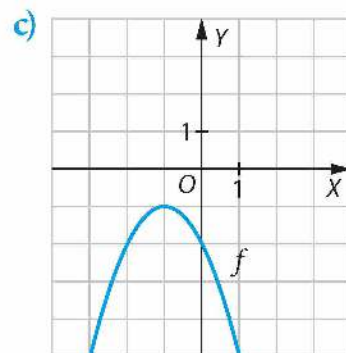
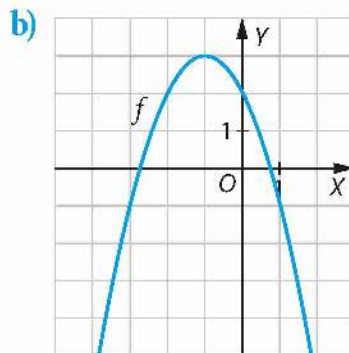
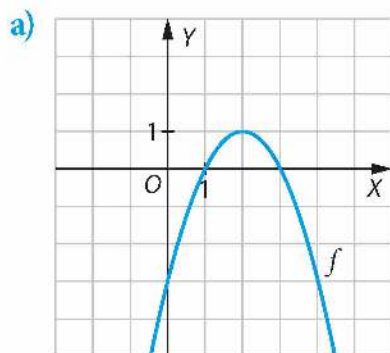
ROZWIĄZANIE

b) $y = (x + 2)^2 + 1$

c) $y = (x - 1)^2 - 3$

ĆWICZENIE 3

Podaj wzór funkcji, której wykresem jest parabola otrzymana po przesunięciu paraboli $y = -x^2$.



ZADANIA

Zbiór zadań, s. 204

1. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji, dokonując odpowiedniego przesunięcia paraboli $y = x^2$ lub paraboli $y = -x^2$. Podaj własności funkcji.

a) $f(x) = (x + 2)^2 - 3$ b) $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ c) $f(x) = -(x - 3)^2 - 1$

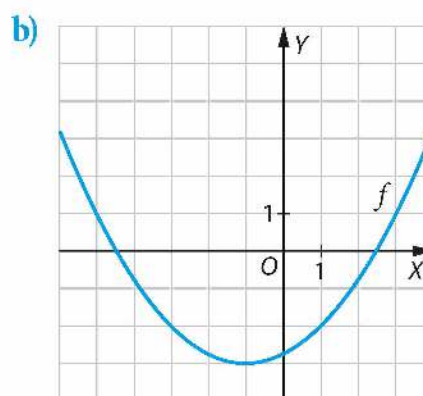
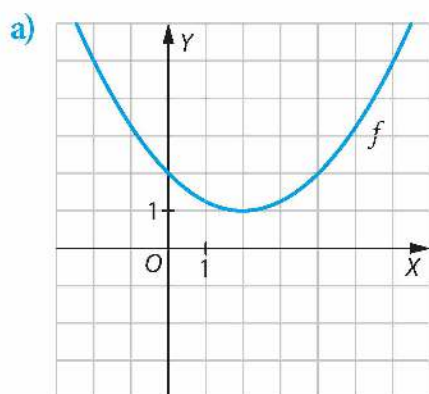
2. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji. Ustal, jak skierowane są ramiona tej paraboli.

a) $f(x) = (x + 2)^2 + 5$ c) $f(x) = 3(x - 8)^2 + 3$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 4$

b) $f(x) = -(x - 6)^2 - 3$ d) $f(x) = -3(x + 4)^2 + 6$ f) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 9$

3. Naszkicuj w zeszycie parabolę otrzymaną przez przesunięcie paraboli $y = x^2$, której osią symetrii jest prosta $x = -3$, a zbiorem wartości przedział $\langle -6; \infty \rangle$. Podaj wzór funkcji, której wykresem jest ta parabola.

4. Podaj wzór funkcji przedstawionej na rysunku, której wykres otrzymano przez przesunięcie paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$.



ZADANIA BRANŻOWE

5. Główny element mostu The Tyne Bridge [czyt.: de tajn bridż] w Anglii ma kształt paraboli. Rozpiętość łuku wynosi 162 m, a jego wysokość to 55 m. Oblicz, jaką długość ma najdłuższa lina stalowa podtrzymująca ten most, jeżeli powierzchnia ulicy znajduje się 26 m nad wodą.



Postać ogólna funkcji kwadratowej

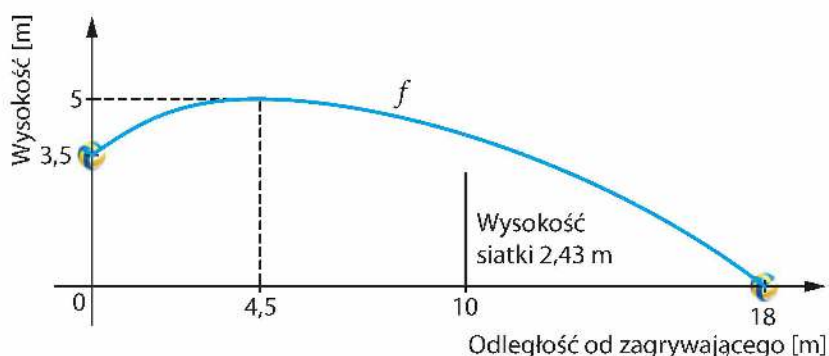
NA POCZĄTEK

Na rysunku pokazano tor ruchu piłki siatkowej po zagrywce. Darek uważa, że lot piłki można opisać wzorem

$$y = -5(x - 4,5)^2 + 5,$$

a Ania, że wzorem

$$y = -5x^2 + 45x - 96,25. \text{ Które z nich ma rację? Dlaczego?}$$



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Funkcja określona wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, to **postać ogólna** funkcji kwadratowej. Liczby a , b , c nazywamy **współczynnikami funkcji kwadratowej**.

PRZYKŁAD 1

Podaj współczynniki funkcji kwadratowej.

a) $y = 3x^2 - 5x - 6$

b) $y = -x^2 - 5$

a) **KROK 1** Szukamy współczynników liczbowych we wzorze funkcji:

$$y = 3x^2 - 5x - 6$$

KROK 2 Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej:

$$a = 3, b = -5, c = -6$$

b) **ROZWIĄZANIE**

$$a = -1, b = 0, c = -5.$$

PODPOWIEDŹ

Współczynniki b i c funkcji kwadratowej mogą wynosić 0.

ĆWICZENIE 1

Podaj współczynniki funkcji kwadratowej.

a) $y = 6x^2 + x + 6$

c) $y = -2x^2 + 8$

e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 12x$

b) $y = -x^2 + 4x - 8$

d) $y = 9x^2 - 14$

f) $y = -0,9x^2 + 1,25x$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Liczbę Δ [czyt.: delta] nazywamy **wyróżnikiem funkcji kwadratowej**.

Deltę obliczamy w następujący sposób:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

gdzie a, b, c to współczynniki funkcji kwadratowej.

PRZYKŁAD 2

Oblicz wyróżnik funkcji kwadratowej $y = -x^2 + 6x - 5$.

KROK 1 Odczytujemy współczynniki funkcji kwadratowej:

$$a = -1, b = 6, c = -5$$

KROK 2 Obliczamy wyróżnik, podstawiając współczynniki do wzoru:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 36 - 20 = 16$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz wyróżnik funkcji kwadratowej.

a) $y = x^2 + 2x - 4$

c) $y = 2x^2 - 4x + 1$

e) $y = -3x^2 + 6$

b) $y = -x^2 + 5x - 6$

d) $y = -2x^2 + 4x - 4$

f) $y = -5x^2 - 5x$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wykresem funkcji określonej wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q) o współrzędnych:

$$p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}$$

PRZYKŁAD 3

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji $y = 2x^2 - 8x + 1$.

SPOSÓB I

KROK 1 Wypisujemy ze wzoru współczynniki funkcji kwadratowej:

$$a = 2, b = -8, c = 1$$

KROK 2 Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 64 - 8 = 56$$

KROK 3 Podstawiamy współczynniki funkcji i wyróżnik do wzorów:

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2 \qquad q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{56}{4 \cdot 2} = -\frac{56}{8} = -7$$

SPOSÓB II

KROK 1 Wypisujemy ze wzoru dwa współczynniki funkcji kwadratowej:

$$a = 2, b = -8$$

KROK 2 Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

KROK 3 Obliczamy wartość funkcji $y = 2x^2 - 8x + 1$ dla $x = 2$:

$$q = f(p) = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 1 = 8 - 16 + 1 = -7$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(2, -7)$.

ĆWICZENIE 3

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

a) $y = 4x^2 + 4x + 2$

b) $y = -x^2 + 4x + 3$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

To się liczy!

Na co dzień często nawet nie zdajemy sobie sprawy z tego, że istnieją zjawiska, które możemy przedstawić za pomocą funkcji kwadratowej, np. skurczowe ciśnienie krwi. Średnie skurczowe ciśnienie krwi (mierzone w mm Hg) zdrowej kobiety między 21 a 65 rokiem życia możemy przybliżyć funkcją kwadratową o równaniu $P(x) = 0,01x^2 + 0,05x + 107$, gdzie x to wiek kobiety. Podobnie średnie skurczowe ciśnienie krwi zdrowego mężczyzny w przedziale wiekowym 21–65 lat możemy przybliżyć funkcją kwadratową o równaniu $P(x) = 0,006x^2 - 0,02x + 120$, gdzie x to wiek mężczyzny.



ZADANIE BRANŻOWE

Oblicz, ile wynosi średnie skurczowe ciśnienie krwi zdrowej 25-latki i 40-latki oraz zdrowego 30-latka i 50-latka.

PRZYKŁAD 4

Przedstaw wzór funkcji $y = -x^2 + 6x - 5$ w postaci kanonicznej.
Naszkicuj wykres tej funkcji.

KROK 1 Wypisujemy ze wzoru współczynniki:

$$a = -1, b = 6, c = -5$$

KROK 2 Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16$$

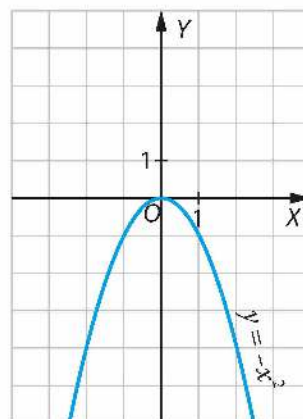
KROK 3 Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3 \quad q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{-4} = 4$$

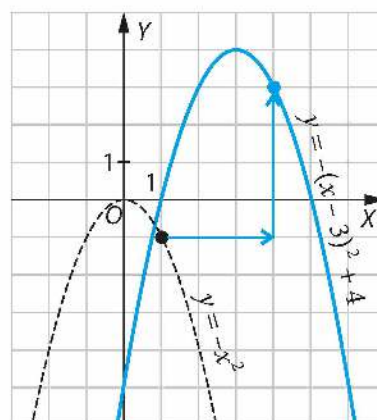
KROK 4 Podstawiamy $a = -1$, $p = 3$, $q = 4$ do wzoru na postać kanoniczną:

$$y = -(x - 3)^2 + 4$$

KROK 5 Szkicujemy parabolę $y = -x^2$ o ramionach skierowanych w dół ($a = -1$, czyli $a < 0$).



KROK 6 Przesuwamy parabolę $y = x^2$ o 3 jednostki w prawo ($p > 0$) i 4 w górę ($q > 0$).

**ĆWICZENIE 4**

Zamień wzór funkcji z postaci ogólnej na postać kanoniczną. Naszkicuj w zeszyte wykres tej funkcji. Podaj równanie osi symetrii.

a) $y = x^2 + 4x + 3$

b) $y = -x^2 + 6x - 2$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

PRZYKŁAD 5

Przekształć wzór funkcji kwadratowej $y = 2(x - 3)^2 - 5$ do postaci ogólnej.

KROK 1 Wykonujemy potęgowanie, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia:

$$y = 2(x - 3)^2 - 5 = 2(x^2 - 6x + 9) - 5$$

KROK 2 Upraszczamy otrzymane wyrażenie:

$$y = 2(x - 3)^2 - 5 = 2(x^2 - 6x + 9) - 5 = 2x^2 - 12x + 18 - 5 = 2x^2 - 12x + 13$$

Funkcja w postaci ogólnej ma wzór $y = 2x^2 - 12x + 13$.

PODPÓWIEDŹ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ĆWICZENIE 5

Podaj wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

a) $y = (x + 4)^2 - 2$

b) $y = -3(x - 1)^2 + 4$

c) $y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 - 1$

ZADANIA

 Zbiór zadań, s. 205

1. Podaj wzór funkcji kwadratowej o poniższych współczynnikach.

a) $a = -2, b = 3, c = -4$

b) $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 2$

c) $a = -\frac{2}{3}, b = -5, c = 0$

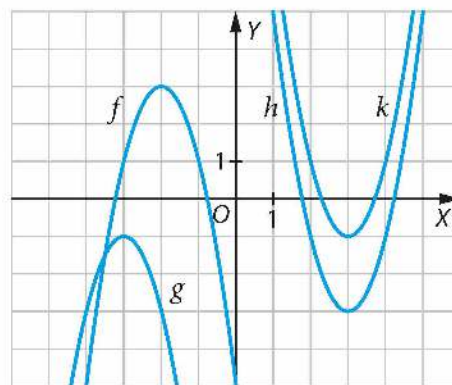
2. Oblicz wyróżnik funkcji kwadratowej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli.

a) $y = 2x^2 + 4x - 5$

b) $y = -3x^2 + 6x - 2$

c) $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

3. Przedstaw wzory funkcji $y = 2x^2 - 12x + 17$ oraz $y = -2x^2 - 8x - 5$ w postaci kanonicznej. Następnie wskaż, które wykresy z rysunku odpowiadają poszczególnym funkcjom.

**ZADANIA BRANŻOWE**

4. Hydraulik otrzymał zlecenie naprawienia odpływu wanny. Po dotarciu do klienta okazało się, że odpływ się zatkał i wanna jest pełna wody. Hydraulik ustalił, że liczbę litrów wody pozostających w wannie po wyjęciu korka opisuje funkcja $f(t) = -5t^2 - 8t + 120$, gdzie t oznacza czas w minutach. Odpowiedz na pytania.

a) Ile litrów wody napełniono do wanny?

b) Ile litrów wody zostanie w wannie po 2 minutach od wyjęcia korka, a ile po 4 minutach?

c) W której minucie hydraulik będzie mógł rozpocząć naprawę?

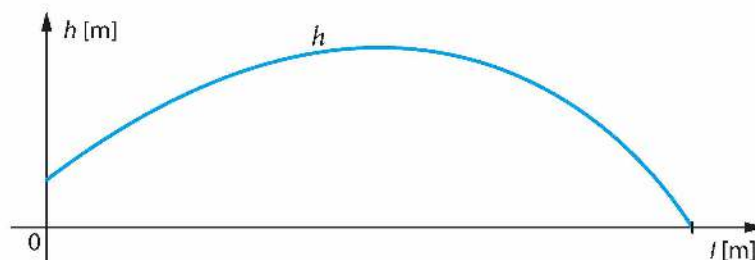
Wartość największa i najmniejsza funkcji kwadratowej

NA POCZĄTEK

Na rysunku przedstawiono tor lotu kuli pchniętej przez zawodniczkę podczas zawodów.

Jest on fragmentem paraboli $h = -\frac{1}{20}l^2 + l + \frac{3}{2}$. Czy potrafisz

podać maksymalną wysokość, na którą wzniosła się kula nad powierzchnię ziemi?



h – wysokość, l – odległość

PRZYKŁAD 1

Oblicz wartość funkcji $y = -2x^2 - 4x + 5$ dla $x = -3$ oraz dla $x = 2$.

Porównaj otrzymane wartości.

KROK 1 Podstawiamy $x = -3$ do wzoru funkcji kwadratowej:

$$y = -2 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 5 = -2 \cdot 9 + 12 + 5 = -18 + 17 = -1$$

KROK 2 Obliczamy wartość funkcji dla $x = 2$:

$$y = -2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = -8 - 8 + 5 = -11$$

KROK 3 Porównujemy otrzymane wartości: $-1 > -11$.

Funkcja przyjmuje większą wartość dla $x = -3$.

ĆWICZENIE 1

Porównaj wartości funkcji dla $x = -1$ i $x = -4$.

a) $y = x^2 - 4x - 3$

b) $y = -2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

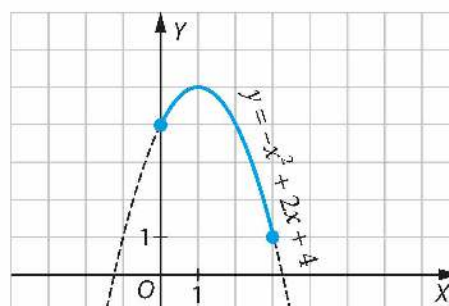
c) $y = 3x^2 + 5x - 2$

PRZYKŁAD 2

Odczytaj z wykresu najmniejszą i największą wartość funkcji $y = -x^2 + 2x + 4$ w przedziale $\langle 0; 3 \rangle$.

ROZWIĄZANIE

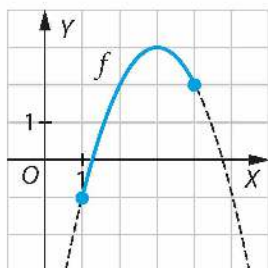
Największa wartość funkcji w podanym przedziale wynosi 5, a wartość najmniejsza wynosi 1.



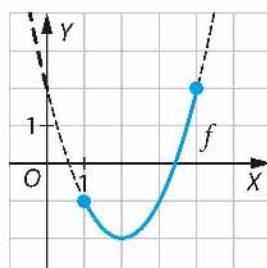
ĆWICZENIE 2

Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i wartość największą podanej funkcji w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$.

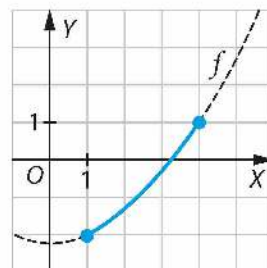
a) $y = -x^2 + 6x - 6$



b) $y = x^2 - 4x + 2$



c) $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{11}{5}$

**WAŻNA WIADOMOŚĆ**

Najmniejszej i największej wartości funkcji kwadratowej, określonej na przedziale domkniętym, szukamy:

- na końcach przedziału,
- w wierzchołku (p, q) – z wyjątkiem sytuacji, gdy współrzędna p wierzchołka nie należy do rozpatrywanego przedziału.

PRZYKŁAD 3

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 2$ określonej na przedziale $\langle 1; 4 \rangle$.

KROK 1 Wyznaczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3 \quad p \in \langle 1; 4 \rangle$$

KROK 2 Obliczamy drugą współrzędną wierzchołka ze wzoru funkcji:

$$q = f(p) = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 2 = 9 - 18 + 2 = -7$$

KROK 3 Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału:

$$f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = 1 - 6 + 2 = -3$$

$$f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 2 = 16 - 24 + 2 = -6$$

KROK 4 Wybieramy odpowiednie wartości funkcji spośród liczb $-7, -6, -3$.

Najmniejsza wartość funkcji w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$ wynosi -7 , a wartość największa jest równa -3 .

ĆWICZENIE 3

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale.

a) $y = x^2 - 4x + 5$ dla $x \in \langle -2; 3 \rangle$

b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ dla $x \in \langle -1; 2 \rangle$

PRZYKŁAD 4

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $y = -x^2 + 3x - 5$ określonej na przedziale $\langle 2; 5 \rangle$.

ROZWIĄZANIE

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot (-1)} = \frac{3}{2} \quad p \notin \langle 2; 5 \rangle$$

$$f(2) = -2^2 + 3 \cdot 2 - 5 = -4 + 6 - 5 = -3$$

$$f(5) = -5^2 + 3 \cdot 5 - 5 = -25 + 15 - 5 = -15$$

Najmniejsza wartość funkcji w przedziale $\langle 2; 5 \rangle$ wynosi -15 , a największa wartość wynosi -3 .

ĆWICZENIE 4

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale.

a) $y = 2x^2 - 3x - 1$ dla $x \in \langle 2; 4 \rangle$

b) $y = -x^2 + 4x + 5$ dla $x \in \langle -2; 0 \rangle$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeżeli parabola ma ramiona skierowane w górę ($a > 0$), funkcja będzie osiągała **minimum** (wartość najmniejszą) w wierzchołku paraboli. Kiedy ramiona paraboli są skierowane w dół ($a < 0$), funkcja osiąga **maksimum** (wartość największą) w wierzchołku.

PRZYKŁAD 5

Wyznacz największą wartość iloczynu dwóch dodatnich liczb, których suma równa się 10.

KROK 1 Oznaczamy szukane liczby przez x i $10 - x$, a ich iloczyn przez y .

KROK 2 Zapisujemy iloczyn tych liczb w postaci funkcji kwadratowej:

$$y = x(10 - x)$$

$$y = -x^2 + 10x$$

KROK 3 Ustalamy przedział, w którym funkcja jest określona:
 obie liczby są dodatnie i mniejsze od 10, więc $x \in (0; 10)$.

KROK 4 Ustalamy, gdzie funkcja przyjmie największą wartość:
 $a = -1$, czyli $a < 0$, więc parabola ma ramiona skierowane w dół. Funkcja jest określona na przedziale otwartym $(0; 10)$, zatem przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli.

KROK 5 Wyznaczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$$

KROK 6 Ustalamy wartości liczb:

$$x = p = 5 \qquad 10 - x = 10 - 5 = 5$$

KROK 7 Obliczamy największą wartość iloczynu liczb:

$$y = 5 \cdot 5 = 25$$

ĆWICZENIE 5

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

- a) 24, b) 30, c) 100.

ZADANIA

↻ Zbiór zadań, s. 206

1. Oblicz wartość funkcji dla $x = -2$ i $x = 3$.

a) $y = -3x^2 + 5x - 4$

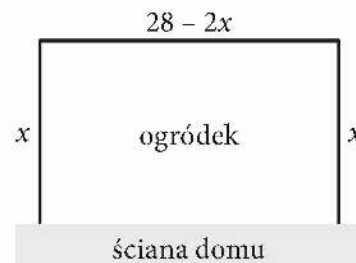
b) $y = 2x^2 - 3x - 6$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

2. Wyznacz najmniejszą wartość iloczynu dwóch liczb, których różnica wynosi 5.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Rolnik ma 28 m bieżących siatki, którą chce ogrodzić prostokątny ogródek przylegający jednym z boków do ściany domu. Zależy mu na tym, żeby powierzchnia ogródka była jak największa. Oblicz wymiary ogródka.



4. Organizator szkoleń dla psów chce ogrodzić z trzech stron prostokątny plac do ćwiczeń dla zwierząt. Czwarta strona placu przylega do ściany jego domu. W tym celu kupił 20 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Ustal, jakie wymiary powinien mieć ten plac, aby jego powierzchnia była możliwie największa.

6 To jest zysk!

Kiedy prowadzimy działalność gospodarczą, musimy kalkulować koszty i przychody tak, żeby była ona rentowna, tzn. przynosiła zysk. Możemy do tego zastosować różne narzędzia matematyczne, np. funkcję kwadratową.

Zadania optymalizacyjne to zadania, w których opisujemy daną sytuację za pomocą odpowiedniej funkcji. Wyznaczamy jej dziedzinę oraz szukamy wartości największej lub najmniejszej.

PRZYKŁADOWA ANALIZA ZYSKU

W hurtowni codziennie sprzedawanych jest 40 par butów. Zysk ze sprzedaży jednej pary wynosi 100 zł. Pewien ekspert stwierdził, że obniżenie ceny o x zł za parę spowoduje wzrost dziennej sprzedaży o x par. Właściciel hurtowni postanowił wykorzystać tę informację, żeby zwiększyć zysk ze sprzedaży. Ile będzie wynosił dzienny zysk ze sprzedaży po obniżce cen?



- 1 Porządkujemy wszystkie dane w tabeli, żeby ułatwić analizę danych.

Sprzedaż	Sprzedaż dzienna	Zysk ze sprzedaży jednej pary butów
Przed obniżką cen	40 par	100 zł
Po obniżce cen	$(40 + x)$ par	$(100 - x)$ zł

- 2 Obliczamy zysk za pomocą następującego wzoru:

zysk całkowity = sprzedaż dzienna · zysk ze sprzedaży jednej pary butów

Zysk całkowity przed obniżką wynosił więc $40 \cdot 100 = 4000$ [zł].

Zysk całkowity po obniżce wyniesie $(100 - x)(40 + x)$ [zł].

- 3 Oznaczamy przez y zysk całkowity po obniżce i układamy odpowiednią funkcję:

$$y = (100 - x)(40 + x) = 4000 + 100x - 40x - x^2$$

Otrzymujemy funkcję kwadratową:

$$y = -x^2 + 60x + 4000$$



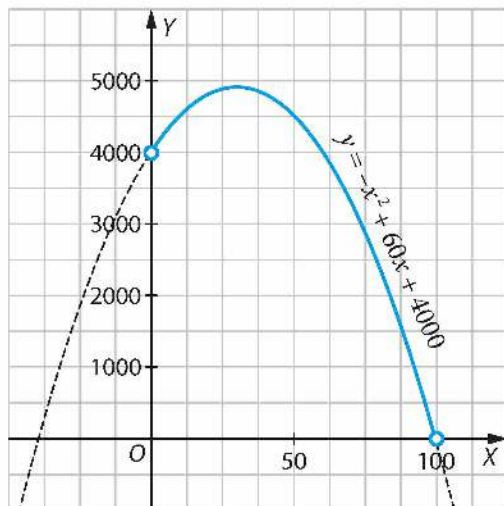
- 4 Zapisaliśmy zysk hurtowni za pomocą funkcji. Teraz określamy jej dziedzinę, czyli dla jakich x funkcja jest określona. Do tego muszą być spełnione dwa warunki:

$x > 0$, ponieważ x oznacza kwotę obniżki i liczbę par butów

$x < 100$, ponieważ obniżka nie może spowodować strat

Stąd $x \in (0; 100)$

- 5 Sporządzamy wykres funkcji. Możemy w tym celu skorzystać z programu komputerowego.



$$y = -x^2 + 60x + 4000$$

$$\text{dla } x \in (0; 100)$$

- 6 Funkcja, której wykresem jest parabola o ramionach skierowanych w dół, przyjmuje największą wartość w wierzchołku. Jeśli niemożliwe jest dokładne odczytanie jego współrzędnych z wykresu, stosujemy odpowiednie wzory.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2 \cdot (-1)} = 30$$

Oznacza to, że największy zysk całkowity uzyskamy przez obniżenie ceny o 30 zł.

- 7 Sprawdzamy, ile będzie wynosił zysk po obniżce:

$$(100 - 30) \cdot (40 + 30) = 70 \cdot 70 = 4900 \text{ [zł]}$$

$$4900 - 4000 = 900 \text{ [zł]}$$

Zysk po obniżce cen butów wyniesie 4 900 zł i będzie wyższy o 900 zł od obecnego.

ZADANIA BRANŻOWE

Hurtownia rowerów codziennie sprzedaje 30 rowerów. Zysk ze sprzedaży jednego roweru wynosi 240 zł. Właściciel hurtowni stwierdził, że podniesienie ceny o $(20x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży o x sztuk. Oblicz, o ile należy podnieść cenę jednego roweru, by dzienny zysk z ich sprzedaży był największy. Wykorzystaj podaną tabelę.

Sprzedaż	Sprzedaż dzienna	Zysk ze sprzedaży jednego roweru
Przed podwyżką cen	30 sztuk	240 zł
Po podwyżce cen	$(30 - x)$ sztuk	$(240 + 20x)$ zł

Powtórzenie rozdziału

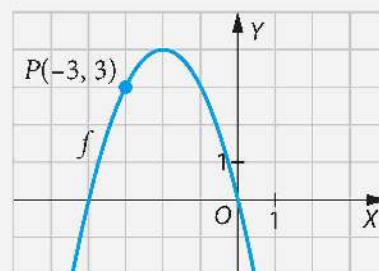
WYKRES FUNKCJI KWADRATOWEJ

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Dana jest funkcja $y = 4x^2$. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.
- B. Do wykresu funkcji należy punkt $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
- C. Oś symetrii wykresu funkcji jest prosta $x = 4$.

- 2 Jarek twierdzi, że przedstawioną na rysunku parabolę można otrzymać, przesuwając wykres funkcji $y = -x^2$ o 2 jednostki w lewo i 4 jednostki w górę. Beata uważa, że Jarek się myli. Które z nich ma rację? Uzasadnij odpowiedź.



- 3 Naszkicuj wykres funkcji i opisz własności otrzymanej paraboli.

- a) $y = (x - 2)^2 - 3$
- b) $y = -(x + 1)^2 + 4$

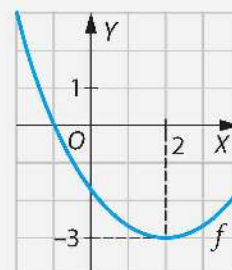
- 4 Dana jest parabola $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Sprawdź, czy:

- a) punkt $(-4, 5)$ należy do tej paraboli,
- b) wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(0, 1)$,
- c) prosta $x = 6$ przecina tę parabolę w punkcie $(6, 10)$.

- 5 Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem danej funkcji. Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

- a) $y = -2x^2 + 4x$
- b) $y = 3x^2 - 18x + 23$
- c) $y = -x^2 - 8x - 15$

- 6 Po przesunięciu wykresu funkcji $y = \frac{1}{3}x^2$ otrzymano parabolę, której fragment przedstawiono na rysunku. Zapisz równanie funkcji, której wykresem jest ta parabola, w postaci kanonicznej i postaci ogólnej.



- 7 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Najmniejsza wartość funkcji $y = 2x^2 - 4x - 1$ jest równa

- A. 6.
- B. 3.
- C. -3.
- D. -6.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Wartość funkcji $y = 2x^2 + 3x + 3$ dla argumentu $x = -1$ jest równa

A. -2. B. 2. C. 4. D. 8.

- 2 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Wierzchołkiem paraboli danej równaniem $y = 3(x - 3)^2 - 2$ jest punkt

A. $(-3, -2)$. B. $(3, -2)$. C. $(-3, 2)$. D. $(3, 2)$.

- 3 Wykresem funkcji $y = a(x - p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku w punkcie P . Zapisz wzór tej funkcji, mając dany współczynnik a i współrzędne punktu P .

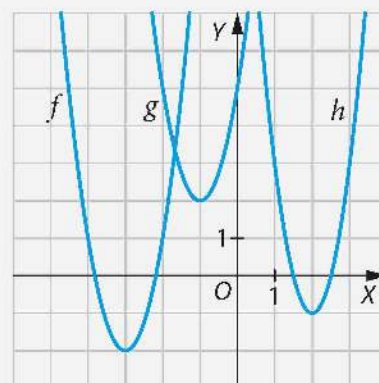
a) $P(3, 2)$, $a = 5$ b) $P(-1, -3)$, $a = -2$ c) $P(-4, 2)$, $a = -3$ d) $P(6, -4)$, $a = 1$

- 4 Parabole $y = 3x^2$ przesunięto wzdłuż osi układu współrzędnych, otrzymując narysowane parabole f , g , h . Przyporządkuj wzór funkcji do jej wykresu.

a) $y = 3(x - 2)^2 - 1$

b) $y = 3(x + 3)^2 - 2$

c) $y = 3(x + 1)^2 + 2$



- 5 Wykres funkcji $y = -x^2$ przesunięto i otrzymano parabolę przedstawioną na rysunku. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

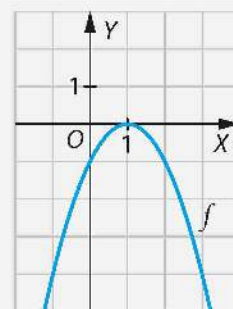
Parabola ta jest wykresem funkcji opisanej wzorem

A. $y = -x^2 + 2x + 1$.

B. $y = -x^2 + 2x - 1$.

C. $y = -x^2 - 2x + 1$.

D. $y = -x^2 - 2x - 1$.



- 6 Naszkicuj parabolę, która powstała z przesunięcia wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo i 4 jednostki w dół. Napisz wzór funkcji, której wykresem jest otrzymana parabola, w postaci kanonicznej i ogólnej.

- 7 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Największą wartość funkcja $y = -2x^2 + x + \frac{1}{2}$ przyjmuje dla

A. $x = -2$. B. $x = -1$. C. $x = \frac{1}{4}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Rozdział III

Równania i nierówności kwadratowe

TEMATY LEKCJI

- | | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Proste równania kwadratowe | s. 63–66 |
| 2 | Rozwiązywanie równań kwadratowych za pomocą wyróżnika | s. 67–69 |
| 3 | Postać iloczynowa funkcji kwadratowej | s. 70–73 |
| 4 | Punkty charakterystyczne paraboli
$y = ax^2 + bx + c$ | s. 74–77 |
| 5 | Równania na co dzień | s. 78–79 |
| 6 | Nierówności kwadratowe | s. 80–83 |
| | Powtórzenie rozdziału | s. 84–85 |

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

Proste równania kwadratowe

NA POCZĄTEK

Działka budowlana jest prostokątem o jednym boku 10 razy dłuższym niż drugi. W jaki sposób ustalisz wymiary tej działki?

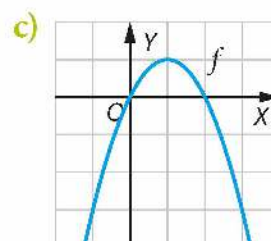
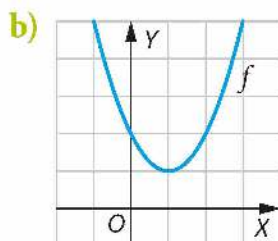
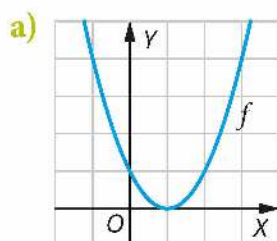


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$ (gdzie $a \neq 0$) to **równanie kwadratowe**. Jego rozwiązaniem są **miejsca zerowe funkcji** $y = ax^2 + bx + c$. Rozwiązania równania nazywamy również jego **pierwiastkami**.

PRZYKŁAD 1

Na podstawie wykresu funkcji ustal, ile rozwiązań ma równanie $ax^2 + bx + c = 0$.

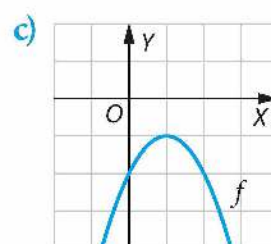
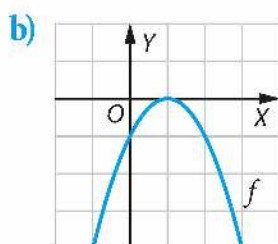
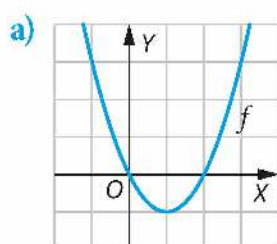


ROZWIĄZANIE

a) Równanie ma 1 rozwiązanie. b) Nie ma rozwiązań. c) Równanie ma 2 rozwiązania.

ĆWICZENIE 1

Ustal, ile rozwiązań ma równanie $ax^2 + bx + c = 0$, korzystając z wykresu funkcji.



PRZYKŁAD 2

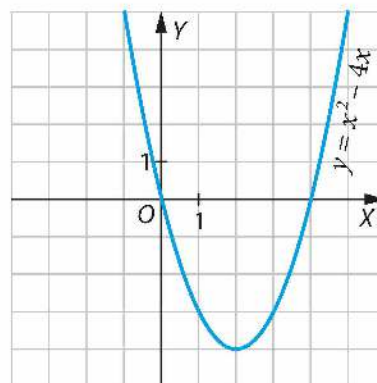
Na podstawie wykresu funkcji rozwiąż równanie $x^2 - 4x = 0$.

KROK 1 Odczytujemy z wykresu miejsca zerowe funkcji:

$$x = 0, x = 4$$

KROK 2 Podajemy rozwiązanie równania:

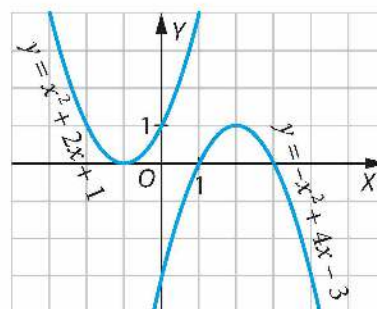
$$x = 0 \text{ lub } x = 4$$

**ĆWICZENIE 2**

Podaj pierwiastki równania, korzystając z wykresu funkcji przedstawionej na rysunku.

a) $-x^2 + 4x - 3 = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

**PRZYKŁAD 3**

Uzasadnij, że równanie $x^2 + 2 = 0$ jest sprzeczne.

SPOSÓB I

KROK 1 Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2 + 2$, przesuwając o 2 jednostki w górę parabolę $y = x^2$.

KROK 2 Zauważamy, że parabola nie przecina osi OX, więc funkcja nie ma miejsc zerowych.

SPOSÓB II

KROK 1 Przenosimy liczbę 2 na prawą stronę równania:

$$x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = -2$$

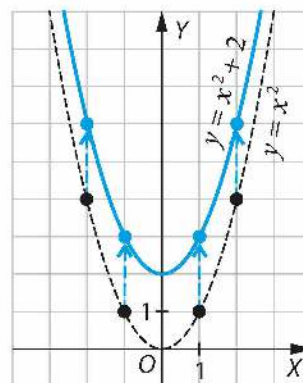
KROK 2 Zauważamy, że dla dowolnej liczby x jej kwadrat jest liczbą nieujemną:

$$\text{dla } x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$$

Równanie jest sprzeczne.

PODPOWIEDŹ

Równanie jest sprzeczne, gdy nie ma rozwiązań. Równanie tożsamościowe ma ich nieskończenie wiele.

**ĆWICZENIE 3**

Uzasadnij, że równanie $-x^2 - 3 = 0$ jest sprzeczne.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dla dowolnych liczb a i b $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

PRZYKŁAD 4

Rozwiąż równanie $4x^2 - 1 = 0$.

ROZWIĄZANIE**SPOSÓB I**

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$(2x)^2 - 1^2 = 0$$

$$(2x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \text{ lub } 2x + 1 = 0$$

$$2x = 1 \quad \text{lub} \quad 2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązaniem równania jest $x = \frac{1}{2}$ lub $x = -\frac{1}{2}$. Istnieją bowiem dwie liczby, których kwadrat jest równy $\frac{1}{4}$.

SPOSÓB II

Przenosimy liczbę -1 na prawą stronę równania:

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = 1 \quad | :4$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ lub } x = -\frac{1}{2}$$

ĆWICZENIE 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $9x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 - 2 = 0$

To się liczy!

Umiejętność rozwiązywania równań kwadratowych możemy wykorzystać w życiu codziennym, m.in. w budownictwie czy stolarstwie. Poniższe zadanie pomoże Wam ją opanować.

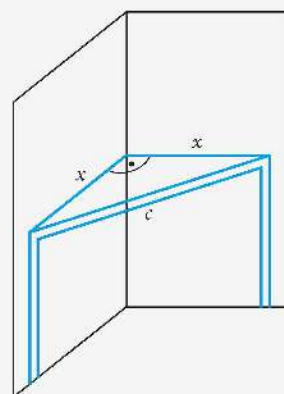
ZADANIE BRANŻOWE

Stolarz chce zbudować narożne biurko – takie, jak przedstawiono na rysunku. Aby dobrze przyciąć blat, powinien obliczyć długość boku x . Ułóż odpowiednie równanie i oblicz długość boku x w zaokrągleniu do 1 mm. Najdłuższa krawędź biurka c ma długość:

a) 1200 mm,

b) 1500 mm,

c) 2000 mm.



PRZYKŁAD 5

Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 6x = 0$

b) $x(x + 5) = 0$

a) KROK 1 Wylączamy wspólny czynnik przed nawias po lewej stronie równania:

$$3x(x - 2) = 0$$

KROK 2 Zauważamy, że iloczyn jest równy 0, jeżeli jeden z czynników jest równy 0:
 $3x = 0$ lub $x - 2 = 0$

KROK 3 Przekształcamy otrzymane równania:

$$3x = 0 \quad | :3 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 0 \quad | +2$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 2$$

Rozwiązaniem równania jest $x = 0$ lub $x = 2$.**b) ROZWIĄZANIE**

$$x(x + 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x + 5 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = -5$$

Rozwiązaniem równania jest $x = 0$ lub $x = -5$.**PODPowiedź**

Wspólny czynnik w sumie algebraicznej możemy wyłączyć przed nawias: $ab + ac = a(b + c)$.

ĆWICZENIE 5

Rozwiąż równanie.

a) $x(x - 7) = 0$

c) $x(4x - 8) = 0$

e) $8x - 4x^2 = 0$

b) $2x(1 - x) = 0$

d) $5x^2 + 15x = 0$

f) $4x^2 = 10x$

ZADANIA
 **Zbiór zadań, s. 207**

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 100 = 0$

c) $2x^2 - 10x = 0$

e) $(x - 2)(x + 3) = 0$

b) $3x^2 = 48$

d) $x^2 - 6 = 12 - x^2$

f) $(3x - 6)(2 - x) = 0$

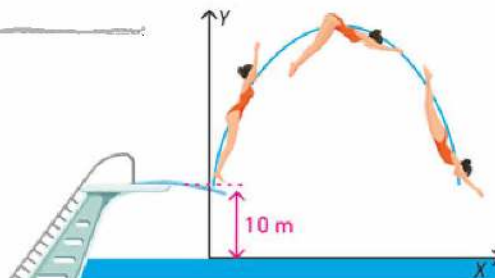
ZADANIA BRANŻOWE

2. Krawcowa miała belę materiału o szerokości x i powierzchni $13,5 \text{ m}^2$. Uszyła z niego sześć jednakowych obrusów w kształcie kwadratu o boku długości x . Ustal za pomocą równania wymiary obrusa.

Rozwiązywanie równań kwadratowych za pomocą wyróżnika

NA POCZĄTEK

Pływaczka wykonuje skok z wysokości 10 m nad powierzchnią wody. Wysokość nad poziomem wody, na jakiej się znajduje podczas skoku, może być opisana funkcją $y = -5x^2 + 5x + 10$, gdzie x oznacza czas od momentu skoku. Jak sprawdzisz, po ilu sekundach zawodniczka osiągnie poziom wody ($y = 0$)?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, możemy rozwiązywać za pomocą wyróżnika funkcji kwadratowej Δ .

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** rozwiązania: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jedno** rozwiązanie: $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** rozwiązań.

PRZYKŁAD 1

Oblicz wyróżnik i ustal, ile rozwiązań ma równanie.

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$

b) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$

c) $x^2 + 2x + 3 = 0$

a) **KROK 1** Wypisujemy z równania współczynniki: $a = 1$, $b = 4$, $c = -5$.

KROK 2 Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$$

KROK 3 Ustalamy liczbę rozwiązań:

$\Delta > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania.

ROZWIĄZANIE

b) $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 9 = 9 - 9 = 0$

Równanie ma jedno rozwiązanie.

c) $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0$

Równanie nie ma rozwiązań.

ĆWICZENIE 1

Oblicz wyróżnik. Następnie określ, ile rozwiązań ma równanie.

a) $x^2 + 8x + 5 = 0$

b) $x^2 - 3x + 7 = 0$

c) $5x^2 - 6x + \frac{9}{5} = 0$

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż równanie $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

KROK 1 Wypisujemy z równania współczynniki: $a = 9$, $b = -12$, $c = 4$.

KROK 2 Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

KROK 3 Zauważamy, że $\Delta = 0$, więc równanie ma jedno rozwiązanie.

KROK 4 Rozwiązujemy równanie, korzystając z odpowiedniego wzoru:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Rozwiązaniem równania jest $x = \frac{2}{3}$.

ĆWICZENIE 2

Rozwiąż równanie.

a) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż równanie $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

KROK 1 Wypisujemy z równania współczynniki: $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$.

KROK 2 Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$$

KROK 3 Wyznaczamy pierwiastek z wyróżnika, ponieważ $\Delta > 0$:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

KROK 4 Wyznaczamy dwa rozwiązania, korzystając z odpowiednich wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{2 \cdot 3} = \frac{-12}{6} = -2, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Rozwiązaniem równania jest $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

ĆWICZENIE 3

Rozwiąż równanie.

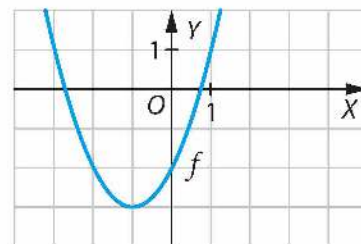
a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

c) $4x^2 - 7x - 2 = 0$

PRZYKŁAD 4

Znajdź miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + 2x - 2$, której wykres przedstawiono na rysunku.



KROK 1 Zauważamy, że z wykresu możemy odczytać tylko przybliżone wartości miejsc zerowych funkcji.

KROK 2 Rozwiązujemy równanie $x^2 + 2x - 2 = 0$, żeby wyznaczyć dokładne wartości miejsc zerowych funkcji.

KROK 3 Wypisujemy z równania współczynniki: $a = 1$, $b = 2$, $c = -2$.

KROK 4 Obliczamy wyróżnik i jego pierwiastek:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

KROK 5 Wyznaczamy dwa rozwiązania ($\Delta > 0$):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

Miejscami zerowymi funkcji są $x_1 = -1 - \sqrt{3}$, $x_2 = -1 + \sqrt{3}$.

ĆWICZENIE 4

Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $y = 2x^2 - 2x - 1$

b) $y = 4x^2 - 2x - 1$

c) $y = x^2 - 4x - 4$

ZADANIA

 Zbiór zadań, s. 207

1. Rozwiąż równanie za pomocą wyróżnika.

a) $5x^2 - 4x - 1 = 0$

c) $x^2 - 3x + 4 = 0$

e) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

d) $x^2 - 3x = 0$

f) $x^2 - 6 = 0$

2. W charytatywnym turnieju piłki siatkowej rozegrano 21 meczy każdy z każdym. Liczbę spotkań możemy policzyć, korzystając ze wzoru $\frac{x^2 - x}{2}$, gdzie x jest liczbą grających drużyn. Oblicz, ile drużyn wzięło udział w turnieju.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Rolnik ustawił na polu zraszacz obrotowy. Strumień wody, który z niego wylatuje, ma kształt paraboli o równaniu $y = -x^2 + 10x$, gdzie x to odległość od zraszacza w metrach, a y to wysokość strumienia wody. Oblicz, jaki zasięg ma zraszacz.

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

NA POCZĄTEK

Koszt wynajęcia a rowerów na b godzin możemy zapisać jako iloczyn $15ab$. Jak zapiszesz w postaci iloczynu koszt wynajęcia rowerów, jeżeli ich liczbę zwiększymy o 4 sztuki, a czas wynajęcia skrócimy o 3 godziny?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wzór funkcji $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, to **postać iloczynowa funkcji kwadratowej**, gdzie x_1, x_2 są miejscami zerowymi tej funkcji.

PRZYKŁAD 1

Podaj miejsca zerowe funkcji $y = (x - 4)(x + 1)$.

KROK 1 Rozwiązujemy równanie:

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

KROK 2 Zauważamy, że iloczyn jest równy 0, jeżeli jeden z czynników jest równy 0:

$$x - 4 = 0 \text{ lub } x + 1 = 0$$

KROK 3 Przekształcamy równania:

$$x = 4, x = -1$$

Miejsca zerowe funkcji to $x_1 = 4$ i $x_2 = -1$.

PODPOWIEDŹ

Miejsca zerowe możemy odczytać bezpośrednio z postaci iloczynowej funkcji, podając liczby, dla których wyrażenia zapisane w nawiasach przyjmują wartość zero.

ĆWICZENIE 1

Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $y = (x + 4)(x + 3)$

c) $y = 2(x - 1)(x - 7)$

e) $y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

b) $y = (x - 5)(x + 2)$

d) $y = 4(x + 8)(x - 3)$

f) $y = (x + 3,5)(x + 1,2)$

PRZYKŁAD 2

Zapisz wzór funkcji $y = 2(x - 5)(x + 4)$ w postaci ogólnej.

KROK 1 Wykonujemy mnożenie:

$$y = 2(x - 5)(x + 4) = 2(x^2 + 4x - 5x - 20)$$

KROK 2 Zapisujemy wyrażenie w najprostszej postaci:

$$y = 2(x - 5)(x + 4) = 2(x^2 + 4x - 5x - 20) = 2(x^2 - x - 20) = 2x^2 - 2x - 40$$

Postać ogólna funkcji to $y = 2x^2 - 2x - 40$.

ĆWICZENIE 2

Przekształć wzór funkcji z postaci iloczynowej do postaci ogólnej.

a) $y = (x - 6)(x + 4)$ c) $y = 5(x - 2)(x - 1)$ e) $y = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 4)$

b) $y = (x + 10)(x - 2)$ d) $y = -2(x + 1)(x + 3)$ f) $y = \frac{2}{3}(x - 3)^2$

PRZYKŁAD 3

Przedstaw funkcję $y = 3x^2 + 5x - 2$ w postaci iloczynowej.

KROK 1 Wypisujemy ze wzoru funkcji współczynniki:

$$a = 3, b = 5 \text{ i } c = -2$$

KROK 2 Obliczamy wyróżnik i pierwiastek z wyróżnika:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49, \sqrt{\Delta} = 7$$

KROK 3 Znajdujemy miejsca zerowe funkcji kwadratowej:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{2 \cdot 3} = -2, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

KROK 4 Zapisujemy funkcję w postaci iloczynowej:

$$y = 3(x - (-2))\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$$y = 3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

ĆWICZENIE 3

Podaj wzór funkcji w postaci iloczynowej.

a) $y = x^2 + x - 2$ c) $y = 3x^2 + 8x - 3$ e) $y = -5x^2 + 4x + 12$

b) $y = x^2 - 3x - 10$ d) $y = 2x^2 + 5x + 2$ f) $y = -3x^2 + 4x - 1$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

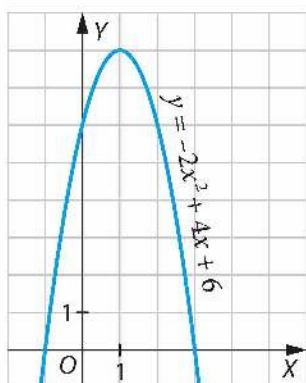
Funkcję kwadratową $y = ax^2 + bx + c$ możemy przedstawić w postaci iloczynowej, gdy ma ona pierwiastki.

- Jeśli $\Delta > 0$, to funkcję tę możemy przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tej funkcji.
- Jeśli $\Delta = 0$, to funkcję tę możemy przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem tej funkcji (tzw. pierwiastkiem podwójnym).
- Jeśli $\Delta < 0$, to funkcji nie możemy przedstawić w postaci iloczynowej.

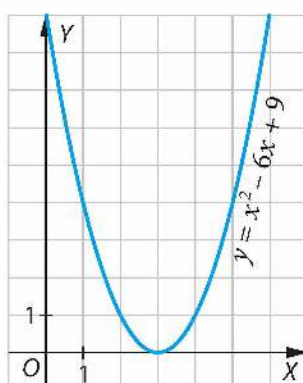
PRZYKŁAD 4

Przedstaw funkcję w postaci iloczynowej – jeśli to możliwe – korzystając z wykresu funkcji.

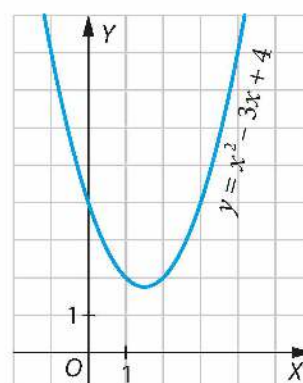
a) $y = -2x^2 + 4x + 6$



b) $y = x^2 - 6x + 9$



c) $y = x^2 - 3x + 4$



a) **KROK 1** Odczytujemy miejsca zerowe z wykresu funkcji: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

KROK 2 Znajdujemy współczynnik a we wzorze funkcji: $a = -2$.

KROK 3 Zapisujemy wzór funkcji w postaci iloczynowej:

$$y = -2(x - (-1))(x - 3)$$

$$y = -2(x + 1)(x - 3)$$

ROZWIĄZANIE

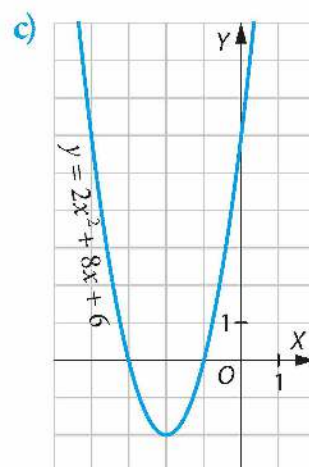
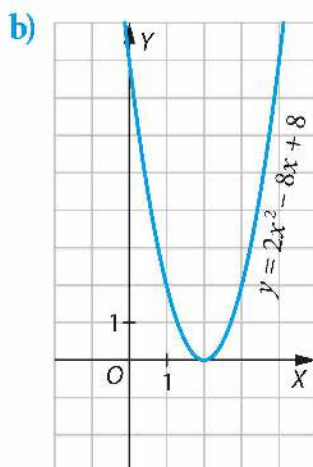
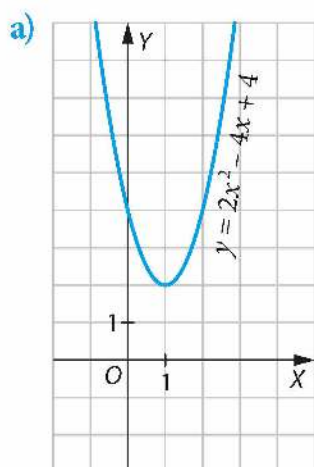
b) Miejsce zerowe: $x_0 = 3$, współczynnik $a = 1$.

Postać iloczynowa funkcji: $y = (x - 3)^2$.

c) Funkcji nie można przedstawić w postaci iloczynowej, ponieważ nie ma miejsc zerowych.

ĆWICZENIE 4

Przedstaw narysowaną funkcję w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.



ZADANIA

↻ Zbiór zadań, s. 208

1. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 + 3x + 2$

c) $y = 4x^2 - 3x + 2$

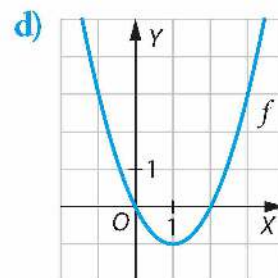
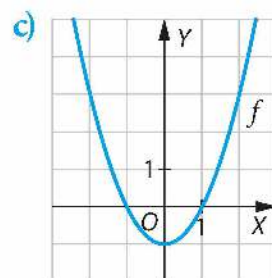
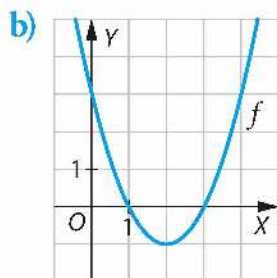
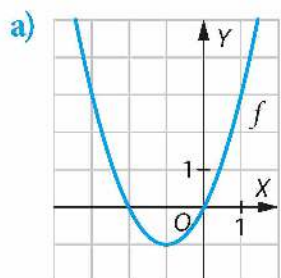
e) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$

b) $y = -x^2 - 2x + 3$

d) $y = -x^2 + x + 6$

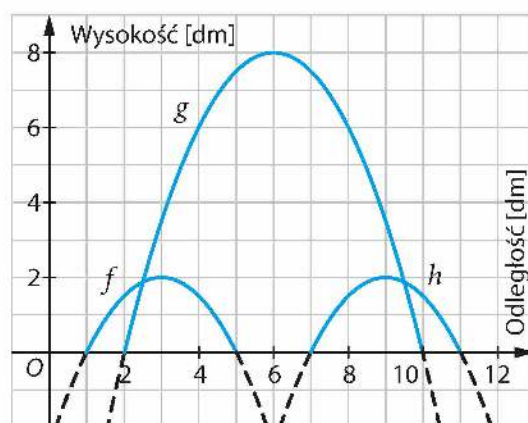
f) $y = -4x^2 + 10x - 7$

2. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji i podaj jej wzór w postaci iloczynowej, jeżeli jej wykres otrzymano przez przesunięcie paraboli $y = x^2$.



ZADANIA BRANŻOWE

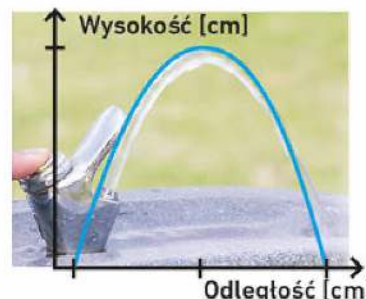
3. Do konstrukcji stalowej bramy wykorzystano pręty, z których trzy mają kształt paraboli. Wszystkie parabole mają współczynnik $a = -\frac{1}{2}$. Zapisz równanie każdej z tych parabol w postaci iloczynowej i ogólnej.



Punkty charakterystyczne paraboli $y = ax^2 + bx + c$

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się zdjęciu. W jaki sposób ustalisz maksymalną wysokość, którą osiągnął strumień wody, oraz w jakiej odległości od kranu woda była na poziomie źródelka (wysokość równa 0)?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Punkty charakterystyczne paraboli $y = ax^2 + bx + c$ to:

- Punkty przecięcia paraboli z osią OX : $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$. Możemy je wyznaczyć, rozwiązując równanie $ax^2 + bx + c = 0$.
- Punkt przecięcia paraboli z osią OY : $(0, c)$. Gdy podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, otrzymamy $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.
- Współrzędne wierzchołka paraboli: $W(p, q)$. Obliczamy je ze wzorów:

$$p = \frac{-b}{2a}, \quad q = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Kiedy znamy punkty charakterystyczne paraboli, możemy ją naszkicować. Należy pamiętać, że jest to krzywa „gładka”, mającą oś symetrii.

PRZYKŁAD 1

Wyznacz punkty charakterystyczne paraboli $y = x^2 - 2x - 8$.

Zaznacz te punkty w układzie współrzędnych i naszkicuj parabolę.

KROK 1 Obliczamy miejsca zerowe funkcji ($y = 0$):

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$a = 1, b = -2, c = -8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - 6}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 6}{2} = 4$$

Punkty przecięcia z osią OX to $A(-2, 0)$ i $B(4, 0)$.

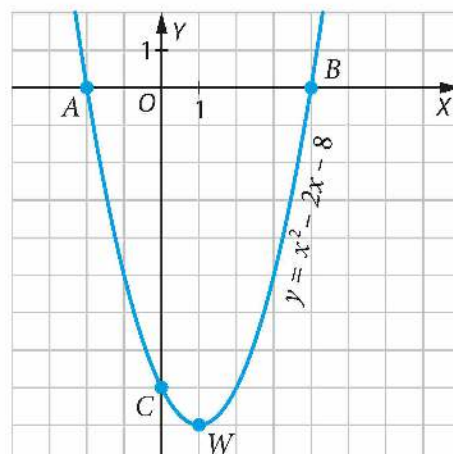
KROK 2 Ustalamy współrzędne punktu przecięcia z osią OY :

skoro $c = -8$, to punkt $C(0, -8)$ jest punktem przecięcia z osią OY .

KROK 3 Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1 \quad q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9 \quad W(1, -9)$$

KROK 4 Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty A, B, C i W. Łączymy je i otrzymujemy wykres funkcji.



ĆWICZENIE 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka oraz punktów przecięcia z osią OX i osią OY danej paraboli. Zaznacz te punkty w układzie współrzędnych, a następnie naszkicuj parabolę.

a) $y = x^2 + 3x - 4$

b) $y = x^2 - 2x - 3$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

To się liczy!

Analiza kształtu paraboli i jej punktów charakterystycznych pomaga sportowcom osiągnąć lepsze wyniki. Szczególnie przydaje się w dyscyplinach lekkoatletycznych, takich jak rzut młotem, dyskiem, oszczepem, pchnięcie kulą, skok wzwyż, w dal. Poniższe zadanie pokaże Wam, jak wykorzystać umiejętność obliczania punktów charakterystycznych paraboli.

ZADANIE BRANŻOWE

Tor ruchu zawodniczki podczas skoku w dal opisuje równanie $y = -\frac{6}{49}x^2 + \frac{6}{7}x$. Zmienna x to podana w metrach odległość, na jaką wybija się skoczek, natomiast y to wysokość w metrach, na jaką się wznosi. Odpowiedz na pytania.

- Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się zawodniczka?
- Jaką odległość uzyska zawodniczka, jeśli odbiła się 4 cm przed belką?

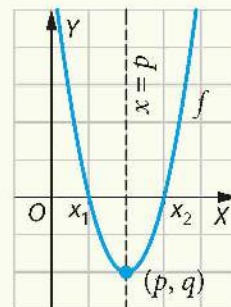


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeśli znamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej x_1, x_2 , możemy wyznaczyć współrzędną p wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji ze wzoru:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Ośią symetrii paraboli jest pionowa prosta $x = p$, do której należy wierzchołek paraboli oraz środek odcinka łączącego punkty $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$.



PRZYKŁAD 2

Znajdź miejsca zerowe funkcji $f(x) = (x + 5)(x - 1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji. Podaj wzór prostej będącej osią symetrii paraboli.

KROK 1 Odczytujemy miejsca zerowe z postaci iloczynowej funkcji:

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 1$$

KROK 2 Wyznaczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

KROK 3 Obliczamy drugą współrzędną wierzchołka, podstawiając $x = -2$ do wzoru funkcji:

$$q = f(p) = (-2 + 5)(-2 - 1) = 3 \cdot (-3) = -9$$

KROK 4 Zauważamy, że osią symetrii jest prosta:

$$x = p = -2$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne $(-2, -9)$. Ośią symetrii jest prosta $x = -2$.

ĆWICZENIE 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Podaj wzór prostej będącej osią symetrii paraboli.

a) $y = (x - 1)(x - 2)$

d) $y = -(x - 5)(x + 2)$

b) $y = (x + 4)(x - 3)$

e) $y = \frac{1}{2}(x + 6)(x + 1)$

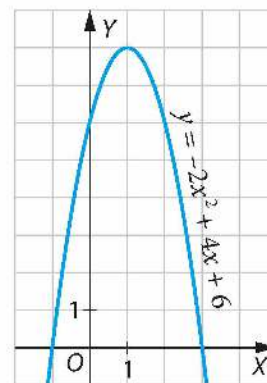
c) $y = 3(x + 2)(x + 3)$

f) $y = -\frac{1}{4}(x - 2)(x - 4)$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 209

1. Na rysunku przedstawiono parabolę $y = -2x^2 + 4x + 6$. Wykonaj polecenia.



- Podaj współrzędne punktu przecięcia tej paraboli z osią OY .
 - Odczytaj miejsca zerowe funkcji, której wykresem jest podana parabola.
 - Podaj współrzędne wierzchołka paraboli.
 - Sprawdź, czy punkt $(4, -8)$ należy do paraboli.
2. W tabeli podano punkty charakterystyczne paraboli. Zaznacz je w układzie współrzędnych i naskicuj tę parabolę.

Równanie paraboli	Wierzchołek paraboli	Punkt przecięcia z osią OY	Punkty przecięcia z osią OX
$y = x^2 + 2x - 3$	$W(-1, -4)$	$C(0, -3)$	$A(-3, 0), B(1, 0)$
$y = x^2 - 4x - 5$	$W(2, -9)$	$C(0, -5)$	$A(-1, 0), B(5, 0)$
$y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$	$W(-2, 4)$	$C(0, 3)$	$A(-6, 0), B(2, 0)$

3. Wyznacz punkty charakterystyczne paraboli i ją naskicuj.

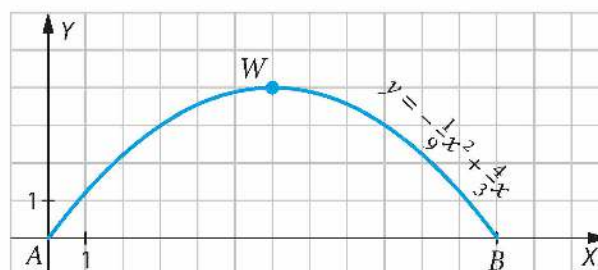
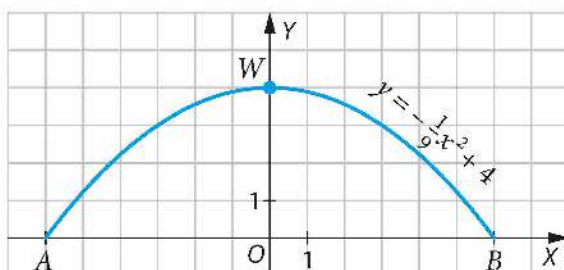
a) $y = -2x^2 - x + 3$

b) $y = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 5$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

ZADANIA BRANŻOWE

4. Konstruktor zaprojektował prześło mostu w kształcie paraboli. Równanie tej paraboli podał w zależności od sposobu jej umieszczenia w układzie współrzędnych (patrz rysunek I i II).



Odpowiedz na pytania.

- Jaką szerokość rzeki (długość odcinka AB) uwzględnił konstruktor?
- Jaka może być maksymalna wysokość statków przepływających pod mostem?

5 Równania na co dzień

Równania możemy wykorzystywać w wielu sytuacjach codziennych. Mają zastosowanie np. w analizie wyników sprzedaży w handlu, w opisywaniu procesów produkcyjnych w przemyśle, w obliczeniach konstrukcyjnych w branży budowlanej.

Równania możemy podzielić na:

- **Równania liniowe:** $ax + b = 0$, gdzie $a \neq 0$ (zwane też równaniami pierwszego stopnia). Stosujemy je np. gdy obliczamy długość boku figury o podanym obwodzie.
- **Równania kwadratowe:** $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ (równania drugiego stopnia). Zastosujemy je, kiedy chcemy wyznaczać wymiary danego obiektu, np. na podstawie jego powierzchni.
- **Równania trzeciego stopnia:** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdzie $a \neq 0$. Używamy ich w obliczeniach związanych z figurami przestrzennymi, np. kiedy wyznaczamy krawędź sześcianu o podanej objętości.

Istnieją również równania wyższych stopni.

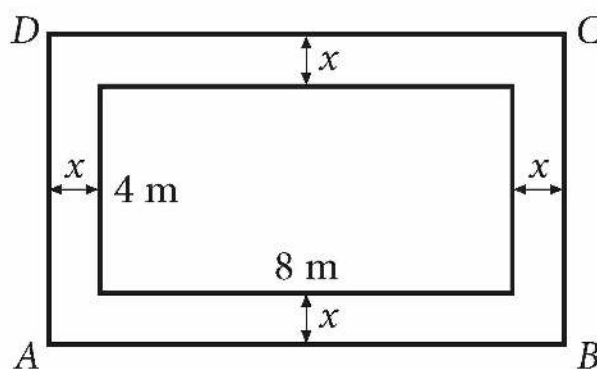
PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIE RÓWNAŃ

Właściciel hotelu chce wymienić kafle, które tworzą jednakowej szerokości pas dookoła basenu. Do tego celu ma zamiar wykorzystać płytki, które zostały mu z poprzedniego remontu. Jaka powinna być szerokość tego pasa, jeśli ma do wykorzystania 64 m^2 płytek?



- 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy, który ułatwi wyobrażenie sobie opisanej sytuacji.

x – szerokość pasa płytek



- 2 Na rysunku widzimy, że basen wraz z pasem płytek tworzą prostokąt o wymiarach $(2x + 4)$ i $(2x + 8)$. Obliczamy pole prostokąta ABCD:
- $$P_1 = (2x + 4)(2x + 8) = 4x^2 + 16x + 8x + 32 = 4x^2 + 24x + 32 \text{ [m}^2\text{]}$$
- 3 Obliczamy powierzchnię basenu, czyli pole prostokąta o wymiarach 8 m i 4 m:
- $$P_2 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ [m}^2\text{]}$$
- 4 Pas płytek tworzy ramkę, której powierzchnię wyznaczymy, odejmując powierzchnię basenu od pola prostokąta ABCD:
- $$P_1 - P_2 = 4x^2 + 24x + 32 - 32 = 4x^2 + 24x$$
- 5 Powierzchnia wyłożona płytkami powinna wynosić 64 m^2 , ponieważ taką powierzchnię możemy wyłożyć płytkami, którymi dysponuje właściciel hotelu. Zapisujemy następujące równanie:
- $$4x^2 + 24x = 64$$
- 6 Przekształcamy otrzymane równanie do jak najprostszej postaci:
- $$4x^2 + 24x - 64 = 0 \quad | : 4$$
- $$x^2 + 6x - 16 = 0$$
- 7 Wykorzystujemy wiadomości z zakresu rozwiązywania równań kwadratowych:
- Współczynniki: $a = 1, b = 6, c = -16$
- $$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$$
- Skoro $\Delta > 0$, obliczamy jeszcze pierwiastek z wyróżnika: $\sqrt{\Delta} = 10$.
- Otrzymujemy dwa rozwiązania:
- $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 10}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 10}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
- 8 Sprawdzamy, czy oba rozwiązania są właściwe:
- Niewiadomą x oznaczyliśmy szerokość, która przyjmuje wartości dodatnie. Rozwiązanie $x_1 = -8$ jest więc sprzeczne, dlatego je odrzucamy. Szerokość pasa wyłożonego płytkami wynosi 2 m.



ZADANIA BRANŻOWE

Plac zabaw ma kształt prostokąta o szerokości 8 m i długości 10 m. Pewna firma przygotowała projekt jego modernizacji. Szerokość placu zwiększono o x m, a jego długość – o $2x$ m.

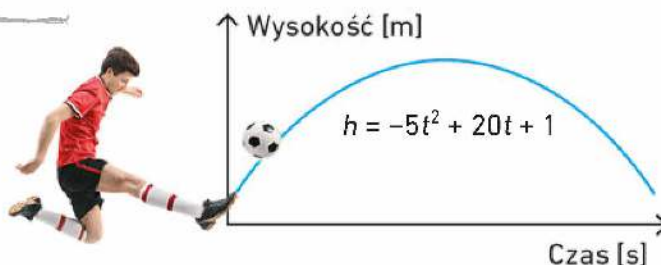
Wykonaj polecenia.

- Wyznacz nowe wymiary placu zabaw, jeśli powierzchnia placu wzrosła o 60 m^2 .
- Oblicz, ile metrów siatki powinna przygotować firma na ogrodzenie nowego placu, jeśli wejście na plac zabaw ma 2 m szerokości.

Nierówności kwadratowe

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się rysunkowi. Czy potrafisz powiedzieć, jak długo piłka kopnięta przez piłkarza będzie się utrzymywać na wysokości powyżej 1 m?



PRZYKŁAD 1

Korzystając z wykresu funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$, rozwiąż podaną nierówność.

a) $-x^2 + 2x + 3 > 0$ b) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

a) **KROK 1** Odczytujemy z wykresu miejsca zerowe funkcji:

$$x_1 = -1, x_2 = 3$$

KROK 2 Sprawdzamy na wykresie, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od zera:

$$f(x) > 0 \text{ dla } -1 < x < 3$$

Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $(-1; 3)$.

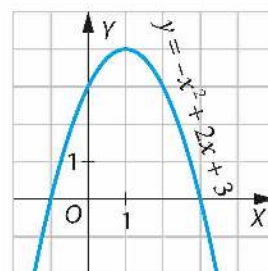
Możemy również powiedzieć, że funkcja $y = -x^2 + 2x + 3$ przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-1; 3)$.

b) ROZWIĄZANIE

Nierówność jest spełniona, gdy $x \leq -1$ lub $x \geq 3$.

Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest $x \in (-\infty; -1] \cup x \in [3; \infty)$.

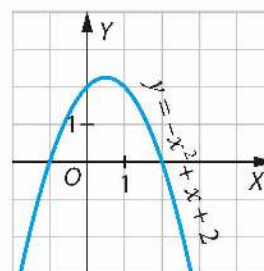
Możemy również powiedzieć, że funkcja $y = -x^2 + 2x + 3$ przyjmuje wartości niedodatnie dla $x \in (-\infty; -1] \cup x \in [3; \infty)$.



ĆWICZENIE 1

Rozwiąż podaną nierówność. Skorzystaj z wykresu funkcji $y = -x^2 + x + 2$.

a) $-x^2 + x + 2 < 0$ b) $-x^2 + x + 2 \geq 0$



PRZYKŁAD 2

Skorzystaj z wykresu funkcji $y = x^2 + 1$ i rozwiąż podaną nierówność.

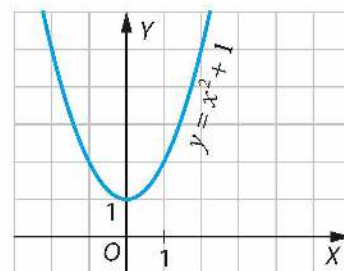
a) $x^2 + 1 > 0$

b) $x^2 + 1 < 0$

ROZWIĄZANIE

a) Nierówność $x^2 + 1 > 0$ jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych: $x \in \mathbb{R}$.

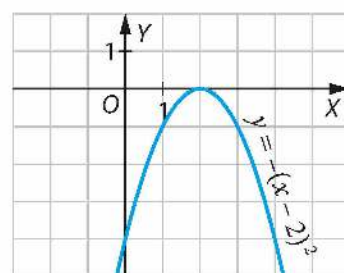
b) Nierówność $x^2 + 1 < 0$ jest sprzeczna: $x \in \emptyset$.

**ĆWICZENIE 2**

Podaj rozwiązanie nierówności na podstawie wykresu funkcji $y = -(x - 2)^2$.

a) $-(x - 2)^2 \geq 0$

b) $-(x - 2)^2 \leq 0$

**PRZYKŁAD 3**

Rozwiąż nierówność $(x - 4)(x + 3) \leq 0$.

KROK 1 Zauważamy, że po lewej stronie nierówności mamy postać iloczynową funkcji kwadratowej $y = (x - 4)(x + 3)$, z której możemy odczytać miejsca zerowe: $x_1 = 4$, $x_2 = -3$

KROK 2 Sprawdzamy wartość współczynnika a funkcji, żeby ustalić kierunek ramion paraboli:

$a = 1$, czyli $a > 0$, więc parabola ma ramiona skierowane w górę.

KROK 3 Zaznaczamy na osi miejsca zerowe funkcji i szkicujemy parabolę.

**PODPowiedź**

Do rozwiązania nierówności kwadratowej wystarczy uproszczony wykres, na którym zaznaczamy tylko miejsca zerowe i kierunek ramion paraboli.

KROK 4 Odczytujemy ze szkicu wykresu zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \langle -3; 4 \rangle$.

ĆWICZENIE 3

Rozwiąż nierówność.

a) $(x + 3)(x + 4) \leq 0$

b) $-(x - 5)(x + 1) > 0$

c) $2x(x + 6) \geq 0$

PRZYKŁAD 4

Rozwiąż nierówność $x^2 \geq 9$.

KROK 1 Przenosimy wyrazy tak, by po prawej stronie nierówności została liczba 0:

$$x^2 - 9 \geq 0$$

KROK 2 Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci iloczynu:

$$(x - 3)(x + 3) \geq 0$$

KROK 3 Odczytujemy miejsca zerowe funkcji $y = (x - 3)(x + 3)$:

$$x_1 = 3, x_2 = -3$$

KROK 4 Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w górę ($a = 1$, czyli $a > 0$).



KROK 5 Odczytujemy ze szkicu wykresu zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in (-\infty; -3] \text{ lub } x \in [3; \infty)$$

ĆWICZENIE 4

Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 > 36$

b) $x^2 \leq 64$

c) $9x^2 < 4$

PRZYKŁAD 5

Rozwiąż nierówność $-2x^2 - 9x + 5 < 0$.

KROK 1 Obliczamy wyróżnik odpowiedniej funkcji kwadratowej:

$$a = -2, b = -9, c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 81 + 40 = 121$$

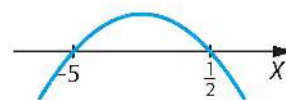
$$\sqrt{\Delta} = 11$$

KROK 2 Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 11}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 11}{-4} = \frac{20}{-4} = -5$$

KROK 3 Szkicujemy parabolę o miejscach zerowych $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = -5$ oraz ramionach skierowanych w dół ($a = -2$, czyli $a < 0$).



KROK 4 Odczytujemy ze szkicu wykresu zbiór rozwiązań nierówności:

$$x \in (-\infty; -5) \text{ lub } x \in (\frac{1}{2}; \infty)$$

ĆWICZENIE 5

Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 4x - 3 \leq 0$

c) $2x^2 - 7x - 4 \leq 0$

e) $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 < 0$

b) $x^2 + 9x + 14 < 0$

d) $-x^2 + 5x + 6 > 0$

f) $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \geq 0$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 209

1. Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność.

a) $2x^2 - 6x + 5 > 0$ $x = 2$

b) $-x^2 + 4x - 1 < 0$ $x = 3$

c) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3 \geq 0$ $x = -4$

d) $-3x^2 + 6x - 1 \leq 0$ $x = -2$

PODPOWIEDŹ

Obliczamy wartość wyrażenia po lewej stronie nierówności dla podanej liczby i porównujemy otrzymany wynik z prawą stroną nierówności.

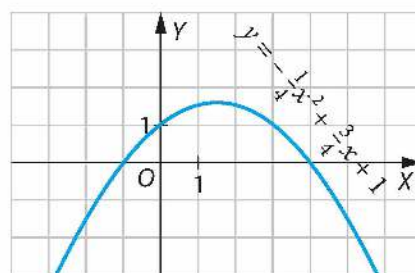
2. Podaj rozwiązanie nierówności, korzystając z wykresu funkcji.

a) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1 > 0$

b) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1 \geq 0$

c) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1 < 0$

d) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1 \leq 0$



3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - x - 6 < 0$

c) $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$

e) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

b) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

d) $3x^2 + 5x + 2 > 0$

f) $-2x^2 + 10x - 6 < 0$

ZADANIA BRANŻOWE

4. Wewnątrz dużej hali należy wyznaczyć miejsce na warsztat ślusarski. Podłoga tego warsztatu ma być prostokątem o wymiarach $(x - 1)$ m $\times$ $(x + 2)$ m. Znajdź najmniejszą wartość x , dla której pole powierzchni podłogi jest nie mniejsze niż 18 m^2 .
5. Ogrodnik ma 200 m siatki, żeby ogrodzić działkę w kształcie prostokąta. Chciałby, żeby jej powierzchnia wynosiła co najmniej 2400 m^2 . Ustal, jakie wymiary może mieć ta działka.

Powtórzenie rozdziału

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Rozwiąż równanie.

a) $9 - x^2 = 0$

c) $x^2 - 5x = 0$

e) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $5x^2 = 125$

d) $4x - 3x^2 = 0$

f) $x - 2x^2 = x^2 - 4$

2 Wskaż zdania prawdziwe.

A. Jedynym rozwiązaniem równania $x^2 - 49 = 0$ jest liczba 7.

B. Równanie $x^2 = 0$ ma jedno rozwiązanie.

C. Równanie $x^2 + 7 = 0$ jest sprzeczne.

3 Przedstaw funkcję kwadratową $y = 2x^2 - 5x - 3$ w postaci kanonicznej i w postaci iloczynowej – jeśli to możliwe.

4 Rozwiąż nierówność.

a) $9x^2 - 16 < 0$

b) $3x^2 + 5x \leq 0$

c) $-(x - 3)(x - 1\frac{1}{2}) \leq 0$

5 Wskaż zdania prawdziwe.

A. Nierówność $x^2 \geq 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste.

B. Nierówność $x^2 - \frac{1}{4} < 0$ jest sprzeczna.

C. Nierówności $x^2 + x < 0$ nie spełnia żadna liczba całkowita.

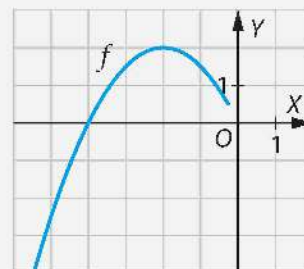
6 Dana jest funkcja $y = -(x + 2)(x + 6)$. Wskaż zdania prawdziwe.

A. Miejscami zerowymi tej funkcji są dwie liczby ujemne.

B. Funkcja przyjmuje wartości nieujemne dla pięciu liczb całkowitych.

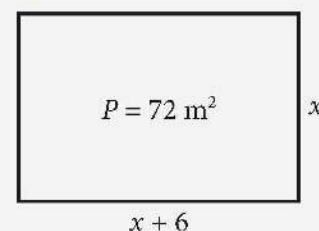
C. Dla wszystkich argumentów ujemnych funkcja ta przyjmuje wartości ujemne.

7 Przyjrzyj się fragmentowi wykresu funkcji kwadratowej. Podaj współrzędne punktów przecięcia funkcji z osiami układu współrzędnych.



8 Znajdź dwie liczby, których iloczyn jest równy 84, a jedna z liczb jest o 5 większa od drugiej.

9 Oblicz długości boków prostokąta przedstawionego na rysunku.



SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Liczyby 2 i 3 są pierwiastkami równania

A. $x^2 + 5x + 6 = 0$. B. $x^2 + 5x - 6 = 0$. C. $x^2 - 5x + 6 = 0$. D. $x^2 - 5x - 6 = 0$.

- 2 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Suma liczb spełniających równanie $4x^2 + 8x = 0$ jest równa

A. -2. B. 4. C. 6. D. 12.

- 3 Przedstaw funkcję kwadratową $y = 2x^2 - 5x + 3$ w postaci kanonicznej i w postaci iloczynowej – jeśli to możliwe.

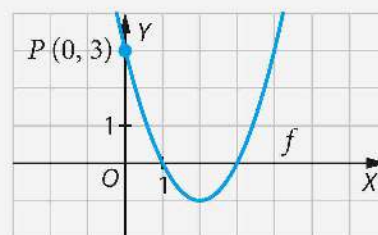
- 4 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Parabola $y = -2(x - 2)^2 + 6$ przecina oś OY w punkcie

A. (0, -6). B. (0, -2). C. (0, 2). D. (0, 6).

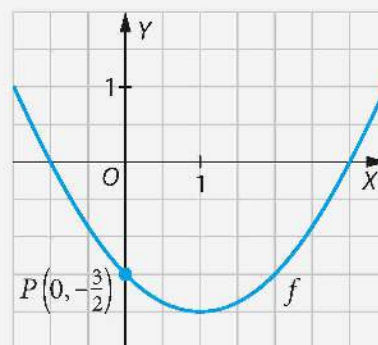
- 5 Na rysunku przedstawiono parabolę będącą wykresem pewnej funkcji kwadratowej. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Funkcja ta przyjmuje wartości ujemne dla trzech liczb całkowitych.
B. Oś symetrii paraboli przechodzi przez punkt (2, 7).
C. Punkt (4, 3) należy do tej paraboli.



- 6 Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji kwadratowej. Wybierz właściwe dokończenie zdania. Dla $x = 2$ funkcja ta przyjmuje wartość

A. -2. C. -1.
B. $-1\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.



- 7 Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 49 < 0$ b) $x^2 - 4x \geq 0$ c) $(x - \frac{1}{2})(x + 2) \leq 0$

- 8 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Zbiorem rozwiązań nierówności $2x^2 - x - 1 < 0$ jest przedział

A. $(-\frac{1}{2}; 1)$. B. $(\frac{1}{2}; 1)$. C. $(-1; -\frac{1}{2})$. D. $(-1; \frac{1}{2})$.

Rozdział IV

Wielokąty

TEMATY LEKCJI

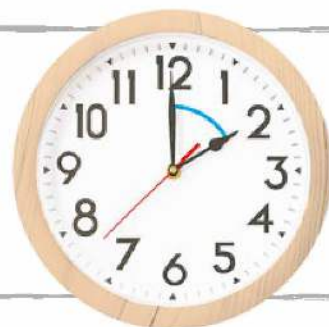
- | | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Kąty w trójkącie | s. 87-91 |
| 2 | Punkty specjalne w trójkącie | s. 92-95 |
| 3 | Trójkąty przystające | s. 96-99 |
| 4 | Trójkąty prostokątne | s. 100-102 |
| 5 | Odległość punktów w układzie współrzędnych | s. 103-105 |
| 6 | Pole trójkąta | s. 106-109 |
| 7 | Trójkąty o kątach 45°, 45°, 90° oraz 30°, 60°, 90° | s. 110-114 |
| 8 | Czworokąty – pola i obwody | s. 115-119 |
| | Powtórzenie rozdziału | s. 120-121 |

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

Kąty w trójkącie

NA POCZĄTEK

Jaką miarę ma kąt, który tworzy na rysunku wskazówka godzinowa ze wskazówką minutową? Jakie rodzaje kątów mogą powstać między tymi wskazówkami o różnych porach dnia?

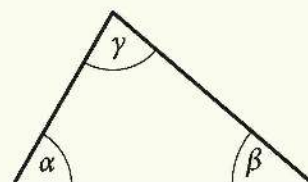


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

gdzie α (alfa), β (beta), γ (gamma) to litery alfabetu greckiego oznaczające miary kątów w trójkącie.



PRZYKŁAD 1

W pewnym trójkącie jeden kąt ma miarę 44° , a drugi 76° . Oblicz miarę trzeciego kąta.

KROK 1 Podstawiamy $\alpha = 44^\circ$ oraz $\beta = 76^\circ$ do wzoru na sumę miar kątów w trójkącie:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$44^\circ + 76^\circ + \gamma = 180^\circ$$

KROK 2 Rozwiązujemy równanie:

$$120^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\gamma = 60^\circ$$

Trzeci kąt ma miarę 60° .

ĆWICZENIE 1

Dany jest trójkąt o kątach α , β i γ . Oblicz miarę trzeciego kąta trójkąta, jeśli:

a) $\alpha = 76^\circ$, $\beta = 53^\circ$,

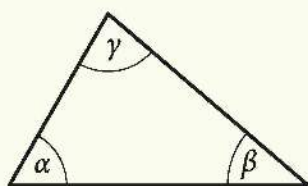
b) $\alpha = 62^\circ$, $\gamma = 103^\circ$,

c) $\beta = 17^\circ$, $\gamma = 26^\circ$.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

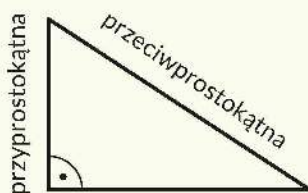
Trójkąty, ze względu na ich kąty, dzielimy na:

ostrokątne



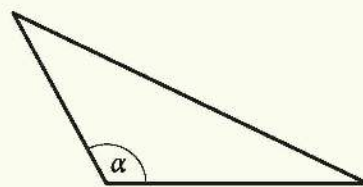
$$\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ, \gamma < 90^\circ$$

prostokątne



przyprostokątna

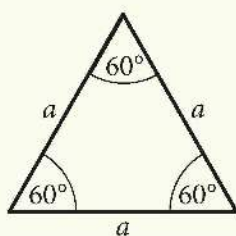
rozwartokątne



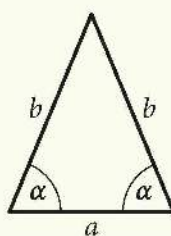
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

Ze względu na długości boków trójkąty dzielimy na:

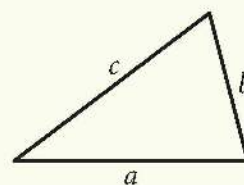
równoboczne



równoramienne



różnoboczne



Trójkąt równoboczny jest trójkątem równoramiennym.

PRZYKŁAD 2

Ustal, czy trójkąt, którego dwa kąty mają miary 65° i 40° , jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

KROK 1 Obliczamy miarę brakującego kąta:

$$\gamma = 180^\circ - 40^\circ - 65^\circ$$

$$\gamma = 75^\circ$$

KROK 2 Zauważamy, że wszystkie kąty trójkąta są ostre:

$$\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ, \gamma < 90^\circ$$

Trójkąt, którego kąty mają miary 65° i 40° , jest ostrokątny.

ĆWICZENIE 2

Na podstawie podanych miar kątów trójkąta ustal, jaki to rodzaj trójkąta.

a) $\alpha = 52^\circ, \beta = 39^\circ$

b) $\alpha = 64^\circ, \beta = 19^\circ$

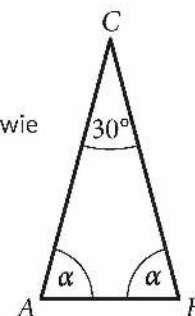
c) $\alpha = 28^\circ, \beta = 62^\circ$

PRZYKŁAD 3

Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym kąt między ramionami wynosi 30° . Oblicz miary kątów przy podstawie trójkąta.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy:

α – kąt przy podstawie



KROK 2 Zapisujemy równanie, korzystając ze wzoru na sumę miar kątów w trójkącie:

$$\alpha + \alpha + 30^\circ = 180^\circ$$

KROK 3 Rozwiązujemy równanie:

$$2\alpha = 150^\circ \quad | :2$$

$$\alpha = 75^\circ$$

Każdy kąt przy podstawie tego trójkąta ma miarę 75° .

ĆWICZENIE 3

Dany jest jeden z kątów trójkąta ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta, jeśli:

- a) $\sphericalangle ACB$ ma miarę 110° , b) $\sphericalangle BAC$ ma miarę 42° .

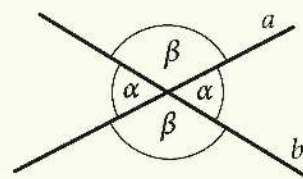
PODPOWIEDŹ

Kąty możemy oznaczać za pomocą liter. $\sphericalangle ACB$ to kąt o wierzchołku w punkcie C .

WAŻNA WIADOMOŚĆ

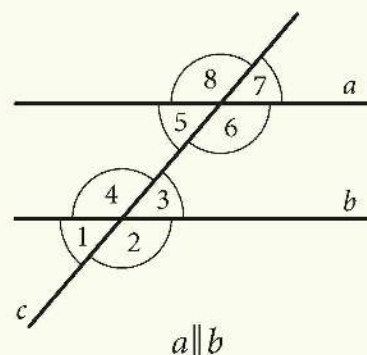
Dwie proste tworzą **kąty**:

- **wierzchołkowe**, które mają równe miary
- **przyległe**, które tworzą razem kąt półpełny:
 $\alpha + \beta = 180^\circ$



Między trzema prostymi tworzą się **kąty**:

- **odpowiadające**,
np. pary kątów: 1 i 5, 2 i 6, 3 i 7, 4 i 8.
Kąty te mają równe miary.
- **naprzemianległe**,
np. pary kątów: 1 i 7, 2 i 8, 3 i 5, 4 i 6.
Ich miary są równe.



TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że trójkąt może mieć nie więcej niż jeden kąt prosty.

KROK 1 Korzystamy ze wzoru na sumę miar kątów w trójkącie:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

KROK 2 Przyjmujemy, że np. $\alpha = 90^\circ$:

$$90^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

KROK 3 Zauważamy, że skoro miary pozostałych kątów mają razem 90° , to każdy z nich jest mniejszy od 90° :

$$\alpha = 90^\circ, \beta < 90^\circ, \gamma < 90^\circ$$

Trójkąt może mieć tylko jeden kąt prosty.



I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!

Udowodnij, że trójkąt może mieć nie więcej niż jeden kąt rozwarty.

PRZYKŁAD 4

Oblicz miary kątów α , β i γ w trójkącie ABC .

KROK 1 Zauważamy, że kąty oznaczone kolorem niebieskim to kąty wierzchołkowe:

$$\alpha = 52^\circ$$

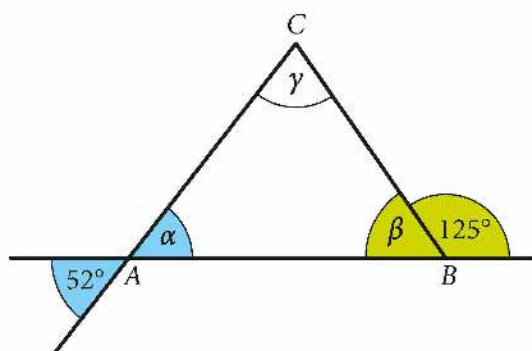
KROK 2 Stwierdzamy, że kąty oznaczone kolorem zielonym to kąty przyległe:

$$\beta = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

KROK 3 Obliczamy kąt γ , korzystając ze wzoru na sumę miar kątów w trójkącie:

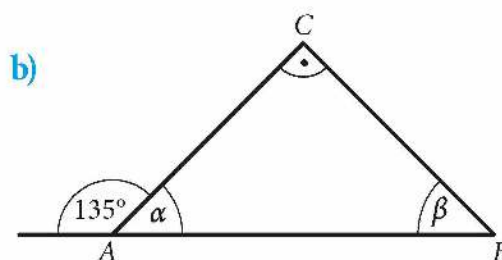
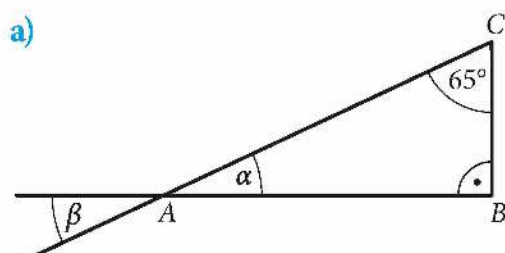
$$\gamma = 180^\circ - (52^\circ + 55^\circ) = 180^\circ - 107^\circ = 73^\circ$$

Miary kątów w narysowanym trójkącie wynoszą: $\alpha = 52^\circ$, $\beta = 55^\circ$, $\gamma = 73^\circ$.



ĆWICZENIE 4

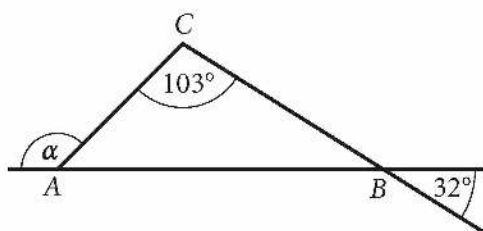
Oblicz miary kątów α i β .



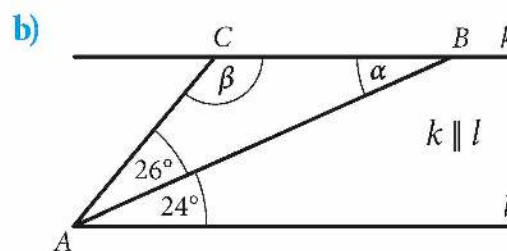
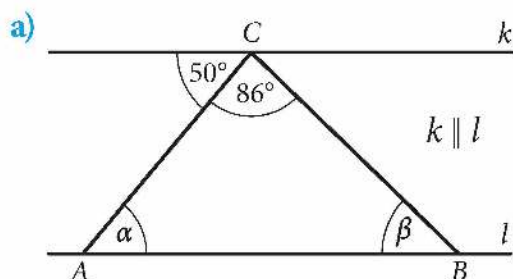
ZADANIA

Zbiór zadań, s. 210

1. Oblicz miarę kąta α przedstawionego na rysunku.



2. Oblicz miary kątów α i β .



3. Dany jest trójkąt o kątach α , β i γ . Oblicz miary tych kątów, jeśli wiesz, że ich stosunek jest jak:

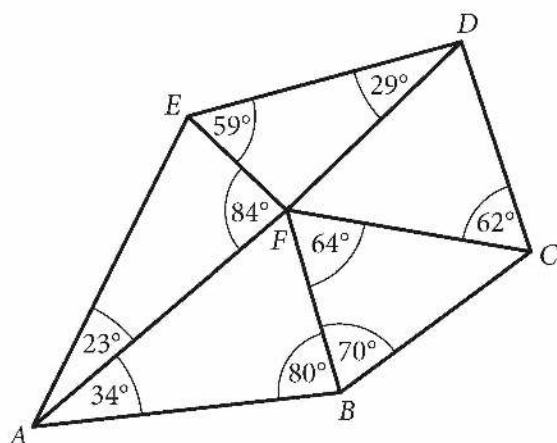
a) 1:2:3,

b) 1:3:5,

c) 2:3:7.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Geodeta zajmuje się m.in. pomiarami w terenie. Czasami przy ich wykonywaniu tworzy sieć trójkątów zwaną siatką triangulacyjną. Na podstawie rysunku oblicz miary brakujących kątów.



Punkty specjalne w trójkącie

NA POCZĄTEK

W konstrukcji latawca nic nie jest przypadkowe. Przyjrzyj się zdjęciu. Czy wiesz, w którym miejscu powinna być przymocowana linka sterująca latawcem?



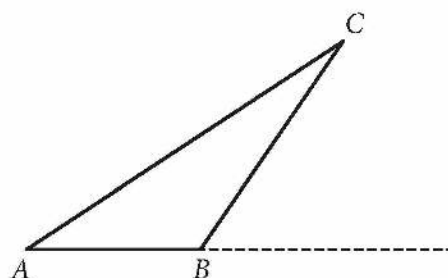
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wysokość trójkąta to najkrótszy odcinek łączący wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą przeciwległy bok trójkąta. Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywamy **ortocentrum trójkąta**.

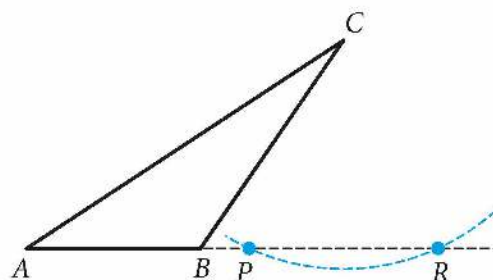
PRZYKŁAD 1

Narysuj trójkąt rozwartokątny i skonstruuj wysokość opuszczoną na prostą zawierającą najkrótszy bok.

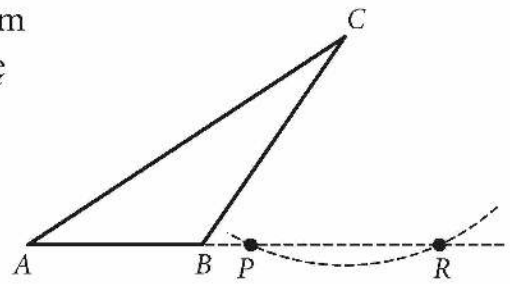
KROK 1 Rysujemy trójkąt rozwartokątny i prostą zawierającą najkrótszy bok.



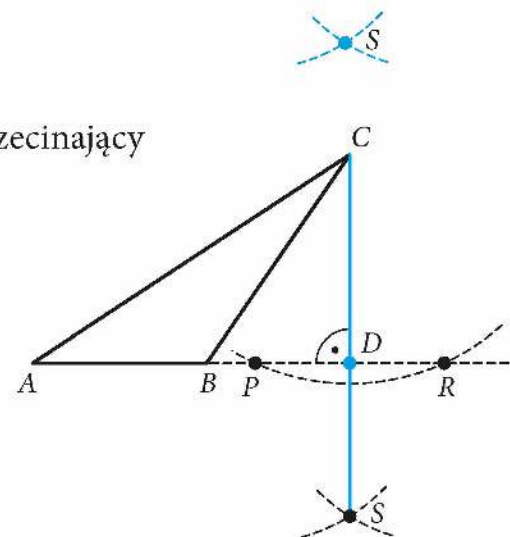
KROK 2 Z punktu C kreślimy łuk w taki sposób, żeby przeciął prostą AB w dwóch punktach P i R.



KROK 3 Z punktów P i R kreślimy łuki o tym samym promieniu w taki sposób, żeby przecięły się w punkcie S .



KROK 4 Łączymy punkty C i S , tworząc odcinek przecinający prostą AB w punkcie D .



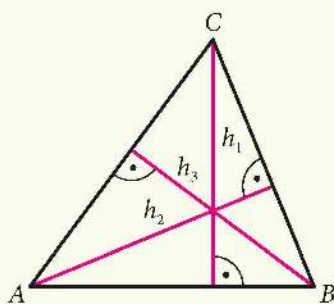
Odcinek CD jest szukaną wysokością trójkąta.

ĆWICZENIE 1

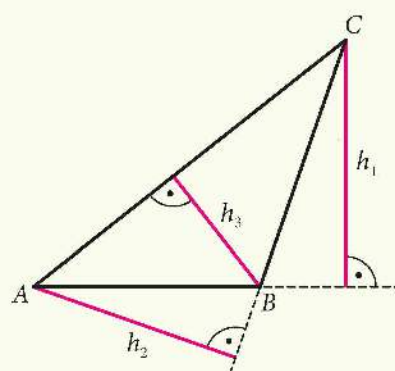
Narysuj dowolny trójkąt i wyznacz wszystkie jego wysokości. Zaznacz ortocentrum.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

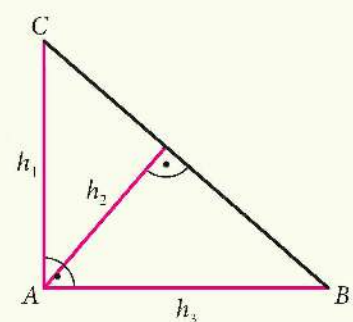
Każdy trójkąt ma trzy wysokości. Ich położenie zależy od rodzaju trójkąta.



W trójkącie ostrokątnym wszystkie wysokości leżą wewnątrz trójkąta.



W trójkącie rozwartokątnym dwie wysokości leżą poza trójkątem.

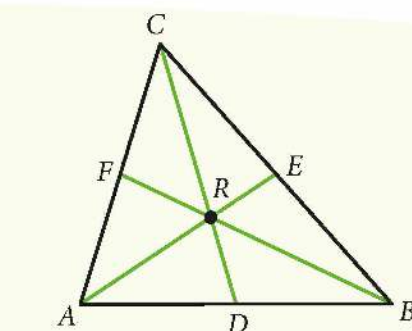


W trójkącie prostokątnym dwie wysokości pokrywają się z przyprostokątnymi trójkąta.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku. Środkowe trójkąta przecinają się zawsze w jednym punkcie wewnątrz trójkąta. Punkt ten nazywamy **środkiem ciężkości trójkąta**. Dzieli on każdą ze środkowych w stosunku 2:1.

$$|AR| = 2 \cdot |ER| \quad |BR| = 2 \cdot |FR| \quad |CR| = 2 \cdot |DR|$$



odcinki AE, BF i CD – środkowe trójkąta
R – punkt przecięcia środkowych trójkąta

PRZYKŁAD 2

Skonstruuj środkową boku trójkąta poprowadzoną do boku BC w narysowanym trójkącie.

KROK 1 Kreślimy dwa łuki z końców odcinka BC tak, by przecięły się w punktach P i R.

KROK 2 Prowadzimy prostą przez punkty P i R, w których przecięły się łuki.

D – punkt przecięcia prostej PR z bokiem BC

KROK 3 Zauważamy, że punkt D jest środkiem odcinka BC.

KROK 4 Łączymy wierzchołek A oraz punkt D.

Otrzymujemy odcinek AD, który jest środkową trójkąta poprowadzoną do boku BC.

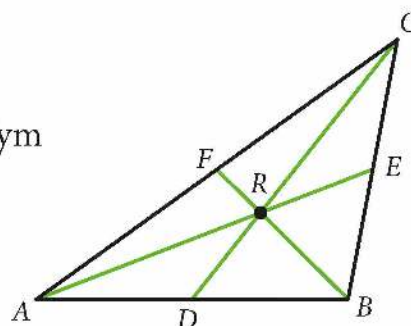
ĆWICZENIE 2

Skonstruuj wszystkie środkowe trójkąta rozwartokątnego.

PRZYKŁAD 3

Środkowe trójkąta ABC przecinają się w punkcie R odległym od wierzchołka B o 3,5 cm. Oblicz długość środkowej poprowadzonej do boku AC.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.



KROK 2 Korzystamy z własności środka ciężkości trójkąta, żeby wyznaczyć długość odcinka FR :

$$\frac{|BR|}{|FR|} = \frac{2}{1}$$

$$|FR| = \frac{1}{2} \cdot |BR| = \frac{1}{2} \cdot 3,5 = 1,75 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Wyznaczamy długość środkowej BF :

$$|BF| = 3,5 + 1,75 = 5,25 \text{ [cm]}$$

ĆWICZENIE 3

Środkowe trójkąta ABC przecinają się w punkcie R odległym od wierzchołka A o 5 cm, od wierzchołka B o 4 cm i od wierzchołka C o 6 cm. Oblicz sumę długości środkowych tego trójkąta.

To się liczy!

Wyznaczanie środka ciężkości danego elementu ma zastosowanie wszędzie tam, gdzie trzeba znaleźć punkt podparcia, który pozwala utrzymać równowagę. Umiejętność ta jest przydatna nie tylko w takich branżach, jak budownictwo, architektura czy lotnictwo, lecz także np. podczas tańca albo ćwiczeń na siłowni. Poniższe zadanie pomoże Wam nauczyć się, jak wyznaczać środek ciężkości.



ZADANIE BRANŻOWE

Pewien stolarz otrzymał nietypowe zlecenie. Klient zamówił u niego stół w kształcie trójkąta o bokach długości 160 cm, 160 cm i 140 cm. Ustal, w jakiej odległości od środka krótszego boku stolarz powinien zamocować nogę stołu, żeby mebel był stabilny.

ZADANIA

↻ Zbiór zadań, s. 211

1. Środkowa CD trójkąta ABC dzieli kąt przy wierzchołku C na kąty 20° , 40° i tworzy z bokiem AB kąt 60° . Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .
2. Odcinek AD jest środkową trójkąta ABC . Oblicz pole trójkąta ABC , jeżeli pole trójkąta ABD jest równe 12 cm^2 .

3 Trójkąty przystające

NA POCZĄTEK

Przedmioty produkowane masowo poddawane są ścisłej kontroli. Często wymaga się, by były tego samego kształtu i rozmiaru. Sprawdź, które ekierki mają ten sam kształt i rozmiar.



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Figury tego samego kształtu i rozmiaru nazywamy **przystającymi**.

Dwa **wielokąty** są **przystające**, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są sobie równe. Do zapisywania wielokątów przystających stosujemy symbol $\cong$, a boki i kąty w wielokącie przystającym oznaczamy znakiem apostrofu: '.

PRZYKŁAD 1

W narysowanym trójkącie równoramiennym ABC poprowadzono wysokość BP . Sprawdź, czy trójkąty ABP i BCP są przystające.

KROK 1 Zauważamy, że wysokość BP dzieli odcinek AC na dwa odcinki tej samej długości:

$$|AP| = |CP|$$

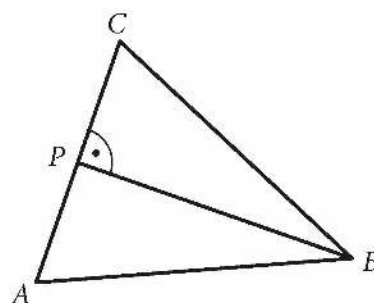
KROK 2 Stwierdzamy, że mamy trzy pary równych boków:

- $|AP| = |CP|$
- $|AB| = |BC|$
- odcinek BP wspólny dla obu trójkątów

KROK 3 Zauważamy, że trójkąty ABP i BCP mają równe miary kątów:

- $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = 90^\circ$
- $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BCP|$, ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny
- $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle CBP|$, gdyż wysokość podzieliła kąt ABC na dwie równe części

Trójkąty ABP i BCP są przystające.



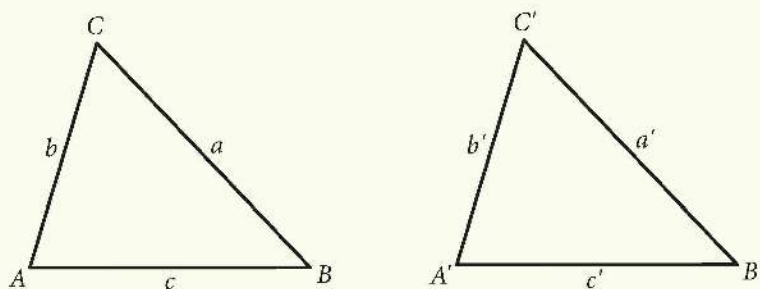
ĆWICZENIE 1

Narysuj równoległobok o bokach długości 3 cm i 5 cm. Zaznacz jego przekątną. Uzasadnij, że otrzymane trójkąty są przystające.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

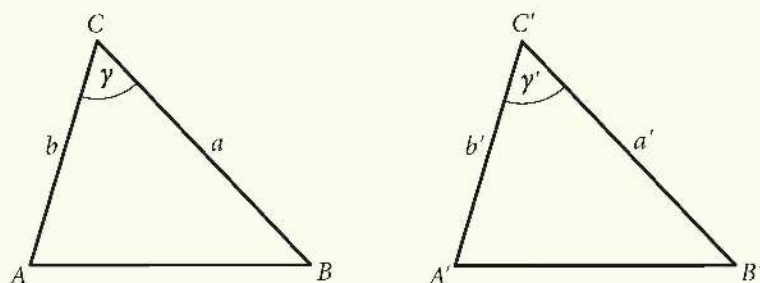
Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające. Jest to cecha przystawania trójkątów bok-bok-bok – w skrócie **cecha BBB**.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.



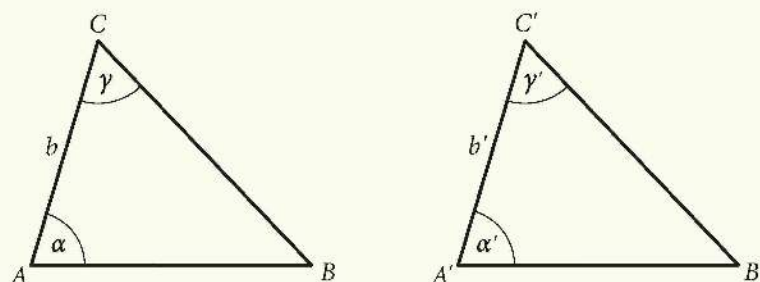
Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające. Jest to cecha przystawania trójkątów bok-kąt-bok – w skrócie **cecha BKB**.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $\gamma = \gamma'$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.



Jeśli bok i dwa kąty leżące przy tym boku w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm kątom leżącym przy nim w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające. Jest to cecha przystawania trójkątów kąt-bok-kąt – w skrócie **cecha KBK**.

Jeśli $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ i $\gamma = \gamma'$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.



PRZYKŁAD 2

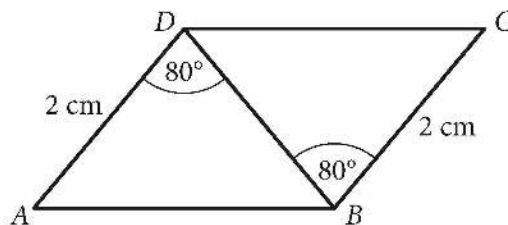
Uzasadnij, że trójkąty ABD i BCD są przystające.

ROZWIĄZANIE

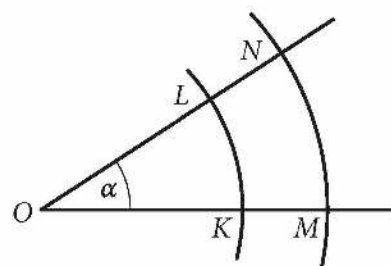
Trójkąty ABD i BCD są przystające, ponieważ:

- $|AD| = |BC| = 2 \text{ cm}$
- odcinek BD jest wspólny dla obu trójkątów
- $|\angle ADB| = |\angle CBD| = 80^\circ$

Spełniona jest cecha przystawania trójkątów BKB.

**ĆWICZENIE 2**

Jeden okrąg o środku w punkcie O i promieniu równym 2 cm przecina ramiona kąta α w punktach K i L , a drugi okrąg o tym samym środku i promieniu równym 3 cm przecina ramiona tego kąta w punktach M i N . Sprawdź, czy trójkąty KNO i LMO są przystające.

**PRZYKŁAD 3**

Ustal, czy narysowane trójkąty ACD i ABC są przystające.

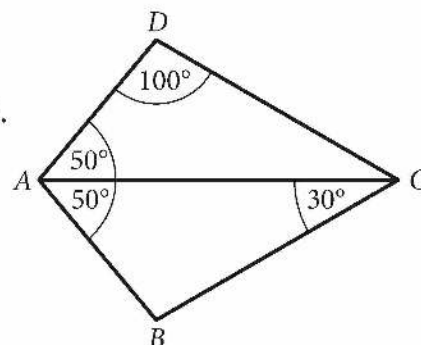
KROK 1 Obliczamy miarę brakującego kąta w trójkącie ACD :

$$|\angle ACD| = 180^\circ - 100^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

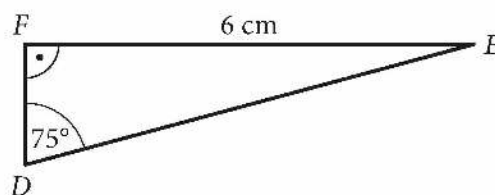
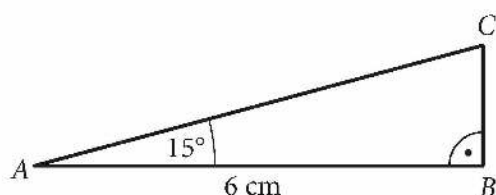
KROK 2 Zauważamy, że:

- bok AC jest wspólny dla obu trójkątów
 - dwa leżące przy nim kąty mają takie same miary
- $$|\angle CAD| = |\angle BAC| = 50^\circ, |\angle ACD| = |\angle ACB| = 30^\circ$$

Trójkąty ABC i ACD są przystające (cecha KBK).

**ĆWICZENIE 3**

Sprawdź, czy trójkąty ABC i DEF są przystające.



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Z odcinków o długościach a , b , c możemy zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy:
 $a + b > c$, gdzie c jest długością najdłuższego odcinka.
 Jest to tzw. **warunek istnienia trójkąta**.

PRZYKŁAD 4

Uzasadnij, że trójkąt może mieć boki długości 5 cm, 2 cm i 3,5 cm.

KROK 1 Dodajemy do siebie długości krótszych boków:

$$2 + 3,5 = 5,5$$

KROK 2 Porównujemy otrzymany wynik z długością najdłuższego boku:

$$5,5 > 5$$

Trójkąt może mieć boki długości 5 cm, 2 cm i 3,5 cm.

ĆWICZENIE 4

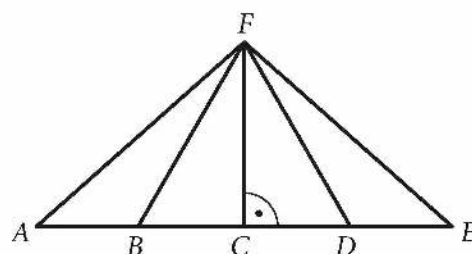
Sprawdź, czy boki trójkąta mogą mieć podane długości.

- a) 3 cm, 8 cm, 11 cm b) 7 dm, 8 dm, 16 dm c) 57 cm, 0,75 m, 13 dm

ZADANIA

 **Zbiór zadań, s. 211**

1. W narysowanym trójkącie AEF punkty B , C i D dzielą odcinek AE na cztery równe części. Wskaż cztery pary trójkątów przystających oraz odpowiednią cechę, która uzasadnia ich przystawanie.

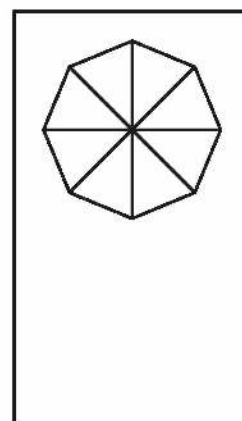


2. Danych jest pięć odcinków o długościach: 2 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm i 8 cm. Ile różnych trójkątów można zbudować z tych odcinków? Uzasadnij odpowiedź.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Szklarz wykonał szybę do drzwi w kształcie ośmiokąta foremnego, łącząc osiem przystających do siebie trójkątów. Wykonaj polecenia.

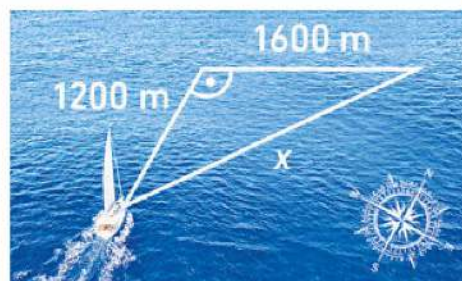
- a) Podaj miary kątów w trójkątach, których użył szklarz.
 b) Narysuj projekt szyby złożonej z 12 przystających do siebie trójkątów. Podaj miary ich kątów.



4 Trójkąty prostokątne

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się zdjęciu i trasie, którą pokonała żaglówka. Jak ustalisz jej odległość od miejsca startu?

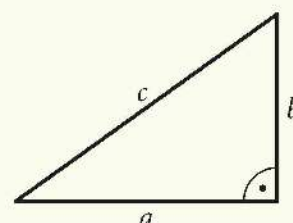


WAŻNA WIADOMOŚĆ

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jest to **twierdzenie Pitagorasa**.



PRZYKŁAD 1

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych równych 7 cm i 24 cm.

KROK 1 Z treści zadania wynika, że trójkąt jest prostokątny, więc korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$7^2 + 24^2 = c^2$$

KROK 2 Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c^2 = 49 + 576 = 625$$

$$c = \sqrt{625} = 25 \text{ [cm]}$$

ĆWICZENIE 1

Wyznacz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o podanych przyprostokątnych.

a) $a = 5 \text{ cm}, b = 12 \text{ cm}$

b) $a = 4 \text{ dm}, b = 6 \text{ dm}$

c) $a = 3 \text{ m}, b = 9 \text{ m}$

To się liczy!

Twierdzenie Pitagorasa pozwala obliczyć np. przekątną ekranu telewizora. Jeśli długość przekątnej podamy w calach, otrzymamy rozmiar ekranu. Przykładowo, telewizor o szerokości 70 cm i wysokości 40 cm ma ekran 32-calowy (32"). Poniższe zadanie nauczy Was, jak obliczyć rozmiar ekranu za pomocą twierdzenia Pitagorasa.



ZADANIE BRANŻOWE

Oblicz, ilu calowy jest telewizor o wymiarach 56 cm × 32 cm. Wynik zaokrąglaj do 1 cala. W obliczeniach przyjmij, że 1 cal = 2,54 cm.

PRZYKŁAD 2

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, jeżeli jego przeciwprostokątna ma 12 cm, a jedna z przyprostokątnych ma 6 cm.

KROK 1 Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, przyjmując, że np. $b = 6$:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + 6^2 = 12^2$$

KROK 2 Wyznaczamy długość drugiej przyprostokątnej:

$$a^2 = 144 - 36 = 108$$

$$a = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy obwód trójkąta:

$$L = 12 + 6 + 6\sqrt{3} = 18 + 6\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość a , a długość przeciwprostokątnej jest równa c .

a) $a = 6 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$

b) $a = 11 \text{ dm}$, $c = 16 \text{ dm}$

c) $a = 6 \text{ m}$, $c = 9 \text{ m}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to ten trójkąt jest prostokątny. Jest to **twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa**.

PRZYKŁAD 3

Uzasadnij, że trójkąt o bokach 4 cm, 12 cm i $4\sqrt{10}$ cm jest trójkątem prostokątnym. Oblicz jego pole.

KROK 1 Obliczamy kwadrat długości najdłuższego boku:

$$c^2 = (4\sqrt{10})^2 = 16 \cdot 10 = 160$$

KROK 2 Obliczamy sumę kwadratów długości pozostałych boków:

$$a^2 + b^2 = 4^2 + 12^2 = 16 + 144 = 160$$

KROK 3 Porównujemy otrzymane wyniki:

$4^2 + 12^2 = (4\sqrt{10})^2$, więc trójkąt jest prostokątny.

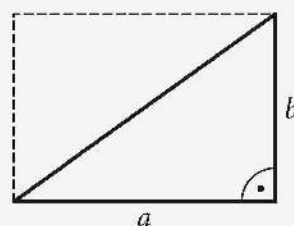
KROK 4 Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 24 \text{ [cm}^2\text{]}$$

PODPOWIEDŹ

Pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b jest równe połowie pola prostokąta o wymiarach $a \times b$.

$$P = \frac{1}{2}ab$$



ĆWICZENIE 3

Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest prostokątny. Oblicz jego pole.

a) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm

b) $a = 3$ m, $b = 6$ m, $c = 3\sqrt{5}$ m

ZADANIA

↪ Zbiór zadań, s. 212

1. Dany jest prostokąt o boku a i przekątnej d . Oblicz obwód i pole tego prostokąta.

a) $a = 15$ cm, $d = 25$ cm

b) $a = 6$ dm, $d = 6,5$ dm

c) $a = 6$ cm, $d = 4\sqrt{3}$ cm

2. Uzasadnij, że trójkąt o podanych bokach **nie** jest prostokątny.

a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 9$ cm

b) $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $c = 13$ cm

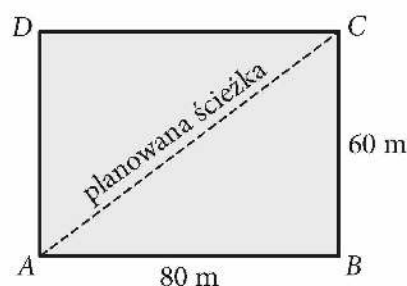
ZADANIA BRANŻOWE

3. Na rysunku przedstawiono drogę w parku, która prowadzi z punktu A do punktu C, wzdłuż boków trawnika w kształcie prostokąta. Projektant wytyczył nową ścieżkę wzdłuż przekątnej tego prostokąta.

Odpowiedz na pytania.

a) Jaka jest długość planowanej ścieżki?

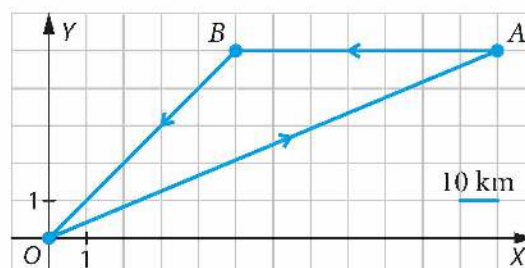
b) O ile metrów skróci się droga z punktu A do C?



Odległość punktów w układzie współrzędnych

NA POCZĄTEK

W układ współrzędnych wpisano trasę przelotu samolotu. Miejsce startu i lądowania są w punkcie $(0, 0)$. W jaki sposób ustalisz, czy trasa lotu ma ponad 270 km?



PRZYKŁAD 1

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A(1, 2)$ i $B(4, 6)$. Oblicz odległość między tymi punktami.

KROK 1 Zaznaczamy punkty A i B w układzie współrzędnych.

KROK 2 Prowadzimy przez punkt A prostą równoległą do osi OX , a przez punkt B – prostą równoległą do osi OY .

KROK 3 Odczytujemy z układu współrzędnych długości odcinków AC i BC :

$$|AC| = 3, |BC| = 4$$

KROK 4 Zauważamy, że skoro trójkąt ABC jest prostokątny, to możemy zastosować twierdzenie Pitagorasa:

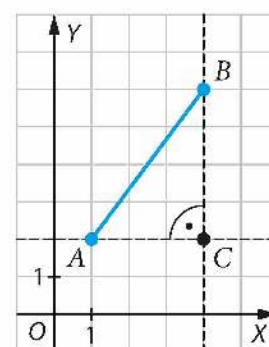
$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

KROK 5 Obliczamy długość odcinka AB :

$$|AB|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$|AB| = 5$$

Odległość między punktami A i B jest równa 5.



C – punkt przecięcia prostych

PODPOWIEDŹ

Odległość między punktami A i B to długość odcinka łączącego te punkty.

ĆWICZENIE 1

Narysuj w układzie współrzędnych odcinek AB , a następnie oblicz jego długość.

a) $A(3, -1), B(9, 7)$

b) $A(-4, 0), B(8, -5)$

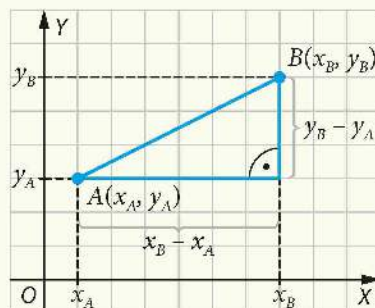
c) $A(-1, 3), B(6, 2)$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Odległość między dowolnymi dwoma punktami $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ możemy obliczyć przy pomocy twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**PRZYKŁAD 2**

Oblicz odległość punktu $A(4, -8)$ od początku układu współrzędnych.

ROZWIĄZANIE

$$|AO| = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-8 - 0)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Punkt A jest odległy o $4\sqrt{5}$ od początku układu współrzędnych.

ĆWICZENIE 2

Wyznacz odległość podanego punktu od początku układu współrzędnych.

- a) $A(-3, 4)$ b) $B(-5, -10)$ c) $C(2, 7)$

PRZYKŁAD 3

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym, jeśli $A(1, -2)$, $B(3, 2)$, $C(-5, 6)$. Oblicz obwód tego trójkąta.

KROK 1 Obliczamy długości odcinków AB , BC , AC :

$$|AB| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|BC| = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$|AC| = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (6 - (-2))^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

KROK 2 Obliczamy kwadrat długości najdłuższego boku trójkąta:

$$|AC|^2 = 10^2 = 100$$

KROK 3 Obliczamy sumę kwadratów długości pozostałych boków:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 20 + 80 = 100$$

KROK 4 Zauważamy, że skoro zachodzi równość $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, to trójkąt ABC jest prostokątny.

KROK 5 Obliczamy obwód trójkąta ABC :

$$L = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 10 = 10 + 6\sqrt{5}$$

ĆWICZENIE 3

Uzasadnij, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym, jeśli $A(-1, 3)$, $B(4, 1)$, $C(2, -4)$. Oblicz pole trójkąta.

To się liczy!

Układ współrzędnych ma wiele zastosowań w geografii, kartografii i nawigacji. Na przykład, położenie jakiejś miejscowości określamy za pomocą współrzędnych geograficznych. Podajemy zazwyczaj stopnie, minuty i sekundy, czyli współrzędne w systemie sześćdziesiątkowym. Natomiast urządzenia GPS stosują przeważnie współrzędne w systemie dziesiętkowym. Poniższe zadanie pokaże Wam, jak zamieniać współrzędne geograficzne z jednego formatu na drugi.



ZADANIE BRANŻOWE

Współrzędne geograficzne podane za pomocą stopni, minut i sekund zamienia się na ułamki dziesiętne według wzoru:

$$\text{stopnie} + \frac{\text{minuty}}{60} + \frac{\text{sekundy}}{3600}$$

Zamień współrzędne podanych miast na system dziesiętkowy. Wynik zaokrąglaj do czwartego miejsca po przecinku.

a) Gdańsk $18^{\circ}38'E$ $54^{\circ}22'N$ b) Szczecin $14^{\circ}34'E$ $53^{\circ}26'N$

ZADANIA

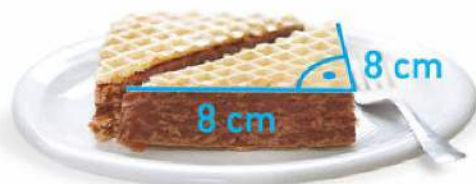
Zbiór zadań, s. 212

- Sprawdź, który z odcinków jest dłuższy: AB czy CD .
a) $A(1, 2)$, $B(5, 5)$, $C(3, 2)$, $D(8, 0)$ b) $A(-3, -1)$, $B(2, 4)$, $C(1, 1)$, $D(4, -5)$
- Ustal, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-5, -4)$, $B(5, -3)$, $C(3, 2)$, $D(-7, 1)$ jest równoległobokiem.
- Oblicz odległość wierzchołka D kwadratu $ABCD$ od początku układu współrzędnych, jeśli $A(-8, 0)$, $B(-2, 0)$, $C(-2, -6)$.

6 Pole trójkąta

NA POCZĄTEK

Z kawałka tortu Pischingera [czyt.: piszinger] w kształcie prostokąta o wymiarach $32\text{ cm} \times 16\text{ cm}$ cukiernik wycina kawałki w kształcie trójkątów prostokątnych równoramiennych. W jaki sposób ustalisz, ile trójkątów powstanie z dużego kawałka tortu?

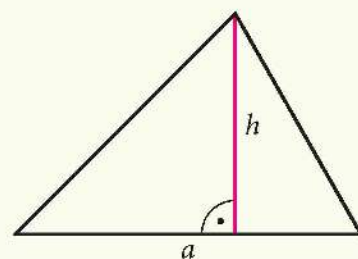


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pole trójkąta możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2}ah$$

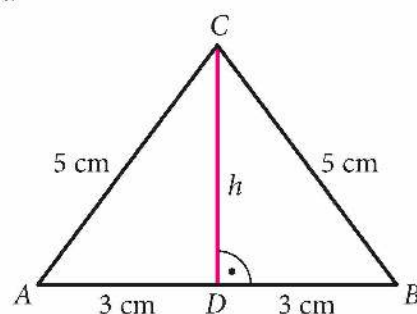
gdzie a jest długością boku trójkąta, natomiast h to długość wysokości opuszczonej na ten bok.



PRZYKŁAD 1

Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego podstawa jest równa 6 cm , a ramiona mają po 5 cm .

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.



KROK 2 Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD , żeby obliczyć wysokość trójkąta ABC :

$$h^2 + 3^2 = 5^2$$

$$h^2 = 25 - 9 = 16$$

$$h = 4\text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 1

Oblicz pole trójkąta równoramiennego o podstawie a i ramieniu x .

a) $a = 8 \text{ cm}$, $x = 5 \text{ cm}$

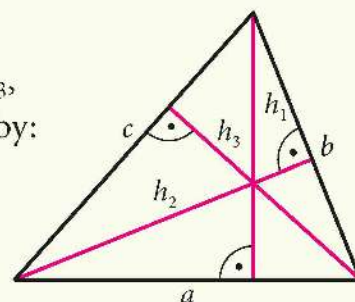
b) $a = 10 \text{ cm}$, $x = 13 \text{ cm}$

c) $a = 8 \text{ cm}$, $x = 6 \text{ cm}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeśli boki trójkąta mają długości a , b , c , zaś wysokości opuszczone na te boki są odpowiednio równe h_1 , h_2 , h_3 , to wzór na pole trójkąta możemy zapisać na trzy sposoby:

$$P = \frac{1}{2}ah_1 \quad P = \frac{1}{2}bh_2 \quad P = \frac{1}{2}ch_3$$



PRZYKŁAD 2

Oblicz długość boku AC w trójkącie ABC .

KROK 1 Obliczamy pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BE| = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot 6 = 3 \cdot |AC|$$

KROK 2 Zauważamy, że pole nie zmieni się, gdy do wzoru podstawimy inny bok i inną wysokość:

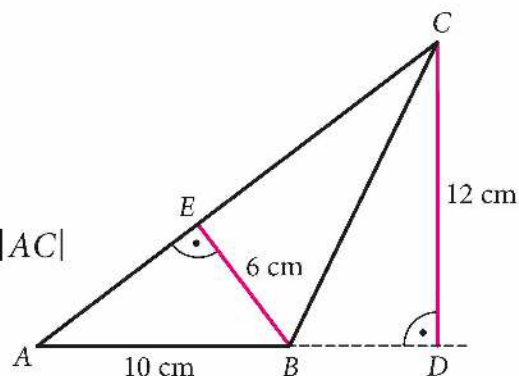
$$P = \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60 \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 3 Rozwiązujemy otrzymane w ten sposób równanie:

$$3 \cdot |AC| = 60 \quad |:3$$

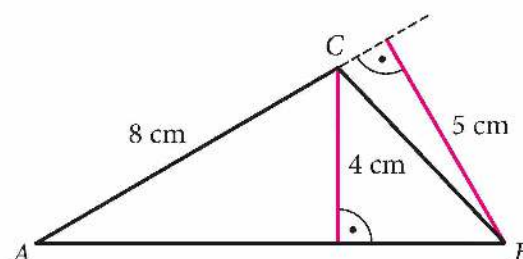
$$|AC| = 20 \text{ [cm]}$$

Bok AC ma długość 20 cm .



ĆWICZENIE 2

Oblicz długość boku AB w trójkącie ABC .



WAŻNA WIADOMOŚĆ

W trójkącie równobocznym o boku a do obliczania wysokości h i pola P używamy następujących wzorów:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że w dowolnym trójkącie równobocznym o boku a wysokość ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

KROK 1 Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego, będącego połową trójkąta równobocznego:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

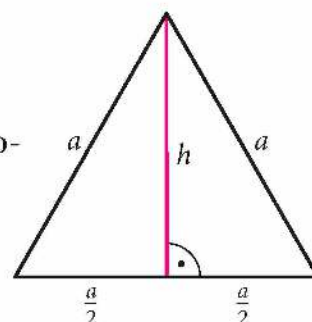
KROK 2 Przekształcamy równanie tak, żeby wyznaczyć h :

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!**

Wykaż, że pole dowolnego trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

PRZYKŁAD 3

Oblicz wysokość i pole trójkąta równobocznego o boku $a = 12$ cm.

ROZWIĄZANIE

Wysokość trójkąta wynosi: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ [cm]

Pole trójkąta wynosi: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ [cm²]

ĆWICZENIE 3

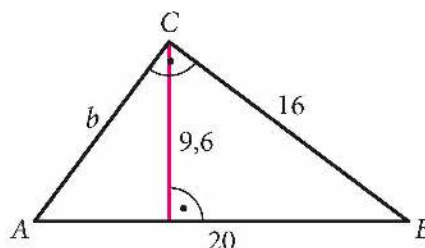
Dany jest trójkąt równoboczny o boku $a = 14$ cm. Oblicz jego wysokość i pole.

ZADANIA

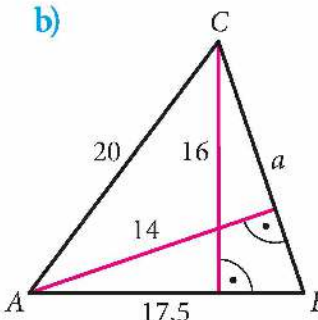
Zbiór zadań, s. 213

1. Oblicz pole trójkąta oraz brakującą długość boku.

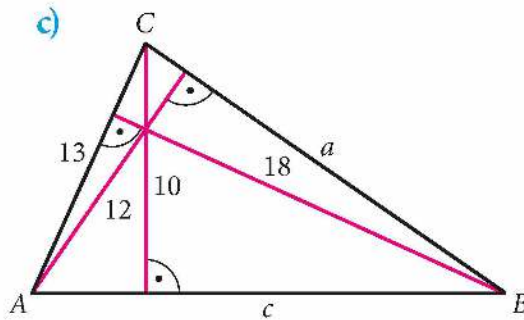
a)



b)



c)



2. Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego pole jest równe:

a) $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$,

b) $25\sqrt{3} \text{ dm}^2$,

c) $\sqrt{3} \text{ m}^2$.

3. Oblicz pole trójkąta równobocznego o wysokości:

a) $6\sqrt{3} \text{ cm}$,

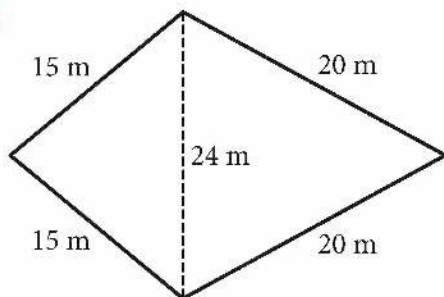
b) $2\sqrt{3} \text{ dm}$,

c) 2 m .

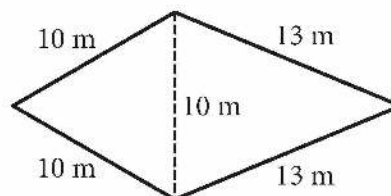
ZADANIA BRANŻOWE

4. Ogrodnik stosuje pewien nawóz do podłoża w ilości 5 kg na 100 m^2 . Oblicz, ile kilogramów nawozu potrzebuje, żeby nawieźć trawnik, którego kształt przedstawiono na rysunku. Do obliczeń przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1,7$.

a)



b)



5. Stolarz zbudował stół, którego blat był w kształcie sześciokąta foremnego o boku równym 1 m. Wykonaj polecenia.

a) Oblicz pole powierzchni blatu. Do obliczeń przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1,7$.b) Sprawdź, czy prostokątnym obrusem o wymiarach $2 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}$ da się całkowicie zakryć blat tego stołu.

PODPowiedź

Pole sześciokąta foremnego o boku a jest równe sześciokrotności pola trójkąta równobocznego o boku a .

$$P = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Trójkąty o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ oraz $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się zdjęciu. Czy potrafisz podać pozostałe wymiary przedniego żagla? Jak to zrobisz?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Długość przekątnej kwadratu o boku a jest równa $a\sqrt{2}$.

PRZYKŁAD 1

Oblicz długość przekątnej kwadratu o obwodzie równym 12 cm.

KROK 1 Obliczamy długość boku kwadratu:

$$a = 12 : 4 = 3 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Podstawiamy $a = 3 \text{ cm}$ do wzoru na długość przekątnej kwadratu:

$$d = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

Przekątna kwadratu ma długość $3\sqrt{2} \text{ cm}$.

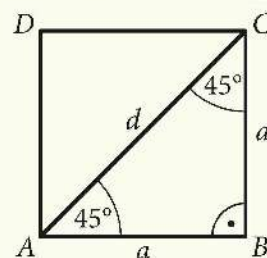
ĆWICZENIE 1

Dany jest kwadrat o obwodzie równym 36 cm. Oblicz długość jego przekątnej.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Trójkąt o kątach $45^\circ, 45^\circ$ i 90° jest połową kwadratu. Jego boki mają długość:

$$|AB| = |BC| = a \quad |AC| = d = a\sqrt{2}$$



PRZYKŁAD 2

Oblicz obwód i pole kwadratu, którego przekątna ma długość 10 cm.

KROK 1 Obliczamy długość boku a ze wzoru na długość przekątnej kwadratu:

$$d = a\sqrt{2} = 10$$

$$a\sqrt{2} = 10 \quad | : \sqrt{2}$$

$$a = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

KROK 2 Usuwamy niewymierność z mianownika:

$$a = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy obwód kwadratu:

$$L = 4a = 4 \cdot 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy pole kwadratu:

$$P = a^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obwód kwadratu wynosi $20\sqrt{2}$ cm, a pole 50 cm^2 .

PODPOWIEDŹ

Jeśli w mianowniku ułamka znajduje się liczba niewymierna, np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, należy ją usunąć, mnożąc licznik i mianownik ułamka przez tę liczbę.

ĆWICZENIE 2

Oblicz obwód i pole kwadratu o przekątnej d .

a) $d = 7\sqrt{2} \text{ cm}$

b) $d = 4 \text{ dm}$

c) $d = 12 \text{ m}$

TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że długość przekątnej kwadratu o boku a wynosi $a\sqrt{2}$.

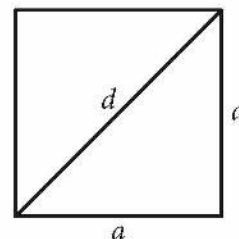
KROK 1 Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego, będącego połową kwadratu:

$$a^2 + a^2 = d^2$$

KROK 2 Wyznaczamy d :

$$d^2 = 2a^2$$

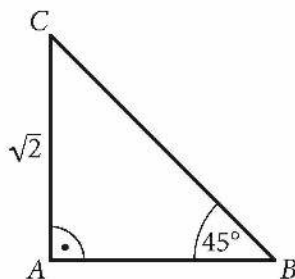
$$d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

**I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!**

Udowodnij, że pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej a wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}a^2$.

PRZYKŁAD 3

Oblicz obwód trójkąta ABC .



KROK 1 Zauważamy, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym równoramiennym:

$$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 45^\circ$$

KROK 2 Stwierdzamy, że przyprostokątne są równej długości:

$$|AB| = |AC| = a = \sqrt{2}$$

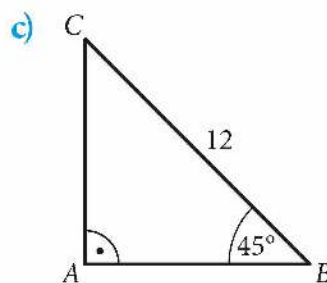
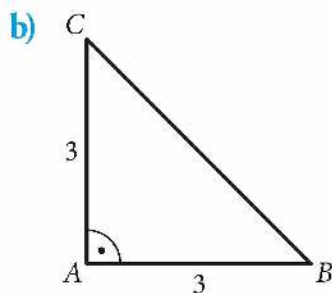
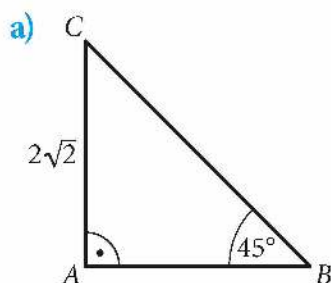
KROK 3 Obliczamy długość przeciwprostokątnej za pomocą wzoru na najdłuższy bok trójkąta o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$:

$$|BC| = a\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

KROK 4 Obliczamy obwód trójkąta: $L = 2 + 2\sqrt{2}$.

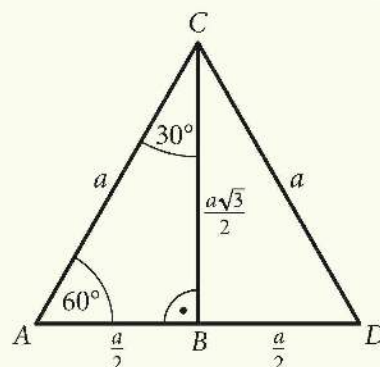
ĆWICZENIE 3

Oblicz obwód trójkąta ABC .

**WAŻNA WIADOMOŚĆ**

Trójkąt o kątach $30^\circ, 60^\circ$ i 90° jest połową trójkąta równobocznego. Jego boki mają długość:

$$|AC| = a \quad |AB| = \frac{a}{2} \quad |BC| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

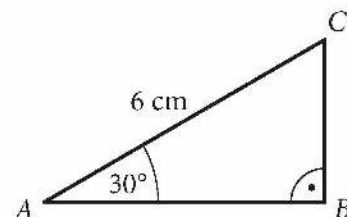


PRZYKŁAD 4

Oblicz obwód i pole trójkąta ABC .

KROK 1 Zauważamy, że trójkąt ABC jest trójkątem o kątach 30° , 60° i 90° :

$$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$



KROK 2 Obliczamy brakujące długości boków, korzystając z odpowiednich wzorów:

$$|BC| = \frac{a}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ [cm]}$$

$$|AB| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy obwód tego trójkąta:

$$L = |AC| + |BC| + |AB| = 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 9 + 3\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obwód trójkąta wynosi $(9 + 3\sqrt{3})$ cm, a pole $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm².

ĆWICZENIE 4

Oblicz obwód i pole trójkąta prostokątnego o kątach ostrych równych 30° i 60° , którego przeciwprostokątna ma podaną długość.

a) 4 cm

b) 1 m

c) $6\sqrt{3}$ cm

PRZYKŁAD 5

Oblicz obwód trójkąta ABC .

KROK 1 Zauważamy, że trójkąt ABC jest trójkątem o kątach 30° , 60° i 90° :

$$|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

KROK 2 Stwierdzamy, że boki trójkąta ABC mają następujące długości:

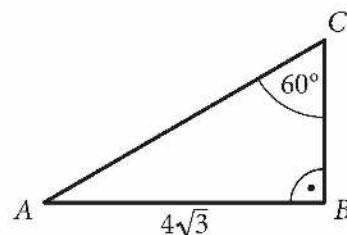
$$|AC| = a \quad |AB| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad |BC| = \frac{a}{2}$$

KROK 3 Rozwiązujemy równanie, żeby wyznaczyć długość a :

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \quad | \cdot 2$$

$$a\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \quad | : \sqrt{3}$$

$$a = 8$$



KROK 4 Obliczamy długość boku BC :

$$|BC| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

KROK 5 Obliczamy obwód trójkąta:

$$|AC| + |BC| + |AB| = 8 + 4 + 4\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3}$$

ĆWICZENIE 5

Oblicz obwód i pole trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° , którego dłuższa przyprostokątna ma długość równą:

- a) $10\sqrt{3}$ cm, b) 15 cm, c) 12 cm.

ZADANIA

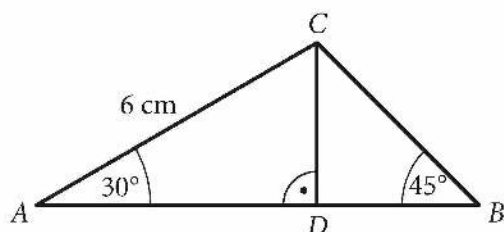
🔄 Zbiór zadań, s. 213

1. Oblicz obwód i pole trójkąta prostokątnego równoramiennego:

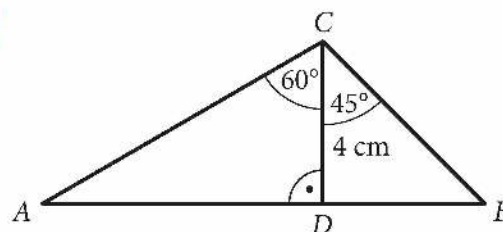
- a) o przyprostokątnej równej 12 cm. b) o przeciwprostokątnej równej 8 cm.

2. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC .

a)

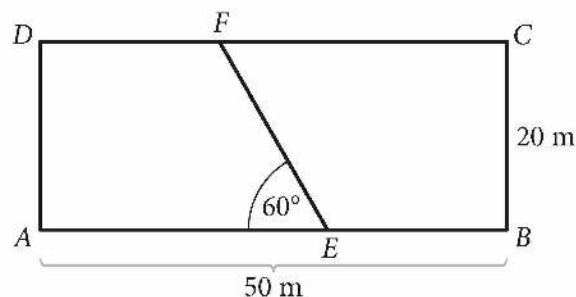
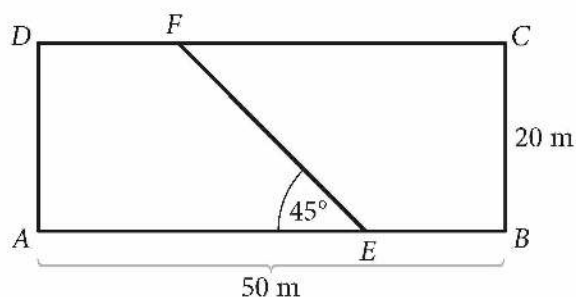


b)



ZADANIA BRANŻOWE

3. Właściciel działki może ją podzielić na dwie przystające działki na dwa sposoby – przedstawione na poniższych rysunkach.



Ustal, ile metrów siatki będzie potrzebował do ogrodzenia czworokątnej działki $AEFD$ w pierwszym przypadku, a ile w drugim. Do obliczeń przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1,4$ i $\sqrt{3} \approx 1,7$.

Czworokąty –
pola i obwody

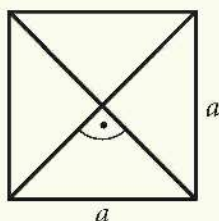
NA POCZĄTEK

Czy na podstawie informacji w ogłoszeniu da się ustalić, jakie wymiary może mieć działka?

Sprzedam działkę
za miastem
o pow. 16 a.

Tanio!!!

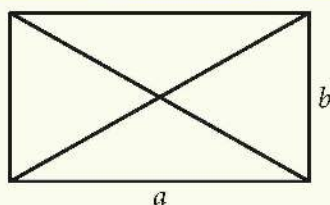
WAŻNA WIADOMOŚĆ



$$P = a^2$$

$$L = 4a$$

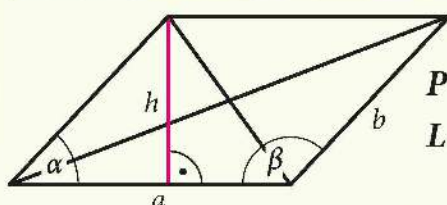
W każdym **kwadracie** przekątne są równej długości, przecinają się w połowie i pod kątem prostym.



$$P = ab$$

$$L = 2a + 2b$$

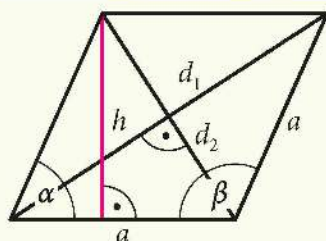
W każdym **prostokącie** przekątne są równej długości i przecinają się w połowie.



$$P = ah$$

$$L = 2a + 2b$$

W każdym **równoległoboku** przekątne przecinają się w połowie, a suma kątów $\alpha + \beta = 180^\circ$.

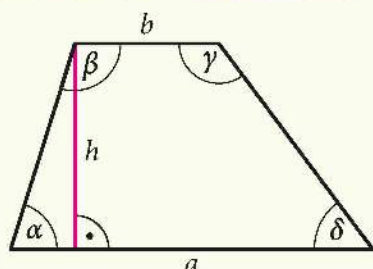


$$P = ah$$

$$P = \frac{d_1 d_2}{2}$$

$$L = 4a$$

W każdym **rombie** przekątne przecinają się w połowie, a suma kątów $\alpha + \beta = 180^\circ$.



$$P = \frac{(a+b)h}{2}$$

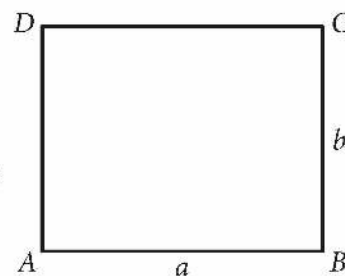
W każdym **trapezie** suma kątów $\alpha + \beta = 180^\circ$ oraz $\gamma + \delta = 180^\circ$.
W trapezie równoramiennym przekątne są równej długości, a kąty $\alpha = \delta$ oraz $\beta = \gamma$.

PRZYKŁAD 1

Oblicz pole prostokąta o obwodzie 36 cm, jeżeli stosunek długości boków w tym prostokącie jest równy 4:5.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.

a – długość prostokąta
 b – szerokość prostokąta



KROK 2 Korzystamy z informacji o stosunku długości boków prostokąta, żeby wyznaczyć długość jednego boku:

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{4} \quad a = \frac{5}{4}b$$

KROK 3 Układamy równanie opisujące obwód prostokąta:

$$L = 2a + 2b = 2 \cdot \frac{5}{4}b + 2b = 36$$

KROK 4 Rozwiązujemy równanie, żeby ustalić szerokość prostokąta:

$$2,5b + 2b = 36$$

$$4,5b = 36 \quad | : 4,5$$

$$b = 8 \text{ [cm]}$$

KROK 5 Wyznaczamy długość prostokąta:

$$a = \frac{5}{4}b = \frac{5}{4} \cdot 8 = 10 \text{ [cm]}$$

KROK 6 Obliczamy pole prostokąta:

$$P = ab = 10 \cdot 8 = 80 \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 1

Oblicz pole prostokąta o obwodzie L , jeśli stosunek długości jego boków jest równy k .

a) $L = 20 \text{ cm}$, $k = 1:4$

b) $L = 55 \text{ cm}$, $k = 3:8$

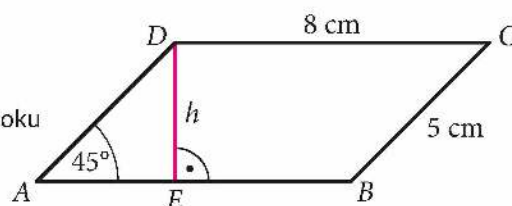
c) $L = 39 \text{ cm}$, $k = 3:10$

PRZYKŁAD 2

Oblicz pole równoległoboku o kącie ostrym 45° i bokach równych 5 cm i 8 cm.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.

h – wysokość równoległoboku



KROK 2 Obliczamy wysokość równoległoboku, korzystając z długości boków w trójkącie prostokątnym równoramiennym ADE :

$$|AD| = h\sqrt{2} = 5 \text{ [cm]}$$

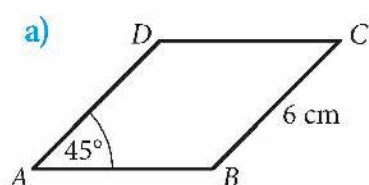
$$h = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2,5\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy pole równoległoboku:

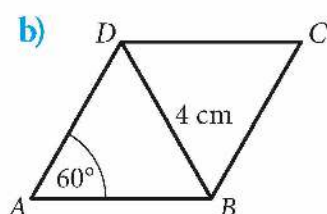
$$P = ah = 8 \cdot 2,5\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 2

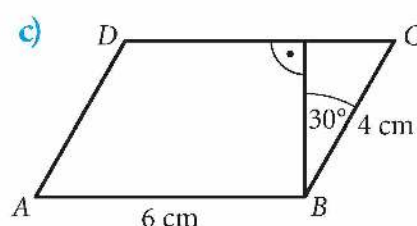
Oblicz pole figury.



romb



romb



równoległobok

To się liczy!

Umiejętność wyznaczania pól i obwodów figur przydaje się w życiu prywatnym i zawodowym. Wzorów na pola i obwody użyjemy, żeby policzyć np. ilość materiałów potrzebnych do remontu. Poniższe zadanie pokaże Wam, że warto znać wzory na obwody i pola różnych figur.



ZADANIE BRANŻOWE

Oblicz koszt położenia wykładziny podłogowej w pokoju w kształcie kwadratu, którego bok ma długość 3 m. Wykładzina w cenie 28 zł/m² jest sprzedawana w rolkach o tej samej szerokości co pokój. Dookoła trzeba przykręcić listwę podłogową, którą kupuje się na sztuki. Listwa o długości 2,5 m jest dostępna w cenie 8,50 zł/szt.

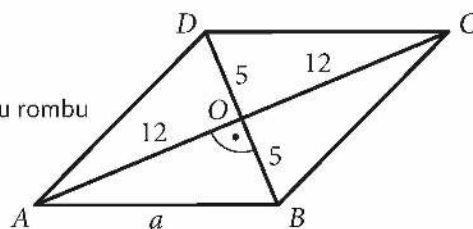
Na zdjęciu pokazano planimetr, czyli, przyrząd do wyznaczania pola powierzchni figur płaskich.

PRZYKŁAD 3

Oblicz pole i obwód rombu o przekątnych równych 24 cm i 10 cm.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.

a – długość boku rombu



KROK 2 Obliczamy pole rombu:

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120 \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 3 Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABO, żeby wyznaczyć długość boku rombu:

$$a^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$a = \sqrt{169} = 13 \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy obwód rombu:

$$L = 4a = 4 \cdot 13 = 52 \text{ [cm]}$$

Pole rombu wynosi 120 cm^2 , a obwód 52 cm.

ĆWICZENIE 3

Oblicz pole i obwód rombu o przekątnych d_1 i d_2 .

a) $d_1 = 10 \text{ cm}$ i $d_2 = 4 \text{ cm}$ b) $d_1 = 4 \text{ cm}$ i $d_2 = 6 \text{ cm}$ c) $d_1 = 3 \text{ cm}$ i $d_2 = 4 \text{ cm}$

PRZYKŁAD 4

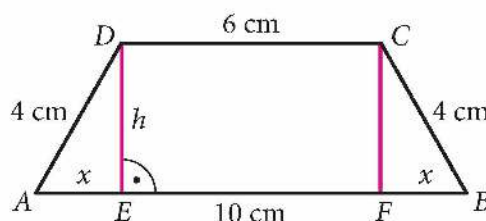
Oblicz pole trapezu równoramiennego o bokach 10 cm, 4 cm, 6 cm i 4 cm.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.

h – wysokość trapezu

KROK 2 Obliczamy długość odcinka AE:

$$|AE| = |BF| = x = (10 - 6) : 2 = 2 \text{ [cm]}$$



KROK 3 Wyznaczamy wysokość trapezu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED:

$$x^2 + h^2 = 4^2$$

$$h^2 = 16 - 4 = 12$$

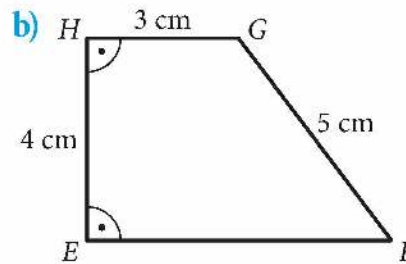
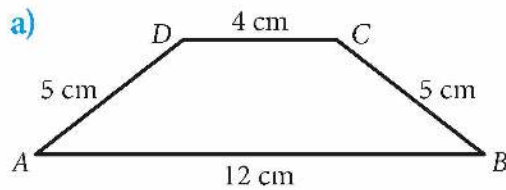
$$h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy pole trapezu:

$$P = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(10+6) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

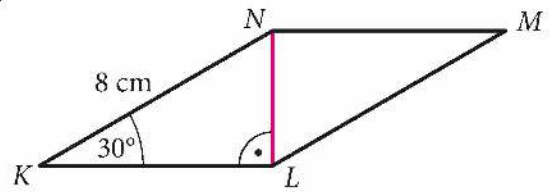
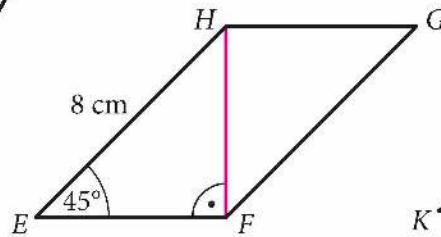
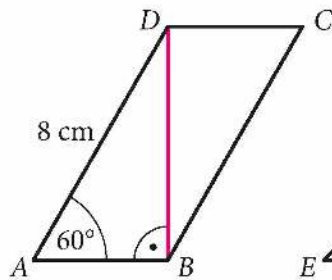
ĆWICZENIE 4

Oblicz pole trapezu.

**ZADANIA**

Zbiór zadań, s. 214

1. Ustal, który z przedstawionych równoległoboków ma największy obwód, a który – największe pole.



2. Oblicz pole i obwód rombu, w którym kąt ostry ma 60° oraz:

a) krótsza przekątna ma 6 cm,

b) dłuższa przekątna ma 12 cm.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Stolarz pociął listwę o szerokości 55 mm na trapezy równoramienne o kącie ostrym 45° . Kolorem zielonym zaznaczono na rysunku odpady w kształcie trójkątów. Z otrzymanych trapezów skleił ramę o wymiarach przedstawionych na rysunku. Odpowiedz na pytania.

a) Jaka jest długość listwy użytej do wykonania ramy?



b) Jaki procent listwy stanowią odpady?
Wynik podaj z dokładnością do 0,01%.



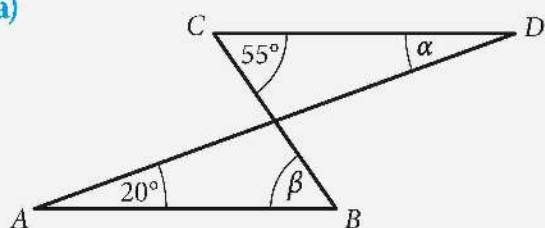
Powtórzenie rozdziału

WIELOKĄTY

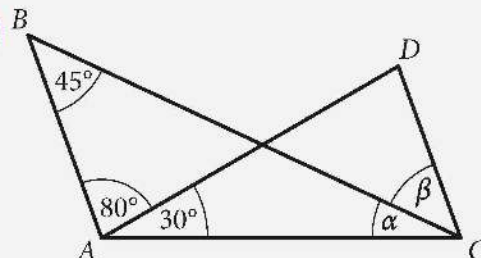
ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Odcinki AB i CD są równoległe. Wyznacz miary kątów α i β .

a)

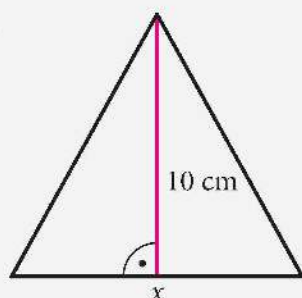


b)

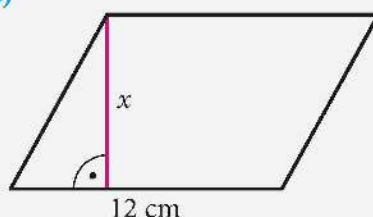


- 2 Narysuj sześciokąt foremny o boku 4 cm i podziel go w dowolny sposób na 12 trójkątów przystających. Podaj miary kątów i długości boków tych trójkątów.
- 3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Boki trójkąta mogą mieć długości równe
- A. 29 cm, 13 cm, 14 cm. C. 6 dm, 13 dm, $\sqrt{400}$ dm.
- B. $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{6}$ m. D. 2 m, 30 dm, 170 cm.
- 4 Sprawdź, czy trójkąt ABC o wierzchołkach $A(-1, 6)$, $B(6, 5)$, $C(0, -2)$ jest równoramienny.
- 5 Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego najdłuższy bok ma 16 cm.
- 6 W trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej $\sqrt{40}$ cm jedna z przyprostokątnych jest trzykrotnie dłuższa od drugiej. Wskaż zdania prawdziwe.
- A. Długości przyprostokątnych wynoszą 3 cm i 9 cm.
- B. Jedna z przyprostokątnych jest dłuższa od drugiej o 4 cm.
- C. Pole tego trójkąta jest równe 6 cm^2 .
- 7 Oblicz pole prostokąta, jeżeli jeden bok prostokąta jest o 20% dłuższy od drugiego, a jego obwód jest równy 88 cm.
- 8 Oblicz długość x , jeśli wiesz, że pole figury wynosi 60 cm^2 .

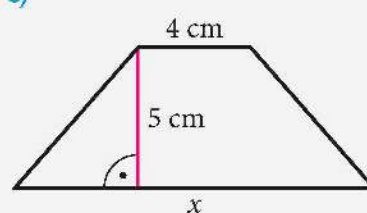
a)



b)



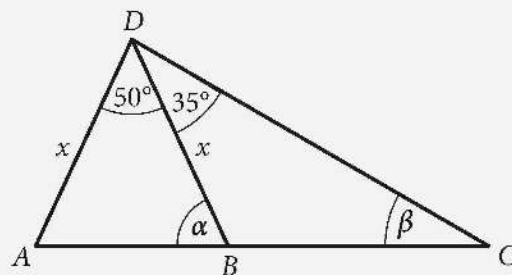
c)



SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Wskaż zdania prawdziwe.

A. Kąt α na rysunku ma miarę 65° .
 B. Suma miar kątów α i β wynosi 95° .
 C. Trójkąt BCD jest równoramienny.



- 2 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

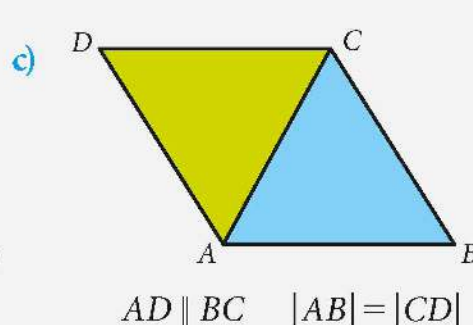
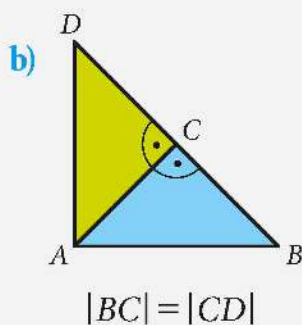
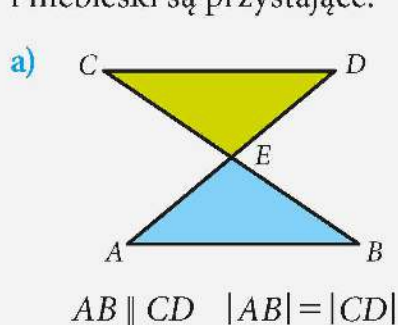
Długości dwóch boków trójkąta wynoszą 5 cm i 6 cm. Długość trzeciego boku może być równa

A. 10 cm. B. 11 cm. C. 12 cm. D. 13 cm.

- 3 Ile wynosi pole trójkąta równobocznego o wysokości równej $4\sqrt{3}$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 8 B. $8\sqrt{3}$ C. 16 D. $16\sqrt{3}$

- 4 Podaj cechę przystawania, na podstawie której można stwierdzić, że trójkąty zielony i niebieski są przystające.



- 5 Który z trójkątów o podanych bokach jest trójkątem prostokątnym? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$ B. 1, $1\frac{1}{2}$, 2 C. 18, 24, 35 D. 24, 30, 40

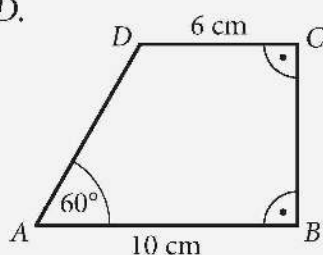
- 6 Oblicz obwód trójkąta ABC o wierzchołkach $A(-2, -1)$, $B(5, 6)$, $C(1, 3)$.

- 7 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Obwód kwadratu o przekątnej 5 cm jest równy

A. 12,5 cm. B. $10\sqrt{2}$ cm. C. 20 cm. D. $20\sqrt{2}$ cm.

- 8 Oblicz pole trapezu $ABCD$.



Rozdział V

Podobieństwo

TEMATY LEKCJI

1	Figury podobne	s. 123–127
2	Trójkąty podobne	s. 128–132
3	Pola figur podobnych	s. 133–135
4	Ważne plany	s. 136–137
	Powtórzenie rozdziału	s. 138–139
	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ	

Figury podobne

NA POCZĄTEK

W jakich sytuacjach na co dzień używasz słowa „podobny”?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Figury podobne to figury takiego samego kształtu, ale niekoniecznie tej samej wielkości. Do figur podobnych należą figury przystające.

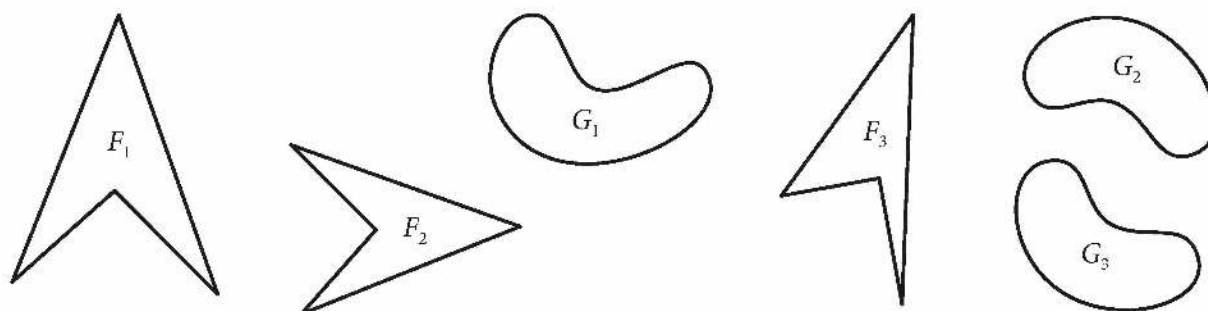
Jeśli figury F_1 , F_2 są podobne, to zapisujemy to w następujący sposób:

$$F_1 \sim F_2$$

Zamiennie stosuje się również oznaczenia F i F' .

PRZYKŁAD 1

Odpowiedz, które spośród figur są podobne, a które – przystające.

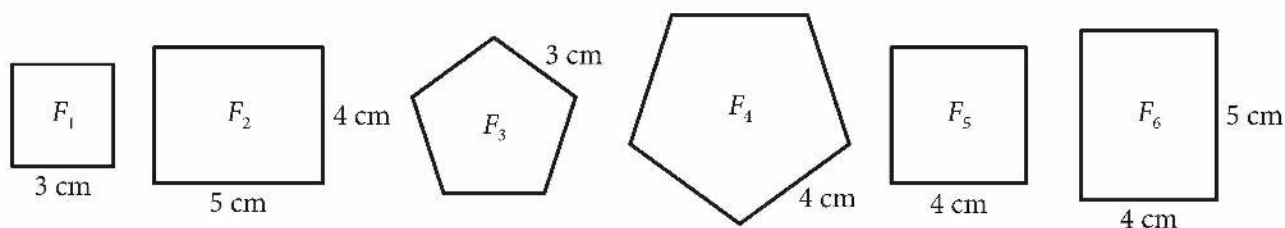


ROZWIĄZANIE

Podobne są figury F_1 , F_2 oraz G_2 i G_3 . Figury G_2 i G_3 są również przystające.

ĆWICZENIE 1

Na rysunkach przedstawiono figury geometryczne. Wskaż trzy pary figur podobnych.



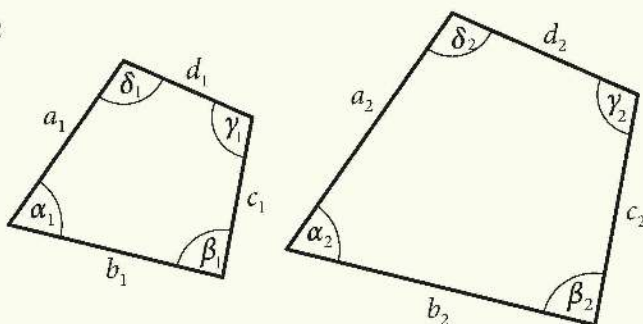
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dwa **wielokąty** są **podobne**, jeśli ich odpowiednie kąty mają równe miary, a stosunek długości boków jednego wielokąta do długości odpowiednich boków drugiego wielokąta jest stały. Możemy to zapisać następująco:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2, \delta_1 = \delta_2$$

$$\text{oraz } \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1} = k$$

gdzie **k** to **skala podobieństwa**

**PRZYKŁAD 2**

Ustal, czy równoległoboki są podobne.

KROK 1 Zauważamy, że długości boków drugiego równoległoboku są dwa razy dłuższe od długości boków pierwszego równoległoboku:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{6} = 2 \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{10}{5} = 2 \quad k = 2$$

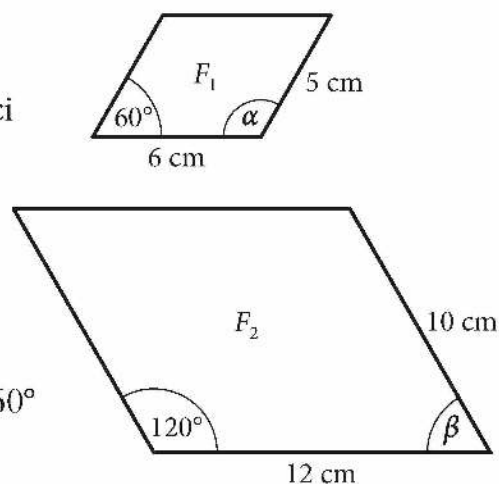
KROK 2 Obliczamy miary brakujących kątów w równoległobokach:

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad \beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

KROK 3 Zauważamy, że spełnione są warunki podobieństwa wielokątów:

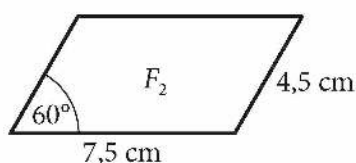
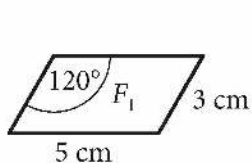
- miary odpowiednich kątów w obu równoległobokach są równe
- stosunki długości boków są sobie równe

Równoległoboki F_1 i F_2 są podobne: $F_1 \sim F_2$.

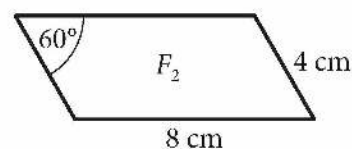
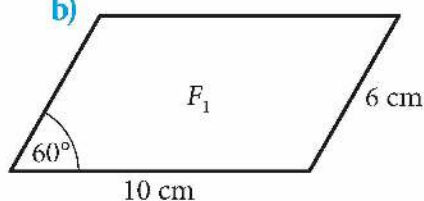
**ĆWICZENIE 2**

Sprawdź, czy równoległoboki F_1 i F_2 są podobne.

a)



b)



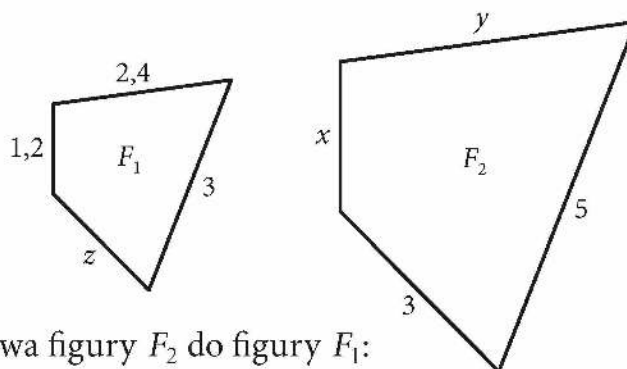
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeżeli figura F_2 jest podobna do figury F_1 w skali k (zawsze dodatniej), to długości boków są proporcjonalne.

- Jeżeli $k > 1$, to boki figury F_2 są k razy dłuższe od boków figury F_1 .
- Jeżeli $k \in (0; 1)$, to boki figury F_2 są krótsze od boków figury F_1 .
- Jeżeli $k = 1$, to figura F_2 jest przystająca do F_1 .

PRZYKŁAD 3

Czworokąty F_1 i F_2 są podobne.
Oblicz długości boków x , y i z .



KROK 1 Ustalamy skalę podobieństwa figury F_2 do figury F_1 :

$$k = \frac{\text{najdłuższy bok czworokąta } F_2}{\text{najdłuższy bok czworokąta } F_1} = \frac{5}{3}$$

KROK 2 Obliczamy brakujące długości boków:

$$x = \frac{5}{3} \cdot 1,2 = \frac{15}{3} \cdot \frac{12^4}{10^2} = 2$$

$$y = \frac{5}{3} \cdot 2,4 = \frac{15}{3} \cdot \frac{24^8}{10^2} = 4$$

$$\frac{5}{3}z = 3 \quad | : \frac{5}{3}$$

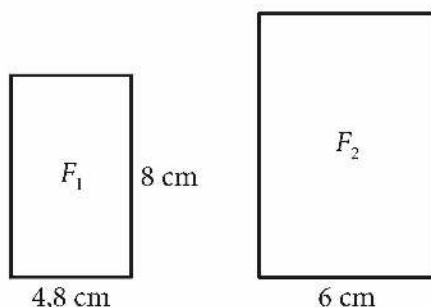
$$z = 3 : \frac{5}{3} = 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$$

Długości boków wynoszą: $x = 2$, $y = 4$ i $z = 1,8$.

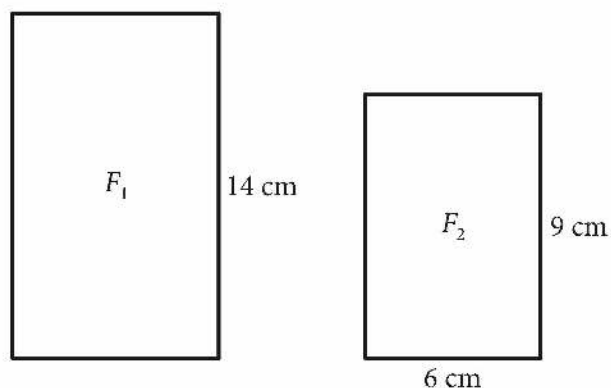
ĆWICZENIE 3

Na podstawie rysunku oblicz brakującą długość boku prostokąta, jeżeli wiadomo, że prostokąty F_1 i F_2 są podobne.

a)



b)



To się liczy!

Z rzeczami o tym samym kształcie, ale niekoniecznie tym samym rozmiarze, możemy się spotkać np. przy planowaniu zabudowy miast, tworzeniu makiet architektonicznych budynków czy w modelarstwie. Dlatego warto umieć obliczyć skalę podobieństwa danego przedmiotu i jego modelu. Poniższe zadanie pomoże Wam utrwalić tę umiejętność.



ZADANIE BRANŻOWE

Zdjęcie przedstawia wieżę Eiffla [czyt.: ajfla] oraz jej miniaturę. Podaj, w jakiej skali ją wykonano.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeżeli $F_2 \sim F_1$ w skali k_1 oraz $F_1 \sim F_2$ w skali k_2 , to skale podobieństwa k_1 i k_2 są liczbami odwrotnymi:

$$k_1 = \frac{1}{k_2}$$

PRZYKŁAD 4

Prostokąty F_1 i F_2 są podobne. Oblicz skalę podobieństwa:

- prostokąta F_2 do prostokąta F_1 ,
- prostokąta F_1 do prostokąta F_2 .

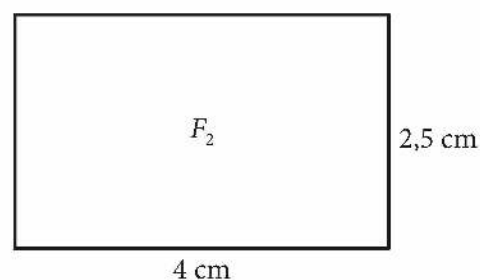
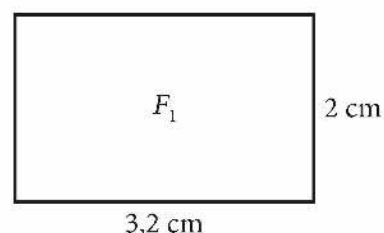
ROZWIĄZANIE

- Skala podobieństwa prostokąta F_2 do prostokąta F_1 jest równa:

$$k_1 = \frac{2,5}{2} = \frac{4}{3,2} = \frac{5}{4}$$

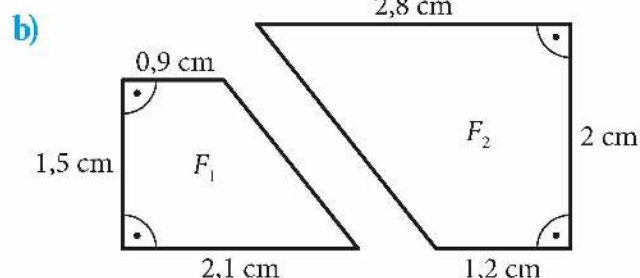
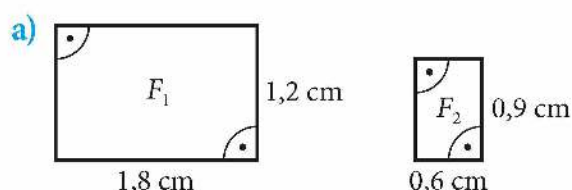
- Skala podobieństwa prostokąta F_1 do prostokąta F_2 jest odwrotnością skali k_1 :

$$k_2 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$



ĆWICZENIE 4

Figury F_1 i F_2 są podobne. Oblicz skalę podobieństwa figury F_2 do F_1 oraz skalę podobieństwa figury F_1 do F_2 .



ZADANIA

↻ Zbiór zadań, s. 215

1. Naskicuj:

- a) dwa równoległoboki o kącie ostrym 60° , które **nie** są do siebie podobne;
- b) dwa romby o boku długości 3 cm, które **nie** są do siebie podobne.

2. Sprawdź, czy prostokąt P_2 o bokach długości x i y jest podobny do prostokąta P_1 o bokach długości 9 cm i 6 cm. Jeśli tak, to podaj skalę podobieństwa prostokąta P_2 do P_1 .

- a) $x = 15$ cm, $y = 10$ cm b) $x = 12$ cm, $y = 9$ cm c) $x = 4$ cm, $y = 6$ cm

3. Prostokąt P_1 ma boki długości 10 cm i 6 cm. Oblicz obwód prostokąta P_2 , jeśli:

- a) skala podobieństwa prostokąta P_2 do P_1 jest równa 3,
- b) skala podobieństwa prostokąta P_1 do P_2 jest równa 2.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Podczas kserowania możemy powiększyć lub zmniejszyć obraz.

Skala podobieństwa podawana jest w procentach. Oblicz wymiary obrazu powstałego przy kserowaniu kartki o wymiarach 20 cm $\times$ 25 cm, jeśli przy kopiowaniu wybrano skalę:

- a) 80%, b) 120%.

5. Projektant wykonał makietę centrum handlowego w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 90 cm $\times$ 28 cm $\times$ 3 cm. Oblicz rzeczywiste wymiary budynku, jeśli makietka została wykonana w skali 1:500.

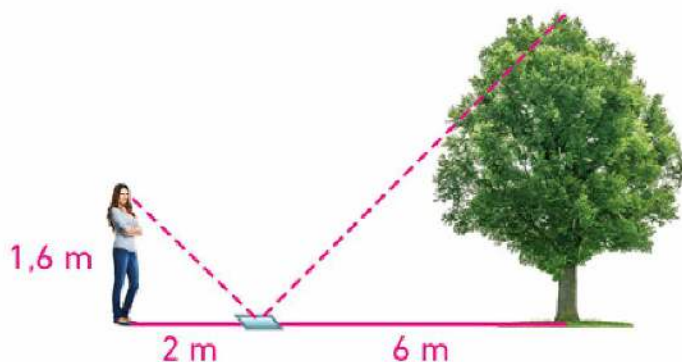
PODPowiedź

W obliczeniach procenty zamieniamy na ułamki.

2 Trójkąty podobne

NA POCZĄTEK

Ania chciała sprawdzić, jak wysokie jest drzewo. W tym celu umieściła lusterko na ziemi w takim miejscu, że widziała w nim jego czubek. Przyjrzyj się rysunkowi i odpowiedz, czy Ania ma wszystkie potrzebne informacje do obliczenia wysokości drzewa.



PRZYKŁAD 1

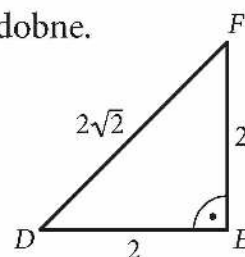
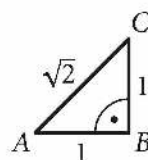
Sprawdź, czy narysowane trójkąty prostokątne równoramienne są podobne.

KROK 1 Sprawdzamy równość kątów:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF| = 45^\circ$$

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE| = 45^\circ$$

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF| = 90^\circ$$



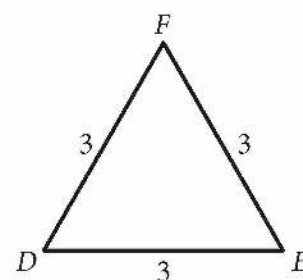
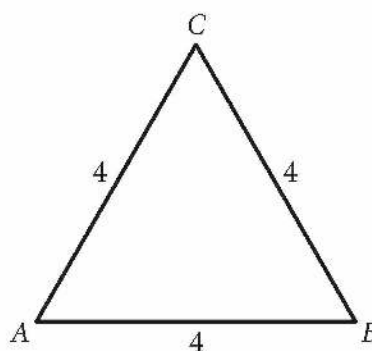
KROK 2 Obliczamy stosunki długości odpowiednich boków:

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{1}{2} \quad \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{1}{2} \quad \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad k = \frac{1}{2}$$

Trójkąty są podobne: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

ĆWICZENIE 1

Ustal, czy narysowane trójkąty równoboczne są podobne.

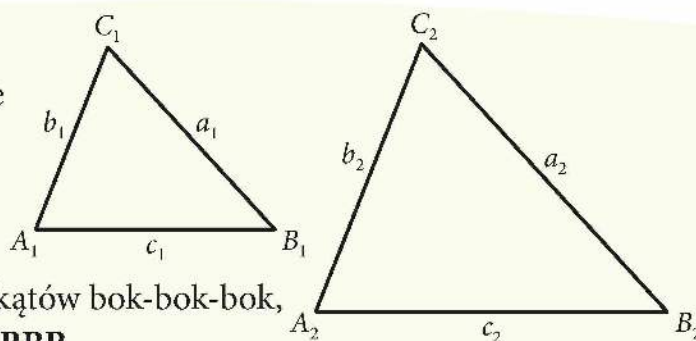


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Jest to cecha podobieństwa trójkątów bok-bok-bok, w skrócie określana jako **cecha BBB**.

Jeśli $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k$, to $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_2 B_2 C_2$.

**PRZYKŁAD 2**

Sprawdź, czy trójkąt o bokach 4 cm, 6 cm i 8 cm oraz trójkąt o bokach 20 cm, 30 cm i 40 cm są podobne.

KROK 1 Obliczamy stosunki długości odpowiednich boków trójkątów:

$$\frac{20}{4} = 5 \quad \frac{30}{6} = 5 \quad \frac{40}{8} = 5$$

KROK 2 Zauważamy, że wszystkie stosunki są jednakowe:

$$k = 5$$

Spełniona jest cecha BBB, więc trójkąty są podobne.

ĆWICZENIE 2

Ustal, czy trójkąty o podanych długościach boków są podobne. Jeśli tak, to podaj skalę podobieństwa większego z trójkątów do mniejszego.

a) 8, 9, 12 oraz 24, 27, 36

c) 6, 12, 18 oraz 9, 18, 26

b) 10, 15, 16 oraz 20, 30, 34

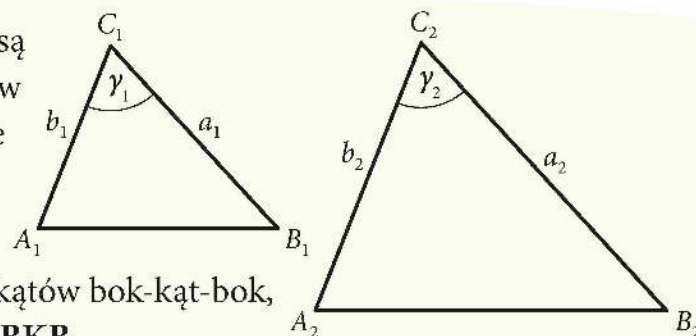
d) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ oraz 9, 15, 21

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Jest to cecha podobieństwa trójkątów bok-kąt-bok, w skrócie określana jako **cecha BKB**.

Jeśli $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$, $\gamma_1 = \gamma_2$, to $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_2 B_2 C_2$.



PRZYKŁAD 3

Sprawdź, czy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 20 cm i 24 cm jest podobny do trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości 5 cm i 6 cm.

KROK 1 Sprawdzamy proporcjonalność boków trójkąta:

$$\frac{20}{5} = 4 \quad \frac{24}{6} = 4 \quad k = 4$$

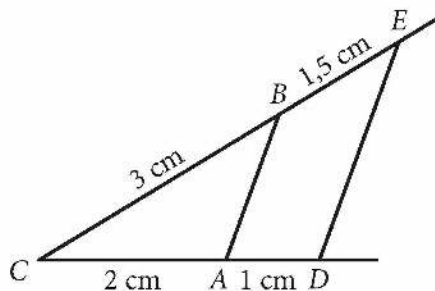
KROK 2 Sprawdzamy równość kątów między tymi bokami – w obu trójkątach mamy kąty proste między przyprostokątnymi.

Spełniona jest cecha BKB, więc trójkąty są podobne.

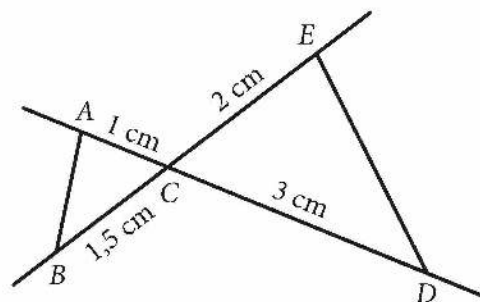
ĆWICZENIE 3

Uzasadnij, że trójkąty ABC i CDE są podobne.

a)



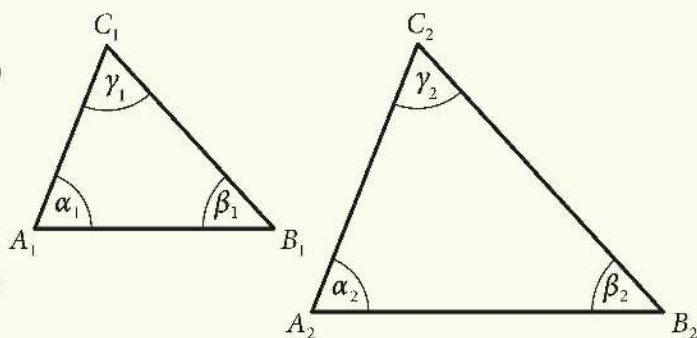
b)

**WAŻNA WIADOMOŚĆ**

Jeśli trzy kąty jednego trójkąta są równe trzem kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

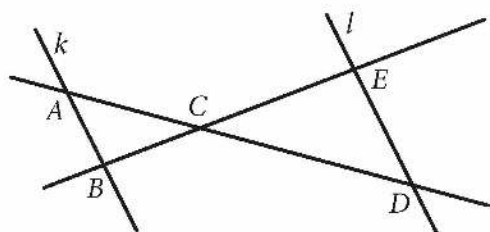
Jest to cecha podobieństwa trójkątów kąt-kąt-kąt, w skrócie określana jako **cecha KKK**.

Jeśli $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, to $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_2 B_2 C_2$.



PRZYKŁAD 4

Proste k i l na rysunku są równoległe. Uzasadnij, że trójkąty ABC i CDE są podobne.



KROK 1 Odszukujemy na rysunku pary kątów naprzemianległych:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CDE| \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CED|$$

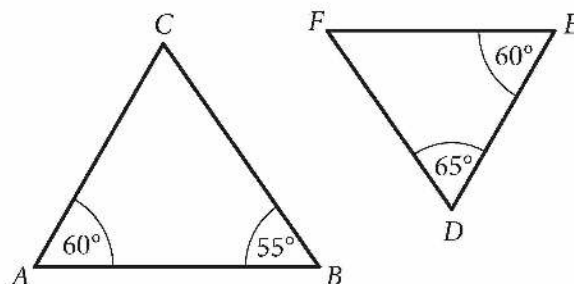
KROK 2 Wskazujemy parę kątów wierzchołkowych:

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE|$$

Trójkąty ABC i CDE są podobne, ponieważ spełniona jest cecha KKK.

ĆWICZENIE 4

Uzasadnij, że trójkąty ABC i DEF są podobne.

**To się liczy!**

Podobieństwo trójkątów możemy wykorzystać do ustalenia wysokości danego obiektu na podstawie długości jego cienia. Poniższe zadanie pokaże Wam, jak zastosować tę umiejętność w praktyce.

ZADANIE BRANŻOWE

Na placu Zamkowym w Warszawie stoi Kolumna Zygmunta. Tomek zmierzył, że cień rzucany przez pomnik ma długość 10 m. W tym samym czasie jego własny cień miał długość 80 cm. Oblicz wysokość Kolumny Zygmunta, jeżeli Tomek ma 176 cm wzrostu.

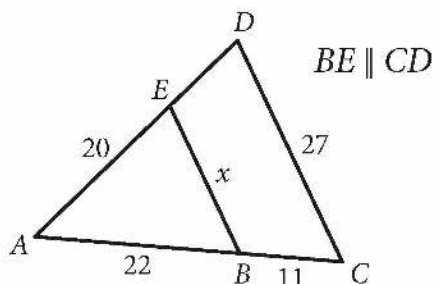


długość cienia = 0,5 1 1,5 2
wysokości człowieka wysokości człowieka wysokości człowieka wysokości człowieka

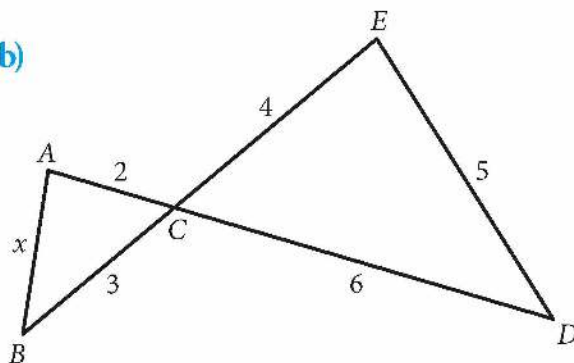
Czy wiesz, że możesz wykorzystać własny cień do określenia zagrożenia promieniowaniem UV? Jeśli Twój cień jest krótszy niż wysokość Twojego ciała, to promienie słoneczne padają pod kątem większym niż 45° . Wówczas ochrona przed promieniowaniem UV jest niezbędna.

1. Odszukaj na rysunku trójkąty podobne i podaj odpowiednią cechę podobieństwa. Oblicz długość odcinka x .

a)



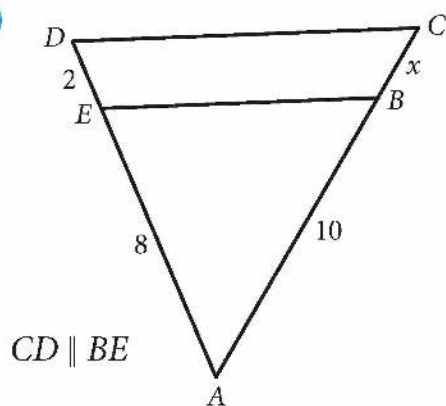
b)



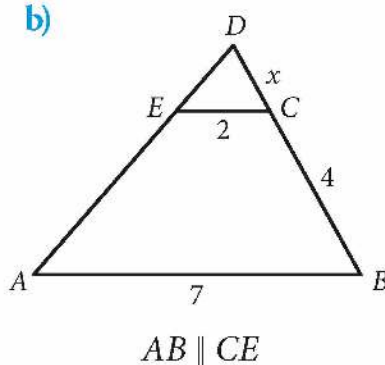
2. W trójkącie $A_1B_1C_1$ długości boków wynoszą 9 cm, 12 cm i 18 cm. Najdłuższy bok trójkąta $A_2B_2C_2$, podobnego do trójkąta $A_1B_1C_1$, ma 24 cm. Znajdź skalę podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta $A_2B_2C_2$ i oblicz obwód trójkąta $A_2B_2C_2$.

3. Oblicz długość odcinka x .

a)

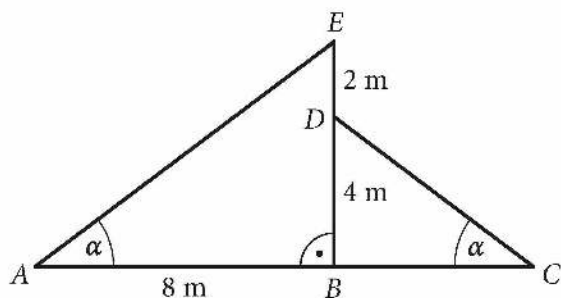


b)



ZADANIA BRANŻOWE

4. Rysunek przedstawia fragment projektu więzby dachowej. Połacie dachu są nachylone pod tym samym kątem α . Wykonaj polecenia.



- a) Uzasadnij, że trójkąty ABE i BCD są podobne.
b) Oblicz długość krokwi potrzebnych do konstrukcji dachu, czyli długość odcinka AE i długość odcinka CD .

Pola figur podobnych

NA POCZĄTEK

Do obsiania trawnika ukazanego na zdjęciu zużyto 0,5 kg nasion. Jak myślisz, ile kilogramów nasion należałoby kupić, aby otrzymać równie gęsty trawnik, ale o wymiarach dwa razy większych?



PRZYKŁAD 1

Pewien obraz ma wymiary $1,4 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. Jego reprodukcja jest prostokątem o dwukrotnie mniejszych wymiarach. Oblicz, ile razy pole powierzchni obrazu jest większe od pola powierzchni reprodukcji.

KROK 1 Ustalamy wymiary reprodukcji obrazu:

$$1,4 : 2 = 0,7 \text{ [m]}$$

$$1 : 2 = 0,5 \text{ [m]}$$

$$0,7 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$$

KROK 2 Obliczamy pole powierzchni obrazu i pole powierzchni jego reprodukcji:

$$P_1 = 1,4 \cdot 1 = 1,4 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$P_2 = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35 \text{ [m}^2\text{]}$$

KROK 3 Obliczamy stosunek pól (obrazu do reprodukcji):

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1,4}{0,35} = 4$$

Pole powierzchni obrazu jest cztery razy większe od pola powierzchni jego reprodukcji.

ĆWICZENIE 1

Oblicz, ile razy pole kwadratu o boku 60 cm jest większe od pola kwadratu o boku 6 cm.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeśli skala podobieństwa figur podobnych jest równa k , to stosunek ich pól jest równy k^2 .

PRZYKŁAD 2

Oblicz skalę podobieństwa większego kwadratu do mniejszego, jeśli pole jednego z nich jest:

a) o 36% mniejsze od pola drugiego, **b)** o 125% większe od pola drugiego.

a) KROK 1 Ustalamy skalę podobieństwa za pomocą stosunku pól kwadratów:

$$\frac{P_1}{P_2} = 100\% - 36\% = 64\% = 0,64$$

$$k^2 = 0,64 \quad k = 0,8$$

KROK 2 Obliczamy odwrotność skali podobieństwa k , ponieważ otrzymaliśmy skalę podobieństwa mniejszego kwadratu do większego ($k < 1$):

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{0,8} = \frac{1}{\frac{8}{10}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Skala podobieństwa wynosi $\frac{5}{4}$ (możemy też zapisać 5:4).

b) ROZWIĄZANIE

$$k^2 = 100\% + 125\% = 225\% = 2,25$$

$$k = 1,5 = \frac{3}{2}$$

Skala podobieństwa wynosi 1,5 (3:2).

PODPOWIEDŹ

Skalę podobieństwa możemy podawać za pomocą ułamka ($\frac{3}{2}$), ilorazu (3:2) lub procentu (150%).

ĆWICZENIE 2

Oblicz stosunek pól figur podobnych, jeżeli skala podobieństwa tych figur jest równa:

a) $k = 5$,

b) $k = \frac{1}{2}$,

c) $k = 0,7$.

To się liczy!

Z podobieństwem spotykamy się, kiedy np. wykonujemy kserokopie lub gdy wywołujemy zdjęcia. Poniższe zadanie pomoże Wam utrwalić umiejętność obliczania wymiarów figur podobnych.

ZADANIE BRANŻOWE

Karolina wykonała dwie odbitki zdjęć – dwa prostokąty podobne, przy czym pole powierzchni większego z nich jest o 44% większe od pola mniejszego. Oblicz wymiary mniejszego zdjęcia, jeśli większe jest prostokątem o wymiarach $12 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$.



ZADANIA

Zbiór zadań, s. 216

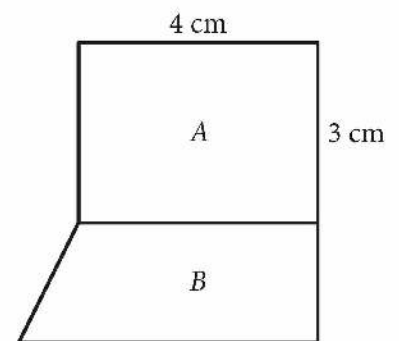
1. Jeden z boków prostokąta ma długość 18 cm. Wyznacz długość drugiego boku tego prostokąta tak, by był on podobny do prostokąta o bokach długości 24 cm i 36 cm. Rozpatrz dwie możliwości.
2. Prostokąt o bokach 12 cm i 15 cm jest podobny do prostokąta o obwodzie równym 90 cm. Oblicz pole większego prostokąta.
3. Dane są dwa prostokąty podobne. Większy z nich ma wymiary 24 cm $\times$ 36 cm. Oblicz długości boków i obwód mniejszego prostokąta, jeśli stosunek pól tych prostokątów jest równy 1:16.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Rysunek przedstawia plan sąsiadujących ze sobą działek budowlanych.

Wykonaj polecenia.

- a) Oblicz skalę, w której wykonano plan, jeśli działka A jest prostokątem o wymiarach 32 m $\times$ 24 m.
- b) Wyznacz pole powierzchni działki B, jeśli na planie jest ona trapezem o polu równym 9 cm².
- c) Oblicz, jakie pole miałyby wielokąt, który przedstawiałby na planie działkę budowlaną C o polu powierzchni 6,4 a.



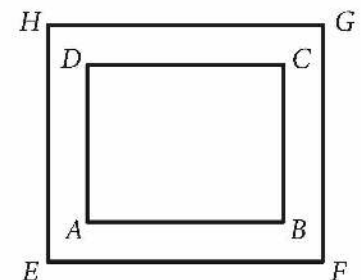
PODPOWIEDŹ

$$1a = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

5. Fotograf nakleił zdjęcie (prostokąt $ABCD$) o wymiarach 18 cm $\times$ 21 cm na kawałek tektury w kształcie prostokąta $EFGH$. Wykonaj polecenia.

- a) Oblicz wymiary kawałka tektury, jeśli prostokąt $EFGH$ jest podobny do prostokąta $ABCD$ w skali 4:3.
- b) Ustal, o ile większe byłoby pole prostokąta $EFGH$ od pola prostokąta $ABCD$, gdyby ich skala podobieństwa była równa 5:3.



4 Ważne plany

Z podobieństwem możecie się spotkać nie tylko na lekcjach matematyki. Wykorzystywane jest również m.in. przy tworzeniu wszelkiego rodzaju planów, np. lokali mieszkalnych lub usługowych.

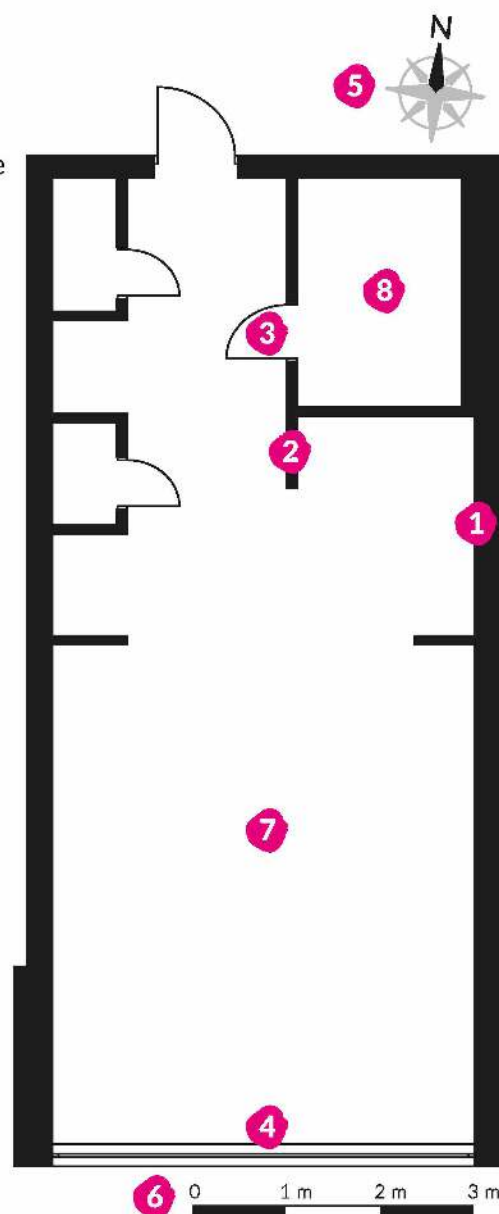
Plan to przedstawiony na płaszczyźnie model rzeczywistego obiektu, np. mieszkania, przy użyciu skali. Najczęściej na planach używana jest skala pomniejszająca, np. 1:500, co oznacza, że rzeczywiste rozmiary danego elementu są zmniejszone 500 razy. Skala 1:500 oznacza, że 1 cm na planie odpowiada 500 cm, czyli 5 m, w rzeczywistości.

PRZYKŁADOWY PLAN MIESZKANIA

Rysunek przedstawia plan jednopokojowego mieszkania. Aby poprawnie odczytać z planu np. gdzie znajdują się ściany nośne albo ścianki działkowe, musicie wiedzieć, jakie oznaczenia są stosowane do ich przedstawienia na planie.

- 1 **Ściany nośne** zaznaczone są na planie grubą linią. Nie można ich wyburzyć ani przesunąć, ponieważ na nich opiera się konstrukcja całego budynku.
- 2 **Ścianki działowe** oznaczone są cieńszymi liniami. Ten rodzaj ścian możemy modyfikować, np. wyburzyć, żeby połączyć dwa pomieszczenia.
- 3 Symbolem **drzwi** na planie jest odcinek połączony z łukiem okręgu. Dzięki takiemu oznaczeniu widzimy, w którą stronę otwierają się drzwi.
- 4 Na planie zaznacza się również **okna** jako przerwy w ścianach.
- 5 Obok planu znajduje się **oznaczenie stron świata**. Zawsze wskazuje się kierunek północny, dzięki czemu możemy ocenić, do których pomieszczeń będzie docierało mniej światła dziennego (strona północna), a do których więcej (strona południowa).
- 6 Plan zawiera również **skalę** podaną za pomocą liczb lub podziałki.

Z podziałki zamieszczonej pod planem odczytujemy, że 1 cm zastępuje 1 m na planie. Oznacza to, że 1 cm na planie odpowiada 100 cm w rzeczywistości. Plan został sporządzony w skali 1:100 (skala podobieństwa $k = 100$).



Skalę planu możemy też ustalić, wykonując następujące dzielenie:

$$1 \text{ m} : 1 \text{ cm} = 100 \text{ cm} : 1 \text{ cm} = 100$$

- 7 Znajomość skali pozwala obliczyć wymiary poszczególnych pomieszczeń, o ile nie zostały one podane na planie.

Pokój na planie ma wymiary $4,5 \text{ cm} \times 5,3 \text{ cm}$. W rzeczywistości są one 100 razy większe:

$$4,5 \cdot 100 = 450 \text{ [cm]} = 4,5 \text{ [m]}$$

$$5,3 \cdot 100 = 530 \text{ [cm]} = 5,3 \text{ [m]}$$

Pokój ma w rzeczywistości wymiary $4,5 \text{ m} \times 5,3 \text{ m}$.

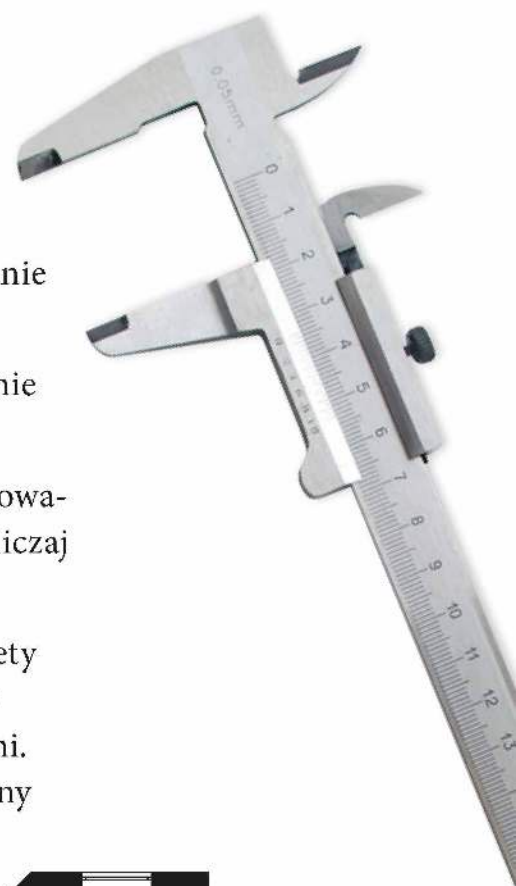
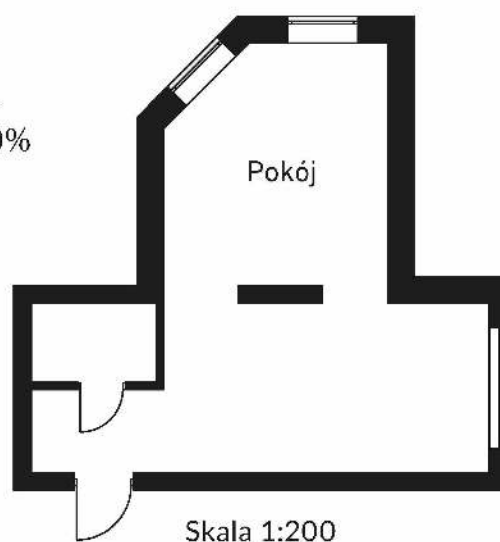
- 8 Łazienka jest na planie prostokątem o polu równym ok. 4 cm^2 . W rzeczywistości jej powierzchnia wynosi:

$$4 \cdot 100^2 = 4 \cdot 10\,000 = 40\,000 \text{ [cm}^2\text{]} = 4 \text{ [m}^2\text{]}$$

ZADANIA BRANŻOWE

Zapoznaj się z planem mieszkania i wykonaj polecenia.

- Zmierz długość odcinków, którymi są zaznaczone na planie ściany otaczające pokój.
- Podaj rzeczywiste wymiary ścian pokoju, jeżeli mieszkanie ma wysokość $2,5 \text{ m}$.
- Ustal, ile musisz kupić rolek jednolitej tapety do wytapetowania pokoju, jeżeli 1 rolka zawiera ok. 5 m^2 tapety. Nie odliczaj pola powierzchni okien.
- Oblicz koszt wytapetowania pokoju, jeżeli jedna rolka tapety kosztuje 48 zł , a do jej położenia trzeba użyć kleju w cenie 25 zł za opakowanie, które wystarcza na 20 m^2 powierzchni. Fachowcowi za położenie tapety na 1 m^2 powierzchni ściany zapłacisz 22 zł .
- Ustal, ile metrów kwadratowych paneli potrzebujesz na wyłożenie podłogi pokoju. W obliczeniach przyjmij zapas w postaci 10% materiału.



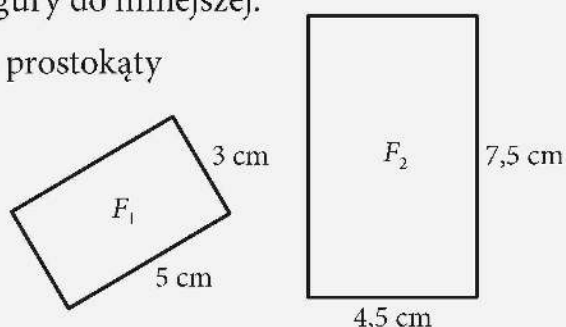
Powtórzenie rozdziału

PODOBIENSTWO

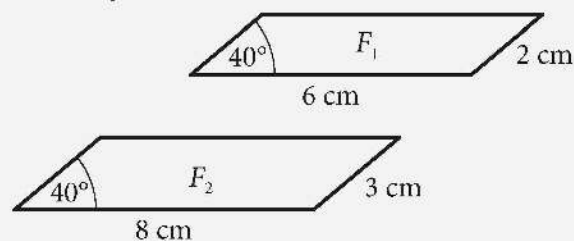
ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Wskaż zdania prawdziwe.
- A. Każde dwa kwadraty są podobne.
 - B. Każde dwa romby są podobne.
 - C. Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne.
- 2 Sprawdź, czy figury F_1 i F_2 są podobne. Jeśli tak, to podaj skalę podobieństwa większej figury do mniejszej.

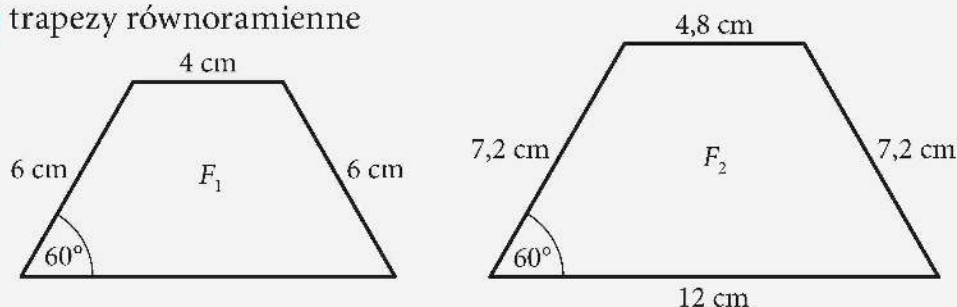
a) prostokąty



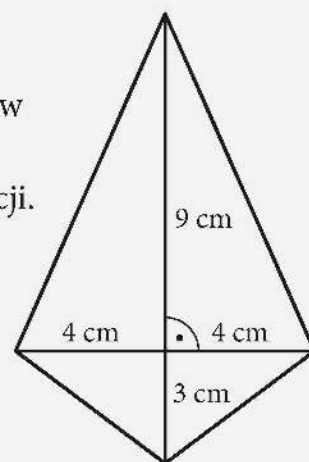
b) równoległoboki



c) trapezy równoramienne

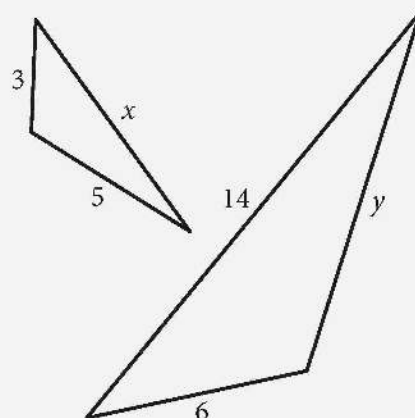
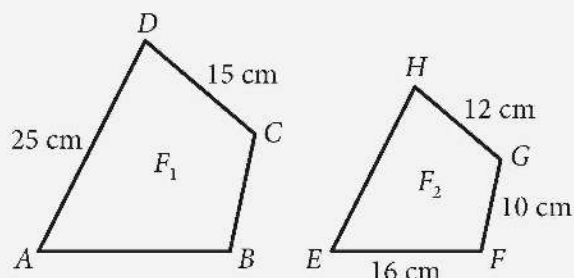


- 3 Trójkąt równoramienny F_1 o bokach 5 cm, 5 cm i 4 cm jest podobny do trójkąta F_2 o obwodzie 35 cm. Oblicz długości boków trójkąta F_2 .
- 4 Długość cienia Marka, który ma 1,8 m wzrostu, wynosi 4,5 m. Odpowiedz na pytania.
- a) Jakiego wzrostu jest brat Marka, jeśli jego cień w tym samym czasie ma długość 4 m?
 - b) Jaka jest długość cienia jego siostry, jeśli ma ona 1,2 m wzrostu?
- 5 Na rysunku przedstawiono projekt latawca. Oblicz, ile centymetrów kwadratowych materiału będzie potrzebne do wykonania latawca o wymiarach pięciokrotnie większych od wymiarów tego z ilustracji.
- 6 Na planie sporządzonym w skali 1:2000 parking ma kształt prostokąta o polu równym $12,5 \text{ cm}^2$. Oblicz pole powierzchni tego parkingu w podanej skali.
- a) 1:2500 b) 1:1250



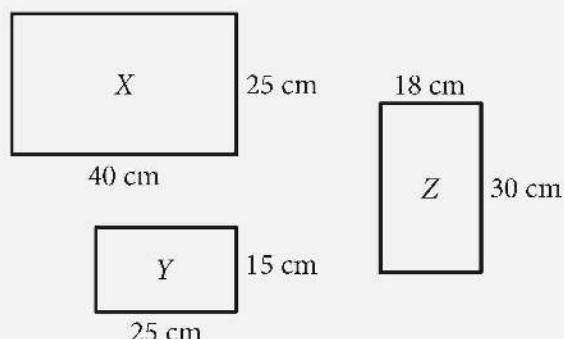
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Przedstawione na rysunku trójkąty są podobne. Oblicz długości boków x i y oraz podaj skalę podobieństwa.
- 2 Czworokąty F_1 i F_2 są podobne. Znajdź skalę podobieństwa większego czworokąta do mniejszego i oblicz brakujące długości boków tych czworokątów.



- 3 Pewna firma produkuje kafelki X, Y, Z o wymiarach przedstawionych na rysunku. Wybierz właściwą odpowiedź.

- A. Kafelki X i Y są podobne.
- B. Kafelki X i Z są podobne.
- C. Kafelki Y i Z są podobne.



- 4 Firma wyprodukowała kafelki o wymiarach $30 \text{ cm} \times 48 \text{ cm}$. Korzystając z rysunków z zadania 3., wybierz właściwe dokończenie zdania.

Kafelek o tych wymiarach jest podobny do

- A. kafełka X.
- B. kafełka Y.
- C. kafełka Z.
- D. wszystkich kafełków.

- 5 Prostokąty o polach P_1 i P_2 są podobne. Oblicz skalę podobieństwa większego z nich do mniejszego, jeśli:

- a) $P_1 = 25 \text{ cm}^2$, $P_2 = 400 \text{ cm}^2$,
- b) $P_1 = 40 \text{ cm}^2$, $P_2 = 250 \text{ cm}^2$.

- 6 Skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta DEF jest równa $2:3$. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Stosunek obwodu trójkąta DEF do obwodu trójkąta ABC jest równy $3:2$.
- B. Stosunek pól trójkątów DEF i ABC jest równy $2:3$.
- C. Stosunek pól trójkątów DEF i ABC jest równy $2\frac{1}{4}$.

- 7 Ustal, ile razy powierzchnia parku krajobrazowego na mapie w skali $1:200\,000$ jest mniejsza od jego rzeczywistej powierzchni. Wybierz właściwą odpowiedź.

- A. $2 \cdot 10^5$
- B. $2 \cdot 10^{10}$
- C. $4 \cdot 10^5$
- D. $4 \cdot 10^{10}$

Rozdział VI

Trygonometria

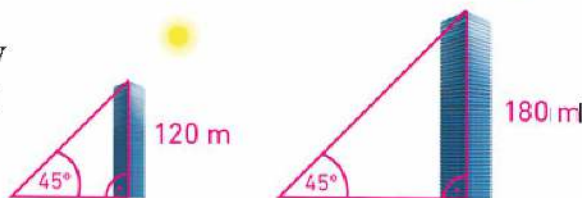
TEMATY LEKCJI

- | | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Funkcje trygonometryczne kąta ostrego | s. 141-143 |
| 2 | Wartości funkcji trygonometrycznych | s. 144-146 |
| 3 | Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych | s. 147-149 |
| 4 | Trygonometria na drodze | s. 150-151 |
| 5 | Związki między funkcjami trygonometrycznymi | s. 152-155 |
| 6 | Obliczanie pól wielokątów z wykorzystaniem trygonometrii | s. 156-159 |
| | Powtórzenie rozdziału | s. 160-161 |
| | ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ | |

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

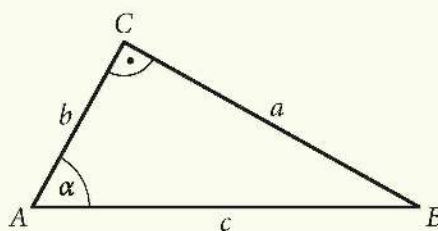
NA POCZĄTEK

Czy potrafisz obliczyć długość cieni wieżowców ukazanych na zdjęciu? Czy stosunek wysokości budowli do długości ich cieni jest taki sam dla obu budynków?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

W trójkącie prostokątnym stosunki długości odpowiednich boków nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kątów ostrych.



Podstawowe funkcje trygonometryczne to:

- **sinus kąta** – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta ostrego do długości przeciwprostokątnej:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

- **cosinus kąta** – stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie ostrym do długości przeciwprostokątnej:

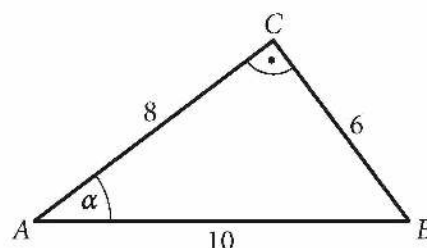
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

- **tangens kąta** – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta ostrego do długości drugiej przyprostokątnej:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

PRZYKŁAD 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α w narysowanym trójkącie.



KROK 1 Odczytujemy z rysunku długości odpowiednich boków trójkąta:

- przyprostokątna naprzeciwko kąta α ma długość 6
- przyprostokątna przy kącie α ma długość 8
- przeciwprostokątna trójkąta ma długość 10

KROK 2 Podstawiamy długości odpowiednich boków do wzorów na funkcje trygonometryczne:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = 0,6 \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = 0,8 \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = 0,75$$

ĆWICZENIE 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych mniejszego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym o podanych bokach. Do każdego przykładu wykonaj w zeszycie rysunek.

a) 3, 4, 5

b) 8, 15, 17

c) 5, 12, 13

PRZYKŁAD 2

Oblicz wartość funkcji sinus dla kąta 45° .

KROK 1 Stwierdzamy, że kąt 45° występuje w trójkącie prostokątnym równoramiennym, który jest połową kwadratu.

KROK 2 Wykonujemy rysunek pomocniczy kwadratu o boku długości np. 1. Dzielimy go przekątną, uzyskując dwa trójkąty o kątach 45° , 45° , 90° .

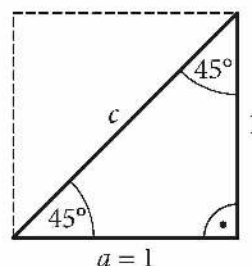
KROK 3 Wyznaczamy długość przeciwprostokątnej za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = 1^2 + 1^2$$

$$c = \sqrt{2}$$

KROK 4 Obliczamy wartość funkcji sinus, korzystając z odpowiedniego wzoru:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**ĆWICZENIE 2**

Oblicz wartość funkcji cosinus i tangens dla kąta 45° .

PRZYKŁAD 3

Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 30° .

KROK 1 Stwierdzamy, że jeśli kąt ostry w trójkącie prostokątnym ma 30° , to ten trójkąt jest połową trójkąta równobocznego.

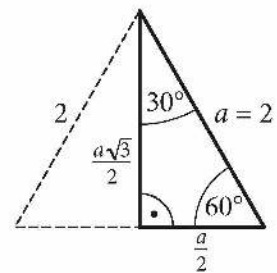
KROK 2 Rysujemy połowę trójkąta równobocznego o boku długości np. 2.

KROK 3 Korzystamy ze wzorów na długości boków w trójkącie o kątach 30° , 60° i 90° , żeby obliczyć długości boków trójkąta prostokątnego:

$$a = 2 \quad \frac{a}{2} = 1 \quad \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

KROK 4 Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**ĆWICZENIE 3**

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60° .

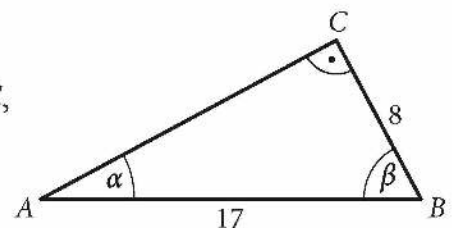
ZADANIA

Zbiór zadań, s. 217

1. Znajdź długość przyprostokątnej AC w trójkącie ABC, a następnie oblicz:

a) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$;

b) $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$.



2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych bokach.

a) 9, 12, 15

b) $\sqrt{11}$, 5, 6

c) 7, 24, 25

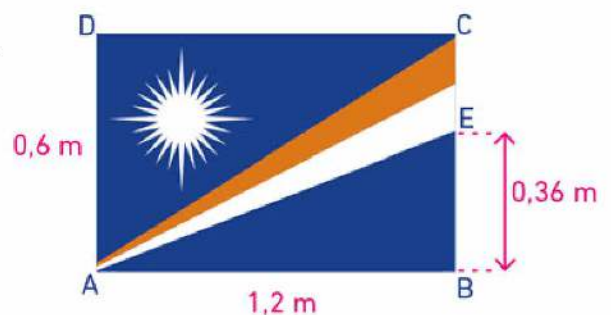
3. Dany jest równoległobok o bokach 10 cm i 8 cm. Krótsza przekątna dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego tego równoległoboku.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Pewna krawcowa uszyła flagę Wysp Marshalla położonych na Oceanie Spokojnym. Na podstawie rysunku oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych:

a) trójkąta ACD,

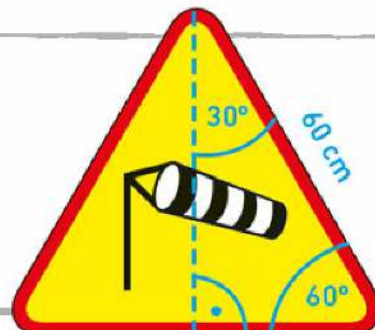
b) trójkąta ABE.



Wartości funkcji trygonometrycznych

NA POCZĄTEK

Znaki ostrzegawcze kształtem przypominają trójkąty równoboczne. Przyjrzyj się rysunkowi i porównaj wartości $\sin 30^\circ$ i $\cos 60^\circ$. Co zauważasz?



PRZYKŁAD 1

Podaj wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 31° , korzystając z tablic na końcu podręcznika.

ROZWIĄZANIE

$$\sin 31^\circ \approx 0,5150$$

$$\cos 31^\circ \approx 0,8572$$

$$\operatorname{tg} 31^\circ \approx 0,6009$$

ĆWICZENIE 1

1.1. Oblicz za pomocą kalkulatora wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 72° . Porównaj otrzymane wyniki z tablicami na końcu podręcznika.

1.2. Ustal, korzystając z tablic lub kalkulatora, dla jakiego kąta:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 0,7002$;

b) $\cos \beta = 0,81$;

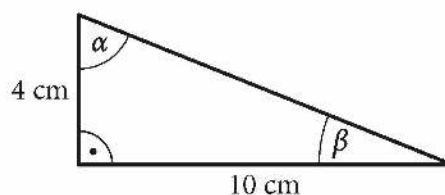
c) $\sin \gamma = 0,2$.

PRZYKŁAD 2

Wyznacz miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego, jeśli jego przyprostokątne mają długości 4 cm i 10 cm.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.

α, β – kąty ostre trójkąta



KROK 2 Korzystamy z funkcji tangens, żeby wyznaczyć miarę kąta β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{10} = 0,4$$

KROK 3 Odczytujemy z tablic przybliżoną miarę kąta:

$$\beta \approx 22^\circ$$

KROK 4 Wyznaczamy miarę kąta α :

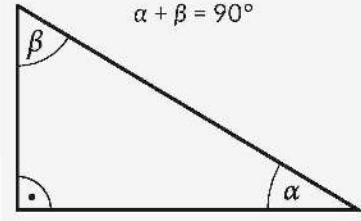
$$\alpha = 90^\circ - \beta \approx 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$$

Kąty ostre trójkąta mają 22° i 68° .

PODPOWIEDŹ

W trójkącie prostokątnym suma kątów ostrych wynosi 90° .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



ĆWICZENIE 2

Wyznacz miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego, jeśli:

- a) dwa jego dłuższe boki mają długości 9 cm i 10 cm,
- b) dwa jego krótsze boki są równe 5 cm i 13 cm.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wzory redukcyjne to wzory, które pozwalają przedstawić jedne funkcje trygonometryczne za pomocą innych. Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są wzory:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

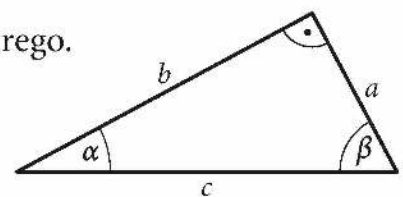
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ dla dowolnego kąta ostrego.

KROK 1 Zapisujemy funkcję sinus dla kąta β :

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$



KROK 2 Korzystamy ze wzoru na sumę miar kątów w trójkącie, żeby wyznaczyć kąt β :

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

KROK 3 Podstawiamy kąt β do funkcji trygonometrycznej:

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos \alpha$$



I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!

Uzasadnij, że $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ dla dowolnego kąta ostrego.

PRZYKŁAD 3

Znajdź wartość $\sin 70^\circ$, korzystając z fragmentu tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

KROK 1 Zauważamy, że w tabeli nie ma wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 70° , ale jest dla kąta 20° :

$$90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

KROK 2 Korzystamy ze wzoru redukcyjnego, żeby zamienić funkcję kąta 70° na funkcję kąta 20° :

$$\sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

KROK 3 Odczytujemy wartość funkcji cosinus z fragmentu tablicy:

$$\cos 20^\circ \approx 0,9397 \quad \sin 70^\circ = \cos 20^\circ \approx 0,9397$$

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
17°	0,2924	0,9563
18°	0,3090	0,9511
19°	0,3256	0,9455
20°	0,3420	0,9397
21°	0,3584	0,9336
22°	0,3746	0,9272
23°	0,3907	0,9205

ĆWICZENIE 3

Oblicz wartość funkcji trygonometrycznej, korzystając ze wzorów redukcyjnych.

a) $\sin 73^\circ$

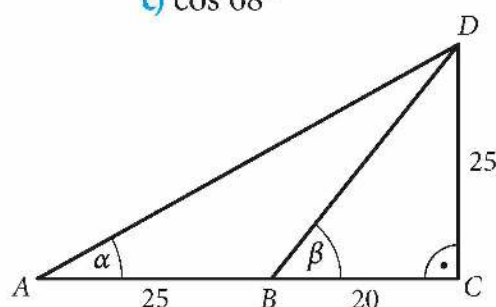
b) $\cos 70^\circ$

c) $\cos 68^\circ$

ZADANIA

🔄 Zbiór zadań, s. 217

1. Znajdź miary kąta α w trójkącie ACD i kąta β w trójkącie BCD . Skorzystaj z rysunku.



2. W równoległoboku o bokach długości 10 cm i 30 cm krótsza przekątna tworzy z jednym bokiem kąt 90° . Oblicz miary kątów tego równoległoboku.

3. Wyznacz kąty rombu, którego przekątne mają 12 cm i 20 cm.

4. Oblicz kąt, jaki z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli budynek o wysokości 30 m rzuca cień równy:

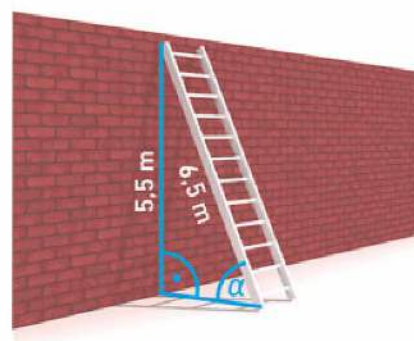
a) 20 m,

b) 30 m,

c) 60 m.

ZADANIA BRANŻOWE

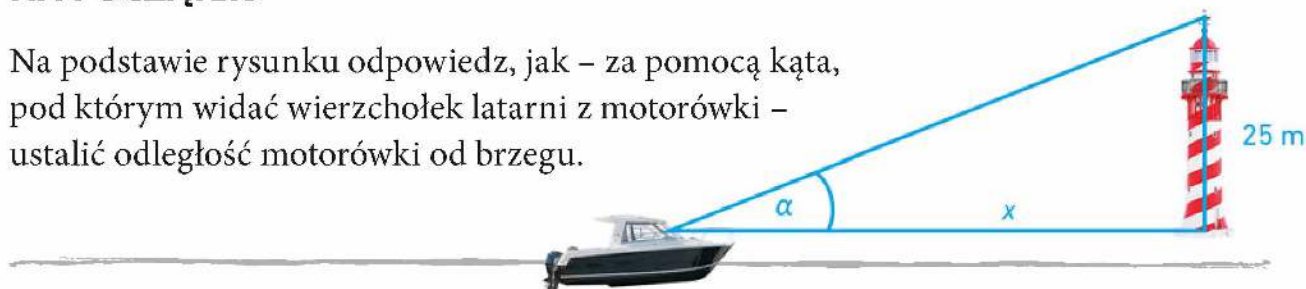
5. Dekarz oparł drabinę o ścianę budynku, aby zamontować rynnę dachową. Kąt nachylenia drabiny przystawnej do podłoża powinien wynosić od 65° do 75° . Oceń, czy dekarz prawidłowo ustawił drabinę przedstawioną na rysunku.



Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

NA POCZĄTEK

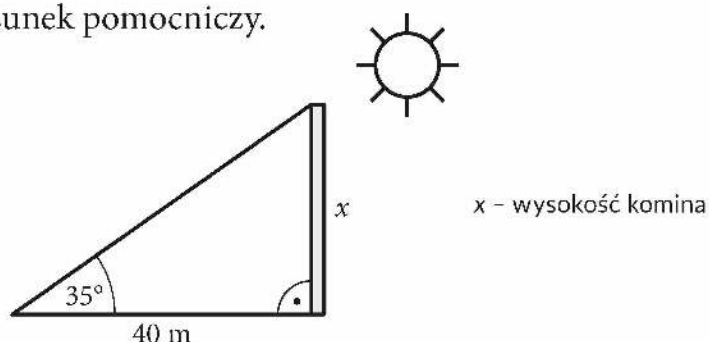
Na podstawie rysunku odpowiedz, jak – za pomocą kąta, pod którym widać wierzchołek latarni z motorówki – ustalić odległość motorówki od brzegu.



PRZYKŁAD 1

W momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 35° , cień komina ma długość równą 40 m. Oblicz wysokość tego komina.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.



KROK 2 Korzystamy z funkcji tangens, żeby wyznaczyć wysokość komina:

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{x}{40}$$

$$x = 40 \cdot \operatorname{tg} 35^\circ$$

KROK 3 Odczytujemy z tablic wartość funkcji trygonometrycznej:

$$\operatorname{tg} 35^\circ \approx 0,7002$$

KROK 4 Obliczamy wysokość komina:

$$x \approx 40 \cdot 0,7002 \approx 28 \text{ [m]}$$

ĆWICZENIE 1

Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość równą x , gdy promienie słoneczne padają pod kątem α . Wynik podaj z dokładnością do 0,1 m.

a) $\alpha = 30^\circ$, $x = 40 \text{ m}$

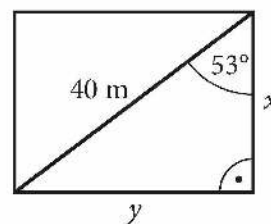
b) $\alpha = 48^\circ$, $x = 50 \text{ m}$

PRZYKŁAD 2

Przekątna działki w kształcie prostokąta ma długość 40 m. Tworzy ona z krótszym bokiem działki kąt 53° . Oblicz, ile metrów siatki potrzebujesz na ogrodzenie działki.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.

x – krótszy bok działki
 y – dłuższy bok działki



KROK 2 Korzystamy z funkcji cosinus, żeby obliczyć długość krótszego boku x :

$$\cos 53^\circ = \frac{x}{40}$$

$$\cos 53^\circ \approx 0,6018$$

$$x = 40 \cdot \cos 53^\circ$$

$$x \approx 40 \cdot 0,6018 \approx 24 \text{ [m]}$$

KROK 3 Aby obliczyć y , stosujemy funkcję sinus:

$$\sin 53^\circ = \frac{y}{40}$$

$$\sin 53^\circ \approx 0,7986$$

$$y = 40 \cdot \sin 53^\circ$$

$$y \approx 40 \cdot 0,7986 \approx 32 \text{ [m]}$$

KROK 4 Obliczamy obwód prostokąta, w kształcie którego jest działka:

$$L = 2x + 2y \approx 2 \cdot 24 + 2 \cdot 32 = 112 \text{ [m]}$$

Do ogrodzenia działki potrzeba ok. 112 m siatki.

ĆWICZENIE 2

Działka budowlana ma kształt prostokąta, którego przekątna o długości d tworzy z jednym z boków kąt o mierze α . Oblicz obwód tego prostokąta. Wynik zaokrąglij do 1 m.

a) $d = 50 \text{ m}$, $\alpha = 43^\circ$

b) $d = 60 \text{ m}$, $\alpha = 70^\circ$

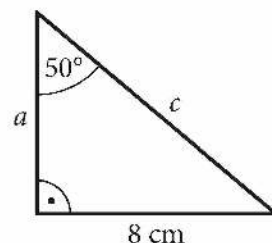
PRZYKŁAD 3

Wyznacz długości boków a i c w narysowanym trójkącie z dokładnością do części setnych centymetra.

KROK 1 Korzystamy z funkcji sinus, żeby obliczyć długość przeciwprostokątnej:

$$\frac{8}{c} = \sin 50^\circ$$

$$c = \frac{8}{\sin 50^\circ} \approx \frac{8}{0,7660} \approx 10,44 \text{ [cm]}$$



KROK 2 Obliczamy długość brakującej przyprostokątnej za pomocą funkcji tangens:

$$\frac{8}{a} = \tan 50^\circ$$

$$a = \frac{8}{\tan 50^\circ} \approx \frac{8}{1,1918} \approx 6,71 \text{ [cm]}$$

Długość boku a wynosi 6,71 cm, a boku b wynosi 10,44 cm.

ĆWICZENIE 3

Wyznacz długości pozostałych boków w trójkącie prostokątnym z dokładnością do jednej cyfry po przecinku, jeśli:

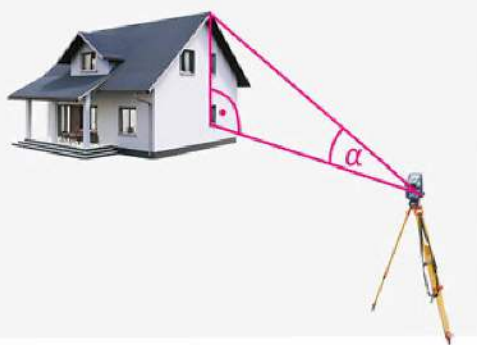
- przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jeden z kątów ma 37° ,
- długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta 54° jest równa 8 cm.

To się liczy!

Geodeci stosują tzw. niwelację trygonometryczną do obliczania wysokości obiektów oraz wyznaczania różnic poziomów. Do pomiaru kąta i odległości używają tachimetru. Następnie za pomocą funkcji trygonometrycznych określają szukaną wielkość. To zadanie pokaże Wam, jak zastosować tę umiejętność.

ZADANIE BRANŻOWE

Geodeta ma zmierzyć wysokość budynku. W tym celu umieścił tachimetr na statywie o wysokości 1,5 m. W wyniku pomiaru uzyskał miarę kąta $\alpha = 22^\circ$ oraz odległość 20 m od budynku. Oblicz wysokość budynku.

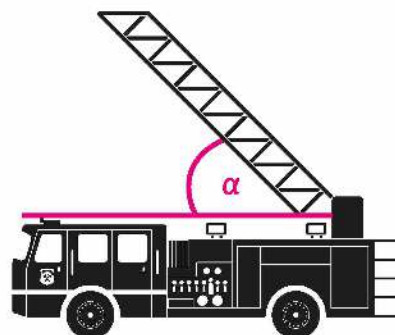
**ZADANIA**

Zbiór zadań, s. 218

- Robert wypuścił latawiec przywiązany do sznurka o długości 36 m. Naciągnięty sznurek tworzy z ziemią kąt 65° . Oblicz, jak wysoko nad ziemią znajduje się latawiec, jeżeli Robert wyciągnął rękę na wysokość 2,1 m.
- Wierzchołek komina widać z punktu A pod kątem 36° , a z punktu B pod kątem 50° . Podstawa komina oraz punkty A i B leżą na prostej prostopadłej do komina. Komin ma 20 m wysokości. Wyznacz odległość między punktami A i B . Pomiń szerokość komina.

ZADANIA BRANŻOWE

- Drabinę strażacką można rozsunąć na długość 21 m i podnieść pod kątem 72° – tak jak przedstawiono to na rysunku. Na jaką wysokość sięgnie drabina, jeśli jest zamocowana 2,4 m nad ziemią? Maksymalnie na które piętro mogą wejść po drabinie strażacy, jeśli średnio każda kondygnacja ma 3 m wysokości?



4 Trygonometria na drodze

Kiedy jedziemy samochodem, możemy zauważyć znaki drogowe ostrzegające o niebezpiecznym nachyleniu drogi. Do wyznaczenia stopnia tego nachylenia są wykorzystywane funkcje trygonometryczne.

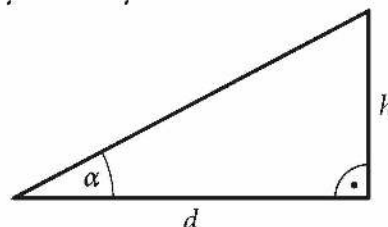
Nachylenie drogi zależy od kąta zawartego między powierzchnią terenu, na którym wznosi się droga, a poziomą płaszczyzną. Obliczamy je jako stosunek różnicy wysokości do odległości w poziomie. Nachylenie drogi oznaczamy jako n i zwykle podajemy je w procentach. Nachylenie możemy obliczyć ze wzoru:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\% = \operatorname{tg} \alpha \cdot 100\%$$

gdzie h – różnica wysokości drogi

d – odległość pozioma

α – kąt nachylenia drogi



Nachylenie podane w procentach możemy od razu interpretować, np. nachylenie 1% oznacza, że droga na odcinku długości 100 m wznosi się lub opada o 1 m.

Dla kąta 45° nachylenie wynosi 100%, ponieważ $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIE TRYGNOMETRII

- 1 Znak ostrzegawczy A-22 „niebezpieczny zjazd” umieszcza się przed spadkami drogi, które wynoszą co najmniej 10% w terenie górzystym oraz co najmniej 7% na pozostałych drogach.
- 2 Tabliczka T-9 pod znakiem informuje o rzeczywistym nachyleniu drogi z dokładnością do 1%.

Wartość 8% oznacza, że droga na odcinku długości 100 m opada o 8 m.

Aby obliczyć, jaki to kąt, korzystamy ze wzoru na nachylenie:

$$8\% = \operatorname{tg} \alpha \cdot 100\%$$

Zamieniamy procenty na ułamki i otrzymujemy równanie:

$$\frac{8}{100} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{100}{100}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,08$$

Odczytujemy z tablic trygonometrycznych, dla jakiego kąta tangens przyjmuje wartość 0,08:

$$\alpha \approx 5^\circ$$

Jeżeli nachylenie drogi wynosi 8%, to kąt nachylenia drogi ma miarę 5° .



- 3 Oprócz znaku A-22 istnieje również znak analogiczny: A-23 „stromy podjazd”, który stosowany jest przed podjazdami o wzniesieniu co najmniej 8% w terenie górzystym oraz co najmniej 6% na pozostałych drogach. Ostrzega on o znacznym wzniesieniu drogi.
- 4 Przy obliczaniu nachylenia wzniesienia drogi stosuje się ten sam wzór, co w przypadku spadku.

Geodeta za pomocą tachimetru ustalił, że kąt nachylenia drogi ma miarę 8° . Korzystamy ze wzoru na nachylenie, żeby obliczyć, co należałoby wpisać na tabliczce T-9:

$$n = \operatorname{tg} \alpha \cdot 100\% = \operatorname{tg} 8^\circ \cdot 100\% \approx 0,1405 \cdot 100\% = 14,05\%$$

Zaokrąglamy wynik do 1%:

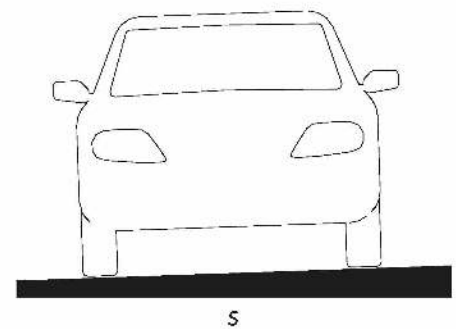
$$n \approx 14\%$$

Jeżeli kąt nachylenia wynosi 8° , to na tabliczce pod znakiem należy umieścić informację, że nachylenie drogi wynosi 14%.



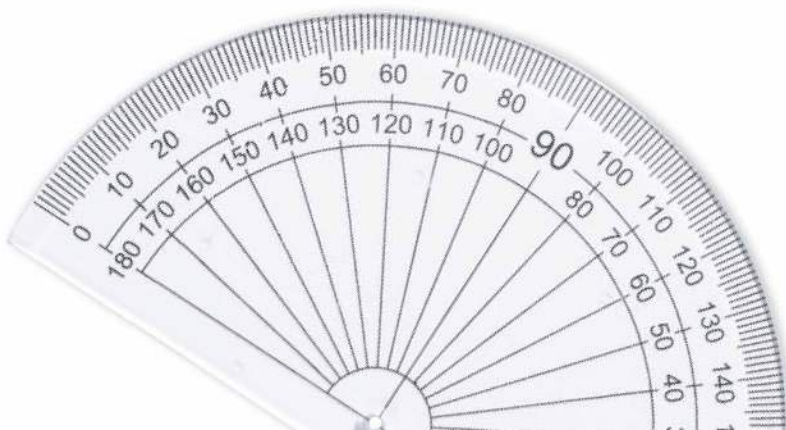
ZADANIA BRANŻOWE

Drogi, którymi się poruszamy, nie są idealnie poziome. Szczegółowe przepisy określają tzw. nachylenie poprzeczne drogi, które liczy się w stosunku do jej szerokości (liczonej w poziomie). Na prostym odcinku drogi powinno ono wynosić co najmniej 2%.



Wykonaj polecenia.

- Podaj wzór na nachylenie poprzeczne drogi, wprowadzając oznaczenie s – szerokość drogi w poziomie.
- Oblicz, o ile centymetrów należy pochylić pas jezdni o szerokości 3,5 m w poziomie, jeżeli nachylenie poprzeczne wynosi 2%.
- Wyznacz miarę kąta nachylenia pasa jezdni dla stopnia nachylenia 2%.
- Zastanów się, w jakim celu stosuje się nachylenie poprzeczne drogi.



Związki między funkcjami trygonometrycznymi

NA POCZĄTEK

Podczas ćwiczeń na siłowni ciało trenera układa się w stosunku do podłoża pod kątem, którego sinus wynosi $\frac{9}{17}$. Jak myślisz, czy cosinus tego kąta będzie większy czy mniejszy od sinusa? Jak duży może być sinus lub cosinus kąta ostrego?



PRZYKŁAD 1

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ b) $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$

KROK 1 Podstawiamy wartości funkcji sinus i cosinus dla kąta 30° :

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

KROK 2 Wykonujemy obliczenia:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

b) ROZWIĄZANIE

$$\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

PODPowiedź

Zamiast pisać $(\sin \alpha)^2$, możemy pisać $\sin^2 \alpha$.
Jeśli $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, to $\sin^2 \alpha = \frac{4}{9}$.

ĆWICZENIE 1

Sprawdź, czy równość jest prawdziwa.

a) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$ b) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$ c) $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \operatorname{tg} 60^\circ$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Tożsamości trygonometryczne to równania, które są spełnione dla dowolnego kąta α . Prawdziwe są równości:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (tzw. jedynka trygonometryczna)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ dla dowolnego kąta ostrego } \alpha$$

PRZYKŁAD 2

Sprawdź, czy dla kąta α w trójkącie ABC spełnione są tożsamości trygonometryczne.

KROK 1 Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta α :

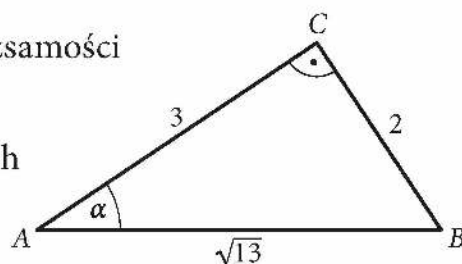
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

KROK 2 Sprawdzamy prawdziwość jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{4}{13} + \frac{9}{13} = \frac{13}{13} = 1$$

KROK 3 Obliczamy stosunek sinusa do cosinusa:

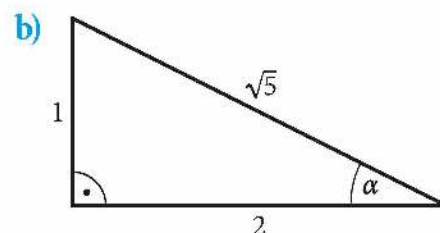
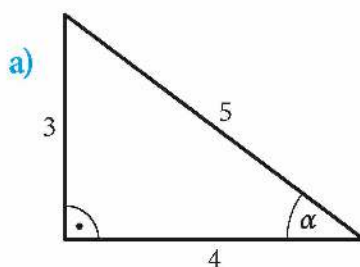
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{\frac{3}{\sqrt{13}}} = \frac{2}{\sqrt{13}} : \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{2}{3} = \operatorname{tg} \alpha$$

**PODPÓWIEDŹ**

W wyjątkowych sytuacjach możemy zostawić niewymierność w mianowniku ułamka, jeśli wiemy, że za chwilę w obliczeniach zostanie ona usunięta.

ĆWICZENIE 2

Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.
Sprawdź, czy dla kąta α spełnione są tożsamości trygonometryczne.

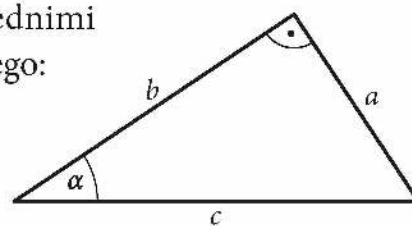
**TO JEST DOWÓD**

Udowodnij, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest jedynka trygonometryczna.

KROK 1 Zastępujemy funkcje trygonometryczne odpowiednimi stosunkami długości boków trójkąta prostokątnego:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$$



KROK 2 Przekształcamy otrzymaną równość:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

KROK 3 Zamieniamy sumę kwadratów długości przyprostokątnych ($a^2 + b^2$) na kwadrat długości przeciwprostokątnej (c^2) na mocy twierdzenia Pitagorasa:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

**I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!**

Uzasadnij, że dla dowolnego kąta α zachodzi równość $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

PRZYKŁAD 3

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

KROK 1 Podstawiamy $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ do jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

KROK 2 Rozwiązujemy równanie, żeby wyznaczyć wartość cosinusa:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

KROK 3 Obliczamy wartość tangensa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} = \frac{5}{12}$$

PODPowiedź

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych zawsze są liczbami dodatnimi.

ĆWICZENIE 3

Cosinus pewnego kąta ostrego α jest równy $\frac{8}{17}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

PRZYKŁAD 4

Oblicz $\operatorname{tg} 54^\circ$, korzystając tylko z podanego fragmentu tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

KROK 1 Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej, żeby wyrazić funkcję tangens za pomocą sinusa i cosinusa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 54^\circ = \frac{\sin 54^\circ}{\cos 54^\circ}$$

KROK 2 Znajdujemy wartości sinus i cosinus dla kąta 54° za pomocą wzorów redukcyjnych:

$$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ \approx 0,8090$$

$$\cos 54^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ \approx 0,5878$$

KROK 3 Podstawiamy otrzymane wartości do funkcji tangens:

$$\operatorname{tg} 54^\circ = \frac{\sin 54^\circ}{\cos 54^\circ} \approx \frac{0,8090}{0,5878} \approx 1,3763$$

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
33°	0,5446	0,8387
34°	0,5592	0,8290
35°	0,5736	0,8192
36°	0,5878	0,8090
37°	0,6018	0,7986
38°	0,6157	0,7880
39°	0,6293	0,7771
40°	0,6428	0,7660
41°	0,6561	0,7547

ĆWICZENIE 4

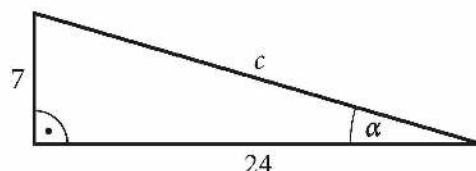
Oblicz $\operatorname{tg} 49^\circ$, korzystając z fragmentu tablic trygonometrycznych z przykładu 4.

PRZYKŁAD 5

Wyznacz wartości sinusa i cosinusa kąta, którego tangens jest równy $\frac{7}{24}$.

KROK 1 Zakładamy, że skoro $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$, to przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mogą mieć długości 7 i 24.

KROK 2 Wykonujemy rysunek pomocniczy trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 7$ i $b = 24$.



KROK 3 Obliczamy długość przeciwprostokątnej za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$$

KROK 4 Wyznaczamy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{7}{25} \quad \cos \alpha = \frac{24}{25}$$

ĆWICZENIE 5

Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, jeśli:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = 3$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 218

1. Oblicz wartości brakujących funkcji trygonometrycznych, jeśli:

- a) $\sin \alpha = 0,8$; b) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$; c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$.

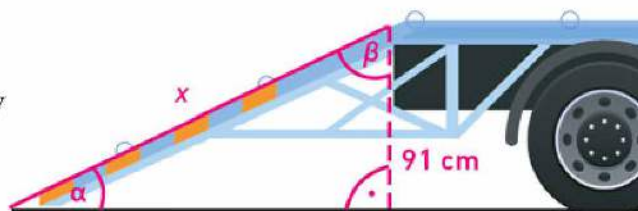
2. Oblicz wartość wyrażenia.

- a) $\cos^2 25^\circ + \cos^2 65^\circ$
b) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 70^\circ$

ZADANIA BRANŻOWE

3. Kierowca firmy transportowej użył rampy najazdowej do rozładunku ciężarówki.

Wykonaj polecenia.



- a) Oblicz długość rampy, jeśli $\sin \beta = \frac{24}{25}$.
b) Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

Obliczanie pól wielokątów z wykorzystaniem trygonometrii

NA POCZĄTEK

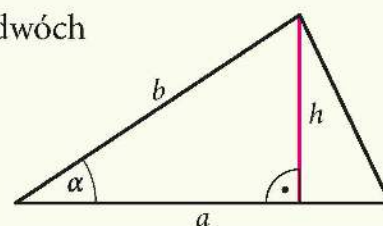
Nowy Rynek w Łowiczu to jedyny w Polsce rynek w kształcie trójkąta. Na planie zaznaczono długości ulic rynku. W jaki sposób ustalisz miarę kąta α , jaki tworzą ulice?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

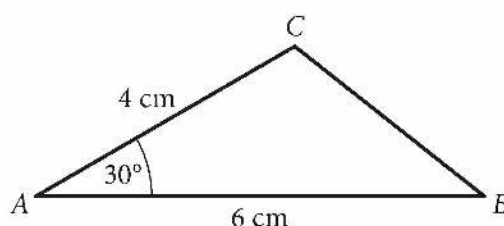
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$



PRZYKŁAD 1

Oblicz pole trójkąta ABC.



KROK 1 Podstawiamy do wzoru na pole trójkąta wielkości zaznaczone na rysunku:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ$$

KROK 2 Wykonujemy obliczenia:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Pole trójkąta wynosi 6 cm^2 .

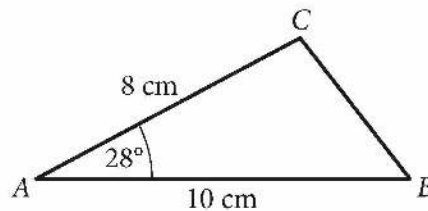
ĆWICZENIE 1

Oblicz pole trójkąta o bokach a , b i kącie α zawartym między tymi bokami.

- a) $a = 8 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$
 b) $a = 2\sqrt{3} \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$
 c) $a = 7 \text{ dm}$, $b = 10 \text{ dm}$, $\alpha = 45^\circ$

PRZYKŁAD 2

Oblicz pole trójkąta ABC . Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 cm^2 .

**ROZWIĄZANIE**

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 28^\circ \approx 40 \cdot 0,4695 = 18,78 \approx 19 [\text{cm}^2]$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz z dokładnością do 1 cm^2 pole trójkąta o bokach a , b i kącie α zawartym między tymi bokami.

- a) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, $\alpha = 27^\circ$
 b) $a = 7 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$, $\alpha = 58^\circ$

TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że pole dowolnego trójkąta obliczymy ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.

KROK 1 Wyznaczamy wysokość trójkąta za pomocą funkcji trygonometrycznej kąta α :

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \quad | \cdot b$$

$$h = b \sin \alpha$$

KROK 2 Podstawiamy wyznaczoną wysokość do wzoru na pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

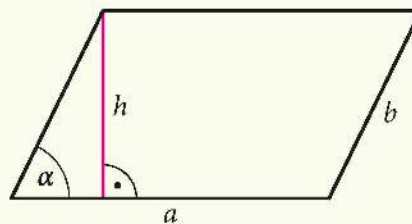
**I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!**

Uzasadnij, że pole dowolnego równoległoboku obliczamy ze wzoru $P = ab \sin \alpha$.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pole równoległoboku o bokach a i b oraz kącie ostrym α wyraża się wzorem:

$$P = ab \sin \alpha$$

**PRZYKŁAD 3**

Oblicz pole równoległoboku o bokach długości 6 cm i 10 cm oraz kącie ostrym 60° .

ROZWIĄZANIE

$$P = ab \sin \alpha = 6 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 3

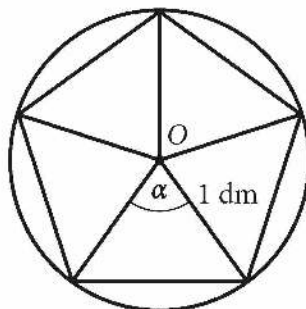
Oblicz pole równoległoboku o bokach a i b i kącie ostrym α .

a) $a = 9 \text{ m}$, $b = 12 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$

b) $a = 5 \text{ dm}$, $b = 6\sqrt{2} \text{ dm}$, $\alpha = 45^\circ$

PRZYKŁAD 4

Oblicz pole pięciokąta foremnego, którego wierzchołki znajdują się na okręgu o promieniu długości 1 dm. Wynik zaokrąglaj do jednej cyfry po przecinku.



KROK 1 Zauważamy, że pięciokąt składa się z pięciu trójkątów równoramiennych o ramieniu długości 1 dm:

$$P = 5 \cdot P_{\Delta}$$

KROK 2 Wyznaczamy kąt α między ramionami trójkąta:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

KROK 3 Obliczamy pole trójkąta:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 72^{\circ} \approx \frac{1}{2} \cdot 0,9511 = 0,47555 \text{ [dm}^2\text{]}$$

KROK 4 Wyznaczamy pole pięciokąta:

$$P = 5 \cdot P_{\Delta} \approx 5 \cdot 0,47555 = 2,37773 \approx 2,4 \text{ [dm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 4

Oblicz pole dwunastokąta foremnego, którego wierzchołki znajdują się na okręgu o promieniu długości 2 m.

ZADANIA

 Zbiór zadań, s. 219

1. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie między ramionami równym α i ramieniu a . Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 cm^2 .

a) $\alpha = 37^{\circ}$, $a = 10 \text{ cm}$

b) $\alpha = 70^{\circ}$, $a = 6 \text{ cm}$

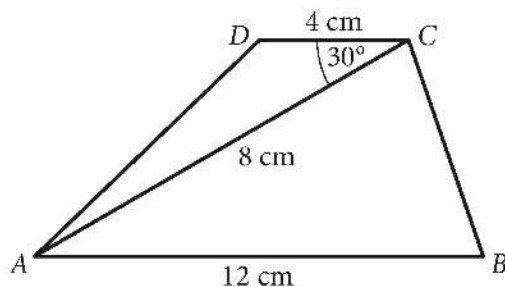
2. Oblicz pole równoległoboku o bokach a , b i kącie ostrym α . Wynik zaokrąglij do 1 cm^2 .

a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$, $\alpha = 38^{\circ}$

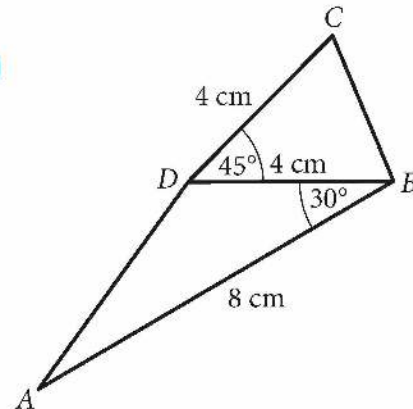
b) $a = 8 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, $\alpha = 56^{\circ}$

3. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

a)

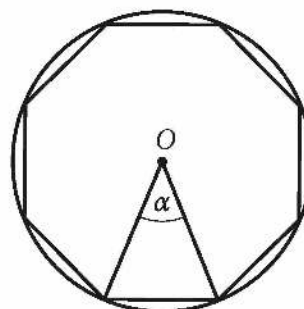


b)



ZADANIA BRANŻOWE

4. Stolarz zaprojektował blat stołu w kształcie ośmiokąta foremnego. Wyciął go z okrągłego kawałka płyty o promieniu długości 1 m. Na powierzchnię blatu trzeba nałożyć trzy warstwy lakieru z góry i dwie warstwy od dołu. Oblicz, ile litrów lakieru stolarz zużyje na polakierowanie tego blatu, jeśli lakier ma wydajność $0,8 \text{ l/m}^2$.

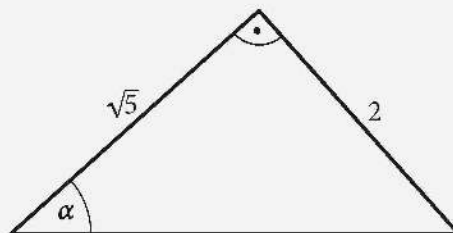


Powtórzenie rozdziału

TRYGONOMETRIA

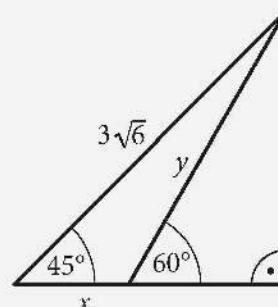
ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α w narysowanym trójkącie.



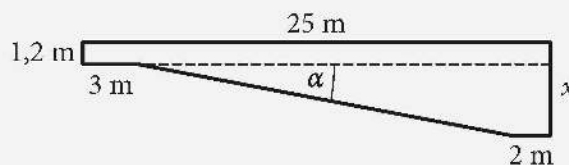
- 2 Przekątna prostokąta o bokach długości 1 dm i 2 dm dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

- 3 Oblicz długości odcinków x i y w narysowanym trójkącie.



- 4 Linę podtrzymującą maszt zamocowano w połowie jego wysokości. Lina ta ma 40 m długości i tworzy z podłożem kąt 50° . Oblicz wysokość masztu.

- 5 Na rysunku przedstawiono przekrój basenu i jego wymiary. Przez x oznaczono maksymalną głębokość basenu.



Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Jeśli $\alpha = 5^\circ$, to x – z dokładnością do 1 cm – jest równe

- A. 2 m 95 cm. B. 3 m. C. 3 m 5 cm. D. 3 m 10 cm.

- 6 Dany jest kąt ostry α , którego sinus jest równy $\frac{2}{3}$. Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\sin^2 \alpha + \sin \alpha = 1\frac{1}{9}$

C. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$

B. $\cos \alpha = \frac{8}{9}$

D. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$

- 7 Oblicz wartości brakujących funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$,

b) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$,

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$.

- 8 Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ$

b) $(\sin 62^\circ - \cos 28^\circ) \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$

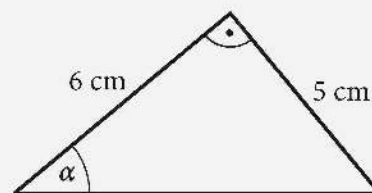
- 9 Oblicz pole równoległoboku o bokach długości 3 cm i 5 cm oraz kącie ostrym 30° .

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Tangens kąta α w narysowanym trójkącie jest równy

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{6}{5}$. C. $\frac{5\sqrt{11}}{11}$. D. $\frac{6\sqrt{11}}{11}$.



- 2 Trójkąt prostokątny ma boki o długościach 3, 4, 5. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Sinus jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy 0,6.
B. Cosinus jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy 0,6.
C. Tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy 0,8.

- 3 Podaj przybliżoną miarę kąta α , korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych na końcu podręcznika.

- a) $\sin \alpha = 0,9976$ b) $\cos \alpha = 0,7547$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,1051$

- 4 Oblicz wartość wyrażenia.

- a) $\sin^2 30^\circ + \operatorname{tg}^2 30^\circ$ b) $\cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ$ c) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

- 5 Wybierz właściwe dokończenie zdania. Jeśli cosinus kąta ostrego α jest równy $\frac{2}{5}$, to sinus kąta α jest równy

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{5}$. D. $\frac{5}{2}$.

- 6 Michał widzi komin o wysokości 40 m pod kątem 10° . Ustal, jak daleko od podstawy komina stoi.

- 7 Wybierz właściwe dokończenie zdania. Obwód prostokątnej działki budowlanej, której przekątna o długości 100 m tworzy z jednym z boków kąt 30° , jest równy

- A. 200 m. B. $200\sqrt{3}$ m. C. 300 m. D. $(100 + 100\sqrt{3})$ m.

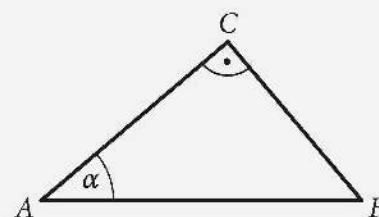
- 8 Dany jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 8 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli wiesz, że sinus jednego z kątów ostrych wynosi $\frac{1}{9}$.

- 9 W trójkącie ABC przeciwprostokątna ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli cosinus kąta α jest równy $\frac{2}{3}$.

- 10 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Pole trójkąta o bokach długości 3 cm, 4 cm i kącie między nimi $\alpha = 45^\circ$ jest równe

- A. 3 cm^2 . B. $3\sqrt{2} \text{ cm}^2$. C. 6 cm^2 . D. $6\sqrt{2} \text{ cm}^2$.



Rozdział VII

Okręgi i wielokąty

TEMATY LEKCJI

- | | | |
|----------|--|------------|
| 1 | Długość okręgu i pole koła | s. 163–166 |
| 2 | Kąty środkowe | s. 167–170 |
| 3 | Kąty wpisane | s. 171–174 |
| 4 | Wzajemne położenie prostej i okręgu | s. 175–179 |
| 5 | Okrąg wpisany w trójkąt | s. 180–184 |
| 6 | Okrąg opisany na trójkącie | s. 185–188 |
| 7 | Trójkąt równoboczny i kwadrat | s. 189–192 |
| 8 | Wielokąty foremne | s. 193–195 |
| | Powtórzenie rozdziału | s. 196–197 |

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

Długość okręgu i pole koła

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się wisiorkowi z posrebrzanego drutu. W jaki sposób ustalisz, ile drutu potrzeba do wykonania trzech okrągłych elementów biżuterii?



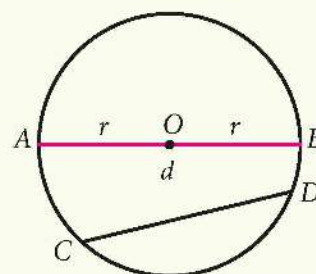
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O wynosi r .

Cięciwą okręgu nazywamy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu. Najdłuższą cięciwą okręgu jest jego **średnica** o długości $2r$.

Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem:

$$l = 2\pi r$$



AO, BO – promienie
AB – średnica
AC, BD – cięciwy

PRZYKŁAD 1

Oblicz długość promienia i średnicy okręgu o długości 16π cm. Ustal, czy cięciwa tego okręgu może mieć długość 15 cm.

KROK 1 Wyznaczamy długość promienia okręgu ze wzoru na długość okręgu:

$$l = 2\pi r$$

$$16\pi = 2\pi r \quad | : (2\pi)$$

$$r = 8 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy długość średnicy okręgu:

$$d = 2r = 16 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Stwierdzamy, że podana cięciwa jest krótsza od średnicy:

$$15 \text{ cm} < 16 \text{ cm}$$

Cięciwa tego okręgu może mieć 15 cm długości.

ĆWICZENIE 1

Dany jest okrąg o długości l . Podaj długości promienia i średnicy tego okręgu. Sprawdź, czy okrąg może mieć cięciwę o długości a .

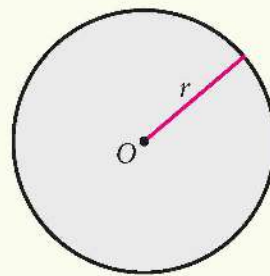
- a) $l = 40\pi$ cm, $a = 39$ cm b) $l = 3\frac{1}{2}\pi$ cm, $a = 3,6$ cm c) $l = 6\pi$ cm, $a = 2\pi$ cm

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kołem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = \pi r^2$$



PRZYKŁAD 2

Oblicz pole koła:

- a) o średnicy długości 12 cm. b) o obwodzie 16π dm.

a) **KROK 1** Obliczamy długość promienia koła:

$$2r = 12 \mid : 2$$

$$r = 6 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Podstawiamy długość promienia do wzoru na pole koła:

$$P = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = \pi \cdot 36 = 36\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

Pole koła wynosi $36\pi \text{ cm}^2$.

b) **KROK 1** Wyznaczamy długość promienia koła ze wzoru na obwód koła:

$$l = 2\pi r = 16\pi$$

$$2\pi r = 16\pi \mid : (2\pi)$$

$$r = 8 \text{ [dm]}$$

KROK 2 Obliczamy pole koła:

$$P = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi \text{ [dm}^2\text{]}$$

PODPowiedź

Wzór na długość okręgu jest jednocześnie wzorem na obwód koła.

ĆWICZENIE 2

Oblicz pole koła o średnicy długości d .

- a) $d = 8$ cm b) $d = 0,5$ m c) $d = 12$ dm

To się liczy!

Dla wielu specjalistów, np. producentów różnych produktów czy malarzy, ważna jest umiejętność obliczania ilości farby potrzebnej do pomalowania określonej powierzchni. Wy sami również możecie z niej skorzystać, np. kiedy zdecydujecie się samodzielnie pomalować mieszkanie lub lokal usługowy. Poniższe zadanie pomoże Wam nauczyć się, jak obliczyć ilość farby niezbędnej do pokrycia określonej płaszczyzny.

ZADANIE BRANŻOWE

Pewna firma otrzymała zlecenie na wykonanie 50 znaków drogowych „droga dla rowerów”. Niebieska farba, którą należy pomalować tło tych znaków, jest sprzedawana w pojemnikach, z których każdy wystarcza do pokrycia 30 m^2 powierzchni. Ile pojemników farby trzeba kupić, aby pomalować wszystkie zamówione znaki?



PRZYKŁAD 3

Oblicz obwód koła:

- a) o polu $4\pi \text{ cm}^2$, b) o średnicy 1 m .

- a) **KROK 1** Korzystamy ze wzoru na pole koła, żeby wyznaczyć długość promienia:

$$\begin{aligned} P &= \pi r^2 \\ \pi r^2 &= 4\pi \quad | : \pi \\ r^2 &= 4 \\ r &= 2 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

- KROK 2** Obliczamy obwód koła:

$$l = 2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \text{ [cm]}$$

- b) **ROZWIĄZANIE**

$$\begin{aligned} 2r &= 1 \quad | : 2 \\ r &= 0,5 \text{ [m]} \\ l &= 2\pi r = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \text{ [m]} \end{aligned}$$

ĆWICZENIE 3

Oblicz obwód koła o danym polu.

- a) $P = 16\pi \text{ cm}^2$ b) $P = 25\pi \text{ dm}^2$ c) $P = 100\pi \text{ cm}^2$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 220

1. Do kartonu zapakowano 12 jednakowych puszek. Na zdjęciu przedstawiono ich widok z góry. Oblicz długość średnicy denka puszki, jeżeli dno kartonu jest prostokątem o obwodzie 140 cm.



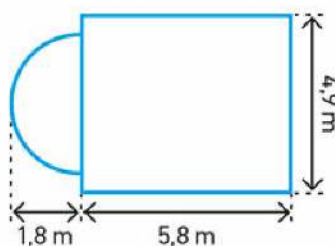
2. Przekątna prostokąta o bokach a i b jest średnicą pewnego okręgu. Wyznacz długość tego okręgu i oblicz pole koła ograniczonego przez ten okrąg.

a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm

b) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm

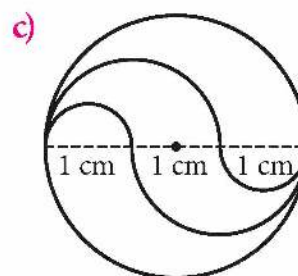
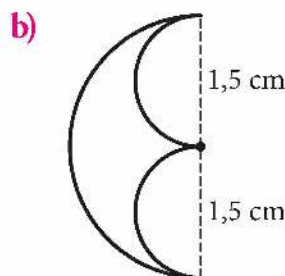
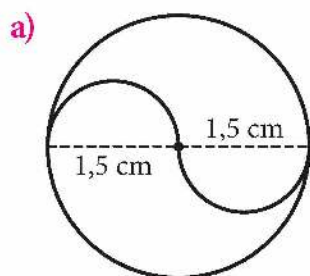
c) $a = 4$ cm, $b = 4$ cm

3. Gdy jeden z koszykarzy wykonuje rzut wolny, pozostali muszą stać poza obszarem, którego wymiary przedstawiono na rysunku. Oblicz pole tego obszaru. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 m^2 .

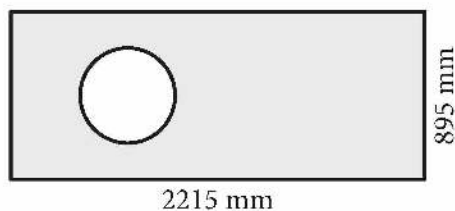


ZADANIA BRANŻOWE

4. Jubiler wykonał projekt broszki. Oblicz, ile centymetrów drutu zużyje na jej wykonanie. W obliczeniach przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.



5. Stolarz przygotował drewniany blat z wyciętym otworem na umywalkę. Odpowiedz na pytania.

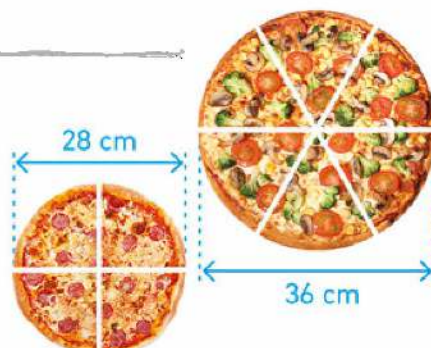


- a) Czy otwór może mieć pole powierzchni większe od $0,65 \text{ m}^2$?
- b) Ile wynosi pole powierzchni otworu, jeśli odległość między dłuższymi krawędziami blatu a brzegiem otworu jest równa 15 cm? Wynik podaj z dokładnością do 1 cm^2 .

2 Kąty środkowe

NA POCZĄTEK

Cezary był bardzo głodny. W pizzerii zaproponowano mu, że może zamówić jeden kawałek z dużej pizzy lub jeden ze średniej. Przyjrzyj się zdjęciom i powiedz, która propozycja jest korzystniejsza.

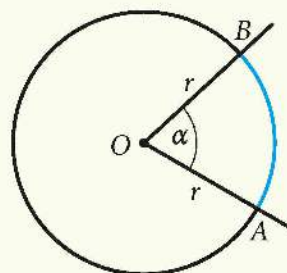


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kąt środkowy to kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu. Ramiona tego kąta przecinają okrąg w dwóch punktach A i B , które wyznaczają na okręgu łuk $\widehat{AB}$.

Długość łuku okręgu o promieniu r , wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α , wyraża się wzorem:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$



PRZYKŁAD 1

Podaj miarę kąta środkowego, którego ramiona oparte są na łuku o długości $\frac{1}{4}$ okręgu.

KROK 1 Zauważamy, że skoro łuk ma długość $\frac{1}{4}$ okręgu, to kąt środkowy stanowi $\frac{1}{4}$ kąta pełnego:

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ$$

KROK 2 Obliczamy miarę kąta środkowego:

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

PODPOWIEDŹ

Ramiona kąta środkowego dzielą okrąg na dwa łuki. Jeśli nie są one półokręgami, to mówiąc o łuku $\widehat{AB}$, mamy na myśli krótszy z nich.

ĆWICZENIE 1

Podaj miarę kąta środkowego, którego ramiona oparte są na łuku o podanej długości.

a) $\frac{1}{2}$ okręgu

b) $\frac{1}{6}$ okręgu

c) $\frac{2}{9}$ okręgu

d) $\frac{2}{3}$ okręgu

PRZYKŁAD 2

Oblicz długość łuku $\widehat{AB}$ wyznaczonego na okręgu o promieniu długości 9 cm przez ramiona kąta środkowego o mierze 120° .

ROZWIĄZANIE

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 9 = \frac{1}{3} \cdot 18\pi = 6\pi \text{ [cm]}$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz długość łuku wyznaczonego na okręgu o promieniu długości r przez kąt środkowy o mierze α .

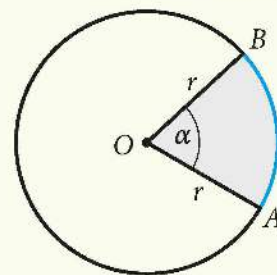
- a) $r = 8 \text{ cm}$, $\alpha = 90^\circ$
- b) $r = 24 \text{ dm}$, $\alpha = 45^\circ$
- c) $r = 12 \text{ m}$, $\alpha = 270^\circ$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wycinek koła to część koła o środku O , ograniczona łukiem $\widehat{AB}$ i promieniami AO i BO .

Jeśli kąt środkowy AOB ma miarę α , to **pole wycinka koła** wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

**PRZYKŁAD 3**

Oblicz pole wycinka koła o promieniu długości 9 cm wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 120° .

ROZWIĄZANIE

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 9^2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 81 = 27\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 3

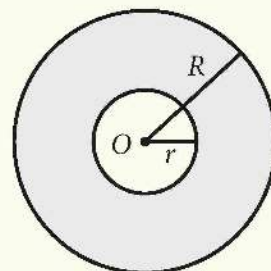
Oblicz pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy α .

- a) $r = 12 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$
- b) $r = 3 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$
- c) $r = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 240^\circ$

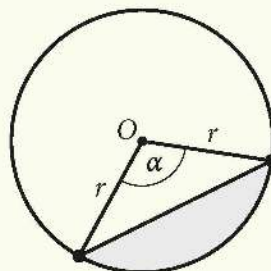
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pierścień kołowy to płaszczyzna ograniczona okręgami o tym samym środku wraz z tymi okręgami.

r – promień wewnętrzny
 R – promień zewnętrzny



Odcinek kołowy to część koła ograniczona cięciwą koła i łukiem na niej opartym.



PRZYKŁAD 4

Oblicz pole odcinka kołowego. Do obliczeń przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

KROK 1 Obliczamy pole wycinka koła:

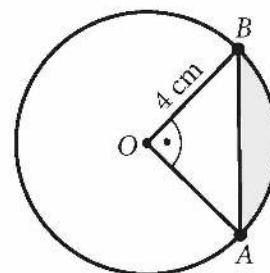
$$P_1 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{1}{4} \cdot 16\pi = 4\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 2 Obliczamy pole trójkąta AOB:

$$P_2 = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 3 Obliczamy pole odcinka kołowego:

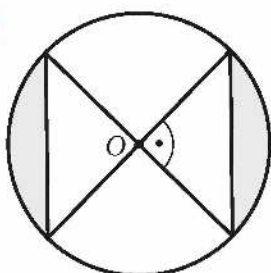
$$P = P_1 - P_2 = 4\pi - 8 \approx 4 \cdot 3,14 - 8 = 4,56 \text{ [cm}^2\text{]}$$



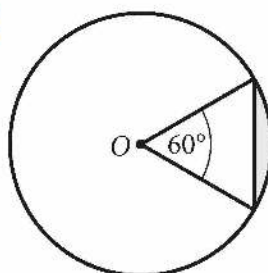
ĆWICZENIE 4

Oblicz pole zacieniowanego obszaru, jeśli wiesz, że promień koła ma długość 6 cm. Do obliczeń przyjmij, że $\pi \approx 3,14$, natomiast $\sqrt{3} \approx 1,73$. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 cm².

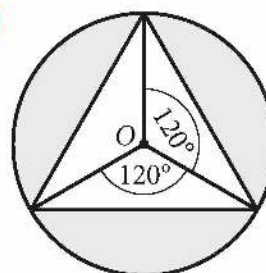
a)



b)



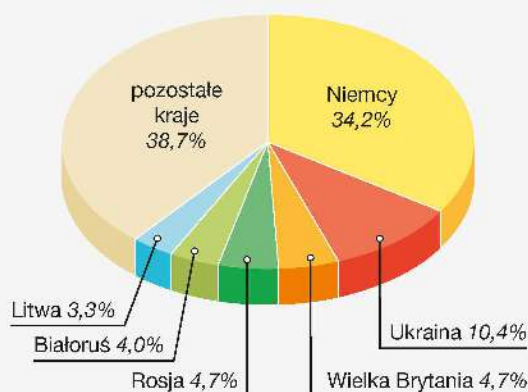
c)



To się liczy!

Jedną z popularnych form prezentowania danych jest diagram w postaci koła podzielonego na wycinki. Ich kąty środkowe są proporcjonalne do wielkości, które przedstawiono na diagramie. Poniższe zadanie pomoże Wam opanować umiejętność tworzenia diagramu kołowego.

Turyści zagraniczni odwiedzający Polskę



ZADANIE BRANŻOWE

W tabeli przedstawiono semestralne oceny z matematyki wystawione w pewnej szkole liczącej 200 uczniów. Zaprezentuj te dane na diagramie kołowym.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	20	35	60	45	30	10

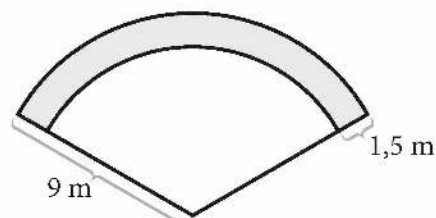
ZADANIA

 Zbiór zadań, s. 221

- Oblicz długość promienia koła, jeśli narysowany w nim kąt środkowy:
 - o mierze 60° opiera się na łuku o długości 7π cm,
 - o mierze 72° wyznacza wycinek koła o polu 5π cm².
- Ustal miarę kąta środkowego, który:
 - w okręgu o promieniu długości 5 cm wyznacza łuk o długości 3π cm,
 - w kole o promieniu długości 12 cm wyznacza wycinek koła o polu 20π cm².

ZADANIA BRANŻOWE

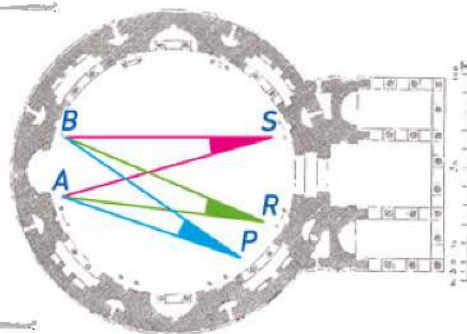
- Kucharz kroi tartę o średnicy długości 30 cm na n przystających kawałków, będących wycinkami koła o kącie środkowym α . Podaj, ile wynosi n i oblicz pole powierzchni jednego kawałka tarty z dokładnością do 1 cm² dla:
 - $\alpha = 45^\circ$,
 - $\alpha = 60^\circ$,
 - $\alpha = 72^\circ$.
- Pracownik firmy brukarskiej układa chodnik wokół rabaty w kształcie $\frac{1}{3}$ pierścienia kołowego, jak przedstawiono na rysunku. Oblicz, ile metrów kwadratowych kostki musi kupić firma (pomiń przestrzeń między kostkami).



3 Kąty wpisane

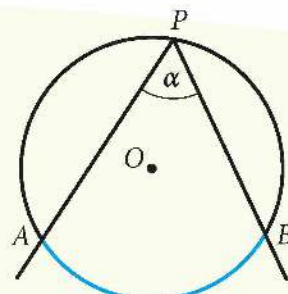
NA POCZĄTEK

Grupa turystów zwiedzała Panteon. Fotograf próbował znaleźć najlepsze ujęcie osób stojących między punktami A i B . Jak myślisz, czy zmienił kąt widzenia w obiektywie, ustawiając się w miejscach oznaczonych literami P , R , S ?

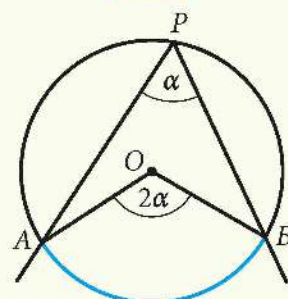


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kąt wpisany w okrąg to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona są półprostymi przecinającymi ten okrąg.

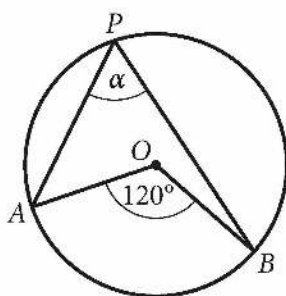


Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwukrotnie większą od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.



PRZYKŁAD 1

Oblicz miarę kąta α .



KROK 1 Zauważamy, że kąt APB jest kątem wpisanym opartym na łuku AB , a kąt AOB – kątem środkowym opartym na tym samym łuku.

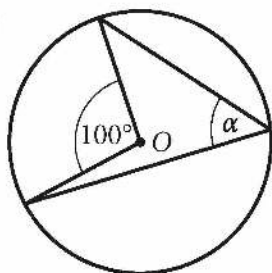
KROK 2 Korzystamy z zależności między kątem wpisanym i środkowym opartym na tym samym łuku, żeby obliczyć miarę kąta α :

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

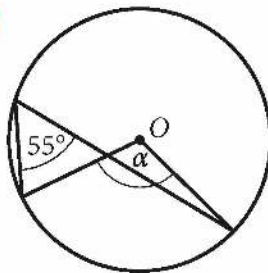
ĆWICZENIE 1

Oblicz miarę kąta α .

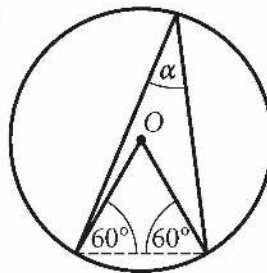
a)



b)



c)

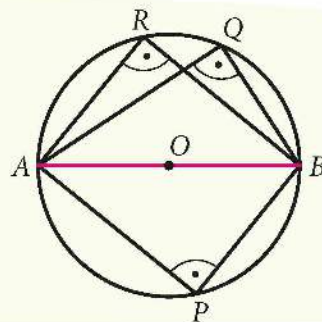


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Każdy kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (średnicy) jest kątem prostym.

Możemy to zapisać w następujący sposób:

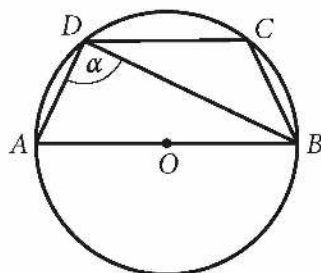
$$|\sphericalangle APB| = 90^\circ \quad |\sphericalangle AQB| = 90^\circ \quad |\sphericalangle ARB| = 90^\circ$$



PRZYKŁAD 2

Wierzchołki trapezu równoramiennego $ABCD$ leżą na okręgu. Dłuższa podstawa trapezu jest średnicą okręgu. Uzasadnij, że trójkąt ABD jest prostokątny.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



KROK 2 Stwierdzamy, że kąt ADB jest kątem wpisanym opartym na średnicy:

$$|\sphericalangle ADB| = 90^\circ$$

Trójkąt ABD jest trójkątem prostokątnym.

ĆWICZENIE 2

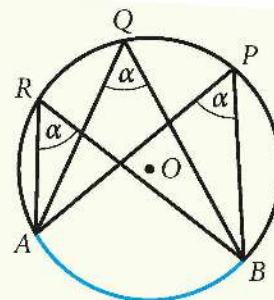
Na okręgu zaznaczono sześć punktów: A, B, C, D, E i F , będących kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego. Wykonaj w zeszycie odpowiedni rysunek i uzasadnij, że czworokąt $ACDE$ ma dwa kąty proste.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kąty wpisane w okrąg, oparte na tym samym łuku, mają równe miary.

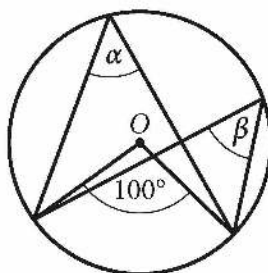
Możemy to zapisać w następujący sposób:

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle AQB| = |\sphericalangle ARB| = \alpha$$



PRZYKŁAD 3

Oblicz miary kątów α i β .



KROK 1 Zauważamy, że kąt α jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy o mierze 100° , więc jego miara jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$$

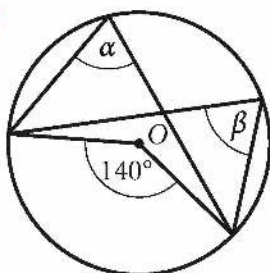
KROK 2 Stwierdzamy, że kąty α i β to kąty wpisane oparte są na tym samym łuku, więc mają równe miary:

$$\alpha = \beta = 50^\circ$$

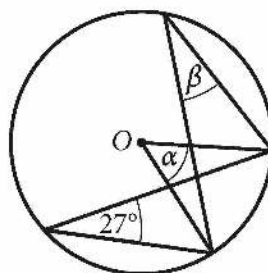
ĆWICZENIE 3

Oblicz miary kątów α i β .

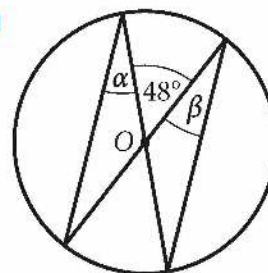
a)



b)



c)

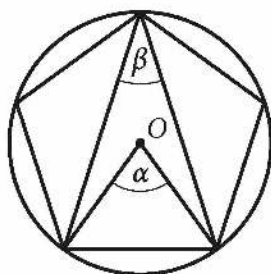


ZADANIA

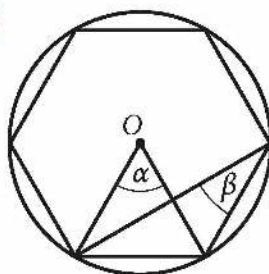
Zbiór zadań, s. 221

1. Rysunki przedstawiają pięciokąt, sześciokąt oraz ośmiokąt foremny. Wierzchołki wielokątów znajdują się na okręgu o środku O . Podaj miary kątów α i β .

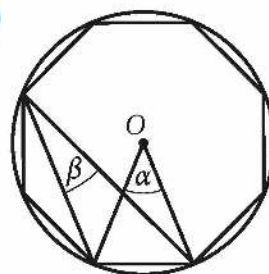
a)



b)



c)



2. Wierzchołki A, B, C, D, E i F sześciokąta foremnego leżą na okręgu o środku O . Kąt APC jest kątem ostrym, gdzie P jest punktem leżącym na okręgu. Wykonaj w zeszy- cie odpowiedni rysunek i odpowiedz na pytania.

a) Ile wynosi miara kąta APC ?

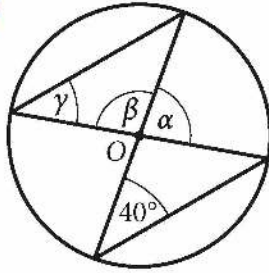
b) Ile wynosi miara kąta APQ , gdzie Q jest środkiem krótszego z łuków wyznaczonych na okręgu przez punkty A i B ?

3. Wyznacz kąty α , β i γ .

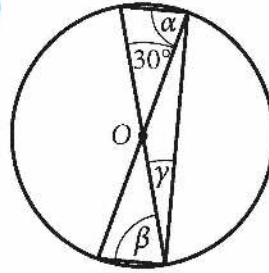
a)



b)

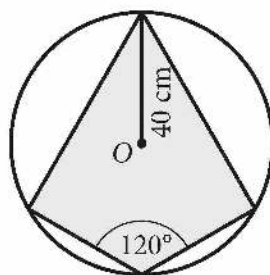


c)



ZADANIA BRANŻOWE

4. Grafikowi zlecono wykonanie logo firmy w kształcie deltoidu, którego wierzchołki należą do okręgu – jak na rysunku. Jakiej długości będą boki czworokąta, jeśli okrąg ma promień długości 40 cm, a kąt α między krótszymi bokami ma 120° ?



PODPowiedź

Deltoid to czworokąt, który ma dwie pary sąsiednich boków równej długości, a jego przekątne są prostopadłe.

Wzajemne położenie prostej i okręgu

NA POCZĄTEK

Jak myślisz, jaki kąt tworzy szprycha roweru z ziemią w miejscu, w którym opona dotyka podłoża?

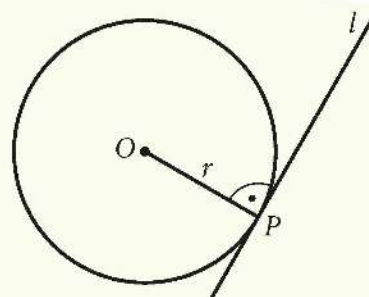


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Styczna do okręgu to prosta, która ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny. Mówimy też, że okrąg jest styczny do prostej. Jedyny punkt wspólny prostej i okręgu nazywamy **punktem styczności**.

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności:

$$l \perp OP$$

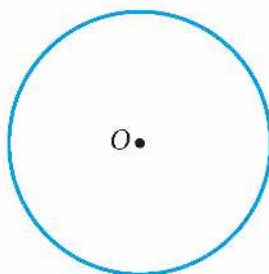


P – punkt styczności prostej i okręgu
 l – prosta styczna do okręgu

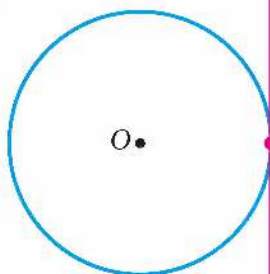
PRZYKŁAD 1

Na podstawie rysunku odpowiedz, ile punktów wspólnych mogą mieć prosta i okrąg.

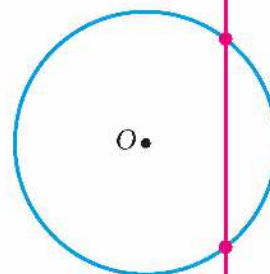
a)



b)



c)



ROZWIĄZANIE

- a) Prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.
- b) Prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny.
- c) Prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne.

ĆWICZENIE 1

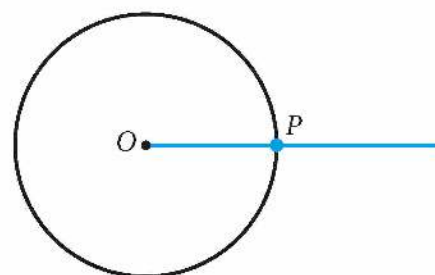
Narysuj okrąg o dowolnym promieniu oraz prostą, która ma z tym okręgiem:

- a) jeden punkt wspólny, b) dwa punkty wspólne, c) zero punktów wspólnych.

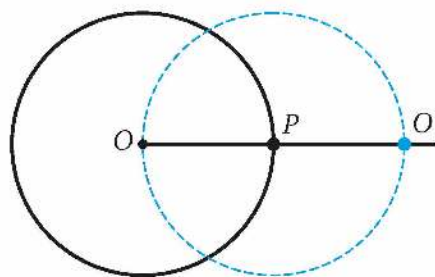
PRZYKŁAD 2

Skonstruuj styczną do okręgu przechodzącą przez punkt należący do tego okręgu.

KROK 1 Rysujemy okrąg o środku O i zaznaczamy na nim punkt P , przez który prowadzimy półprostą OP .

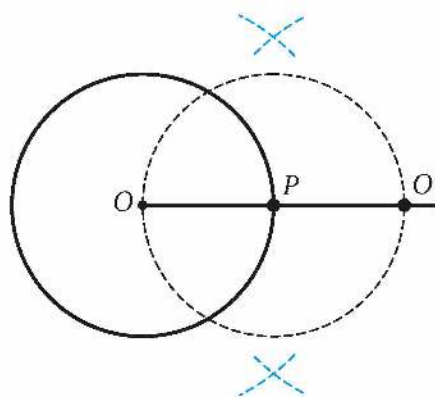


KROK 2 Rysujemy pomocniczy okrąg o środku w punkcie P i promieniu OP .



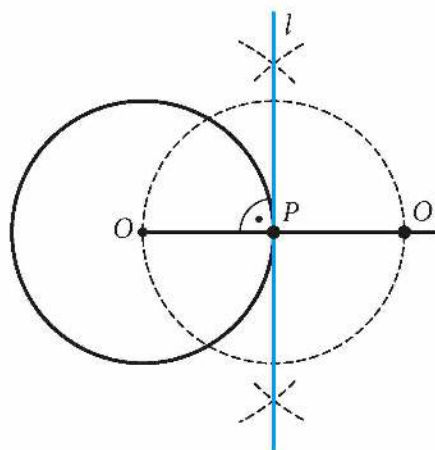
O' – punkt przecięcia półprostej OP z okręgiem pomocniczym

KROK 3 Z punktów O i O' kreślimy łuki o takim promieniu, żeby przecięły się w dwóch punktach.



KROK 4 Przez punkty przecięcia kreślimy prostą l .

Prosta l jest prostopadła do promienia OP i przechodzi przez punkt P , jest zatem styczną do okręgu.

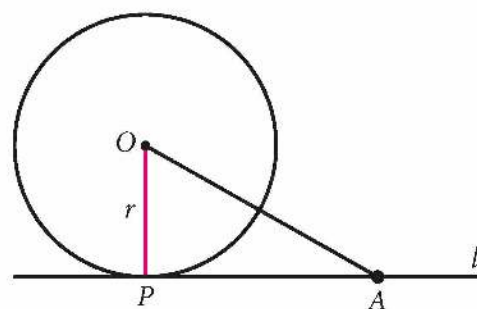


ĆWICZENIE 2

Skonstruuj dwie równoległe styczne do okręgu.

PRZYKŁAD 3

Okrąg o środku w punkcie O jest styczny do prostej l w punkcie P . Oblicz długość promienia tego okręgu, jeśli wiesz, że $|AO| = 15$ cm i $|AP| = 12$ cm.



KROK 1 Zauważamy, że kąt APO jest kątem prostym, ponieważ okrąg jest styczny do prostej w punkcie P :

$$|\sphericalangle APO| = 90^\circ$$

KROK 2 Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AOP , żeby wyznaczyć długość promienia okręgu:

$$|OP|^2 + |AP|^2 = |AO|^2$$

$$r^2 + 12^2 = 15^2$$

$$r^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$$

$$r = 9 \text{ [cm]}$$

Promień okręgu ma długość 9 cm.

ĆWICZENIE 3

Okrąg o środku w punkcie O i promieniu długości 4 cm jest styczny do prostej l w punkcie P . Punkt A leży na prostej l . Oblicz odległość punktu A od środka okręgu, jeśli:

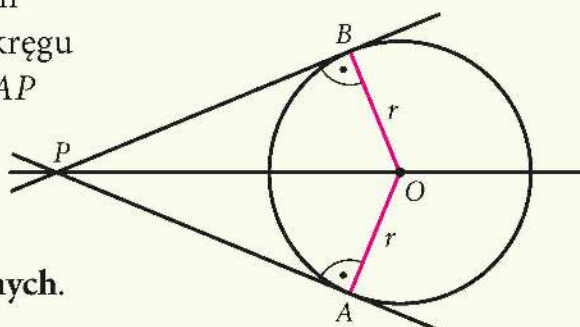
- a) $|AP| = 3$ cm, b) $|AP| = 4$ cm, c) $|AP| = 8$ cm.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeśli z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzimy dwie styczne do tego okręgu w punktach A i B , to długość odcinka AP jest równa długości odcinka BP :

$$|AP| = |BP|$$

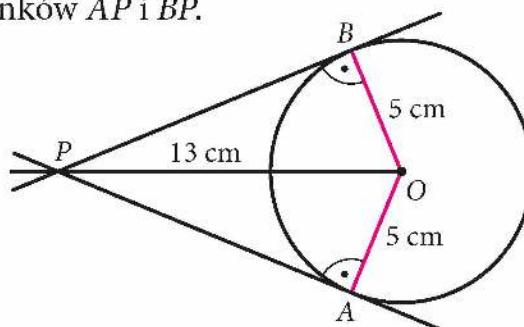
Jest to **twierdzenie o odcinkach stycznych**.



PRZYKŁAD 4

Punkt O jest środkiem okręgu o promieniu długości 5 cm. Z punktu P oddalonego od środka okręgu o 13 cm poprowadzono dwie styczne do tego okręgu. Punkty styczności oznaczono literami A i B . Oblicz długości odcinków AP i BP .

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



KROK 2 Stwierdzamy, że skoro trójkąt AOP jest prostokątny, to możemy obliczyć długość odcinka AP za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$|AP|^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

$$|AP| = 12 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Wyznaczamy długość odcinka BP za pomocą twierdzenia o odcinkach stycznych:

$$|BP| = |AP| = 12 \text{ [cm]}$$

Odcinki AP i BP mają długość 12 cm.

ĆWICZENIE 4

Punkty A i B należą do okręgu o środku w punkcie O i promieniu długości 6 cm. Styczne do tego okręgu poprowadzone w punktach A i B przecinają się w punkcie P . Oblicz odległość punktu P od środka okręgu, jeśli:

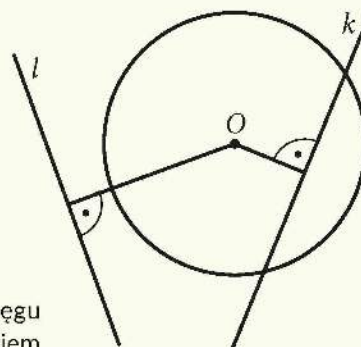
- a) $|AP| = 8 \text{ cm}$, b) $|AP| = 10 \text{ cm}$, c) $|BP| = 12 \text{ cm}$.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Sieczna okręgu to prosta przecinająca okrąg w dwóch punktach. Jej odległość od środka okręgu jest mniejsza od promienia tego okręgu.

Prosta rozłączna z okręgiem to prosta, która nie ma z okręgiem punktów wspólnych. Jej odległość od środka okręgu jest większa od promienia tego okręgu.

k – sieczna okręgu
 l – prosta rozłączna z okręgiem



PRZYKŁAD 5

Dany jest okrąg o średnicy długości 30 cm oraz prosta m . Ustal, jak położona jest prosta względem okręgu, jeśli jej odległość od środka okręgu jest równa 16 cm.

ROZWIĄZANIE

$$r = 30 : 2 = 15 \text{ cm} \quad r < 16 \text{ cm}$$

Prosta m jest rozłączna z okręgiem.

ĆWICZENIE 5

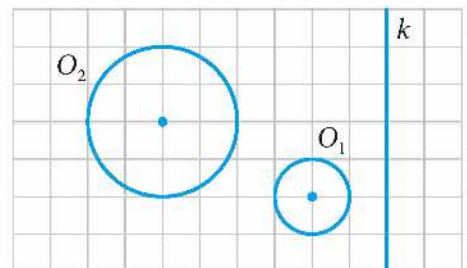
Dany jest okrąg o średnicy długości 18 cm. Ustal, ile punktów wspólnych ma z tym okręgiem prosta m , jeśli jej odległość od środka okręgu wynosi:

- a) 10 cm, b) 9 cm, c) $5\sqrt{2}$ cm.

ZADANIA

 **Zbiór zadań, s. 222**

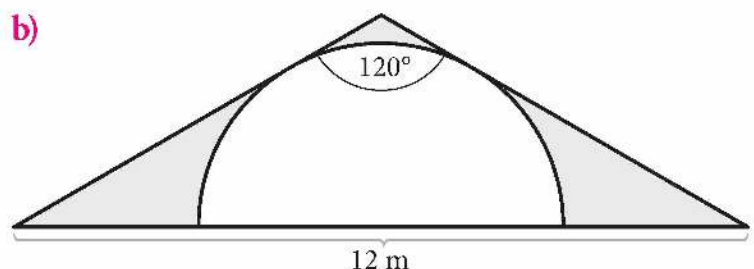
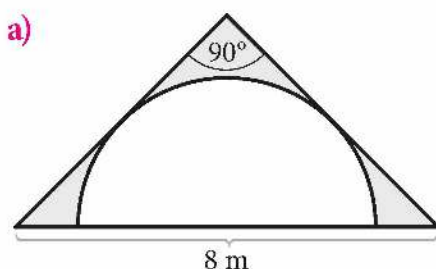
1. Na rysunku przedstawiono prostą k oraz okręgi O_1 i O_2 o promieniach równych odpowiednio 1 jednostce i 2 jednostkom. Odpowiedz na pytania.



- a) Czy prawdą jest, że po przesunięciu okręgu O_1 o 1 jednostkę w prawo otrzymamy okrąg styczny do prostej k ?
- b) Jak będzie położony okrąg O_1 względem prostej k po przesunięciu o 3 jednostki w prawo?
- c) O ile jednostek należy przesunąć w prawo okrąg O_2 , by był on styczny do prostej k ? Podaj dwie możliwości.

ZADANIA BRANŻOWE

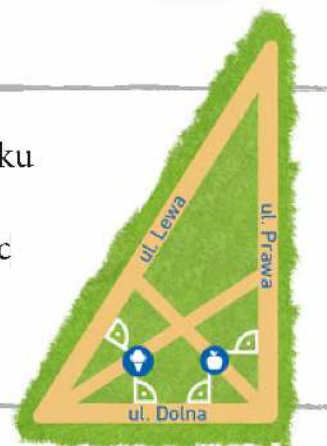
2. Ogrodnik postanowił wyznaczyć klomb na części trawnika w kształcie trójkąta równoramiennego. Klomb ma kształt półkola stycznego do prostych zawierających ramiona trójkąta. Ile metrów kwadratowych ma obszar, który ogrodnik zostawił do obsiania trawą? Do obliczeń przyjmij, że $\pi \approx 3,14$, natomiast $\sqrt{3} \approx 1,73$. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 m^2 .



Okrąg wpisany w trójkąt

NA POCZĄTEK

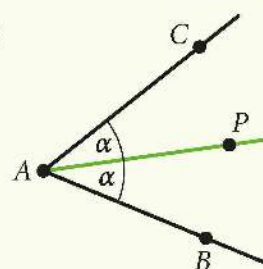
Właściciele stoisk z lodami i z sokami chcieliby otworzyć w parku kawiarnię. Poprosili Cię o radę, gdzie powinni ją wybudować, żeby znajdowała się w takiej samej odległości od wszystkich ulic otaczających park. Jakie rozwiązanie im proponujesz?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dwusieczna kąta to półprosta, która dzieli ten kąt na dwa kąty o równych miarach:

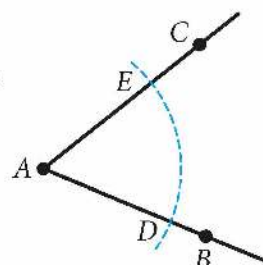
$$|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle BAP| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAC|$$



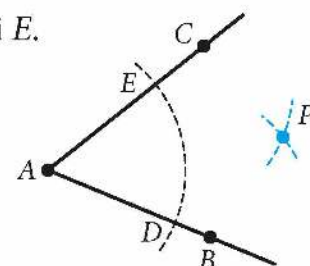
PRZYKŁAD 1

Skonstruuj dwusieczną dowolnego kąta ostrego.

KROK 1 Kreślimy łuk o dowolnym promieniu z wierzchołka kąta ostrego BAC w taki sposób, by przeciął ramiona kąta w punktach D i E .

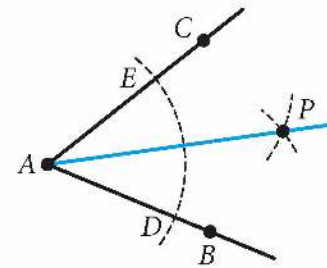


KROK 2 Kreślimy łuki o równych promieniach z punktów D i E .



P – punkt przecięcia łuków

KROK 3 Prowadzimy przez punkt przecięcia się łuków P półprostą AP .



Półprosta AP jest dwusieczną kąta BAC .

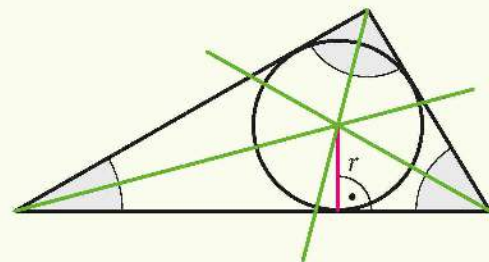
ĆWICZENIE 1

Skonstruuj w zeszycie dwusieczną dowolnego kąta rozwartego.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

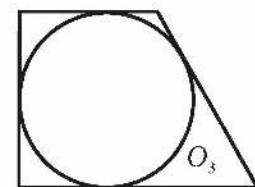
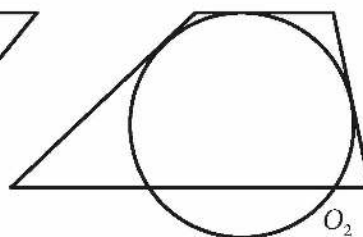
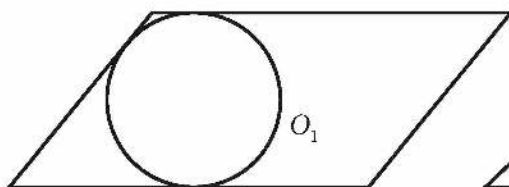
Okrąg jest wpisany w wielokąt, jeśli wszystkie boki wielokąta są styczne do tego okręgu. Środek okręgu wpisanego w wielokąt jest równoodległy od jego boków. Nie w każdy wielokąt można wpisać okrąg.

W każdy trójkąt możemy wpisać okrąg. Jego środkiem jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta, a promieniem r – odległość środka okręgu od dowolnego boku trójkąta.



PRZYKŁAD 2

Ustal, który okrąg jest wpisany w czworokąt.



ROZWIĄZANIE

Okrąg O_3 jest wpisany w czworokąt.

ĆWICZENIE 2

Narysuj w zeszycie kwadrat o boku długości 4 cm, a następnie okrąg wpisany w ten kwadrat o środku w miejscu przecięcia przekątnych. Ustal, ile wynosi promień tego okręgu.

PRZYKŁAD 3

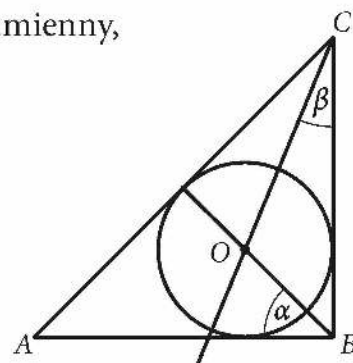
Okrąg o środku O jest wpisany w trójkąt prostokątny równoramienny, w którym $|AB| = |BC|$. Podaj miary kątów α i β .

KROK 1 Stwierdzamy, że skoro okrąg jest wpisany w trójkąt, to półprosta BO jest dwusieczną kąta ABC , a półprosta CO jest dwusieczną kąta ACB .

KROK 2 Obliczamy miary zaznaczonych kątów:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

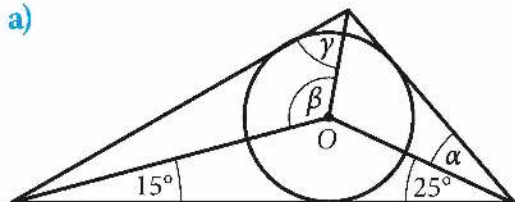
$$\beta = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ$$



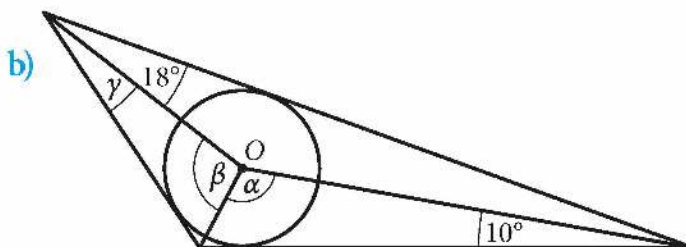
ĆWICZENIE 3

Podaj miary kątów α , β i γ .

a)



b)

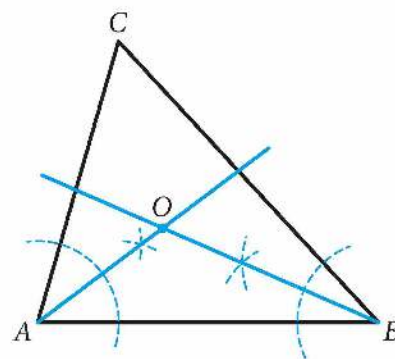


PRZYKŁAD 4

Skonstruuj okrąg wpisany w dowolny trójkąt.

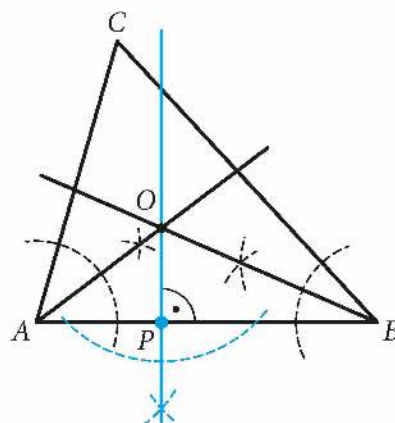
KROK 1 Rysujemy trójkąt ABC i konstruujemy w nim dwusieczne dowolnych dwóch kątów, np. kątów ABC i BAC .

O – punkt przecięcia dwusiecznych



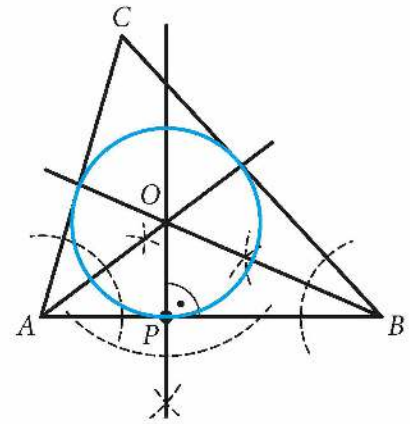
KROK 2 Konstruujemy prostą prostopadłą do dowolnego boku trójkąta, np. do boku AB , i przechodzącą przez punkt O .

P – punkt przecięcia prostej z bokiem AB



KROK 3 Z punktu O kreślimy okrąg o promieniu OP .

Jest to okrąg wpisany w trójkąt ABC .



ĆWICZENIE 4

Skonstruuj w zeszycie okrąg wpisany w trójkąt prostokątny:

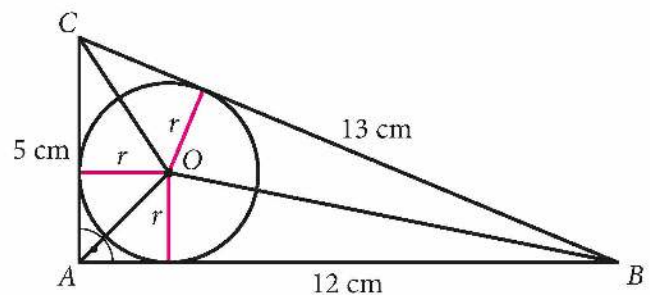
- równoramienny,
- w którym jedna z przyprostokątnych jest dwukrotnie dłuższa od drugiej.

PRZYKŁAD 5

Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach równych 5 cm, 12 cm i 13 cm.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.

r – promień okręgu wpisanego



KROK 2 Zauważamy, że pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów ABO , BCO i ACO :

$$P_{ABC} = P_{ABO} + P_{BCO} + P_{ACO}$$

KROK 3 Obliczamy pole trójkąta ABC :

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30 \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 4 Obliczamy pola trójkątów ABO , BCO i ACO , których wysokością jest promień okręgu:

$$P_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot r = 6r$$

$$P_{ACO} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r = 2,5r$$

$$P_{BCO} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot r = 6,5r$$

KROK 5 Podstawiamy otrzymane wyniki do równania na pole trójkąta ABC :

$$30 = 6r + 2,5r + 6,5r$$

KROK 6 Rozwiązujemy równanie:

$$6r + 2,5r + 6,5r = 30$$

$$15r = 30 \quad |:15$$

$$r = 2 \text{ [cm]}$$

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny ma 2 cm długości.

ĆWICZENIE 5

Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych:

a) 3 cm i 4 cm,

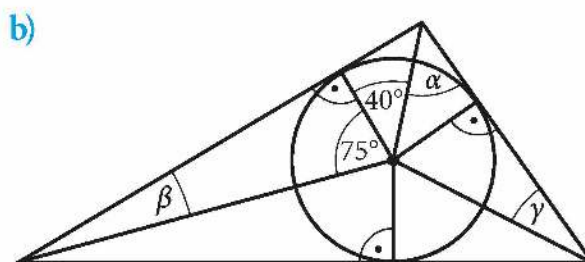
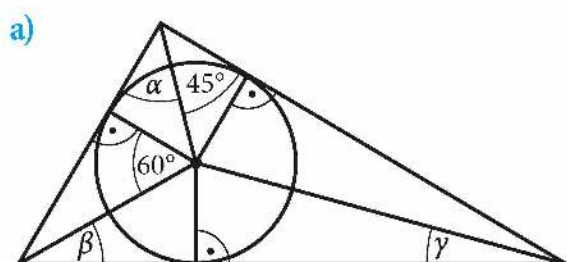
b) 8 cm i 15 cm,

c) 7 cm i 24 cm.

ZADANIA

↪ Zbiór zadań, s. 223

1. Oblicz miary kątów α , β i γ .



2. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku O . Oblicz miary kątów trójkątów ABO , BCO i ACO , jeśli:

a) $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$, $|\sphericalangle BAC| = 40^\circ$;

b) $|\sphericalangle ABC| = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 75^\circ$.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Pewnej firmie zlecono wykonanie projektu fontanny, która będzie postawiona w miejscu zaznaczonym na rysunku. Trawnik ma kształt trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości 12 m. Czy woda tryskająca z fontanny na odległość 3,6 m będzie dosięgać osoby spacerujące po ścieżkach wyznaczonych na trawniku? Do obliczeń przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1,41$.



6 Okrąg opisany na trójkącie

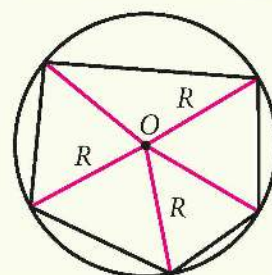
NA POCZĄTEK

Razem z dwójką przyjaciół chcecie wynająć domek letniskowy. Zależy Wam na tym, żeby znajdował się on w takiej samej odległości od miast, w których mieszkacie. Przyjrzyj się mapie. W pobliżu jakiej miejscowości powinniście wynająć domek? Czy dla większej liczby osób zawsze jest to możliwe?



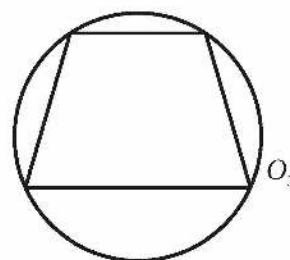
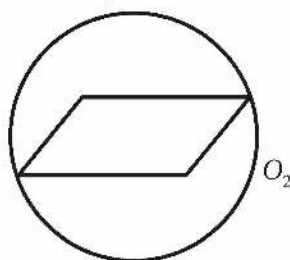
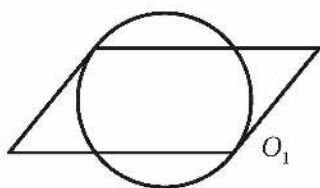
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Okrąg jest **opisany na wielokącie**, jeśli przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielokąta. Możemy też powiedzieć, że **wielokąt jest wpisany w okrąg**.



PRZYKŁAD 1

Odpowiedz, który z okręgów jest opisany na wielokącie.



ROZWIĄZANIE

Okręgiem opisany na wielokącie jest okrąg O_3 , ponieważ przechodzi przez cztery wierzchołki trapezu. Pozostałe okręgi nie przechodzą przez wszystkie wierzchołki równoległoboków.

ĆWICZENIE 1

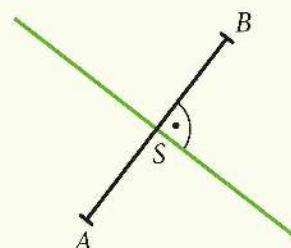
Narysuj prostokąt o bokach długości 3 cm i 4 cm, a następnie okrąg opisany na tym prostokącie o środku w miejscu przecięcia przekątnych. Oblicz, ile wynosi promień tego okręgu.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Symetralna odcinka to prosta prostopadła do odcinka i przechodząca przez jego środek.

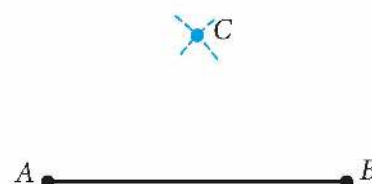
Symetralna dzieli odcinek na dwie równe części, co możemy zapisać następująco:

$$|AS| = |BS|$$

**PRZYKŁAD 2**

Skonstruuj symetralną dowolnego odcinka.

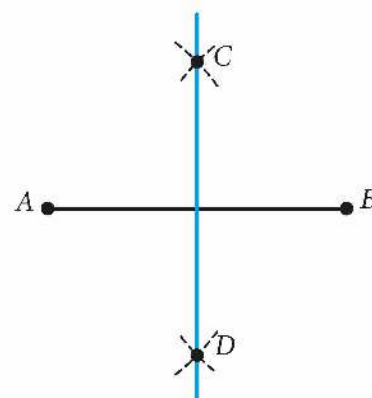
KROK 1 Kreślimy z końców odcinka AB łuki o jednakowych promieniach większych od połowy odcinka.



C, D – punkty przecięcia łuków



KROK 2 Prowadzimy prostą przez punkty C i D , w których przecięły się łuki.



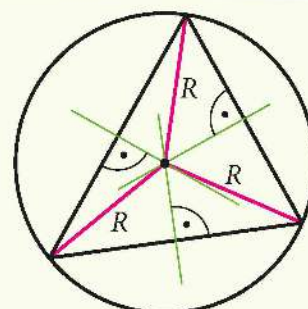
Prosta CD jest symetralną odcinka AB .

ĆWICZENIE 2

Skonstruuj w zeszyte symetralne boków dowolnego kwadratu i rombu.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Środkiem tego okręgu jest punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta, a promieniem R – odległość środka okręgu od dowolnego wierzchołka trójkąta.

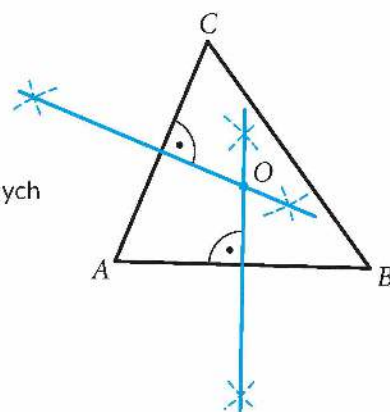


PRZYKŁAD 3

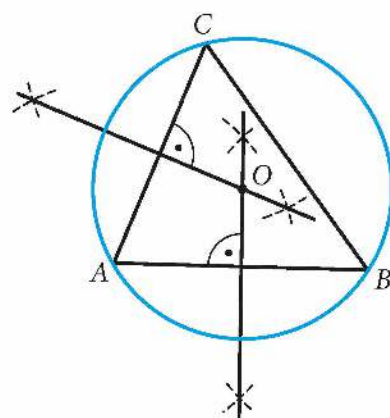
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Skonstruuj okrąg opisany na tym trójkącie.

KROK 1 Konstruujemy symetralne dwóch dowolnych boków trójkąta, np. boków AB i AC .

O – punkt przecięcia symetralnych



KROK 2 Kreślimy okrąg o środku w punkcie O i promieniu AO .



Otrzymaliśmy okrąg opisany na trójkącie ABC .

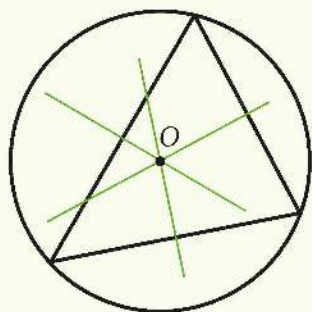
ĆWICZENIE 3

Skonstruuj w zeszycie okrąg opisany na trójkącie:

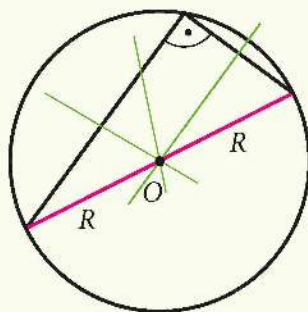
- a) prostokątnym, b) rozwartokątnym.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

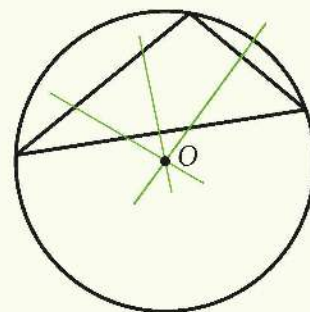
Położenie środka okręgu opisanego na dowolnym trójkącie zależy od rodzaju trójkąta.



W trójkącie ostrokątnym środek leży wewnątrz trójkąta.



W trójkącie prostokątnym środek leży w połowie jego przeciwprostokątnej.



W trójkącie rozwartokątnym środek leży na zewnątrz trójkąta.

PRZYKŁAD 4

Dwa kąty trójkąta mają miary 34° i 55° . Ustal położenie okręgu opisanego na trójkącie.

KROK 1 Obliczamy miarę trzeciego kąta w trójkącie:

$$180^\circ - 34^\circ - 55^\circ = 91^\circ$$

KROK 2 Stwierdzamy, że trójkąt jest rozwartokątny.

Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na zewnątrz trójkąta.

ĆWICZENIE 4

Dane są dwa kąty trójkąta. Sprawdź, czy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta.

a) $36^\circ, 48^\circ$

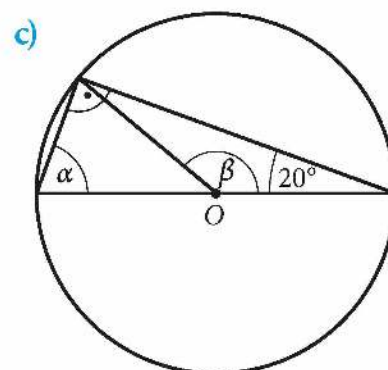
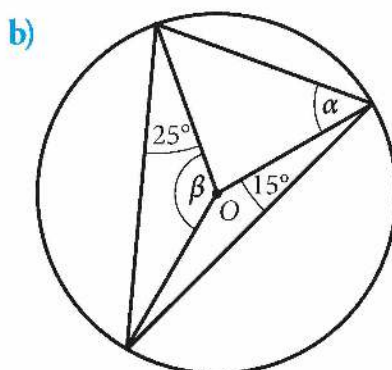
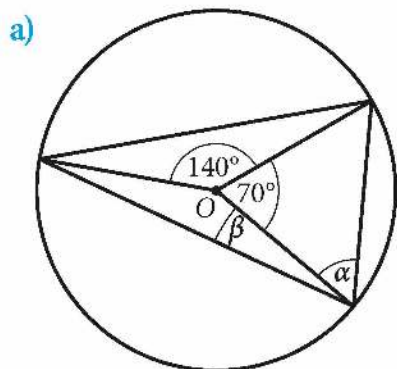
b) $42^\circ, 66^\circ$

c) $62^\circ, 28^\circ$

ZADANIA

🔄 Zbiór zadań, s. 223

1. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie. Podaj miary kątów α i β .

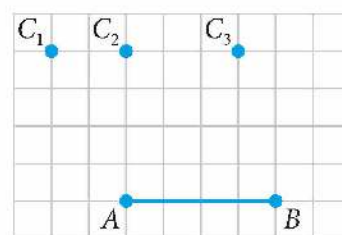


2. Punkty A, B są dwoma spośród trzech wierzchołków trójkąta. Określ położenie środka okręgu opisanego na trójkącie, którego trzecim wierzchołkiem jest podany punkt.

a) C_1

b) C_2

c) C_3



3. Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o podanych przyprostokątnych.

a) 6 cm i 8 cm

b) 9 cm i 12 cm

c) 5 cm i 12 cm

ZADANIA BRANŻOWE

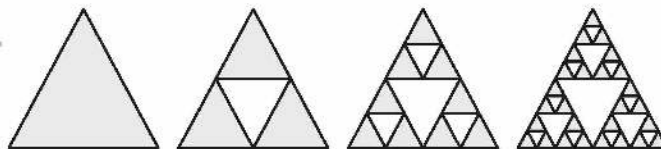
4. Trawnik ma kształt trójkąta ostrokątnego równoramiennego o podstawie równej 8 m i obwodzie 25 m. Ogrodnik ma ustawić zraszacz obrotowy o zasięgu 5 m. Czy podlany zostanie cały trawnik, jeśli ustawi go na symetralnej podstawy w odległości 3 m od niej?

Trójkąt równoboczny i kwadrat

NA POCZĄTEK

Wacław Sierpiński, znany polski matematyk, odkrył zasadę, zgodnie

z którą można podzielić dowolny trójkąt równoboczny tak, aby powstał ciekawy wzór – jak na rysunku. Jaka to zasada? Ile razy można dokonać takiego podziału?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

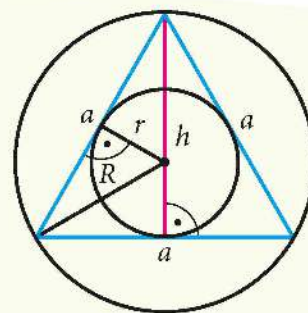
Długości promienia r okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny i promienia R okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości a obliczamy ze wzorów:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Między promieniami tych okręgów zachodzą zależności:

$R = 2r$, $r + R = h$, gdzie h to długość wysokości trójkąta równobocznego.

$$\text{Stąd } r = \frac{1}{3}h, R = \frac{2}{3}h.$$



PRZYKŁAD 1

Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o obwodzie równym 45 cm.

KROK 1 Wyznaczamy długość boku trójkąta:

$$a = 45 : 3 = 15 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

ĆWICZENIE 1

Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o polu równym $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

To się liczy!

Na podłogach często możemy zauważyć ciekawe wzory ułożone np. z kafli w kształcie różnych figur. Metoda pokrywania danej płaszczyzny ściśle przylegającymi do siebie wielokątami to tzw. parkietaż. Wyróżniamy m.in. parkietaże foremne, które powstają, jeśli użyjemy jednakowych płytek w kształcie wielokątów foremnych. Umiejętność projektowania wzorów przydaje się w różnych zawodach. Poniższe zadanie pomoże Wam ją opanować.

ZADANIE BRANŻOWE

Na zdjęciu przedstawiono parkietaż 6-6-6. Cyfra 6 oznacza, że do ułożenia wzoru użyto sześciokątów foremnych, a potrójne powtórzenie cyfry 6 – że w jednym wierzchołku stykają się trzy sześciokąty. Narysuj w zeszycie parkietaż foremny:

- a) 4-4-4-4,
- b) 3-3-3-3-3-3.



PRZYKŁAD 2

Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o obwodzie równym 36 cm.

KROK 1 Wyznaczamy długość boku trójkąta równobocznego:

$$a = 36 : 3 = 12 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Podstawiamy długość boku do wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy długość okręgu:

$$l = 2\pi r = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

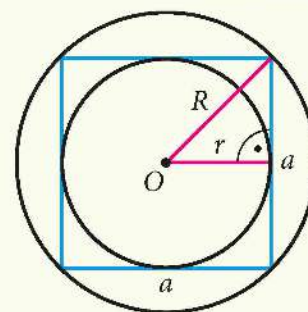
ĆWICZENIE 2

Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o polu równym $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Długości promienia r okręgu wpisanego w kwadrat i promienia R okręgu opisanego na kwadracie o boku długości a możemy obliczyć ze wzorów:

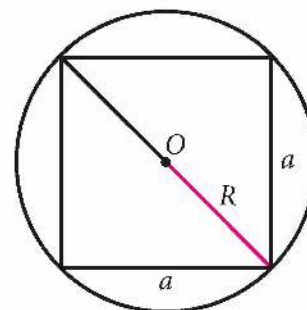
$$r = \frac{a}{2} \quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

**TO JEST DOWÓD**

Udowodnij, że długość promienia okręgu opisanego na kwadracie wynosi $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.

a – długość boku kwadratu
 R – promień okręgu opisanego na kwadracie



KROK 2 Zauważamy, że długość promienia okręgu opisanego na kwadracie jest równa połowie długości przekątnej kwadratu: $R = \frac{1}{2}d$.

KROK 3 Korzystamy ze wzoru na długość przekątnej kwadratu, żeby wyznaczyć długość promienia okręgu R :

$$d = a\sqrt{2}$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

**I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!**

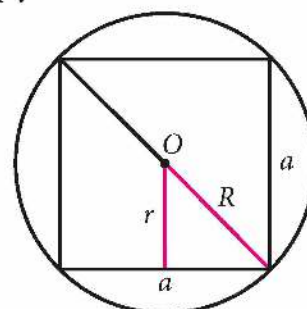
Udowodnij, że pole koła opisanego na dowolnym kwadracie jest dwa razy większe od pola koła wpisanego w ten kwadrat.

PRZYKŁAD 3

Oblicz długość boku kwadratu, jeśli różnica między polem koła opisanego na tym kwadracie i polem koła wpisanego w ten kwadrat wynosi $36\pi \text{ cm}^2$.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.

a – długość boku kwadratu
 R – promień koła opisanego na kwadracie
 r – promień koła wpisanego w kwadrat



KROK 2 Zapisujemy pola kół, korzystając ze wzorów na promień okręgu opisanego na kwadracie oraz promień okręgu wpisanego w ten kwadrat:

$$P_1 = \pi R^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \pi \frac{2a^2}{4} = \frac{1}{2} \pi a^2$$

$$P_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{2} a \right)^2 = \frac{1}{4} \pi a^2$$

KROK 3 Wyznaczamy różnicę pól kół:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \pi a^2 - \frac{1}{4} \pi a^2 = \frac{1}{4} \pi a^2$$

KROK 4 Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{4} \pi a^2 = 36\pi \quad | : \left(\frac{1}{4} \pi \right)$$

$$a^2 = 144$$

$$a = 12 \text{ [cm]}$$

Kwadrat ma bok długości 12 cm.

ĆWICZENIE 3

Oblicz różnicę między polem koła opisanego na kwadracie o boku długości 4 cm i polem koła wpisanego w ten kwadrat.

ZADANIA

 **Zbiór zadań, s. 224**

- Oblicz obwód i pole trójkąta równobocznego opisanego na:
 - okręgu o promieniu równym $3\sqrt{3}$ cm,
 - kole o polu równym 3π cm².
- Wyznacz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny, jeżeli okrąg opisany na tym trójkącie ma długość 20π cm.
- Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równobocznym, jeśli koło wpisane w ten trójkąt ma pole równe 9π cm².

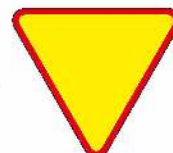
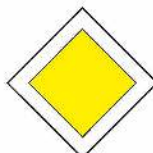
ZADANIA BRANŻOWE

- Z kawałka materiału w kształcie trójkąta równobocznego krawcowa wycięła największą możliwą serwetę w kształcie koła. Oblicz, jaki procent powierzchni materiału stanowiły ścinki. Do obliczeń przyjmij, że $\pi \approx 3,14$, natomiast $\sqrt{3} \approx 1,73$.
- Właściciel sadu chce umieścić w nim pasiekę tak, by pszczoły miały nie dalej niż 500 m do każdego jego zakątka. Sprawdź, czy jest to możliwe, jeśli sad ma kształt:
 - prostokąta o bokach długości 600 m i 800 m,
 - kwadratu o boku długości 750 m,
 - trójkąta równobocznego o boku długości 840 m.

8 Wielokąty foremne

NA POCZĄTEK

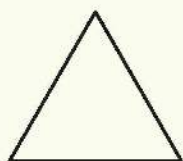
Czy wiesz, co mają ze sobą wspólnego znaki drogowe na rysunkach? Zwróć uwagę na ich kształt.



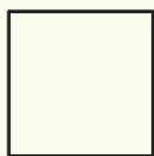
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wielokąt foremny to wielokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości i wszystkie kąty tej samej miary.

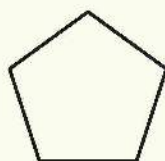
Przykłady wielokątów foremnych



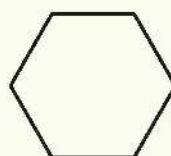
trójkąt
równoboczny



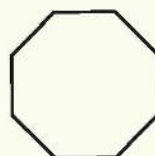
kwadrat



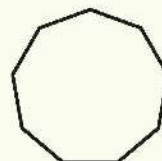
pięciokąt
foremny



sześciokąt
foremny



ośmiokąt
foremny



dziwięciokąt
foremny

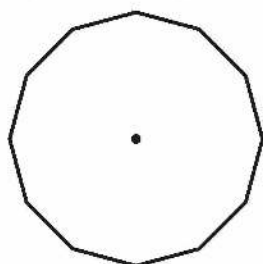
Każdy wielokąt foremny ma osie symetrii. Wielokąty o parzystej liczbie wierzchołków mają również środek symetrii.

Na dowolnym wielokącie foremnym możemy opisać okrąg i w dowolny wielokąt foremny możemy wpisać okrąg. W wielokącie foremnym środki tych okręgów pokrywają się.

PRZYKŁAD 1

Ustal, czy dwunastokąt foremny ma środek symetrii oraz ile ma osi symetrii.

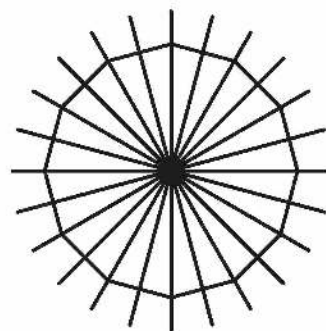
KROK 1 Wykonujemy rysunek dwunastokąta foremnego.



PODPOWIEDŹ

Oś symetrii to prosta dzieląca figurę na dwie przystające części. Środek symetrii to punkt, względem którego figura jest sama do siebie środkowo symetryczna.

KROK 2 Zaznaczamy środek symetrii i osie symetrii.



Dwunastokąt foremny ma środek symetrii oraz 12 osi symetrii.

ĆWICZENIE 1

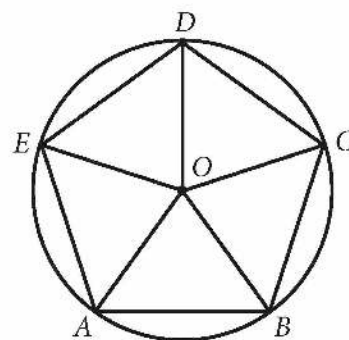
1.1 Ile osi symetrii mają wielokąty foremne: trójkąt, czworokąt, pięciokąt, sześciokąt, ośmiokąt i dziewięciokąt?

1.2 Który z tych wielokątów foremnych ma środek symetrii?

PRZYKŁAD 2

Oblicz miarę kąta wewnętrznego pięciokąta foremnego.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy okręgu o środku O opisanego na pięciokącie foremnym $ABCDE$.



KROK 2 Zauważamy, że promienie poprowadzone ze środka okręgu do wierzchołków pięciokąta dzielą go na pięć przystających trójkątów równoramiennych.

KROK 3 Obliczamy miarę kąta AOB :

$$|\sphericalangle AOB| = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

KROK 4 Wyznaczamy miarę kąta BAO :

$$|\sphericalangle BAO| = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 72^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 108^\circ = 54^\circ$$

KROK 5 Obliczamy miarę kąta BAE :

$$|\sphericalangle BAE| = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$$

Kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego ma miarę 108° .

ĆWICZENIE 2

Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

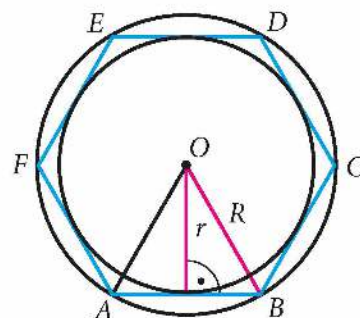
- a) sześciokąta foremnego, b) ośmiokąta foremnego, c) dziesięciokąta foremnego.

PRZYKŁAD 3

Oblicz długości promienia okręgu wpisanego i opisanego na sześciokącie foremnym o boku długości 8 cm.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.

r – promień okręgu wpisanego w sześciokąt
 R – promień okręgu opisanego na sześciokącie



KROK 2 Zauważamy, że trójkąt ABO jest równoboczny, więc promień okręgu opisanego jest równy długości boku sześciokąta:

$$R = a = 8 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Stwierdzamy, że promień okręgu wpisanego w sześciokąt jest równy wysokości trójkąta równobocznego ABO :

$$r = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

Promień okręgu wpisanego ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a promień okręgu opisanego ma 8 cm długości.

ĆWICZENIE 3

Oblicz pole koła wpisanego w sześciokąt foremny, jeśli wiesz, że pole koła opisanego na tym sześciokącie wynosi $16\pi \text{ cm}^2$.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 224

1. Oblicz pole sześciokąta foremnego, jeśli wiesz, że:

- a) promień okręgu wpisanego w ten sześciokąt jest równy 6 cm,
- b) promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy $3\sqrt{3}$ cm.

ZADANIA BRANŻOWE

2. Fabryka produkująca znaki drogowe ma przygotować 100 znaków „stop” w kształcie ośmiokąta foremnego o boku długości 30 cm. Każdy znak będzie wycięty z blachy w kształcie kwadratu. Wykonaj polecenia. Do obliczeń przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1,4$.

- a) Oblicz bok tego kwadratu z dokładnością do 1 cm.
- b) Podaj w metrach, jaką długość musi mieć pas blachy o szerokości znaku, żeby można było zrealizować zamówienie.



Powtórzenie rozdziału

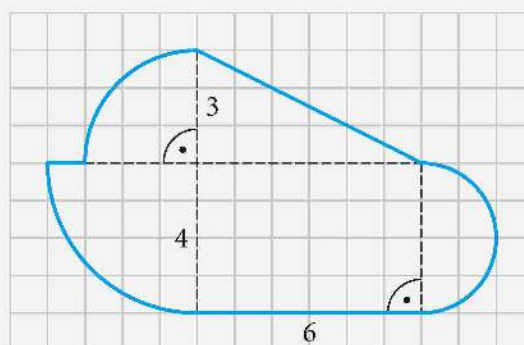
OKRĘGI I WIELOKĄTY

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Ogrodnik założył rabatę kwiatową w kształcie koła. Do jej ogrodzenia użył rollbordera o takiej samej długości co do ogrodzenia klombu o kształcie kwadratu i polu powierzchni równym 36 m^2 . Ile wynosi pole powierzchni rabaty? Wybierz właściwą odpowiedź.

- A. Mniej niż 36 m^2 C. Więcej niż 36 m^2 .
B. Równo 36 m^2 . D. Nie można tego obliczyć.

- 2 Oblicz z dokładnością do 1 cm obwód narysowanej figury oraz jej pole z dokładnością do 1 cm^2 . Wszystkie wymiary podane są w centymetrach.

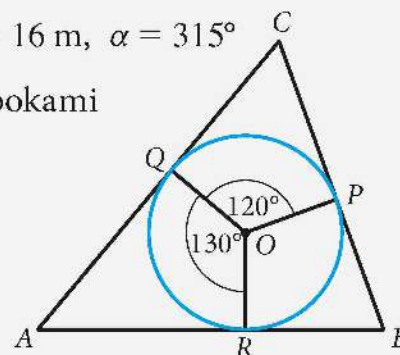


- 3 Wyznacz miarę kąta wpisanego opartego na $\frac{1}{5}$ okręgu.

- 4 Oblicz długość łuku i pole wycinka kołowego wyznaczonego na okręgu o promieniu r przez kąt środkowy o mierze α .

- a) $r = 15 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$ b) $r = 18 \text{ dm}$, $\alpha = 15^\circ$ c) $r = 16 \text{ m}$, $\alpha = 315^\circ$

- 5 Punkty P , Q , R są punktami styczności okręgu o środku O z bokami narysowanego trójkąta ABC , w który ten okrąg jest wpisany. Oblicz miary kątów tego trójkąta.



- 6 Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, jeśli:

- a) przyprostokątne tego trójkąta mają długości 5 cm i 12 cm,
b) jeden z kątów tego trójkąta ma miarę 30° , a dłuższa przyprostokątna ma długość 9 cm.

- 7 Wybierz właściwą odpowiedź.

Który wielokąt ma najwięcej osi symetrii?

- A. ośmiokąt foremny C. dziesięciokąt foremny
B. dziewięciokąt foremny D. dwunastokąt foremny

- 8 Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego ma miarę α . Ustal, ile boków ma ten wielokąt, jeżeli:

- a) $\alpha = 108^\circ$, b) $\alpha = 160^\circ$, c) $\alpha = 165^\circ$.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Oblicz obwód i pole koła o promieniu r .

a) $r = 5 \text{ cm}$ b) $r = 10\sqrt{2} \text{ cm}$

- 2 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Średnica koła o polu równym $64\pi \text{ cm}^2$ wynosi

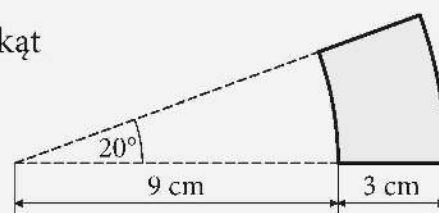
- A. 16 cm. B. 24 cm. C. 32 cm. D. 64 cm.

- 3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

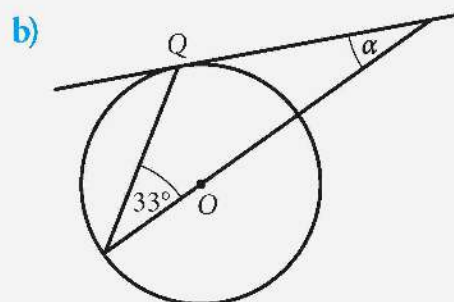
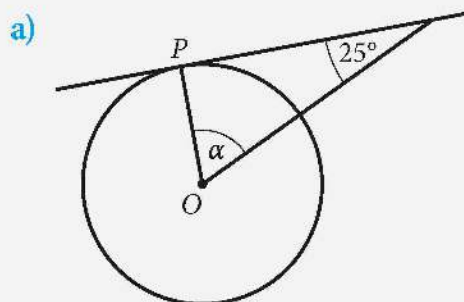
Kąt środkowy o mierze 15° wyznacza na okręgu o promieniu 12 cm łuk o długości

- A. $\pi \text{ cm}$. B. $2\pi \text{ cm}$. C. $3\pi \text{ cm}$. D. $4\pi \text{ cm}$.

- 4 Oblicz pole fragmentu pierścienia wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 20° .



- 5 Na rysunkach przedstawiono styczne do okręgów w punktach P i Q . Oblicz miarę kąta α .



- 6 Na trójkącie równoramiennym ABC o kącie między ramionami 120° opisano okrąg o środku O . Oblicz miary kątów CBO , BCO , BOC .

- 7 Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.
 B. Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta.
 C. Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży wewnątrz tego trójkąta.

- 8 Wybierz właściwe dokończenie zdania. Środek symetrii ma

- A. dziewięciokąt foremny. C. piętnastokąt foremny.
 B. czternastokąt foremny. D. siedemnastokąt foremny.

- 9 Wskaż n , dla którego n -kąt foremny **nie** ma środka symetrii.

- A. $n = 8$ B. $n = 9$ C. $n = 10$ D. $n = 12$

Zbiór zadań

ROZDZIAŁY

I.	Wyrażenia algebraiczne	s. 199–202
II.	Wykres funkcji kwadratowej	s. 203–206
III.	Równania i nierówności kwadratowe	s. 207–210
IV.	Wielokąty	s. 210–214
V.	Podobieństwo	s. 215–216
VI.	Trygonometria	s. 217–219
VII.	Okręgi i wielokąty	s. 220–225

I. Wyrażenia algebraiczne

1. Wyrażenia algebraiczne

↪ Lekcja 1, s. 7-10

1. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych odpowiedzi na podane pytania.

- a) Ile razem lat mają Ania i Czarek, jeśli Czarek ma x lat, a Ania jest od niego o 4 lata starsza?
- b) Ile złotych zapłacą za bilety do kina rodzice z czwórką dzieci, jeżeli bilet ulgowy kosztuje p złotych, a bilet normalny – q złotych?
- c) Ile jest razem flamingów w ZOO, jeśli jest n samców i trzykrotnie więcej samic?

2. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -3$ i $y = 5$.

- a) $-2x + 3y$
- b) $xy + 8y$
- c) $9x - 4xy$
- d) $3x^2 + y^2$

3. Dla $m > 0$ zapisz liczbę:

- a) o 25% większą od liczby m ,
- *c) o $p\%$ mniejszą od liczby m ,
- b) o 13% mniejszą od liczby m ,
- *d) o $k\%$ większą od liczby m .

4. Kurtka, spodnie i buty kosztowały odpowiednio x , y i z złotych. Sprzedawca podniósł cenę kurtki o 20 zł, cenę spodni pozostawił bez zmiany, a cenę butów obniżył o 25%. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Za kurtkę, spodnie i buty zapłacimy $(x + y + z + 45)$ zł.
- B. Za dwie pary spodni i trzy pary butów zapłacimy $(2y + 2,25z)$ zł.
- C. Za dwie kurtki i dwie pary butów zapłacimy $(2x + 1,5z + 40)$ zł.

2. Redukcja wyrazów podobnych

↪ Lekcja 2, s. 11-13

1. Pomnóż podany jednomian przez jednomian $-2a^2b$.

- a) $-ab$
- b) $-5a^2b$
- c) $\frac{1}{2}a^4b^3$
- d) $\frac{1}{4}b^2c$

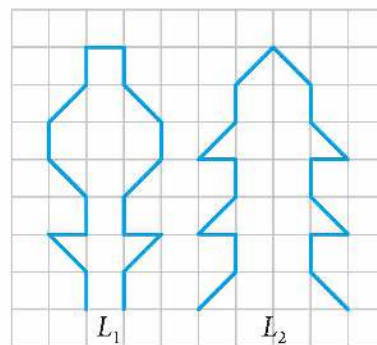
2. Zredukuj wyrazy podobne.

- a) $2x - 7y - 3x + y + x$
- c) $2n^2 - 3n^3 - 5n^2 + 7n + 3n^3 - 10n$
- b) $-6a + b + 4b - 2a + 9$
- d) $-0,4x^2 - 5x + 0,9x^2 - x + 0,5x^2$

3. Wszystkie odcinki poziome i pionowe łamanych L_1 i L_2 mają długość x , a odcinki ukośne mają długość y .

Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Długość łamanej L_1 jest równa $11x + 6y$.
 B. Długość łamanej L_2 jest równa $10x + 6y$.
 C. Suma długości łamanych L_1 i L_2 równa się $21x + 14y$.



3. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

↪ Lekcja 3, s. 14-16

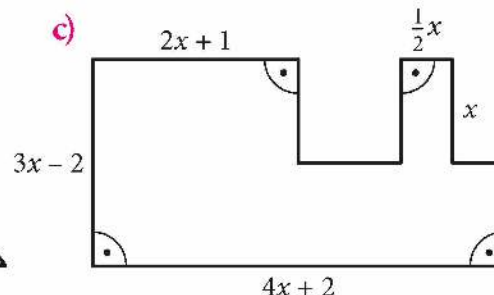
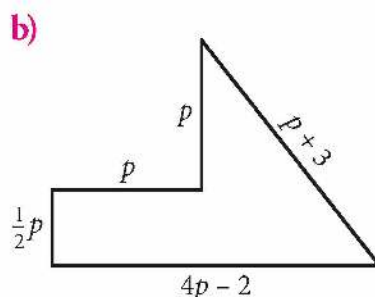
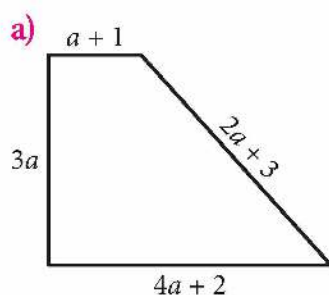
1. Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $4a + [b - (6a - 2b)] - [a - (b - 3a)]$
 b) $-5a^2 - [b^2 + (-4a^2 + 3b^2)] - (2b^2 - a^2)$

2. W kwadracie magicznym sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w obu przekątnych są równe. Sprawdź, czy podany kwadrat jest kwadratem magicznym.

$2x + 2$	$2x + 1$	$2x$
$2x - 1$	$x + 3$	$2x + 3$
$3x$	$3x - 1$	$x + 2$

3. Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie algebraiczne przedstawiające obwód narysowanej działki budowlanej.



4. Mnożenie sum algebraicznych

↪ Lekcja 4, s. 17-20

1. Wskaż pary, które po sprowadzeniu do najprostszej postaci są takie same.

- I. $5x^2 + 5y^2$ II. $5x^2 - 5y^2$ III. $5y^2 - 5x^2$
 A. $5y(x+y) - 5x(x+y)$ B. $5x(x-y) + 5y(x+y)$ C. $5(x-y)(x+y)$

2. Wykonaj działania. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

- a) $x(3x + 5) - 3x$ c) $x(3x - 5) - x(2x - 5)$ e) $x(2x + 3y) + y(3x + y)$
b) $-y(4x + 2y) + xy$ d) $4(2x - 3) + x(6x - 4)$ f) $2a(6a - 3b) - b(3a - b)$

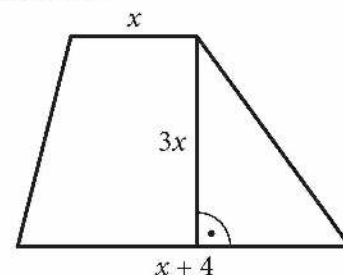
3. Wykonaj mnożenie. Zredukuj wyrazy podobne.

- a) $(x - 8)(x + 4)$ c) $(2x + 3)(3x + 2)$ e) $(x + 2y)(3x - y)$
b) $(x - 6)(x - 7)$ d) $(6x - 2)(4x - 1)$ f) $(x + y)(2x - 5y)$

4. Które z wyrażeń **nie** opisuje pola powierzchni narysowanej działki?

Wybierz właściwą odpowiedź.

- A. $3x(x + 2)$ C. $\frac{3}{2}x(2x + 4)$
B. $\frac{1}{2}(6x^2 + 12x)$ D. $\frac{1}{2}x(3x + 6)$



5. Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

🔄 Lekcja 5, s. 21-23

1. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- a) $3a + 6b$ c) $y^2 - 5xy + 2y$ e) $7x^3 + 21x^2y$
b) $-36p + 48q$ d) $p^4q + p^3$ f) $21p^3q^2 - 27p^2q^3$

2. Wybierz właściwe dokończenie zdania. W wyrażeniu $-6a^2b - 15ab^2 + 9ab$ wyłączono przed nawias wspólny czynnik. W ten sposób otrzymano wyrażenie

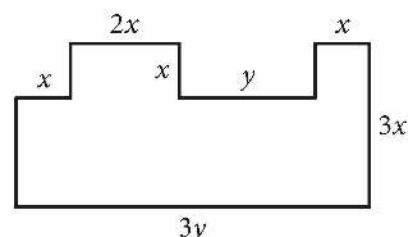
- A. $-3ab(2a + 5b - 3)$. C. $3ab(-2 + 9 - 15)$.
B. $3ab(-2a^2b - 5ab^2 + 3ab)$. D. $-3ab(2a - 5b + 3)$.

3. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias, a następnie oblicz wartości wyrażeń dla podanych wartości zmiennych.

- a) $6x^3 - 27x^2$ dla $x = 4,5$ c) $12xy^2 - 6x^2y$ dla $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$
b) $8a^3 + 16a^2b$ dla $a = 5$, $b = -3$ d) $25a^3b - 50a^2c$ dla $a = -4$, $b = 3$, $c = -6$

4. Geodeta przygotował plan pewnej działki. Wykonaj polecenia.

- a) Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole powierzchni tej działki.
b) Wyłącz wspólny czynnik przed nawias w wyrażeniu opisującym pole działki.
c) Oblicz powierzchnię działki dla $x = 4$ m, $y = 8$ m.



1. Wykonaj działania, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $(x - 10)^2$

c) $(x - \frac{1}{4})^2$

e) $(3x + 8)^2$

g) $(4x - 0,2)^2$

b) $(9 + x)^2$

d) $(x + \frac{2}{5})^2$

f) $(0,5x + 2)^2$

h) $(6x - \frac{1}{2})^2$

2. Podczas sprawdzianu uczniowie mieli przedstawić podaną różnicę kwadratów w postaci iloczynu czynników. W tabeli podano odpowiedzi Piotra i Tomka.

Różnica kwadratów	Odpowiedzi Piotra	Odpowiedzi Tomka
$4x^2 - 9y^2$	$(2x + 3y)(2x + 3y)$	$(2x - 3y)(2x + 3y)$
$\frac{1}{4}x^2 - 16y^2$	$(\frac{1}{2}x - 4y)(\frac{1}{2}x - 4y)$	$(4y + \frac{1}{2}x)(\frac{1}{2}x - 4y)$
$25x^2 - \frac{9}{25}y^2$	$(5x - \frac{3}{5}y)(5x + \frac{3}{5}y)$	$(5x - \frac{3}{5}y)(5x - \frac{3}{5}y)$

Wskaż zdania prawdziwe.

A. Piotr podał dwie poprawne odpowiedzi.

B. Tomek podał dwie poprawne odpowiedzi.

C. Liczba poprawnych odpowiedzi Tomka jest o 100% większa niż liczba poprawnych odpowiedzi Piotra.

3. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Wyrażenie $49x^2 - 2x + \frac{1}{49}$ można zapisać w postaci

A. $(7x + \frac{1}{7})^2$.

B. $(7x - \frac{1}{7})^2$.

C. $(7x - \frac{1}{7})(7x + \frac{1}{7})$.

D. $(\frac{1}{7} - 7x)(7x + \frac{1}{7})$.

4. Skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia i doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $(x + 2)^2 + (x - 5)^2$

c) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$

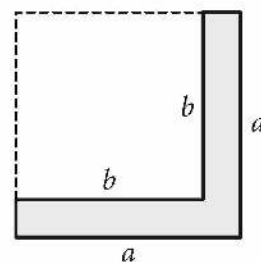
e) $(2x - y)^2 - (x + 2y)^2$

b) $(4x + 1)^2 + (x - 4)^2$

d) $(3x + 2)^2 - (2x - 3)^2$

f) $(x - y)^2 + (x - 1)^2$

*5. Stolarz polecił praktykantom wyciąć ze sklejkę figurę przedstawioną na rysunku. Znajdź wymiary a i b figury w decymetrach, jeżeli a , b to liczby naturalne, a pole wyciętej figury ma wynosić dokładnie 13 dm^2 .

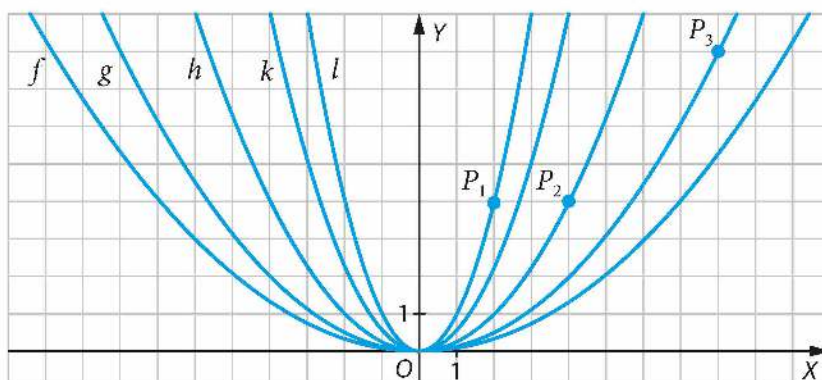


II. Wykres funkcji kwadratowej

1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

↪ Lekcja 1, s. 35–39

1. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = ax^2$ dla pięciu różnych wartości współczynnika a . Odczytaj współrzędne punktów P_1 , P_2 , P_3 .



Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Do wykresu funkcji l należy punkt $(\sqrt{2}, 2)$.
B. Funkcja h określona jest wzorem $y = \frac{1}{4}x^2$.
C. Wzór funkcji k ma postać $y = \frac{1}{16}x^2$.
2. Oblicz wartości funkcji $y = -4x^2$ dla podanych argumentów x .
a) $x = -3$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = 0,5$
3. Funkcja $y = ax^2$ opisuje pole powierzchni blatu ławy, której dłuższy bok ma długość x , a stosunek długości boków jest równy 1:4.

Wykonaj polecenia.



- a) Podaj wartość współczynnika a .
b) Naszkicuj wykres tej funkcji dla $x > 0$.
c) Oblicz pole powierzchni ławy, której krótszy bok jest równy 0,8 m.

2. Przesuwanie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY

↪ Lekcja 2, s. 40–44

1. Naszkicuj wykres funkcji. Podaj jej zbiór wartości.
a) $y = x^2 + 4$ b) $y = -x^2 + 4$ c) $y = 2x^2 - 2$ d) $y = -2x^2 + 2$
2. Naszkicuj wykres funkcji. Podaj współrzędne wierzchołka otrzymanej paraboli.
a) $y = (x - 4)^2$ b) $y = -(x + 4)^2$ c) $y = 2(x - 3)^2$ d) $y = -2(x + 3)^2$

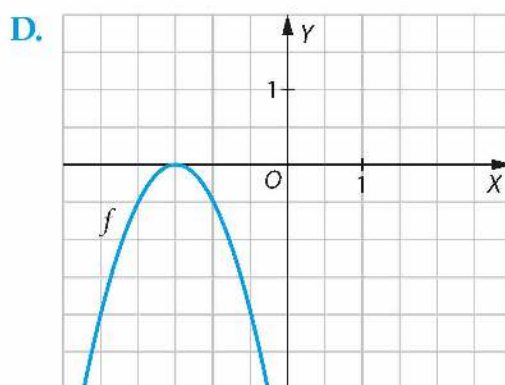
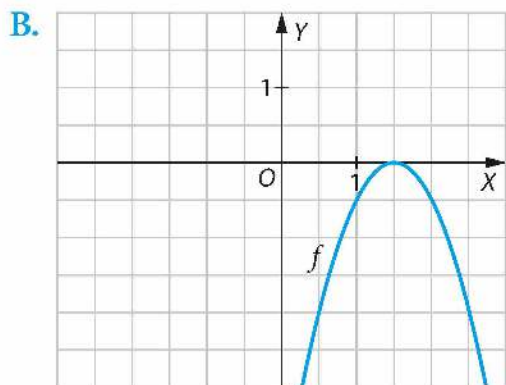
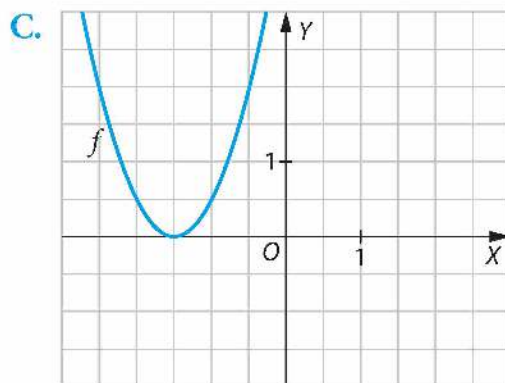
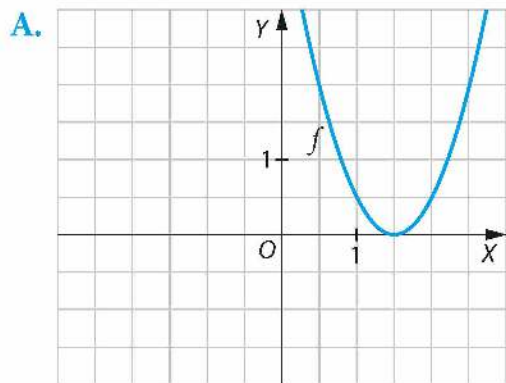
3. Podaj, ile wynosi q , jeśli poniższy punkt jest wierzchołkiem paraboli $y = x^2 + q$.

- a) $(0, 3)$ b) $(0, 5)$ c) $(0, -2)$ d) $(0, -7)$

4. Odpowiedz, ile wynosi p , jeśli podany punkt jest wierzchołkiem paraboli $y = (x - p)^2$.

- a) $(1, 0)$ b) $(3, 0)$ c) $(-1, 0)$ d) $(-4, 0)$

5. Wybierz rysunek, na którym poprawnie naszkicowano wykres funkcji $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$.



6. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy poniższych funkcji. Podaj zbiór wartości każdej funkcji i określ współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji. Zadanie wykonaj w zeszycie.

- a) $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$, $y = -x^2 - 1$ c) $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 2$, $y = -2x^2 - 2$
b) $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = (x + 3)^2$ d) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

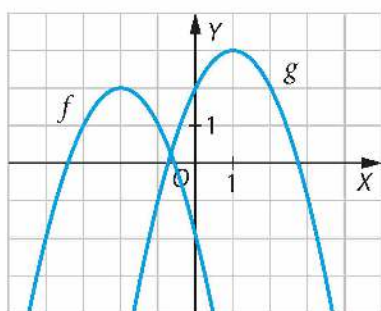
3. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

🔄 Lekcja 3, s. 45–48

1. Wybierz właściwe dokończenie zdania. Aby otrzymać wykres funkcji $y = -(x - 2)^2 - 2$ należy parabolę $y = -x^2$ przesunąć o

- A. 2 jednostki w lewo i 2 w górę. C. 2 jednostki w prawo i 2 w górę.
B. 2 jednostki w lewo i 2 w dół. D. 2 jednostki w prawo i 2 w dół.

2. Naskicuj wykres funkcji, odpowiednio przesuwając parabolę $y = 2x^2$ lub parabolę $y = -2x^2$.
- a) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ b) $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$ c) $f(x) = -2(x-3)^2 - 2$
3. Naskicuj wykres funkcji. W tym celu odpowiednio przesunij parabolę $y = \frac{1}{2}x^2$ lub parabolę $y = -\frac{1}{2}x^2$.
- a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$
4. Na rysunku przedstawiono parabole będące wykresami funkcji $f(x) = -(x+2)^2 + 2$ oraz funkcji $g(x) = -(x-1)^2 + 3$.



Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Różnica między największą wartością funkcji f i największą wartością funkcji g jest równa 3.
- B. Zbiór wartości funkcji f zawiera się w zbiorze wartości funkcji g .
- C. Jeśli wykres funkcji f przesuniemy o 3 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę, to otrzymamy wykres funkcji g .

4. Postać ogólna funkcji kwadratowej

↩ Lekcja 4, s. 49-53

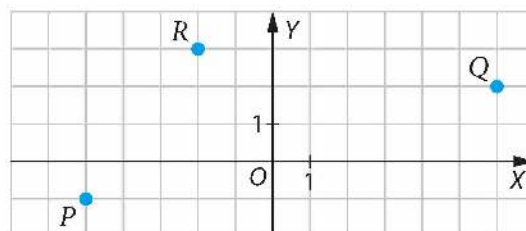
1. Oblicz wyróżnik funkcji kwadratowej.
- a) $y = x^2 + 3x + 2$ c) $y = x^2 - 6x + 6$ e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$
b) $y = 2x^2 + 5x + 1$ d) $y = -2x^2 + 4x - 3$ f) $y = x^2 - x$
2. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem podanej funkcji. Przekształć wzór z postaci ogólnej na postać kanoniczną.
- a) $y = x^2 + 4x + 3$ c) $y = 2x^2 + 8x - 5$ e) $y = \frac{1}{2}x^2 - x$
b) $y = -x^2 - 4x + 1$ d) $y = -3x^2 - 6x + 2$ f) $y = -x^2 + 6x$
3. Sprowadź wzór funkcji do postaci ogólnej. Oblicz sumę współczynników funkcji $a + b + c$.
- a) $y = (x-3)^2 - 15$ c) $y = -(x+1)^2 + 2$ e) $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 8$
b) $y = 2(x+4)^2 - 8$ d) $y = -2(x-1)^2 + 5$ f) $y = -\frac{1}{3}(x+6)^2 + 13$

4. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Wyróżnik funkcji $y = 2x^2 - 2x + 3$ jest mniejszy od wyróżnika funkcji $y = 2x^2 + 2x + 3$.
- B. Współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $y = 2x^2 - 2x + 3$ są równe $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.
- C. Oś symetrii paraboli będącej wykresem funkcji $y = 2x^2 + 2x + 3$ jest prosta $x = -\frac{1}{2}$.

5. Podaj, który z punktów zaznaczonych na rysunku, jest wierzchołkiem podanej paraboli.

- a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 20$
- b) $y = -3x^2 - 12x - 9$
- c) $y = -2x^2 - 20x - 51$



5. Wartość największa i najmniejsza funkcji kwadratowej

🔄 Lekcja 5, s. 54–57

1. Oblicz wartość funkcji dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{1}{2}$.

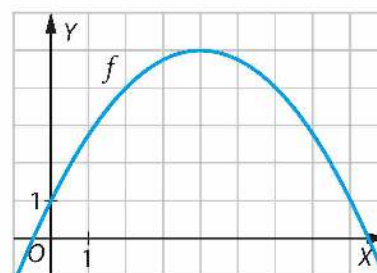
- a) $y = 4x^2 - 2x + 1$
- b) $y = -8x^2 + 6x - 1$
- c) $y = -2x^2 - 5x + \frac{1}{2}$

2. Dana jest funkcja $y = x^2 - 4x + 7$. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Postać kanoniczna tej funkcji to $y = (x - 2)^2 + 3$.
- B. Oś symetrii wykresu tej funkcji jest prosta $x = -2$.
- C. Najmniejsza wartość tej funkcji jest równa 3.

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Największa wartość tej funkcji w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$ jest równa 5.
- B. Największa wartość tej funkcji w przedziale $\langle 3; 6 \rangle$ jest równa 5.
- C. Najmniejsza wartość tej funkcji w przedziale $\langle -1; 6 \rangle$ jest równa $-\frac{5}{4}$.



4. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Najmniejsza wartość funkcji $y = -2x^2 + 4x + 8$ w przedziale $\langle 0; 10 \rangle$ jest równa

- A. 10.
- B. 0.
- C. -48.
- D. -152.

III. Równania i nierówności kwadratowe

1. Proste równania kwadratowe

↶ Lekcja 1, s. 63–66

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 16 = 0$

c) $x(x + 7) = 0$

e) $5x^2 + 40x = 0$

b) $36 - 9x^2 = 0$

d) $5x(2 - 5x) = 0$

f) $-x^2 = 3x$

2. Na rysunku przedstawiono wykresy trzech funkcji:

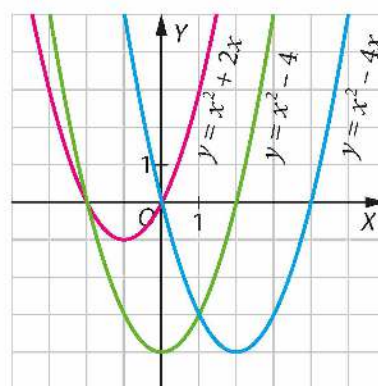
$y = x^2 + 2x$, $y = x^2 - 4$ oraz $y = x^2 - 4x$.

Wskaż zdania prawdziwe.

A. Miejscami zerowymi funkcji $y = x^2 - 4$ są dwie liczby, których suma jest równa 0.

B. Miejscami zerowymi funkcji $y = x^2 - 4x$ są dwie liczby, których iloczyn jest równy 0.

C. Oba miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + 2x$ są liczbami ujemnymi.



3. Wybierz właściwe dokończenie zdania. Rozwiązaniem równania $x^2 - 7x = 0$ jest

A. tylko 0.

B. 0 lub -7.

C. tylko -7.

D. 0 lub 7.

4. Ustal, czy równanie ma rozwiązanie czy jest sprzeczne.

a) $2x^2 + 2 = 0$

b) $x^2 = 4$

c) $5x^2 + 4 = 0$

5. Oblicz wymiary ogródka w kształcie prostokąta o polu powierzchni 162 m^2 , jeśli jeden bok ogródka jest dwa razy dłuższy od drugiego.

2. Rozwiązywanie równań kwadratowych za pomocą wyróżnika

↶ Lekcja 2, s. 67–69

1. Ustal, ile rozwiązań ma równanie.

a) $16x^2 + 8x + 1 = 0$

b) $3x^2 - 2x + 2 = 0$

c) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

c) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

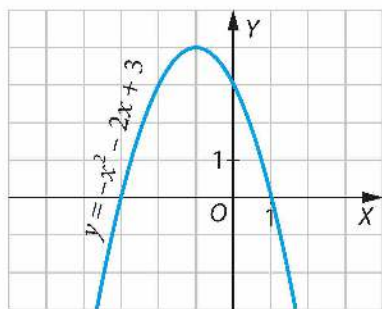
e) $8x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $-x^2 + 3x + 4 = 0$

d) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

f) $-6x^2 + x + 1 = 0$

- *3.** Rysunek przedstawia parabolę, która jest wykresem funkcji $y = -x^2 - 2x + 3$.



Wskaż zdania prawdziwe.

- A.** Równanie $-x^2 - 2x + 3 = 0$ ma dwa rozwiązania.
B. Równanie $-x^2 - 2x + 3 = 4$ ma jedno rozwiązanie.
C. Równanie $-x^2 - 2x + 3 = 5$ nie ma rozwiązań.
- 4.** Wybierz właściwe dokończenie zdania.
 Iloczyn liczb spełniających równanie $2x^2 - 13x + 6 = 0$ jest równy
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.
- 5.** Trawnik w kształcie prostokąta ma powierzchnię 216 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika, jeśli jego długość i szerokość różnią się o 6 m.
- *6.** Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary ma ten pokój, jeśli przekątna podłogi ma długość 10 m?

3. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

🔄 Lekcja 3, s. 70–73

- 1.** Podaj miejsca zerowe funkcji i zapisz jej wzór w postaci ogólnej.
- | | | |
|---------------------------------|--|-----------------------------|
| a) $y = (x - 4)(x + 8)$ | c) $y = -4(x + 2)(x + \frac{1}{2})$ | e) $y = 3(x + 1)^2$ |
| b) $y = 2(x - 3)(x - 1)$ | d) $y = \frac{1}{2}(x - 4)(x + 4)$ | f) $y = -2(x - 3)^2$ |
- 2.** Oblicz pierwiastki funkcji kwadratowej i zapisz ją w postaci iloczynowej.
- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $y = x^2 - 5x - 6$ | c) $y = -x^2 + x + 6$ | e) $y = -2x^2 + 3x + 2$ |
| b) $y = 2x^2 - 8x + 6$ | d) $y = -x^2 + 4x - 4$ | f) $y = -6x^2 - 7x + 3$ |
- *3.** Wybierz właściwe dokończenie zdania.
 Funkcji $y = 2x^2 + bx + 6$ **nie** można przedstawić w postaci iloczynowej dla
A. $b = -10$. **B.** $b = -7$. **C.** $b = 4$. **D.** $b = 7$.

4. Punkty charakterystyczne paraboli

$$y = ax^2 + bx + c$$

↪ Lekcja 4, s. 74-77

1. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli oraz jej punkty przecięcia z osią OX i osią OY . Zaznacz te punkty w układzie współrzędnych i naskicuj tę parabolę.

a) $y = -x^2 - 2x + 8$

b) $y = 2x^2 + 4x - 6$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$

2. Uczeń, szkicując parabolę $y = (x - \frac{1}{2})(x + 3\frac{1}{2})$, zapomniał umieścić jednostki na osiach układu współrzędnych.

Wskaż zdania prawdziwe.

A. Parabola przecina oś OY w punkcie $(0, -\frac{7}{4})$.

B. Parabola przecina oś OX w punktach odległych od siebie o 4 jednostki.

C. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(-\frac{1}{2}, -4)$.

3. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.

a) $y = (x - 5)(x - 1)$

b) $y = \frac{1}{2}(x - 6)(x + 2)$

c) $y = -2(x + 3)(x + 1)$

4. Wybierz właściwe dokończenie zdania. W II ćwiartce układu współrzędnych leży wierzchołek paraboli określonej wzorem

A. $y = -x^2 + 4x$.

B. $y = -x^2 - 4x$.

C. $y = x^2 + 4x$.

D. $y = x^2 - 4x$.

6. Nierówności kwadratowe

↪ Lekcja 6, s. 80-83

1. Które z liczb: k , l czy m spełniają podaną nierówność?

a) $x^2 - 4x \geq 0$ $k = -2$ $l = 0$ $m = 3$

b) $2x^2 + 4x \leq 0$ $k = -3$ $l = -2$ $m = -1$

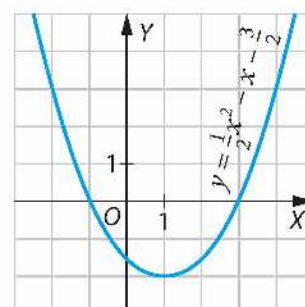
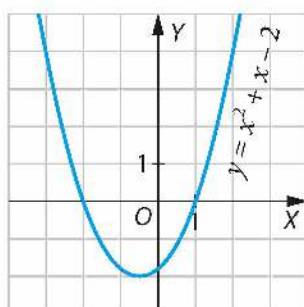
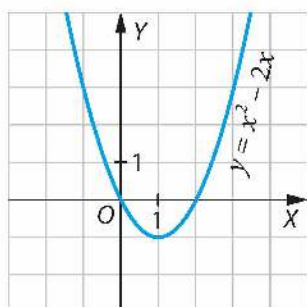
c) $-4x^2 + 6x \geq 0$ $k = -2$ $l = -\frac{1}{2}$ $m = \frac{1}{2}$

2. Podaj rozwiązanie nierówności, korzystając z wykresu funkcji.

a) $x^2 - 2x \leq 0$

b) $x^2 + x - 2 \geq 0$

c) $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} > 0$



3. Podaj wartości zmiennej x , dla których lewa strona nierówności przyjmuje wartość 0. Rozwiąż tę nierówność.

a) $(x-6)(x+4) \leq 0$

c) $2(x+4)(x+8) > 0$

e) $-3(x-5)(x-1) < 0$

b) $(x+3)(x-\frac{1}{2}) \leq 0$

d) $-(x-3)(x+1) \geq 0$

f) $-\frac{1}{3}(x+9)(x-6) \leq 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 4 \leq 0$

c) $(x-3)(x-5) < 0$

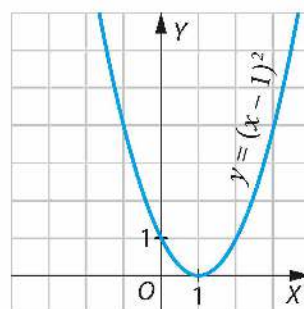
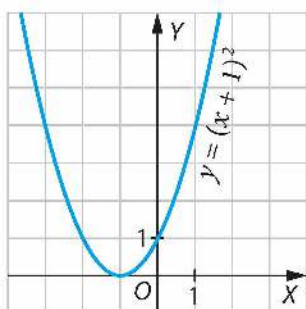
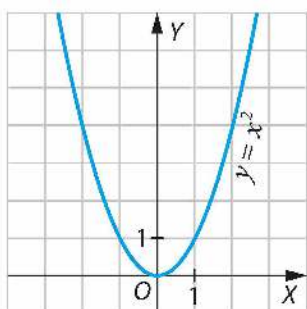
e) $x^2 + 3x + 2 \leq 0$

b) $x^2 - 81 \geq 0$

d) $-x(x+4) \geq 0$

f) $x^2 - 4x + 3 > 0$

5. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$, $y = (x+1)^2$ oraz $y = (x-1)^2$.



Wskaż zdania prawdziwe.

A. Nierówność $x^2 > 0$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.

B. Nierówność $(x+1)^2 > 0$ jest spełniona dla $x \neq -1$.

C. Nierówność $(x-1)^2 \leq 0$ jest spełniona jedynie dla $x = 1$.

6. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Liczb całkowitych spełniających nierówność $x^2 - 100 < 0$ jest

A. 9.

B. 10.

C. 19.

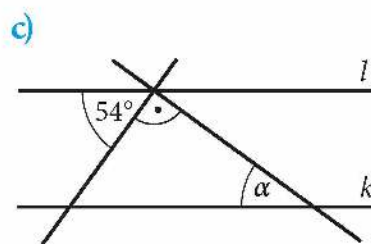
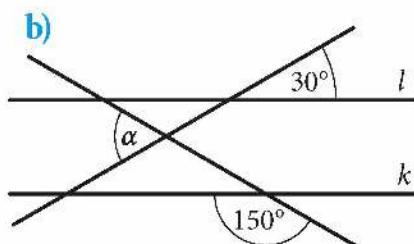
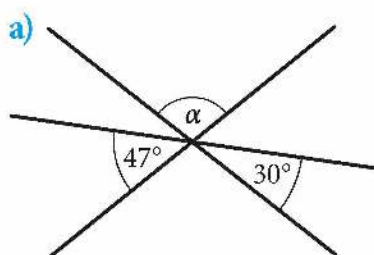
D. 20.

IV. Wielokąty

1. Kąty w trójkącie

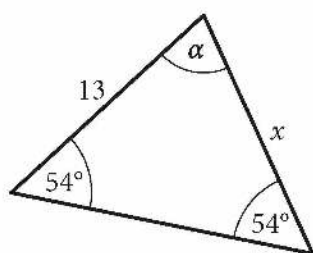
↪ Lekcja 1, s. 87-91

1. Oblicz miarę kąta α . Proste k i l są równoległe.

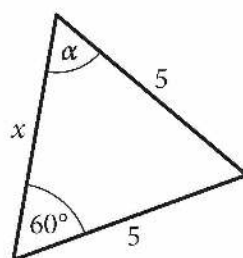


2. Oblicz brakujące wielkości w narysowanych trójkątach.

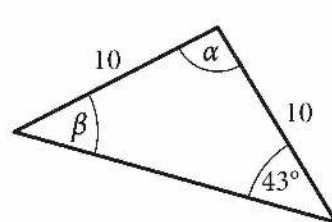
a) x i α



b) x i α



c) α i β



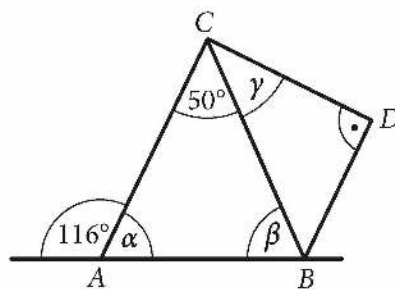
3. Odcinki AC i BD na rysunku są równoległe.

Wskaż zdania prawdziwe.

A. Kąt α ma miarę równą 74° .

B. Kąt β ma miarę równą 66° .

C. Kąt γ ma miarę równą 40° .



2. Punkty specjalne w trójkącie

↪ Lekcja 2, s. 92-95

1. Narysuj trójkąt równoboczny i wyznacz wszystkie jego środki. Podaj miary kątów w trójkątach, które powstały z podziału trójkąta równobocznego.

2. Ortocentrum pewnego trójkąta jest jednym z wierzchołków tego trójkąta. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Trójkąt ten jest

A. ostrokątny.

B. prostokątny.

C. rozwartokątny.

D. równoboczny.

3. W trójkącie równobocznym odległość wierzchołka od ortocentrum jest równa 5 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta.

3. Trójkąty przystające

↪ Lekcja 3, s. 96-99

1. Wskaż zdania prawdziwe.

A. Jeśli dowolny prostokąt podzielimy za pomocą jego przekątnej na dwa trójkąty, to otrzymamy trójkąty przystające.

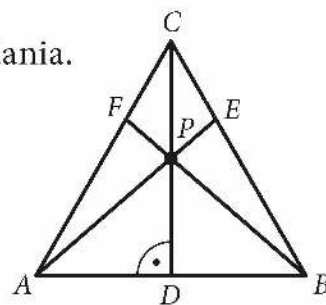
B. Jeśli dowolny trapez podzielimy za pomocą jego przekątnej na dwa trójkąty, to otrzymamy trójkąty przystające.

C. Jeśli dowolny romb podzielimy za pomocą jego przekątnej na dwa trójkąty, to otrzymamy trójkąty przystające.

2. W trójkącie równobocznym ABC punkt P jest środkiem wysokości CD tego trójkąta. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Przystające są trójkąty

- A. BEP i ADP . C. BEP i CEP .
B. BEP i BDP . D. BEP i AFP .



3. Sprawdź, czy boki trójkąta mogą mieć podane długości.

- a) 9 cm, 12 cm, 4 cm b) 7 dm, 8 dm, $\sqrt{225}$ dm c) $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{3}$ m, $\frac{1}{4}$ m

4. Trójkąty prostokątne

↪ Lekcja 4, s. 100–102

1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c . Oblicz długość brakującego odcinka i pole tego trójkąta, dla:

- a) $a = 7$, $c = 9$; b) $a = 9$, $b = 40$; c) $b = 7$, $c = 2\sqrt{14}$.

2. Dwa boki trójkąta mają długości 6 cm i 10 cm. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Jeśli trzeci bok tego trójkąta ma długość 12 cm, to jest to trójkąt prostokątny.
B. Jeśli trzeci bok tego trójkąta ma długość $2\sqrt{34}$ cm, to jest to trójkąt prostokątny.
C. Jeśli trzeci bok tego trójkąta ma długość 8 cm, to jego pole równa się 24 cm^2 .

3. Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest prostokątny.

- a) 12 cm, 16 cm, 20 cm d) 5 cm, 1 dm, $\sqrt{50}$ cm
b) $\sqrt{20}$ cm, 5 cm, 45 cm e) 0,8 dm; 1,5 dm; 1,7 dm
c) 8 cm, 9 cm, $\sqrt{145}$ cm f) $\sqrt{2}$ m, $\sqrt{7}$ m, 3 m

4. W sklepie ze sprzętem komputerowym ogłoszono promocję na monitory o rozmiarze nieprzekraczającym 21 cali. Sprawdź, czy monitor o wymiarach $45 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ jest objęty promocją. Przyjmij, że $1 \text{ cal} = 2,54 \text{ cm}$.

5. Odległość punktów w układzie współrzędnych

↪ Lekcja 5, s. 103–105

1. Wyznacz długość odcinka AB .

- a) $A(20, 40)$, $B(50, 70)$ b) $A(-5, -5)$, $B(4, -2)$ c) $A(-6, 0)$, $B(-9, -3)$

2. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Odległość od początku układu współrzędnych jest największa dla punktu

- A. $A(-5, 5)$. B. $B(7, 0)$. C. $C(6, -3)$. D. $C(4, -5)$.

3. Sprawdź, czy trójkąt ABC o wierzchołkach $A(-1, -2)$, $B(4, 10)$, $C(9, -2)$ jest trójkątem równoramiennym.
- *4. Odległość punktu $A(1, 2)$ od początku układu współrzędnych wynosi $\sqrt{5}$. Zaznacz w układzie współrzędnych punkt A oraz pozostałe punkty o współrzędnych całkowitych, których odległość od początku układu współrzędnych jest równa $\sqrt{5}$.

6. Pole trójkąta

🔄 Lekcja 6, s. 106-109

1. Oblicz wysokość opuszczoną na bok a w trójkącie o polu równym P , jeśli:

a) $a = 12 \text{ cm}$, $P = 42 \text{ cm}^2$;

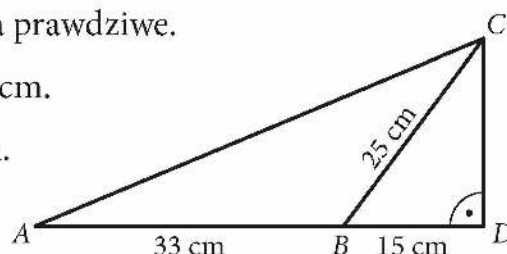
b) $a = 18 \text{ cm}$, $P = 72 \text{ cm}^2$.

2. Rysunek przedstawia trójkąt ABC . Wskaż zdania prawdziwe.

A. Jedna z wysokości tego trójkąta jest równa 20 cm.

B. Jeden z boków tego trójkąta ma długość 52 cm.

C. Pole tego trójkąta jest równe 330 cm^2 .



3. Oblicz pole trójkąta równobocznego o podanym obwodzie.

a) 6 cm

b) 12 dm

c) $9\sqrt{3} \text{ m}$

4. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Wysokość trójkąta równobocznego o polu równym $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ wynosi

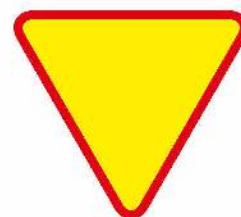
A. 6 cm.

B. 12 cm.

C. $6\sqrt{3} \text{ cm}$.

D. $12\sqrt{3} \text{ cm}$.

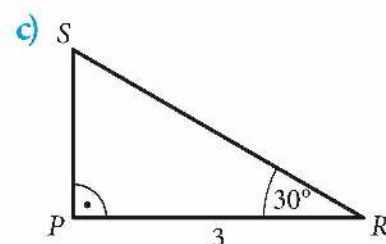
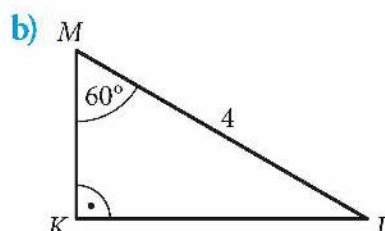
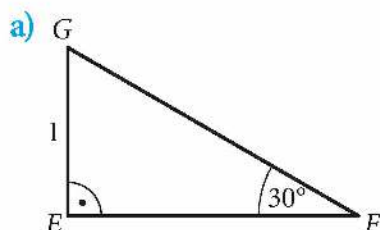
5. Oblicz, ile centymetrów kwadratowych blachy zużyto do wykonania znaku „ustąp pierwszeństwa przejazdu”, jeśli znak ma kształt trójkąta równobocznego o boku równym 60 cm (pomiń zaokrąglenia w wierzchołkach).



7. Trójkąty o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ oraz $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

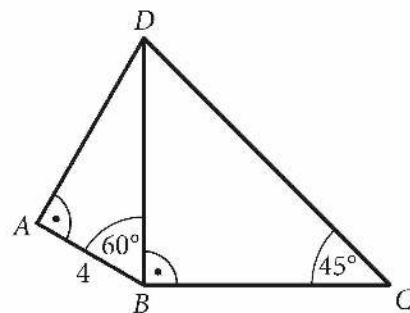
🔄 Lekcja 7, s. 110-114

1. Oblicz obwód i pole trójkąta.



2. Dany jest czworokąt $ABCD$. Wskaż zdania prawdziwe.

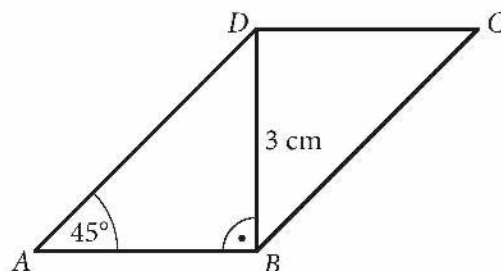
- A. Miara kąta ADC jest równa 75° .
- B. Odcinek BC ma długość $8\sqrt{2}$.
- C. Pole czworokąta jest równe $32 + 8\sqrt{3}$.



3. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Obwód równoległoboku $ABCD$ jest równy

- A. 12 cm.
- B. $(6 + 6\sqrt{2})$ cm.
- C. $12\sqrt{2}$ cm.
- D. 18 cm.



8. Czworokąty – pola i obwody

↪ Lekcja 8, s. 115–119

1. Oblicz długość przekątnej prostokąta, jeżeli jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego, a obwód prostokąta wynosi 32 cm.

2. Wybierz właściwą odpowiedź.

Pole rombu, którego dłuższa przekątna ma długość 16 m, wynosi 96 m^2 . Ile wynosi obwód tego rombu?

- A. 40 m
- B. 60 m
- C. 64 m
- D. 80 m

3. Dany jest trapez prostokątny, którego podstawy mają długości 4 cm i 8 cm, a pole jest równe 24 cm^2 . Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Krótsza przekątna tego trapezu ma długość mniejszą niż 6 cm.
- B. Dłuższa przekątna tego trapezu ma długość większą niż 9 cm.
- C. Obwód tego trapezu jest większy niż 21 cm.

4. Producent mieszanki nasion trawy zaleca użyć 1,5 kg produktu przy zakładaniu trawnika o powierzchni 20 m^2 . Oblicz, ile kilogramów nasion należałoby zużyć do założenia trawnika w kształcie:

- a) trapezu równoramiennego o bokach długości 18 m, 10 m, 6 m, 10 m,
- b) rombu o obwodzie 60 m i krótszej przekątnej równej 18 m.

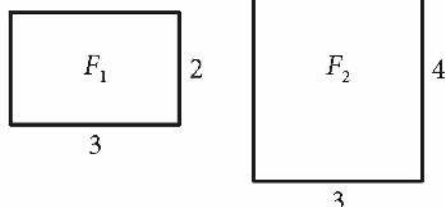
V. Podobieństwo

1. Figury podobne

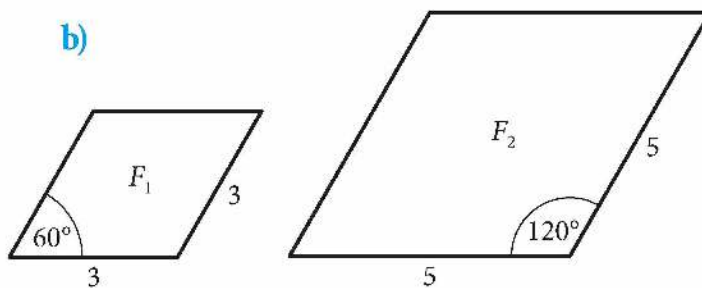
↪ Lekcja 1, s. 123-127

1. Sprawdź, czy figury F_1 i F_2 są podobne.

a)

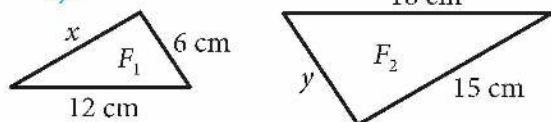


b)

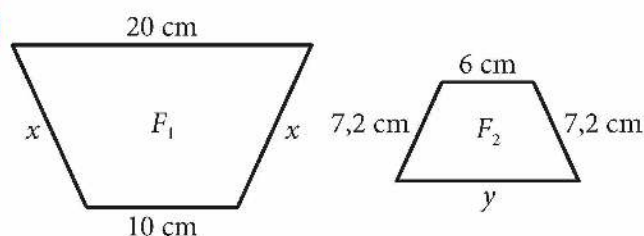


2. Figury F_1 i F_2 są podobne. Oblicz skalę podobieństwa figury F_2 do figury F_1 oraz długości boków x , y .

a)



b)



3. Oblicz długości boków prostokąta P_2 , którego obwód wynosi 90 cm, jeżeli prostokąt P_2 jest podobny do prostokąta P_1 o bokach długości 8 cm i 10 cm.
4. Przekątne rombu R_1 mają długości 10 cm i 24 cm, a obwód podobnego do niego rombu R_2 wynosi 78 cm. Oblicz skalę podobieństwa większego rombu do mniejszego.

2. Trójkąty podobne

↪ Lekcja 2, s. 128-132

1. Sprawdź, czy trójkąty o podanych bokach są podobne. Jeśli tak, podaj skalę podobieństwa mniejszego z trójkątów do większego. Wszystkie wymiary podano w centymetrach.

a) 6, 12, 14 oraz 3, 6, 8

c) 2, 7, 8 oraz $3, 10\frac{1}{2}, 12$

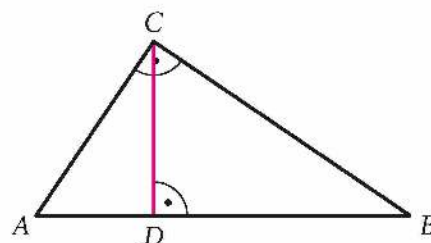
b) 5, 8, 10 oraz $12\frac{1}{2}, 20, 25$

d) 8, 12, 18 oraz 1,6; 2,4; 3,6

2. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość CD . Wykonaj polecenia.

a) Uzasadnij, że $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle BCD$.

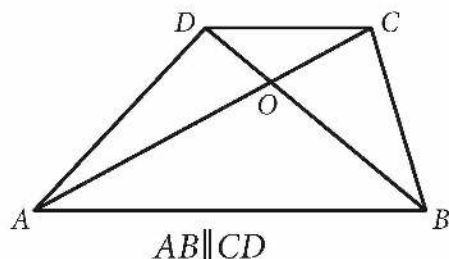
b) Oblicz długość odcinka CD , jeśli $|AD| = 4$ cm i $|BD| = 9$ cm.



3. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Trójkątami podobnymi na rysunku są

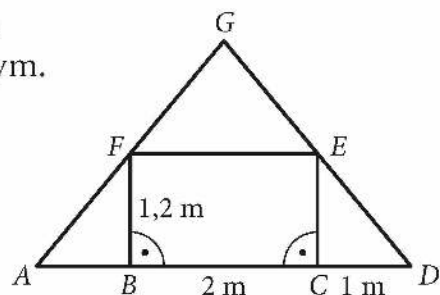
- A. $\triangle ADO$ i $\triangle BCO$. C. $\triangle ABO$ i $\triangle CDO$.
B. $\triangle ADO$ i $\triangle CDO$. D. $\triangle BCO$ i $\triangle ABO$.



- *4. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, wiedząc, że wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach 3 cm i 12 cm.

5. Stolarz wykonał projekt szafasu do zabawy dla dzieci, w którym trójkąt ADG jest trójkątem równoramiennym. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. $\triangle ABF \sim \triangle CDE$.
B. $\triangle ABF \sim \triangle EFG$.
C. Jeśli punkt S jest środkiem odcinka AD , to $\triangle ABF \sim \triangle AGS$.

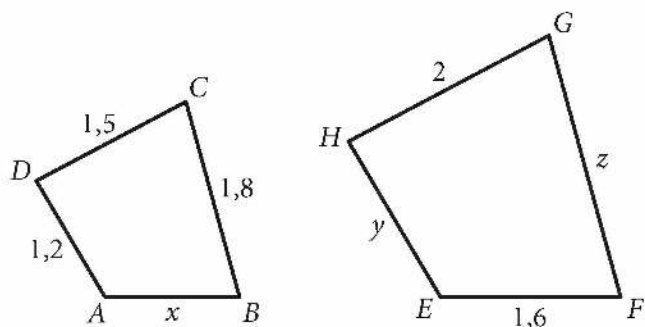


3. Pola figur podobnych

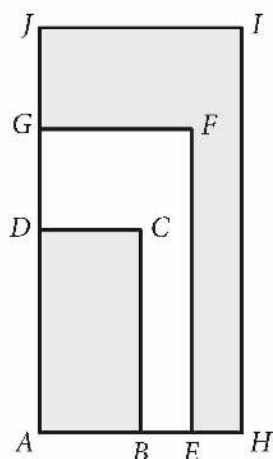
↪ Lekcja 3, s. 133–135

1. Dane są dwa romby podobne. Większy z nich ma pole równe 80 cm^2 i obwód równy 40 cm. Oblicz obwód mniejszego rombu, jeśli jego pole wynosi 5 cm^2 .

2. Dwóch geodetów wykonało plan tej samej czworokątnej działki. Jeden przygotował plan w skali 1:2000 i otrzymał czworokąt $ABCD$, drugi otrzymał czworokąt $EFGH$. Wykonaj polecenia.



- a) Oblicz długości x , y i z – wszystkie wymiary podane są w centymetrach.
b) Odpowiedz, jaką skalę zastosował drugi geodeta.
3. Rysunek przedstawia fragment logo pewnej firmy. Prostokąty $ABCD$ i $AEFG$ są podobne w skali 2:3, a prostokąty $AEFG$ i $AHIJ$ są podobne w skali 3:4. Odpowiedz na pytania.
- a) Jaka jest skala podobieństwa prostokątów $ABCD$ i $AHIJ$?
b) Ile wynosi pole zacieniowanego obszaru, jeżeli prostokąt $ABCD$ ma wymiary $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$?



VI. Trygonometria

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

↶ Lekcja 1, s. 141–143

1. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

a) $a = 1, b = 3$

b) $a = 2, b = \sqrt{3}$

c) $a = 2, b = \sqrt{5}$

2. Przekątne rombu $ABCD$ o obwodzie równym 60 przecinają się w punkcie O . Jedna z przekątnych tego rombu ma długość 24. Wskaż zdania prawdziwe.

A. Sinus jednego z kątów ostrych trójkąta ABO jest równy 0,8.

B. Cosinus jednego z kątów ostrych trójkąta ABO jest równy 0,5.

C. Tangens jednego z kątów ostrych trójkąta ABO jest równy 1,(3).

3. W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 6 cm i 10 cm, a wysokość wynosi 5 cm. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Tangens kąta między dłuższą podstawą i ramieniem trapezu wynosi

A. 1.

B. $1\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $2\frac{1}{2}$.

- *4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym:

a) jedna przyprostokątna jest dwa razy dłuższa od drugiej,

b) przeciwprostokątna jest trzy razy dłuższa od jednej z przyprostokątnych.

2. Wartości funkcji trygonometrycznych

↶ Lekcja 2, s. 144–146

1. Wybierz właściwe dokończenie zdania. Najmniejszy kąt trójkąta o bokach długości 5, 12, 13 ma – z dokładnością do jednego stopnia – miarę równą

A. 17° .

B. 23° .

C. 27° .

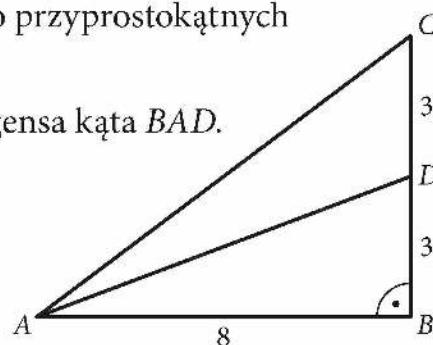
D. 30° .

2. Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości 6 i 8. Wskaż zdania prawdziwe.

A. Tangens kąta BAC jest dwukrotnie większy od tangensa kąta BAD .

B. Kąt BAC jest dwukrotnie większy od kąta BAD .

C. Sinus kąta BAC i cosinus kąta ACB są równe.



3. Wybierz właściwą odpowiedź. Ile wynosi $\cos(90^\circ - \alpha)$, jeśli $\sin \alpha = \frac{3}{8}$?
- A. 0,3 B. 0,37 C. 0,375 D. 0,3758
4. Wiemy, że $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{1}{3}$, $\sin \gamma = \frac{1}{4}$. Korzystając z tej informacji, oblicz:
- a) $5\sin(90^\circ - \alpha) + 3\cos(90^\circ - \beta)$, b) $6\cos(90^\circ - \gamma) + 2\sin(90^\circ - \alpha)$.

3. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

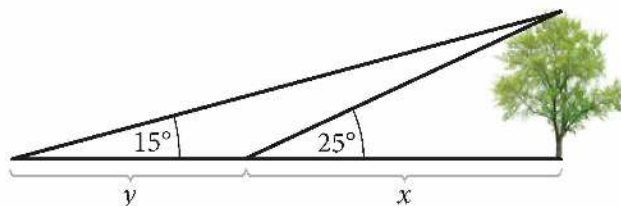
↪ Lekcja 3, s. 147-149

1. Drzewo na rysunku ma wysokość 20 m. Wybierz poprawnie zapisane zależności.

A. $x = 20 \cdot \operatorname{tg} 25^\circ$ [m]

B. $x = \frac{20}{\operatorname{tg} 25^\circ}$ [m]

C. $y = \frac{20}{\operatorname{tg} 15^\circ} - x$ [m]



2. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeśli α jest jednym z kątów ostrych tego trójkąta oraz:
- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, a długość przeciwprostokątnej wynosi 15 cm,
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, a długość przeciwprostokątnej wynosi 39 cm.
3. Najwyższym drzewem, które zmierzono, był rosnący w Ameryce Północnej mamutowiec olbrzymi o wysokości 135 m. Oblicz, w jakiej odległości od jego pnia należy stanąć, żeby zobaczyć czubek drzewa pod kątem 75° . Wynik zaokrąglaj do metrów.
4. Oblicz, ile metrów kwadratowych płytek musisz kupić, żeby wyłożyć prostokątną podłogę w hali produkcyjnej, której przekątna o długości d tworzy z jednym z boków kąt o mierze α . Wymiary hali zaokrąglaj z dokładnością do 0,1 m.
- a) $d = 50$ m, $\alpha = 34^\circ$ b) $d = 80$ m, $\alpha = 65^\circ$

5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

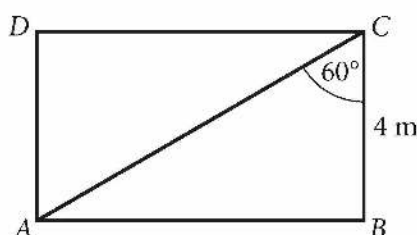
↪ Lekcja 5, s. 152-155

1. Oblicz wartości brakujących funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:
- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$.
2. Cosinus pewnego kąta ostrego jest równy $\frac{7}{25}$. Wskaż zdania prawdziwe.
- A. Sinus tego kąta jest równy $\frac{18}{25}$.
B. Sinus tego kąta wynosi $\frac{24}{25}$.
C. Tangens tego kąta jest równy $3\frac{3}{7}$.
3. Oblicz wartość wyrażenia.
- a) $\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ$ b) $(1 - \sin 60^\circ)(1 + \sin 60^\circ)$

6. Obliczanie pól wielokątów z wykorzystaniem trygonometrii

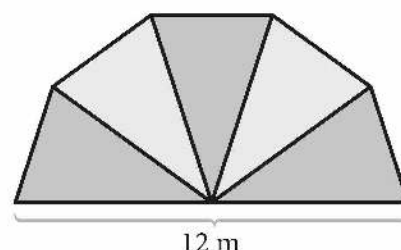
↶ Lekcja 6, s. 156–159

1. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.

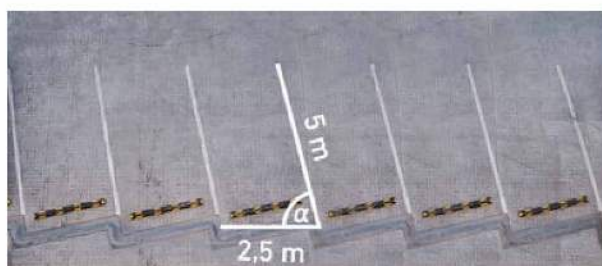


2. Obwód równoległoboku o kącie ostrym 30° wynosi 54 cm. Jeden z boków tego równoległoboku jest dwukrotnie dłuższy od drugiego boku. Oblicz pole tego równoległoboku.
3. Dany jest romb o obwodzie równym 32 cm i kącie ostrym α . Wskaż zdania prawdziwe.
- A. Jeśli $\alpha = 30^\circ$, to pole tego rombu wynosi 32 cm^2 .
- B. Jeśli $\alpha = 45^\circ$, to pole tego rombu jest większe niż 45 cm^2 .
- C. Jeśli $\alpha = 60^\circ$, to pole tego rombu jest większe niż 55 cm^2 .

4. Rysunek przedstawia projekt tarasu wyłożonego kostką w dwóch odcieniach szarości. Wszystkie przedstawione na nim trójkąty są równoramienne, o tym samym kącie między ramionami. Jaki obszar – zgodnie z projektem – zostanie wyłożony jaśniejszą, a jaki ciemniejszą kostką? Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 m^2 .



5. Firma budowlana przygotowuje parking na sześć identycznych miejsc parkingowych – takich, jak przedstawiono na zdjęciu. Oblicz, ile metrów kwadratowych kostki trzeba kupić na wyłożenie parkingu, jeśli kąt α równa się:
- a) 60° . b) 45° .



Odpowiedź podaj z dokładnością do $0,1 \text{ m}^2$.

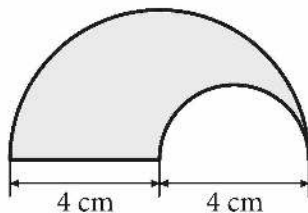
VII. Okręgi i wielokąty

1. Długość okręgu i pole koła

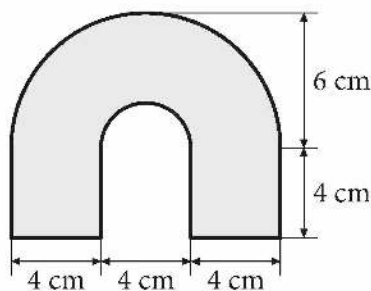
↪ Lekcja 1, s. 163–166

1. Oblicz obwód narysowanej figury z dokładnością do 1 cm i jej pole z dokładnością do 1 cm².

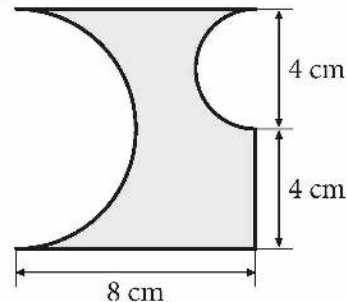
a)



b)

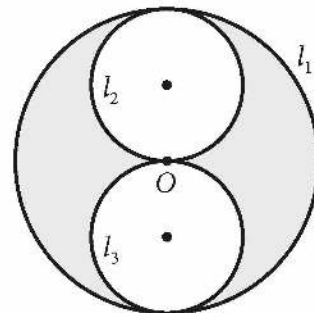


c)



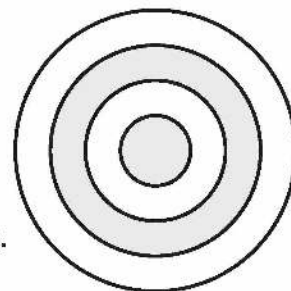
2. W okrąg o długości l_1 , środku O i promieniu równym 8 cm wpisano dwa mniejsze okręgi o długościach l_2 i l_3 – tak jak na rysunku. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Długość okręgu l_1 równa się sumie długości okręgów l_2 i l_3 .
 B. Pole koła ograniczonego okręgiem l_1 jest dwukrotnie większe od pola zacieniowanego obszaru.
 C. Pole zacieniowanego obszaru jest większe od 100 cm².



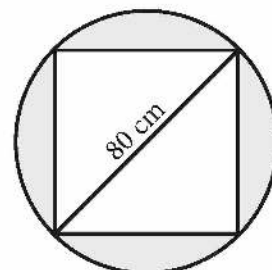
3. Na rysunku przedstawiono fragment tarczy strzelniczej. Kolejne okręgi mają promienie równe 10 cm, 20 cm, 30 cm i 40 cm. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Pole szarego obszaru jest równe 600π cm².
 B. Pole szarego obszaru jest równe połowie pola obszaru białego.
 C. Pole białego obszaru jest o ponad 50% większe od pola szarego obszaru.



4. W tartaku wycięto z pnia belkę, której przekrój jest kwadratem. Przekrój pnia jest kołem o średnicy długości 80 cm, jak przedstawia to rysunek. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Pole przekroju pnia jest większe niż 0,5 m².
 B. Pole przekroju belki nie jest większe niż 0,32 m².
 C. Odpady przy wycinaniu stanowiły ponad 30% objętości pnia.



2. Kąty środkowe

Lekcja 2, s. 167–170

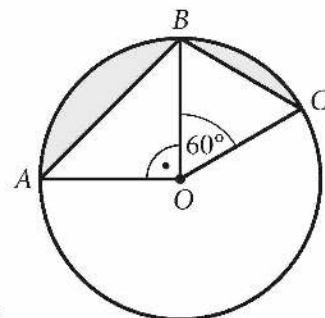
1. Kąt środkowy o mierze α wyznacza na okręgu o promieniu równym 12 cm łuk o długości 3π cm. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Kąt o tej samej mierze wyznaczy na okręgu o promieniu 64 cm łuk o długości

- A. 16π cm. B. 18π cm. C. 20π cm. D. 24π cm.

2. Dany jest okrąg o środku O i promieniu długości 6 cm, na którym zaznaczono punkty A, B, C – tak, jak przedstawiono to na rysunku. Wykonaj polecenia.

- a) Oblicz długości łuków $\widehat{AB}$ i $\widehat{BC}$.
b) Wyznacz długości cięciw AB i BC .
c) Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez cięciwę AB oraz przez cięciwę BC .



3. Sporządź diagram kołowy prezentujący dane z tabeli.

Język polski						
Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	20	40	60	30	20	10

4. Cukiernik pokroił okrągły tort o średnicy długości 24 cm na równe kawałki. Ile ich było, jeśli jeden kawałek tortu widziany z góry ma kształt wycinka koła o polu równym 18 cm^2 ? Przyjmij, że $\pi = 3$.

Wybierz właściwą odpowiedź.

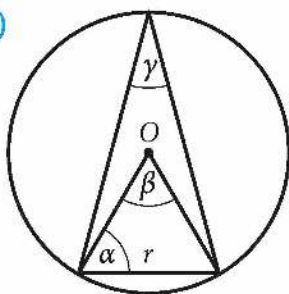
- A. 6 B. 12 C. 18 D. 24

3. Kąty wpisane

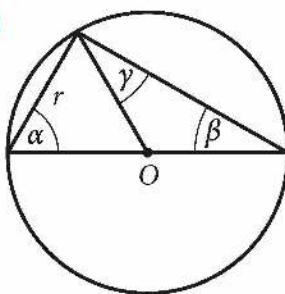
Lekcja 3, s. 171–174

1. Promień okręgu jest równy r . Wyznacz miary kątów α , β i γ .

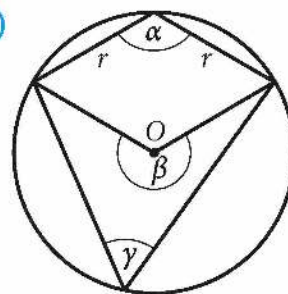
a)



b)



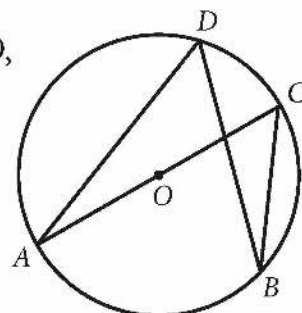
c)



2. Okrąg o środku O opisany jest na trójkącie równobocznym ABC . Punkt P jest środkiem krótszego z łuków wyznaczonych przez punkty A i B , a punkt Q jest środkiem krótszego z łuków wyznaczonych przez punkty B i C . Wyznacz kąty trójkątów APQ i OPQ .

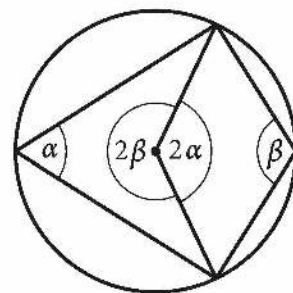
3. Punkty A, B, C i D należą do narysowanego okręgu o środku O , zaś kąt AOB jest kątem prostym. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Kąt ADB ma miarę 45° .
 B. Kąty CAD i CBD są równe.
 C. Czworokąt $ABCD$ ma dwa kąty proste.



- *4. Uzasadnij, że:

- a) suma kątów α i β wpisanych w okrąg przedstawiony na rysunku jest równa 180° ,
 b) jeśli jeden z kątów czworokąta wpisanego w okrąg jest prosty, to przynajmniej jeszcze jeden kąt tego czworokąta jest prosty.



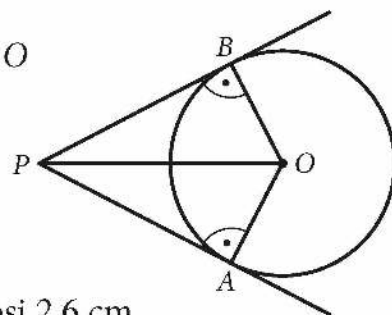
4. Wzajemne położenie prostej i okręgu

↪ Lekcja 4, s. 175–179

1. Do okręgu o środku O przechodzącego przez punkt P poprowadzono styczną AP . Oblicz długość tego okręgu, jeśli wiesz, że:

- a) $|AO| = 17 \text{ cm}$, $|AP| = 15 \text{ cm}$; b) $|AO| = 15 \text{ cm}$, $|OP| = \frac{3}{4}|AP|$.

2. Proste AP i BP są styczne do okręgu o środku w punkcie O i promieniu równym 6 cm . Oblicz odległość między punktami P i O , jeśli wiesz, że obwód czworokąta $AOBP$ wynosi 28 cm .



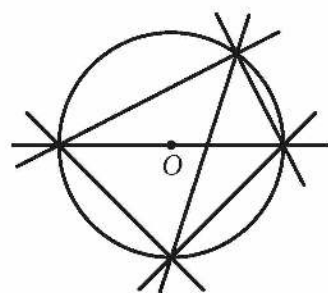
3. Okrąg jest styczny do ramion pewnego kąta ostrego. Odległość wierzchołka kąta od środka tego okręgu wynosi $2,6 \text{ cm}$, a od jednego z punktów styczności $2,4 \text{ cm}$. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Średnica tego okręgu ma długość

- A. 1 cm . B. 2 cm . C. 3 cm . D. 4 cm .

4. Na okręgu zaznaczono n różnych punktów. Przez każde dwa z nich poprowadzono sieczną. Rysunek przedstawia sytuację dla czterech punktów ($n = 4$). Ustal, ile różnych siecznych można poprowadzić, jeśli:

- a) $n = 3$, b) $n = 5$, c) $n = 6$.

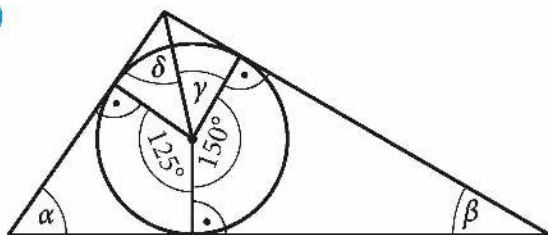


5. Okrąg wpisany w trójkąt

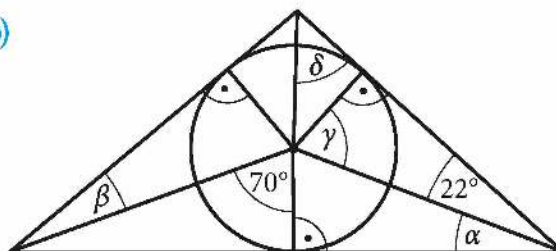
↪ Lekcja 5, s. 180–184

1. Oblicz miary kątów α , β , γ , δ .

a)



b)

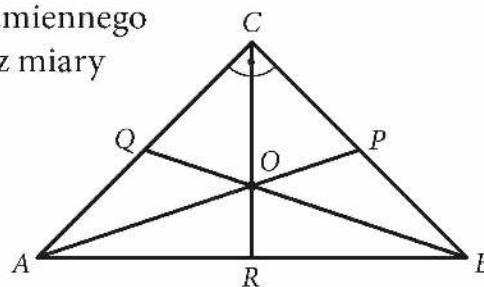


2. W trójkąt o kątach α , β i γ wpisano okrąg o środku O . Z punktu O poprowadzono promienie do punktów styczności okręgu z bokami trójkąta. Oblicz miary kątów między tymi promieniami, jeśli:

a) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ$;

b) $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 104^\circ$.

3. Dwusieczne kątów trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC dzielą go na sześć mniejszych trójkątów. Oblicz miary kątów tych trójkątów.



6. Okrąg opisany na trójkącie

↪ Lekcja 6, s. 185–188

1. Trójkąt równoramienny ABC jest wpisany w okrąg o środku O . Kąt AOB ma miarę 100° . Wyznacz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC . Rozpatrz dwa przypadki.
2. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długość:
- a) 12 cm i 16 cm, b) 7 cm i 24 cm.
3. Trójkąt ABC wpisano w okrąg o środku O . Wybierz właściwe dokończenie zdania.

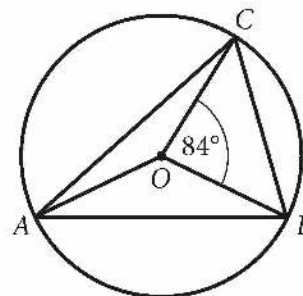
Miara najmniejszego z kątów trójkąta ABC jest równa

A. 80° .

B. 76° .

C. 58° .

D. 42° .



7. Trójkąt równoboczny i kwadrat

Lekcja 7, s. 189–192

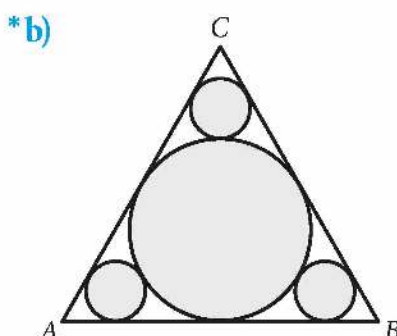
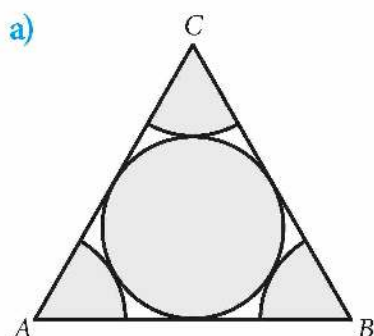
1. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Długość okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o obwodzie równym $27\sqrt{3}$ cm wynosi

- A. 9π cm. B. $9\sqrt{3}\pi$ cm. C. 18π cm. D. $16\sqrt{3}\pi$ cm.

2. Odpowiedz, czy z kawałka kartonu w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości 24 cm można wyciąć koło o polu 144 cm^2 .

3. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6 cm. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



- *4. Uzasadnij, że jeśli R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym, zaś r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, to zachodzi równość $R = 2r$.
5. Pierścień ograniczony dwoma okręgami: opisanym na trójkącie równobocznym i wpisanym w ten trójkąt ma pole równe $9\pi\text{ cm}^2$. Oblicz długość boku tego trójkąta.

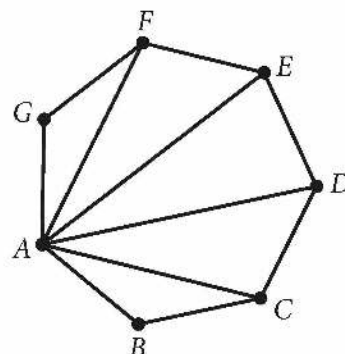
8. Wielokąt foremny

Lekcja 8, s. 193–195

1. Ustal, na ile trójkątów przystających wszystkie osie symetrii dzielą:

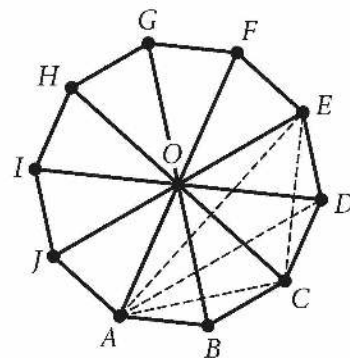
- a) trójkąt równoboczny, b) kwadrat, c) sześciokąt foremny.

2. Przekątne siedmiokąta foremnego $ABCDEFG$ poprowadzone z punktu A dzielą go na pięć trójkątów. Znajdź miary kątów tych trójkątów.



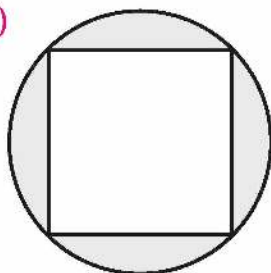
3. Na rysunku przedstawiono podział dziesięciokąta foremnego na trójkąty przystające. Podaj miary kątów trójkątów:

- a) ABO ,
- b) ADO ,
- c) AEO ,
- d) ACE .

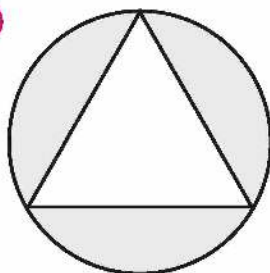


4. Grafik przygotował projekt logo w kształcie wielokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu długości 5 cm. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

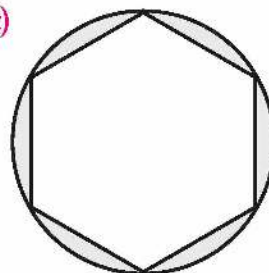
a)



b)



c)



Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1,0000

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,430
86°	0,9976	0,0698	14,300
87°	0,9986	0,0523	19,081
88°	0,9994	0,0349	28,636
89°	0,9998	0,0175	57,290

Odpowiedzi

Rozdział I. Wyrażenia algebraiczne

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 7-10	1. $1,85x + 0,86y$ 2. a) -6 b) 69 c) $\frac{1}{2}$ 3. a) -12 b) 4 4. a) $3(n+8)$ b) $12(n-3)$ c) $3n+11$ d) $0,29y$ e) $0,7a$	1. a) $5x+6y$ b) $3y$ c) $7,5m+6n+5,6p$ 2. $5a+3b$ 3. a) 14 b) 40 c) 0 d) $-4\frac{1}{2}$ 4. $2p+\frac{3}{2}r-2$ 5. $108x+630$ 6. $0,55n$	1. a) $2x+4$ b) $4p+2q$ c) $4n$ 2. a) 21 b) 25 c) 33 d) 52 3. a) $1,25m$ b) $0,87m$ c) $m-\frac{mp}{100}$ d) $m+\frac{km}{100}$ 4. B, C
2 s. 11-13	1. a) $2x^3y^2$ b) $\frac{1}{4}ab^2c^3$ c) $-9xy^3$ d) $-0,4a^5b^4c^2$ 2. a) $-36x^5y$ b) $2pqr^3$ c) $-2a^2x^2$ 3. a) $0,5x^2, \frac{1}{5}x, 0,9$ b) $6x^3y, -3x, -2y^2$ c) $-4a, 2b, -8c, -5$ 4. a) $-7x^2-2x$ b) $x^4-x^3-6x^2+5$	1. a) $-11x^2y^3$ b) $-x^5y^4$ c) x^3y^3 d) $-\frac{1}{12}a^3b^3c^5$ 2. a) $2a^2$ b) x^3 c) $-8xy^2$ d) $-2a^2b^3$ 3. a) $-x^3$ b) $10a^3b^2$ 4. Ogrodnik musi kupić $2ab$ opakowań trawy.	1. a) $2a^3b^2$ b) $10a^4b^2$ c) $-a^6b^4$ d) $-\frac{1}{2}a^2b^3c$ 2. a) $-6y$ b) $-8a+5b+9$ c) $-3n^2-3n$ d) x^2-6x 3. A, C
3 s. 14-16	1. a) $-x$ b) $-2a+10b$ c) $-6x+2$ 2. a) $4x+7y$ b) $6x+8y$ 3. $-4a$	1. a) $P+Q=-ab$ $P-Q=-8a^2b+3ab-2b^3$ b) $P+Q=7x^3-3x^2y+2xy-5y$ $P-Q=-3x^3-9x^2y+6xy-y$ 2. a) 0 b) 0 c) $3t-s$ d) $s-t$ 3. $6n+6$ 4. a) $13a+\frac{13}{2}$ b) $16x$ c) $5a+2b$ 5. $3x+15$	1. a) $-6a+4b$ b) $-6b^2$ 2. Podany kwadrat nie jest kwadratem magicznym. 3. a) $10a+6$ b) $\frac{15}{2}p+1$ c) $16x$
4 s. 17-20	1. a) $28x-63y$ b) $9xy-8y^2$ c) $8x^2-24x$ 2. a) 980 b) 1242 c) 4692 3. a) x^2+3x+2 b) $4x^2+5xy-6y^2$ c) $x^2-9x+20$ d) $18a^2-24ab-10b^2$ e) $3x^2-2xy-y^2$ f) $-10a^2+38ab-24b^2$ 4. a) $P=(4x+3)(2y+1)=8xy+4x+6y+3$ b) $P=(3x+4)(y+2)=3xy+6x+4y+8$	1. a) $ab+4a+2b+8$ b) $-4b^2+2ab+2a-4b$ c) $6x^2-12xy-10x+20y$ d) $-12x^2+6xy+14x-7y$ e) $x^2+y^2+2xy-x-y$ f) $x^2+y^2-2xy+x-y$ 2. a) $2x-3$ b) $-4x^2+4y^2-3xy$ c) $-8a^2+ab-3a-b+2$ d) $a^2-2c^2+2a+4c$ 3. a) $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a$ b) $a+\frac{1}{2}$ c) a^2+a d) $a^2+\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}$ 4. Zostało $(-a^2-\frac{3}{2}ab-2a+6)m^2$ materiału.	1. I - B, II - C, III - A 2. a) $3x^2+2x$ b) $-2y^2-3xy$ c) x^2 d) $6x^2+4x-12$ e) $2x^2+6xy+y^2$ f) $12a^2-9ab+b^2$ 3. a) $x^2-4x-32$ b) $x^2-13x+42$ c) $6x^2+13x+6$ d) $24x^2-14x+2$ e) $3x^2+5xy-2y^2$ f) $2x^2-3xy-5y^2$ 4. D
5 s. 21-23	1. a) 200 b) 1200 c) 4500 2. a) $4(x+y)$ b) $5(x-3y^2)$ c) $-6(2x^2-3y^2)$ 3. a) $y(x-z)$ b) $x^2(x-y)$ c) $a(a+3b-1)$ 4. a) $8x^2(x-4)$ b) $-7y^2(2y^2+1)$ c) $5a(4x-3y)$ d) $3b(3a+4c)$ e) $8xy(3x+2y)$ f) $6a^2b(8a+3)$	1. a) $xyz(x+y)$ b) $2x^2y(x-4y+3z)$ 2. a) $2(4x^3+3x^2+2x)$ b) $x(8x^2+6x+4)$ c) $2x(4x^2+3x+2)$ 3. a) 185 b) 525 c) 145 4. Wyrażenie $200(x+30)$ opisuje całkowity koszt wycieczki.	1. a) $3(a+2b)$ b) $-12(3p-4q)$ c) $y(y-5x+2)$ d) $p^3(pq+1)$ e) $7x^2(x+3y)$ f) $3p^2q^2(7p-9q)$ 2. A 3. a) $3x^2(2x-9), 0$ b) $8a^2(a+2b), -200$ c) $6xy(2y-x), \frac{1}{3}$ d) $25a^2(ab-2c), 0$ 4. a) $3x^2+6xy$ b) $3x(x+2y)$ c) $240m^2$

6 s. 24-27	1. a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 + 6x + 9$ c) $x^2 + 14x + 49$ d) $9x^2 + 6x + 1$ e) $4x^2 + 16x + 16$ f) $16x^2 + 16x + 4$ 2. a) $x^2 - 2x + 1$ b) $x^2 - 6x + 9$ c) $4x^2 - 8x + 4$ d) $16x^2 - 56x + 49$ e) $x^2 - 6xy + 9y^2$ f) $9x^2 - 6xy + y^2$ 3. a) $x^2 - 4$ b) $x^2 - 81$ c) $4x^2 - 1$ d) $16x^2 - 36$ e) $9x^2 - 64y^2$ f) $y^2 - \frac{1}{4}x^2$	1. a) 16x b) 6x c) 36x d) 14x e) 20x f) 36x 2. a) $x^2 - 25$ b) $100 - x^2$ c) $a^2 - \frac{1}{16}b^2$ d) $\frac{4}{9}a^2 - b^2$ e) $0,09s^2 - 4t^2$ f) $0,36t^2 - 0,25s^2$ 3. Obwód placu wynosi 28 m.	1. a) $x^2 - 20x + 100$ b) $x^2 + 18x + 81$ c) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ d) $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}$ e) $9x^2 + 48x + 64$ f) $0,25x^2 + 2x + 4$ g) $16x^2 - 1,6x + 0,04$ h) $36x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ 2. B, C 3. B 4. a) $2x^2 - 6x + 29$ b) $17x^2 + 17$ c) $4x$ d) $5x^2 + 24x - 5$ e) $3x^2 - 8xy - 3y^2$ f) $2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 1$ 5. $a = 7$ dm, $b = 6$ dm
Powtórzenie rozdziału s. 32-33	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE		
	1. $95x - 250$ 2. B, C 3. a) $-4x + 4$ b) $-4y + 4$ c) 2 d) $x + y$ e) $2b + 2c$ f) $-4x$ 4. a) $3a^2 - 6a$ b) $-12a^2 - 8a$ c) $2a^2 + 10a - 28$ d) $-\frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2}a - 2$ e) $a^2 + 25$ f) $a^2 - 8a$ 5. C 6. B 7. A, B		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. C 2. $\frac{5}{2}x + 1500$ 3. D 4. A, B 5. C 6. a) 1645 b) 221 c) 2025 7. a) $4x^2 - 25$ b) $\frac{1}{8}x^2 + x + 2$ c) $9x^2 - 12x + 4$		

Rozdział II. Wykres funkcji kwadratowej

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 35-39	1. a), b) Ramiona paraboli są skierowane do góry, a wierzchołek jest w punkcie $(0, 0)$, $X = R$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$. Najmniejsza wartość funkcji równa się 0 dla $x = 0$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle 0; \infty \rangle$, malejąca dla $x \in \{-\infty; 0\}$. Oś symetrii to oś OY. 2. a), b) Ramiona paraboli skierowane są w dół, a wierzchołek jest w punkcie $(0, 0)$, $X = R$, $ZW = \{-\infty; 0\}$. Największa wartość funkcji równa się 0 dla $x = 0$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in \{-\infty; 0\}$, malejąca dla $x \in \langle 0; \infty \rangle$. Oś symetrii to oś OY. 3. k: $y = -\frac{1}{8}x^2$, h: $y = -\frac{1}{4}x^2$, g: $y = -4x^2$, f: $y = -8x^2$ 4. a) należy b) nie należy c) nie należy d) należy	1. a) $y = 16$ b) $y = 36$ c) $y = 1$ 2. a) $a = 2$ b) $a = -4$ c) $a = 2$ 3. Do wykonania kartonów potrzeba 256 m^2 tektury.	1. A, B $P_1(2, 4)$, $P_2(4, 4)$, $P_3(8, 8)$ 2. a) $f(-3) = -36$ b) $f(-\frac{1}{2}) = -1$ c) $f(0,5) = -1$ 3. a) $a = \frac{1}{4}$ c) $2,56 \text{ m}^2$

2 s. 40–44	3. a) $(-1, 0)$ b) $(0, 3)$ c) $(1, 0)$ d) $(0, -3)$ 4. a) $ZW = \langle 0; \infty \rangle$, oś symetrii $x = -2$ b) $ZW = (-\infty; -2]$, oś symetrii $x = 0$ c) $ZW = (-\infty; 0]$, oś symetrii $x = 2$	1. a) $y = -x^2 + 3$, $y = -x^2 - 2$ b) $y = -2(x - 2)^2$ $y = -2(x + 3)^2$ 2. a) $(0, 0)$, $x = 0$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$; $(0, 1)$, $x = 0$, $ZW = \langle 1; \infty \rangle$; $(0, -2)$, $x = 0$, $ZW = \langle -2; \infty \rangle$ b) $(0, 0)$, $x = 0$, $ZW = (-\infty; 0]$; $(0, 2)$, $x = 0$, $ZW = (-\infty; 2]$; $(0, -2)$, $x = 0$, $ZW = (-\infty; -2]$ c) $(0, 0)$, $x = 0$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$; $(1, 0)$, $x = 1$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$; $(-3, 0)$, $x = -3$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$ d) $(0, 0)$, $x = 0$, $ZW = (-\infty; 0]$; $(3, 0)$, $x = 3$, $ZW = (-\infty; 0]$; $(-1, 0)$, $x = -1$, $ZW = (-\infty; 0]$ 3. Druty są odległe od ziemi o 21 m.	1. a) $\langle 4; \infty \rangle$ b) $(-\infty; 4]$ c) $\langle -2; \infty \rangle$ d) $(-\infty; 2]$ 2. a) $(4, 0)$ b) $(-4, 0)$ c) $(3, 0)$ d) $(-3, 0)$ 3. a) $q = 3$ b) $q = 5$ c) $q = -2$ d) $q = -7$ 4. a) $p = 1$ b) $p = 3$ c) $p = -1$ d) $p = -4$ 5. C 6. a) $(0, 0)$, $ZW = (-\infty; 0]$, $(0, 2)$, $ZW = (-\infty; 2]$, $(0, -1)$, $ZW = (-\infty; -1]$ b) $(0, 0)$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$, $(2, 0)$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$, $(-3, 0)$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$ c) $(0, 0)$, $ZW = (-\infty; 0]$, $(0, 2)$, $ZW = (-\infty; 2]$, $(0, -2)$, $ZW = (-\infty; -2]$ d) $(0, 0)$, $ZW = \langle 0; \infty \rangle$, $(0, 3)$, $ZW = \langle 3; \infty \rangle$, $(0, -3)$, $ZW = \langle -3; \infty \rangle$
3 s. 45–48	2. a) Ramiona paraboli skierowane są do góry, a wierzchołek jest w punkcie $(2, -1)$, $X = R$, $ZW = \langle -1; \infty \rangle$. Najmniejsza wartość funkcji równa się -1 dla $x = 2$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle 2; \infty \rangle$, malejąca dla $x \in (-\infty; 2]$, oś symetrii $x = 2$. b) Ramiona paraboli skierowane są do góry, a wierzchołek jest w punkcie $(-2, 1)$, $X = R$, $ZW = \langle 1; \infty \rangle$. Najmniejsza wartość funkcji równa się 1 dla $x = -2$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle -2; \infty \rangle$, malejąca dla $x \in (-\infty; -2]$, oś symetrii $x = -2$. c) Ramiona paraboli skierowane są do góry, a wierzchołek jest w punkcie $(1, 3)$, $X = R$, $ZW = \langle 3; \infty \rangle$. Najmniejsza wartość funkcji równa się 3 dla $x = 1$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle 1; \infty \rangle$, malejąca dla $x \in (-\infty; 1]$, oś symetrii $x = 1$. 3. a) $y = -(x - 2)^2 + 1$ b) $y = -(x + 1)^2 + 3$ c) $y = -(x + 1)^2 - 1$	1. a) Ramiona paraboli skierowane są do góry, a wierzchołek jest w punkcie $(-2, -3)$, $X = R$, $ZW = \langle -3; \infty \rangle$. Wartość najmniejsza funkcji równa się -3 dla $x = -2$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in \langle -2; \infty \rangle$, malejąca dla $x \in (-\infty; -2]$, oś symetrii $x = -2$. b) Ramiona paraboli skierowane są w dół, a wierzchołek jest w punkcie $(1, 2)$, $X = R$, $ZW = (-\infty; 2]$. Wartość największa funkcji równa się 2 dla $x = 1$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in (-\infty; 1]$, malejąca dla $x \in \langle 1; \infty \rangle$, oś symetrii $x = 1$. c) Ramiona paraboli skierowane są w dół, a wierzchołek jest w punkcie $(3, -1)$, $X = R$, $ZW = (-\infty; -1]$. Wartość największa funkcji równa się -1 dla $x = 3$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in (-\infty; 3]$, malejąca dla $x \in \langle 3; \infty \rangle$, oś symetrii $x = 3$. 2. a) $(-2, 5)$, ramiona skierowane do góry b) $(6, -3)$, ramiona skierowane w dół c) $(8, 3)$, ramiona skierowane do góry d) $(-4, 6)$, ramiona skierowane w dół e) $(5, 4)$, ramiona skierowane w dół f) $(-1, -9)$, ramiona skierowane do góry 3. $y = (x + 3)^2 - 6$ 4. a) $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$ b) $y = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 3$ 5. Najdłuższa lina mostu ma 29 m.	1. D 4. B, C

4 s. 49–53	1. a) $a = 6, b = 1, c = 6$ b) $a = -1, b = 4, c = -8$ c) $a = -2, b = 0, c = 8$ d) $a = 9, b = 0, c = -14$ e) $a = -\frac{1}{2}, b = 12, c = 0$ f) $a = -0,9, b = 1,25, c = 0$ 2. a) $\Delta = 20$ b) $\Delta = 1$ c) $\Delta = 8$ d) $\Delta = -16$ e) $\Delta = 72$ f) $\Delta = 25$ 3. a) $(-\frac{1}{2}, 1)$ b) $(2, 7)$ c) $(1, \frac{1}{2})$ 4. a) $y = (x + 2)^2 - 1$, oś symetrii $x = -2$ b) $y = -(x - 3)^2 + 7$, oś symetrii $x = 3$ c) $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$, oś symetrii $x = -1$ 5. a) $y = x^2 + 8x + 14$ b) $y = -3x^2 + 6x + 1$ c) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$	1. a) $y = -2x^2 + 3x - 4$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ c) $y = -\frac{2}{3}x^2 - 5x$ 2. a) $\Delta = 56, (-1, -7)$ b) $\Delta = 12, (1, 1)$ c) $\Delta = -2, (\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ 3. a) $k: y = 2(x - 3)^2 - 1$ b) $f: y = -2(x + 2)^2 + 3$ 4. a) Do wanny napełniono 120 l wody. b) Po 2 minutach w wannie zostały 84 l wody, a po 4 minutach 8 l. c) Hydraulik rozpocznie naprawę w 5 minucie.	1. a) $\Delta = 1$ b) $\Delta = 17$ c) $\Delta = 12$ d) $\Delta = -8$ e) $\Delta = 1$ f) $\Delta = 1$ 2. a) $y = (x + 2)^2 - 1, (-2, -1)$ b) $y = -(x + 2)^2 + 5, (-2, 5)$ c) $y = 2(x + 2)^2 - 13, (-2, -13)$ d) $y = -3(x + 1)^2 + 5, (-1, 5)$ e) $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{2}, (1, -\frac{1}{2})$ f) $y = -(x - 3)^2 + 9, (3, 9)$ 3. a) $y = x^2 - 6x - 6$, $a + b + c = -11$ b) $y = 2x^2 + 16x + 24$, $a + b + c = 42$ c) $y = -x^2 - 2x + 1$, $a + b + c = -2$ d) $y = -2x^2 + 4x + 3$, $a + b + c = 5$ e) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$, $a + b + c = -3\frac{1}{2}$ f) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x + 1$, $a + b + c = -3\frac{1}{3}$ 4. B, C 5. a) Q b) R c) P
5 s. 54–57	1. a) $f(-1) = 2, f(-4) = 29$ b) $f(-1) = -3, f(-4) = -34,5$ c) $f(-1) = -4, f(-4) = 26$ 2. a) Najmniejsza wartość funkcji to -1, a największa to 3, b) Najmniejsza wartość funkcji to -2, a największa to 2. c) Najmniejsza wartość funkcji to -2, a największa to 1. 3. a) Najmniejsza wartość funkcji to 1, a największa to 17. b) Najmniejsza wartość funkcji to -7, a największa to 1. 4. a) Najmniejsza wartość funkcji to 1, a największa to 19. b) Najmniejsza wartość funkcji to -7, a największa to 5. 5. a) Największa wartość iloczynu to 144. b) Największa wartość iloczynu to 225. c) Największa wartość iloczynu to 2500.	1. a) $f(-2) = -26, f(3) = -16$ b) $f(-2) = 8, f(3) = 3$ c) $f(-2) = 3,5, f(3) = 3,5$ 2. Najmniejsza wartość iloczynu to $-6,25$. 3. Ogródek ma wymiary $7 \text{ m} \times 14 \text{ m}$. 4. Plac dla psa powinien mieć wymiary $5 \text{ m} \times 10 \text{ m}$.	1. a) $f(\frac{1}{2}) = 1, f(-\frac{1}{2}) = 3$ b) $f(\frac{1}{2}) = 0, f(-\frac{1}{2}) = -6$ c) $f(\frac{1}{2}) = -2\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2}$ 2. A, C 3. B, C 4. D
Powtórzenie rozdziału s. 60–61	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE 1. A, B 2. Jarek miał rację. 3. a) Ramiona paraboli skierowane są do góry, a wierzchołek jest w punkcie $(2, -3)$, $X = R$, $ZW = (-3; \infty)$. Najmniejsza wartość funkcji równa się -3 dla $x = 2$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in (2; \infty)$, malejąca dla $x \in (-\infty; 2)$, oś symetrii $x = 2$. b) Ramiona paraboli skierowane są w dół, a wierzchołek jest w punkcie $(-1, 4)$, $X = R$, $ZW = (-\infty; 4)$. Największa wartość funkcji równa się 4 dla $x = -1$. Funkcja jest rosnąca dla $x \in (-\infty; -1)$, malejąca dla $x \in (-1; \infty)$, oś symetrii $x = -1$. 4. a) tak b) tak c) tak 5. a) $y = -2(x - 1)^2 + 2, (1, 2)$ b) $y = 3(x - 3)^2 - 4, (3, -4)$ c) $y = -(x + 4)^2 + 1, (-4, 1)$ 6. $y = \frac{1}{3}(x - 2)^2 - 3, y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ 7. C		

Powtórzenie rozdziału s. 60–61	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ
	1. B 2. B 3. a) $y = 5(x - 3)^2 + 2$ b) $y = -2(x + 1)^2 - 3$ c) $y = -3(x + 4)^2 + 2$ d) $y = (x - 6)^2 - 4$ 4. a) h b) f c) g 5. B 6. $y = (x - 2)^2 - 4$, $y = x^2 - 4x$ 7. C

Rozdział III. Równania i nierówności kwadratowe

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 63–66	1. a) Równanie ma 2 rozwiązania. b) Równanie ma 1 rozwiązanie. c) Równanie nie ma rozwiązań. 2. a) $x = 1$ lub $x = 3$ b) $x = -1$ 4. a) $x = -6$ lub $x = 6$ b) $x = -\frac{5}{3}$ lub $x = \frac{5}{3}$ c) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$ 5. a) $x = 0$ lub $x = 7$ b) $x = 0$ lub $x = 1$ c) $x = 0$ lub $x = 2$ d) $x = 0$ lub $x = -3$ e) $x = 0$ lub $x = 2$ f) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{2}$	1. a) $x = -10$ lub $x = 10$ b) $x = -4$ lub $x = 4$ c) $x = 0$ lub $x = 5$ d) $x = -3$ lub $x = 3$ e) $x = -3$ lub $x = 2$ f) $x = 2$ 2. Obrus ma bok długości 150 cm.	1. a) $x = -4$ lub $x = 4$ b) $x = -2$ lub $x = 2$ c) $x = -7$ lub $x = 0$ d) $x = 0$ lub $x = \frac{2}{5}$ e) $x = -8$ lub $x = 0$ f) $x = -3$ lub $x = 0$ 2. A, B 3. D 4. a) Równanie jest sprzeczne. b) Równanie ma rozwiązanie. c) Równanie jest sprzeczne. 5. Ogródek ma wymiary $9 \text{ m} \times 18 \text{ m}$.
2 s. 67–69	1. a) $\Delta = 44$, równanie ma 2 rozwiązania b) $\Delta = -19$, równanie nie ma rozwiązań c) $\Delta = 0$, równanie ma 1 rozwiązanie 2. a) $x_0 = \frac{5}{2}$ b) $x_0 = -\frac{1}{3}$ c) $x_0 = -\frac{1}{2}$ 3. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ b) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ c) $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 2$ 4. a) miejsca zerowe: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ b) miejsca zerowe: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ c) miejsca zerowe: $x_1 = 2 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$	1. a) $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = 1$ b) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ c) Równanie nie ma rozwiązań. d) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ e) $x_0 = 4$ f) $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{6}$ 2. W turnieju wzięło udział 7 drużyn. 3. Zrząszcz ma zasięg o promieniu długości 10 m.	1. a) Równanie ma 1 rozwiązanie. b) Równanie nie ma rozwiązań. c) Równanie ma 2 rozwiązania. 2. a) $x = 2$ lub $x = 4$ b) $x = -1$ lub $x = 4$ c) $x = -3$ lub $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = 2$ e) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{4}$ f) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{2}$ 3. A, B, C 4. B 5. Trawnik ma wymiary $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$. 6. Podłoga ma wymiary $6 \text{ m} \times 8 \text{ m}$.

3 s. 70–73	1. a) $x = -4, x = -3$ b) $x = 5, x = -2$ c) $x = 1, x = 7$ d) $x = -8, x = 3$ e) $x = -\frac{1}{4}, x = \frac{1}{3}$ f) $x = -3, 5, x = -1, 2$ 2. a) $y = x^2 - 2x - 24$ b) $y = x^2 + 8x - 20$ c) $y = 5x^2 - 15x + 10$ d) $y = -2x^2 - 8x - 6$ e) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ f) $y = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 6$ 3. a) $y = (x + 2)(x - 1)$ b) $y = (x + 2)(x - 5)$ c) $y = 3(x + 3)(x - \frac{1}{3})$ d) $y = 2(x + 2)(x + \frac{1}{2})$ e) $y = -5(x - 2)(x + \frac{6}{5})$ f) $y = -3(x - 1)(x - \frac{1}{3})$ 4. a) Funkcja nie ma postaci iloczynowej. b) $y = 2(x - 2)^2$ c) $y = 2(x + 3)(x + 1)$	1. a) $y = (x + 2)(x + 1)$ b) $y = -(x - 1)(x + 3)$ c) Funkcja nie ma postaci iloczynowej. d) $y = -(x - 3)(x + 2)$ e) $y = \frac{1}{4}(x - 4)^2$ f) Funkcja nie ma postaci iloczynowej. 2. a) $y = x(x + 2)$ b) $y = (x - 1)(x - 3)$ c) $y = (x + 1)(x - 1)$ d) $y = x(x - 2)$ 3. f) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$ g) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10$ h) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 9x - \frac{77}{2}$	1. a) $x = -8$ lub $x = 4$ $y = x^2 + 4x - 32$ b) $x = 1$ lub $x = 3$ $y = 2x^2 - 8x + 6$ c) $x = -2$ lub $x = -\frac{1}{2}$ $y = -4x^2 - 10x - 4$ d) $x = -4$ lub $x = 4$ $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$ e) $x = -1, y = 3x^2 + 6x + 3$ f) $x = 3, y = -2x^2 + 12x - 18$ 2. a) $x = -1$ lub $x = 6,$ $y = (x - 6)(x + 1)$ b) $x = 1$ lub $x = 3,$ $y = 2(x - 3)(x - 1)$ c) $x = -2$ lub $x = 3,$ $y = -(x - 3)(x + 2)$ d) $x = 2, y = -(x - 2)^2$ e) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 2,$ $y = -2(x - 2)(x + \frac{1}{2})$ f) $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{1}{3},$ $y = -6(x + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{3})$ 3. C
4 s. 74–79	1. a) $W(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$, punkty przecięcia z osiami: $(-4, 0), (1, 0), (0, -4)$ b) $W(1, -4)$, punkty przecięcia z osiami: $(-1, 0), (3, 0), (0, -3)$ c) $W(2, 8)$, punkty przecięcia z osiami: $(6, 0), (-2, 0), (0, 6)$ 2. a) $W(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$, miejsca zerowe: $x_1 = 1, x_2 = 2,$ oś symetrii $x = \frac{3}{2}$ b) $W(-\frac{1}{2}, -\frac{49}{4})$, miejsca zerowe: $x_1 = -4, x_2 = 3,$ oś symetrii $x = -\frac{1}{2}$ c) $W(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{4})$, miejsca zerowe: $x_1 = -2, x_2 = -3,$ oś symetrii $x = -\frac{5}{2}$ d) $W(\frac{3}{2}, \frac{49}{4})$, miejsca zerowe: $x_1 = 5, x_2 = -2,$ oś symetrii $x = \frac{3}{2}$ e) $W(-\frac{7}{2}, \frac{25}{8})$, miejsca zerowe: $x_1 = -6, x_2 = -1,$ oś symetrii $x = -\frac{7}{2}$ f) $W(3, \frac{1}{4})$, miejsca zerowe: $x_1 = 2, x_2 = 4,$ oś symetrii $x = 3$	1. a) $(0, 6)$ b) $x_1 = -1, x_2 = 3$ c) $(1, 8)$ d) Punkt nie należy do paraboli. 3. a) $W(-\frac{1}{4}, \frac{25}{8})$, punkty przecięcia z osiami: $(1, 0), (-\frac{3}{2}, 0), (0, 3)$ b) $W(-6, -4)$, punkty przecięcia z osiami: $(-10, 0), (-2, 0), (0, 5)$ c) $W(1, -\frac{9}{2})$, punkty przecięcia z osiami: $(-2, 0), (4, 0), (0, -4)$ 4. a) Konstruktor uwzględnił 12 m szerokości rzeki. b) Maksymalna wysokość statków to 4 m.	1. a) $W(-1, 9), (-4, 0), (2, 0), (0, 8)$ b) $W(-1, -8), (-3, 0), (1, 0), (0, -6)$ c) $W(-1, 4\frac{1}{2}), (-4, 0), (2, 0), (0, 4)$ 2. A, B 3. a) $x = 1$ lub $x = 5, W(3, -4)$ b) $x = -2$ lub $x = 6, W(2, -8)$ c) $x = -3$ lub $x = -1, W(-2, 2)$ 4. B

6 s. 80–83	1. a) $x \in (-\infty; -1)$ lub $x \in (2; \infty)$ b) $x \in \langle -1; 2 \rangle$ 2. a) $x = 2$ b) $x \in \mathbb{R}$ 3. a) $x \in \langle -4; -3 \rangle$ b) $x \in (-1; 5)$ c) $x \in (-\infty; -6)$ lub $x \in \langle 0; \infty \rangle$ 4. a) $x \in (-\infty; -6)$ lub $x \in (6; \infty)$ b) $x \in \langle -8; 8 \rangle$ c) $x \in (-\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ 5. a) $x \in \langle 2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7} \rangle$ b) $x \in (-7; -2)$ c) $x \in \langle -\frac{1}{2}; 4 \rangle$ d) $x \in (-1; 6)$ e) $x \in (-6; -2)$ f) $x \in \langle -2; 4 \rangle$	1. a) Liczba spełnia nierówność. b) Liczba nie spełnia nierówności. c) Liczba nie spełnia nierówności. d) Liczba spełnia nierówność. 2. a) $x \in (-1; 4)$ b) $x \in \langle -1; 4 \rangle$ c) $x \in (-\infty; -1)$ lub $x \in (4; \infty)$ d) $x \in (-\infty; -1)$ lub $x \in \langle 4; \infty \rangle$ 3. a) $x \in (-2; 3)$ b) $x \in (-\infty; -4)$ lub $x \in \langle -2; \infty \rangle$ c) $x \in \langle -2; \frac{1}{2} \rangle$ d) $x \in (-\infty; -1)$ lub $x \in (-\frac{2}{3}; \infty)$ e) $x \in \langle 1; 2 \rangle$ f) $x \in (-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2})$ lub $x \in (\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \infty)$ 4. Najmniejsza wartość, dla której jest spełniona nierówność, to 4 m. 5. Długość jednego boku działki x wynosi od 40 m do 60 m, a drugi bok działki ma długość $(100 - x)$ m.	1. a) k, l b) l, m c) m 2. a) $x \in \langle 0; 2 \rangle$ b) $x \in (-\infty; -2)$ lub $x \in \langle 1; \infty \rangle$ c) $x \in (-\infty; -1)$ lub $x \in (3; \infty)$ 3. a) $x = -4$ lub $x = 6, x \in \langle -4; 6 \rangle$ b) $x = -3$ lub $x = \frac{1}{2}$ $x \in \langle -3; \frac{1}{2} \rangle$ c) $x = -8$ lub $x = -4$ $x \in (-\infty; -8)$ lub $x \in (-4; \infty)$ d) $x = -1$ lub $x = 3, x \in \langle -1; 3 \rangle$ e) $x = 1$ lub $x = 5, x \in (-\infty; 1)$ lub $x \in (5; \infty)$ f) $x = -9$ lub $x = 6$ $x \in (-\infty; -9)$ lub $x \in \langle 6; \infty \rangle$ 4. a) $x \in \langle -2; 2 \rangle$ b) $x \in (-\infty; -9)$ lub $x \in \langle 9; \infty \rangle$ c) $x \in (3; 5)$ d) $x \in \langle -4; 0 \rangle$ e) $x \in \langle -2; -1 \rangle$ f) $x \in (-\infty; 1)$ lub $x \in (3; \infty)$ 5. B, C 6. C
Powtórzenie rozdziału s. 84–85	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE 1. a) $x = -3$ lub $x = 3$ b) $x = -5$ lub $x = 5$ c) $x = 0$ lub $x = 5$ d) $x = 0$ lub $x = \frac{4}{3}$ e) $x = 1$ lub $x = 6$ f) $x = -1$ lub $x = \frac{4}{3}$ 2. B, C 3. postać kanoniczna: $y = 2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{49}{8}$, postać iloczynowa: $y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$ 4. a) $x \in (-\frac{4}{3}; \frac{4}{3})$ b) $x \in \langle -\frac{5}{3}; 0 \rangle$ c) $x \in (-\infty; \frac{3}{2})$ lub $x \in \langle 3; \infty \rangle$ 5. A, C 6. A, B 7. punkty przecięcia z osiami: $(-4, 0), (0, 0)$ 8. Szukane liczby to -12 i -7 lub 7 i 12. 9. Prostokąt ma boki długości 6 m i 12 m. SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ 1. C 2. A 3. Postać kanoniczna: $y = 2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{1}{8}$, postać iloczynowa: $y = 2(x - 1)(x - \frac{3}{2})$ 4. B 5. B, C 6. B 7. a) $x \in (-7; 7)$ b) $x \in (-\infty; 0)$ lub $x \in \langle 4; \infty \rangle$ c) $x \in \langle -2; \frac{1}{2} \rangle$ 8. A		

Rozdział IV. Wielokąty

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 87–91	1. a) 51° b) 15° c) 137° 2. a) trójkąt ostrokątny b) trójkąt rozwartokątny c) trójkąt prostokątny 3. a) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 35^\circ$ b) $\sphericalangle ABC = 42^\circ, \sphericalangle ACB = 96^\circ$ 4. a) $\alpha = \beta = 25^\circ$ b) $\alpha = \beta = 45^\circ$	1. $\alpha = 135^\circ$ 2. a) $\alpha = 50^\circ, \beta = 44^\circ$ b) $\alpha = 24^\circ, \beta = 130^\circ$ 3. a) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 90^\circ$ b) $\alpha = 20^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 100^\circ$ c) $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 105^\circ$ 4. $\sphericalangle AFB = 66^\circ \sphericalangle BCF = 46^\circ$ $\sphericalangle DFE = 92^\circ \sphericalangle AEF = 73^\circ$ $\sphericalangle CFD = 54^\circ \sphericalangle CDF = 64^\circ$	1. a) 103° b) 60° c) 36° 2. a) $x = 13, \alpha = 82^\circ$ b) $x = 5, \alpha = 60^\circ$ c) $\alpha = 94^\circ, \beta = 43^\circ$ 3. B, C

2 s. 92-95	3. 22,5 cm	1. 40°, 60°, 80° 2. $P = 24 \text{ cm}^2$	1. 30°, 60°, 90° 2. B 3. 7,5 cm
3 s. 96-99	2. tak, cecha BKB 3. tak, cecha KBK 4. a) nie b) nie c) tak	1. $\triangle ABF \equiv \triangle DEF$ $\triangle BCF \equiv \triangle CDF$ $\triangle ACF \equiv \triangle CFE$ $\triangle ADF \equiv \triangle BEF$ cecha BKB 2. Można zbudować 3 trójkąty. 3. a) 45°, 67,5°, 67,5° b) 30°, 75°, 75°	1. A, C 2. D 3. a) tak b) nie c) tak
4 s. 100-102	1. a) 13 cm b) $2\sqrt{13} \text{ dm}$ c) $3\sqrt{10} \text{ m}$ 2. a) 24 cm b) $(27 + 3\sqrt{15}) \text{ dm}$ c) $(15 + 3\sqrt{5}) \text{ m}$ 3. a) tak, $P = 54 \text{ cm}^2$ b) tak, $P = 9 \text{ m}^2$	1. a) $L = 70 \text{ cm}$, $P = 300 \text{ cm}^2$ b) $L = 17 \text{ dm}$, $P = 15 \text{ dm}^2$ c) $L = (12 + 4\sqrt{3}) \text{ cm}$, $P = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 3. a) Ścieżka ma długość 100 m. b) Droga skróci się o 40 m.	1. a) $b = 4\sqrt{2}$, $P = 14\sqrt{2}$ b) $c = 41$, $P = 180$ c) $a = \sqrt{7}$, $P = 3,5\sqrt{7}$ 2. B, C 3. a) tak b) nie c) tak d) nie e) tak f) tak 4. nie
5 s. 103-105	1. a) 10 b) 13 c) $5\sqrt{2}$ 2. a) 5 b) $5\sqrt{5}$ c) $\sqrt{53}$ 3. $P = 14,5$	1. a) CD b) AB 2. tak 3. 10	1. a) $30\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{10}$ c) $3\sqrt{2}$ 2. A 3. tak 4. $(-2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-1, -2)$, $(-1, 2)$, $(1, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 1)$
6 s. 106-109	1. a) 12 cm^2 b) 60 cm^2 c) $8\sqrt{5} \text{ cm}^2$ 2. $ AB = 10 \text{ cm}$ 3. $h = 7\sqrt{3} \text{ cm}$, $P = 49\sqrt{3} \text{ cm}^2$	1. a) $P = 96$, $b = 12$ b) $P = 140$, $a = 20$ c) $P = 117$, $a = 19,5$; $c = 23,4$ 2. a) 18 cm b) 30 dm c) 6 m 3. a) $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $4\sqrt{3} \text{ dm}^2$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ m}^2$ 4. a) Ogrodnik potrzebuje 15 kg nawozu. b) Ogrodnik potrzebuje 5,125 kg nawozu. 5. a) $2,55 \text{ m}^2$ b) tak	1. a) 7 cm b) 8 cm 2. A, B, C 3. a) $\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $4\sqrt{3} \text{ dm}^2$ c) $\frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$ 4. C 5. $900\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 1559 \text{ cm}^2$
7 s. 110-114	1. $9\sqrt{2} \text{ cm}$ 2. a) $L = 28 \text{ cm}$, $P = 49 \text{ cm}^2$ b) $L = 8\sqrt{2} \text{ dm}$, $P = 8 \text{ dm}^2$ c) $L = 24\sqrt{2} \text{ m}$, $P = 72 \text{ m}^2$ 3. a) $4 + 4\sqrt{2}$ b) $6 + 3\sqrt{2}$ c) $12 + 12\sqrt{2}$ 4. a) $L = (6 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}$, $P = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $L = (\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ m}$, $P = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ m}^2$ c) $L = (9 + 9\sqrt{3}) \text{ cm}$, $P = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ 5. a) $L = (30 + 10\sqrt{3}) \text{ cm}$, $P = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $L = (15 + 15\sqrt{3}) \text{ cm}$, $P = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ c) $L = (12 + 12\sqrt{3}) \text{ cm}$, $P = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$	1. a) $L = (24 + 12\sqrt{2}) \text{ cm}$, $P = 72 \text{ cm}^2$ b) $L = (8 + 8\sqrt{2}) \text{ cm}$, $P = 16 \text{ cm}^2$ 2. a) $L = (9 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \text{ cm}$, $P = \frac{9 + 9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ b) $L = (12 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) \text{ cm}$, $P = (8 + 8\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 3. W pierwszym przypadku będzie potrzebował 98 m siatki, a w drugim 92,7 m.	1. a) $L = 3 + \sqrt{3}$, $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $L = 6 + 2\sqrt{3}$, $P = 2\sqrt{3}$ c) $L = 3 + 3\sqrt{3}$, $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2. A, C 3. B

8 s. 115–119	1. a) 16 cm^2 b) 150 cm^2 c) $67,5 \text{ cm}^2$ 2. a) $18\sqrt{2} \text{ cm}^2$ b) $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$ c) $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 3. a) $L = 4\sqrt{29} \text{ cm}$, $P = 20 \text{ cm}^2$ b) $L = 4\sqrt{13} \text{ cm}$, $P = 12 \text{ cm}^2$ c) $L = 10 \text{ cm}$, $P = 6 \text{ cm}^2$ 4. a) 24 cm^2 b) 18 cm^2	1. największy obwód: $KLMN$, największe pole: $EFGH$ 2. a) $L = 24 \text{ cm}$, $P = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $L = 16\sqrt{3} \text{ cm}$, $P = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 3. a) $161,5 \text{ cm}$ b) $3,41\%$ listwy	1. $4\sqrt{10} \text{ cm}$ 2. A 3. A, C 4. a) $7,2 \text{ kg}$ b) $16,2 \text{ kg}$
Powtórzenie rozdziału s. 120–121	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE		
	1. a) $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 55^\circ$ b) $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 45^\circ$ 2. Kąty: 30°, 60°, 90°, długości boków: 2 cm, $2\sqrt{3} \text{ cm}$, 4 cm 3. D 4. nie 5. 64 cm^2 6. B, C 7. 480 cm^2 8. a) 12 cm b) 5 cm c) 20 cm		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. A, B 2. A 3. D 4. a) KBK b) BKB c) BKB 5. A 6. $10 + 7\sqrt{2}$ 7. B 8. $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$		

Rozdział V. Podobieństwo

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 123–127	1. $F_1 \sim F_5$, $F_2 \sim F_6$, $F_3 \sim F_4$ 2. a) tak b) nie 3. a) 10 cm b) $9\frac{1}{3} \text{ cm}$ 4. a) $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$ b) $k_1 = \frac{3}{4}$, $k_2 = \frac{4}{3}$	2. a) tak, $k = \frac{5}{3}$ b) nie c) tak, $k = \frac{2}{3}$ 3. a) 96 cm b) 16 cm 4. a) $16 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ b) $24 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ 5. $450 \text{ m} \times 140 \text{ m} \times 15 \text{ m}$	1. a) nie b) tak 2. a) $k = \frac{3}{2}$, $x = 10 \text{ cm}$, $y = 9 \text{ cm}$ b) $k = \frac{3}{5}$, $x = 12 \text{ cm}$, $y = 12 \text{ cm}$ 3. $20 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ 4. $k = \frac{3}{2}$
2 s. 128–132	1. tak 2. a) tak, $k = 3$ b) nie c) nie d) tak, $k = 6$ 3. a), b) cecha BKB 4. cecha KKK	1. a) $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, cecha KKK, $x = 18$ b) $\triangle ABC \sim \triangle BDE$, cecha BKB, $x = 2,5$ 2. $k = \frac{4}{3}$, $L = 52 \text{ cm}$ 3. a) $2,5$ b) $1,6$ 4. b) $AE = 10 \text{ m}$, $CD = 6\frac{2}{3} \text{ m}$	1. a) nie b) tak, $k = \frac{2}{5}$ c) tak, $k = \frac{2}{3}$ d) tak, $k = \frac{1}{5}$ 2. b) 6 cm 3. C 4. 45 cm^2 5. A, C
3 s. 133–135	1. 100 razy większe 2. a) 25 b) $\frac{1}{4}$ c) 0,49	1. $18 \text{ cm} \times 27 \text{ cm}$ lub $12 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$ 2. 500 cm^2 3. $6 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$, $L = 30 \text{ cm}$ 4. a) 1:800 b) 576 m^2 c) 10 cm^2 5. a) $24 \text{ cm} \times 28 \text{ cm}$ b) o 672 cm^2	1. 10 cm 2. a) $x = 1,2 \text{ cm}$; $y = 1,6 \text{ cm}$; $z = 2,4 \text{ cm}$ b) 1:1500 3. a) 1:2 b) 88 cm^2

Powtórzenie rozdziału s. 138-139	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
	1. A, C 2. a) tak, $k = 1,5$ b) nie c) tak, $k = 1,2$ 3. 12,5 cm, 12,5 cm, 10 cm 4. a) Brat Marka ma 1,6 m wzrostu. b) Cień siostry ma 3 m długości. 5. Do wykonania latawca będzie potrzebne 1200 cm^2 materiału. 6. a) 8 cm^2 b) 32 cm^2
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ
	1. $x = 7, y = 10$ 2. $AB = 20 \text{ cm}, BC = 12,5 \text{ cm}, EH = 20 \text{ cm}$ 3. C 4. A 5. a) $k = 4$ b) $k = \frac{5}{2}$ 6. A, C 7. D

Rozdział VI. Trygonometria

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 141-143	1. a) $\sin \alpha = 0,6; \cos \alpha = 0,8;$ $\text{tg } \alpha = 0,75$ b) $\sin \alpha = \frac{8}{17}, \cos \alpha = \frac{15}{17},$ $\text{tg } \alpha = \frac{8}{15}$ c) $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13},$ $\text{tg } \alpha = \frac{5}{12}$ 2. $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{tg } 45^\circ = 1$ 3. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$ $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$	1. $AC = 15$ a) $\sin \alpha = \frac{8}{17}, \cos \alpha = \frac{15}{17}, \text{tg } \alpha = \frac{8}{15}$ b) $\sin \beta = \frac{15}{17}, \cos \beta = \frac{8}{17}, \text{tg } \beta = \frac{15}{8}$ 2. $\alpha < \beta$ a) $\sin \alpha = 0,6; \cos \alpha = 0,8;$ $\text{tg } \alpha = 0,75; \sin \beta = 0,8;$ $\cos \beta = 0,6; \text{tg } \beta = \frac{4}{3}$ b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}, \cos \alpha = \frac{5}{6},$ $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}, \sin \beta = \frac{5}{6},$ $\cos \beta = \frac{\sqrt{11}}{6}, \text{tg } \beta = \frac{5\sqrt{11}}{11}$ c) $\sin \alpha = 0,28; \cos \alpha = 0,96;$ $\text{tg } \alpha = \frac{7}{24}, \sin \beta = 0,96;$ $\cos \beta = 0,28; \text{tg } \beta = 3\frac{3}{7}$ 3. $\sin \alpha = 0,6; \cos \alpha = 0,8;$ $\text{tg } \alpha = 0,75$ 4. $\alpha < \beta$ a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},$ $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}, \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$ $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{tg } \beta = 2$ b) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{109}}{109}, \cos \alpha = \frac{10\sqrt{109}}{109},$ $\text{tg } \alpha = 0,3;$ $\sin \beta = \frac{10\sqrt{109}}{109}, \cos \beta = \frac{3\sqrt{109}}{109},$ $\text{tg } \beta = 3\frac{1}{3}$	1. $\alpha < \beta$ a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10},$ $\text{tg } \alpha = \frac{1}{3}, \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10},$ $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{tg } \beta = 3$ b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7},$ $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \beta = \frac{2\sqrt{7}}{7},$ $\cos \beta = \frac{\sqrt{21}}{7}, \text{tg } \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},$ $\text{tg } \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3},$ $\cos \beta = \frac{2}{3}, \text{tg } \beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 2. A, C 3. D 4. $\alpha < \beta$ a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},$ $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}, \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$ $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{tg } \beta = 2$ b) $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3},$ $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}, \sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3},$ $\cos \beta = \frac{1}{3}, \text{tg } \beta = 2\sqrt{2}$
2 s. 144-146	1.2 a) $\alpha \approx 35^\circ$ b) $\beta \approx 36^\circ$ c) $\gamma \approx 12^\circ$ 2. a) $26^\circ, 64^\circ$ b) $21^\circ, 69^\circ$ 3. a) 0,9563 b) 0,3420 c) 0,3746	1. $\alpha \approx 29^\circ, \beta \approx 51^\circ$ 2. $71^\circ, 109^\circ$ 3. $62^\circ, 118^\circ$ 4. a) 56° b) 45° c) 27° 5. Dekarz nie ustawił drabiny prawidłowo.	1. B 2. A, C 3. C 4. a) 4 b) 2,7

3 s. 147–149	1. a) 23,1 m b) 55,5 m 2. a) 141 m b) 154 m 3. a) 9,0 cm; 12,0 cm b) 5,8 cm; 9,9 cm	1. 34,7 m 2. $AB \approx 44,31$ m lub $AB \approx 10,75$ m 3. Drabina sięgnie na wysokość 22,37 m. Strażacy wejdą na 7 piętro.	1. B, C 2. a) 9 cm, 12 cm b) 15 cm, 36 cm 3. ok. 36 m 4. a) 1162 m² b) 2450,5 m²
5 s. 152–155	1. a) tak b) tak c) tak 2. a) $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha = 0,8$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$ b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ 3. $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{7}{8}$ 4. 1,1503 5. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ b) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{1}{4}$	1. a) $\cos \alpha = 0,6$; $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}$ b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ 2. a) 1 b) 1 3. a) Rampa ma długość 325 cm. b) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\cos \alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$	1. a) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}$ c) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$ 2. B, C 3. a) 1 b) 0,25
6 s. 156–159	1. a) 28 cm² b) 9 m² c) $\frac{35\sqrt{2}}{2}$ dm² 2. a) 11 cm² b) 27 cm² 3. a) 54 m² b) 30 dm² 4. 12 m²	1. a) 30 cm² b) 17 cm² 2. a) 49 cm² b) 80 dm² 3. a) 32 cm² b) $(8 + 4\sqrt{2})$ cm² 4. Stolarz zużyje 11,2 l lakieru.	1. $16\sqrt{3}$ cm² 2. 81 cm² 3. A, B, C 4. jaśniejszą – 21 m², ciemniejszą – 32 m² 5. a) 65,0 m² kostki b) 53,0 m² kostki
Powtórzenie rozdziału s. 160–161	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE		
	1. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 2. $\alpha < \beta$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = 2$ 3. $x = 3\sqrt{3} - 3$, $y = 6$ 4. 61,28 m 5. A 6. A 7. a) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$, b) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$ c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ 8. a) 1 b) 0 9. 7,5 cm²		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. A 2. A, B 3. a) $\alpha \approx 86^\circ$ b) $\alpha \approx 41^\circ$ c) $\alpha \approx 6^\circ$ 4. a) $\frac{7}{12}$ b) 1,5 c) 1 5. C 6. Michał stoi ok. 227 m od podstawy komina. 7. D 8. $L = (8\frac{8}{9} + \frac{32\sqrt{5}}{9})$ cm 9. $4\sqrt{5}$ cm² 10. B		

Rozdział VII. Okręgi i wielokąty

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 163–166	1. a) $r = 20$ cm, $d = 40$ cm, tak b) $r = 1,75$ cm, $d = 3,5$ cm, nie c) $r = 3$ cm, $d = 6$ cm, nie 2. a) 16π cm² b) 625π cm² c) 36π dm² 3. a) 8π cm b) 10π dm c) 20π cm	1. 10 cm 2. a) 10π cm, 25π cm² b) 13π cm, $42,25\pi$ cm² c) $4\pi\sqrt{2}$ cm, 8π cm² 3. 34 m² 4. a) 14,13 cm b) 9,42 cm c) 18,84 cm 5. a) nie b) 2779 cm²	1. a) 23 cm, 19 cm² b) 49 cm, 82 cm² c) 39 cm, 33 cm² 2. A, B, C 3. A, C 4. A, B, C
2 s. 167–170	1. a) 180° b) 60° c) 80° d) 240° 2. a) 4π cm b) 6π dm c) 18π m 3. a) 12π cm² b) π cm² c) 24π cm² 4. a) 21 cm² b) 3 cm² c) 66 cm²	1. a) 21 cm b) 5 cm 2. a) 108° b) 50° 3. a) $n = 8$, $P \approx 88$ cm² b) $n = 6$, $P \approx 118$ cm² c) $n = 5$, $P \approx 141$ cm² 4. Firma musi kupić ok. 26 m² kostki.	1. A 2. a) $\widehat{AB} = 3\pi$ cm, $\widehat{BC} = 2\pi$ cm b) $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm c) $(9\pi - 18)$ cm², $(6\pi - 9\sqrt{3})$ cm² 4. D
3 s. 171–174	1. a) $\alpha = 50^\circ$ b) $\alpha = 110^\circ$ c) $\alpha = 30^\circ$ 3. a) $\alpha = \beta = 70^\circ$ b) $\alpha = 54^\circ$, $\beta = 27^\circ$ c) $\alpha = \beta = 24^\circ$	1. a) $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 36^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$ c) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 22,5^\circ$ 2. a) $\sphericalangle APC = 60^\circ$ b) $\sphericalangle APQ = 15^\circ$ 3. a) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = \gamma = 50^\circ$ b) $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 40^\circ$ c) $\alpha = \beta = 75^\circ$, $\gamma = 15^\circ$ 4. 40 cm, $40\sqrt{3}$ cm	1. a) $\alpha = \beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = \gamma = 30^\circ$ c) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 240^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ 2. $\triangle APQ$: $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ $\triangle OQP$: $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ 3. A, B, C
4 s. 175–179	3. a) 5 cm b) $4\sqrt{2}$ cm c) $4\sqrt{5}$ cm 4. a) 10 cm b) $2\sqrt{34}$ cm c) $6\sqrt{5}$ cm 5. a) 0 b) 1 c) 2	1. a) tak b) Okrąg O_1 będzie styczny do prostej k. c) o 4 jednostki lub o 8 jednostek w prawo 2. a) 3 m² b) 7 m²	1. a) 16π cm b) 18π cm 2. 10 cm 3. B 4. a) 3 b) 10 c) 15
5 s. 180–184	2. $r = 2$ cm 3. a) $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 115^\circ$, $\gamma = 50^\circ$ b) $\alpha = 108^\circ$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 18^\circ$ 5. a) 1 cm b) 3 cm c) 3 cm	1. a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 15^\circ$ b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $\gamma = 25^\circ$ 2. a) $\triangle ABO$: $20^\circ, 45^\circ, 115^\circ$ $\triangle BCO$: $25^\circ, 45^\circ, 110^\circ$ $\triangle ACO$: $20^\circ, 25^\circ, 135^\circ$ b) $\triangle ABO$: $22,5^\circ; 30^\circ; 127,5^\circ$ $\triangle BCO$: $22,5^\circ; 37,5^\circ; 120^\circ$ $\triangle ACO$: $30^\circ; 37,5^\circ; 112,5^\circ$ 3. tak	1. a) $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 42,5^\circ$, $\delta = 47,5^\circ$ b) $\alpha = 22^\circ$, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 68^\circ$, $\delta = 48^\circ$ 2. a) $130^\circ, 110^\circ, 120^\circ$ b) $144^\circ, 76^\circ, 140^\circ$ 3. $\triangle AOR$, $\triangle BOR$: $22,5^\circ; 67,5^\circ$; 90°; $\triangle COP$, $\triangle COQ$: $45^\circ; 67,5^\circ$; $67,5^\circ$; $\triangle BOP$, $\triangle AOQ$: $22,5^\circ$; $45^\circ; 112,5^\circ$
6 s. 185–188	1. $R = 2,5$ cm 4. a) nie b) tak c) nie	1. a) $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 15^\circ$ b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 130^\circ$ c) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 140^\circ$ 2. a) na zewnątrz trójkąta b) na przeciwprostokątnej c) wewnątrz trójkąta 3. a) 10π cm b) 15π cm c) 13π cm 4. tak	1. $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ$ lub $25^\circ, 25^\circ, 130^\circ$ 2. a) 100π cm² b) $156,25\pi$ cm² 3. D

7 s. 189–192	1. $2\sqrt{3}$ cm 2. $4\pi\sqrt{3}$ cm 3. 4π cm²	1. a) $L = 54$ cm, $P = 81\sqrt{3}$ cm² b) $L = 18$ cm, $P = 9\sqrt{3}$ cm² 2. 10π cm 3. 36π cm² 4. Ścinki stanowiły 40% powierzchni materiału. 5. a) tak b) nie c) tak	1. C 2. tak 3. a) $4,5\pi$ b) 4π 5. 6 cm
8 s. 193–195	1.1 trójkąt – 3 osie symetrii, kwadrat – 4, pięciokąt – 5, sześciokąt – 6, ośmiokąt – 8, dziewięciokąt – 9 1.2 Środek symetrii mają kwadrat, sześciokąt foremny i ośmiokąt foremny. 2. a) 120° b) 135° c) 144° 3. 12π cm²	1. a) $72\sqrt{3}$ cm² b) $\frac{81\sqrt{3}}{2}$ cm² 2. a) 72 cm b) 72 m	1. a) 6 b) 8 c) 12 2. $\triangle ABC, \triangle AFG: 25\frac{5}{7}^\circ; 25\frac{5}{7}^\circ; 128\frac{4}{7}^\circ$ $\triangle ACD, \triangle AFE: 25\frac{5}{7}^\circ; 51\frac{3}{7}^\circ; 102\frac{6}{7}^\circ$ $\triangle ADE: 25\frac{5}{7}^\circ; 77\frac{1}{7}^\circ; 77\frac{1}{7}^\circ$ 3. a) $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ b) $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$ c) $18^\circ, 18^\circ, 144^\circ$ d) $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$ 4. a) $(25\pi - 50)$ cm² b) $(25\pi - \frac{75\sqrt{3}}{4})$ cm² c) $(25\pi - \frac{75\sqrt{3}}{2})$ cm²
Powtórzenie rozdziału s. 196–197	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE		
	1. C 2. $L = 31$ cm, $P = 59$ cm² 3. 36° 4. a) $L = 5\pi$ cm, $P = \frac{75\pi}{2}$ cm² b) $L = \frac{3\pi}{2}$ dm, $P = \frac{27\pi}{2}$ dm² c) $L = 28\pi$ m, $P = 224\pi$ m² 5. $\sphericalangle BAC = 50^\circ, \sphericalangle ABC = 70^\circ, \sphericalangle ACB = 60^\circ$ 6. a) 6,5 cm b) $3\sqrt{3}$ cm 7. D 8. a) 5 boków b) 18 boków c) 24 boki		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. a) $l = 10\pi$ cm, $P = 25\pi$ cm² b) $l = 20\pi\sqrt{2}$ cm, $P = 200\pi$ cm² 2. A 3. A 4. $\frac{7\pi}{2}$ cm² 5. a) 65° b) 24° 6. $\sphericalangle CBO = \sphericalangle BCO = \sphericalangle BOC = 60^\circ$ 7. A, B 8. B 9. B		

Podręcznik *To się liczy!* dla klasy drugiej szkoły branżowej jest podzielony na dwie części. Pierwsza z nich składa się z siedmiu rozdziałów, w których ujęto wszystkie treści obowiązkowe, w tym lekcje i zadania branżowe poświęcone wykorzystaniu matematyki w praktyce. Druga część to zbiór dodatkowych zadań. Na końcu publikacji zamieszczono odpowiedzi do wybranych ćwiczeń i zadań z podręcznika.

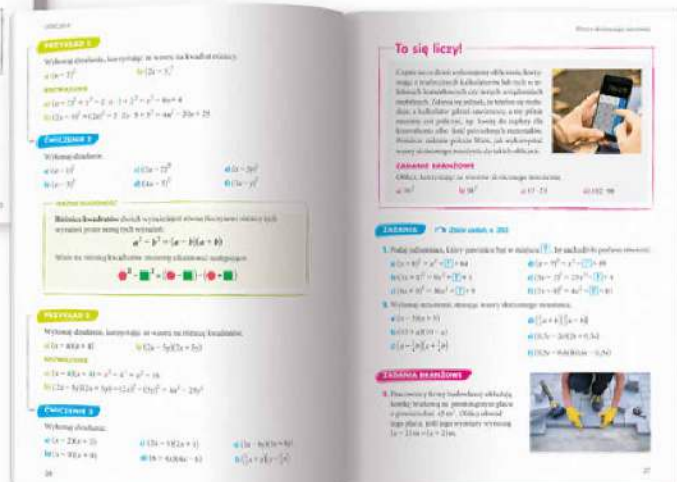


Zadania branżowe

W poszczególnych lekcjach znajdują się zadania branżowe, które pomagają ćwiczyć umiejętności matematyczne na przykładach powiązanych z wybranymi zawodami.

Zagadnienia matematyczne krok po kroku

W *To się liczy!* umiejętności matematyczne przedstawiane są przez przykłady rozwiązane krok po kroku. Dzięki temu uczniowie mogą samodzielnie przechodzić od treści zadania do jego rozwiązania.



Matematyka w praktyce

W podręczniku zamieszczono lekcje branżowe dotyczące takich zagadnień, jak obliczanie podatku czy zyski w firmie, z którymi absolwenci szkoły branżowej mogą się spotkać w życiu zawodowym. Pojęcia omawiane w tych lekcjach są wyjaśnione prostym językiem i dodatkowo obudowane przykładami, tak żeby pokazać zastosowanie matematyki w praktyce.

