Karolina Wej, Wojciech Babiański

To się liczy!

Podręcznik do matematyki dla branżowej szkoły pierwszego stopnia

DLA ABSOLWENTÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

KLASA PIERWSZA

nowa era

Droga Nowa Ero,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!!!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regularne książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę (o ironio), w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

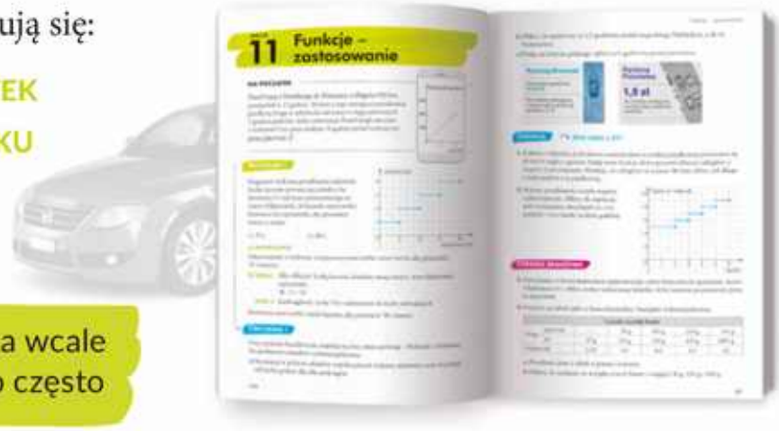
Kilka słów o podręczniku

Dlaczego *To się liczy!*?

Bo z liczbami i liczeniem spotykacie się każdego dnia! Widzicie je w wielu miejscach: na zegarku, kiedy się budzicie, na autobusie, gdy czekacie na przystanku. Podobnie jak liczby, proste rachunki również towarzyszą Wam na co dzień. Na przykład podczas zakupów, kiedy obliczacie w pamięci, ile za nie zapłacicie. Dlatego warto umieć liczyć!

W podręczniku znajdziecie…

1. **Lekcje matematyczne,** w których znajdują się:
   - Ćwiczenia wprowadzające **NA POCZĄTEK**
   - **PRZYKŁADY** rozwiązane **KROK PO KROKU**
   - **ĆWICZENIA**
   - **ZADANIA** i **ZADANIA BRANŻOWE**



Przekonacie się, że matematyka wcale **nie jest taka trudna** i że bardzo często **będziecie jej potrzebować.**

2. **Lekcje branżowe,** które pokażą Wam praktyczne zastosowanie matematyki.
   - *Kalorie się liczy*
   - *Faktura VAT*
   - *Kredyt bez tajemnic*
   - *Co się liczy w firmie?*
   - *Krótko o centylu*

Odkryjecie, że matematyka **liczy się na co dzień.**

3. **Zbiór zadań,** który pozwoli Wam przećwiczyć umiejętności matematyczne zdobyte na lekcji. Dodatkowo w tej części znajdziecie **odpowiedzi** do ćwiczeń z podręcznika i zadań ze zbioru.

Zobaczycie, że umiejętności matematyczne mają **ciekawe,** a nawet **zaskakujące zastosowanie.**

Spis treści

Rozdział I. Liczby rzeczywiste

LEKCJA 1. Liczby naturalne ... 9
LEKCJA 2. Liczby całkowite ... 12
LEKCJA 3. Liczby wymierne ... 15
LEKCJA 4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej ... 20
LEKCJA 5. Kalorie się liczy ... 24
LEKCJA 6. Przybliżenia ... 26
Powtórzenie rozdziału ... 30

Rozdział II. Potęgi i pierwiastki

LEKCJA 1. Potęga o wykładniku naturalnym ... 33
LEKCJA 2. Potęga o wykładniku całkowitym ... 37
LEKCJA 3. Pierwiastek kwadratowy ... 41
LEKCJA 4. Pierwiastki wyższych stopni ... 44
Powtórzenie rozdziału ... 48

Rozdział III. Procenty i ich zastosowanie

LEKCJA 1. Co to jest procent? ... 51
LEKCJA 2. Faktura VAT ... 56
LEKCJA 3. Lokaty ... 58
LEKCJA 4. Kredyt bez tajemnic ... 62
Powtórzenie rozdziału ... 64

Rozdział IV. Równania i nierówności

LEKCJA 1. Równania ... 67
LEKCJA 2. Równania – zastosowanie ... 71
LEKCJA 3. Oś liczbowa i przedziały liczbowe ... 74
LEKCJA 4. Nierówności ... 80
LEKCJA 5. Nierówności – zastosowanie ... 84
Powtórzenie rozdziału ... 87

Rozdział V. Układy równań liniowych

LEKCJA 1. Co to jest układ równań? ... 90
LEKCJA 2. Metoda podstawiania ... 94
LEKCJA 3. Metoda przeciwnych współczynników ... 98
LEKCJA 4. Układy równań – zastosowanie ... 102
Powtórzenie rozdziału ... 105

Rozdział VI. Funkcje

LEKCJA 1. Pojęcie funkcji i sposoby jej opisu ... 108
LEKCJA 2. Obliczanie wartości funkcji ... 112
LEKCJA 3. Układ współrzędnych ... 115
LEKCJA 4. Wykres funkcji ... 118
LEKCJA 5. Miejsce zerowe funkcji ... 124
LEKCJA 6. Monotoniczność funkcji ... 126
LEKCJA 7. Odczytywanie własności funkcji z wykresu ... 131
LEKCJA 8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi *OY* ... 136
LEKCJA 9. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi *OX* ... 139
LEKCJA 10. Symetria wykresu względem osi *OX* lub *OY* ... 142
LEKCJA 11. Funkcje – zastosowanie ... 146
Powtórzenie rozdziału ... 148

Rozdział VII. Funkcja liniowa

LEKCJA 1. Wykres funkcji liniowej ... 151
LEKCJA 2. Punkty przecięcia prostej z osiami *OX* i *OY* ... 156
LEKCJA 3. Monotoniczność funkcji liniowej ... 159
LEKCJA 4. Współczynnik kierunkowy prostej ... 161
LEKCJA 5. Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej ... 164
LEKCJA 6. Interpretacja geometryczna układów równań liniowych ... 168
LEKCJA 7. Co się liczy w firmie? ... 174
Powtórzenie rozdziału ... 176

Rozdział VIII. Statystyka

LEKCJA 1. Średnia arytmetyczna ... 179
LEKCJA 2. Średnia ważona ... 183
LEKCJA 3. Mediana i dominanta ... 186
LEKCJA 4. Krótko o centylu ... 190
Powtórzenie rozdziału ... 192

Zbiór zadań

Dodatkowe zadania do wszystkich lekcji ... 194

Odpowiedzi

... 223

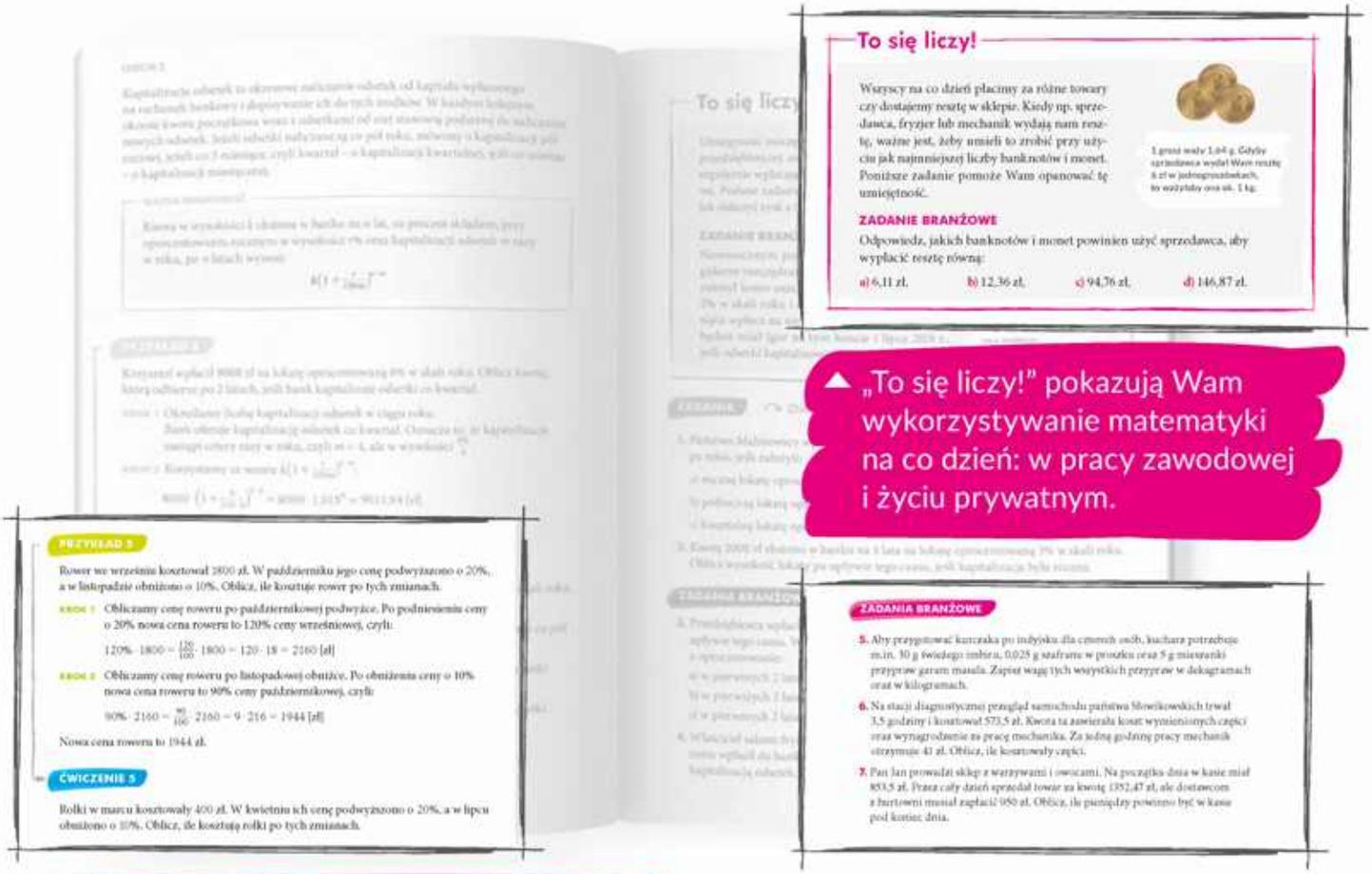
Szanuj swój podręcznik – zadbaj o to, żeby za rok wyglądał tak jak teraz.
Nie pisz w nim i nie rysuj, nie wykonuj zadań pisemnych, nie wpisuj brakujących treści.

To się po prostu liczy!

Macie już pomysł na Waszą przyszłość, dlatego chcecie zdobyć konkretny zawód. Wielu z Was myśli: po co mi matematyka, przecież chcę być fryzjerką, kucharzem, mechanikiem. Ten podręcznik pokaże Wam, że umiejętności matematyczne są potrzebne, żeby poradzić sobie z różnymi, codziennymi sytuacjami – także zawodowymi.

Aby ukończyć szkołę i zdobyć wymarzony zawód, musicie uzyskać pozytywne oceny ze wszystkich przedmiotów ogólnokształcących, w tym z matematyki, oraz zdać egzamin potwierdzający kwalifikacje zawodowe. Składa się on z części pisemnej i części praktycznej. W każdej z nich znajdują się zadania nawiązujące do zawodu, a jednocześnie sprawdzające różne umiejętności matematyczne.

PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIE MATEMATYKI



To się liczy!

Wszyscy na co dzień płacimy za różne towary czy dostajemy resztę w sklepie. Kiedy np. sprzedawca, fryzjer lub mechanik wydają nam resztę, ważne jest, żeby umieli to zrobić przy użyciu jak najmniejszej liczby banknotów i monet. Poniższe zadanie pomoże Wam opanować tę umiejętność.

1 grosz waży 1,64 g. Gdyby sprzedawca wydał Wam resztę 6 zł w jednogroszówkach, to ważyłaby ona ok. 1 kg.

ZADANIE BRANŻOWE

Odpowiedz, jakich banknotów i monet powinien użyć sprzedawca, aby wypłacić resztę równą:

a) 6,11 zł, b) 12,36 zł, c) 94,76 zł, d) 146,87 zł.

PRZYKŁAD 5

Rower we wrześniu kosztował 2800 zł. W październiku jego cenę podwyższono o 20%, a w listopadzie obniżono o 10%. Oblicz, ile kosztuje rower po tych zmianach.

KROK 1 Obliczamy cenę roweru po październikowej podwyżce. Po podniesieniu ceny o 20% nowa cena roweru to 120% ceny wrześniowej, czyli:

$120\% \cdot 1800 = \frac{120}{100} \cdot 1800 = 120 \cdot 18 = 2160$ [zł]

KROK 2 Obliczamy cenę roweru po listopadowej obniżce. Po obniżeniu ceny o 10% nowa cena roweru to 90% ceny październikowej, czyli:

$90\% \cdot 2160 = \frac{90}{100} \cdot 2160 = 9 \cdot 216 = 1944$ [zł]

Nowa cena roweru to 1944 zł.

ĆWICZENIE 5

Rolki w marcu kosztowały 400 zł. W kwietniu ich cenę podwyższono o 20%, a w lipcu obniżono o 10%. Oblicz, ile kosztują rolki po tych zmianach.

ZADANIA BRANŻOWE

5. Aby przygotować kurczaka po indyjsku dla czterech osób, kucharz potrzebuje m.in. 30 g świeżego imbiru, 0,025 g szafranu w proszku oraz 5 g mieszanki przypraw garam masala. Zapisz wagę tych wszystkich przypraw w dekagramach oraz w kilogramach.
6. Na stacji diagnostycznej przegląd samochodu państwa Słowikowskich trwał 3,5 godziny i kosztował 573,5 zł. Kwota ta zawierała koszt wymienionych części oraz wynagrodzenie za pracę mechanika. Za jedną godzinę pracy mechanik otrzymuje 41 zł. Oblicz, ile kosztowały części.
7. Pan Jan prowadzi sklep z warzywami i owocami. Na początku dnia w kasie miał 853,5 zł. Przez cały dzień sprzedał towar za kwotę 1352,47 zł, ale dostawcom z hurtowni musiał zapłacić 950 zł. Oblicz, ile pieniędzy powinno być w kasie pod koniec dnia.

▲ „To się liczy!" pokazują Wam wykorzystywanie matematyki na co dzień: w pracy zawodowej i życiu prywatnym.

▲ Przykłady są opracowane krok po kroku, dzięki czemu rozwiążecie każde ćwiczenie.

▲ Zadania branżowe nawiązują do praktycznego zastosowania matematyki w różnych zawodach.

POZNAJ PODRĘCZNIK *TO SIĘ LICZY!*

ZADANIA

1. **Na początek** to ćwiczenia nawiązujące do sytuacji z życia codziennego. Sprawdź w drugim rozdziale podręcznika, czy takie ćwiczenia są na początku każdej lekcji.

NA POCZĄTEK

Pracownicy fabryki mają spakować 243 żarówki. Do każdego pudełka wkładają po trzy żarówki. Czy 80 pudełek wystarczy, żeby spakować wszystkie żarówki?

2. Otwórz podręcznik na stronie 33, a następnie na stronie 69. Jakiego typu informacje znajdują się w ramkach oznaczonych jako **ważna wiadomość?**

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a:

wykładnik potęgi

podstawa potęgi

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Przyjmujemy również, że $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

3. Znajdź w podręczniku kilka **podpowiedzi**. Czemu one służą?

PODPOWIEDŹ

1 ha = 100 a
1 a = 100 m^2

4. Po każdym rozdziale podręcznika znajdują się **powtórzenia**. Odszukaj jedno przykładowe i opowiedz, z jakich części się składa.

Powtórzenie rozdziału
LICZBY RZECZYWISTE

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Sprawdź, czy:

a) liczba 201212 jest podzielna przez 9,

b) liczba 358965 jest podzielna przez 15.

ZADANIA BRANŻOWE

1. Jakie umiejętności matematyczne są, według Ciebie, ważne?
2. Opowiedz o dowolnej sytuacji, kiedy przydała Ci się matematyka.
3. W jakich zawodach wykorzystywana jest matematyka? Podaj kilka przykładów.

Rozdział I

Liczby rzeczywiste

TEMATY LEKCJI

1 Liczby naturalne s. 9–11

2 Liczby całkowite s. 12–14

3 Liczby wymierne s. 15–19

4 Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej s. 20–23

5 Kalorie się liczy s. 24–25

6 Przybliżenia s. 26–29

Powtórzenie rozdziału s. 30–31

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

LEKCJA

1 Liczby naturalne

NA POCZĄTEK

Pracownicy fabryki mają spakować 243 żarówki. Do każdego pudełka wkładają po trzy żarówki. Czy 80 pudełek wystarczy, żeby spakować wszystkie żarówki?

Liczby naturalne to liczby 0, 1, 2, 3, ... Zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem **N**. Na przykład, liczba naturalna 15 jest iloczynem dwóch liczb naturalnych: 3 i 5, zatem możemy powiedzieć, że:

- liczba 15 jest **podzielna** przez 3 i 5;
- liczby 3 i 5 są **dzielnikami** liczby 15.

Inaczej jest w przypadku liczby 0, która jest podzielna przez nieskończenie wiele liczb naturalnych różnych od 0 oraz ma nieskończenie wiele dzielników różnych od 0.

Zamiast powiedzieć, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 15, mówimy, że liczba 15 dzieli się przez 3 **bez reszty**. Możemy to zapisać w następujący sposób:

$$15 : 3 = 5 \text{ reszta } 0$$

Liczby naturalne dzielą się też z resztą. Na przykład, kiedy dzielimy 35 przez 3, otrzymujemy 11 i resztę 2:

$$35 : 3 = 11 \text{ reszta } 2$$

Oznacza to, że liczbę 35 możemy przedstawić w postaci:

$$35 = 3 \cdot 11 + 2$$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Liczba naturalna jest podzielna przez:
- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest: 0, 2, 4, 6 lub 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

PRZYKŁAD 1

Sprawdź, czy liczba 8 684 361 jest podzielna przez 9.

KROK 1 Obliczamy sumę cyfr liczby 8 684 361:
$8 + 6 + 8 + 4 + 3 + 6 + 1 = 36$

KROK 2 Stwierdzamy, że liczba 36 jest podzielna przez 9, ponieważ $36 = 9 \cdot 4$.

Liczba 8 684 361 jest podzielna przez 9, ponieważ suma jej cyfr dzieli się przez 9.

ĆWICZENIE 1

Sprawdź, czy:

a) liczba 1 234 567 jest podzielna przez 3,

b) liczba 6 751 413 jest podzielna przez 9.

PRZYKŁAD 2

Sprawdź, czy liczba 2685 jest podzielna przez 15.

KROK 1 Zauważamy, że $15 = 3 \cdot 5$. Zatem dana liczba jest podzielna przez 15, gdy dzieli się przez 5 i 3.

KROK 2 Stwierdzamy, że liczba 2685 jest podzielna przez 5, ponieważ jej ostatnią cyfrą jest 5.

KROK 3 Stwierdzamy, że liczba 2685 jest podzielna przez 3, ponieważ suma jej cyfr, czyli: $2 + 6 + 8 + 5 = 21$, też jest podzielna przez 3, bo $21 = 3 \cdot 7$.

Liczba 2685 jest podzielna przez 15, ponieważ jej dzielnikami są 3 i 5, a $15 = 3 \cdot 5$.

ĆWICZENIE 2

Sprawdź, czy:

a) liczba 627 714 jest podzielna przez 6,

b) liczba 119 325 jest podzielna przez 15.

PRZYKŁAD 3

Wypisz dzielniki liczby 15.

KROK 1 Korzystamy z informacji, że dzielnikami dowolnej liczby naturalnej dodatniej są 1 oraz ona sama. Zatem dzielniki liczby 15 to 1 i 15.

KROK 2 Określamy, że liczba 15 jest podzielna przez 5, gdyż jej ostatnią cyfrą jest 5.

KROK 3 Dzielnikiem liczby 15 jest 3, ponieważ suma cyfr liczby 15 ($1 + 5 = 6$) jest podzielna przez 3.

Dzielniki liczby 15 to: 1, 3, 5 i 15.

ĆWICZENIE 3

Wypisz dzielniki podanej liczby.

a) 8 b) 20 c) 30 d) 45

PRZYKŁAD 4

Podaj resztę z dzielenia liczby 86 przez 3.

ROZWIĄZANIE

$$\begin{array}{r} 28 \\ 86 : 3 \\ -\underline{6} \\ 26 \\ -\underline{24} \\ =2 \end{array}$$

Reszta z dzielenia 86 przez 3 wynosi 2.

ĆWICZENIE 4

Podaj resztę z dzielenia przez 3 podanej liczby.

a) 83 b) 87 c) 94 d) 98

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 195

1. Podaj, ile autokarów jest potrzebnych, aby przewieźć 160 uczniów i 8 nauczycieli, jeśli w jednym autokarze mieści się 38 pasażerów.

ZADANIA BRANŻOWE

2. Pan Paweł wydaje przyjęcie dla swoich kluczowych klientów. Firma organizująca bankiet zaproponowała dwie możliwości ustawienia stolików. W pierwszym przypadku przy każdym stole siedziałoby sześć osób, a w drugim – osiem. Pan Paweł chce, żeby przy każdym stole znajdowała się ta sama liczba gości. Określ, którą możliwość powinien wybrać, jeśli liczba uczestników bankietu jest równa:

a) 104, b) 108, c) 168.

3. W schronisku górskim są dwa pokoje 3-osobowe i osiem pokoi 5-osobowych. Nocleg w pokoju 5-osobowym kosztuje 15 zł od osoby, a w pokoju 3-osobowym – 25 zł od osoby. Oblicz najmniejszy i największy koszt noclegu, który został przedstawiony organizatorowi 31-osobowej wycieczki. Załóż, że w schronisku nie nocują inne osoby.

LEKCJA

2 Liczby całkowite

NA POCZĄTEK

Na początku września Michał miał na koncie bankowym 500 zł. Do połowy miesiąca trzy razy wpłacił na konto po 150 zł i dwa razy wypłacił po 350 zł. Czy jeśli wypłaci kolejne 350 zł, będzie miał debet?

Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: 1, 2, 3, 4, ... , liczby do nich przeciwne: –1, –2, –3, –4, ... oraz liczba 0. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy symbolem **Z**.

PRZYKŁAD 1

Oblicz.

a) $23 - (-17)$ b) $-24 - 37$ c) $-24 + 37$

ROZWIĄZANIE

a) $23 - (-17) = 23 + 17 = 40$

b) $-24 - 37 = -24 + (-37) = -61$

c) $-24 + 37 = 37 + (-24) = 37 - 24 = 13$

ĆWICZENIE 1

Oblicz.

a) $-68 + 86$ b) $-19 - (-33)$ c) $27 + (-96)$ d) $144 - (-249)$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wynik mnożenia lub dzielenia dwóch liczb dodatnich albo dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.

$$\left.\begin{array}{l} + \cdot + \\ + : + \\ - \cdot - \\ - : - \end{array}\right\} = +$$

Wynik mnożenia lub dzielenia dwóch liczb, z których jedna jest dodatnia a druga ujemna, jest liczbą ujemną.

$$\left.\begin{array}{l} + \cdot - \\ + : - \\ - \cdot + \\ - : + \end{array}\right\} = -$$

PRZYKŁAD 2

Oblicz.

a) $-7 \cdot 13$ b) $-24 : (-3)$

ROZWIĄZANIE

a) $-7 \cdot 13 = -91$ b) $-24 : (-3) = 8$

ĆWICZENIE 2

Oblicz.

a) $7 \cdot (-21)$ b) $-8 \cdot (-13)$ c) $-75 : 15$ d) $-60 : (-12)$

PRZYKŁAD 3

Oblicz.

a) $-3 \cdot 4 + 5$ b) $10 - 12 : (-2)$ c) $24 - 37 + 15$ d) $4 \cdot (-12) : 3$

a) **KROK 1** Wykonujemy mnożenie, ponieważ mnożenie ma pierwszeństwo przed dodawaniem:
$-3 \cdot 4 + 5 = -12 + 5$

KROK 2 Dodajemy liczby:
$-3 \cdot 4 + 5 = -12 + 5 = -7$

b) **KROK 1** Wykonujemy dzielenie, gdyż dzielenie ma pierwszeństwo przed odejmowaniem:
$10 - 12 : (-2) = 10 - (-6)$

KROK 2 Odejmujemy liczby:
$10 - 12 : (-2) = 10 - (-6) = 10 + 6 = 16$

ROZWIĄZANIE

c) Dodawanie i odejmowanie wykonujemy w kolejności ich występowania – od lewej do prawej.
$24 - 37 + 15 = -13 + 15 = 2$

d) Mnożenie i dzielenie wykonujemy w kolejności ich występowania – od lewej do prawej.
$4 \cdot (-12) : 3 = -48 : 3 = -16$

ĆWICZENIE 3

Oblicz.

a) $18 + (-2) \cdot 5$

b) $18 : (-3) - 8$

c) $144 - (-249) - 100$

d) $-60 : (-12) \cdot 3$

PRZYKŁAD 4

Oblicz.

$2 \cdot ((-2+5)-4)$

KROK 1 Wykonujemy działanie w wewnętrznym nawiasie:

$2 \cdot ((-2+5)-4) = 2 \cdot (3-4)$

KROK 2 Odejmujemy liczby umieszczone w nawiasie:

$2 \cdot ((-2+5)-4) = 2 \cdot (3-4) = 2 \cdot (-1)$

KROK 3 Mnożymy otrzymane liczby:

$2 \cdot ((-2+5)-4) = 2 \cdot (3-4) = 2 \cdot (-1) = -2$

ĆWICZENIE 4

Oblicz.

a) $(5-(-4+7)) \cdot 2$

b) $((5-(-4))+7) : 2$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 195

1. Bilet normalny do teatru kosztuje 59 zł, a grupowy – czyli dla grup powyżej 20 osób – 29 zł od osoby. Ile osób musi liczyć grupa, aby zaoszczędzić minimum 750 zł?

2. Magda i Tomek brali udział w konkursie matematycznym, który składał się z 15 zadań. Za każde poprawnie rozwiązane zadanie uczestnik otrzymywał 3 punkty, za błędnie rozwiązane odejmowano mu 2 punkty, a za brak rozwiązania otrzymywał 1 punkt. Oblicz, ile punktów zdobyli, jeżeli:

a) Magda rozwiązała wszystkie zadania, ale tylko dziewięć z nich poprawnie,

b) Tomek rozwiązał tylko siedem zadań, w tym trzy poprawnie.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Rolnik sprzedał do skupu kapustę zebraną z 4 ha uprawy. Otrzymał za nią 40 000 zł. Na uprawę 1 ha kapusty wydał 4950 zł. Oblicz, ile zarobił.

4. Właściciel pewnej firmy transportowej prowadzi statystyki dotyczące długości kursów wykonywanych przez wszystkich kierowców. Na podstawie tabeli oblicz, w którym miesiącu nastąpił największy przyrost liczby przejechanych kilometrów w stosunku do poprzedniego miesiąca.

Liczba kilometrów przejechanych w danym miesiącu					
Styczeń	Luty	Marzec	Kwiecień	Maj	Czerwiec
2 500 000	1 700 000	1 200 000	2 700 000	2 200 000	2 800 000

LEKCJA

3 Liczby wymierne

NA POCZĄTEK

Przeczytaj przepis na szarlotkę. Zastanów się, jaką część kostki masła powinien dodać cukiernik do ciasta, jeśli kostka waży 200 g.

Liczby wymierne to liczby, które możemy przedstawić w postaci ułamka zwykłego $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi i $b \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy symbolem **Q**. Pamiętaj, że każda liczba całkowita zawiera się w zbiorze liczb wymiernych.

Zwróć uwagę, że ułamki $\frac{10}{15}$ i $\frac{8}{12}$ to ta sama liczba. Aby się o tym przekonać, wystarczy skrócić oba ułamki:

$$\frac{10}{15} = \frac{{}^{1}\cancel{5} \cdot 2}{{}_{1}\cancel{5} \cdot 3} = \frac{2}{3} \quad \text{oraz} \quad \frac{8}{12} = \frac{{}^{1}\cancel{4} \cdot 2}{{}_{1}\cancel{4} \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Ułamek $\frac{2}{3}$ jest ułamkiem nieskracalnym.

PRZYKŁAD 1

Skróć ułamek $\frac{42}{54}$.

SPOSÓB I

KROK 1 Skracamy ułamek $\frac{42}{54}$ przez 2:

$$\frac{42}{54} = \frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot 21}{{}_{1}\cancel{2} \cdot 27}$$

KROK 2 Skracamy ułamek $\frac{21}{27}$ przez 3:

$$\frac{42}{54} = \frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot 21}{{}_{1}\cancel{2} \cdot 27} = \frac{{}^{1}\cancel{3} \cdot 7}{{}_{1}\cancel{3} \cdot 9} = \frac{7}{9}$$

SPOSÓB II

Ułamek $\frac{42}{54}$ możemy skrócić, dzieląc jego licznik i mianownik przez 6:

$$\frac{42}{54} = \frac{{}^{1}\cancel{6} \cdot 7}{{}_{1}\cancel{6} \cdot 9} = \frac{7}{9}$$

ĆWICZENIE 1

Skróć podany ułamek.

a) $\frac{18}{12}$ b) $\frac{32}{24}$ c) $\frac{48}{42}$ d) $-\frac{75}{100}$ e) $-\frac{144}{90}$

Czasami ułamek musimy rozszerzyć. Robimy tak, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach. W takiej sytuacji sprowadzamy te ułamki do wspólnego mianownika.

PRZYKŁAD 2

Oblicz.

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{12}-\frac{11}{18}$

a) **KROK 1** Sprowadzamy ułamki $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$ do wspólnego mianownika:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 1}{3\cdot 2}+\frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}$$

KROK 2 Dodajemy do siebie dwa ułamki o wspólnych mianownikach, czyli dodajemy liczniki tych ułamków, a mianownik pozostaje bez zmiany:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 1}{3\cdot 2}+\frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$$

KROK 3 Wartość licznika jest większa od wartości mianownika, zatem zamieniamy ułamek na liczbę mieszaną:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 1}{3\cdot 2}+\frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}=\frac{6+1}{6}=1\frac{1}{6}$$

PODPOWIEDŹ

ułamek niewłaściwy — liczba mieszana

$$\frac{23}{4}=5\frac{3}{4}$$

część całkowita — część ułamkowa

b) **ROZWIĄZANIE**

$$\frac{5}{12}-\frac{11}{18}=\frac{3\cdot 5}{3\cdot 12}-\frac{2\cdot 11}{2\cdot 18}=\frac{15}{36}-\frac{22}{36}=-\frac{7}{36}$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz.

a) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{7}+\frac{2}{9}$ e) $\frac{3}{8}-\frac{2}{3}$ g) $\frac{5}{6}+\frac{5}{8}$

b) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{5}-\frac{3}{13}$ h) $\frac{3}{10}-\frac{17}{35}$

PRZYKŁAD 3

Oblicz.

a) $5\frac{3}{4}+4\frac{2}{3}$ b) $-3\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}$

a) **KROK 1** Sprowadzamy części ułamkowe liczb $5\frac{3}{4}$ i $4\frac{2}{3}$ do wspólnego mianownika:

$$5\frac{3}{4}+4\frac{2}{3}=5\frac{3\cdot 3}{3\cdot 4}+4\frac{4\cdot 2}{4\cdot 3}=5\frac{9}{12}+4\frac{8}{12}$$

KROK 2 Dodajemy do siebie części całkowite i ułamkowe:

$$5\frac{3}{4}+4\frac{2}{3}=5\frac{3\cdot 3}{3\cdot 4}+4\frac{4\cdot 2}{4\cdot 3}=5\frac{9}{12}+4\frac{8}{12}=9\frac{17}{12}$$

KROK 3 W części ułamkowej wartość licznika jest większa od wartości mianownika, zatem wyciągamy całości z części ułamkowej:

$$5\frac{3}{4}+4\frac{2}{3}=5\frac{3\cdot 3}{3\cdot 4}+4\frac{4\cdot 2}{4\cdot 3}=5\frac{9}{12}+4\frac{8}{12}=9\frac{17}{12}=9\frac{12+5}{12}=10\frac{5}{12}$$

b) ROZWIĄZANIE

$$-3\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}=-3\frac{3}{4}+2\frac{2\cdot 1}{2\cdot 2}=-3\frac{3}{4}+2\frac{2}{4}=-\frac{15}{4}+\frac{10}{4}=-\frac{5}{4}=-1\frac{1}{4}$$

ĆWICZENIE 3

Oblicz.

a) $1\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}$ b) $-3\frac{2}{7}+7\frac{6}{7}$ c) $2\frac{3}{4}-3\frac{1}{2}$ d) $-1\frac{1}{4}-2\frac{2}{3}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Gdy chcemy pomnożyć dwa ułamki, mnożymy licznik pierwszego ułamka przez licznik drugiego oraz mianownik pierwszego ułamka przez mianownik drugiego:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \text{ gdzie } b\neq 0,\ d\neq 0$$

PRZYKŁAD 4

Oblicz.

a) $\frac{5}{8}\cdot\frac{16}{15}$ b) $1\frac{3}{4}\cdot 3\frac{5}{7}$

a) KROK 1 Skracamy ułamki tam, gdzie jest to możliwe. W omawianym przykładzie skracamy 5 i 15 przez 5 oraz 8 i 16 przez 8:

$$\frac{{}^{1}\cancel{5}}{{}_{1}\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{15}_{3}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}$$

KROK 2 Mnożymy ułamki – licznik przez licznik, mianownik przez mianownik:

$$\frac{{}^{1}\cancel{5}}{{}_{1}\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{15}_{3}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

b) ROZWIĄZANIE

$$1\frac{3}{4}\cdot 3\frac{5}{7}=\frac{{}^{1}\cancel{7}}{{}_{2}\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{26}^{13}}{\cancel{7}_{1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{1}=\frac{13}{2}=6\frac{1}{2}$$

ĆWICZENIE 4

Oblicz.

a) $\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$ b) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)$ c) $\frac{5}{13}\cdot 2\frac{9}{15}$ d) $-\frac{14}{15}\cdot\left(-1\frac{3}{7}\right)$

To się liczy!

Dla każdego z nas przydatną umiejętnością jest planowanie podróży, zarówno prywatnych, jak i służbowych. Dzięki dobrej organizacji zaoszczędzimy czas i na pewno dojedziemy w ustalone miejsce. Kiedy planujemy trasę, powinniśmy wziąć pod uwagę różne czynniki, m.in. czasy postojów, ograniczenia prędkości czy korki. Poniższe zadanie pomoże Wam opanować tę umiejętność.

Wiecie, jaką długość może mieć korek uliczny? 23 maja 2014 r. w Sao Paulo w Brazylii powstał korek o długości 344 km.

ZADANIE BRANŻOWE

Kierowca tira ma dostarczyć ładunek do miejscowości oddalonej o 440 km. Na trasie może jechać ze średnią prędkość 80 km/h. O której godzinie najpóźniej powinien wyjechać, aby dostarczyć towar na 7:45?

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Gdy chcemy podzielić przez siebie dwa ułamki, mnożymy pierwszy z nich przez odwrotność drugiego:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \text{ gdzie } b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$$

PRZYKŁAD 5

Oblicz.

a) $\frac{16}{25} : \left(-\frac{48}{5}\right)$ b) $3\frac{1}{33} : 2\frac{3}{11}$

a) **KROK 1** Dzielenie przez $-\frac{48}{5}$ zastępujemy mnożeniem przez odwrotność, czyli $-\frac{5}{48}$:

$$\frac{16}{25} : \left(-\frac{48}{5}\right) = \frac{16}{25} \cdot \left(-\frac{5}{48}\right)$$

KROK 2 Skracamy ułamki:

$$\frac{16}{25} : \left(-\frac{48}{5}\right) = \frac{\overset{1}{\cancel{16}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \cdot \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{48}}}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

KROK 3 Mnożymy:

$$\frac{16}{25} : \left(-\frac{48}{5}\right) = \frac{{}^{1}\cancel{16}}{{}_{5}\cancel{25}} \cdot \left(-\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{48}_{3}}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 3} = -\frac{1}{15}$$

b) ROZWIĄZANIE

$$3\frac{1}{33} : 2\frac{3}{11} = \frac{100}{33} : \frac{25}{11} = \frac{{}^{4}\cancel{100}}{{}_{3}\cancel{33}} \cdot \frac{\cancel{11}^{1}}{\cancel{25}_{1}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

ĆWICZENIE 5

Oblicz.

a) $\frac{8}{15} : \frac{4}{9}$ b) $-\frac{16}{27} : \frac{10}{9}$ c) $2\frac{12}{44} : 4\frac{6}{11}$ d) $-13\frac{21}{23} : \left(-\frac{32}{138}\right)$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 196

1. Pani Dominika co miesiąc płaci ratę kredytu za mieszkanie w wysokości 1200 zł. Jej miesięczna pensja to 3600 zł. Oblicz, jaką częścią wynagrodzenia pani Dominiki jest rata kredytu.

2. Wskazówka minutowa zegara w ciągu 60 minut wykonuje pełen obrót. Oblicz, w ciągu ilu minut wskazówka minutowa zegara wykona:

a) $\frac{1}{6}$ całego obrotu,

b) $\frac{3}{4}$ całego obrotu,

c) $\frac{7}{12}$ całego obrotu,

d) $1\frac{3}{5}$ całego obrotu.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Fryzjerka do farbowania włosów trzech klientek chciała użyć kremu koloryzującego z jednej tubki. Do przygotowania pierwszej farby zużyła $\frac{1}{6}$ zawartości tubki, a do drugiej wykorzystała $\frac{2}{5}$ tego, co zostało. Czy pozostałego w tubce kremu wystarczy, jeśli do przygotowania trzeciej farby potrzebna jest połowa zawartości opakowania? Uzasadnij swoją odpowiedź.

4. Tomek jest zatrudniony jako sprzedawca na pół etatu i wynagradzany według stawki 18 zł brutto na godzinę. W październiku 2018 r. przepracował 23 dni po 4 godziny dziennie. Ile brutto zarobiłby Tomek w październiku 2018 r., gdyby był zatrudniony na cały etat?

5. Właściciel warsztatu samochodowego zamówił 140 baniaków oleju silnikowego. $\frac{4}{7}$ wszystkich baniaków to baniaki z olejem do aut z silnikiem benzynowym, a pozostałe do aut z silnikiem diesla [czyt.: dizla]. Oblicz, ile zamówiono baniaków z olejem do silników benzynowych, a ile do diesla.

LEKCJA

4 Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

NA POCZĄTEK

Właściciel hurtowni z warzywami i owocami twierdzi, że ceny wszystkich owoców obniżył o $\frac{1}{3}$. Czy zrobił tak, jak powiedział?

Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000, …, czyli będących potęgami liczby 10, nazywamy **ułamkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby:

$$\frac{27}{100} = 0{,}27$$

$$2\frac{9}{10} = 2{,}9$$

sposób I sposób II

Zapis po prawej stronie każdej z powyższych równości nazywamy **postacią dziesiętną** lub **rozwinięciem dziesiętnym liczby**.

PRZYKŁAD 1

Zapisz podany ułamek w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{13}{4}$

a) **KROK 1** Rozszerzamy $\frac{7}{2}$ do ułamka o mianowniku, który jest potęgą liczby 10, w tym przypadku licznik i mianownik trzeba pomnożyć przez 5:

$$\frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{35}{10}$$

KROK 2 Zapisujemy ułamek w postaci dziesiętnej:

$$\frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{35}{10} = 3\frac{5}{10} = 3{,}5$$

b) **ROZWIĄZANIE**

$$\frac{13}{4} = \frac{25 \cdot 13}{25 \cdot 4} = \frac{325}{100} = 3\frac{25}{100} = 3{,}25$$

CIEKAWOSTKA

Tysięczne części sekundy mogą zmienić życie człowieka. Przekonał się o tym polski panczenista Zbigniew Bródka, który w 2014 r. pokonał rywala o 0,003 s, dzięki czemu zdobył złoty medal olimpijski.

ĆWICZENIE 1

Zapisz ułamek w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{15}{2}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{11}{4}$ d) $\frac{3}{8}$

Aby uzyskać rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej zapisanej w postaci ułamka zwykłego, możemy podzielić licznik przez mianownik. Na przykład:

- dla ułamka $\frac{17}{4}$ otrzymamy $\frac{17}{4} = 17 : 4 = 4{,}25$
- dla ułamka $\frac{1}{6}$ otrzymamy $\frac{1}{6} = 1 : 6 = 0{,}16666666...$

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{6}$ ma nieskończenie wiele cyfr 6 po przecinku. Takie nieskończone rozwinięcie zapisujemy następująco: $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$.

- dla ułamka $\frac{2}{7}$ otrzymamy $\frac{2}{7} = 2 : 7 = 0{,}285714\,285714\,285714...$

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{2}{7}$ ma nieskończenie wiele razy powtarzającą się grupę cyfr 285714 po przecinku. Takie nieskończone rozwinięcie zapisujemy: $\frac{2}{7} = 0{,}(285714)$.

PRZYKŁAD 2

Przedstaw ułamek za pomocą rozwinięcia dziesiętnego.

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{7}{11}$

KROK 1 Wykonujemy dzielenie pisemne:

a)

```
 0,8 3 3...
 5 : 6
-0
 5 0
-4 8
 = 2 0
 -1 8
  = 2 0
    ...
```

b)

```
 0,6 3 6 3...
 7 : 1 1
-0
 7 0
-6 6
 = 4 0
 -3 3
  = 7 0
  -6 6
   = 4 0
     ...
```

KROK 2 Zapisujemy rozwinięcie dziesiętne:

a) $\frac{5}{6} = 0{,}833... = 0{,}8(3)$ b) $\frac{7}{11} = 0{,}6363... = 0{,}(63)$

ĆWICZENIE 2

Zapisz ułamek za pomocą rozwinięcia dziesiętnego.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{9}{11}$ d) $\frac{3}{7}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Powtarzającą się nieskończenie wiele razy grupę cyfr w rozwinięciu dziesiętnym liczby nazywamy **okresem**. Liczba cyfr występująca w okresie to **długość okresu**.

To się liczy!

Wszyscy na co dzień płacimy za różne towary czy dostajemy resztę w sklepie. Kiedy np. sprzedawca, fryzjer lub mechanik wydają nam resztę, ważne jest, żeby umieli to zrobić przy użyciu jak najmniejszej liczby banknotów i monet. Poniższe zadanie pomoże Wam opanować tę umiejętność.

1 grosz waży 1,64 g. Gdyby sprzedawca wydał Wam resztę 6 zł w jednogroszówkach, to ważyłaby ona ok. 1 kg.

ZADANIE BRANŻOWE

Odpowiedz, jakich banknotów i monet powinien użyć sprzedawca, aby wypłacić resztę równą:

a) 6,11 zł, **b)** 12,36 zł, **c)** 94,76 zł, **d)** 146,87 zł.

PRZYKŁAD 3

Podaj, jaką długość ma okres liczby 6,6(03). Wypisz 10 początkowych cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego.

ROZWIĄZANIE

Długość okresu liczby 6,6(03) wynosi 2 (0 i 3), a 10 początkowych jej cyfr to 6,603030303.

ĆWICZENIE 3

3.1. Ile cyfr ma okres podanej liczby? Podaj 10 początkowych cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego.

a) 9,(13) **b)** 0,37(2) **c)** 2,0(001) **d)** 7,(12221)

3.2. Jaka cyfra znajduje się na ósmym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

a) 2,(13) **b)** 6,4(25) **c)** 0,(374) **d)** 9,3(271)

Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych mogą być skończone albo nieskończone okresowe. Rozwinięcia nieskończone i nieokresowe mają natomiast liczby niewymierne, np.: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, czy też znana z geometrii liczba π. Poniżej możecie zobaczyć 60 początkowych cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π.

$$\pi \approx 3{,}141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944$$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Zbiór liczb rzeczywistych zawiera zbiory liczb wymiernych i niewymiernych. Oznaczamy go symbolem **R**.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 196

1. Zapisz liczbę w postaci ułamka nieskracalnego, w którym licznik i mianownik są liczbami całkowitymi.

a) 0,7 c) 0,14 e) 0,125 g) 0,025
b) 0,9 d) 0,65 f) 0,355 h) 0,044

2. Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $3\frac{1}{4}$ c) $5\frac{1}{8}$ e) $2\frac{2}{11}$ g) $4\frac{1}{33}$
b) $7\frac{3}{4}$ d) $9\frac{3}{8}$ f) $6\frac{3}{11}$ h) $8\frac{7}{33}$

3. Dana jest liczba 6,(0357). Odpowiedz, jaka cyfra znajduje się w rozwinięciu dziesiętnym tej liczby na wskazanym miejscu po przecinku.

a) piątym b) dziesiątym c) trzydziestym d) setnym

4. W zależności od potrzeb masę produktu podajemy w różnych jednostkach. Oblicz:

a) ile kilogramów to 150 g,
b) ile kilogramów to 14 mg,
c) ile dekagramów to 2 mg,
d) ile ton to 17 kg.

PODPOWIEDŹ

1 mg = 0,000001 kg
1 g = 0,001 kg
1 dag = 0,01 kg
1 t = 1000 kg

ZADANIA BRANŻOWE

5. Aby przygotować kurczaka po indyjsku dla czterech osób, kucharz potrzebuje m.in. 30 g świeżego imbiru, 0,025 g szafranu w proszku oraz 5 g mieszanki przypraw garam masala. Zapisz wagę tych wszystkich przypraw w dekagramach oraz w kilogramach.

6. Na stacji diagnostycznej przegląd samochodu państwa Słowikowskich trwał 3,5 godziny i kosztował 573,5 zł. Kwota ta zawierała koszt wymienionych części oraz wynagrodzenie za pracę mechanika. Za jedną godzinę pracy mechanik otrzymuje 41 zł. Oblicz, ile kosztowały części.

7. Pan Jan prowadzi sklep z warzywami i owocami. Na początku dnia w kasie miał 853,5 zł. Przez cały dzień sprzedał towar za kwotę 1352,47 zł, ale dostawcom z hurtowni musiał zapłacić 950 zł. Oblicz, ile pieniędzy powinno być w kasie pod koniec dnia.

5 Kalorie się liczy

W każdym posiłku liczy się nie tylko jego smak i wygląd, lecz także wartość energetyczna. Dietetyk, przygotowując menu, uwzględnia wartość kaloryczną produktów i dostosowuje ją do dziennego zapotrzebowania danej osoby, w zależności np. od jej wieku lub płci.

Dzienne zapotrzebowanie energetyczne to liczba kilokalorii (kcal), którą należy dostarczyć każdego dnia organizmowi, aby pokryć wydatki energetyczne wynikające np. z przemiany materii lub aktywności fizycznej.

PRZYKŁADOWY POSIŁEK

Propozycja obiadu	Wartość energetyczna kcal/100 g produktu
Kotlet schabowy (150 g)	316
Purée ziemniaczane (150 g)	88
Kapusta kiszona (50 g)	18
Wartość kaloryczna obiadu: 615 kcal	

1 **Wartość energetyczna** danego produktu podawana jest w przeliczeniu na 100 g lub 100 ml.

2 Do obliczania wartości kalorycznej danej porcji można użyć wzoru:

$$\text{wartość kaloryczna porcji} = \text{waga porcji (w gramach)} \cdot \frac{\text{wartość energetyczna kcal na 100 g produktu}}{100\ \text{g}}.$$

Wartość kaloryczna 100 g kotleta schabowego wynosi 316 kcal, więc wartość kaloryczna 150 g kotleta jest równa $150 \cdot \frac{316}{100} = 474$ [kcal].

Wartość kaloryczna 100 g purée ziemniaczanego to 88 kcal, więc wartość kaloryczna 150 g purée to $150 \cdot \frac{88}{100} = 132$ [kcal].

Wartość kaloryczna 100 g kapusty wynosi 18 kcal, więc wartość kaloryczna 50 g kapusty to $50 \cdot \frac{18}{100} = 9$ [kcal].

3 Żeby obliczyć **wartość kaloryczną całego posiłku,** należy dodać wartości kaloryczne wszystkich produktów.

Wartość kaloryczna całego obiadu to: 474 + 132 + 9 = 615 [kcal].

ZADANIA BRANŻOWE

Zapoznaj się z propozycją menu dla chłopca w wieku 13–15 lat oraz tabelą kaloryczności produktów. Na podstawie informacji oblicz wartość kaloryczną poszczególnych posiłków.

- **Pierwsze śniadanie**
  3 kromki pieczywa żytniego (100 g)
  Masło (10 g)
  6 plastrów wędliny z piersi z indyka (100 g)
  Pomidor (100 g)
  Herbata (200 ml)
  Łyżeczka cukru (10 g)
  Sok pomarańczowy (200 ml)
- **Drugie śniadanie**
  Drożdżówka (150 g)
  Banan (150 g)
  Sok wieloowocowy (300 ml)
- **Obiad**
  Zupa jarzynowa (300 g)
  Ziemniaki (200 g)
  Pieczeń duszona (150 g)
  Surówka z marchewki (100 g)
- **Kolacja**
  Mleko (250 ml)
  Płatki kukurydziane (30 g)
  3 kromki pieczywa żytniego (100 g)
  3 plastry wędliny z piersi z indyka (50 g)
  Masło (10 g)
  Herbata (200 ml)
  Łyżeczka cukru (10 g)

Nazwa produktu	Wartość energetyczna kcal/100 g lub kcal/100 ml produktu
Pieczywo żytnie	227
Masło	720
Wędlina z piersi z indyka	90
Pomidor	15
Herbata	0
Cukier	386
Sok pomarańczowy	45
Drożdżówka	250
Banan	90
Sok wieloowocowy	41
Zupa jarzynowa	43
Ziemniaki	75
Pieczeń duszona	320
Surówka z marchewki	90
Mleko	42
Płatki kukurydziane	360

LEKCJA

6 Przybliżenia

NA POCZĄTEK

Przed pójściem do sklepu Ania oszacowała, że na zakupy wystarczy jej 50 zł. Przyjrzyj się uważnie paragonowi i odpowiedz, czy miała rację.

PARAGON FISKALNY

BUŁKA	10 × 0,89 = 8,90 D
MĄKA 650	2 × 1,19 = 2,38 D
JAJKA	1 × 7,49 = 7,49 D
JOGURT	4 × 2,50 = 10,00 D
MASŁO	2 × 5,99 = 11,98 D
OLEJ SŁ.	1 × 4,69 = 4,69 D

Sprzedaż opodatk. D
Kwota PTU D 5%
Razem PTU
SUMA PLN

W życiu codziennym bardzo często posługujemy się wielkościami przybliżonymi. Kiedy podajemy przybliżenia dziesiętne liczb z określoną dokładnością, stosujemy m.in. regułę zaokrąglania.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Reguła zaokrąglania liczby polega na odrzuceniu końcowych cyfr danej liczby.

- Gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr zostawiamy bez zmian.
- Gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

PRZYKŁAD 1

Zaokrąglij liczbę do jednego miejsca po przecinku.

a) 6,5492 b) 9,8501

a) **KROK 1** Sprawdzamy, jaka cyfra znajduje się na drugim miejscu po przecinku:
6,5492

KROK 2 Pierwszą odrzuconą cyfrą jest 4, zatem ostatnią z zachowanych cyfr, czyli 5, zostawiamy bez zmian:
$6{,}5492 \approx 6{,}5$

b) **KROK 1** Sprawdzamy, jaka cyfra znajduje się na drugim miejscu po przecinku:
9,8501

KROK 2 Pierwszą odrzuconą cyfrą jest 5, zatem ostatnią z zachowanych cyfr, czyli 8, zwiększamy o jeden:
$9{,}8501 \approx 9{,}9$

ĆWICZENIE 1

Zaokrąglij liczbę do jednego miejsca po przecinku (do części dziesiątych).

a) 3,0429
b) 2,7621
c) 6,9533
d) 0,0396
e) 19,97
f) 12 399,99
g) 7899,9733
h) 7999,985

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Gdy przybliżenie liczby jest od niej mniejsze, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast, gdy jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

PRZYKŁAD 2

Zaokrąglij liczbę do dwóch miejsc po przecinku i określ, czy jest to przybliżenie z niedomiarem, czy z nadmiarem.

a) 136,274
b) 136,275

a) **KROK 1** Zaokrąglamy liczbę do dwóch miejsc po przecinku:

$136{,}274 \approx 136{,}27$

KROK 2 Stwierdzamy, że przybliżenie 136,27 jest mniejsze od liczby 136,274, zatem jest to przybliżenie z niedomiarem.

b) **KROK 1** Zaokrąglamy liczbę do dwóch miejsc po przecinku:

$136{,}275 \approx 136{,}28$

KROK 2 Stwierdzamy, że przybliżenie 136,28 jest większe od liczby 136,275, zatem jest to przybliżenie z nadmiarem.

ĆWICZENIE 2

Zaokrąglij liczbę do dwóch miejsc po przecinku (do części setnych). Określ, czy uzyskane przybliżenie jest przybliżeniem z niedomiarem, czy z nadmiarem.

a) 6,7824
b) 8,4653
c) 7,8951
d) 5,9039
e) 60,9882
f) 67,9953
g) 589,9931
h) 999,9989

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kiedy przybliżamy liczby, otrzymujemy wynik z pewnym błędem. **Błąd przybliżenia** jest równy różnicy liczby i jej przybliżenia.

PRZYKŁAD 3

Zaokrąglij liczbę do jedności oraz oblicz błąd przybliżenia.

a) 17,25 b) 14,64

a) **KROK 1** Zaokrąglamy liczbę do jedności:

$17{,}25 \approx 17$

KROK 2 Obliczamy błąd przybliżenia:

$17{,}25 - 17 = 0{,}25$

b) **KROK 1** Zaokrąglamy liczbę do jedności:

$14{,}64 \approx 15$

KROK 2 Obliczamy błąd przybliżenia:

$14{,}64 - 15 = -0{,}36$

ĆWICZENIE 3

Zaokrąglij liczbę do jedności oraz oblicz błąd przybliżenia.

a) 20,45 b) 16,98 c) 11,09 d) 19,51

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Symbolem $|x|$ oznaczamy **wartość bezwzględną** liczby x. Wartość bezwzględna liczby opisuje jej odległość od zera na osi liczbowej, zatem wartość bezwględna nie może być liczbą ujemną.

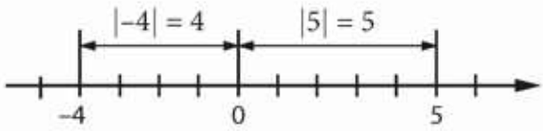
PRZYKŁAD 4

Oblicz wartość bezwzględną podanej liczby.

a) 5 b) −4

ROZWIĄZANIE

a) $|5| = 5$, gdyż odległość liczby 5 od 0 wynosi 5.
b) $|-4| = 4$, gdyż odległość liczby −4 od 0 wynosi 4.



ĆWICZENIE 4

Oblicz.

a) $|-3|$
b) $\left|-5\frac{1}{3}\right|$
c) $|12|$
d) $|150|$
e) $|5-7|$
f) $|-1+3|$
g) $|-4{,}5-3{,}6|$
h) $|-5-(-3{,}6)|$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Błędem bezwzględnym przybliżenia nazywamy wartość bezwzględną różnicy między liczbą x a jej przybliżeniem a, czyli $|x - a|$.

PRZYKŁAD 5

Marek zmierzył szerokość szafki i ustalił, że ma ona 470 mm szerokości. W rzeczywistości szerokość szafki wynosi 468 mm. Oblicz błąd bezwzględny, jaki popełnił przy pomiarze.

ROZWIĄZANIE

Błąd bezwzględny popełniony przez Marka wynosi: $|468 - 470| = |-2| = 2$ [mm].

ĆWICZENIE 5

Ania zmierzyła wysokość stołu i ustaliła, że ma on 77,3 cm wysokości. W rzeczywistości wysokość stołu wynosi 76 cm. Oblicz błąd bezwzględny, jaki popełniła przy pomiarze.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 197

PODPOWIEDŹ

$\sqrt{15} \approx 3{,}8729833462$

1. Podaj zaokrąglenie $\sqrt{15}$ ze wskazaną dokładnością. Określ, czy jest to przybliżenie z niedomiarem, czy z nadmiarem.

a) Do dwóch miejsc po przecinku.
b) Do czterech miejsc po przecinku.
c) Do sześciu miejsc po przecinku.
d) Do ośmiu miejsc po przecinku.

2. Artur zmierzył obwód prostokąta – wynik jego pomiaru to 14,56 m. Oblicz błąd bezwzględny, który popełnił Artur, jeśli rzeczywiste wymiary tego prostokąta to:

a) 315 cm × 425 cm,
b) 205 cm × 515 cm.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Licznik w samochodzie podaje pokonaną odległość, mnożąc liczbę obrotów, które wykonuje koło, przez jego obwód. Mechanik miał obliczyć odległość, jaką pokonało auto, jeśli koło o promieniu 35 cm wykonało 1000 obrotów. Do obliczeń przyjął, że $\pi \approx 3$. O ile wzrośnie otrzymany wynik, jeśli do obliczeń przyjmie $\pi \approx 3{,}14$?

4. Krawcowe miały podać wymiary prostokątnego kawałka materiału. Pierwsza z nich stwierdziła, że jego długość wynosi 238 cm, a druga, że jego szerokość równa się 142 cm. Oblicz rzeczywiste wymiary materiału, jeśli oba wyniki podano z nadmiarem, a błąd bezwzględny w obu przypadkach wynosił 3 cm.

Powtórzenie rozdziału
LICZBY RZECZYWISTE

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Sprawdź, czy:

a) liczba 201 212 jest podzielna przez 9,

b) liczba 358 965 jest podzielna przez 15.

2 Pewną, mniejszą od 100, liczbę pomarańczy zapakowano w identyczne worki, po siedem sztuk w każdym.

Wybierz zdania prawdziwe.

A. Liczba wszystkich pomarańczy może być równa 94.

B. Liczba wszystkich pomarańczy może być równa 84.

C. Nie można tej samej liczby pomarańczy zapakować w identyczne worki tak, aby w każdym worku było dokładnie 15 pomarańczy.

3 Oblicz.

a) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$

b) $\frac{3}{8}-\frac{1}{8}$

c) $3\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}$

d) $1\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}-\frac{5}{12}$

e) $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$

f) $\frac{2}{13}:\frac{3}{26}-\frac{1}{3}$

4 Dana jest liczba $x = 3{,}23(245)$.

Wybierz zdania prawdziwe.

A. Na siódmym miejscu po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x znajduje się cyfra 4.

B. Zaokrągleniem liczby x do jedności jest liczba 3.

C. Liczba x jest równa $3\frac{23\,245}{10\,000}$.

5 Oblicz błąd bezwzględny popełniony przy przybliżeniu liczby x liczbą a.

a) $x = 7832$; $a = 7800$ **b)** $x = 845{,}23$; $a = 850$ **c)** $x = 3{,}099$; $a = 3$

6 Do salonu fryzjerskiego zamówiono 120 lakierów do włosów. $\frac{5}{24}$ wszystkich lakierów to lakiery do włosów cienkich i delikatnych, $\frac{4}{19}$ pozostałych lakierów to lakiery do włosów farbowanych. Reszta lakierów przeznaczona jest do włosów normalnych. Wykonaj polecenia.

a) Oblicz, ile zamówiono lakierów do włosów cienkich i delikatnych.

b) Oblicz, jaką częścią wszystkich lakierów są lakiery do włosów normalnych.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

1 Sprawdź, czy liczba 123 450 jest podzielna przez:

a) 3, **b)** 5, **c)** 9, **d)** 15.

2 Zastąp $\boxed{?}$ cyfrą tak, aby podana liczba była podzielna przez 9.

a) 121$\boxed{?}$21 **b)** 287 43$\boxed{?}$ **c)** 346$\boxed{?}$345 **d)** 9 998 8$\boxed{?}$9

3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Reszta z dzielenia liczby 5648 przez 8 jest równa

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

4 Oblicz.

a) $(8-(-3+5))\cdot 3$ **b)** $((8-(-3))+5):(-4)$ **c)** $8+(-3)+5\cdot 3$

5 Przedstaw podaną liczbę w postaci dziesiętnej i podaj jej zaokrąglenie do części dziesiątych.

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5}{8}$ **c)** $1\frac{1}{3}$ **d)** $2\frac{8}{13}$

6 Oblicz.

a) $-3\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}$ **b)** $2\cdot 2\frac{1}{5}:\left(-\frac{1}{10}\right)$

7 Tomek zjadł $\frac{1}{3}$ pizzy, a Adam $\frac{1}{4}$. Oblicz, jaka część pizzy została zjedzona przez obu chłopców.

8 Ciężarówka o masie 3,5 t przewoziła 1600 czekolad o masie 125 g każda oraz 100 bombonierek o masie 0,5 kg każda. Ile kilogramów ważyła ciężarówka łącznie z towarem? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 3570 **B.** 3600 **C.** 3660 **D.** 3750

9 Tata Ali zarezerwował w biurze turystycznym rodzinną wycieczkę w cenie 8176 zł. Jest to cena wyjazdu przy płatności z góry. Tata Ali chciałby jednak rozłożyć płatność na dwie raty. Pierwsza rata to $\frac{3}{7}$, a druga $\frac{3}{4}$ ceny wyjazdu przy płatności z góry. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Pierwsza rata wynosi 3504 zł.

B. Druga rata wynosi 6100 zł.

C. Cena wycieczki przy rozłożeniu na dwie raty wynosi 9636 zł.

Rozdział II

Potęgi i pierwiastki

TEMATY LEKCJI

1 Potęga o wykładniku naturalnym s. 33–36

2 Potęga o wykładniku całkowitym s. 37–40

3 Pierwiastek kwadratowy s. 41–43

4 Pierwiastki wyższych stopni s. 44–47

Powtórzenie rozdziału s. 48–49

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

LEKCJA 1

Potęga o wykładniku naturalnym

NA POCZĄTEK

Piotr postanowił regularnie biegać. W pierwszym tygodniu wybrał się trzy razy na trening i przebiegł po 1 km każdego dnia. W każdym następnym tygodniu planował przebiec trasę dwa razy dłuższą niż w poprzednim. Czy jest możliwe, żeby realizował swój plan przez 3 miesiące?

PLAN TRENINGOWY

Tydzień	Pn.	Śr.	Pt.
1.	1 km	1 km	1 km
2.	2 km	2 km	2 km
3.	4 km	4 km	4 km
4.			
5.			

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a:

wykładnik potęgi

podstawa potęgi

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Przyjmujemy również, że $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

PRZYKŁAD 1

Podaj najmniejszą liczbę naturalną n, dla której liczba 6^n jest większa od 200.

KROK 1 Obliczamy kolejne wartości potęg 6^n:

$6^1 = 6$

$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

$6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216$

KROK 2 Na podstawie powyższych obliczeń ustalamy, że najmniejsza liczba naturalna n, dla której liczba 6^n jest większa od 200, to $n = 3$.

PODPOWIEDŹ

Niektóre potęgi liczb 2, 3, 4 i 5

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

ĆWICZENIE 1

Podaj najmniejszą potęgę liczby 2 większą od 300.

PRZYKŁAD 2

Oblicz.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ b) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$ c) $-\left(-\frac{5}{2}\right)^2$

a) KROK 1 Zamieniamy potęgowanie na mnożenie:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$$

KROK 2 Mnożymy ułamki:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

PODPOWIEDŹ

Parzysta potęga liczby ujemnej jest liczbą dodatnią, natomiast nieparzysta potęga liczby ujemnej jest liczbą ujemną. Pamiętaj, że potęgowanie wykonujemy przed mnożeniem.

ROZWIĄZANIE

b) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27} = -2\frac{10}{27}$

c) $-\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = -\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} = -6\frac{1}{4}$

ĆWICZENIE 2

Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ e) $\left(1\frac{1}{4}\right)^3$ g) $-\left(33\frac{1}{3}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ f) $-\left(-1\frac{1}{2}\right)^4$ h) $-\left(-3\frac{1}{3}\right)^5$

PRZYKŁAD 3

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$(-2)^4, (-2)^5, (-3)^4, (-3)^5, (-3)^0$

KROK 1 Obliczamy wartości, które zostały podane w postaci potęg:

$$(-2)^4 = 16, \quad (-2)^5 = -32, \quad (-3)^4 = 81, \quad (-3)^5 = -243, \quad (-3)^0 = 1$$

KROK 2 Wypisujemy liczby w kolejności rosnącej:

$$(-3)^5, (-2)^5, (-3)^0, (-2)^4, (-3)^4$$

ĆWICZENIE 3

Uporządkuj liczby w kolejności malejącej.

a) $(-4)^4, (-4)^5, (-4)^0, (-3)^4, (-3)^5$ b) $(-10)^3, (-10)^4, -(-10)^5, -(-10)^6, (-10)^7$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dla liczb naturalnych m, n oraz $a \neq 0$, $b \neq 0$ spełnione są poniższe prawa działań na potęgach:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m \geq n$
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Pamiętaj, że $\frac{l}{m} = l : m$. Zatem prawa 2. i 4. mogą mieć następujące postacie:

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
4. $a^n : b^n = (a : b)^n$

PRZYKŁAD 4

Oblicz.

a) $2^7 \cdot 2^3$ b) $\frac{6^{10}}{6^8}$ c) $(-2)^3 \cdot 5^3$ d) $6^4 : (-2)^4$ e) $(2^2)^3$ f) $(-2^2)^3$

a) **KROK 1** Do obliczeń wykorzystujemy 1. prawo działań na potęgach:

$$2^7 \cdot 2^3 = 2^{7+3}$$

KROK 2 Wykonujemy potęgowanie. Aby obliczyć wynik, sięgamy do tabeli potęg, którą poznaliśmy na początku lekcji:

$$2^7 \cdot 2^3 = 2^{7+3} = 2^{10} = 1024$$

ROZWIĄZANIE

b) $\frac{6^{10}}{6^8} = 6^{10-8} = 6^2 = 36$

c) $(-2)^3 \cdot 5^3 = (-2 \cdot 5)^3 = (-10)^3 = -1000$

d) $6^4 : (-2)^4 = [6 : (-2)]^4 = (-3)^4 = 81$

e) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

f) $(-2^2)^3 = (-4)^3 = -64$

PODPOWIEDŹ

$-2^2 \neq (-2)^2$

ĆWICZENIE 4

Oblicz.

a) $5^{10} : 5^7$ b) $(-2)^9 : (-2)^6$ c) $(-2)^3 \cdot 3^3$ d) $(-18)^3 : 6^3$ e) $(-3^2)^2$ f) $(-10^3)^2$

PRZYKŁAD 5

Podaj, jaką liczbą całkowitą jest n.

a) $1\ \text{m} = 10^n\ \text{cm}$ b) $1\ \text{km} = 10^n\ \text{cm}$

PODPOWIEDŹ

1 km = 1000 m
1 m = 100 cm
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm

a) **KROK 1** Zapisujemy, ile centymetrów to jeden metr:

$1\ \text{m} = 100\ \text{cm}$

KROK 2 Liczbę centymetrów zapisujemy w postaci potęgi o podstawie 10:

$1\ \text{m} = 100\ \text{cm} = 10^2\ \text{cm}$

Liczba n równa jest 2.

ROZWIĄZANIE

b) $1\ \text{km} = 1000\ \text{m} = 1000 \cdot 100\ \text{cm} = 100\,000\ \text{cm} = 10^5\ \text{cm}$

Liczba n równa jest 5.

ĆWICZENIE 5

Podaj, jaką liczbą całkowitą jest n.

a) $1\ \text{m} = 10^n\ \text{dm}$

b) $1\ \text{m} = 10^n\ \text{mm}$

c) $1\ \text{dm} = 10^n\ \text{mm}$

d) $1\ \text{km} = 10^n\ \text{dm}$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 198

1. P jest polem kwadratu. Zapisz pole tego kwadratu w mm^2.

a) $P = 4 \cdot 10^4\,\text{cm}^2$

b) $P = 2 \cdot 10^5\,\text{dm}^2$

c) $P = 6 \cdot 10^2\,\text{m}^2$

d) $P = 8 \cdot 10^3\,\text{km}^2$

2. Minimalna powierzchnia, na której może być utworzony park narodowy, wynosi 1000 ha. Podaj, ile to metrów kwadratowych.

PODPOWIEDŹ

1 ha = 100 a
1 a = 100 m^2

3. Naukowcy przeprowadzali eksperymenty na bakteriach. Odkryli, że pewna bakteria dzieli się na trzy nowe po 5 minutach. Oblicz, ile bakterii powstanie z jednej po upływie 30 minut. Wynik zapisz w postaci potęgi.

LEKCJA

2 Potęga o wykładniku całkowitym

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się zdjęciu. Podaj wymiary paska tapety w metrach.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dla liczby naturalnej n i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że liczba a^{-n} jest n-tą potęgą odwrotności liczby a, czyli $\left(\frac{1}{a}\right)^n$. Zauważ, że $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.
Zatem:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

PRZYKŁAD 1

Oblicz.

a) 5^{-1} b) 5^{-2} c) $(-5)^{-3}$

ROZWIĄZANIE

a) $5^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$

b) $5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

c) $(-5)^{-3} = \left(\frac{1}{-5}\right)^3 = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$

PODPOWIEDŹ

Przykładowe potęgi o wykładniku ujemnym

wykładnik ujemny

wykładnik dodatni

$$a^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^1 = \frac{1}{a}$$

podstawa

odwrotność podstawy

$$a^{-2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-3} = \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{1}{a^3}$$

ĆWICZENIE 1

Oblicz.

a) 4^{-1} d) 2^{-3} g) $(-3)^{-3}$ j) $(-5)^{-2}$

b) 4^{-2} e) 2^{-5} h) $(-3)^{-4}$ k) $(-5)^{-3}$

c) 4^{-3} f) 2^{-7} i) $(-3)^{-5}$ l) $(-5)^{-4}$

PRZYKŁAD 2

Oblicz.

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ c) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$

a) **KROK 1** Ponieważ wykładnik potęgi jest ujemny, zamieniamy podstawę na jej odwrotność z dodatnim wykładnikiem:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^{1}$$

KROK 2 Obliczamy wartość potęgi:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^{1} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

b) **KROK 1** Ponieważ wykładnik potęgi jest ujemny, zamieniamy podstawę na jej odwrotność z dodatnim wykładnikiem. Zwróć uwagę, że liczba odwrotna do liczby ujemnej jest ujemna.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2}$$

KROK 2 Obliczamy wartość potęgi:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

c) **KROK 1** Zamieniamy podstawę potęgi na ułamek niewłaściwy:

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$$

KROK 2 Ponieważ wykładnik potęgi jest ujemny, zamieniamy podstawę na jej odwrotność z dodatnim wykładnikiem:

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3}$$

KROK 3 Obliczamy wartość potęgi:

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{8}{125}$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$ c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$ g) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}$ f) $\left(-1\frac{3}{4}\right)^{-1}$ h) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^{-4}$

PRZYKŁAD 3

Zapisz podaną liczbę jako potęgę liczby 10.

a) 1000 b) 0,1 c) 0,001

ROZWIĄZANIE

a) $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

b) $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

c) $0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

CIEKAWOSTKA

Co łączy Google'a z googolem [czyt.: gugolem]? Nazwa popularnej wyszukiwarki internetowej pochodzi właśnie od nazwy liczby 10^{100} – czyli googola.

ĆWICZENIE 3

Zapisz liczbę w postaci potęgi liczby 10.

a) 10 000 b) 0,01 c) 0,0001 d) 0,000 001

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dla liczb całkowitych m, n oraz $a \neq 0$, $b \neq 0$ spełnione są poniższe prawa działań na potęgach:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

PRZYKŁAD 4

Oblicz.

a) $4^5 \cdot 4^{-3}$ b) $3^{-5} : 3^{-3}$ c) $(2^{-3})^2$

ROZWIĄZANIE

a) $4^5 \cdot 4^{-3} = 4^{5+(-3)} = 4^2 = 16$

b) $3^{-5} : 3^{-3} = 3^{-5-(-3)} = 3^{-5+3} = 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c) $(2^{-3})^2 = 2^{-3 \cdot 2} = 2^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

ĆWICZENIE 4

Oblicz.

a) $3^7 \cdot 3^{-4}$ b) $7^{-4} : 7^{-6}$ c) $(2^2)^{-3}$

To się liczy!

Każdy z nas chociaż raz musiał skorzystać z informacji, ile gramów to kilogram czy ile mililitrów to litr. Jest to ważne również w wielu branżach, np. gastronomii, elektronice czy mechanice. Osoby z nimi związane powinny umieć sprawnie zamieniać jedne jednostki na drugie. Poniższe zadanie pomoże Wam opanować tę umiejętność.

Mnożnik	Nazwa	Symbol
10^{-12}	piko	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	mikro	μ
10^{-3}	mili	m
10^{-2}	centy	c
10^{-1}	decy	d
10^{1}	deka	da
10^{2}	hekto	h
10^{3}	kilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T

ZADANIE BRANŻOWE

Na podstawie tabeli oblicz:

a) ile mililitrów to jeden litr,
b) ile dekagramów to jeden kilogram,
c) ile miligramów to jeden kilogram,
d) ile mikrometrów to jeden centymetr,
e) ile nanometrów to jeden milimetr,
f) ile woltów to jeden miliwolt,
g) ile bajtów to jeden megabajt.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 199

1. Podaj, która z liczb jest większa: x czy y.

a) $x = (2^{-3})^4$, $y = (2^5)^{-4}$

b) $x = (7^{-3})^5$, $y = (7^2)^{-7}$

ZADANIA BRANŻOWE

2. Jednym z produktów fabryki świec woskowych jest sześcienna świeca o objętości 10^{-3} m^3. Oblicz, ile takich świec można wyprodukować z 1,7 m^3 wosku.

3. Ogrodnik potrzebuje 1 ml nawozu do nawiezienia 10 m^2 trawnika. Ile litrów nawozu potrzebne jest do nawiezienia 1 a trawnika?

4. Cukiernik w jednej dostawie otrzymuje 10 worków cukru, każdy o wadze 10^{-2} t. Do wypieku jednego ciasta potrzebuje 100 g cukru. Na ile ciast wystarczy mu jedna dostawa?

LEKCJA

3 Pierwiastek kwadratowy

NA POCZĄTEK

Paweł chce ogrodzić siatką działkę budowlaną zaznaczoną na zdjęciu. Czy wystarczy mu 100 m siatki, jeśli działka ma kształt kwadratu?

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej a to taka liczba nieujemna b, której kwadrat jest równy a. Możemy to zapisać:

$$\sqrt{a} = b, \text{ bo } b^2 = a, \text{ gdzie } a \geq 0,\ b \geq 0.$$

Symbolem pierwiastka kwadratowego z a jest $\sqrt{a}$.

PRZYKŁAD 1

Oblicz.

a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{0{,}81}$ c) $\sqrt{\frac{1}{9}}$

ROZWIĄZANIE

a) $\sqrt{9} = 3$, bo $3^2 = 9$

b) **SPOSÓB I**

$\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$, bo $(0{,}9)^2 = 0{,}81$

SPOSÓB II

$\sqrt{0{,}81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10}$, bo $\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100} = 0{,}81$

c) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$, bo $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

ĆWICZENIE 1

Oblicz.

a) $\sqrt{16} + \sqrt{256}$ c) $\sqrt{0{,}36}$ e) $\sqrt{\frac{1}{16}}$

b) $\sqrt{169} - \sqrt{196}$ d) $\sqrt{2{,}25}$ f) $\sqrt{\frac{1}{49}}$

PODPOWIEDŹ

Kwadraty niektórych liczb

$11^2 = 121$	$16^2 = 256$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$
$13^2 = 169$	$18^2 = 324$
$14^2 = 196$	$19^2 = 361$
$15^2 = 225$	$20^2 = 400$

Pamiętaj też, że:

$0^2 = 0$ $1^2 = 1$

PRZYKŁAD 2

Oblicz obwód kwadratu o polu równym $36\,\text{cm}^2$.

KROK 1 Obliczamy długość boku kwadratu:

$$a = \sqrt{36} = 6\,[\text{cm}]$$

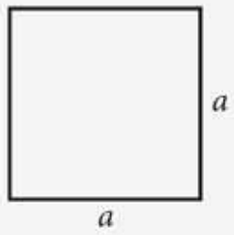
KROK 2 Obliczamy obwód kwadratu:

$$4 \cdot a = 4 \cdot 6 = 24\,[\text{cm}]$$

PODPOWIEDŹ

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole.

Ponieważ $P = a^2$, więc $a = \sqrt{P}$.



ĆWICZENIE 2

Oblicz obwód kwadratu o podanym polu.

a) $25\,\text{cm}^2$ **b)** $81\,\text{mm}^2$ **c)** $144\,\text{dm}^2$ **d)** $225\,\text{m}^2$

PRZYKŁAD 3

Oblicz $5\sqrt{2}$. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

ROZWIĄZANIE

$$5\sqrt{2} \approx 5 \cdot 1{,}41 = 7{,}05$$

PODPOWIEDŹ

Jeśli $\sqrt{a}$ nie jest liczbą wymierną, np.: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ czy $\sqrt{5}$, do obliczeń wykorzystujemy odpowiednie przybliżenia dziesiętne.

Pamiętaj też, że:

$$\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\sqrt{1}}} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\sqrt{4}}} < \sqrt{5} < \ldots$$

ĆWICZENIE 3

Oblicz. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ a $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

a) $10\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** $5\sqrt{5}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Do wykonywania działań na pierwiastkach wykorzystujemy podane wzory.

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

PRZYKŁAD 4

Oblicz.

a) $\sqrt{16 \cdot 81}$ **b)** $\sqrt{\frac{361}{400}}$

ROZWIĄZANIE

a) $\sqrt{16 \cdot 81} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{81} = 4 \cdot 9 = 36$

b) $\sqrt{\frac{361}{400}} = \frac{\sqrt{361}}{\sqrt{400}} = \frac{19}{20}$

ĆWICZENIE 4

Oblicz.

a) $\sqrt{4 \cdot 36}$ b) $\sqrt{25 \cdot 0{,}36}$ c) $\sqrt{\frac{81}{25}}$ d) $\sqrt{\frac{400}{169}}$

PRZYKŁAD 5

Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{160}$

KROK 1 Zapisujemy 8 jako iloczyn 4 i 2, ponieważ istnieje pierwiastek z 4:

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2}$

KROK 2 Korzystamy ze wzoru na pierwiastek iloczynu, aby wyłączyć czynnik przed pierwiastek:

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

b) $\sqrt{160} = \sqrt{16 \cdot 10} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{10} = 4\sqrt{10}$

ĆWICZENIE 5

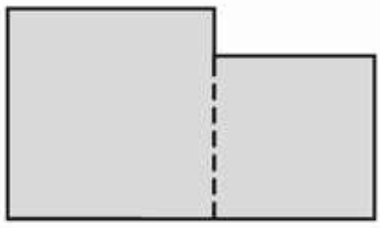
Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt{500}$

ZADANIA BRANŻOWE

Zbiór zadań, s. 199

1. Właściciel parkingu postanowił go ogrodzić. Cały plac parkingowy ma powierzchnię 10,66 a i można go podzielić na dwa kwadraty, z których większy ma pole równe 6,25 a. Oblicz, ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia parkingu.



2. Ogrodnik miał obliczyć powierzchnię kwadratowego trawnika, wokół którego wytyczono ścieżkę szerokości 1,5 m. Pole powierzchni trawnika i ścieżki jest równe 441 m^2. Jaką powierzchnię ma trawnik?

3. Krawcowa obszyła obrus w kształcie kwadratu lamówką o szerokości 10 cm. Powierzchnia całego obrusu to 5,29 m^2. Oblicz wymiary obrusu bez lamówki.

LEKCJA

4 Pierwiastki wyższych stopni

NA POCZĄTEK

Magda zrobiła świecę w kształcie sześcianu.
Wykorzystała do tego $1000\ \text{cm}^3$ wosku.
Jaką wysokość ma świeca?

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pierwiastek trzeciego stopnia (sześcienny) z liczby a to taka liczba b, której trzecia potęga (sześcian) jest równa a. Symbolem pierwiastka sześciennego z a jest $\sqrt[3]{a}$. Możemy to zapisać:

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ bo } b^3 = a, \text{ gdzie } a \text{ i } b \text{ są dowolnymi liczbami.}$$

PRZYKŁAD 1

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[3]{0{,}216}$

ROZWIĄZANIE

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$, bo $(-3)^3 = -27$

c) $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6$, bo $(0{,}6)^3 = 0{,}216$

PODPOWIEDŹ

Trzecie potęgi kolejnych liczb naturalnych

$0^3 = 0$	$8^3 = 512$
$1^3 = 1$	$9^3 = 729$
$2^3 = 8$	$10^3 = 1000$
$3^3 = 27$	$11^3 = 1331$
$4^3 = 64$	$12^3 = 1728$
$5^3 = 125$	$13^3 = 2197$
$6^3 = 216$	$14^3 = 2744$
$7^3 = 343$	$15^3 = 3375$

ĆWICZENIE 1

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{125}$

b) $\sqrt[3]{512} + \sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt[3]{-3375} + \sqrt[3]{729}$

d) $\sqrt[3]{1331} + \sqrt[3]{-2197}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{1728}}$

f) $\sqrt[3]{-0{,}001} + \sqrt[3]{0{,}343}$

PRZYKŁAD 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości $125\,\text{cm}^3$.

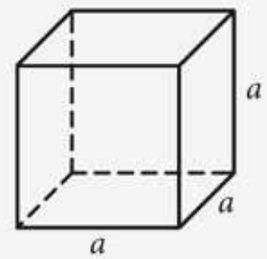
ROZWIĄZANIE

Długość krawędzi sześcianu jest równa $a = \sqrt[3]{125} = 5\,[\text{cm}]$.

PODPOWIEDŹ

Wyznaczenie pierwiastka sześciennego z liczby nieujemnej odpowiada wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu, gdy znamy jego objętość.

Ponieważ $V = a^3$, więc $a = \sqrt[3]{V}$.



ĆWICZENIE 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o podanej objętości.

a) $V = 8\,\text{cm}^3$

b) $V = 27\,\text{dm}^3$

c) $V = 64\,\text{m}^3$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pierwiastkiem *n*-tego stopnia z liczby a nazywamy taką liczbę b, której n-ta potęga jest równa a. Symbolem pierwiastka n-tego stopnia z a jest $\sqrt[n]{a}$. Zapisujemy to:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ bo } b^n = a.$$

Gdy n jest liczbą parzystą, możemy obliczyć pierwiastek jedynie z liczby nieujemnej a.

PRZYKŁAD 3

Oblicz.

a) $\sqrt[4]{81}$

b) $\sqrt[5]{-32}$

ROZWIĄZANIE

a) $\sqrt[4]{81} = 3$, bo $3^4 = 81$

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$, bo $(-2)^5 = -32$

ĆWICZENIE 3

Oblicz.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[4]{81}$

c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt[4]{1296}$

e) $\sqrt[5]{100\,000}$

f) $\sqrt[5]{-100\,000}$

g) $\sqrt[5]{-1}$

h) $\sqrt[5]{-3125}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Do wykonywania działań na pierwiastkach wykorzystujemy podane wzory.

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

PRZYKŁAD 4

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{27 \cdot 64}$

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{10\,000}}$

ROZWIĄZANIE

a) $\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{10\,000}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{10\,000}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

ĆWICZENIE 4

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$

b) $\sqrt[4]{81 \cdot 256}$

c) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$

d) $\sqrt[4]{\frac{625}{256}}$

PRZYKŁAD 5

Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[4]{48}$

c) $\sqrt[5]{486}$

a) **KROK 1** Zapisujemy 24 jako iloczyn 8 i 3, ponieważ istnieje pierwiastek sześcienny z 8:

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3}$

KROK 2 Wykorzystujemy wzór na pierwiastek iloczynu, aby wyłączyć czynnik przed pierwiastek:

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

ROZWIĄZANIE

b) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$

c) $\sqrt[5]{486} = \sqrt[5]{243 \cdot 2} = \sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{2} = 3\sqrt[5]{2}$

ĆWICZENIE 5

Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{16}$

b) $\sqrt[4]{32}$

c) $\sqrt[3]{81}$

d) $\sqrt[4]{64}$

PRZYKŁAD 6

Zapisz w prostszej postaci.

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt[4]{768}-\sqrt[4]{243}$

a) **KROK 1** Z każdego składnika podanej sumy wyłączamy czynnik przed pierwiastek:

$$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{8\cdot 2}+\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}$$

KROK 2 W każdym składniku występuje liczba $\sqrt[3]{2}$, zatem podaną sumę możemy uprościć:

$$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{8\cdot 2}+\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}$$

ROZWIĄZANIE

b) $\sqrt[4]{768}-\sqrt[4]{243}=\sqrt[4]{256\cdot 3}-\sqrt[4]{81\cdot 3}=\sqrt[4]{256}\cdot\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{3}=4\sqrt[4]{3}-3\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3}$

ĆWICZENIE 6

Zapisz w prostszej postaci.

a) $\sqrt[3]{-80}-\sqrt[3]{270}$ b) $-\sqrt[4]{50\,000}+\sqrt[4]{405}$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 200

1. Karton w kształcie sześcianu ma pojemność 125 l. Podaj wysokość tego kartonu w centymetrach. W obliczeniach pomiń grubość ścian kartonu.

2. Kasia kupiła na prezent wazon w kształcie sześcianu. W wazonie mieści się 3,375 l wody. Oblicz minimalną wysokość pudełka, w które można zapakować prezent. W obliczeniach pomiń grubość ścian wazonu.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Producent pojemników otrzymał zamówienie na wykonanie zbiornika w kształcie sześcianu o pojemności 1331 l. Inżynier obliczył, że przy takiej pojemności grubość ścian zbiornika powinna wynosić 3 cm. Podaj zewnętrzne wymiary tego zbiornika.

4. Firma transportowa dostała zlecenie przewiezienia 500 kartonowych opakowań w kształcie sześcianów. Każdy z nich ma pojemność 27 l. Podaj długość krawędzi kartonu. Oblicz sumę objętości wszystkich opakowań. W obliczeniach pomiń grubość ścian kartonu.

Powtórzenie rozdziału

POTĘGI I PIERWIASTKI

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Uporządkuj liczby $(-5)^2$, $(-5)^3$, $(-5)^5$, $(-5)^6$ w kolejności rosnącej.

2 Zapisz w postaci jednej potęgi $(5^5 \cdot 5^{-3})^3 : 5^4$.

3 Oblicz.

a) $5^8 \cdot 5^{-5}$ c) $6^{-5} : 6^{-6}$ e) $(2^{-3})^2$

b) $4^{-7} \cdot 4^9$ d) $(-2)^{-10} : (-2)^{-6}$ f) $(11^{-2})^0$

4 Która z liczb: $a = 2^{-7} \cdot 2^4$, $b = 5^{-2} : 5^{-5}$, $c = (-2)^3 \cdot 3^3$ czy $d = \left[(-3)^2\right]^{-2}$ ma najmniejszą wartość? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. a B. b C. c D. d

5 Pole kwadratu jest równe P. Oblicz długość boku kwadratu. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

a) $P = 8\,\text{cm}^2$ b) $P = 1{,}25\,\text{dm}^2$ c) $P = 18\,\text{m}^2$

6 Ile wynosi długość krawędzi sześcianu o objętości 512 dm³? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 4 dm B. 80 cm C. 8 m D. 12 cm

7 Dane jest wyrażenie $-\sqrt{16} - \sqrt[3]{64} + \sqrt{81}$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Wartość wyrażenia jest równa $(-3)^0$.

B. Wartość wyrażenia wynosi 9.

C. Wartość wyrażenia wynosi 1.

8 Kartonowe opakowanie w kształcie sześcianu ma pojemność 64 l. Podaj jego wysokość w centymetrach. W obliczeniach pomiń grubość ścian kartonu.

9 Oblicz obwód podstawy sześcianu o objętości V. Podaj wynik w cm.

a) $V = 8\,\text{cm}^3$ b) $V = 0{,}125\,\text{dm}^3$ c) $V = 216\,\text{m}^3$

10 Podaj, jaką liczbą całkowitą jest n.

a) $1\,\text{m} = 10^n\,\text{dm}$ c) $1\,\text{km} = 10^n\,\text{m}$ e) $1\,\text{km} = 10^n\,\text{mm}$

b) $1\,\text{dm} = 10^n\,\text{m}$ d) $1\,\text{m} = 10^n\,\text{km}$ f) $1\,\text{mm} = 10^n\,\text{km}$

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

1 Podaj najmniejszą liczbę naturalną n, dla której liczba 5^n jest większa od 1000.

2 Ile wynosi różnica liczb 5^3 i 5^2? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 0 **B.** 5 **C.** 25 **D.** 100

3 Oblicz.

a) $3^3 \cdot 3^6 : 3^7$ **b)** $\frac{2^4 \cdot 2^8}{(2^5)^2}$ **c)** $\frac{25 \cdot 5^5}{125^2}$

4 Zapisz iloraz $5^{-5} : 5^{-3}$ w postaci potęgi o podstawie 5. Następnie oblicz jego wartość.

5 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Wartością wyrażenia $2^3 + 2^{-2} - 2^0$ jest

A. $2\frac{1}{4}$. **B.** $4\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $7\frac{1}{4}$.

6 Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi liczby 10.

a) 1 000 000 **b)** 100 000 **c)** 0,0001 **d)** 0,000 01

7 Która z liczb ma największą wartość? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $3^7 \cdot 3^{-4}$ **B.** $5^4 : 5^{-6}$ **C.** $3^2 \cdot 4^2$ **D.** $(2^2)^{-2}$

8 Odpowiedz, która z liczb jest większa.

a) 4 czy $2\sqrt{2}$ **b)** 8 czy $\sqrt{63}$ **c)** $\sqrt{70}$ czy $5\sqrt{3}$

9 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Obwód kwadratu o polu równym 3,24 a wynosi

A. 72 m. **B.** 54 m. **C.** 36 m. **D.** 18 m.

10 Dane są liczby $a = 2^3$, $b = 2\sqrt{16}$, $c = 2\sqrt[3]{8}$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Najmniejszą z liczb a, b, c jest liczba c.

B. Liczby a i b są równe.

C. Iloczyn liczb $a \cdot b \cdot c$ wynosi 64.

11 Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{500}$ **b)** $\sqrt{75}$ **c)** $3\sqrt{27}$ **d)** $5\sqrt{128}$

Rozdział III

Procenty i ich zastosowanie

TEMATY LEKCJI

1 Co to jest procent? s. 51–55

2 Faktura VAT s. 56–57

3 Lokaty s. 58–61

4 Kredyt bez tajemnic s. 62–63

Powtórzenie rozdziału s. 64–65

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

LEKCJA

1 Co to jest procent?

NA POCZĄTEK

Tomek chciał kupić w sklepie internetowym rękawice bokserskie. Mógł na nie wydać 130 zł. W czasie promocji cenę rękawic obniżono o 10%. Czy obniżka była wystarczająca, aby Tomek mógł je kupić?

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeden procent (1%) danej wielkości to jedna setna tej wielkości. Zatem p% danej wielkości to $\frac{p}{100}$ tej wielkości.

PRZYKŁAD 1

Zamień procent na ułamek zwykły nieskracalny.

a) 15%

b) $33\frac{1}{3}$%

ROZWIĄZANIE

a) $15\% = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{20}{\cancel{100}}} = \frac{3}{20}$

b) $33\frac{1}{3}\% = \frac{33\frac{1}{3}}{100} = \frac{\frac{100}{3}}{100} = \frac{\overset{1}{\cancel{100}}}{3} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{100}}} = \frac{1}{3}$

ĆWICZENIE 1

Zamień procent na ułamek zwykły nieskracalny.

a) 10%

b) 25%

c) 50%

d) $66\frac{2}{3}$%

e) 75%

f) 100%

g) 120%

h) 150%

WAŻNA WIADOMOŚĆ

p% liczby a wynosi b, tzn. $p\% \cdot a = b$.

PRZYKŁAD 2

Samochód kosztował 60 000 zł. Pod koniec roku jego cena została obniżona o 15%. Oblicz, ile zaoszczędzimy, jeśli kupimy samochód po obniżce.

ROZWIĄZANIE

$15\% \cdot 60\,000 = \frac{15}{1\cancel{00}} \cdot 60\,0\cancel{00} = 15 \cdot 600 = 9000$ [zł]

Jeśli kupimy samochód po obniżce, zaoszczędzimy 9000 zł.

ĆWICZENIE 2

Monika chciała wymienić lodówkę. Cena sprzętu, który wybrała, została obniżona o 12%. Oblicz, ile zapłaci, jeśli wcześniej lodówka kosztowała 1500 zł.

PRZYKŁAD 3

Ania otrzymała na sprawdzianie 45 punktów na 60. Oblicz, ile to procent możliwych do zdobycia punktów.

KROK 1 Obliczamy, jaki jest stosunek liczby 45 do 60:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{45}}}{\underset{4}{\cancel{60}}} = \frac{3}{4}$$

KROK 2 Zapisujemy ten stosunek w postaci procentu:

$$\frac{3}{4} \cdot 100\% = \frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\overset{25}{\cancel{100}}}{1}\% = 75\%$$

Ania otrzymała na sprawdzianie 75% możliwych do zdobycia punktów.

ĆWICZENIE 3

W szkole Karola oceny ze sprawdzianów z matematyki wystawiane są według kryteriów podanych w tabeli. Oblicz, jaką ocenę otrzyma Karol, gdy uzyska:

a) 35 punktów na 50 możliwych,

b) 20 punktów na 25 możliwych,

c) 25 punktów na 40 możliwych,

d) 39 punktów na 60 możliwych,

e) 24 punkty na 25 możliwych.

Wynik procentowy x	Ocena
$x < 40\%$	1
$40\% \leq x < 50\%$	2
$50\% \leq x < 65\%$	3
$65\% \leq x < 80\%$	4
$80\% \leq x < 95\%$	5
$x \geq 95\%$	6

PRZYKŁAD 4

Oblicz x, jeśli wiesz, że 12% liczby x to 36.

KROK 1 Zapisujemy równanie:

$$12\% \cdot x = 36$$

KROK 2 Rozwiązujemy równanie:

$$12\% \cdot x = 36$$

$$\frac{12}{100} \cdot x = 36$$

$$\frac{3}{25}x = 36 \quad \Big| \cdot \frac{25}{3}$$

$$x = 300$$

Liczba x jest równa 300.

ĆWICZENIE 4

Adam otrzymał 30 punktów z testu z matematyki. Jego nauczyciel podał, że było to 75% punktów możliwych do zdobycia. Oblicz, ile maksymalnie punktów można było uzyskać na teście.

PRZYKŁAD 5

Rower we wrześniu kosztował 1800 zł. W październiku jego cenę podwyższono o 20%, a w listopadzie obniżono o 10%. Oblicz, ile kosztuje rower po tych zmianach.

KROK 1 Obliczamy cenę roweru po październikowej podwyżce. Po podniesieniu ceny o 20% nowa cena roweru to 120% ceny wrześniowej, czyli:

$$120\% \cdot 1800 = \frac{120}{100} \cdot 1800 = 120 \cdot 18 = 2160 \text{ [zł]}$$

KROK 2 Obliczamy cenę roweru po listopadowej obniżce. Po obniżeniu ceny o 10% nowa cena roweru to 90% ceny październikowej, czyli:

$$90\% \cdot 2160 = \frac{90}{100} \cdot 2160 = 9 \cdot 216 = 1944 \text{ [zł]}$$

Nowa cena roweru to 1944 zł.

ĆWICZENIE 5

Rolki w marcu kosztowały 400 zł. W kwietniu ich cenę podwyższono o 20%, a w lipcu obniżono o 10%. Oblicz, ile kosztują rolki po tych zmianach.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Punkt procentowy to różnica między wielkościami wyrażonymi w procentach.

PRZYKŁAD 6

Sondaż przeprowadzony we wrześniu pokazał, że partię X popiera 12% wyborców. W październiku poparcie dla partii X wyrażało 18% tej samej grupy wyborców. Odpowiedz na pytania.

a) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla partii X?

b) O ile procent wzrosła liczba osób popierających partię X?

a) ROZWIĄZANIE

$18\% - 12\% = 6\%$

Poparcie dla partii X wzrosło o 6 punktów procentowych.

b) KROK 1 Obliczamy, o ile wzrosła liczba osób popierających partię X. W październiku poparcie dla partii X zwiększyło się o 6% liczby wszystkich wyborców (18% − 12%).

KROK 2 Obliczamy procentowy wzrost liczby osób popierających partię X. W tym celu porównujemy wzrost poparcia w październiku do poparcia we wrześniu:

$$\frac{6\%}{12\%} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$$

Liczba osób popierających partię X wzrosła o 50%.

ĆWICZENIE 6

Przyjrzyj się wynikom ankiety w tabeli. Na jej podstawie odpowiedz na pytania.

a) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla partii Y?

b) O ile procent wzrosła liczba osób popierających partię Y?

c) O ile punktów procentowych zmalało poparcie dla partii Z?

d) O ile procent zmalała liczba osób popierających partię Z?

Partia	Poparcie w danym miesiącu*	
	Luty	Marzec
Y	16%	20%
Z	10%	8%

* W sondażu wzięło udział tyle samo osób.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 201

1. Ania przeznaczyła na zakupy 80 zł. Wydała jedynie 60 zł. Oblicz, ile procent pieniędzy przeznaczonych na zakupy wydała Ania.

2. Do budowy pewnego chodnika potrzeba 800 płyt. 60% z nich już ułożono. Podaj liczbę płyt, które zostały do ułożenia.

3. Liczba dziewcząt pewnej klasy stanowi 25% liczby chłopców tej klasy. Oblicz, ile procent wszystkich uczniów w klasie to dziewczęta, a ile chłopcy.

4. Cenę spodni podwyższono o 10%, a następnie obniżono o 10%. Uzasadnij, że cena spodni zmieniła się.

ZADANIA BRANŻOWE

5. Właściciel sklepu sportowego ogłosił wyprzedaż sprzętu narciarskiego. Przyjrzyj się zdjęciu i oblicz, ile złotych zaoszczędzi klient, jeśli kupi zestaw nart i butów w promocyjnych cenach.

6. Sprzedawca w sklepie odzieżowym obniżył ceny artykułów, według ustalonej wartości procentowej na dany artykuł. Na podstawie informacji zawartych w tabeli oblicz, o ile procent przeceniono każdy z artykułów.

Artykuł	Cena przed obniżką	Cena po obniżce
Koszula	60 zł	42 zł
Spodnie	90 zł	81 zł
Sweter	80 zł	68 zł

7. Właściciel hurtowni materiałów budowlanych obniżył ceny niektórych artykułów. Na podstawie informacji z tabeli oblicz, o ile procent mniej zapłaci klient za zakup 20 kg cementu, 10 kg zaprawy klejowej i 50 pustaków w porównaniu do kwoty, którą zapłaciłby za te artykuły przed obniżką. Wynik podaj z dokładnością do 1%.

Artykuł	Wysokość obniżki	Cena po obniżce
Cement (worek 10 kg)	25%	6 zł
Zaprawa klejowa (worek 10 kg)	20%	40 zł
Pustak (1 sztuka)	30%	3,5 zł

2 Faktura VAT

Każdy właściciel firmy sprzedającej dane towary lub usługi, np. mechanik samochodowy, może wystawić fakturę VAT. Dokument ten, przygotowywany w formie papierowej lub elektronicznej, musi zawierać określone informacje.

Faktura VAT to dokument potwierdzający sprzedaż towaru lub wykonanie usługi. Zawiera m.in. dane sprzedawcy i nabywcy, miejsce i datę sprzedaży oraz termin wystawienia faktury.

PRZYKŁADOWA FAKTURA

sprzedawca

Firma: _____ **FAKTURA VAT** Miejscowość: _____

Adres: _____ Data wystawienia: _____

NIP: _____ **nr** _____ Data sprzedaży: _____

nabywca

Firma (imię i nazwisko): _____

Adres: _____ NIP: _____

Lp.	Nazwa towaru /usługi	J.m.	Ilość	Cena netto (w zł)	Wartość netto (w zł)	Stawka VAT (w %)	Kwota VAT (w zł)	Brutto razem (w zł)
1.	Suszarka do włosów	szt.	3	200,00	600,00	23%	138,00	738,00
2.	Lokówka do włosów	szt.	5	100,00	500,00	23%	115,00	615,00
				RAZEM ZAMÓWIENIE:	1100,00	23%	253,00	1353,00
	Wpłacona zaliczka (faktura zaliczkowa nr 5/11):				162,60	23%	37,40	200,00
				DO ZAPŁATY	937,40	23%	215,60	1153,00

1 **Cena netto** to wartość danego towaru lub usługi bez podatku VAT.

Cena netto suszarki do włosów to 200 zł, zatem wartość netto trzech suszarek wynosi 3 · 200 = 600 [zł].

2 **VAT** jest podatkiem płaconym przy zakupie jakiegoś towaru lub danej usługi. Liczy się go od ceny netto. VAT może mieć różne wysokości, np.: 5%, 8% i najczęściej 23%.

Dla suszarek do włosów VAT wynosi 23%, czyli: 0,23 · 600 = 138 [zł].

3 **Cena brutto** to wartość kwoty netto plus podatek VAT.

Żeby obliczyć cenę brutto trzech suszarek, dodajemy ich cenę netto i VAT: 600 + 138 = 738 [zł].

4 Nabywca może zapłacić sprzedawcy zaliczkę, czyli pewną kwotę z ostatecznej ceny brutto. Na wartość zaliczki składa się jej część netto (x) oraz VAT od tej części (23% · x).

Wartość zaliczki za suszarki i lokówki (200 zł brutto) to 123% jej części netto (x), czyli

$123\% \cdot x = 200$

$x = \frac{200}{1{,}23} = \frac{20000}{123} \approx 162{,}60$ [zł]

Część netto zaliczki wynosi 162,60 zł, a kwota podatku VAT jest równa 200 – 162,60 = 37,40 [zł].

5 **Kwota do zapłaty** to kwota całego zamówienia pomniejszona o zaliczkę.

Zatem kwota do zapłaty za suszarki i lokówki to 1353 – 200 = 1153 [zł].

ZADANIA BRANŻOWE

Zapoznaj się z fakturą. Na podstawie zawartych w niej informacji oblicz:

a) kwotę podatku VAT za zakup paneli podłogowych,

b) kwotę brutto za zakup paneli podłogowych,

c) procentową stawkę VAT za transport,

d) kwotę brutto za panele i transport,

e) wartość netto zaliczki,

f) kwotę podatku VAT zaliczki,

g) kwotę do zapłaty po wpłaconej zaliczce.

FAKTURA VAT

nr _____

Miejscowość: _____
Data wystawienia: _____
Data sprzedaży: _____

sprzedawca
Firma: _____
Adres: _____
NIP: _____

nabywca
Firma (imię i nazwisko): _____
Adres: _____
NIP: _____

Lp.	1.	2.
Nazwa towaru /usługi	Panel podłogowy (sosna)	Transport
J.m.	m²	
Ilość	25	
Cena netto (w zł)	48,00	
Wartość netto (w zł)	1200,00	250,00
Stawka VAT (w %)	23%	?
Kwota VAT (w zł)	?	20,00
Brutto razem (w zł)	?	270,00

RAZEM ZAMÓWIENIE:	Wpłacona zaliczka (faktura zaliczkowa nr 3/II):	DO ZAPŁATY:
	?	
	23%	
	?	
?	300,00	?

LEKCJA

3 Lokaty

NA POCZĄTEK

Olek wpłacił 2000 zł do banku na roczną lokatę. Czy dostanie odsetki wyższe niż 50 zł? Uzasadnij swoją odpowiedź.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kwota w wysokości k złożona do banku na rok, przy oprocentowaniu rocznym w wysokości r%, wynosi po roku:

$$k\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

PRZYKŁAD 1

Ola wpłaciła do banku 2000 zł na lokatę oprocentowaną 5% w skali roku. Oblicz, jaką kwotę odbierze po roku.

SPOSÓB I

KROK 1 Obliczamy odsetki od wpłaconej kwoty, czyli 5% z 2000 zł:

$5\% \cdot 2000 = 0{,}05 \cdot 2000 = 100$ [zł]

KROK 2 Do wpłaconej kwoty dodajemy odsetki:

$2000 + 100 = 2100$ [zł]

SPOSÓB II

Kwotę do wypłaty możemy także obliczyć, korzystając ze wzoru $k\left(1+\frac{r}{100}\right)$:

$2000 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right) = 2000 \cdot 1{,}05 = 2100$ [zł]

Ola po roku będzie mogła wypłacić z banku 2100 zł.

CIEKAWOSTKA

Czy wiecie, że w Polsce od dopisywanych odsetek pobierany jest podatek? Wynosi on 19%. Podatek ten odprowadzany jest jednak tylko od doliczanych odsetek, a nie od wpłaconej kwoty.

ĆWICZENIE 1

Jola wpłaciła 4000 zł na roczną lokatę oprocentowaną r%. Oblicz, ile pieniędzy będzie miała na lokacie, jeśli:

a) $r = 2$, b) $r = 3{,}5$, c) $r = 4$.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeżeli w kolejnych latach odsetki obliczane są od kwoty powiększonej o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kwota została złożona na **procent składany**.

Kwota w wysokości k złożona w banku na n lat, na procent składany, przy oprocentowaniu rocznym w wysokości r%, po n latach wynosi:

$$k\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

PRZYKŁAD 2

Rodzice Marty wpłacili do banku 6000 zł. Na koniec każdego roku bank dolicza odsetki w wysokości 5% do kwoty powiększonej o odsetki z poprzednich lat. Oblicz, jaką kwotę odbiorą po 2 latach.

SPOSÓB I

KROK 1 Obliczamy kwotę, którą rodzice Marty będą mieli po roku przy oprocentowaniu rocznym 5%:

$$6000\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)=6000\cdot 1{,}05=6300\ [\text{zł}]$$

KROK 2 Obliczamy, ile pieniędzy będą mieli rodzice Marty po 2 latach na tej lokacie. Zauważmy, że odsetki są naliczane od kwoty 6300 zł:

$$6300\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)=6300\cdot 1{,}05=6615\ [\text{zł}]$$

SPOSÓB II

Kwotę, którą rodzice odbiorą po 2 latach, możemy obliczyć ze wzoru $k\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$:

$$6000\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)^2=6000\cdot(1{,}05)^2=6615\ [\text{zł}]$$

Po 2 latach rodzice Marty odbiorą z banku 6615 zł.

ĆWICZENIE 2

Oblicz kwotę, którą będziemy mieli po n latach, jeżeli złożymy w banku 4000 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r.

a) $n = 2$, $r = 5\%$ b) $n = 4$, $r = 5\%$ c) $n = 10$, $r = 4\%$

Kapitalizacja odsetek to okresowe naliczanie odsetek od kapitału wpłaconego na rachunek bankowy i dopisywanie ich do tych środków. Kiedy przedłużymy lokatę np. o kolejny rok, wtedy nowe odsetki naliczane są od sumy kwoty początkowej i jej odsetek z poprzedniej lokaty. Jeżeli odsetki naliczane są co pół roku, mówimy o kapitalizacji półrocznej, jeżeli co 3 miesiące, czyli kwartał – o kapitalizacji kwartalnej, jeśli co miesiąc – o kapitalizacji miesięcznej.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kwota w wysokości k złożona w banku na n lat, na procent składany, przy oprocentowaniu rocznym w wysokości r% oraz kapitalizacji odsetek m razy w roku, po n latach wynosi:

$$k\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{n\cdot m}$$

PRZYKŁAD 3

Krzysztof wpłacił 8000 zł na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku. Oblicz kwotę, którą odbierze po 2 latach, jeśli bank kapitalizuje odsetki co kwartał.

KROK 1 Określamy liczbę kapitalizacji odsetek w ciągu roku.
Bank oferuje kapitalizację odsetek co kwartał. Oznacza to, że kapitalizacja nastąpi cztery razy w roku, czyli $m = 4$, ale w wysokości $\frac{6\%}{4}$.

KROK 2 Korzystamy ze wzoru $k\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{n\cdot m}$:

$$8000\cdot\left(1+\frac{6}{100\cdot 4}\right)^{2\cdot 4}=8000\cdot 1{,}015^8\approx 9011{,}94\ [\text{zł}]$$

Krzysztof po 2 latach odbierze z banku 9011,94 zł.

ĆWICZENIE 3

Właściciel firmy budowlanej wpłacił 5000 zł na lokatę oprocentowaną 4% w skali roku. Wykonaj polecenia.

a) Oblicz kwotę, która będzie na lokacie po roku, jeśli bank kapitalizuje odsetki co pół roku.

b) Oblicz kwotę, która będzie na lokacie po 2 latach, jeśli bank kapitalizuje odsetki co kwartał.

c) Oblicz kwotę, która będzie na lokacie po 5 latach, jeśli bank kapitalizuje odsetki co pół roku.

To się liczy!

Umiejętność oszczędzania to dobra cecha każdej przedsiębiorczej osoby. Niektórzy oszczędzają, regularnie wpłacając pieniądze na lokaty bankowe. Podane zadanie pomoże Wam nauczyć się, jak obliczyć zysk z takich lokat.

ZADANIE BRANŻOWE

Noworocznym postanowieniem Igora było regularne oszczędzanie. Dlatego 2 stycznia 2019 r. założył konto oszczędnościowe oprocentowane 2% w skali roku i drugiego dnia każdego miesiąca wpłaca na nie 200 zł. Oblicz, ile pieniędzy będzie miał Igor na tym koncie 1 lipca 2019 r., jeśli odsetki kapitalizowane są co miesiąc.

Czy wiecie, że na początku lat 90. w Polsce banki oferowały klientom oprocentowanie lokat wynoszące ponad 50% w skali roku? Obecnie oprocentowanie rocznych lokat jest kilkanaście razy mniejsze.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 201

1. Państwo Malinowscy wpłacili do banku 8000 zł. Oblicz, jaką kwotę odbiorą po roku, jeśli założyli:

a) roczną lokatę oprocentowaną 6% w skali roku,

b) półroczną lokatę oprocentowaną 6% w skali roku, a po 6 miesiącach ją odnowili,

c) kwartalną lokatę oprocentowaną 6% w skali roku i 3-krotnie ją odnawiali.

2. Kwotę 2000 zł złożono w banku na 4 lata na lokatę oprocentowaną 3% w skali roku. Oblicz wysokość lokaty po upływie tego czasu, jeśli kapitalizacja była roczna.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Przedsiębiorca wpłacił do banku 8000 zł na 5 lat. Oblicz, jaką kwotę odbierze po upływie tego czasu. W obliczeniach uwzględnij, że kapitalizacja odsetek była roczna, a oprocentowanie:

a) w pierwszych 2 latach wynosiło 8%, w ostatnich 3 – 4%;

b) w pierwszych 2 latach wynosiło 4%, w ostatnich 3 – 8%;

c) w pierwszych 2 latach wynosiło 7%, w kolejnych 2 – 5%, w ostatnim roku – 2%.

4. Właściciel salonu fryzjerskiego potrzebuje 12 000 zł na remont lokalu. Cztery lata temu wpłacił do banku 9000 zł na lokatę oprocentowaną 8% w skali roku z kwartalną kapitalizacją odsetek. Oblicz, czy kwota z lokaty wystarczy na remont.

4 Kredyt bez tajemnic

Z kredytów gotówkowych korzystają miliony Polaków. Dzięki kredytom młodzi przedsiębiorcy łatwiej mogą założyć działalność gospodarczą, np. fryzjerka lub fryzjer, którzy chcą otworzyć własny salon, potrzebują pieniędzy na wynajem lokalu i zakup profesjonalnych sprzętów.

Kredyt to pisemna umowa między bankiem a kredytobiorcą. Bank udostępnia pewną kwotę pieniędzy na określony cel i czas, a kredytobiorca musi ją spłacić razem z kosztami kredytu m.in. w postaci odsetek, prowizji dla banku czy ubezpieczenia kredytu.

PRZYKŁADOWA OFERTA KREDYTU

1. **Prowizja** jest jednorazową opłatą, którą bank nalicza za udzielenie kredytu.

   Prowizja za udzielenie tego kredytu wynosi 6% · 15 000 = 900 [zł].

2. **RRSO** to rzeczywista roczna stopa oprocentowania. Określa ona całkowity koszt kredytu w stosunku rocznym, czyli ile procent pożyczonych pieniędzy dodatkowo musimy oddać bankowi w skali roku.

3. Kredytobiorca zawsze oddaje do banku większą kwotę niż kredyt, który zaciągnął.

   Łączne koszty tego kredytu, czyli 18 966,96 – 15 000 = 3966,96 [zł], to ok. 26% kwoty zaciągniętego kredytu (15 000 zł). O tyle więcej kredytobiorca odda bankowi.

   Oferta kredytu jest tym bardziej korzystna, im mniejszy procent z początkowej kwoty kredytu oddajemy bankowi.

4. Aby obliczyć stałą ratę miesięczną, używamy wzoru:

$$\frac{\textbf{całkowita kwota kredytu do spłaty}}{\textbf{liczba miesięcy kredytu}}$$

   Stała rata miesięczna kredytu to $\frac{18\,966{,}96}{72}$ = 263,43 [zł].

ZADANIA BRANŻOWE

Zapoznaj się z ofertami kredytowymi banków. Na podstawie zawartych informacji oblicz:

a) kwotę prowizji w obu bankach;

b) koszt kredytu w ofercie A;

c) koszt kredytu w ofercie B;

d) jakim procentem kredytu jest kwota do spłaty w ofercie A, a jakim w przypadku B;

e) który kredyt jest korzystniejszy dla klienta i o ile.

Bank A
Inwestuj razem z nami!

OFERTA KREDYTOWA A

KWOTA KREDYTU: 20 000 zł

OKRES SPŁATY: 6 lat

STAŁA RATA MIESIĘCZNA: 355,28 zł

OPROCENTOWANIE: 5,00%

RRSO: 9,22%

PROWIZJA: 10,30%

KWOTA DO SPŁATY: 25 580,16 zł

Bank B

OFERTA KREDYTOWA B

KWOTA KREDYTU: 20 000 zł

OKRES SPŁATY: 6 lat

STAŁA RATA MIESIĘCZNA: 369,56 zł

OPROCENTOWANIE: 7,49%

RRSO: 10,56%

PROWIZJA: 6,90%

KWOTA DO SPŁATY: 26 608,32 zł

Powtórzenie rozdziału

PROCENTY I ICH ZASTOSOWANIE

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Przed sezonem zimowym kurtka kosztowała 350 zł. W styczniu jej cena wzrosła o 25%. Wybierz zdania prawdziwe.

A. W styczniu cena kurtki wzrosła o 87,50 zł.

B. W styczniu kurtka kosztowała 437,50 zł.

C. W styczniu cena kurtki stanowiła 125% ceny przed sezonem zimowym.

2 W grupie 40 osób 15 to dziewczęta. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Chłopcy stanowią 60% tej grupy.

B. Dziewczęta stanowią 37,5% tej grupy.

C. Dziewcząt jest o 40% mniej niż chłopców.

3 Pewna firma turystyczna oferuje tygodniową wycieczkę do Malmö w Szwecji w cenie 1500 zł od osoby. Cenę wycieczki najpierw podwyższono o 20%, a następnie obniżono o 20%. Oblicz:

a) cenę tej wycieczki po zmianach,

b) o ile procent nowa cena będzie się różnić od ceny początkowej.

4 Oblicz.

a) 20% liczby 80, a następnie 25% z otrzymanego wyniku.

b) 17% liczby 85, a następnie 40% z otrzymanego wyniku.

c) 130% liczby 40, a następnie 125% z otrzymanego wyniku.

5 Kwotę 2000 zł złożono w banku na lokatę oprocentowaną 4% w skali roku. Oblicz, korzystając z kalkulatora.

a) Jaką kwotę odbierze się po roku, jeśli bank oferuje kwartalną kapitalizację odsetek?

b) Jaką kwotę odbierze się po 3 latach, jeśli bank oferuje półroczną kapitalizację odsetek?

6 Marek kupił pralkę na raty. Skorzystał z podanej oferty. Oblicz, ile więcej zapłacił, kupując urządzenie na raty.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

1 Zamień procent na ułamek zwykły nieskracalny.

a) 5% b) 30% c) 45% d) 85%

2 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

25% liczby 60 jest równe

A. 10. B. 15. C. 20. D. 25.

3 Sukienka kosztowała 150 zł, a po obniżce kosztuje 120 zł. Jaka jest procentowa wysokość przeceny? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 15% B. 20% C. 25% D. 30%

4 Cenę pewnego towaru najpierw obniżono o 15%, a następnie jeszcze o 10%. Jakim procentem początkowej ceny jest cena towaru po obniżkach? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 23,5% B. 25% C. 75% D. 76,5%

5 W szkole Magdy obowiązuje punktowy system oceniania. Oceny końcowe wystawiane są według kryteriów podanych w tabeli.

Wynik procentowy x	Ocena
$x < 40\%$	1
$40\% \leq x < 50\%$	2
$50\% \leq x < 65\%$	3
$65\% \leq x < 80\%$	4
$80\% \leq x < 95\%$	5
$x \geq 95\%$	6

Oblicz, jaką ocenę otrzyma Magda z:

a) matematyki, jeśli dostała 250 punktów na 300 możliwych;

b) języka polskiego, jeśli dostała 140 punktów na 170 możliwych;

c) wychowania fizycznego, jeśli dostała 50 punktów na 55 możliwych.

6 Przyjrzyj się fakturze. Oblicz brakującą kwotę netto i brutto za usługi telekomunikacyjne.

FAKTURA VAT nr 5/2019			Termin płatności: 31.05.2019		
Lp.	Nazwa towaru / usługi	Kwota netto (w zł)	Stawka VAT (w %)	Kwota VAT (w zł)	Brutto razem (w zł)
1.	Usługi telekomunikacyjne	?	23%	11,50	?
	RAZEM ZAMÓWIENIE:		23%	11,50	
	DO ZAPŁATY		23%	11,50	

7 Adam wpłacił 2500 zł na dwuletnią lokatę oprocentowaną 4% w skali roku, z kwartalną kapitalizacją odsetek. Oblicz, jaką kwotę odbierze po 2 latach.

Rozdział IV

Równania i nierówności

TEMATY LEKCJI

1 Równania s. 67–70

2 Równania – zastosowanie s. 71–73

3 Oś liczbowa i przedziały liczbowe s. 74–79

4 Nierówności s. 80–83

5 Nierówności – zastosowanie s. 84–86

Powtórzenie rozdziału s. 87–88

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

LEKCJA

1 Równania

NA POCZĄTEK

Pomyśl dowolną liczbę. Dodaj do niej 4. Następnie wynik pomnóż przez 2. Od otrzymanej liczby odejmij 8, a następnie podziel ją na 2. Czy otrzymana liczba to ta przez Ciebie pomyślana? Spróbuj zapisać swoje czynności za pomocą działań matematycznych.

PRZYKŁAD 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia równanie $4x + 18 = 40$.

a) 6 b) 5,5

a) **KROK 1** Podstawiamy do lewej strony równania $x = 6$:

$4 \cdot 6 + 18$

KROK 2 Wykonujemy działania:

$4 \cdot 6 + 18 = 24 + 18 = 42$

KROK 3 Porównujemy otrzymany wynik z prawą stroną równania:

$42 \neq 40$

Liczba 6 nie spełnia równania $4x + 18 = 40$.

b) **ROZWIĄZANIE**

$L = 4 \cdot 5{,}5 + 18 = 22 + 18 = 40 = P$

Liczba 5,5 spełnia równanie $4x + 18 = 40$.

PODPOWIEDŹ

Dana liczba jest rozwiązaniem równania, jeżeli spełnia to równanie, tzn. po podstawieniu tej liczby w miejsce niewiadomej lewa strona równania jest równa prawej. Symbolicznie można to zapisać $L = P$, gdzie L oznacza wartość lewej strony równania, a P to wartość prawej strony równania.

ĆWICZENIE 1

Sprawdź, która z liczb: –2 czy –3 spełnia równanie.

a) $6x + 44 = 26$

b) $10x + 37 = 17$

c) $29 - 8x = 45$

d) $x - 13 = 2x - 10$

e) $-5x + 9 = 33 + 7x$

f) $(x + 2)(x + 3) = 0$

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż równanie. Sprawdź rozwiązanie.

a) $6x - 9 = 15$ b) $\frac{2}{3}(x+6) = 7$

a) **KROK 1** Do obu stron równania dodajemy 9:

$$6x - 9 = 15 \mid +9$$

$$6x - 9 + 9 = 15 + 9$$

KROK 2 Upraszczamy równanie:

$$6x = 24$$

KROK 3 Obie strony równania dzielimy przez 6:

$$6x = 24 \mid :6$$

$$x = 4$$

KROK 4 Sprawdzamy rozwiązanie równania:

$$L = 6 \cdot 4 - 9 = 24 - 9 = 15 = P$$

Rozwiązaniem równania jest $x = 4$.

b) **KROK 1** Obie strony równania mnożymy przez $\frac{3}{2}$:

$$\frac{2}{3}(x+6) = 7 \mid \cdot \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}(x+6) = \frac{3}{2} \cdot 7$$

$$x + 6 = \frac{21}{2}$$

KROK 2 Od obu stron równania odejmujemy 6:

$$x + 6 = \frac{21}{2} \mid -6$$

$$x + 6 - 6 = \frac{21}{2} - 6$$

$$x = 10\frac{1}{2} - 6$$

$$x = 4\frac{1}{2}$$

KROK 3 Sprawdzamy rozwiązanie równania:

$$L = \frac{2}{3}\left(4\frac{1}{2} + 6\right) = \frac{2}{3} \cdot 10\frac{1}{2} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{2}_{1}} = 7 = P$$

Rozwiązaniem równania jest $x = 4\frac{1}{2}$.

ĆWICZENIE 2

Rozwiąż równanie. Sprawdź rozwiązanie.

a) $3x + 4 = 31$ b) $4x - 3 = 15$ c) $\frac{1}{4}x + 5 = 3$ d) $\frac{3}{4}(x-2) = 1$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Równanie, które jest spełnione przez każdą liczbę, nazywamy **równaniem tożsamościowym**.

Równanie, które nie ma rozwiązań, nazywamy **równaniem sprzecznym**.

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż równanie.

a) $-6x - 4 + 2(3x + 2) = 0$ b) $8x = 4(2x - 5)$

ROZWIĄZANIE

a) $-6x - 4 + 2(3x + 2) = 0$

$-6x - 4 + 6x + 4 = 0$

$-6x + 6x - 4 + 4 = 0$

$0 = 0$

Równość $0 = 0$ zachodzi niezależnie od wartości x, więc rozwiązaniem jest każda liczba. Równanie $-6x - 4 + 2(3x + 2) = 0$ jest równaniem tożsamościowym.

b) $8x = 4(2x - 5)$

$8x = 8x - 20 \quad | -8x$

$0 = -20$ sprzeczność

Równość $0 = -20$ nie zachodzi niezależnie od wartości x. Równanie $8x = 4(2x - 5)$ jest równaniem sprzecznym.

ĆWICZENIE 3

Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe, czy sprzeczne.

a) $-3 + x = x - 3$ b) $2x + 4 = 3 + 2x$ c) $2x - (3 + 2x) = 9$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 202

1. Rozwiąż równanie. Sprawdź rozwiązanie.

a) $4x + 3 = 2x - 9$

b) $3x - 4 = \frac{1}{2}x + 8$

c) $x - 6 = 5x - 2$

d) $1 - 2x = 4 + x$

e) $8x + \frac{1}{2} = 4 - x$

f) $\frac{1}{2}(x - 4) = 2 - x$

2. Sprawdź, czy podane równania są spełnione przez tę samą liczbę.

a) $x - 4 = 7$ i $x + 3 = 14$

b) $2x + 1 = 5$ i $2x + 5 = 1$

c) $3 = 7 - x$ i $9 = x + 6$

d) $x = 9 - 2x$ i $5x = 18 - x$

3. Wyznacz liczbę x. W tym celu wykonaj kolejne działania.

a) liczba x → pomnóż przez 4 → dodaj 1 → pomnóż przez 2 → odejmij 2 → pomnóż przez 2 → dodaj 9 → wynik 17

b) liczba x → pomnóż przez 3 → odejmij 2 → pomnóż przez 2 → odejmij 6 → pomnóż przez $\frac{1}{2}$ → dodaj 7 → wynik 8

4. Suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest równa -12. Znajdź te liczby.

PODPOWIEDŹ

Dwie sąsiednie liczby całkowite różnią się o 1. Zatem trzy kolejne liczby całkowite mają postać: n, $n + 1$, $n + 2$.

5. Suma trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 12. Podaj te liczby.

PODPOWIEDŹ

Dwie sąsiednie liczby parzyste albo nieparzyste różnią się o 2. Zatem trzy kolejne liczby parzyste albo nieparzyste mają postać: n, $n + 2$, $n + 4$.

6. Rozwiąż równanie. W pierwszym kroku pomnóż obie strony równania przez wskazaną liczbę.

a) $\frac{4x-1}{3} = 5 \mid \cdot 3$

b) $\frac{2-3x}{4} = 1 \mid \cdot 4$

c) $\frac{2x-1}{2} = \frac{1-x}{4} \mid \cdot 4$

d) $\frac{x-3}{2} = \frac{x-2}{3} \mid \cdot 6$

e) $\frac{x+1}{3} = \frac{1-2x}{4} \mid \cdot 12$

f) $\frac{x+2}{6} = \frac{-x+3}{8} \mid \cdot 24$

ZADANIA BRANŻOWE

7. W maju wynagrodzenie netto Tomka w warsztacie ślusarskim było o 200 zł wyższe niż w kwietniu. Przez te 2 miesiące zarobił łącznie 4000 zł. Oblicz, ile Tomek zarobił w kwietniu, a ile w maju.

8. Firma ogrodnicza obsiała trawą dwa kwadratowe skwery znajdujące się po przeciwnych stronach drogi. Długość boku jednego z nich jest połową długości boku drugiego. Na czas wzrostu trawy skwery zostały ogrodzone 60 m taśmy. Podaj wymiary skwerów.

LEKCJA 2

Równania – zastosowanie

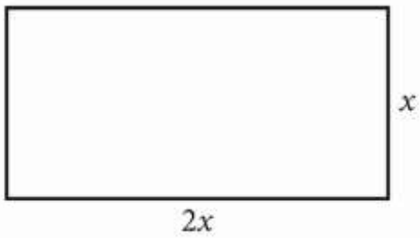
NA POCZĄTEK

Kasia kupiła mamie bukiet składający się z 25 tulipanów. Ze 100 zł otrzymała 37,50 zł reszty. Czy mogła kupić jeszcze 10 tulipanów?

PRZYKŁAD 1

Jeden z boków prostokąta jest dwukrotnie dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków tego prostokąta, jeżeli jego obwód jest równy 12 cm.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia boków prostokąta.



KROK 2 Zapisujemy równanie, korzystając z informacji o obwodzie prostokąta:

$x + 2x + x + 2x = 12$

KROK 3 Rozwiązujemy równanie:

$x + 2x + x + 2x = 12$

$6x = 12$

$x = 2$ [cm]

Długości boków prostokąta wynoszą 2 cm i 4 cm.

ĆWICZENIE 1

1.1. Jeden z boków prostokąta jest trzykrotnie dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków tego prostokąta, jeśli jego obwód jest równy 40 cm.

1.2. Jeden z boków prostokąta jest o 3 cm dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków tego prostokąta, jeśli jego obwód jest równy 28 cm.

PRZYKŁAD 2

Ania jest o 3 lata młodsza od swojego brata Rafała. Oblicz wiek rodzeństwa, jeżeli razem mają 35 lat.

KROK 1 Wprowadzamy oznaczenia:

x – wiek Ani

Rafał jest o 3 lata starszy od siostry, więc jego wiek oznaczamy przez $x + 3$.

KROK 2 Zapisujemy równanie, korzystając z informacji, że razem mają 35 lat:

$$x + x + 3 = 35$$

KROK 3 Rozwiązujemy równanie:

$$x + x + 3 = 35$$

$$2x + 3 = 35 \mid -3$$

$$2x = 32 \mid :2$$

$$x = 16$$

Ania ma 16 lat, a Rafał – 19.

ĆWICZENIE 2

2.1. Weronika jest o 5 lat starsza od swojej siostry Haliny. Oblicz wiek każdej z dziewcząt, jeśli razem mają 39 lat.

2.2. Kajetan jest o 6 lat starszy od Marka i o 2 lata młodszy od Darka. Oblicz wiek każdego z nich, jeśli razem mają 41 lat.

PRZYKŁAD 3

Olek ma pewną liczbę monet pięciozłotowych i o sześć więcej dwuzłotowych. Podaj, ile monet każdego rodzaju ma chłopiec, jeśli łącznie ma 54 zł.

KROK 1 Wprowadzamy oznaczenia:

x – liczba monet pięciozłotowych

$x + 6$ – liczba monet dwuzłotowych

KROK 2 Zapisujemy równanie, korzystając z informacji, że Olek ma 54 zł:

$$5 \cdot x + 2 \cdot (x + 6) = 54$$

nominał (5 zł) · liczba monet nominał (2 zł) · liczba monet

KROK 3 Rozwiązujemy równanie:

$$5x + 2(x + 6) = 54$$

$$5x + 2x + 12 = 54$$

$$7x + 12 = 54 \mid -12$$

$$7x = 42 \mid :7$$

$$x = 6$$

Olek ma 6 monet pięciozłotowych i 12 dwuzłotowych.

ĆWICZENIE 3

3.1. Hania ma pewną liczbę monet dwuzłotowych i o 10 mniej monet pięciozłotowych. Ile monet każdego rodzaju ma Hania, jeśli łącznie ma 55 zł?

3.2. Agata miała taką samą liczbę monet pięcio-, dwu- i jednozłotowych. Oddała koleżance trzy monety dwuzłotowe i pięć jednozłotowych. Ile monet każdego rodzaju ma obecnie Agata, jeśli teraz ma 53 zł?

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 203

1. Magda jest dwa razy starsza od Tomka i o 4 lata młodsza od Roberta. Razem mają 74 lata. Ile lat ma Tomek?

2. Za 32 lata Karol będzie miał trzy razy więcej lat niż obecnie. Ile lat będzie miał chłopiec za 3 lata?

ZADANIA BRANŻOWE

3. Krawcowa chciała obszyć koronką dwie kwadratowe serwety, z których jedna ma bok o 20 cm krótszy niż druga. Suma obwodów obu serwet to 7,2 m. Oblicz długość boku większej serwety.

4. Kuba ma własny warsztat samochodowy. Każdy z jego klientów musi zapłacić określoną kwotę za wymienione części oraz 40 zł za każdą godzinę pracy Kuby. Ostatni klient zapłacił 480 zł, z czego $\frac{3}{4}$ to koszt części. Ile godzin trwała naprawa samochodu?

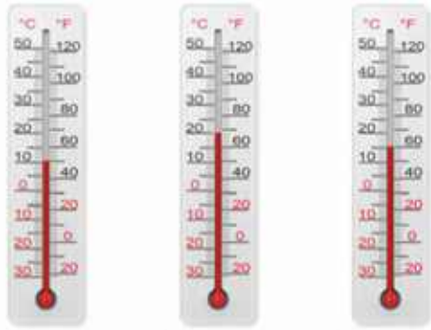
5. Zakład stolarski świadczy m.in. usługi montażu drzwi zewnętrznych i progów drzwiowych. Cena montażu progów stanowi 5% ceny montażu drzwi. Państwo Kowalczykowie zamówili w tym zakładzie montaż pięciu par drzwi i trzech progów na łączną kwotę 1545 zł. Oblicz, ile kosztuje montaż drzwi, a ile progów.

LEKCJA

3 Oś liczbowa i przedziały liczbowe

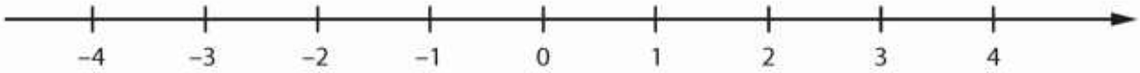
NA POCZĄTEK

Na podstawie zdjęcia odpowiedz, jak zmieniała się temperatura powietrza w Gdańsku w ciągu dnia.



Temperatura o godzinie 8:00 | Temperatura o godzinie 12:00 | Temperatura o godzinie 16:00

Oś liczbowa to wygodny sposób prezentacji liczb rzeczywistych.



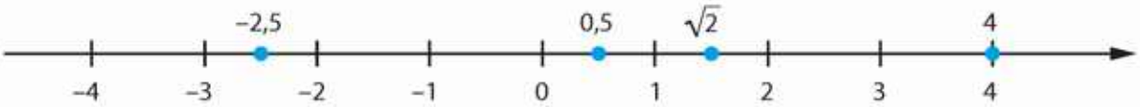
Oś liczbowa to prosta, na której zaznaczony jest punkt zerowy – punkt, któremu odpowiada liczba 0, zwrot dodatni i jednostka. Kiedy rysujemy oś liczbową, czasami wygodnie jest zaznaczyć na niej dwie dowolne liczby, niekoniecznie 0 i 1.

PRZYKŁAD 1

Narysuj oś liczbową. Zaznacz na niej i podpisz punkty odpowiadające liczbom: 0,5; 4; –2,5 i $\sqrt{2}$. Skorzystaj z przybliżenia $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

ROZWIĄZANIE

Rysujemy oś liczbową i zaznaczamy punkty:



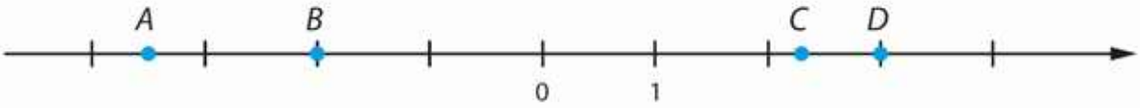
ĆWICZENIE 1

Narysuj oś liczbową. Zaznacz na niej i podpisz punkty odpowiadające podanym liczbom.

a) 3,5; –1,5; –0,5; 1,25 **b)** –3; –1,25; –0,75; $2\sqrt{2}$ **c)** 2; 3; 5; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$

PRZYKŁAD 2

Punkty A, B, C i D, zaznaczone na osi liczbowej, odpowiadają liczbom należącym do zbioru $\{-2; 3; -3{,}5; 2{,}3\}$. Zapisz współrzędne punktów A, B, C i D.

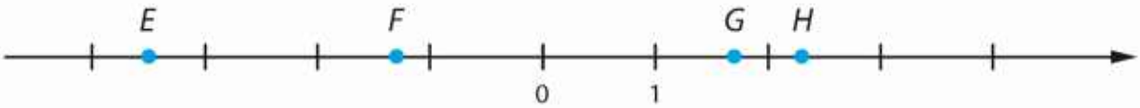


ROZWIĄZANIE

$A = -3{,}5$; $B = -2$; $C = 2{,}3$; $D = 3$

ĆWICZENIE 2

Punkty E, F, G i H, zaznaczone na osi liczbowej, odpowiadają liczbom należącym do zbioru $\{2\frac{1}{3}, \sqrt{3}, -1\frac{1}{3}, -3\frac{1}{2}\}$. Zapisz współrzędne punktów E, F, G i H.



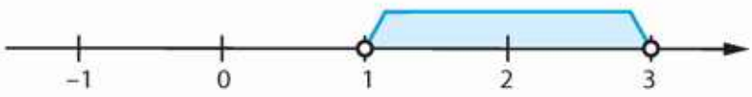
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Przedziałem otwartym (obustronnie otwartym) od a do b nazywamy zbiór liczb x, które są większe od a i mniejsze od b, czyli spełniają warunek $a < x < b$. Przedział otwarty od a do b oznaczamy $(a; b)$. Liczby a i b to końce przedziału. Zwróć uwagę, że liczby a i b nie należą do przedziału $(a; b)$.

PRZYKŁAD 3

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x, które spełniają warunek $1 < x < 3$. Zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

KROK 1 Przedstawiamy zbiór liczb spełniających warunek $1 < x < 3$ na osi liczbowej:



PODPOWIEDŹ

Liczby 1 i 3 nie spełniają warunku $1 < x < 3$, dlatego na rysunku zaznaczamy je pustymi kółkami.

KROK 2 Zapisujemy zbiór w postaci przedziału: $(1; 3)$.

ĆWICZENIE 3

Zaznacz na osi liczbowej przedział otwarty. Ile liczb całkowitych należy do tego przedziału?

a) $(0; 4)$ b) $(-1; 5)$ c) $(-3; 2)$

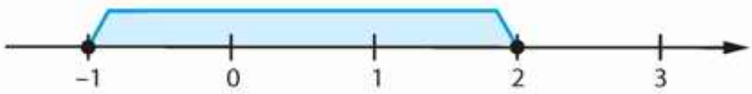
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Przedziałem domkniętym (obustronnie domkniętym) od a do b nazywamy zbiór tych liczb x, które są większe lub równe a i mniejsze lub równe b, czyli spełniają warunek $a \leq x \leq b$. Przedział domknięty od a do b oznaczamy $\langle a; b \rangle$. Liczby a i b to końce przedziału.

PRZYKŁAD 4

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x, które spełniają warunek $-1 \leq x \leq 2$. Zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

KROK 1 Przedstawiamy zbiór liczb spełniających warunek $-1 \leq x \leq 2$ na osi liczbowej:



PODPOWIEDŹ

Liczby –1 i 2 spełniają warunek $-1 \leq x \leq 2$, dlatego na rysunku zaznaczamy je zamalowanymi kółkami.

KROK 2 Zapisujemy zbiór w postaci przedziału: $\langle -1; 2 \rangle$.

ĆWICZENIE 4

Zaznacz na osi liczbowej podany przedział domknięty. Ile liczb całkowitych należy do tego przedziału?

a) $\langle -2; 3 \rangle$ b) $\langle -1\frac{1}{2}; 4 \rangle$ c) $\langle \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \rangle$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeśli do przedziału należy tylko jego lewy koniec, przedział ten nazywamy **lewostronnie domkniętym**, a jeśli należy do niego tylko prawy koniec – **prawostronnie domkniętym**.

PRZYKŁAD 5

Zaznacz na osi liczbowej przedział $\langle -3; 2)$.

ROZWIĄZANIE

PODPOWIEDŹ

Liczba –3 należy do przedziału, więc na rysunku zaznaczamy ją zamalowanym kółkiem. Liczba 2 nie należy do przedziału, zatem zaznaczamy ją pustym kółkiem.

ĆWICZENIE 5

Zaznacz na osi liczbowej poniższy przedział. Podaj warunek, jaki spełniają liczby należące do tego przedziału. Wypisz wszystkie liczby całkowite spełniające ten warunek.

a) $\langle -2; 1)$ b) $(-4; 2\rangle$ c) $(0; 3\rangle$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

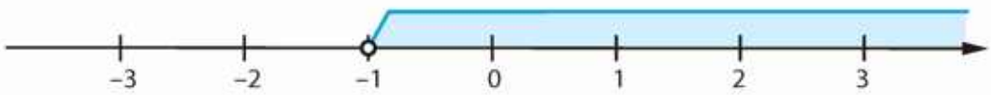
Przedziałem otwartym (nieograniczonym) od a do ∞ lub od $-\infty$ do a nazywamy zbiór tych liczb x, które spełniają odpowiednio warunki $x > a$ lub $x < a$. Oznaczamy je odpowiednio $(a; \infty)$ lub $(-\infty; a)$. Znak ∞ to symbol nieskończoności.

PRZYKŁAD 6

a) Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek $x > -1$ i zapisz go w postaci przedziału.

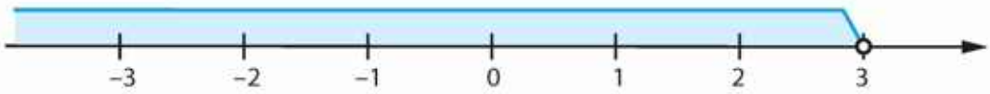
b) Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek $x < 3$ i zapisz go w postaci przedziału.

a) **KROK 1** Zaznaczamy na osi zbiór wszystkich liczb większych od –1:



KROK 2 Zapisujemy zbiór w postaci przedziału: $(-1; \infty)$.

b) **KROK 1** Zaznaczamy na osi zbiór wszystkich liczb mniejszych od 3:



KROK 2 Zapisujemy zbiór w postaci przedziału: $(-\infty; 3)$.

ĆWICZENIE 6

a) Zaznacz na osi liczbowej przedział $(-2; \infty)$. Podaj warunek, jaki spełniają liczby należące do tego przedziału.

b) Zaznacz na osi liczbowej przedział $(-\infty; 2)$. Podaj warunek, jaki spełniają liczby należące do tego przedziału. Ile liczb naturalnych spełnia ten warunek?

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Przedziałem lewostronnie domkniętym (nieograniczonym) od a do ∞ nazywamy zbiór tych liczb x, które spełniają warunek $x \geq a$. Oznaczamy go $\langle a; \infty)$.

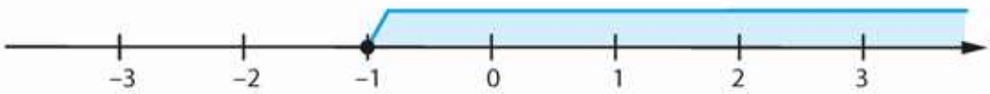
Przedziałem prawostronnie domkniętym (nieograniczonym) od $-\infty$ do a nazywamy zbiór tych liczb x, które spełniają warunek $x \leq a$. Oznaczamy go $(-\infty; a\rangle$.

PRZYKŁAD 7

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających daną nierówność i zapisz go w postaci przedziału.

a) $x \geq -1$ b) $x \leq 3$

a) **KROK 1** Zaznaczamy na osi zbiór $x \geq -1$:



KROK 2 Zapisujemy zbiór w postaci przedziału: $\langle -1; \infty)$.

b) **KROK 1** Zaznaczamy na osi zbiór $x \leq 3$:

KROK 2 Zapisujemy zbiór w postaci przedziału: $(-\infty; 3\rangle$.

ĆWICZENIE 7

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających daną nierówność i zapisz go w postaci przedziału.

a) $x \leq -4$ b) $x \geq 5$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kiedy piszemy, że liczba 2 należy do przedziału (1; 3), używamy oznaczenia $2 \in (1; 3)$. Symbol „$\in$" czytamy „należy".

Gdy piszemy, że liczba 4 nie należy do przedziału (1; 3), używamy oznaczenia $4 \notin (1; 3)$. Symbol „$\notin$" czytamy „nie należy".

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 203

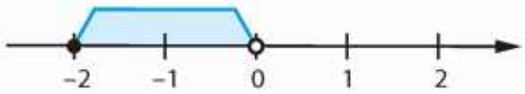
1. Odpowiedz, które z liczb –2, –1, 0, 1, 2 należą do podanego przedziału. Zaznacz go na osi liczbowej.

a) $(-3;1)$
b) $\left(\frac{1}{2};4\right)$
c) $\langle -3;0\rangle$
d) $\left\langle -1;1\frac{1}{2}\right\rangle$
e) $\left\langle -5;\frac{1}{2}\right)$
f) $\left\langle 0;3\frac{1}{2}\right)$
g) $(-2;0\rangle$
h) $(-1;\sqrt{2}\rangle$
i) $(-\infty;4)$
j) $(-\infty;-1\rangle$
k) $(-4;\infty)$
l) $\langle 2;\infty)$

2. Zapisz symbolicznie poniższe przedziały i podaj warunki, które muszą spełniać należące do nich liczby.

a)

b)

c)


d)

3. Zapisz w postaci nierówności warunek, który spełniają liczby należące do danego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

a) $(-4;2)$
b) $\left(1;3\frac{1}{2}\right\rangle$
c) $\langle -6;1\rangle$
d) $\left\langle -3;-2\frac{1}{2}\right)$
e) $\left(2\frac{1}{2};\infty\right)$
f) $\langle -4;\infty)$
g) $\left(-\infty;3\frac{1}{2}\right)$
h) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle$

ZADANIA BRANŻOWE

4. Zapoznaj się z tabelą. Odpowiedz, jakiej wysokości mandat i ile punktów karnych otrzyma kierowca, który po drodze dopuszczającej poruszanie się z prędkością 50 km/h jedzie z prędkością:

a) 58 km/h, b) 63 km/h, c) 71 km/h, d) 80 km/h.

Przekroczenie dopuszczalnej prędkości	Wysokość mandatu i liczba punktów karnych w 2018 r.
do 10 km/h	do 50 zł
11–20 km/h	od 50 do 100 zł i 2 pkt karne
21–30 km/h	od 100 do 200 zł i 4 pkt karne
31–40 km/h	od 200 do 300 zł i 6 pkt karnych
41–50 km/h	od 300 do 400 zł i 8 pkt karnych
51 km/h i więcej	od 400 do 500 zł i 10 pkt karnych

LEKCJA

4 Nierówności

NA POCZĄTEK

Zapoznaj się z ofertą firm taksówkarskich. Która jest bardziej korzystna, jeśli chcesz przejechać trasę długości 10 km?

PRZYKŁAD 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność $4x - 9 < 1$.

a) 2 b) 3

a) **KROK 1** Obliczamy wartość lewej strony nierówności dla $x = 2$:

$L = 4 \cdot 2 - 9 = 8 - 9 = -1$

KROK 2 Porównujemy otrzymaną liczbę z prawą stroną nierówności.
-1 jest mniejsze od 1, więc liczba 2 spełnia nierówność $4x - 9 < 1$.

b) **ROZWIĄZANIE**

$L = 4 \cdot 3 - 9 = 12 - 9 = 3$

3 nie jest mniejsze od 1, więc liczba 3 nie spełnia nierówności $4x - 9 < 1$.

ĆWICZENIE 1

Sprawdź, czy dana liczba spełnia nierówność $\frac{1}{2}x - 2 < 1$.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich liczb, które ją spełniają. Nierówności, w których występują znaki < i >, nazywamy **nierównościami ostrymi.** Nierówności, w których występują znaki ≥ i ≤, nazywamy **nierównościami nieostrymi.**

PRZYKŁAD 2

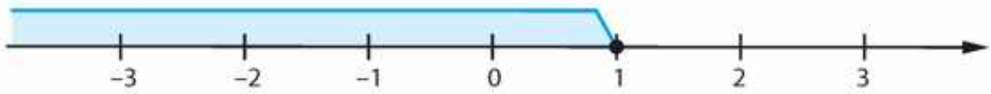
Rozwiąż nierówność $x - 5 \leq -4$. Zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

KROK 1 Rozwiązujemy nierówność $x - 5 \leq -4$. Do obu stron nierówności dodajemy 5 i upraszczamy – nie zmienia to jej zbioru rozwiązań:

$$x - 5 \leq -4 \mid +5$$
$$x - 5 + 5 \leq -4 + 5$$
$$x \leq 1$$

Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $(-\infty; 1\rangle$.

KROK 2 Zaznaczamy zbiór rozwiązań nierówności na osi liczbowej:



ĆWICZENIE 2

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór jej rozwiązań.

a) $x + 29 < 27$ b $x - \frac{1}{2} \geq 2\frac{1}{2}$ c) $2x - 3 < x - 2$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają te same zbiory rozwiązań.

PRZYKŁAD 3

Sprawdź, czy nierówności $x - 3 < 16$ i $x + 6 < 25$ są równoważne.

KROK 1 Rozwiązujemy nierówności:

$$x - 3 < 16 \mid +3 \qquad x + 6 < 25 \mid -6$$
$$x < 19 \qquad x < 19$$

KROK 2 Porównujemy zbiory rozwiązań obu nierówności.
Zbiory rozwiązań nierówności są równe, zatem nierówności są równoważne.

ĆWICZENIE 3

Sprawdź, czy podane nierówności są równoważne.

a) $x + 5 < -3$ i $-x - 2 > 6$

b) $x + \frac{1}{2} \geq 1\frac{1}{2}$ i $x + 3\frac{3}{4} \geq 4\frac{3}{4}$

CIEKAWOSTKA

Nie zawsze w matematyce używano symboli „<" i „>". Po raz pierwszy zostały one wprowadzone ok. 1630 r. przez angielskiego matematyka Thomasa Harriota [czyt.: tomasa hariota].

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Nierówność, która nie jest spełniona przez żadną liczbę, to **nierówność sprzeczna.**

Nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę, nazywamy **nierównością tożsamościową.**

PRZYKŁAD 4

Rozwiąż nierówność.

a) $x + 1 > x + 3$ b) $x + 1 < x + 3$

ROZWIĄZANIE

a) $x + 1 > x + 3 \mid -x$
$1 > 3$

Nierówność $1 > 3$ nie jest prawdziwa. Oznacza to, że nie istnieje liczba x, która spełnia nierówność $x + 1 > x + 3$. Zatem $x + 1 > x + 3$ jest nierównością sprzeczną.

b) $x + 1 < x + 3 \mid -x$
$1 < 3$

Nierówność $1 < 3$ jest prawdziwa. Jej prawdziwość nie zależy od wyboru liczby x. Oznacza to, że nierówność $x + 1 < x + 3$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą. Zatem $x + 1 < x + 3$ jest nierównością tożsamościową.

ĆWICZENIE 4

Sprawdź, czy podana nierówność jest sprzeczna czy tożsamościowa.

a) $x + 2 < x$ b) $6 + 3x \geq 3x$ c) $x - (x - 1) \leq 0$ d) $2x \leq 6 - (2 - 2x)$

PRZYKŁAD 5

Rozwiąż nierówność $6x + 5 < 17$.

ROZWIĄZANIE

$6x + 5 < 17 \mid -5$
$6x < 12 \mid : 6$
$x < 2$

Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $(-\infty; 2)$.

ĆWICZENIE 5

Rozwiąż nierówność.

a) $3x + 7 \leq 34$ b) $\frac{1}{2}x - 1 > 2$ c) $5x - 7 \geq 3x + 5$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną, to po **zmianie zwrotu nierówności** otrzymamy nierówność równoważną do danej.

PRZYKŁAD 6

Rozwiąż nierówność.

a) $-\frac{1}{3}x > 5$ b) $-6x - 4 \leq -13$

ROZWIĄZANIE

a) $-\frac{1}{3}x > 5 \mid \cdot(-3)$
$x < -15$

b) $-6x - 4 \leq -13 \mid +4$
$-6x \leq -9 \mid :(-6)$
$x \geq \frac{3}{2}$

ĆWICZENIE 6

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór jej rozwiązań.

a) $-3x - 7 < 2$ b) $x - 2 \geq 3x - 8$ c) $-2x < 3 + 4x$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 204

1. Rozwiąż nierówność i zaznacz jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $x + 5 \leq 2$ c) $6 - 3x < 5 - 4x$ e) $-\frac{2}{5}x \leq -2$

b) $2x + 1 \geq x - 3$ d) $2 - (1 - 3x) > 2x$ f) $-\frac{5}{3}x - 8 > 2$

2. Które z liczb należących do zbioru $\left\{-6, \frac{1}{2}, 2\right\}$ spełniają podaną nierówność?

a) $4x - 4 < 4$ b) $2x - 3 \geq -2$ c) $3x + 3 > 2x - 5$

3. Rozwiąż nierówność. Podaj liczby całkowite ujemne, które ją spełniają.

a) $4x + 9 > x$ b) $x - 4 \leq 6x + 16$ c) $3 - x < 8 - \frac{1}{2}x$

LEKCJA 5

Nierówności – zastosowanie

NA POCZĄTEK

Tomek chce kupić smartfona za 1510 zł. Ile pieniędzy powinien odkładać miesięcznie, aby po roku mógł go kupić?

PRZYKŁAD 1

Zapisz w postaci nierówności podany warunek. Rozwiąż tę nierówność.

a) Jeśli liczbę x zwiększymy o 8, to otrzymamy liczbę nie większą niż 14.

b) Jeśli od podwojonej liczby x odejmiemy 7, to otrzymamy liczbę nie mniejszą niż 3.

a) **KROK 1** Zapisujemy nierówność. Sformułowanie „nie większą niż" oznacza „mniejszą lub równą":

$x + 8 \leq 14$

KROK 2 Rozwiązujemy nierówność:

$x + 8 \leq 14 \mid -8$

$x \leq 6$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty; 6\rangle$.

b) **ROZWIĄZANIE**

$2x - 7 \geq 3 \mid +7$

$2x \geq 10 \mid :2$

$x \geq 5$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\langle 5; \infty)$.

PODPOWIEDŹ

Sformułowanie „nie mniejszą niż" oznacza „większą lub równą".

ĆWICZENIE 1

Zapisz w postaci nierówności podany warunek. Rozwiąż tę nierówność.

a) Jeśli liczbę x zmniejszymy o 11, to otrzymamy liczbę nie większą niż 9.

b) Jeśli potrojoną liczbę x zwiększymy o 17, to otrzymamy liczbę nie mniejszą niż 23.

To się liczy!

Osoby, które pracują w branży usługowej, mogą zdobywać nowych klientów dzięki ofertom bardziej atrakcyjnym cenowo niż te konkurencji. Tak często postępują malarze czy inni specjaliści od prac wykończeniowych. Poniższe zadanie pokaże Wam, na co zwrócić uwagę przy porównywaniu ofert różnych firm.

ZADANIE BRANŻOWE

Oblicz, przy jakiej powierzchni tapetowania ścian wraz z gruntowaniem oferta firmy Piękne wnętrze jest bardziej opłacalna dla klienta.

PRZYKŁAD 2

Bartek z ostatnich trzech sprawdzianów zdobył 23, 17 i 18 punktów. Oblicz, ile co najmniej punktów musi dostać na kolejnym sprawdzianie, by średnia liczba punktów była większa od 20.

KROK 1 Oznaczmy przez x liczbę punktów zdobytych przez Bartka z czwartego sprawdzianu.

KROK 2 Korzystając z informacji w ramce, układamy nierówność:

$$\frac{23+17+18+x}{4} > 20$$

KROK 3 Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{23+17+18+x}{4} > 20 \quad | \cdot 4$$

$$58 + x > 80 \quad | -58$$

$$x > 22$$

PODPOWIEDŹ

Średnia punktów ze sprawdzianów to:

$$\frac{\text{suma punktów}}{\text{liczba sprawdzianów}}$$

Bartek z kolejnego sprawdzianu musi zdobyć co najmniej 23 punkty.

ĆWICZENIE 2

Ze sprawdzianu z matematyki Kasia zdobyła 22 punkty, Ewa – 24, Agata – 32, a Paulina – 34. Oblicz, ile punktów otrzymała Gosia, jeśli średnia liczba punktów uzyskanych przez tę piątkę uczennic była mniejsza niż 26.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 205

1. Monika miesięcznie odkłada 25 zł, a Bartek 40 zł. Po ilu miesiącach kwota zgromadzona przez Bartka będzie większa o co najmniej 100 zł od kwoty zgromadzonej przez Monikę?

2. Podaj możliwe wartości n dla poniższego warunku.

a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną n, od otrzymanego iloczynu odejmiemy 9, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę mniejszą od 21.

b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną n, do otrzymanego iloczynu dodamy 17, a uzyskaną sumę podzielimy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 1.

3. Aby otrzymać ocenę dobrą z egzaminu składającego się z trzech części, trzeba łącznie uzyskać co najmniej 60% punktów możliwych do zdobycia. Z każdej części egzaminu można dostać maksymalnie 50 punktów. Adam z pierwszej części otrzymał 22 punkty, a z drugiej 42. Oblicz, ile co najmniej punktów musi zdobyć z trzeciej części, by zdać egzamin na ocenę dobrą.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Wynajęcie na dzień sali konferencyjnej mogącej pomieścić do 100 osób kosztuje 2000 zł. Dodatkowo za catering trzeba zapłacić 55 zł od osoby. Oblicz, ile maksymalnie osób może wziąć udział w konferencji, jeśli na koszty jej organizacji firma przeznaczyła co najwyżej 6000 zł.

5. Artur zatrudnił się w sklepie motoryzacyjnym. Na jego pensję brutto składa się wynagrodzenie zasadnicze w wysokości 3500 zł oraz 0,5% od miesięcznego przychodu sklepu. Oblicz, ile co najmniej powinien wynieść miesięczny przychód sklepu, aby pensja Artura wyniosła przynajmniej 4500 zł brutto.

6. Pan Karol z firmy remontowej chce wypożyczyć młot pneumatyczny na okres powyżej 20 dni. Oblicz, przy jakiej liczbie dni oferta 1 jest bardziej korzystna.

Powtórzenie rozdziału
RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Zaznacz przedział na osi liczbowej i wypisz wszystkie liczby naturalne należące do tego przedziału.

a) $(-\infty; 4)$ b) $(3; 6\frac{1}{2}\rangle$ c) $\langle 11; 14\rangle$

2 Rozwiąż równanie $\frac{9x-12}{2} = 4{,}5x - 6$.

3 Rozwiąż równanie $6x - 2(5 - 4x) = 2x - 2$ i sprawdź, czy jego rozwiązanie należy do zbioru rozwiązań nierówności $x - 1 > 2x - 2$.

4 Dla jakich wartości x wyrażenie $2x + \frac{x-5}{2}$ jest ujemne?

5 Ola jest trzy razy młodsza od Piotrka i o 2 lata starsza od Łukasza. Razem mają 68 lat. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Ola ma 14 lat.

B. Piotrek i Łukasz razem mają 44 lata.

C. Łukasz jest o 30 lat młodszy od Piotrka.

6 Jaka liczba ma następującą własność: iloraz tej liczby przez $\frac{2}{3}$ jest o 18 większy niż jej iloczyn przez $\frac{3}{4}$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. -242 B. -24 C. 24 D. 242

7 Za 20 lat Robert będzie miał dwa razy więcej lat niż obecnie. Ile lat miał Robert 3 lata temu? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 17 B. 20 C. 23 D. 37

8 Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 87. Podaj te liczby.

9 Leon wydał połowę swojego kieszonkowego. Następnie 10 zł pożyczył koledze. Oblicz, ile dostał kieszonkowego, jeśli obecnie została mu $\frac{1}{3}$ z tej kwoty.

10 Ida wydała $\frac{2}{3}$ swoich pieniędzy w sklepie papierniczym. W następnym sklepie wydała $\frac{3}{4}$ pozostałej kwoty. Oblicz, ile pieniędzy miała Ida na początku, jeżeli zostało jej 20 zł.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

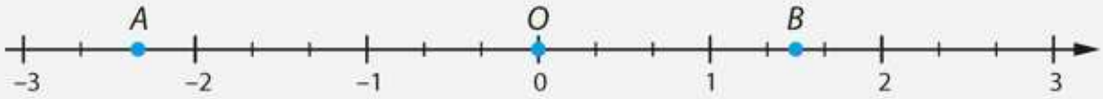
1 Liczba trzykrotnie większa od x jest o 4 mniejsza od podwojonej sumy liczb x i 9. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Równanie $3x = 2(x + 9) - 4$ opisuje treść zdania.

B. Równanie $3x - 4 = 2(x + 9)$ opisuje treść zdania.

C. Podany warunek spełnia liczba $x = 14$.

2 Na osi liczbowej zaznaczono punkty A, B i O.



Wybierz zdania prawdziwe.

A. Odległość między punktem A i punktem O jest równa $2\frac{1}{3}$.

B. Odległość między punktem B i punktem O jest mniejsza od 2.

C. Odległość między punktami A i B jest równa 4.

3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Przedziałem, do którego należą dokładnie cztery liczby całkowite, jest przedział

A. $\langle -2; 2\rangle$. **B.** $\langle 0; 4\rangle$. **C.** $(1; 4)$. **D.** $(1; 6)$.

4 Rozwiąż równanie i sprawdź, czy rozwiązanie należy do zbioru $(1; 5\rangle$.

a) $x + 2 = -4x + 5$ **b)** $5x - 4 = 2(x + 3)$ **c)** $\frac{x}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{3}{2}$

5 Która z liczb nie spełnia nierówności $3 - 5x > x - 9$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. -1 **B.** 0 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 3

6 Rozwiąż nierówność. Zaznacz zbiór jej rozwiązań na osi liczbowej i sprawdź, czy liczby –2, 0, 1 do niego należą.

a) $-\frac{3}{4}x \geq 15$ **b)** $2(x - 3) < -6$ **c)** $\frac{x+14}{2} \leq \frac{3x-16}{8}$

7 Suma czterech kolejnych liczb naturalnych jest równa 38. Znajdź te liczby.

8 Marcin ma kolekcję 127 płyt CD z muzyką. Chce je poukładać do pudełek, w których mieści się po dziewięć płyt. Oblicz, ile takich pudełek potrzebuje.

9 Ania miesięcznie odkłada 25 zł. Tomek jednorazowo odłożył 150 zł i dodatkowo miesięcznie odkłada po 15 zł. Po ilu miesiącach oszczędności Ani będą wyższe niż Tomka? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 10 **B.** 14 **C.** 15 **D.** 16

Rozdział V

Układy równań liniowych

TEMATY LEKCJI

1 Co to jest układ równań? s. 90–93

2 Metoda podstawiania s. 94–97

3 Metoda przeciwnych współczynników s. 98–101

4 Układy równań – zastosowanie s. 102–104

Powtórzenie rozdziału s. 105–106

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

LEKCJA 1

Co to jest układ równań?

NA POCZĄTEK

Jarek kupił kilka cukinii po 3 zł za sztukę i kilka kolb kukurydzy po 2 zł za sztukę. Zapłacił za nie łącznie 20 zł. Czy podaną informację umiesz zapisać w postaci równania?

PRZYKŁAD 1

Podaj dwie przykładowe pary liczb spełniające równanie $x + 2y = 10$.

KROK 1 Wybieramy dowolną liczbę x, np. $x = 0$.

KROK 2 Podstawiamy $x = 0$ do równania $x + 2y = 10$:

$$0 + 2y = 10$$

KROK 3 Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$0 + 2y = 10$$
$$2y = 10$$
$$y = 5$$

Równanie spełnia para liczb $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$

KROK 4 Powtarzamy kroki 2–3 dla innej liczby x, np. $x = -2$.

Równanie spełnia para liczb $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$

ĆWICZENIE 1

Podaj trzy pary liczb x i y spełniające podane równanie.

a) $3x + y = 12$ **b)** $2x + 3y = 5$ **c)** $x - 3y = 1$ **d)** $\frac{1}{2}x - 2y = 3$

Równania $x + 2y = 10$, $3x + y = 12$, $2x + 3y = 5$, $x - 3y = 1$ oraz $\frac{1}{2}x - 2y = 3$ to przykłady **równań z dwiema niewiadomymi**: x i y. Równania te są spełnione przez nieskończenie wiele par liczb.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Układem dwóch równań z dwiema niewiadomymi (lub krótko układem równań) nazywamy dwa równania opisujące związek między dwiema niewiadomymi. **Rozwiązanie układu równań** to para liczb, która spełnia jednocześnie oba równania.

PRZYKŁAD 2

Sprawdź, czy para liczb $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ spełnia układ równań $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$

KROK 1 Podstawiamy $x = 3$ i $y = 5$ do pierwszego równania:

$4 \cdot 3 - 5 = 12 - 5 = 7$

Równanie jest spełnione.

KROK 2 Podstawiamy $x = 3$ i $y = 5$ do drugiego równania:

$-3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = -9 + 10 = 1$

Równanie jest spełnione.

Para liczb $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ spełnia układ równań $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$, ponieważ spełnia oba równania.

ĆWICZENIE 2

2.1. Sprawdź, czy para liczb $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$ spełnia układ równań.

a) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = -4 \\ x + \frac{2}{3}y = 2 \end{cases}$

2.2. Odgadnij parę liczb x i y, która spełnia podany układ równań.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 8 \\ 3x - y = 28 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 4y = 10 \\ 5x - 3y = 20 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10x + 10y = 50 \\ 10x + 9y = 47 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 100x + 100y = 700 \\ 101x + 100y = 703 \end{cases}$

PRZYKŁAD 3

Alicja ma w portmonetce 16 zł w monetach jedno- i dwuzłotowych. Łącznie ma 10 monet. Podaj, ile monet jedno-, a ile dwuzłotowych ma Alicja.

KROK 1 Wprowdzamy oznaczenia:

j – liczba monet jednozłotowych

d – liczba monet dwuzłotowych

KROK 2 Zapisujemy zdanie „Alicja ma w portmonetce 16 zł w monetach jedno- i dwuzłotowych." w postaci równania:

$1 \cdot j + 2 \cdot d = 16$

KROK 3 Zapisujemy zdanie „Łącznie ma 10 monet." w postaci równania:

$j + d = 10$

KROK 4 Otrzymujemy dwa równania opisujące sytuację z zadania. Zapisujemy jedno równanie pod drugim i łączymy klamrą.

$$\begin{cases} j + 2d = 16 \\ j + d = 10 \end{cases}$$

PODPOWIEDŹ

W krokach 5–6 szukamy pary liczb, która będzie spełniać oba równania jednocześnie.

KROK 5 Szukamy pary liczb, która spełnia równanie $j + d = 10$. Liczby j i d mogą być tylko liczbami naturalnymi, zatem równanie $j + d = 10$ spełnia dziewięć par liczb:

$$\begin{cases} j = 1 \\ d = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} j = 4 \\ d = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} j = 7 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j = 2 \\ d = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} j = 5 \\ d = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} j = 8 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j = 3 \\ d = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} j = 6 \\ d = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} j = 9 \\ d = 1 \end{cases}$$

KROK 6 Po kolei sprawdzamy, która z powyższych par spełnia równanie $j + 2d = 16$. W tym celu podstawiamy w miejsce j i d odpowiednie liczby:

$\begin{cases} j = 1 \\ d = 9 \end{cases}$, $1 + 2 \cdot 9 = 1 + 18 = 19 \neq 16$, zatem para liczb $j = 1$ i $d = 9$ nie spełnia równania $j + 2d = 16$.

$\begin{cases} j = 2 \\ d = 8 \end{cases}$, $2 + 2 \cdot 8 = 2 + 16 = 18 \neq 16$, zatem para liczb $j = 2$ i $d = 8$ nie spełnia równania $j + 2d = 16$.

W ten sam sposób sprawdzamy, czy pozostałe pary liczb spełniają równanie $j + 2d = 16$.

Rozwiązaniem układu równań jest tylko para liczb

$\begin{cases} j = 4 \\ d = 6 \end{cases}$, bo $4 + 2 \cdot 6 = 4 + 12 = 16$ oraz $4 + 6 = 10$.

Alicja ma w portmonetce cztery monety jednozłotowe i sześć monet dwuzłotowych.

ĆWICZENIE 3

Oznacz niewiadome i zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Monika i Łukasz mają razem 87 książek. Monika ma o 22 książki więcej od Łukasza.

b) Kasia kupiła kilka bułek po 0,3 zł i rogali po 0,6 zł – łącznie siedem sztuk pieczywa. Zapłaciła za nie 3 zł.

c) Gitara elektryczna i wzmacniacz kosztowały razem 2400 zł. Cenę gitary obniżono o 20%, a cenę wzmacniacza podniesiono o 10%. Po tych zmianach za zestaw trzeba było zapłacić 2220 zł.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 206

1. Sprawdź, czy para liczb $\begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \end{cases}$ spełnia układ równań.

a) $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 4a - b = -18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a = 10 - 3b \\ 5 + b = 4 - 5a \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4a - 1 = 3b - 7 \\ a + b = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = 2 \\ -3a - b = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b = -4 \\ 8a - b = -30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y = \frac{5}{3} \\ 4x - 14y = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -15x - 12y = 6 \\ \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}y = -1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,b = 3\sqrt{2} \\ 7\sqrt{3}\,a + 3{,}5\sqrt{3}\,b = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \sqrt{7}\,a - \sqrt{7}\,b = -5\sqrt{7} \\ 8\sqrt{11}\,a + 5{,}5\sqrt{11}\,b = 0 \end{cases}$

2. Oznacz niewiadome i zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Ania postanowiła posadzić w ogrodzie truskawki i poziomki. Kupiła łącznie 35 sadzonek: poziomek po 2 zł za sztukę i truskawek po 1,6 zł za sztukę. Zapłaciła za nie 62 zł.

b) Dwutomowe wydanie pewnej powieści liczy łącznie 1080 stron. Pierwszy tom ma o 138 stron mniej niż drugi.

c) W magazynie sprzętu sportowego było 20 piłek dwóch rodzajów: do siatkówki i koszykówki. Chłopcy wzięli na zajęcia dwie piłki do siatkówki i trzy do koszykówki. W magazynie zostało dwa razy więcej piłek do siatkówki niż do koszykówki.

LEKCJA

2 Metoda podstawiania

NA POCZĄTEK

Mama kupiła Kasi i Tomkowi spodnie. Za obie pary zapłaciła łącznie 150 zł. Spodnie Kasi były dwa razy droższe od spodni Tomka. Czy cena spodni Tomka stanowi $\frac{1}{3}$ zapłaconej kwoty? Dlaczego?

Aby znaleźć parę liczb, która jest rozwiązaniem danego układu równań, możemy zastosować różne metody. Pierwszą, którą omówimy, jest **metoda podstawiania**. Polega ona na wyznaczeniu z jednego z równań wybranej niewiadomej, a następnie podstawieniu otrzymanego wyrażenia do drugiego równania. Dzięki temu powstaje równanie z jedną niewiadomą, które potrafimy rozwiązać.

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

KROK 1 Wybieramy równanie $x - y = -3$ i wyznaczamy niewiadomą x.

Drugie równanie przepisujemy:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + y \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

PODPOWIEDŹ

Kiedy wyznaczamy z jednego z równań określoną niewiadomą, wybieramy to równanie, z którego łatwiej jest ją wyznaczyć.

KROK 2 Wyznaczoną niewiadomą x, czyli $-3 + y$, podstawiamy w miejsce x w drugim równaniu. Pierwsze równanie przepisujemy bez zmian:

$$\begin{cases} x = -3 + y \\ 3(-3 + y) + 2y = 1 \end{cases}$$

KROK 3 Rozwiązujemy drugie równanie i otrzymujemy niewiadomą y. Pierwsze równanie przepisujemy:

$$\begin{cases} x = -3 + y \\ -9 + 3y + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 3 \\ -9 + 5y = 1 \mid +9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + y \\ 5y = 10 \mid :5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + y \\ y = 2 \end{cases}$$

KROK 4 Podstawiamy wyznaczoną wartość y do pierwszego równania i obliczamy niewiadomą x:

$$\begin{cases} x = -3 + 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

KROK 5 Sprawdzamy otrzymane rozwiązanie. W tym celu podstawiamy uzyskane wartości $x = -1$ i $y = 2$ do obu równań układu $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ i sprawdzamy, czy je spełniają.

Dla pierwszego równania $x - y = -3$ otrzymujemy $-1 - 2 = -3$, więc równanie jest spełnione.

Dla drugiego równania $3x + 2y = 1$ otrzymujemy $3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = -3 + 4 = 1$, więc równanie jest spełnione.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ jest para liczb $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

ĆWICZENIE 1

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

W wyniku przekształceń układu równań w kolejne równoważne równania otrzymujemy **równoważne układy równań**, czyli takie, które mają takie samo rozwiązanie.

PRZYKŁAD 2

Antek z ośmiorgiem przyjaciół wybrali się na mecz koszykówki. Za bilety zapłacili razem 210 zł. Oblicz, ile było w tej grupie osób pełnoletnich, a ile młodszych.

KROK 1 Wprowdzamy oznaczenia:

p – liczba osób pełnoletnich

m – liczba osób młodszych

KROK 2 Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} p + m = 9 \\ 30p + 20m = 210 \end{cases}$$

$p + m = 9$ ← równanie dotyczy liczby osób

$30p + 20m = 210$ ← równanie dotyczy kosztu zakupionych biletów

Do ułożenia drugiego równania skorzystaliśmy ze schematu:

cena biletu dla osoby pełnoletniej	•	liczba osób pełnoletnich	+	cena biletu dla osoby niepełnoletniej	•	liczba osób niepełnoletnich	=	całkowity koszt biletów

KROK 3 Rozwiązujemy otrzymany układ równań metodą podstawiania:

$$\begin{cases} p + m = 9 \\ 30p + 20m = 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 9 - p \\ 30p + 20(9 - p) = 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 9 - p \\ 30p + 180 - 20p = 210 \mid -180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 9 - p \\ 10p = 30 \mid :10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 9 - p \\ p = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 9 - 3 \\ p = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 6 \\ p = 3 \end{cases}$$

PODPOWIEDŹ

Wyznaczamy z pierwszego równania niewiadomą m i podstawiamy ją do drugiego równania.

W tej grupie były trzy osoby pełnoletnie i sześć młodszych.

ĆWICZENIE 2

Grupa 10 osób zapłaciła za bilety do kina 190 zł. Oblicz, ile kupiono biletów normalnych, a ile ulgowych, jeśli bilet normalny kosztuje 20 zł, a ulgowy – 15 zł.

To się liczy!

Wszyscy wiemy, jak ważne jest utrzymywanie dobrych relacji z innymi ludźmi – nie tylko w życiu prywatnym, lecz także zawodowym. Przykładowo, przedsiębiorcy, którzy chcą docenić swoich klientów, często przygotowują dla nich drobne upominki, m.in.: kalendarze, parasole czy kubki z logiem firmy. Nie są to drogie prezenty, ale muszą zmieścić się w budżecie danej firmy. Poniższe zadanie pomoże Wam opanować umiejętność racjonalnego rozłożenia kosztów zakupu gadżetów firmowych.

Gadżetem reklamowym nie musi być tylko długopis, notes czy breloczek. Bardziej pomysłowe firmy rozdają swoim klientom, np. okulary VR do oglądania filmów i gier w technologii 3D oraz 360° czy głośniki bluetooth [czyt.: blutuf] pod prysznic.

ZADANIE BRANŻOWE

Pan Marek chce obdarować swoich klientów kubkami z okazji jubileuszu 20-lecia istnienia firmy. Planuje kupić kubki ceramiczne po 20 zł za sztukę oraz kubki termiczne po 60 zł za sztukę. Na ten cel przeznaczył 10 000 zł. Oblicz, ile kubków każdego rodzaju powinien kupić, aby ceramicznych było dwa razy więcej niż termicznych.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 206

1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y = -1 \\ x - 6y = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 6x - 5y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - (3 - y) = 2 \\ 4x - (y - 6) = 11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - (y - x) = -2 \\ 3x - (x - y) = 6 \end{cases}$

2. Suma liczb x i y jest równa 20. Suma podwojonej liczby x i potrojonej liczby y jest równa 47. Znajdź te liczby.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Kierownik ekipy remontowo-budowlanej kupił siedem wkrętaków dwóch rodzajów. Cena małego wkrętaka wynosi 6 zł 50 gr za sztukę, a dużego – 12 zł. Podaj, ile kupił wkrętaków każdego rodzaju, jeśli łącznie zapłacił 73 zł.

4. Firma przewozowa dysponuje łącznie 10 autokarami dwóch rodzajów: 18- i 40-osobowymi. Może nimi przewieźć łącznie 334 osoby. Ile ma autokarów dużych, a ile małych?

LEKCJA 3

Metoda przeciwnych współczynników

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się ofercie. Czy wiesz, ile kosztowałby 1 hot dog i 1 puszka napoju, gdyby były sprzedawane oddzielnie? Wyjaśnij dlaczego.

Kolejną metodą rozwiązywania układów równań jest **metoda przeciwnych współczynników**. Polega ona na przekształceniu równań danego układu do postaci, w której przy jednej z niewiadomych w pierwszym i drugim równaniu otrzymujemy przeciwne współczynniki liczbowe.

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

KROK 1 Sprawdzamy, czy współczynniki przy jednej z niewiadomych są liczbami przeciwnymi. Współczynniki przy y są liczbami przeciwnymi: 2 i –2.

KROK 2 Aby wyeliminować niewiadomą, dodajemy do siebie równania stronami:

$$+\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$4x - 2y + (-x) + 2y = 5 + 1$$

KROK 3 Rozwiązujemy równanie, redukując wyrażenia podobne:

$$4x - 2y + (-x) + 2y = 5 + 1$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

KROK 4 Podstawiamy otrzymaną wartość $x = 2$ do dowolnego równania układu, np. do równania $-x + 2y = 1$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ -2 + 2y = 1 \end{cases}$$

KROK 5 Obliczamy drugą niewiadomą, rozwiązując drugie równanie:

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

KROK 6 Sprawdzamy, czy liczby $x = 2$ i $y = \frac{3}{2}$ spełniają równania układu:

$4 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 8 - 3 = 5$ Pierwsze równanie jest spełnione.

$-2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = -2 + 3 = 1$ Drugie równanie jest spełnione.

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

ĆWICZENIE 1

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$

Aby zastosować metodę przeciwnych współczynników, czasami musimy pomnożyć obie strony jednego równania (lub obu równań) przez odpowiednią liczbę (liczby).

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

KROK 1 Mnożymy pierwsze równanie przez 2, aby otrzymać przy niewiadomej y liczby przeciwne:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \mid \cdot 2 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

KROK 2 Dodajemy równania stronami:

$$+\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$4x + 2y + 5x - 2y = 14 + 4$$

KROK 3 Rozwiązujemy równanie:

$4x + 2y + 5x - 2y = 14 + 4$

$9x = 18$

$x = 2$

KROK 4 Podstawiamy do pierwszego równania $x = 2$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

ĆWICZENIE 2

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 3x - y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ -x + 5y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 7y = 12 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Rozwiązaniem dotychczas omówionych układów równań była para liczb. Takie układy równań nazywamy **układami oznaczonymi**. Istnieją też układy, które nie mają rozwiązania. Nazywamy je **układami sprzecznymi**.

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 7 \end{cases}$

KROK 1 Mnożymy pierwsze równanie przez 2:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \mid \cdot 2 \\ -4x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -4x + 2y = 7 \end{cases}$$

KROK 2 Dodajemy równania stronami:

$$+\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -4x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$0 = 13 \quad \text{sprzeczność}$$

Uzyskana sprzeczność oznacza, że żadna para liczb nie spełnia danego układu równań. Jest to układ sprzeczny.

ĆWICZENIE 3

Sprawdź, czy podany układ równań jest układem sprzecznym.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -9x + 6y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x + 4y = -9 \\ 9x - 5y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -\frac{3}{4}x + y = 2 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - \frac{1}{2}y = 7 \\ 10x - 2y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y = \frac{5}{3} \\ 4x - 14y = 9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -15x - 12y = 6 \\ \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}y = -1 \end{cases}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Układ równań, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**.

PRZYKŁAD 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \mid \cdot 2 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 6x - 2y = 10 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

Ostatnia równość oznacza, że jest nieskończenie wiele par liczb, które spełniają dany układ równań. Każda para liczb spełniająca jedno równanie spełnia również drugie. Jest to układ nieoznaczony.

ĆWICZENIE 4

Sprawdź, czy podany układ równań jest układem nieoznaczonym.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -3x - 3y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 15 \\ -x + 6y = -30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}y = 10 \\ 6x + y = -80 \end{cases}$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 207

1. Dane są dwie liczby. Jeśli do potrojonej pierwszej z nich dodamy drugą, to otrzymamy 21. Jeśli do pierwszej z nich dodamy połowę drugiej, to otrzymamy 8. Znajdź te liczby.

ZADANIA BRANŻOWE

2. Właściciel salonu fryzjerskiego zamówił dwa rodzaje odżywek do włosów – mniejsze w cenie 15 zł oraz większe po 20 zł – razem 100 sztuk, za łączną kwotę 1655 zł. Ile zamówił małych, a ile dużych odżywek do włosów?

3. W pewnej lodziarni płacimy za wafelek i za każdą gałkę lodów. Jeśli kupimy dwa lody po dwie gałki, to zapłacimy 11 zł 20 gr. Jeśli kupimy trzy lody po trzy gałki każdy, to zapłacimy 24 zł 30 gr. Oblicz:

a) ile kosztuje wafelek, a ile gałka lodów;

b) ile wyniesie dzienny utarg lodziarni, jeżeli sprzedadzą 150 lodów po dwie gałki i 250 lodów po trzy gałki.

LEKCJA

4 Układy równań – zastosowanie

NA POCZĄTEK

Asia wypłaciła z bankomatu 500 zł w banknotach po 50 zł i 100 zł. Banknotów pięćdziesięciozłotowych było o jeden więcej niż stuzłotowych. Czy, aby oddać czterem koleżankom dokładnie po 50 zł, będzie musiała rozmienić banknoty 100 zł? Wyjaśnij dlaczego.

PRZYKŁAD 1

W pewnym hotelu dostępne są dla gości tylko pokoje dwuosobowe lub trzyosobowe – razem 128 pokoi. Hotel ten może pomieścić łącznie 284 osoby. Oblicz, ile jest w tym hotelu pokoi dwuosobowych, a ile trzyosobowych.

KROK 1 Wprowadzamy oznaczenia:

d – liczba pokoi dwuosobowych
t – liczba pokoi trzyosobowych

KROK 2 Zapisujemy treść zadania w postaci układu równań:

$$\begin{cases} d + t = 128 \\ 2d + 3t = 284 \end{cases}$$

KROK 3 Rozwiązujemy układ równań dowolną metodą, np. przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} d + t = 128 \mid \cdot(-2) \\ 2d + 3t = 284 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2d - 2t = -256 \\ 2d + 3t = 284 \end{cases}$$

$$t = 28$$

Podstawiamy $t = 28$ do równania $d + t = 128$:

$$d + 28 = 128$$
$$d = 100$$

$$\begin{cases} d = 100 \\ t = 28 \end{cases}$$

Hotel ma 100 pokoi dwuosobowych i 28 pokoi trzyosobowych.

ĆWICZENIE 1

Firma cateringowa przyjęła zamówienie obsługi imprezy na 750 osób. Przygotowując stoły, policzono, że potrzebne są po dwa talerze dla każdego dziecka i po pięć dla każdego dorosłego. Łącznie trzeba zamówić 2994 talerze. Oblicz, ile dzieci i ile osób dorosłych będzie na tej imprezie.

PRZYKŁAD 2

Na podstawie cenników firm wykonaj polecenia.

a) Zapisz zależność między ceną za usługę elektryka a liczbą godzin jego pracy.

b) Podaj, przy jakiej liczbie godzin pracy elektryka, korzystając z usług firm A i B, zapłacimy tyle samo.

Firma A

- Za dojazd – 30 zł
- Za każdą godzinę pracy elektryka – 50 zł

Firma B

- Za dojazd – **60 zł**
- Za każdą godzinę pracy elektryka – **35 zł**

ROZWIĄZANIE

a) Wprowadźmy oznaczenia:

x – liczba godzin pracy
y – cena usługi

Zależność między kwotą, jaką zapłacimy za usługi elektryka (y) z firmy A a liczbą godzin (x), możemy opisać wzorem: $y = 30 + 50x$.

Zależność między kwotą, jaką zapłacimy za usługi elektryka (y) z firmy B a liczbą godzin (x), możemy opisać wzorem: $y = 60 + 35x$.

b) Aby ustalić, przy jakiej liczbie godzin pracy elektryka, korzystając z usług firm A i B, zapłacimy tyle samo, należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y = 30 + 50x \\ y = 60 + 35x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 30 + 50x \\ 30 + 50x = 60 + 35x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 30 + 50x \\ 50x - 35x = 60 - 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 30 + 50x \\ 15x = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 30 + 50x \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 30 + 50 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 130 \end{cases}$$

Przy dwóch godzinach pracy elektryka zapłacimy tyle samo, korzystając z usług firmy A lub firmy B.

ĆWICZENIE 2

Obie firmy opisane w przykładzie 2 wprowadziły promocje na usługi elektryczne: w firmie A obniżono koszt godziny pracy elektryka o 10 zł, a w firmie B o 10 zł obniżono opłatę za przyjazd.

Uwzględniając te promocje:

a) napisz wzory zależności między liczbą godzin pracy elektryka a należną opłatą dla firmy A i dla firmy B;

b) oblicz, przy jakiej liczbie godzin pracy elektryka, korzystając z usług firm A i B, zapłacimy w promocji tyle samo.

ZADANIA BRANŻOWE

Zbiór zadań, s. 207

1. Na budowę dostarczono 57 t żwiru. Przywieziono go 13 w pełni załadowanymi wywrotkami pięcio- i trzytonowymi. O ile więcej było wywrotek pięciotonowych niż trzytonowych?

2. Właścicielowi sklepu z warzywami i owocami dostarczono jabłka i gruszki – razem 120 kg. 10% jabłek i 30% gruszek było popsutych, co stanowiło 15% dostarczonych owoców. Ile kilogramów jabłek a ile gruszek nadawało się do sprzedaży?

3. Sklep meblowy ma na ekspozycji sofy w cenie 2500 zł za sztukę i fotele po 750 zł – łącznie 15 sztuk mebli. Wartość ekspozycji to 20 000 zł. Oblicz, ile sof i ile foteli jest na ekspozycji.

4. Salon fryzjerski wprowadził promocyjne ceny na niektóre usługi. 24 grudnia ze strzyżenia z modelowaniem skorzystało 15 kobiet, a z samego modelowania – 5 kobiet. Łączny obrót tego dnia wyniósł 1100 zł. 31 grudnia ze strzyżenia z modelowaniem skorzystały tylko 2 panie, a z modelowania – 20. Łączny obrót tego dnia wyniósł 920 zł. Oblicz promocyjne ceny usług.

5. Mechanik samochodowy przez dwa dni zajmował się tylko wymianą przednich klocków hamulcowych i zmianą opon. Pierwszego dnia otrzymał od klientów łącznie 550 zł za wymianę czterech zestawów klocków hamulcowych i pięciu kompletów opon, drugiego zaś 530 zł za wymianę pięciu zestawów klocków i czterech kompletów opon. Ile kosztuje u tego mechanika wymiana klocków hamulcowych, a ile zmiana opon?

Powtórzenie rozdziału
UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -x + y = 12 \\ 2x - y = c \end{cases}$ jest para liczb $\begin{cases} x = 12 \\ y = 24 \end{cases}$ dla

A. $c = -24$. **B.** $c = -12$. **C.** $c = 0$. **D.** $c = 12$.

2 Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + by = c \end{cases}$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Dla $b = 1$ i $c = 5$ układ spełnia nieskończenie wiele par liczb.

B. Dla $b = 1$ i $c \neq 5$ układ nie ma rozwiązań.

C. Dla $b = -1$ i $c = 5$ rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 2{,}5 \\ y = 0 \end{cases}$

3 Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ x = 2y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 5 \\ 2x - 3y = -30 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ -4x + 14y = -1 \end{cases}$

4 Jeśli do liczby x dodamy podwojoną liczbę y, to otrzymamy 8. Jeśli od połowy liczby x odejmiemy potrojoną liczbę y, to otrzymamy –8. Znajdź liczby x i y.

5 Pani Olga sprzedała 75 biletów na przedstawienie za łączną kwotę 495 zł. Dochód ze sprzedaży przekaże na cele charytatywne. Bilet dla dorosłych kosztował 8 zł, a dla dzieci 5 zł. Oblicz, ilu dorosłych oraz ile dzieci przyszło na przedstawienie.

6 Widzowie przed seansem filmowym kupili łącznie 240 opakowań popcornu i orzeszków. Kino zarobiło na tym 1614 zł. Opakowanie popcornu kosztuje 5 zł, a paczka orzeszków 8 zł. Oblicz, ile sprzedano opakowań popcornu i orzeszków.

7 Marcin układa parkiet z jednakowych prostokątnych klepek. Zaznaczony na rysunku kwadrat ma powierzchnię 4900 cm^2 i składa się z 20 klepek. Na podstawie informacji ze zdjęcia oblicz obwód pojedynczej klepki.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

1 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Rozwiązaniem równania $4x - 3y = -7$ jest para liczb

A. $x = -1,\ y = -1$ **B.** $x = 1,\ y = -1$ **C.** $x = -1,\ y = 1$ **D.** $x = 1,\ y = 1$

2 Jeśli do liczby x dodamy połowę liczby y, otrzymamy 5. Jeśli od podwojonej liczby x odejmiemy potrojoną liczbę y, to otrzymamy –5. Który z poniższych układów równań odpowiada treści zadania? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\begin{cases} x + 0{,}5y = 5 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x + 0{,}5y = 5 \\ 2x - \frac{1}{3}y = -5 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x + 0{,}5y = 5 \\ \frac{1}{2}x - 3y = -5 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x + 0{,}5y = 5 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$

3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$ jest para liczb

A. $(2, 0)$. **B.** $(1, 1)$. **C.** $(3, 2)$. **D.** $(0, 2)$.

4 Wybierz zdania prawdziwe.

A. Układ równań $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases}$ jest sprzeczny.

B. Układ równań $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases}$ jest nieoznaczony.

C. Układ równań $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases}$ spełnia para liczb (1, –2).

5 Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = -5 \\ 2x - 3y = -10 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \sqrt{7}x + \sqrt{10}y = 8 \\ -\sqrt{7}x - \sqrt{10}y = 5 \end{cases}$

6 Zapisz podane informacje w postaci układu równań. Następnie go rozwiąż.

a) Suma dwóch liczb wynosi 20, a ich różnica 4.

b) Średnia arytmetyczna dwóch liczb jest równa 15. Suma trzeciej części pierwszej liczby i podwojonej drugiej wynosi 15.

7 Pewien hotel ma w ofercie tylko pokoje jednoosobowe lub dwuosobowe – razem 150 pokoi. Łącznie może się w nich zmieścić 270 osób. Oblicz, ile jest pokoi dwuosobowych, a ile jednoosobowych.

Rozdział VI

Funkcje

TEMATY LEKCJI

1 Pojęcie funkcji i sposoby jej opisu s. 108–111

2 Obliczanie wartości funkcji s. 112–114

3 Układ współrzędnych s. 115–117

4 Wykres funkcji s. 118–123

5 Miejsce zerowe funkcji s. 124–125

6 Monotoniczność funkcji s. 126–130

7 Odczytywanie własności funkcji z wykresu s. 131–135

8 Przesuwanie wykresu wzdłuż osi *OY* s. 136–138

9 Przesuwanie wykresu wzdłuż osi *OX* s. 139–141

10 Symetria wykresu względem osi *OX* lub *OY* s. 142–145

11 Funkcje – zastosowanie s. 146–147

Powtórzenie rozdziału s. 148–149

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

LEKCJA

1 Pojęcie funkcji i sposoby jej opisu

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się wynikom kartkówki z języka angielskiego. Odpowiedz:
a) ile osób napisało kartkówkę,
b) ile ocen dostał każdy uczeń,
c) czy któryś z uczniów nie otrzymał oceny.

Imię	Ocena
Piotr	4
Monika	4
Iwona	5
Łukasz	4
Krzysztof	3

Każde państwo ma przyporządkowaną tylko jedną stolicę, każda ulica – nazwę, a każdy towar – cenę. Przedstawione przyporządkowania to przykłady funkcji.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y.
Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji**, a jego elementy to **argumenty funkcji.**
Funkcje zwykle oznaczamy małymi literami: f, g, h...
Funkcję określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y oznaczamy $f: X \to Y$.

Funkcję można przedstawić np. za pomocą tabeli, grafu, wzoru lub słownie.

PRZYKŁAD 1

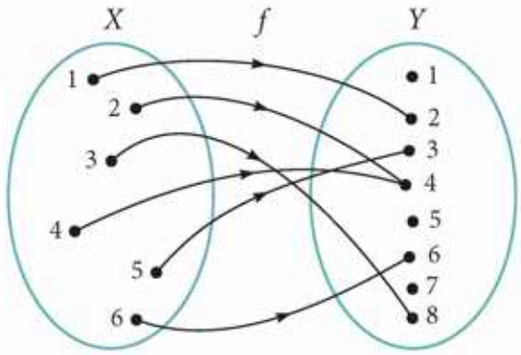
Drużyna szkolnej reprezentacji piłki siatkowej składała się z sześciu zawodników. Każdy z nich miał przyporządkowany inny numer: 1, 2, 3, 4, 5 oraz 6. Na podstawie informacji z tabeli wykonaj polecenia.

Numer zawodnika	1	2	3	4	5	6
Liczba zdobytych punktów	2	4	8	4	3	6

a) Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą grafu.
b) Podaj, ilu zawodników zdobyło cztery punkty.
c) Podaj numer zawodnika, który zdobył najwięcej punktów.

ROZWIĄZANIE

a) Tworzymy dwa zbiory: „X – numer zawodnika” oraz „Y – liczba punktów”. Każdemu zawodnikowi przyporządkowujemy odpowiednią liczbę punktów:



Numer zawodnika

Liczba punktów

Każdy zawodnik zdobył dokładnie określoną liczbę punktów.

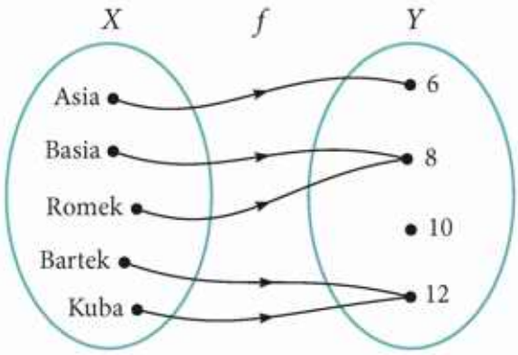
Określoną liczbę punktów może zdobyć kilku zawodników lub żaden z nich.

b) Dwóch zawodników zdobyło po cztery punkty.

c) Zawodnik z numerem 3 zdobył najwięcej punktów.

ĆWICZENIE 1

Pięcioro przyjaciół: Asia, Basia, Romek, Bartek i Kuba mieszka przy ulicy Słonecznej, na odcinku między parkiem a szkołą. Stoją tam tylko cztery domy o numerach 6, 8, 10 i 12. Przyjrzyj się grafowi, który przedstawia przyporządkowanie każdej z osób do odpowiedniego numeru domu. Odpowiedz na pytania.



a) Kto mieszka w domu pod numerem 6, a kto pod numerem 8?

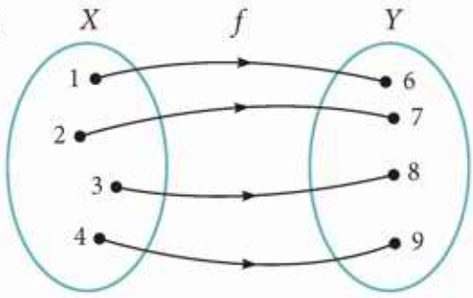
b) Pod jakim numerem nie mieszka żadna z podanych osób?

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kiedy mówimy o funkcji f, używamy zapisu $f(x)$, który czytamy: „Wartość funkcji f dla argumentu x” lub krótko „f od x”. Zbiór wszystkich wartości funkcji f nazywamy **zbiorem wartości funkcji** i oznaczamy go symbolem ZW. Zbiór wartości funkcji zawiera się w zbiorze Y, ale nie musi być mu równy.

PRZYKŁAD 2

Przyjrzyj się funkcji f przedstawionej za pomocą grafu. Następnie wykonaj polecenia.



a) Podaj wartość $f(1), f(2), f(3), f(4)$.
b) Zapisz tę funkcję słownie.
c) Zapisz tę funkcję za pomocą wzoru.
d) Zapisz tę funkcję za pomocą tabeli.

ROZWIĄZANIE

a) $f(1) = 6$ Dla argumentu 1 funkcja przyjmuje wartość 6.
$f(2) = 7$ Dla argumentu 2 funkcja przyjmuje wartość 7.
$f(3) = 8$ Dla argumentu 3 funkcja przyjmuje wartość 8.
$f(4) = 9$ Dla argumentu 4 funkcja przyjmuje wartość 9.

b) Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ przyporządkowuje liczbę o 5 większą.

c) $f(x) = x + 5$

d)

x	1	2	3	4
$f(x)$	6	7	8	9

ĆWICZENIE 2

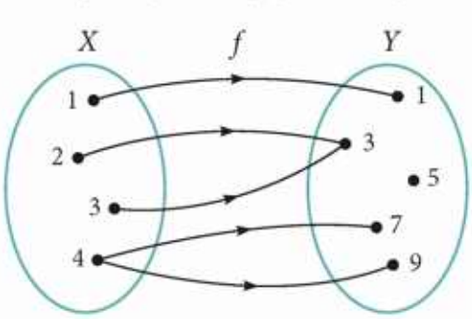
Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ przyporządkowuje liczbę o 2 mniejszą. Wykonaj polecenia.

a) Podaj $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$.
b) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli.
c) Zapisz tę funkcję za pomocą wzoru.
d) Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu.

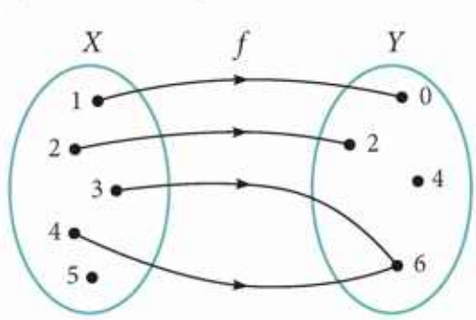
PRZYKŁAD 3

Uzasadnij, że podany graf nie przedstawia funkcji określonej na zbiorze X.

a)



b)



ROZWIĄZANIE

a) Podany graf nie przedstawia funkcji, ponieważ do $x = 4$ zostały przypisane dwie wartości: 7 i 9.
b) Podany graf nie przedstawia funkcji, ponieważ do $x = 5$ nie została przyporządkowana żadna wartość.

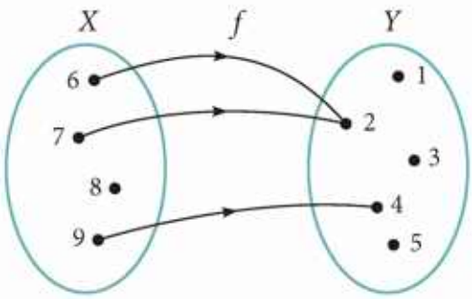
PODPOWIEDŹ

Aby graf przedstawiał funkcję, to od każdego elementu dziedziny musi odchodzić dokładnie jedna strzałka.

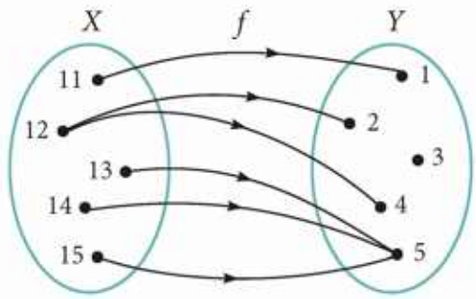
ĆWICZENIE 3

Uzasadnij, że podany graf nie przedstawia funkcji określonej na zbiorze X.

a)



b)



ZADANIA

Zbiór zadań, s. 208

1. W pewnej klasie jest 20 uczniów. Każdej z osób przyporządkowano jej miesiąc urodzenia. Odpowiedz na pytania.
a) Czy takie przyporządkowanie jest funkcją?
b) Czy funkcją jest przyporządkowanie miesiącom poszczególnych osób?

2. Funkcję f przedstawiono za pomocą tabeli. Określ zbiór wartości tej funkcji. Przedstaw tę funkcję na grafie. Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość ujemną?

a)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	1	0	−2	−2	−1	1

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	4	3	2	1	0	−1	−2

3. Zapisz wzór funkcji f, która dowolnej liczbie naturalnej x przyporządkowuje:
a) sumę podwojonej liczby x i liczby 4,
b) podwojoną sumę liczby x i liczby 4,
c) sumę kwadratu liczby x i liczby 6,
d) kwadrat sumy liczby x i liczby 6.

4. Funkcja f przyporządkowuje każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej sumę jej cyfr. Wykonaj polecenia.
a) Podaj dziedzinę funkcji f.
b) Oblicz: $f(11)$, $f(20)$, $f(55)$, $f(64)$, $f(66)$.
c) Podaj zbiór wartości tej funkcji.
d) Podaj argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartość 3, a dla jakich 7.

LEKCJA 2

Obliczanie wartości funkcji

NA POCZĄTEK

Czy na podstawie cennika umiesz obliczyć koszt wynajmu busa dla tras o różnej długości? Pokaż to na kilku przykładach.

CENNIK WYNAJMU BUSA 9-OSOBOWEGO

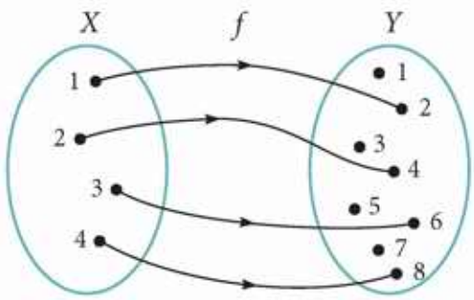
Dystans	Opłata za km
do 250 km	1,5 zł
powyżej 250 km	1,2 zł

Do każdego wynajmu należy doliczyć opłatę **400 zł** niezależną od przejechanych kilometrów.

Jeśli funkcja dana jest za pomocą wzoru, to jej wartość możemy obliczyć, podstawiając argument do wzoru tej funkcji.

PRZYKŁAD 1

Niech X będzie zbiorem $\{1, 2, 3, 4\}$, a Y – zbiorem $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Funkcja f każdej liczbie z dziedziny – zbioru X – przyporządkowuje jej dwukrotność. Sprawdź, czy graf został przygotowany poprawnie.



KROK 1 Zapisujemy funkcję f za pomocą wzoru $f(x) = 2x$.

KROK 2 Podstawiamy do wzoru argumenty $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$:

$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$
$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$
$f(3) = 2 \cdot 3 = 6$
$f(4) = 2 \cdot 4 = 8$

PODPOWIEDŹ

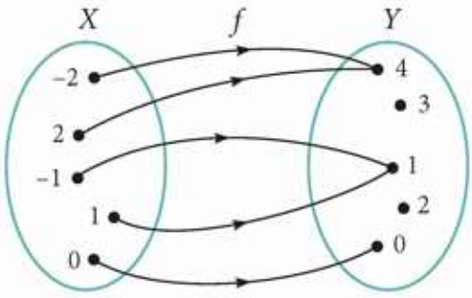
Do obliczenia wartości funkcji f na podstawie wzoru wykorzystujemy schemat $f(■) = 2 \cdot ■$.

KROK 3 Porównujemy obliczone wartości funkcji f z wartościami odczytanymi z grafu. Dla żadnego argumentu funkcja nie przyjmuje wartości 1, 3, 5 lub 7. Liczby te nie są podwojeniem żadnej liczby ze zbioru X.

Graf został przygotowany poprawnie.

ĆWICZENIE 1

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje kwadrat tej liczby. Sprawdź, czy graf został przygotowany poprawnie.



PRZYKŁAD 2

Dla podanych funkcji oblicz ich wartość dla $x = -5$.

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $g(x) = x^2 + 1$

ROZWIĄZANIE

a) Podstawiamy $x = -5$ do wzoru:

$f(-5) = 2 \cdot (-5) - 3 = -10 - 3 = -13$

b) $g(-5) = (-5)^2 + 1 = 25 + 1 = 26$

PODPOWIEDŹ

Do obliczenia wartości funkcji f na podstawie wzoru wykorzystujemy schemat $f(■) = 2 \cdot ■ - 3$.

ĆWICZENIE 2

Oblicz wartość funkcji f dla $x = 2$ oraz $x = -2$.

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = 2x + 9$

c) $f(x) = -7x - 3$

d) $f(x) = x^2 + 2$

e) $f(x) = x^2 - 5$

f) $f(x) = -x^2 + x$

To się liczy!

Każdy z nas może się spotkać z sytuacją, kiedy musimy szybko obliczyć koszt zakupu jakiegoś towaru w zależności od jego ilości albo cenę usługi w zależności od jej wielkości. Przykładowo, znając cennik usług taksówkarskich i wiedząc, jaką trasę chcemy pokonać, możemy łatwo obliczyć cenę przejazdu w określone miejsce. Poniższe zadanie pomoże Wam opanować tę umiejętność.

Słyszeliście o Księdze Rekordów Guinnessa [czyt.: ginesa]? Wiecie, że można w niej znaleźć informację o najdłuższej trasie, jaką pokonano taksówką? W 2012 r. rekord pobiło trzech podróżników z Wielkiej Brytanii – przejechali 69 716 km.

ZADANIE BRANŻOWE

Na koszt przejazdu taksówką składają się opłaty: wstępna – 6 zł oraz za każdy przejechany kilometr – 1,8 zł. Ten koszt można przedstawić za pomocą funkcji $y = 1{,}8x + 6$, gdzie x to liczba przejechanych kilometrów, a y to koszt przejazdu.

Wykonaj polecenia.

a) Oblicz, ile zapłacimy za przejechanie taksówką 5 km.

b) Oblicz, ile kilometrów przejechaliśmy taksówką, jeśli opłata za przejazd wyniosła 24 zł.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 209

CIEKAWOSTKA

Czy wiesz, że szwajcarski matematyk Leonhard Euler [czyt.: leonard ełler] (1707–1783) jako pierwszy używał oznaczenia $f(x)$ do opisu wartości funkcji?

1. Oblicz wartość funkcji f dla argumentów $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ b) $f(x) = -2x^2 + x - 1$

c) $f(x) = -x^2 - x + 4$ d) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 8$

2. Funkcja dana wzorem $P(x) = x^2$ opisuje pole kwadratu o boku długości x. Oblicz wartość tej funkcji dla:

a) $x = 2{,}5$; b) $x = 3{,}5$; c) $x = 4{,}2$.

3. Funkcja f liczbie x przyporządkowuje sześcian tej liczby podzielony przez dwa. Oblicz:

a) $f(2)$, b) $f(-4)$, c) $f(0{,}3)$.

4. Oblicz wartości trzech funkcji f, g i h dla argumentu $x = -2$. Odpowiedz, która z tych funkcji przyjmuje dla tego argumentu najmniejszą wartość.

a) $f(x) = -x$, $g(x) = 3x$, $h(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = -4x + 2$, $g(x) = x^2 + x$, $h(x) = 5 - 3x^2$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, $g(x) = 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}$, $h(x) = 2x^2 + 4x - 8$

5. Jeden cal to w przybliżeniu 2,54 cm, zatem wzór $f(x) = 2{,}54x$ opisuje zależność między liczbą cali: x a liczbą centymetrów: $f(x)$. Oblicz, ile to centymetrów.

a) 5 cali b) 20 cali c) 150 cali

ZADANIA BRANŻOWE

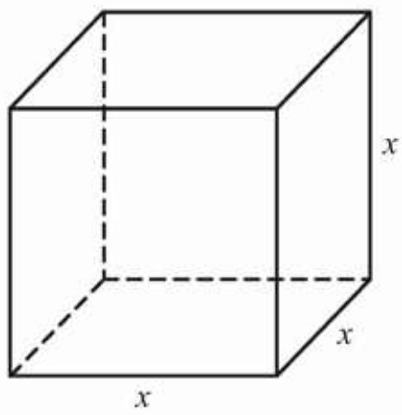
6. Do wygładzania ścian wewnątrz budynków tynkarz używa gładzi szpachlowej. Gotową zaprawę otrzyma po wymieszaniu gładzi w proszku z wodą. Na etykiecie przeczytał, że masa otrzymanej zaprawy: $f(x)$ będzie 3,5 razy większa od ilości użytych litrów wody: x, czyli $f(x) = 3{,}5x$. Przyjmij, że 1 l wody waży 1 kg i oblicz, ile kilogramów zaprawy otrzyma, gdy użyje:

a) 8 l wody, b) 30 l wody.

7. Pewna firma produkuje kryształowe ozdoby w kształcie sześcianów. Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi długości x [cm] opisuje funkcja $P(x) = 6x^2$ [cm^2], natomiast jego objętość funkcja $V(x) = x^3$ [cm^3]. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześciennej kostki dla:

a) $x = 2$ cm, c) $x = \frac{1}{2}$ cm,

b) $x = 3$ cm, d) $x = \frac{3}{4}$ cm.



LEKCJA

3 Układ współrzędnych

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się szachownicy. Na jakim polu stoi figura? Odczytaj jego współrzędne. Następnie podaj współrzędne pól, po których może się poruszać skoczek – zostały zaznaczone znakami „×".

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Prostokątny układ współrzędnych to układ dwóch prostopadłych osi liczbowych o wspólnym początku. Oś pozioma to oś *OX* lub oś odciętych, a oś pionowa – *OY* lub inaczej oś rzędnych. Punkt *O* przecięcia obu osi nazywamy początkiem układu współrzędnych. Każdy punkt płaszczyzny jest w układzie współrzędnych określony przez uporządkowaną parę liczb zwanych współrzędnymi. Oznacza to, że kolejność podanych współrzędnych punktu jest istotna.

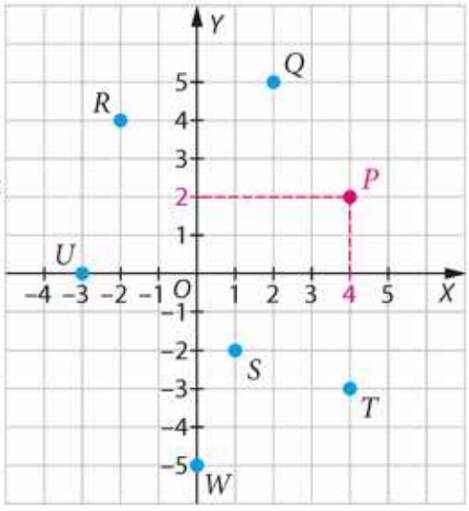
PRZYKŁAD 1

Odczytaj współrzędne punktu *P*.

KROK 1 Pierwszą współrzędną odczytujemy na osi *OX*: jest to 4

KROK 2 Drugą współrzędną odczytujemy na osi *OY*: jest to 2

Punkt *P* ma współrzędne (4, 2).



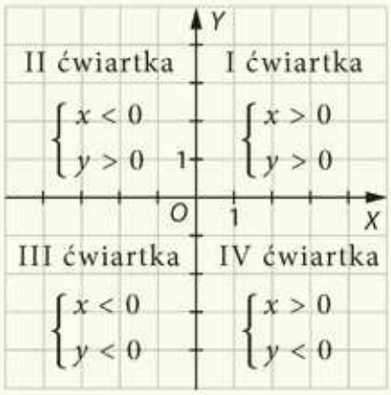
ĆWICZENIE 1

1.1. Odczytaj z rysunku z przykładu 1 współrzędne punktów *Q*, *R*, *S*, *T*, *U* i *W*.

1.2. Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim punkty: *A*(2, 3), *B*(6, 1), *C*(–3, 3), *D*(–4, –5), *E*(0, –3) i *F*(–2, 0).

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Osie układu współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki, w których współrzędne x i y są odpowiednio dodatnie lub ujemne. Osi układu nie zaliczamy do żadnej z ćwiartek układu.



PRZYKŁAD 2

Sprawdź, czy podany punkt należy do II ćwiartki układu współrzędnych.

a) $P(-2, 6)$ b) $Q(-2, -6)$

a) KROK 1 W II ćwiartce pierwsza współrzędna (x) dowolnego punktu jest ujemna. Sprawdzamy, czy tak jest w przypadku punktu P:
$x = -2$, czyli $x < 0$

KROK 2 W II ćwiartce druga współrzędna (y) dowolnego punktu jest dodatnia. Sprawdzamy, czy tak jest w przypadku punktu P:
$y = 6$, czyli $y > 0$

Punkt $P(-2, 6)$ należy do II ćwiartki układu współrzędnych, ponieważ $-2 < 0$ i $6 > 0$.

b) KROK 1 Sprawdzamy, czy pierwsza współrzędna (x) punktu Q jest ujemna:
$x = -2$, czyli $x < 0$

KROK 2 Sprawdzamy, czy druga współrzędna (y) punktu Q jest dodatnia:
$y = -6$, zatem współrzędna y nie jest dodatnia

Punkt $Q(-2, -6)$ nie należy do II ćwiartki układu współrzędnych, bo $-2 < 0$ i $-6 < 0$ (punkt Q należy do III ćwiartki układu współrzędnych).

CIEKAWOSTKA

Czy wiesz, że prostokątny układ współrzędnych nazywamy również kartezjańskim układem współrzędnych? Nazwa ta powstała na cześć francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes'a [czyt.: rene dekarta] (1596–1650) zwanego w Polsce Kartezjuszem.

ĆWICZENIE 2

Określ, w której ćwiartce układu współrzędnych położony jest dany punkt.

a) $A(-4, 5)$ b) $B(4, -10)$ c) $C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ d) $D(-15, -30)$

To się liczy!

Wielu z nas na co dzień posługuje się nawigacją w telefonie lub GPS-em. Dzięki nim łatwo możemy znaleźć interesujące nas miejsce czy ulicę w obcym mieście. Czasem jednak możemy się znaleźć w sytuacji, kiedy nie mamy dostępu do urządzeń mobilnych. Wtedy przydatną umiejętnością jest czytanie planu miasta albo mapy. Poniższe zadanie pomoże Wam ją opanować.

Chcecie określić położenie dowolnego punktu na kuli ziemskiej? Jest to możliwe dzięki GPS – systemowi nawigacji satelitarnej stworzonemu w latach 70. XX w. Nowoczesne odbiorniki GPS pokazują lokalizację danego obiektu z błędem mniejszym niż 10 cm.

ZADANIE BRANŻOWE

Odczytaj, w jakim sektorze znajduje się:

a) rynek,
b) stacja paliw,
c) hotel,
d) lotnisko.

ZADANIA BRANŻOWE

Zbiór zadań, s. 209

1. Projektant w pewnej fabryce zabawek chciał zaprojektować nowy rodzaj latawca, którego szkieletem byłyby dwie listewki. Narysował jego model w układzie współrzędnych. Punkty $A(0, 4)$, $B(-5, 0)$, $C(0, -4)$ i $D(2, 0)$ oznaczają końce listewek. Zaznacz punkty A, B, C, D w układzie współrzędnych. Podaj nazwę wielokąta, którego kształt będzie miał latawiec.

2. Firmie budowlanej zlecono montaż oświetlenia na parkingu w kształcie prostokąta. Według wytycznych lampy miały być postawione w czterech rogach placu. Projekt instalacji przedstawiono w układzie współrzędnych. Podaj współrzędne punktu czwartej lampy, jeśli trzy pozostałe mają współrzędne $(-2, -1)$, $(5, -1)$, $(5, 3)$.

LEKCJA

4 Wykres funkcji

NA POCZĄTEK

Pewna cukiernia podczas pięciodniowych targów kulinarnych sprzedawała specjalność zakładu – pączki. W tabeli przedstawiono liczbę sprzedanych pączków w kolejnych dniach targów. Dobierz odpowiednią skalę na osiach współrzędnych i zaznacz zależności między tymi danymi. Czy ta zależność jest funkcją?

Dzień targów kulinarnych	Liczba sprzedanych pączków
1	250
2	150
3	100
4	200
5	100

Funkcję często przedstawiamy za pomocą **wykresu**. Aby go sporządzić, musimy w układzie współrzędnych zaznaczyć punkty, których pierwsza współrzędna jest argumentem, a druga – wartością funkcji dla tego argumentu.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wykresem funkcji nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y) takich, że x należy do dziedziny funkcji, a y jest wartością funkcji dla argumentu x, czyli $y = f(x)$.

PRZYKŁAD 1

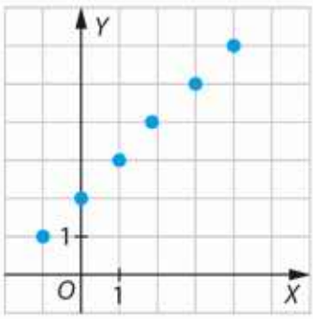
Naszkicuj wykres funkcji f, która każdej liczbie ze zbioru $X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przyporządkowuje liczbę o 2 większą. Podaj zbiór wartości funkcji f.

KROK 1 Przed naszkicowaniem wykresu przygotowujemy tabelę wartości funkcji dla poszczególnych argumentów z dziedziny:

x	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4	5	6

KROK 2 Odczytujemy z tabeli współrzędne punktów należących do wykresu:
(–1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)

KROK 3 Szkicujemy w układzie współrzędnych wykres funkcji:



KROK 4 Podajemy zbiór wartości funkcji *f*:
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ĆWICZENIE 1

1.1. Funkcja *f* przedstawiona jest za pomocą tabeli. Wypisz współrzędne punktów należących do wykresu tej funkcji. Naszkicuj ten wykres.

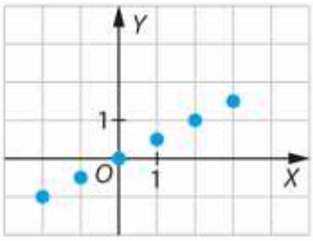
a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2	3	5	6	4	2	2	1	8

b)

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4	5

1.2. Przyjrzyj się wykresowi funkcji danej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x$, której dziedziną jest zbiór $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli.



1.3. Funkcja *f* przyporządkowuje każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4\}$ liczbę do niej przeciwną. Wykonaj polecenia.

a) Przedstaw funkcję *f* za pomocą tabeli.

b) Przedstaw funkcję *f* za pomocą wykresu.

c) Podaj zbiór wartości funkcji *f*.

Wykresem funkcji może być nie tylko skończony zbiór punktów, lecz także odcinek, prosta lub krzywa – zależy to od dziedziny funkcji.

PRZYKŁAD 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{2}x$ określonej na przedziale $\langle -2; 4 \rangle$.

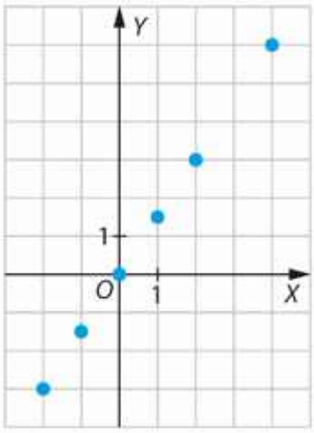
KROK 1 Przygotowujemy tabelę dla kilku wybranych argumentów funkcji:

x	-2	-1	0	1	2	4
$f(x) = \frac{3}{2}x$	-3	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3	6

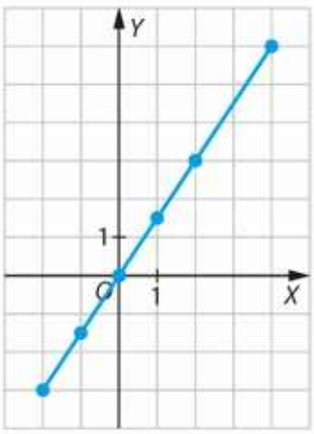
PODPOWIEDŹ

Gdy chcemy naszkicować wykres funkcji na określonym przedziale, wśród przykładowych argumentów, których użyjemy do wyznaczenia punktów wykresu, zawsze wybieramy te na krańcach przedziału. W tym przykładzie wybieramy argumenty –2 i 4.

KROK 2 Zaznaczamy punkty z tabeli w układzie współrzędnych:



KROK 3 Ponieważ do tabeli wybraliśmy tylko kilka argumentów, a w przedziale $\langle -2; 4 \rangle$ jest ich nieskończenie wiele, to łączymy punkty, dzięki czemu otrzymujemy wykres funkcji *f*. Wykresem tej funkcji jest odcinek:



ĆWICZENIE 2

Naszkicuj odcinek będący wykresem funkcji *f* określonej na danym przedziale.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$, $\langle -2; 4 \rangle$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x$, $\langle -3; 6 \rangle$ c) $f(x) = x - 2$, $\langle -2; 6 \rangle$

PRZYKŁAD 3

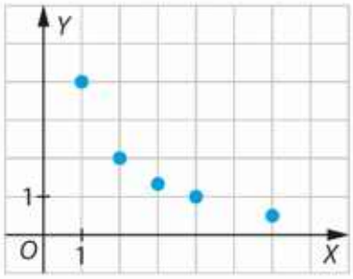
Naszkicuj wykres funkcji f określonej na przedziale $\langle 1; 6\rangle$.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$ b) $f(x) = -\frac{4}{x}$

KROK 1 Przygotowujemy tabelę dla kilku wybranych argumentów funkcji:

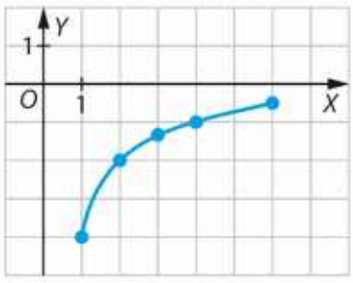
x	1	2	3	4	6
$f(x) = \frac{4}{x}$	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$

KROK 2 Zaznaczamy w układzie współrzędnych otrzymane punkty:



KROK 3 Łączymy punkty i w ten sposób otrzymujemy wykres tej funkcji. Zwróć uwagę, że otrzymana krzywa jest „gładka".

b) ROZWIĄZANIE



PODPOWIEDŹ

Zwróć uwagę, że dla każdego x wartość funkcji $y = -\frac{4}{x}$ ma przeciwną wartość niż funkcja $y = \frac{4}{x}$.

ĆWICZENIE 3

Przygotuj odpowiednią tabelę, a następnie naszkicuj wykres funkcji f określonej na danym przedziale.

a) $f(x) = \frac{6}{x}$, $\langle 1; 6\rangle$ b) $f(x) = -\frac{6}{x}$, $\langle 1; 6\rangle$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\langle -4; -1\rangle$

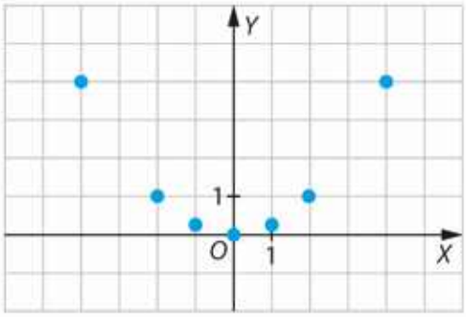
PRZYKŁAD 4

Naszkicuj wykres funkcji określonej na przedziale $\langle -4; 4\rangle$ danej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

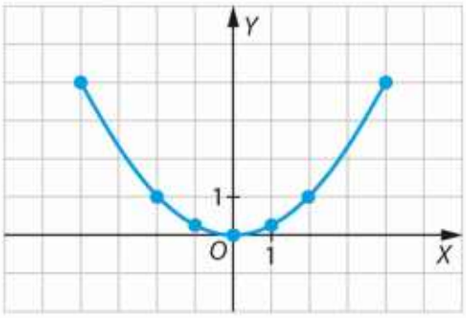
KROK 1 Przygotowujemy tabelę dla kilku wybranych argumentów funkcji:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{4}x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

KROK 2 Zaznaczamy punkty z tabeli w układzie współrzędnych:



KROK 3 Łączymy punkty i w ten sposób otrzymujemy wykres tej funkcji:



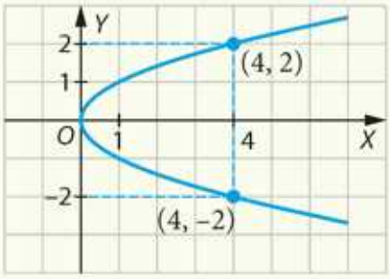
ĆWICZENIE 4

Przygotuj odpowiednią tabelę, a następnie naszkicuj wykres funkcji f określonej na danym przedziale.

a) $f(x) = x^2$, $\langle -2; 2\rangle$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\langle -4; 4\rangle$ c) $f(x) = x^2 - 2$, $\langle -2; 4\rangle$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Nie każda krzywa jest wykresem funkcji. Na przykład do krzywej narysowanej obok należą punkty $(4, 2)$ i $(4, -2)$, co oznacza, że argumentowi $x = 4$ odpowiadają dwie różne wartości y. Krzywa ta nie jest wykresem funkcji.

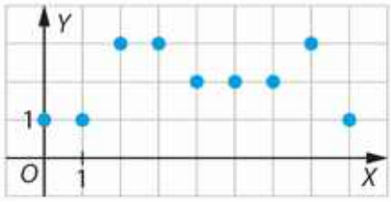


ZADANIA

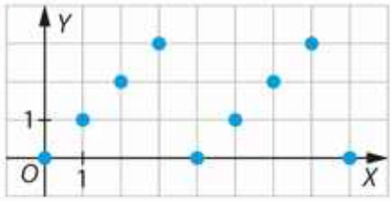
Zbiór zadań, s. 210

1. Przyjrzyj się wykresowi funkcji *f* określonej dla argumentów należących do zbioru {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Na podstawie danych z wykresu odczytaj wartość funkcji *f* dla każdego z argumentów. Przedstaw funkcję *f* za pomocą tabeli.

a)



b)



2. Funkcja *f* przedstawiona została za pomocą tabeli. Naszkicuj wykres funkcji *f*.

a)

x	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	–4	–3	–3	–2	1	2	2	–1	4	0

b)

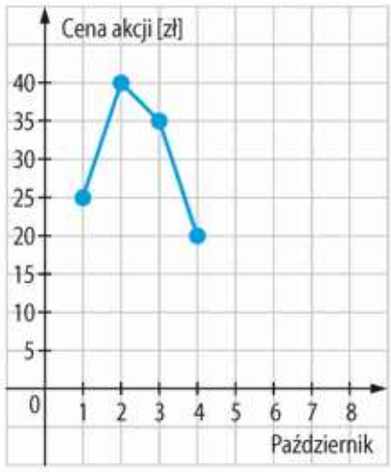
x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	2	1	0	1	2	3	2	1	0

ZADANIA BRANŻOWE

3. Pewnej firmie budowlanej zlecono wybudowanie nowego odcinka drogi szybkiego ruchu. Projekt drogi został przedstawiony w układzie współrzędnych jako wykres funkcji $f(x) = x^2 + 1$ określonej na przedziale $\langle -3; 2 \rangle$. Wykonaj projekt drogi w układzie współrzędnych.

4. Makler giełdowy sporządził wykres przedstawiający ceny akcji pewnej firmy w kolejnych czterech dniach października. Przerysuj ten wykres do zeszytu, a następnie uzupełnij go na podstawie informacji zamieszczonych w tabeli o dane z kolejnych czterech dni października.

Data	5.10	6.10	7.10	8.10
Cena akcji w złotych	20	20	40	35

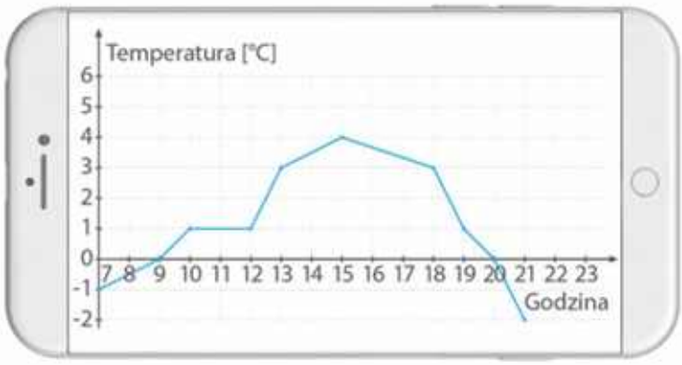


LEKCJA

5 Miejsce zerowe funkcji

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się zamieszczonemu wykresowi. O której godzinie temperatura powietrza wynosiła 0°C? W jakich godzinach temperatura była dodatnia, a w jakich – ujemna?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0, nazywamy **miejscem zerowym** funkcji.

PRZYKŁAD 1

Podaj miejsca zerowe funkcji f przedstawionej za pomocą tabeli.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	3	0	2	–1	–4	–3	0

ROZWIĄZANIE

Odczytujemy z tabeli te x, dla których $f(x) = 0$. Są to –2 i 3.
Funkcja ta ma dwa miejsca zerowe: $x = -2$ oraz $x = 3$.

ĆWICZENIE 1

Podaj miejsca zerowe funkcji f przedstawionej za pomocą tabeli.

a)

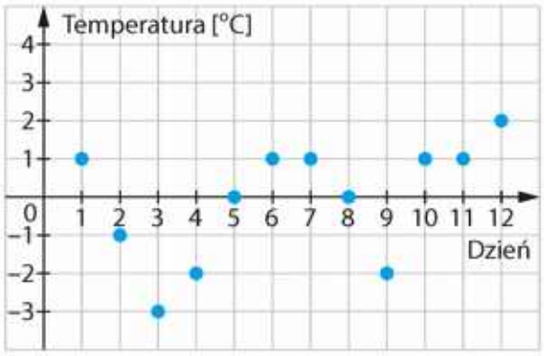
x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1	2	3	0	0	4	0	5	8

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	1	0	2	0	3	0	1	3	7

PRZYKŁAD 2

W pewnej szkole co roku na początku lutego organizowany jest konkurs lepienia figur ze śniegu. Można go przeprowadzić pod warunkiem, że przez kilka kolejnych dni utrzymuje się temperatura powietrza poniżej 0°C.
Na podstawie wykresu prognozy temperatury wykonaj polecenia.



a) Podaj miejsca zerowe funkcji.

b) Określ, w które dni można przeprowadzić konkurs.

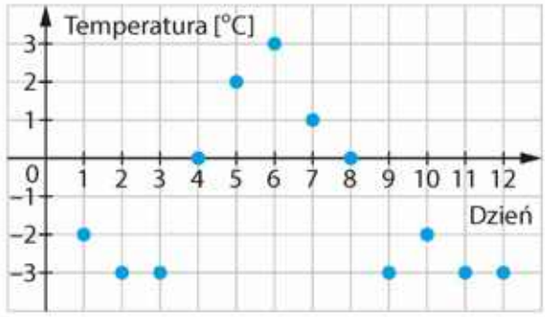
ROZWIĄZANIE

a) Miejsca zerowe funkcji to $x = 5$ i $x = 8$.

b) Konkurs można przeprowadzić drugiego, trzeciego, czwartego lub dziewiątego lutego.

ĆWICZENIE 2

Na podstawie danych z wykresu wykonaj polecenia.



a) Podaj miejsca zerowe funkcji.

b) Określ, w które dni temperatura powietrza była dodatnia.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 211

1. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli, narysuj jej wykres i podaj miejsca zerowe, jeśli:

a) $f(x) = 4x - 2$, b) $f(x) = x^2 - 4$, c) $f(x) = x^2 + 2x$.

2. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji f określonej na przedziale $\langle -4; 4\rangle$, która ma:

a) trzy miejsca zerowe, b) sześć miejsc zerowych.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Właściciel sklepu zainwestował 4500 zł w zakup pewnej ilości nowego towaru. 1 października sprzedał jedną sztukę tego towaru w cenie 300 zł, a każdego następnego dnia sprzedał o jedną sztukę więcej niż poprzedniego. Narysuj wykres przedstawiający zależność zwrotu pieniędzy zainwestowanych w nowy towar od liczby dni jego sprzedaży. Odpowiedz, w którym dniu zwróci się ta inwestycja.

LEKCJA 6

Monotoniczność funkcji

NA POCZĄTEK

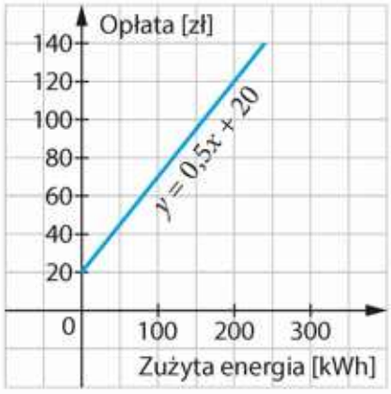
Przyjrzyj się wykresowi przedstawiającemu światowe przychody rynku gier na urządzenia mobilne, konsole i komputery w latach 2012–2017. Czy na podstawie tego wykresu można określić, że był to rynek opłacalny w tamtych latach?

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Funkcja jest **rosnąca**, jeśli wraz ze wzrostem argumentów wzrastają wartości funkcji.

PRZYKŁAD 1

Właściciel studia fryzjerskiego podpisał umowę z dostawcą energii elektrycznej. Zgodnie z nią comiesięczny rachunek za prąd składa się ze stałej opłaty wynoszącej 20 zł oraz opłaty za liczbę zużytych kWh prądu w wysokości 0,5 zł za każdą kWh. Wykres przedstawia zależność między wysokością rachunku za prąd a ilością zużytej energii elektrycznej. Wykonaj polecenia.



a) Oblicz, ile właściciel zapłaci za prąd, jeśli w studiu w ciągu miesiąca zużyto 300 kWh.

b) Odpowiedz, czy wykres przedstawia funkcję rosnącą i dlaczego.

ROZWIĄZANIE

a) $0{,}5 \cdot 300 + 20 = 150 + 20 = 170$ [zł]

Rachunek za prąd wyniesie 170 zł.

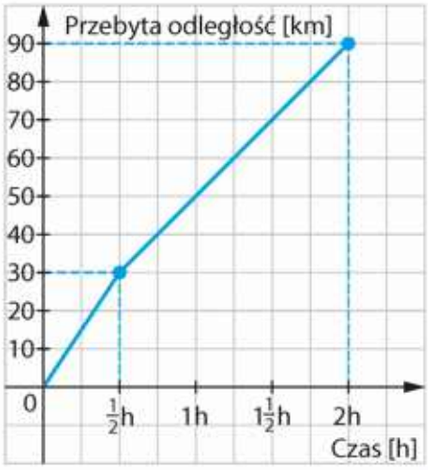
b) Wykres przedstawia funkcję rosnącą, ponieważ wraz ze wzrostem argumentów rosną wartości funkcji. Inaczej mówiąc: im więcej zużytej energii (kWh), tym wyższy rachunek (zł).

ĆWICZENIE 1

Na wykresie pokazano zależność między przebytą drogą a czasem podróży. Wykonaj polecenia.

a) Oblicz, ile wynosiła średnia prędkość w ciągu pierwszej godziny jazdy, a ile podczas drugiej.

b) Czy wykres przedstawia funkcję rosnącą i dlaczego?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

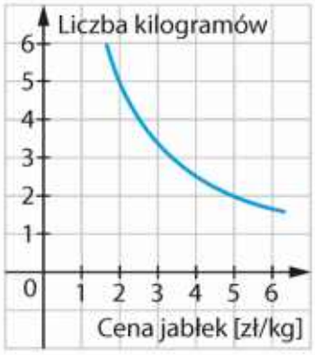
Funkcja jest **malejąca**, jeśli wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji.

PRZYKŁAD 2

Halina chciała kupić jabłka za łączną kwotę 10 zł. Wykres przedstawia zależność między liczbą kilogramów jabłek a ich ceną za 1 kg. Odpowiedz na pytania.

a) Ile kilogramów jabłek kupi Halina, jeśli ich cena za 1 kg wynosi 4 zł?

b) Czy wykres przedstawia funkcję malejącą i dlaczego?



ROZWIĄZANIE

a) $\frac{10}{4} = 2{,}5$ [kg] Halina za 10 zł kupi 2,5 kg jabłek.

b) Wykres przedstawia funkcję malejącą, ponieważ wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji maleją. Inaczej mówiąc: im wyższa cena, tym mniej jabłek kupi Halina.

ĆWICZENIE 2

Wykres przedstawia zależność między długością boku wielokąta foremnego o obwodzie 12 cm a ich liczbą.

a) Przedstaw funkcję opisującą tę zależność za pomocą tabeli.

b) Odpowiedz, czy wykres przedstawia funkcję malejącą i dlaczego.

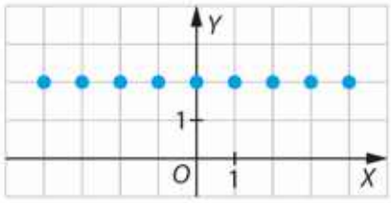
c) Uzasadnij, że „łączenie" punktów na wykresie obok za pomocą krzywej nie jest zasadne.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Funkcję, która dla wszystkich argumentów przyjmuje tę samą wartość, nazywamy funkcją **stałą**. Inaczej mówiąc: wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji się nie zmieniają.

PRZYKŁAD 3

Odpowiedz, czy wykres przedstawia funkcję stałą i dlaczego.

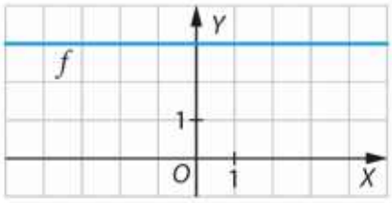


ROZWIĄZANIE

Wykres przedstawia funkcję stałą, ponieważ dla wszystkich argumentów przyjmuje tę samą wartość równą 2.

ĆWICZENIE 3

Odpowiedz, czy zamieszczony wykres funkcji określonej na zbiorze liczb rzeczywistych przedstawia funkcję stałą i dlaczego.



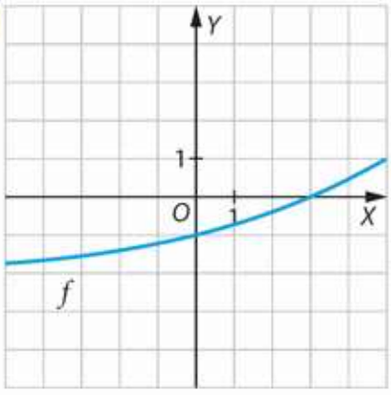
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Funkcję, która jest rosnąca, malejąca lub stała, nazywamy **funkcją monotoniczną**.

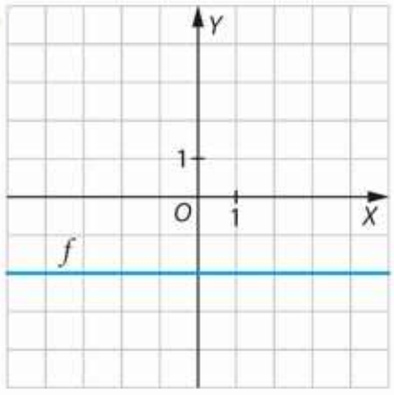
PRZYKŁAD 4

Określ monotoniczność funkcji *f*.

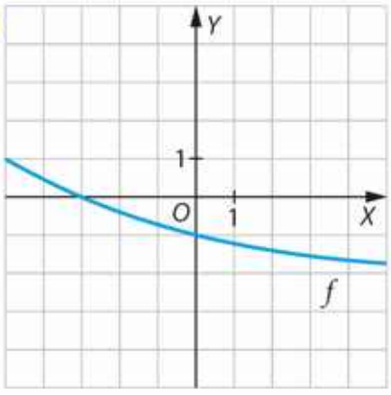
a)



b)



c)

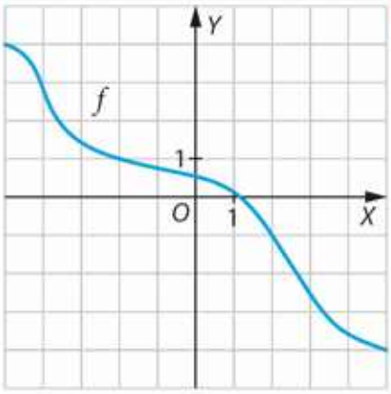


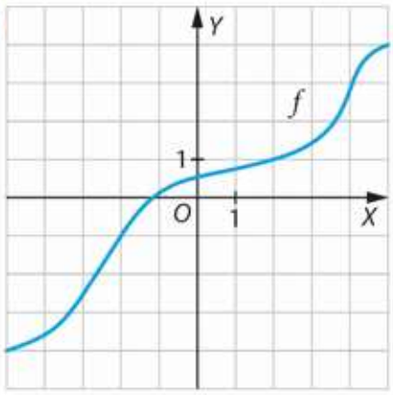
ROZWIĄZANIE

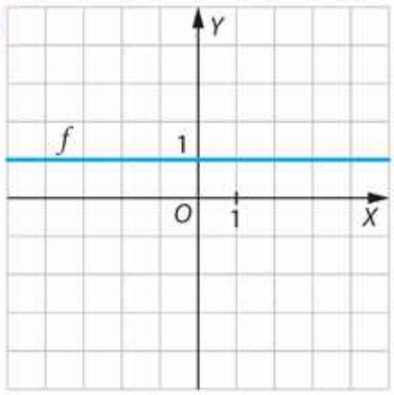
a) Wykres przedstawia funkcję rosnącą.
b) Wykres przedstawia funkcję stałą.
c) Wykres przedstawia funkcję malejącą.

ĆWICZENIE 4

Określ monotoniczność funkcji *f*.

a)


b)


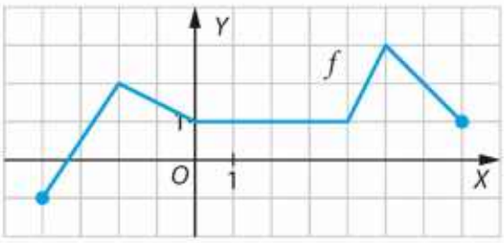
c)


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Funkcja przedziałami monotoniczna to funkcja, która w różnych przedziałach swojej dziedziny jest malejąca, rosnąca lub stała.
Funkcja przedziałami monotoniczna nie jest monotoniczna w całej dziedzinie.

PRZYKŁAD 5

Przyjrzyj się wykresowi funkcji *f*. Odczytaj jej przedziały monotoniczności.



ROZWIĄZANIE

Funkcja *f* jest rosnąca w przedziale $\langle -4; -2 \rangle$.

Funkcja *f* jest malejąca w przedziale $\langle -2; 0 \rangle$.

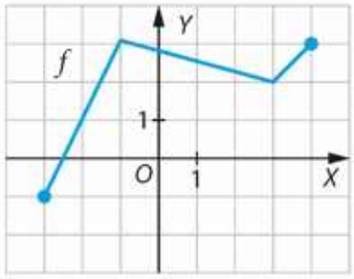
Funkcja *f* jest stała w przedziale $\langle 0; 4 \rangle$.

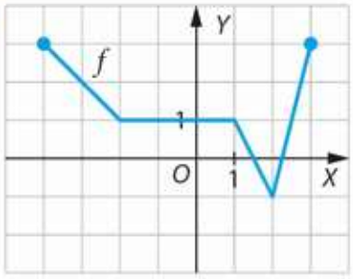
Funkcja *f* jest rosnąca w przedziale $\langle 4; 5 \rangle$.

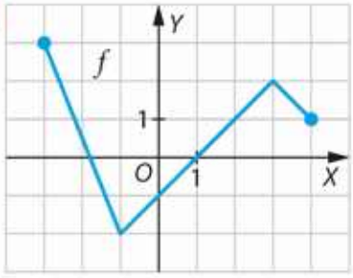
Funkcja *f* jest malejąca w przedziale $\langle 5; 7 \rangle$.

ĆWICZENIE 5

Odczytaj przedziały monotoniczności funkcji *f*.

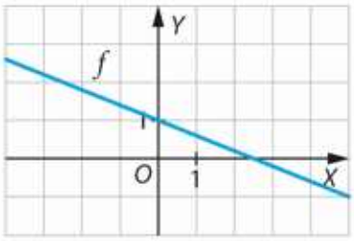
a)


b)


c)


ZADANIA

Zbiór zadań, s. 212



1. Przyjrzyj się wykresowi funkcji *f*, następnie uporządkuj rosnąco liczby: $a = f(-3)$, $b = f(-2)$, $c = f(0)$, $d = f(3)$.

2. Naszkicuj wykres funkcji określonej na przedziale $\langle -3; 4\rangle$, jeśli do jej wykresu należy punkt $P(1, 3)$ oraz

a) jest to funkcja rosnąca,

b) jest to funkcja malejąca,

c) funkcja ta jest malejąca w przedziale $\langle -3; 0\rangle$ i stała w przedziale $\langle 0; 4\rangle$,

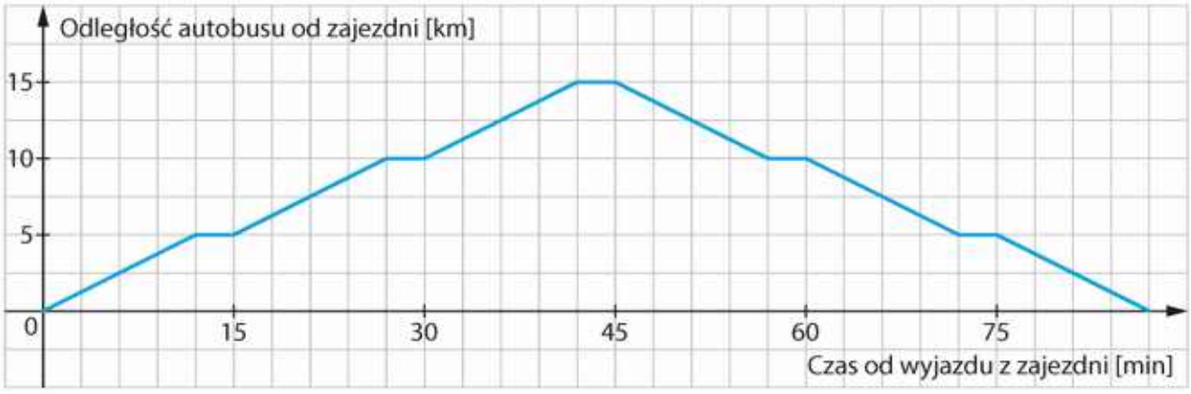
d) funkcja ta jest rosnąca w przedziale $\langle -3; -1\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle -1; 4\rangle$.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Autobus po wyjeździe z zajezdni pokonuje trasę o długości 30 km w czasie $1\frac{9}{20}$ h. Co 5 km zatrzymuje się na przystankach i stoi na nich przez 3 minuty – przejazdy między przystankami zajmują mu zawsze tyle samo czasu. Wykonaj polecenia.

a) Odpowiedz, w jakich przedziałach czasowych odległość autobusu od zajezdni zwiększa się.

b) Odpowiedz, w jakich przedziałach czasowych odległość autobusu od zajezdni zmniejsza się.



LEKCJA 7 Odczytywanie własności funkcji z wykresu

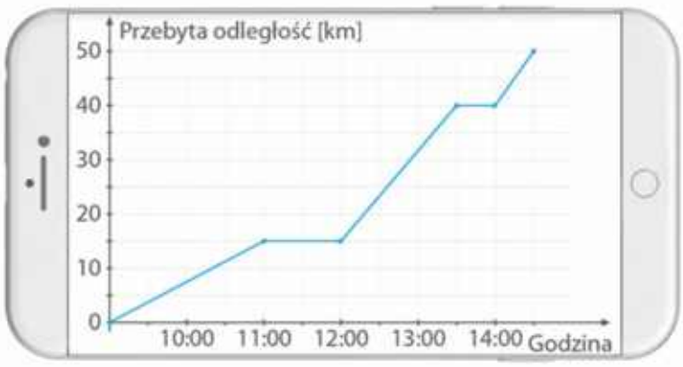
NA POCZĄTEK

Weronika wybrała się ze znajomymi na wycieczkę rowerową. Informacje dotyczące trasy zostały zarejestrowane w aplikacji w postaci wykresu funkcji. Odpowiedz na pytania.

a) Ile łącznie kilometrów przejechali rowerzyści?

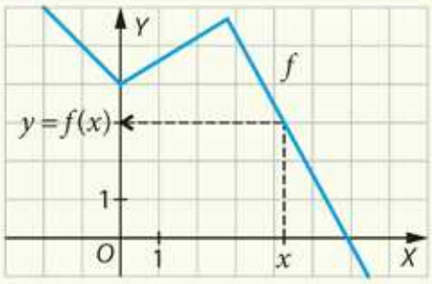
b) Jaki był łączny czas postoju?

c) Jak długo trwała wycieczka?



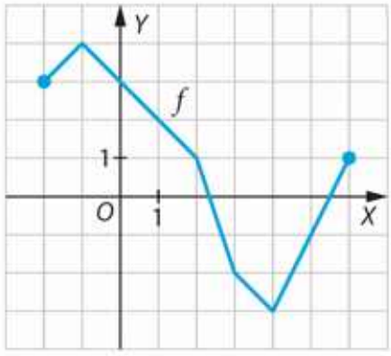
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Z wykresu funkcji możemy odczytać, jaką wartość przyjmuje ona dla danego argumentu. Wartości te odczytujemy z osi *OY*.



PRZYKŁAD 1

Przyjrzyj się wykresowi funkcji f określonej dla $-2 \leq x \leq 6$. Odczytaj wartość funkcji f dla $x = -1$ oraz $x = 3$.



ROZWIĄZANIE

Wartość funkcji f dla $x = -1$ wynosi 4, czyli $f(-1) = 4$.
Wartość funkcji f dla $x = 3$ wynosi -2, czyli $f(3) = -2$.

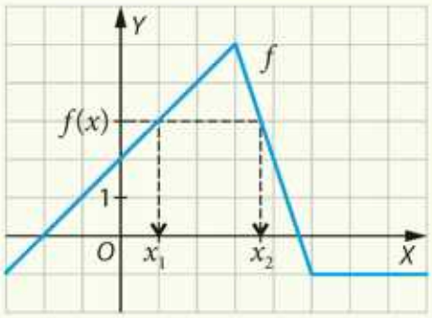
ĆWICZENIE 1

Odczytaj wartość funkcji f dla podanego argumentu. Skorzystaj z wykresu funkcji z przykładu 1.

a) $x = 0$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 4$ **d)** $x = 5$

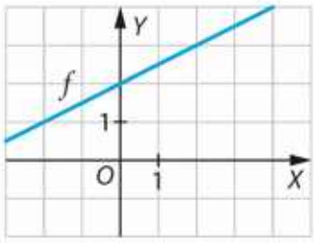
WAŻNA WIADOMOŚĆ

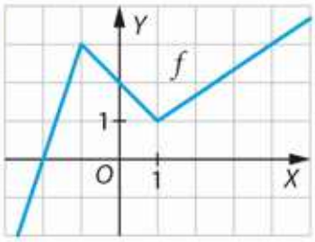
Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość, odczytujemy z osi *OX*. Zwróć uwagę, że dla przykładowej funkcji *f* wskazana wartość $f(x)$ przyjmowana jest dla dwóch argumentów: x_1 i x_2.

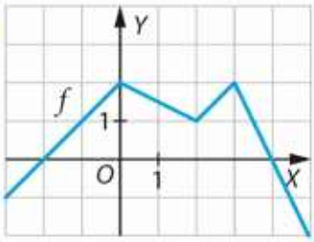


PRZYKŁAD 2

Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja *f* przyjmuje wartość równą 3.

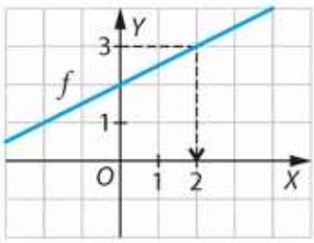
a)


b)


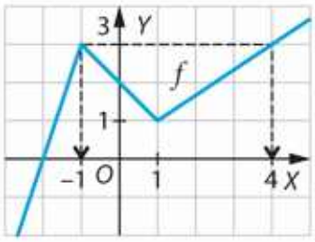
c)


ROZWIĄZANIE

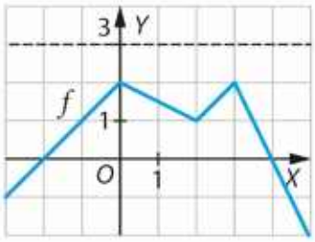
a) Funkcja *f* przyjmuje wartość równą 3 dla $x = 2$.



b) Funkcja *f* przyjmuje wartość równą 3 dla $x = -1$ i $x = 4$.

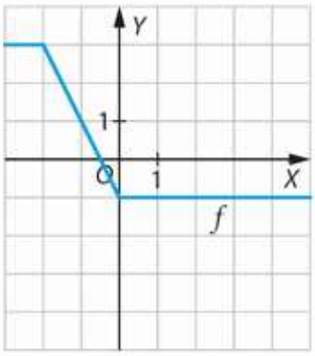


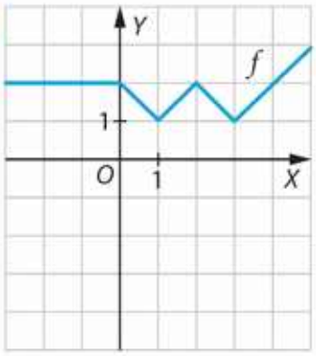
c) Funkcja *f* nie przyjmuje wartości równej 3.

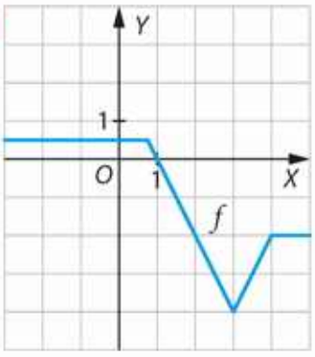


ĆWICZENIE 2

Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja *f* przyjmuje wartość równą 1, a dla jakich wartość równą –3.

a)


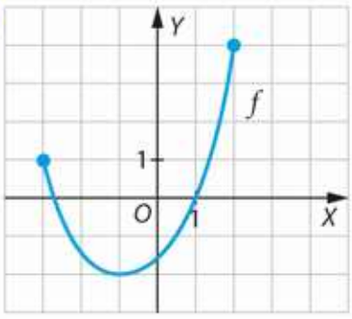
b)


c)


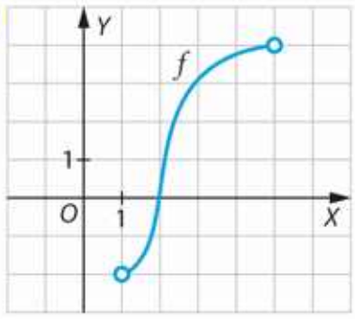
PRZYKŁAD 3

Odczytaj z wykresu największą i najmniejszą wartość tej funkcji oraz podaj jej zbiór wartości.

a)



b)



a) **KROK 1** Odczytujemy najmniejszą wartość funkcji *f*:
najmniejsza wartość równa się –2 dla $x = -1$.

KROK 2 Odczytujemy największą wartość funkcji *f*:
największa wartość równa się 4 dla $x = 2$.

KROK 3 Odczytujemy zbiór wartości funkcji *f*:
zbiorem wartości funkcji *f* jest przedział $\langle -2; 4 \rangle$.

PODPOWIEDŹ

Najmniejszą wartość funkcji odczytujemy z poziomu najniższego osiąganego punktu wykresu. Natomiast wartość największą odczytujemy z poziomu najwyższego punktu wykresu dla podanego zbioru (dziedziny).

b) **KROK 1** Odczytujemy najmniejszą wartość funkcji *f*.
Punkt o współrzędnych (1, –2) nie należy do wykresu funkcji, co zaznaczamy za pomocą pustego kółka. Zatem funkcja ta nie przyjmuje najmniejszej wartości.

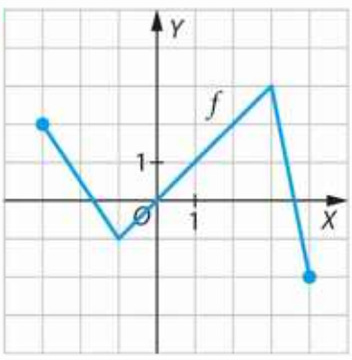
KROK 2 Odczytujemy największą wartość funkcji *f*.
Punkt o współrzędnych (5, 4) nie należy do wykresu funkcji, co zaznaczamy za pomocą pustego kółka. Zatem funkcja ta nie przyjmuje największej wartości.

KROK 3 Odczytujemy zbiór wartości funkcji *f*:
zbiorem wartości funkcji f jest przedział otwarty (–2; 4).

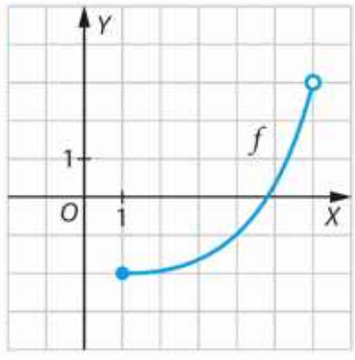
ĆWICZENIE 3

Odczytaj z wykresu największą i najmniejszą wartość funkcji oraz podaj jej zbiór wartości.

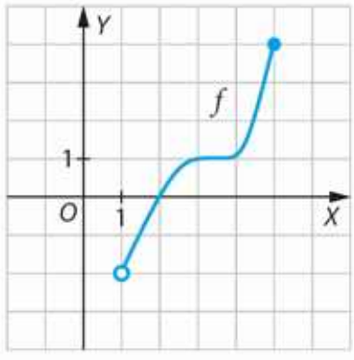
a)



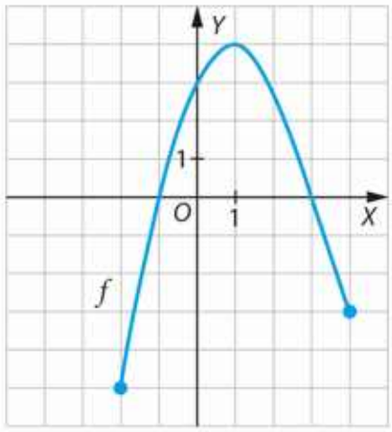
b)



c)



PRZYKŁAD 4



Odczytaj z wykresu funkcji f:

a) dziedzinę funkcji,

b) zbiór wartości funkcji,

c) najmniejszą i największą wartość funkcji

d) miejsca zerowe funkcji,

e) przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

ROZWIĄZANIE

a) Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -2; 4\rangle$.

b) Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -5; 4\rangle$.

c) Wartość najmniejsza funkcji f równa się -5, a największa 4.

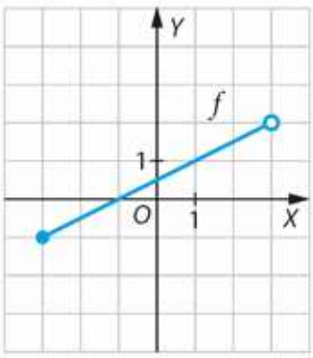
d) Miejsca zerowe funkcji f to $x = -1$, $x = 3$.

e) Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-1; 3)$.

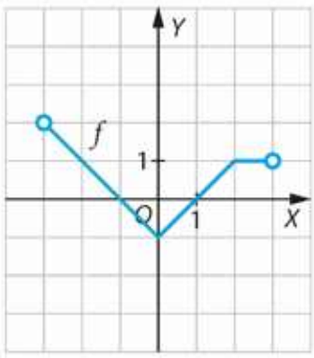
ĆWICZENIE 4

Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, wartość najmniejszą i największą oraz miejsca zerowe. Ustal przedziały, w których funkcja f przyjmuje wartości ujemne, a w których nieujemne.

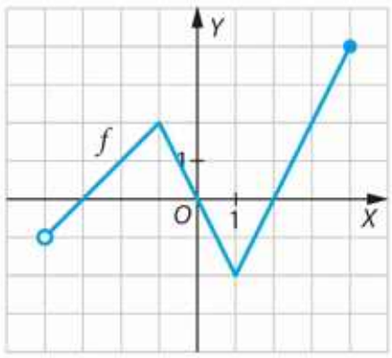
a)



b)



c)

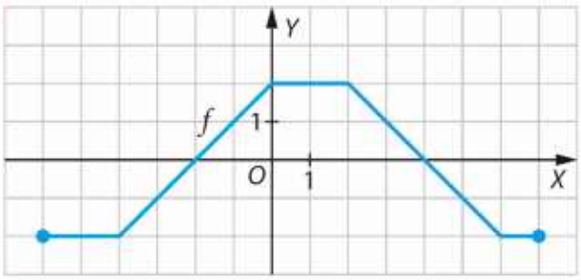


ZADANIA

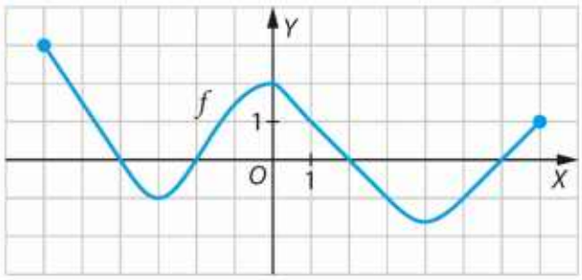
Zbiór zadań, s. 213

1. Określ, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich mniejsze od -1.

a)



b)



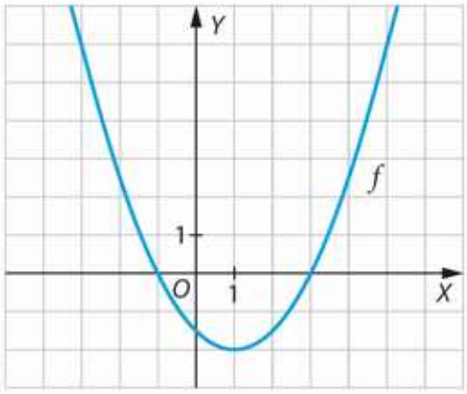
2. Odczytaj z wykresu największą i najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale. Podaj jej zbiór wartości w poniższym przedziale.

a) $\langle -1; 5 \rangle$

b) $\langle -3; 3 \rangle$

c) $(-3; 5)$

d) $(-3; 1)$



ZADANIA BRANŻOWE

3. Księgowy sporządził wykres wyników finansowych pewnej firmy w latach 2012–2018. Na jego podstawie podaj:

a) różnicę między najlepszym i najsłabszym wynikiem finansowym w tych latach,

b) łączny zysk za lata 2012–2018.

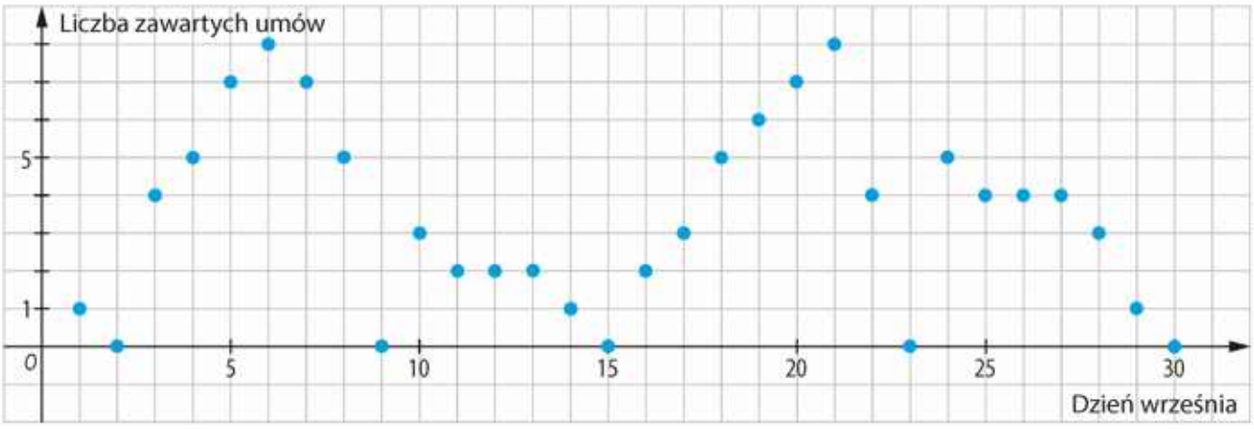
4. Agent ubezpieczeniowy sporządził wykres przedstawiający liczbę umów zawartych we wrześniu 2018 r. Na podstawie informacji zamieszczonych na wykresie odpowiedz na pytania.

a) Ile umów zawarł agent 10 września, a ile – 15 września?

b) W które dni agent nie zawarł żadnej umowy?

c) Którego dnia agent zawarł najwięcej umów?

d) Dlaczego żaden punkt wykresu nie znajduje się pod osią OX?

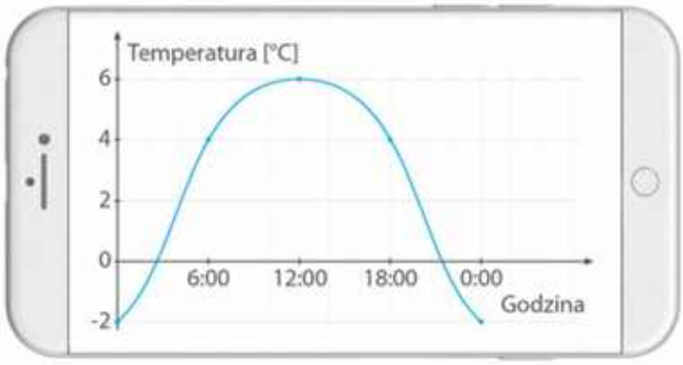


LEKCJA 8

Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

NA POCZĄTEK

Na wykresie przedstawiono zmiany temperatury powietrza w ciągu doby w pewnej miejscowości mierzone termometrem firmy A. Każdy pomiar wykonany termometrem firmy B jest dokładnie o 2°C wyższy. Czy na podstawie wykresu możesz narysować wykres pomiarów termometrem B?



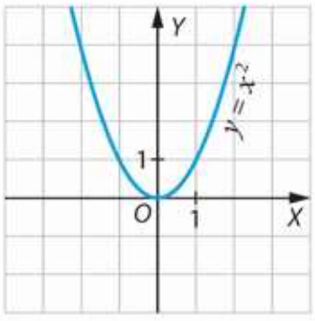
WAŻNA WIADOMOŚĆ

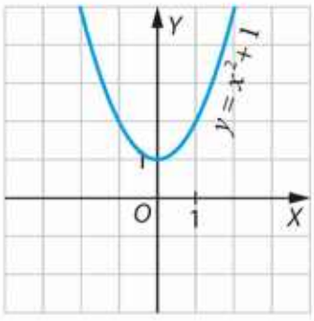
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OY o q jednostek:

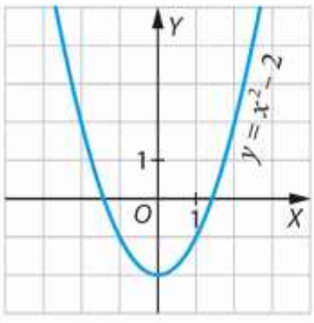
- w górę, gdy $q > 0$;
- w dół, gdy $q < 0$.

PRZYKŁAD 1

Przyjrzyj się wykresom funkcji. Opisz przesunięcia wykresów funkcji $y = x^2 + 1$ i $y = x^2 - 2$ w stosunku do wykresu funkcji $y = x^2$.







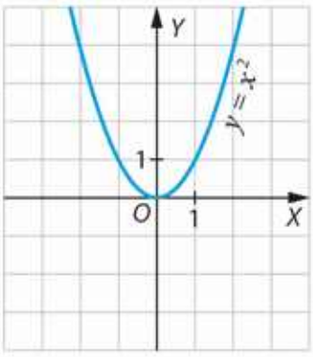
ROZWIĄZANIE

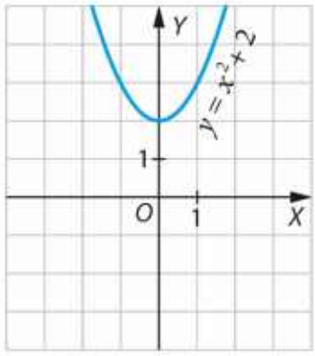
Wykres funkcji $y = x^2 + 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OY o 1 jednostkę w górę, ponieważ $q = 1$, czyli $q > 0$.

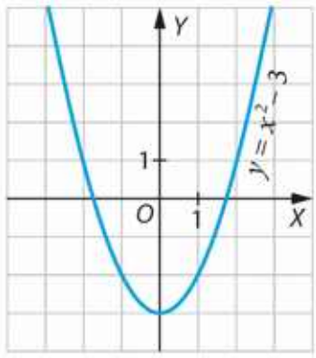
Wykres funkcji $y = x^2 - 2$, tzn. $y = x^2 + (-2)$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OY o 2 jednostki w dół, ponieważ $q = -2$, czyli $q < 0$.

ĆWICZENIE 1

Opisz przesunięcia wykresów funkcji $y = x^2 + 2$ i $y = x^2 - 3$ w stosunku do wykresu funkcji $y = x^2$.

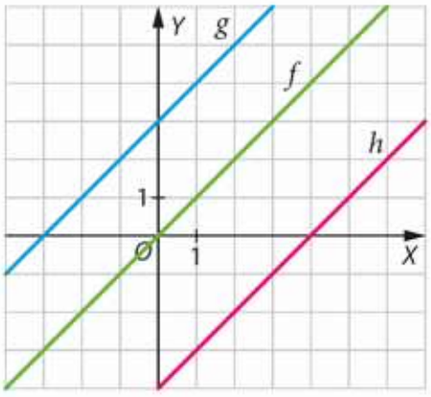






PRZYKŁAD 2

Przyjrzyj się wykresom funkcji *f*, *g* i *h*. Funkcja *f* opisana jest wzorem $y = x$. Podaj wzory funkcji *g* i *h*.



ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji *g* powstał przez przesunięcie wykresu funkcji *f* o 3 jednostki do góry wzdłuż osi *OY*. Zatem funkcja *g* ma wzór $y = x + 3$.

Wykres funkcji *h* powstał przez przesunięcie wykresu funkcji *f* o 4 jednostki w dół wzdłuż osi *OY*. Zatem funkcja *h* ma wzór $y = x - 4$.

ĆWICZENIE 2

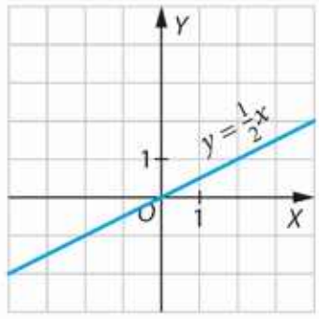
Na podstawie wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x$ naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = \frac{1}{2}x + 1$

b) $y = \frac{1}{2}x + 4$

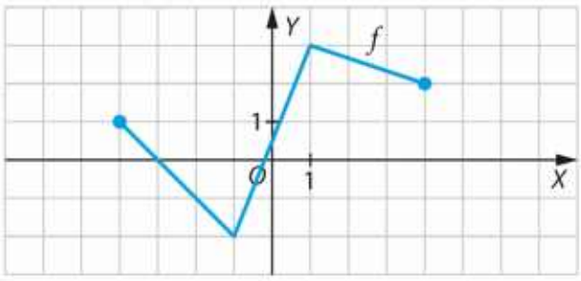
c) $y = \frac{1}{2}x - 1$

d) $y = \frac{1}{2}x - 2$

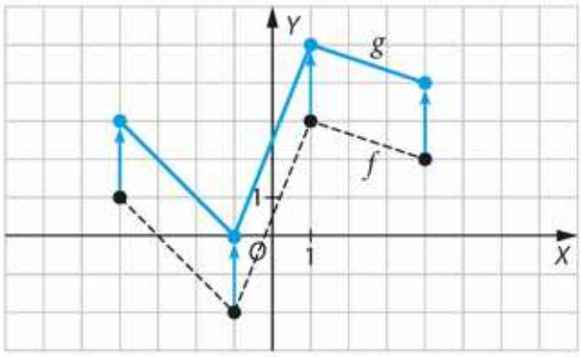


PRZYKŁAD 3

Przyjrzyj się wykresowi funkcji *f*. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) + 2$. Podaj zbiór wartości funkcji *g*.



KROK 1 Szkicujemy wykres funkcji *g*. Otrzymamy go przez przesunięcie wykresu funkcji *f* o 2 jednostki w górę wzdłuż osi *OY*:



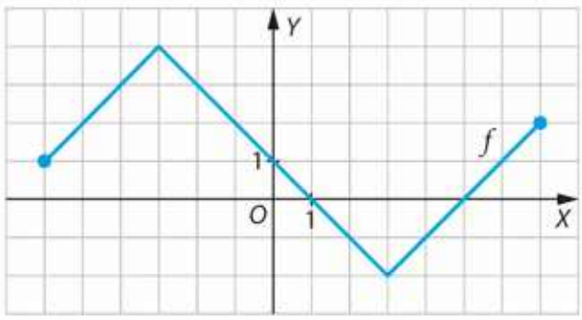
KROK 2 Z wykresu funkcji *g* odczytujemy jej zbiór wartości: $\langle 0; 5 \rangle$.

ĆWICZENIE 3

Korzystając z wykresu funkcji *f* z przykładu 3, naszkicuj wykres funkcji *g*: $y = f(x) - 1$. Podaj zbiór wartości funkcji *g*.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 213



1. Na podstawie wykresu funkcji *f* naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = f(x) + 2$

b) $y = f(x) + \frac{1}{2}$

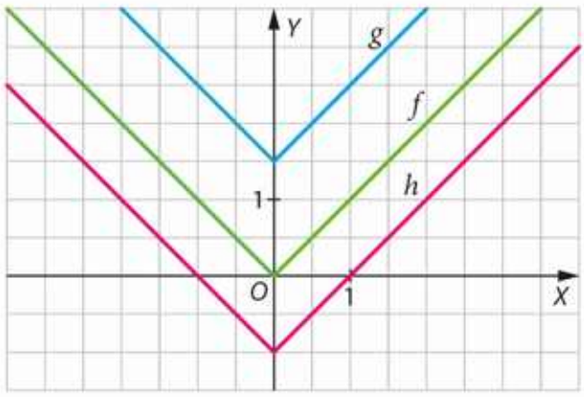
c) $y = f(x) - 3$

d) $y = f(x) - 2\frac{1}{2}$

2. Przyjrzyj się wykresom funkcji *f*, *g* i *h*. Funkcja *f* opisana jest wzorem $y = |x|$. Wykonaj polecenia.

a) Zapisz wzory funkcji *g* i *h*.

b) Podaj zbiory wartości funkcji *f*, *g* i *h*.

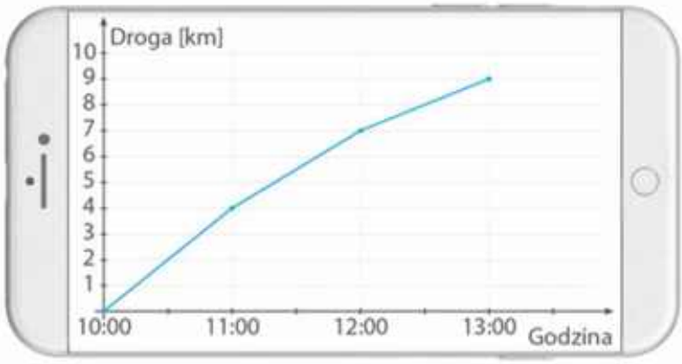


LEKCJA 9

Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

NA POCZĄTEK

Tomek wybrał się na pieszą wycieczkę. Informacje o trasie zostały zapisane na wykresie, który ilustruje przebytą drogę w zależności od czasu. Jak wyglądałby wykres, gdyby Tomek wyruszył na wycieczkę godzinę później?



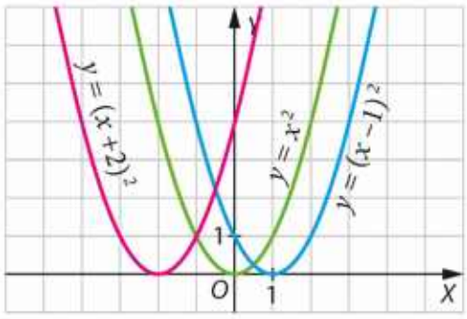
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OX o p jednostek:

- w prawo, gdy $p > 0$;
- w lewo, gdy $p < 0$.

PRZYKŁAD 1

Przyjrzyj się wykresom funkcji. Opisz przesunięcia wykresów funkcji $y = (x - 1)^2$ i $y = (x + 2)^2$ względem wykresu funkcji $y = x^2$.



ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji $y = (x - 1)^2$ otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OX o 1 jednostkę w prawo, ponieważ $p = 1$, czyli $p > 0$.

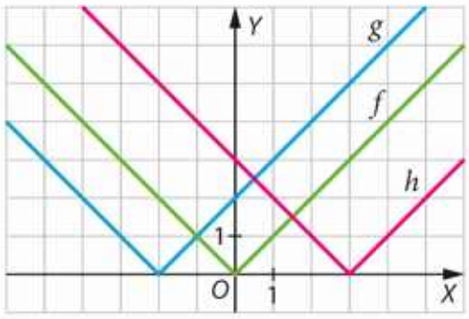
Wykres funkcji $y = (x + 2)^2$, tzn. $y = (x - (-2))^2$, otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OX o 2 jednostki w lewo, ponieważ $p = -2$, czyli $p < 0$.

ĆWICZENIE 1

Opisz przesunięcie wykresów funkcji $y = (x - 2)^2$ oraz $y = (x + 1)^2$ względem wykresu funkcji $y = x^2$.

PRZYKŁAD 2

Przyjrzyj się wykresom funkcji f, g i h.
Funkcja f opisana jest wzorem $y = |x|$.
Podaj wzory funkcji g i h.



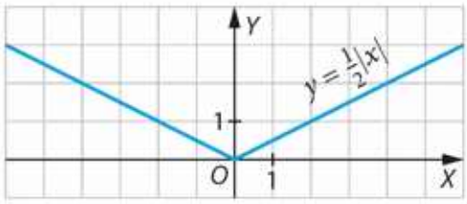
ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji g powstał przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w lewo wzdłuż osi OX. Zatem funkcja g ma wzór $y = |x + 2|$.

Wykres funkcji h powstał przez przesunięcie wykresu funkcji f o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi OX. Zatem funkcja h ma wzór $y = |x - 3|$.

ĆWICZENIE 2

Na podstawie wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}|x|$ naszkicuj wykres funkcji.



a) $y = \frac{1}{2}|x + 1|$

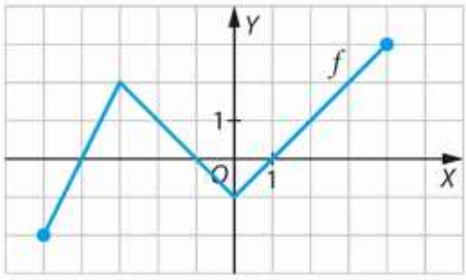
b) $y = \frac{1}{2}|x + 4|$

c) $y = \frac{1}{2}|x - 3|$

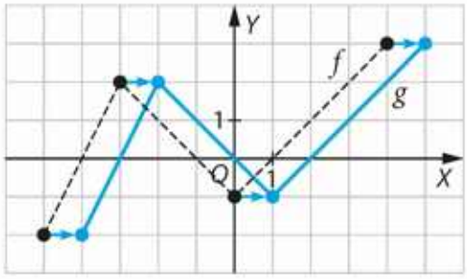
d) $y = \frac{1}{2}|x - 2|$

PRZYKŁAD 3

Przyjrzyj się wykresowi funkcji $f: \langle -5; 4\rangle \to \mathbf{R}$.
Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x - 1)$. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji g.



KROK 1 Szkicujemy wykres funkcji g. Wykres funkcji g otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji f o 1 jednostkę w prawo wzdłuż osi OX:



KROK 2 Z wykresu funkcji g odczytujemy dziedzinę i miejsca zerowe:
dziedziną jest zbiór $\langle -4; 5\rangle$, a miejsca zerowe to $x = -3$, $x = 0$ oraz $x = 2$.

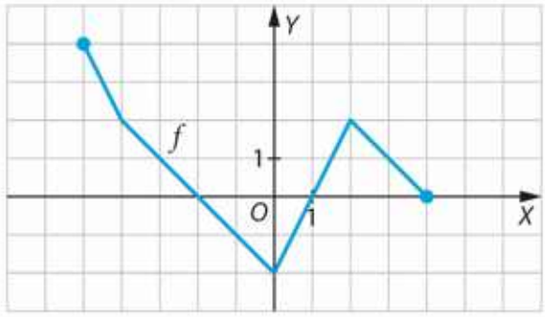
ĆWICZENIE 3

Korzystając z wykresu funkcji f z przykładu 3, naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x+2)$. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji g.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 214

1. Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej miejsca zerowe.



a) $g(x) = f(x-3)$

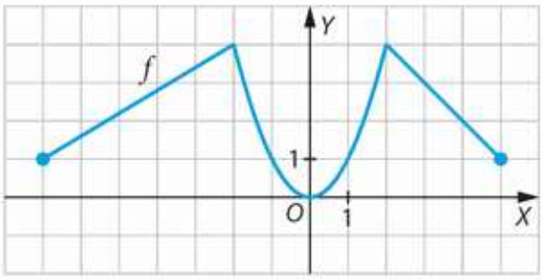
b) $g(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c) $g(x) = f(x+4)$

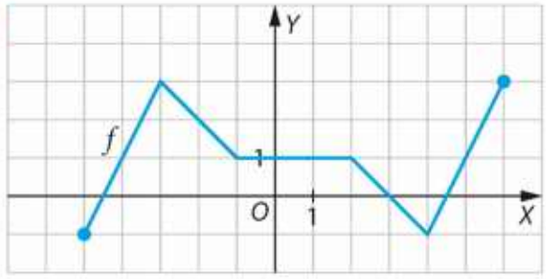
d) $g(x) = f\left(x + 1\frac{1}{2}\right)$

2. Korzystając z wykresu funkcji f, naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = f(x-3)$ oraz $h(x) = f(x+4)$. Podaj dziedzinę funkcji g i dziedzinę funkcji h.

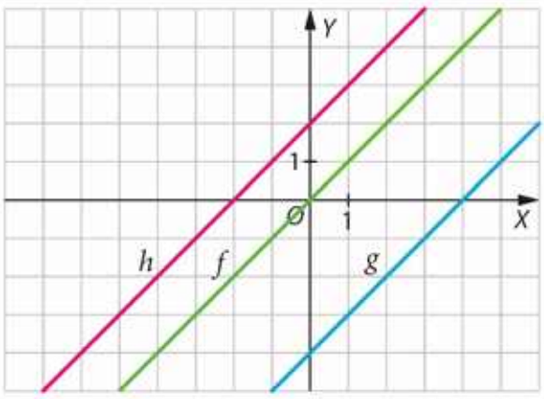
a)



b)



3. Przyjrzyj się wykresom funkcji f, g i h. Funkcja f opisana jest wzorem $y = x$. Zapisz wzory funkcji g i h.



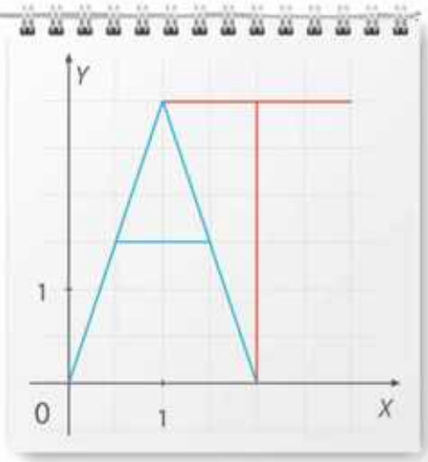
4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = f(x-2)$ oraz $h(x) = g(x) - 3$. Podaj wzór funkcji h.

LEKCJA

10 Symetria wykresu względem osi OX lub OY

NA POCZĄTEK

Arek i Tomek postanowili zmienić dotychczasowe logo swojej firmy – przedstawione obok. Przyjęli dwa założenia: nowy projekt ma zawierać poprzednie logo oraz powinien być do niego symetryczny. Narysuj swoją propozycję.

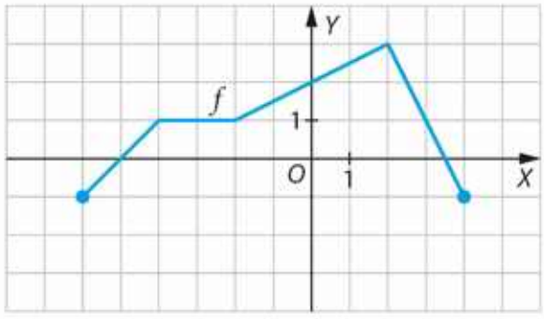


WAŻNA WIADOMOŚĆ

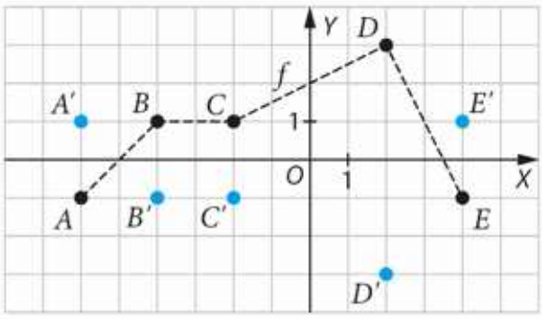
Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.

PRZYKŁAD 1

Przyjrzyj się wykresowi funkcji $f\colon \langle -6; 4\rangle \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $y = -f(x)$, a następnie podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności.



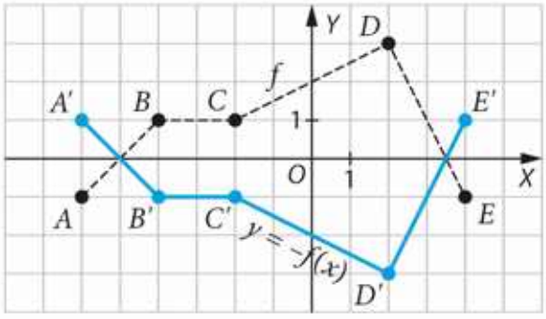
KROK 1 Odbijamy symetrycznie punkty A, B, C, D, E względem osi OX:



PODPOWIEDŹ

Zwróć uwagę, że pierwsze współrzędne punktów symetrycznych względem osi OX są takie same, zaś drugie współrzędne tych punktów są liczbami przeciwnymi.

KROK 2 Łączymy punkty A', B', C', D', E', dzięki czemu otrzymujemy wykres funkcji $y = -f(x)$:



KROK 3 Odczytujemy z wykresu dziedzinę funkcji $y = -f(x)$:
$\langle -6; 4 \rangle$

KROK 4 Odczytujemy z wykresu zbiór wartości funkcji $y = -f(x)$:
$\langle -3; 1 \rangle$

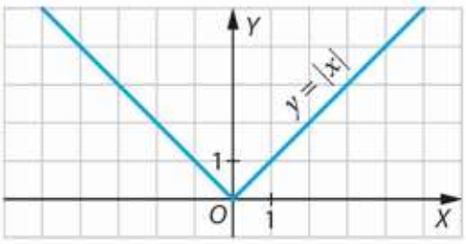
KROK 5 Odczytujemy z wykresu miejsca zerowe funkcji $y = -f(x)$:
$x = -5$ oraz $x = 3{,}5$

KROK 6 Odczytujemy z wykresu przedziały monotoniczności funkcji $y = -f(x)$:
Funkcja $y = -f(x)$ jest malejąca w przedziale $\langle -6; -4 \rangle$.
Funkcja $y = -f(x)$ jest stała w przedziale $\langle -4; -2 \rangle$.
Funkcja $y = -f(x)$ jest malejąca w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$.
Funkcja $y = -f(x)$ jest rosnąca w przedziale $\langle 2; 4 \rangle$.

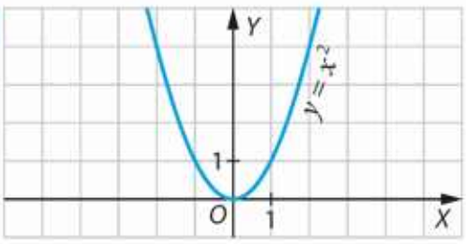
ĆWICZENIE 1

1.1. Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj wykres funkcji $y = -f(x)$.

a)

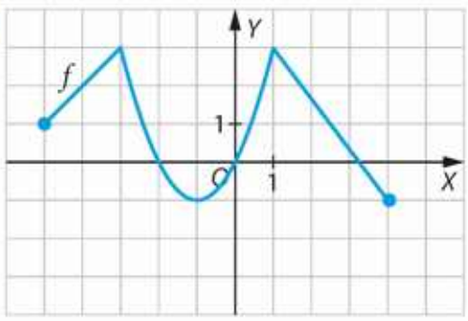


b)

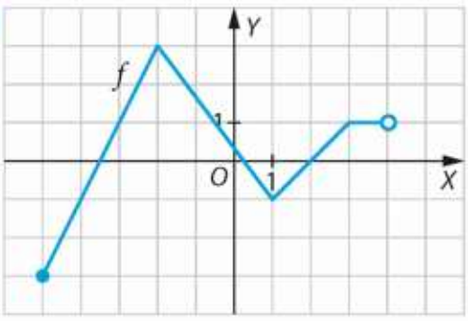


1.2. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji $y = -f(x)$, a następnie podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności.

a)



b)

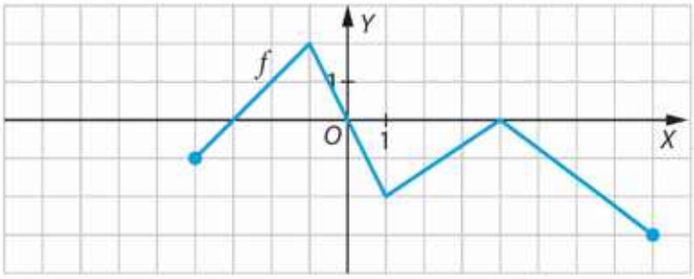


WAŻNA WIADOMOŚĆ

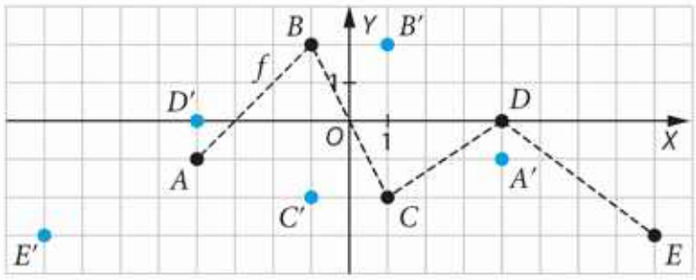
Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.

PRZYKŁAD 2

Przyjrzyj się wykresowi funkcji f: $\langle -4; 8\rangle \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g: $y = f(-x)$, a następnie podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.



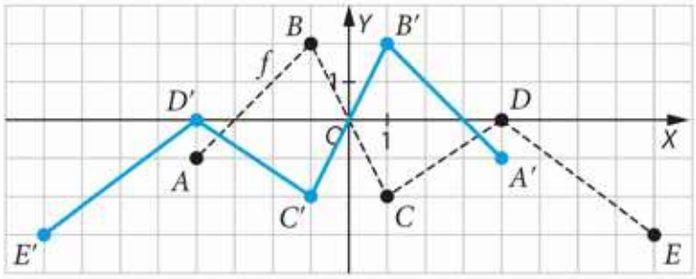
KROK 1 Odbijamy symetrycznie punkty A, B, C, D, E względem osi OY:



PODPOWIEDŹ

Zwróć uwagę, że drugie współrzędne punktów symetrycznych względem osi OY są takie same, zaś pierwsze współrzędne tych punktów są liczbami przeciwnymi.

KROK 2 Łączymy punkty A', B', C', D', E' dzięki czemu otrzymujemy wykres funkcji $y = f(-x)$:



KROK 3 Odczytujemy z wykresu dziedzinę funkcji $y = f(-x)$:
$\langle -8; 4\rangle$

KROK 4 Odczytujemy z wykresu zbiór wartości funkcji $y = f(-x)$:
$\langle -3; 2\rangle$

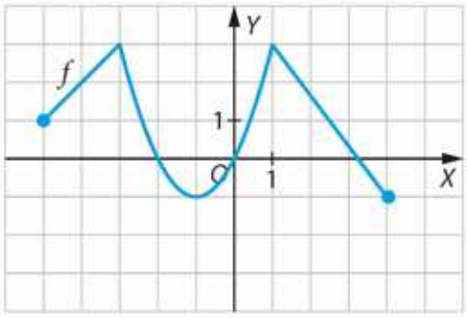
KROK 5 Odczytujemy z wykresu miejsca zerowe funkcji $y = f(-x)$:
$x = -4$, $x = 0$ oraz $x = 3$

ĆWICZENIE 2

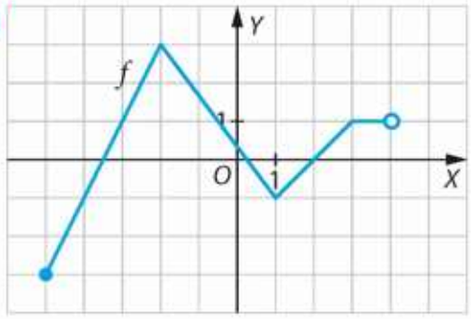
2.1. Dana jest funkcja f: $\langle -2; 5\rangle \to \mathbf{R}$. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby –2, –1, 0, 4 i 5. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $y = f(-x)$.

2.2. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(-x)$, a następnie podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

a)



b)

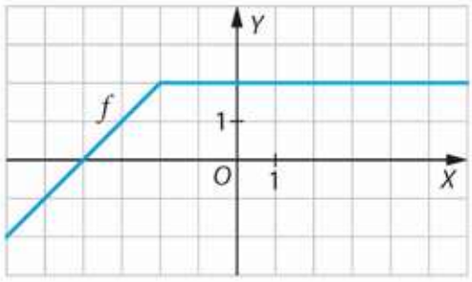


ZADANIA

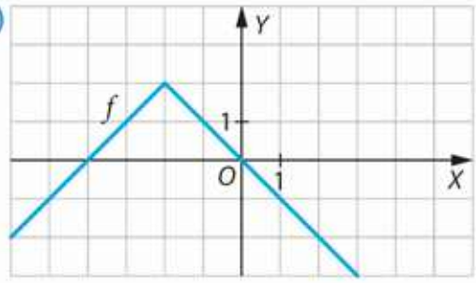
Zbiór zadań, s. 215

1. Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz $h(x) = f(-x)$.

a)



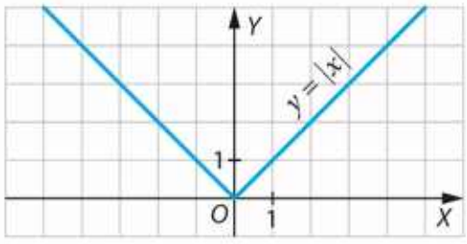
b)



2. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz $h(x) = f(-x)$.

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = 3x + 2$

3. Na podstawie wykresu funkcji $y = |x|$ naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x - 3|$, a następnie wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz $h(x) = f(-x)$. Podaj miejsca zerowe funkcji g i h.

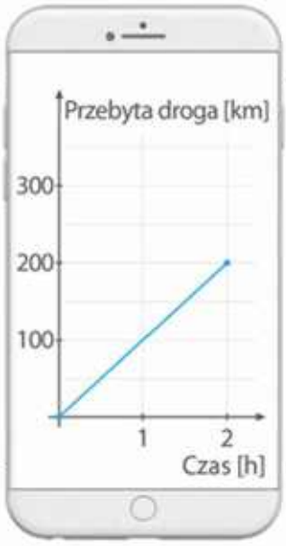


LEKCJA

11 Funkcje – zastosowanie

NA POCZĄTEK

Paweł trasę z Hamburga do Warszawy o długości 850 km przejechał w 12 godzin. Wykres z jego nawigacji przedstawia przebytą drogę w zależności od czasu w ciągu pierwszych 2 godzin podróży. Jakie informacje Paweł mógł odczytać z wykresu? Czy przez kolejne 10 godzin jechał szybciej niż przez pierwsze 2?



PRZYKŁAD 1

Fragment wykresu przedstawia zależność liczby kursów pewnej ciężarówki o ładowności 5 t od masy przewożonego towaru. Odpowiedz, ile kursów musi zrobić kierowca tej ciężarówki, aby przewieźć towar o masie:

a) 17 t, b) 38 t.

a) ROZWIĄZANIE

Odczytujemy z wykresu, że kierowca musi zrobić cztery kursy, aby przewieźć 17 t towaru.

b) KROK 1 Aby obliczyć liczbę kursów, dzielimy masę towaru przez ładowność ciężarówki:
$38 : 5 = 7{,}6$

KROK 2 Zaokrąglamy liczbę 7,6 z nadmiarem do liczby naturalnej 8.

Kierowca musi zrobić osiem kursów, aby przewieźć 38 t towaru.

ĆWICZENIE 1

Przy centrum handlowym znajdują się dwa płatne parkingi – Niebieski i Fioletowy. Na podstawie cenników wykonaj polecenia.

a) Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności ceny za postój od liczby godzin dla obu parkingów.

b) Oblicz, ile zapłacimy za 3,5-godzinny postój na parkingu Niebieskim, a ile na Fioletowym.

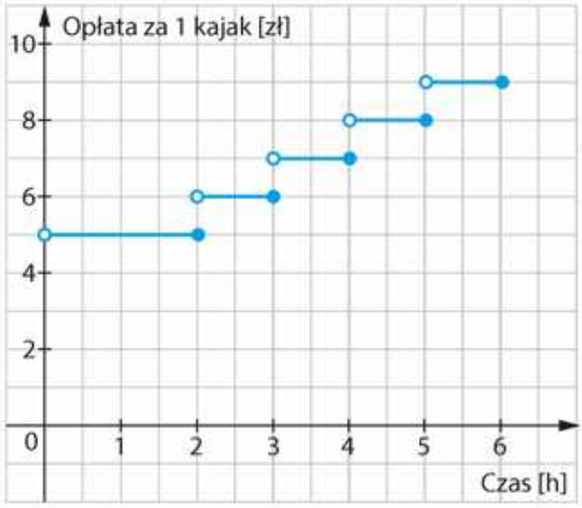
c) Podaj, na którym parkingu opłata za 6-godzinny postój jest niższa.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 215

1. Podróż z Gdańska do Krakowa samochodem ze średnią prędkością poruszania się 60 km/h zajęła x godzin. Podaj wzór funkcji, która pozwoli obliczyć odległość y między tymi miastami. Wiedząc, że odległość ta wynosi 583 km, oblicz, jak długo trwała podróż z tą prędkością.

2. Wykres przedstawia cennik wypożyczalni kajaków. Oblicz, ile zapłacisz, jeśli wynajmiesz dwa kajaki na trzy godziny i trzy kajaki na dwie godziny.



ZADANIA BRANŻOWE

3. Dystrybutor w firmie budowlanej zaplanował po cztery kursy trzech ciężarówek, każda o ładowności 6 t. Oblicz maksymalną masę ładunku, który zostanie przewieziony przez te ciężarówki.

4. Przyjrzyj się tabeli opłat w firmie kurierskiej. Następnie wykonaj polecenia.

Cennik wysyłek listów						
Waga	powyżej	–	50 g	100 g	250 g	400 g
	do	50 g	100 g	250 g	400 g	1000 g
Opłata [zł]		2,50	3,0	4,0	4,5	6,0

a) Przedstaw dane z tabeli w postaci wykresu.

b) Oblicz, ile zapłacisz za wysyłkę trzech listów o wagach 30 g, 150 g i 300 g.

Powtórzenie rozdziału
FUNKCJE

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Funkcja f, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich, dana jest wzorem $f(x) = 2x + 3$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Funkcja f przyjmuje tylko wartości nieparzyste.

B. Najmniejszą wartością, jaką funkcja przyjmuje dla argumentów dwucyfrowych, jest 23.

C. Największą wartością, jaką funkcja przyjmuje dla argumentów dwucyfrowych, jest 203.

2 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Funkcja f dana wzorem $f(x) = x^2 + 4x$ przyjmuje te same wartości dla argumentów

A. –4 i 4. **B.** –4 i –2. **C.** –3 i –1. **D.** –2 i 0.

3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Miejscem zerowym funkcji $f(x) = (x^2 + 4)(x + 5)$ jest liczba

A. 2. **B.** –2. **C.** 5. **D.** –5.

4 Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \langle -3; 4\rangle \to \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = (x - 1)^2 - 4$, a następnie wykres funkcji g.

a) $g(x) = f(x - 2)$ **b)** $g(x) = f(x) + 2$ **c)** $g(x) = -f(x)$ **d)** $g(x) = f(-x)$

5 Wykresem funkcji f jest odcinek o końcach A i B. Naszkicuj wykres funkcji f, odczytaj jej miejsce zerowe i zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

a) $A(-2, -1)$, $B(3, 2)$

b) $A(1, 2)$, $B(4, 4)$

c) $A(-4, 2)$, $B(2, -1)$

d) $A(0, 3)$, $B(2, -3)$

6 Pan Jan sprzedaje na swoim stoisku bombki w kształcie kuli. Cenę bombki ustala na podstawie wzoru $c(x) = \frac{1}{2}x + 2$ [zł], gdzie x jest średnicą bombki mierzoną w centymetrach. W sprzedaży ma bombki o średnicach 4, 8, 12 i 16 cm. Wybierz zdania prawdziwe.

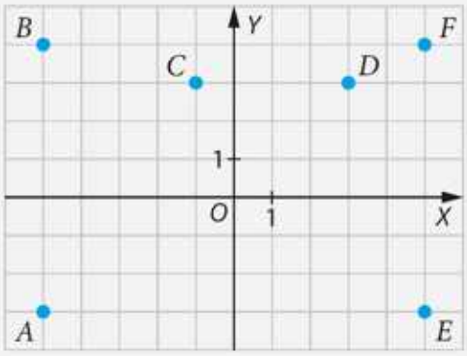
A. Zbiorem wartości funkcji $c(x)$ jest zbiór $\{4, 6, 8, 10\}$.

B. Jeśli kupimy dwie największe bombki, zapłacimy 20 zł.

C. Jeżeli kupimy po jednej bombce każdego rozmiaru, zapłacimy 28 zł.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

1 Spośród punktów A, B, C, D, E i F wybrano trzy i połączono je odcinkami, dzięki czemu otrzymano wykres funkcji malejącej f.



Wybierz zdania prawdziwe.

A. Punkt C lub D należy do wykresu tej funkcji.

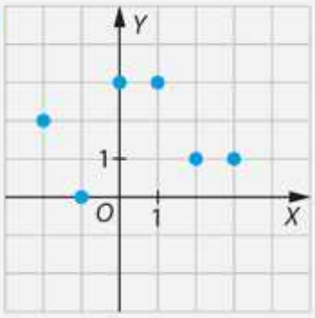
B. Wykres funkcji f nie przetnie osi OY w punkcie (0, 1).

C. Miejsce zerowe funkcji jest równe 3.

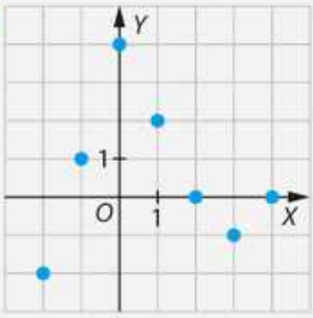
2 Oblicz wartość funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ dla argumentów $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$ i podaj największą z tych wartości.

3 Dany jest wykres funkcji f. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i tabeli. Podaj jej miejsca zerowe.

a)



b)



4 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Liczba (–3) jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem

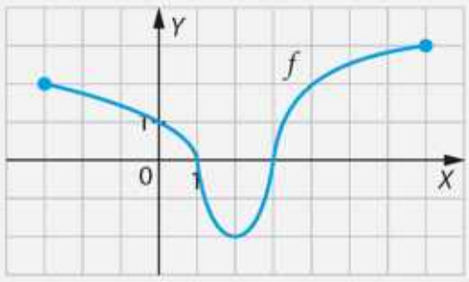
A. $f(x) = x - 3$. **B.** $f(x) = 3x - 3$. **C.** $f(x) = x(x - 3)$. **D.** $f(x) = x(x + 3)$.

5 Odcinek PQ jest wykresem funkcji malejącej. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Jeśli punkt P ma współrzędne (–2, –1), to punkt Q może mieć współrzędne

A. (0, 6). **B.** (–1, –2). **C.** (6, –1). **D.** (6, 1).

6 Rysunek obok przedstawia wykres funkcji f, której dziedziną jest przedział $\langle -3; 7 \rangle$. Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej dziedzinę, zbiór wartości i miejsca zerowe.



a) $g(x) = f(x - 2)$ **c)** $g(x) = -f(x)$

b) $g(x) = f(x) + 2$ **d)** $g(x) = f(-x)$

Rozdział VII

Funkcja liniowa

TEMATY LEKCJI

1 Wykres funkcji liniowej s. 151–155

2 Punkty przecięcia prostej z osiami *OX* i *OY* s. 156–158

3 Monotoniczność funkcji liniowej s. 159–160

4 Współczynnik kierunkowy prostej s. 161–163

5 Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej s. 164–167

6 Interpretacja geometryczna układów równań liniowych s. 168–173

7 Co się liczy w firmie? s. 174–175

Powtórzenie rozdziału s. 176–177

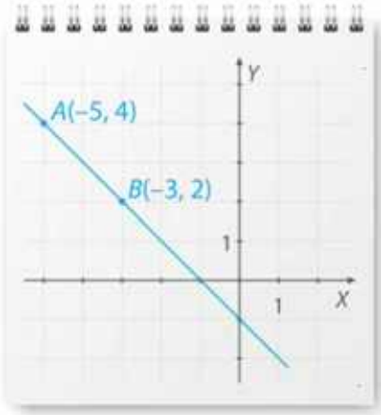
ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

LEKCJA

1 Wykres funkcji liniowej

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się prostej oraz dwóm punktom, które należą do niej. Podaj współrzędne kilku punktów, które należą do tej prostej. Czy potrafisz podać zależność między pierwszą a drugą współrzędną tych punktów?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Funkcją liniową nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, daną wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi. Wzór funkcji liniowej możemy również zapisać w postaci $f(x) = ax + b$. Wykresem funkcji liniowej jest **prosta**.

PRZYKŁAD 1

Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji danej wzorem $y = 2x + 3$.

a) $P(4, 11)$ b) $P(10, 22)$

a) **KROK 1** Podstawiamy do wzoru funkcji $x = 4$ i obliczamy wartość y:

$y = 2 \cdot 4 + 3 = 8 + 3 = 11$

KROK 2 Porównujemy otrzymaną wartość y z drugą współrzędną punktu $P(4, 11)$: otrzymana wartość $y = 11$ jest równa drugiej współrzędnej punktu P.

Punkt $P(4, 11)$ należy do wykresu funkcji $y = 2x + 3$.

b) **ROZWIĄZANIE**

$y = 2 \cdot 10 + 3 = 23 \neq 22$

Punkt $P(10, 22)$ nie należy do wykresu funkcji $y = 2x + 3$.

ĆWICZENIE 1

Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu podanej funkcji.

a) $y = x + 2$ $P(-4, -2)$ b) $y = -x + 3$ $P(10, -7)$ c) $y = -2x + 2$ $P(-5, 10)$

Aby naszkicować wykres funkcji liniowej, wystarczy znaleźć dwa różne należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą. Jeśli to możliwe, to przy rysowaniu wykresu funkcji liniowej wykorzystujemy punkty, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

PRZYKŁAD 2

Naszkicuj wykres funkcji liniowej określonej wzorem $y = \frac{4}{3}x$.

KROK 1 Wyznaczamy dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych, np.:

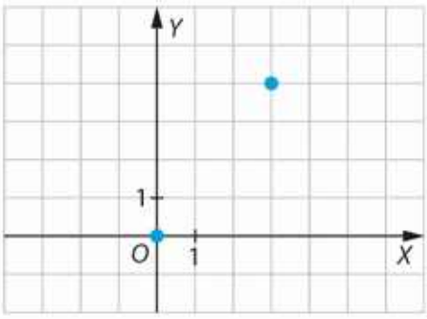
dla $x = 0$ wartość funkcji jest równa $y = \frac{4}{3} \cdot 0 = 0$.

dla $x = 3$ wartość funkcji jest równa $y = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$.

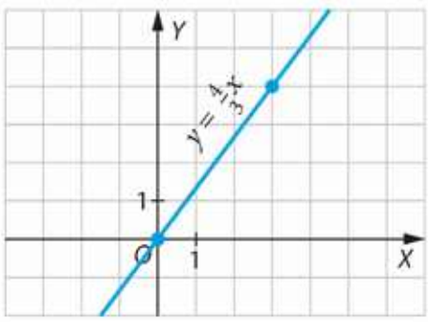
Otrzymane wyniki możemy przedstawić w tabeli:

x	0	3
y	0	4

KROK 2 Zaznaczamy w układzie współrzędnych otrzymane punkty:



KROK 3 Rysujemy prostą przechodzącą przez zaznaczone punkty:



ĆWICZENIE 2

Naszkicuj wykres podanej funkcji liniowej.

a) $y = x + 2$

b) $y = x - 1$

c) $y = -x + 3$

d) $y = \frac{1}{3}x$

e) $y = \frac{1}{2}x - 1$

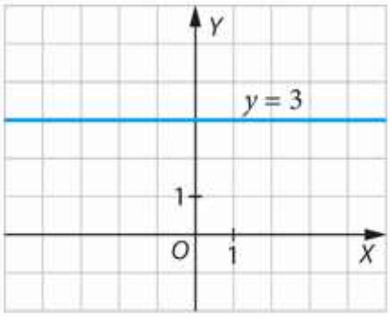
f) $y = -\frac{4}{3}x + 1$

PRZYKŁAD 3

Naszkicuj wykres funkcji $y = 3$.

ROZWIĄZANIE

Zauważamy, że we wzorze $y = 3$ nie występuje x. Oznacza to, że dla dowolnej liczby x funkcja przyjmuje zawsze wartość 3, zatem wykres funkcji $y = 3$ wygląda następująco:



ĆWICZENIE 3

Naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = 2$ **b)** $y = -1$ **c)** $y = 0$

PRZYKŁAD 4

W tym samym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji liniowych: $y = 2x$, $y = 2x + 2$, $y = 2x - 3$.

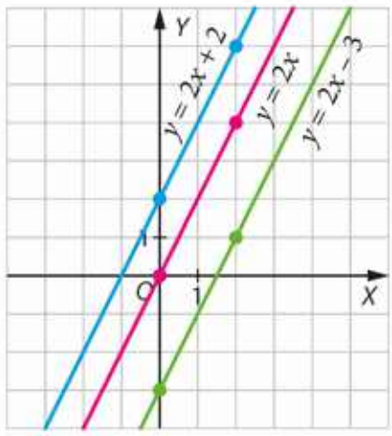
KROK 1 Sporządzamy tabele wartości funkcji dla podanych argumentów:

x	0	2
$y = 2x$	0	4

x	0	2
$y = 2x + 2$	2	6

x	0	2
$y = 2x - 3$	–3	1

KROK 2 Zaznaczamy w układzie współrzędnych otrzymane punkty i je łączymy:



ĆWICZENIE 4

W tym samym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji liniowych.

a) $y = 3x$, $y = 3x - 1$, $y = 3x + 2$ **b)** $y = -x$, $y = -x + 1$, $y = -x - 3$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

Wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi.

PRZYKŁAD 5

Określ, które z prostych $k: y = \frac{5}{2}x + 3$, $l: y = 2{,}5x - 1$, $m: y = \frac{2}{5}x + 2$ są równoległe do prostej danej równaniem $y = \frac{5}{2}x + 2$.

ROZWIĄZANIE

Proste k i l są równoległe do prostej $y = \frac{5}{2}x + 2$, ponieważ mają ten sam współczynnik kierunkowy równy $\frac{5}{2}$.

ĆWICZENIE 5

Wśród prostych k, l, m wskaż parę prostych równoległych.

a) $k: y = x + 2$
$l: y = 2x - 2$
$m: y = x + 4$

b) $k: y = \frac{3}{4}x - 3$
$l: y = \frac{4}{3}x + 3$
$m: y = 0{,}75x + 5$

c) $k: y = -x + 2$
$l: y = x + 4$
$m: y = 3 - x$

PRZYKŁAD 6

Prosta k jest dana równaniem $y = \frac{1}{2}x - 1$. Prosta l jest do niej równoległa i przechodzi przez punkt (4, 5). Znajdź równanie prostej l.

KROK 1 Wiemy, że proste k i l są równoległe, zatem współczynniki kierunkowe prostych k i l są równe, czyli $a = \frac{1}{2}$.

KROK 2 Zapisujemy równanie prostej l, które ma postać:

$y = \frac{1}{2}x + b$

Takich prostych jest nieskończenie wiele, ale tylko jedna z nich przechodzi przez punkt (4, 5).

KROK 3 Punkt (4, 5) należy do prostej l, dlatego podstawiamy jego współrzędne do równania $y = \frac{1}{2}x + b$:

$5 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$

KROK 4 Obliczamy b:

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$$
$$5 = 2 + b$$
$$b = 3$$

Prostą l określa równanie $y = \frac{1}{2}x + 3$.

ĆWICZENIE 6

Prosta k dana jest równaniem $y = 2x + 3$. Znajdź równanie prostej l, która jest do niej równoległa i przechodzi przez podany punkt.

a) $P(1, 3)$ b) $Q(3, 2)$ c) $R(-3, -1)$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 216

1. Dany jest równoległobok o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(8, 6)$ i $D(3, 6)$. Wiedząc, że:

a) bok AD zawiera się w prostej $y = 2x$, wyznacz równanie prostej, w której zawiera się bok BC;

b) bok AB zawiera się w prostej $y = 0$, wyznacz równanie prostej, w której zawiera się bok CD.

2. Koszt przejazdu taksówką składa się z opłaty wstępnej wynoszącej 7 zł oraz stawki za każdy przejechany kilometr równej 2,50 zł. Zapisz wzór funkcji, która przedstawia koszt przejazdu taksówką w zależności od liczby przejechanych kilometrów. Sporządź wykres tej funkcji.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Ogrodnik sprzedaje hurtowo róże po 1,50 zł za sztukę i do każdej sprzedaży dolicza 20 zł za transport. Funkcja określająca kwotę, jaką należy zapłacić w zależności od liczby kupionych róż, wyraża się wzorem $y = 1{,}5x + 20$. Dobierz odpowiednią jednostkę na osiach układu współrzędnych i naszkicuj wykres tej funkcji. Oblicz, ile kosztuje zakup 60 róż łącznie z transportem.

4. Właściciel restauracji zamówił projekt logo, który miał zawierać trzy proste równoległe. Grafik umieścił je w układzie współrzędnych. Jedna z nich ma wzór $y = -x + 1$. Naszkicuj tę prostą, a następnie dwie pozostałe, jeśli wiesz, że do jednej z nich należy punkt (1, 2), a do drugiej – punkt (3, 2).

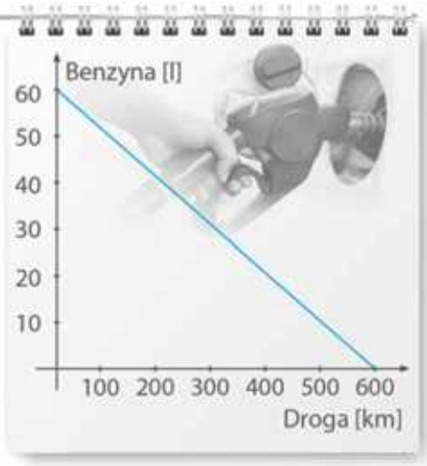
5. Trzy firmy przeprowadzkowe za każdy przejechany kilmometr pobierają taką samą opłatę w wysokości 3 zł. Każda z nich pobiera jednak od klienta inną opłatę wstępną. W firmie A wynosi ona 5 zł. Podaj wysokość opłaty wstępnej w firmie B, aby przejazd był korzystniejszy niż w firmie A, oraz opłaty w firmie C, aby usługa firmy A była korzystniejsza. Przedstaw wykresy kosztów w jednym układzie współrzędnych.

LEKCJA

2 Punkty przecięcia prostej z osiami OX i OY

NA POCZĄTEK

Na wykresie przedstawiono zależność między liczbą litrów spalanej benzyny a liczbą przejechanych kilometrów. Czy potrafisz odczytać z wykresu, ile wynosi pojemność baku oraz ile kilometrów możesz przejechać, mając pełny bak?

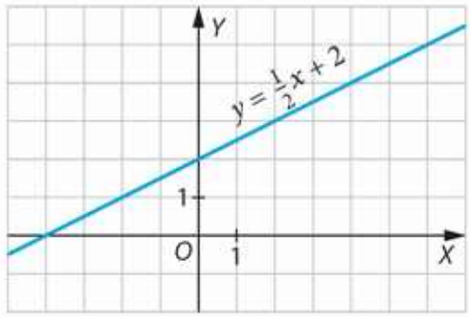


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Prosta, będąca wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$, przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

PRZYKŁAD 1

Przyjrzyj się wykresowi funkcji liniowej, a następnie wyznacz punkt przecięcia jej wykresu z osią OY.



ROZWIĄZANIE

SPOSÓB I

Na osi OY leżą punkty o współrzędnych $(0, y)$. Aby wyznaczyć y, podstawiamy $x = 0$ do wzoru funkcji:

$y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$

SPOSÓB II

Odczytujemy współczynnik b ze wzoru $y = \frac{1}{2}x + 2$, czyli $b = 2$.

Wykres tej funkcji przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$.

ĆWICZENIE 1

1.1. Wyznacz punkt przecięcia wykresu funkcji liniowej z osią OY.

a) $y = x + 2$ **b)** $y = -2x + 1$ **c)** $y = -\frac{1}{3}x - 2$ **d)** $y = \frac{4}{3}x + 5$

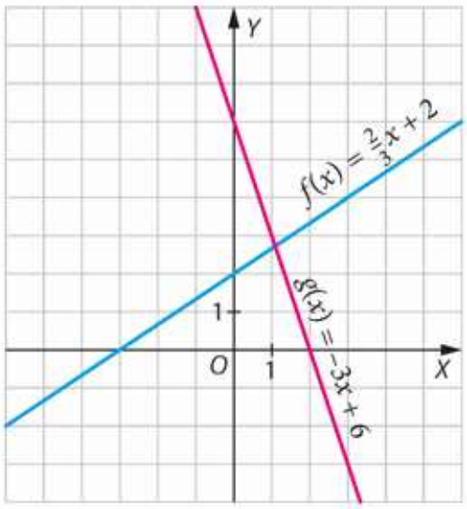
1.2. Naszkicuj w pierwszym układzie współrzędnych te spośród prostych l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, które przecinają oś OY w punkcie (0, 2), a w drugim te, które przecinają oś OY w punkcie (0, –1).

l_1: $y = 2x + 2$ $\quad$ l_3: $y = -1$ $\quad$ l_5: $y = -3x + 2$

l_2: $y = 2x - 1$ $\quad$ l_4: $y = 2$ $\quad$ l_6: $y = -3x - 1$

PRZYKŁAD 2

Z zamieszczonego wykresu odczytaj miejsca zerowe funkcji f i g.



ROZWIĄZANIE

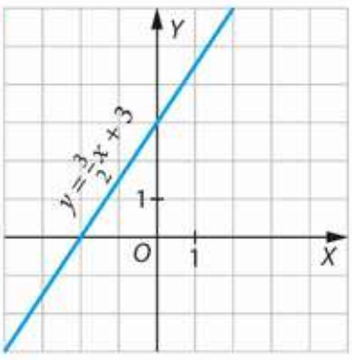
Z wykresu odczytujemy punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią OX: (–3, 0), który jest interpretacją geometryczną miejsca zerowego. Miejscem zerowym jest liczba $x = -3$, czyli pierwsza współrzędna punktu przecięcia wykresu z osią OX.

Z wykresu odczytujemy punkt przecięcia wykresu funkcji g z osią OX: (2, 0). Miejscem zerowym jest liczba $x = 2$.

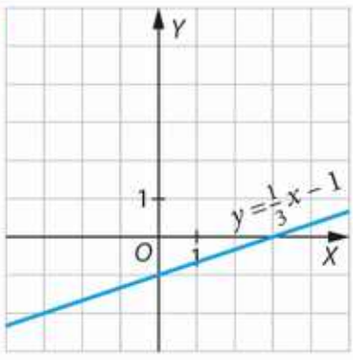
ĆWICZENIE 2

Korzystając z wykresu funkcji, odczytaj jej miejsca zerowe.

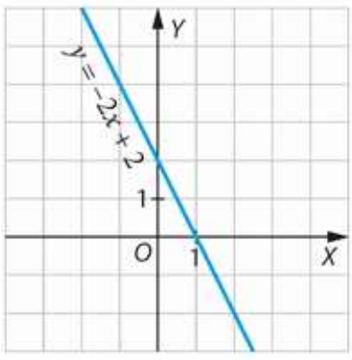
a)



b)



c)



PRZYKŁAD 3

Oblicz miejsce zerowe funkcji $y = 2x + 4$. Podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią OX.

KROK 1 Szukamy miejsca zerowego. Miejsce zerowe to x, dla którego $y = 0$.

KROK 2 Rozwiązujemy równanie $0 = 2x + 4$:

$$0 = 2x + 4 \mid -4$$
$$-4 = 2x \mid :2$$
$$-2 = x$$
$$x = -2$$

Miejscem zerowym funkcji $y = 2x + 4$ jest $x = -2$. Prosta przecina oś OX w punkcie $(-2, 0)$.

ĆWICZENIE 3

3.1. Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej. Podaj współrzędne punktu, w którym wykres funkcji przecina oś OX.

a) $y = 2x + 6$ b) $y = -4x + 2$ c) $y = -3x + 4$

3.2. Podaj przykład funkcji liniowej, która nie ma miejsc zerowych. Naszkicuj jej wykres.

3.3. Czy funkcja liniowa może mieć nieskończenie wiele miejsc zerowych? Jeśli tak, podaj jej wzór.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 216

1. Zapisz wzory dwóch dowolnych funkcji liniowych, których wykresy przecinają oś OY w danym punkcie.

a) $(0, 3)$ b) $(0, -2)$ c) $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$

2. Wyznacz współrzędne punktów, w których prosta przecina osie układu współrzędnych. Następnie naszkicuj tę prostą.

a) $y = 3x - 3$ c) $y = -2x + 6$ e) $y = \frac{1}{2}x - 2$

b) $y = 2x + 4$ d) $y = -3x - 6$ f) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

3. Wyznacz miejsce zerowe funkcji. Podaj punkty, w których jej wykres przecina osie układu współrzędnych.

a) $y = 4x - 8$ b) $y = -6x + 3$ c) $y = \frac{1}{3}x + 2$

LEKCJA

3 Monotoniczność funkcji liniowej

NA POCZĄTEK

Chcesz ugotować risotto dla sześciu osób. Ile ryżu będziesz potrzebować? Zauważ, że powyższą zależność opisuje wzór $y = 50x$, gdzie x jest liczbą osób, zaś y – liczbą gramów ryżu.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

O monotoniczności funkcji liniowej decyduje jej współczynnik kierunkowy. Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest **rosnąca** dla $a > 0$, **malejąca** dla $a < 0$ oraz **stała** dla $a = 0$.

PRZYKŁAD 1

Określ monotoniczność funkcji liniowej.

a) $y = 3x - 2$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 3$

ROZWIĄZANIE

a) Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej $y = 3x - 2$ jest równy 3. Funkcja liniowa jest rosnąca, ponieważ $3 > 0$.

b) Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej $y = -2x - 3$ jest równy -2. Funkcja liniowa jest malejąca, ponieważ $-2 < 0$.

c) Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej $y = 3$ jest równy 0. Możemy to zauważyć, jeśli wzór funkcji $y = 3$ przedstawimy w taki sposób: $y = 0 \cdot x + 3$. Funkcja liniowa jest stała.

ĆWICZENIE 1

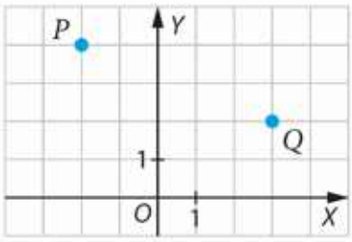
Określ monotoniczność funkcji liniowej. Uporządkuj rosnąco liczby $f(1), f(2), f(5)$.

a) $f(x) = 4x + 3$ c) $f(x) = -2x + 5$ e) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

b) $f(x) = 3x - 4$ d) $f(x) = -4$ f) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

PRZYKŁAD 2

Określ znak współczynnika kierunkowego prostej, która jest wykresem funkcji liniowej, jeśli wiesz, że prosta ta przechodzi przez punkty $P(-2, 4)$ i $Q(3, 2)$.



ROZWIĄZANIE

Ponieważ prosta przechodząca przez punkty P i Q jest wykresem funkcji malejącej, jej współczynnik kierunkowy jest ujemny.

ĆWICZENIE 2

Określ znak współczynnika kierunkowego prostej, która jest wykresem funkcji liniowej f, jeśli wiesz, że prosta ta przechodzi przez punkty P i Q.

a) $P(-2, -4)$ i $Q(3, -1)$ b) $P(-4, 3)$ i $Q(1, 3)$ c) $P(1, 6)$ i $Q(5, 2)$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 217

1. Naszkicuj wykres funkcji liniowej f. Określ jej monotoniczność.

a) $f(x) = 2x - 1$
b) $f(x) = -x + 2$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$
e) $f(x) = 1$
f) $f(x) = -2$

ZADANIA BRANŻOWE

2. Pewne biuro turystyczne w 2013 r. miało 800 klientów. Jego właściciele planowali, że w latach 2014–2019 liczba klientów będzie rosła o 100 osób co roku. Oczekiwany wzrost jednak nie nastąpił – w latach 2014–2019 biuro obsłużyło tyle samo podróżnych, co w 2013 r. Oblicz, o ile mniej klientów miało biuro w latach 2014–2019 w stosunku do założeń. Jak wygląda wykres przedstawiający liczbę klientów biura w latach 2013–2019, a jak wyglądałby, gdyby każdego roku biuro obsługiwało o 100 osób więcej?

3. Manikiurzystka planuje wynająć stanowisko do robienia manikiuru w pobliskim salonie kosmetycznym. Dzienny koszt wynajmu opisuje funkcja $y = 15x$, gdzie x jest liczbą obsłużonych klientów. Przed podpisaniem umowy właściciel salonu obniżył koszt wynajmu o 5 zł od każdego klienta. Wykonaj polecenia.

a) Zapisz wzór funkcji opisującej koszt, jaki manikiurzystka zapłaci właścicielowi salonu. Naszkicuj jej wykres.

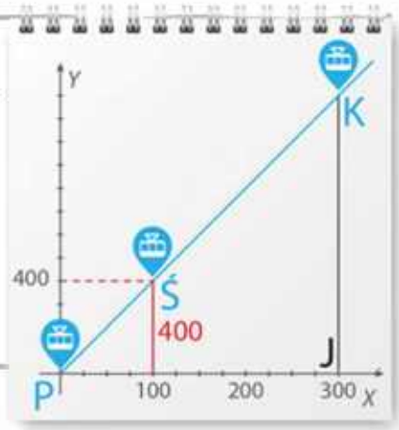
b) Oblicz, ile zapłaci manikiurzystka za wynajem za dzień, jeśli tego dnia obsłuży siedem osób.

LEKCJA

4 Współczynnik kierunkowy prostej

NA POCZĄTEK

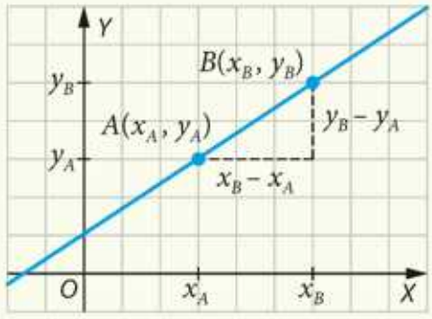
Przyjrzyj się schematowi trasy kolejki górskiej z jej stacjami. Czy potrafisz określić, jaką długość ma odcinek *JK*?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeśli prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, gdzie $x_A \neq x_B$, to jej współczynnik kierunkowy jest równy:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



PRZYKŁAD 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty *A* i *B*.

a) $A(-1, -3)$ i $B(1, 1)$ b) $A(-2, 5)$ i $B(4, -1)$ c) $A(-5, 3)$ i $B(4, 3)$

ROZWIĄZANIE

a) Współrzędne punktów $A(-1, -3)$ i $B(1, 1)$ podstawiamy do wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-(-3)}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

b) Współrzędne punktów $A(-2, 5)$ i $B(4, -1)$ podstawiamy do wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-5}{4-(-2)} = \frac{-6}{6} = -1$$

c) Współrzędne punktów $A(-5, 3)$ i $B(4, 3)$ podstawiamy do wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-3}{4-(-5)} = \frac{0}{9} = 0$$

ĆWICZENIE 1

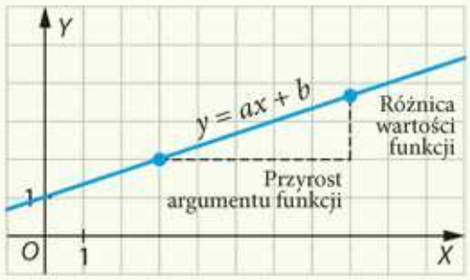
Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B.

a) $A(2, 4)$ i $B(3, 5)$ **b)** $A(1, 4)$ i $B(-7, -5)$ **c)** $A(8, -3)$ i $B(2, 7)$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ obliczamy następująco:

$$a = \frac{\text{różnica wartości funkcji}}{\text{przyrost argumentu funkcji}}$$



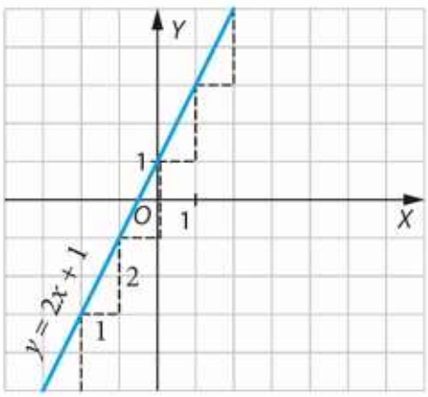
PRZYKŁAD 2

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego prostej.

a) $y = 2x + 1$ **b)** $y = -2x + 4$

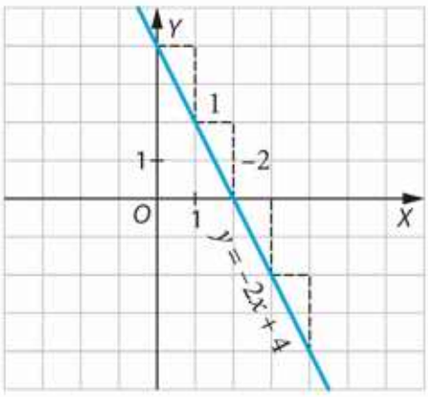
ROZWIĄZANIE

a) $a = 2 = \frac{2}{1}$



Dla prostej $y = 2x + 1$ wzrostowi argumentu o 1 odpowiada wzrost wartości funkcji o 2.

b) $a = -2 = \frac{-2}{1}$



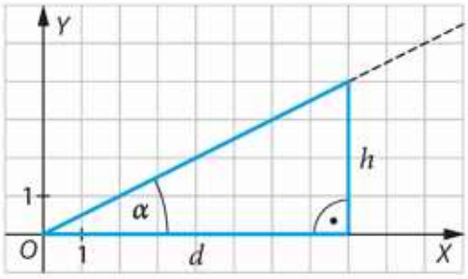
Dla prostej $y = -2x + 4$ wzrostowi argumentu o 1 odpowiada spadek wartości funkcji o 2.

ĆWICZENIE 2

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego prostej.

a) $y = x + 2$ **b)** $y = \frac{1}{3}x - 1$ **c)** $y = -3x + 1$

Współczynnik kierunkowy prostej określa jej nachylenie do poziomu. Z jego zastosowaniem możemy się spotkać przy określaniu nachylenia danej trasy do poziomu. Podaje się go zwykle w procentach: nachylenie = $\frac{h}{d} \cdot 100\%$

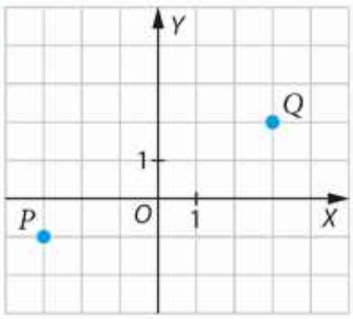


ZADANIA

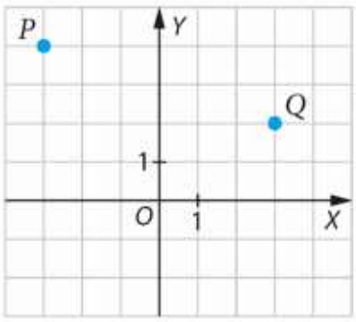
Zbiór zadań, s. 217

1. Odczytaj współrzędne punktów P i Q. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez te punkty.

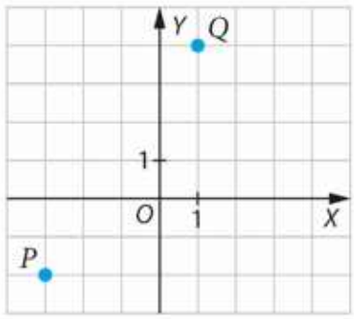
a)



b)



c)

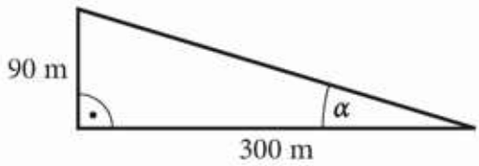


2. Określ, która prosta: PQ czy RS ma większy współczynnik kierunkowy.

a) $P(1, 2)$, $Q(4, 5)$, $R(2, 1)$, $S(5, 4)$

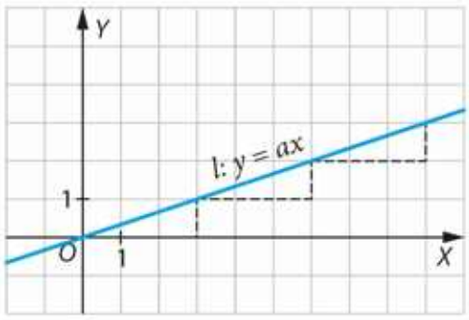
b) $P(-1, 4)$, $Q(3, 0)$, $R(-2, 6)$, $S(2, -2)$

3. Przyjrzyj się schematowi pewnego odcinka trasy pod górę. Oblicz nachylenie trasy na tym odcinku.



ZADANIA BRANŻOWE

4. Pracownik pewnej firmy miał wykonać projekt szyn najazdowych dla wózków na już gotowych schodach. W tym celu przygotował w układzie współrzędnych schematyczny rysunek prostej o współczynniku $a = \frac{1}{3}$. Ile wynosi współczynnik kierunkowy prostej l: $y = ax$, jeśli:



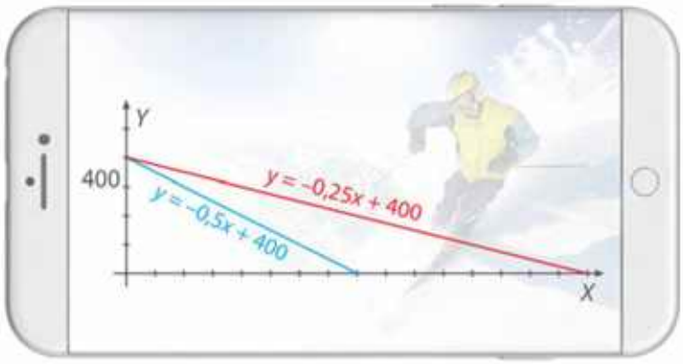
a) długość stopnia schodów wynosi 27 cm, a jego wysokość to 18 cm,

b) długość stopnia schodów wynosi 35 cm, a jego wysokość to 21 cm?

LEKCJA

5 Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej

NA POCZĄTEK



Przy określaniu trudności tras narciarskich bierze się pod uwagę ich nachylenie. Kolorem zielonym oznacza się trasy bardzo łatwe, niebieskim – łatwe, czerwonym – trudne, a czarnym – bardzo trudne. Przyjrzyj się rysunkowi, na którym pokazano dwie proste odpowiadające trasie czerwonej i trasie czarnej. Nachylenie trasy czarnej wynosi 50%. Ile wynosi nachylenie trasy czerwonej wyrażone w procentach? Jakie równanie miałaby prosta odpowiadająca trasie niebieskiej o nachyleniu 20%, zaczynającej się w tym samym punkcie startu?

PRZYKŁAD 1

Prosta l jest równoległa do prostej k danej równaniem $y = 2x - 3$ i przechodzi przez punkt $P(1, 5)$. Wyznacz równanie prostej l.

KROK 1 Stwierdzamy, że proste l i k są równoległe, więc mają takie same współczynniki kierunkowe, równe 2.

KROK 2 Zapisujemy równanie prostej l:

$y = 2x + b$

KROK 3 Podstawiamy współrzędne punktu $P(1, 5)$, czyli $x = 1$ i $y = 5$, do równania $y = 2x + b$, żeby wyznaczyć b:

$5 = 2 \cdot 1 + b$
$5 = 2 + b$
$b = 3$

Równanie prostej l ma postać $y = 2x + 3$.

ĆWICZENIE 1

Zapisz równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) $k: y = 3x - 2, \quad P(2, 2)$

b) $k: y = -2x + 7, \quad P(-2, 1)$

PRZYKŁAD 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(2, 5)$ i $B(3, 2)$.

KROK 1 Podstawiamy współrzędne punktów A i B do wzoru pozwalającego obliczyć współczynnik kierunkowy prostej, czyli $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$x_A = 2,\ y_A = 5,\quad x_B = 3,\ y_B = 2$

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-5}{3-2} = \frac{-3}{1} = -3$

KROK 2 Stwierdzamy, że szukane równanie prostej ma postać $y = -3x + b$.

KROK 3 Aby znaleźć b we wzorze, podstawiamy współrzędne jednego z punktów A lub B do równania $y = -3x + b$. Dla punktu $B(3, 2)$ otrzymujemy:

$2 = -3 \cdot 3 + b$
$2 = -9 + b$
$b = 11$

Równanie prostej ma postać $y = -3x + 11$.

ĆWICZENIE 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B.

a) $A(2, 1)$ i $B(4, 3)$ **b)** $A(-2, 1)$ i $B(3, 3)$ **c)** $A(-1, 6)$ i $B(3, -2)$

PRZYKŁAD 3

Napisz równanie prostej przecinającej osie układu współrzędnych w punktach $(-2, 0)$ i $(0, 4)$.

KROK 1 Korzystamy z informacji, że prosta $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$, w naszym przypadku $(0, 4)$, czyli $b = 4$. Równanie prostej ma postać: $y = ax + 4$

KROK 2 Do równania $y = ax + 4$ podstawiamy współrzędne punktu $(-2, 0)$:

$0 = a \cdot (-2) + 4$

KROK 3 Rozwiązujemy równanie, z którego wyznaczymy a:

$0 = a \cdot (-2) + 4$
$0 = -2a + 4 \mid +2a$
$2a = 4 \mid :2$
$a = 2$

Otrzymujemy równanie prostej $y = 2x + 4$.

ĆWICZENIE 3

Napisz równanie prostej przecinającej osie układu współrzędnych w punktach P i Q.

a) $P(-2, 0)$ i $Q(0, 1)$ **b)** $P(2, 0)$ i $Q(0, -5)$ **c)** $P(4, 0)$ i $Q(0, 3)$

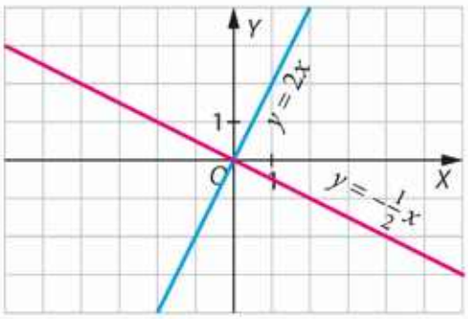
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe, jeśli iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1, czyli $a_1 \cdot a_2 = -1$. Zauważmy, że współczynniki kierunkowe prostych prostopadłych są liczbami odwrotnymi i przeciwnymi.

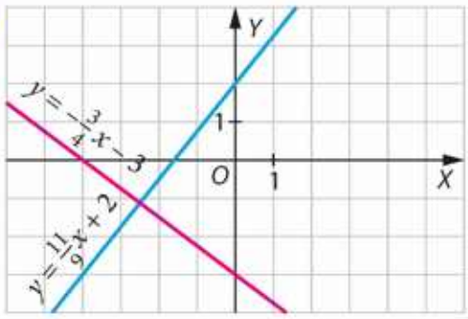
PRZYKŁAD 4

Sprawdź, czy proste są prostopadłe.

a)



b)



a) KROK 1 Odczytujemy współczynniki kierunkowe obu prostych:

$a_1 = 2, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}$

KROK 2 Sprawdzamy, czy iloczyn współczynników kierunkowych prostych jest równy -1:

$a_1 \cdot a_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

Proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe, ponieważ iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1.

b) KROK 1 Odczytujemy współczynniki kierunkowe obu prostych:

$a_1 = \frac{11}{9}, \qquad a_2 = -\frac{3}{4}$

KROK 2 Sprawdzamy, czy iloczyn współczynników kierunkowych prostych jest równy -1:

$a_1 \cdot a_2 = \frac{11}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{{}^{11}\cancel{33}}{{}_{12}\cancel{36}} = -\frac{11}{12} \neq -1$

Proste $y = \frac{11}{9}x + 2$ i $y = -\frac{3}{4}x - 3$ nie są prostopadłe, ponieważ iloczyn ich współczynników kierunkowych jest różny od -1.

ĆWICZENIE 4

Sprawdź, czy proste k i l są prostopadłe.

a) $k: y = -0{,}3x + 0{,}5$
$l: y = 3\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}$

b) $k: y = -1{,}5x + 1$
$l: y = \frac{2}{3}x - 2$

c) $k: y = \frac{3}{7}x + 2$
$l: y = -3\frac{1}{2}x - 1$

PRZYKŁAD 5

Prosta l jest prostopadła do prostej $k: y = 10x + 2$ i przechodzi przez punkt $P(5, 2)$. Wyznacz równanie prostej l.

KROK 1 Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej $l: y = ax + b$, która jest prostopadła do prostej $k: y = 10x + 2$:

$a \cdot 10 = -1 \mid :10$

$a = -\frac{1}{10}$

KROK 2 Zapisujemy równanie prostej l:

$y = -\frac{1}{10}x + b$

KROK 3 Podstawiamy współrzędne punktu $P(5, 2)$, czyli $x = 5$ i $y = 2$, do równania $y = -\frac{1}{10}x + b$, żeby wyznaczyć b:

$2 = -\frac{1}{10} \cdot 5 + b$

$2 = -\frac{1}{2} + b$

$b = 2\frac{1}{2}$

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{1}{10}x + 2\frac{1}{2}$.

ĆWICZENIE 5

Zapisz równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) $k: y = 7x + 2 \quad P(2, 3)$

b) $k: y = -3x + 5 \quad P(-2, 1)$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 218

1. Wyznacz wzór funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ spełniającej podane warunki. Określ monotoniczność tej funkcji.

a) $f(-2) = -1$ i $f(1) = 4$

b) $f(-3) = 3$ i $f(6) = 1$

c) $f(-3) = 4$ i $f(3) = 4$

2. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P. Znajdź współrzędne punktów, w których ta prosta przecina osie OX i OY.

a) $k: y = x + 4, \quad P(5, 2)$

b) $k: y = \frac{1}{2}x + 7, \quad P(6, 2)$

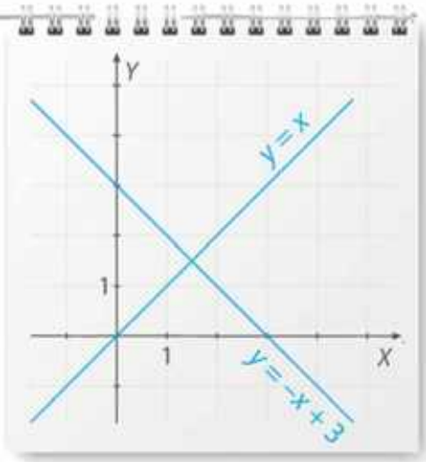
c) $k: y = -x - 6, \quad P(-1, 1)$

LEKCJA

6 Interpretacja geometryczna układów równań liniowych

NA POCZĄTEK

Schemat położenia torów dwóch tras kolejowych został przedstawiony w układzie współrzędnych. Jak myślisz, w jakim punkcie tory się przecinają?



PRZYKŁAD 1

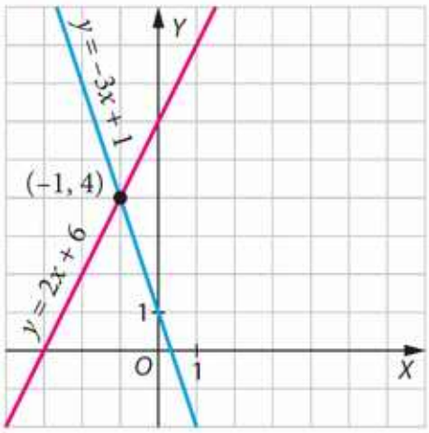
Narysuj proste k: $y = -3x + 1$ oraz l: $y = 2x + 6$. Odczytaj współrzędne punktu przecięcia się tych prostych. Następnie rozwiąż układ równań liniowych $\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$

Porównaj współrzędne punktu przecięcia się prostych z rozwiązaniem układu równań.

KROK 1 Szkicujemy proste k i l:

x	0	1
$y = -3x + 1$	1	−2

x	0	−2
$y = 2x + 6$	6	2



KROK 2 Odczytujemy współrzędne punktu przecięcia się prostych, czyli (−1, 4).

KROK 3 Rozwiązujemy układ równań, np. metodą podstawiania:

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -3x + 1 \\ -5x = 5 \mid :(-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ -3x + 1 = 2x + 6 \mid -2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \cdot (-1) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ -5x + 1 = 6 \mid -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$

KROK 4 Porównujemy współrzędne punktu przecięcia się prostych z rozwiązaniem układu równań.

Punkt (–1, 4) jest punktem przecięcia tych prostych, a jego współrzędne są rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$

ĆWICZENIE 1

Naszkicuj proste k i l. Odczytaj współrzędne punktu przecięcia prostych, a poprawność odczytu sprawdź algebraicznie – podstawiając współrzędne x i y do obu równań prostych.

a) $k: y = -x + 2$
$l: y = 2x - 7$

b) $k: y = -4x + 1$
$l: y = 5$

c) $k: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
$l: y = -2x + 4$

To się liczy!

Wielu kierowców chciałoby obniżyć swoje rachunki za paliwo. Dlatego często decydują się na założenie w samochodzie bardziej ekonomicznej instalacji gazowej. Robią tak nie tylko osoby prywatne w swoich samochodach, lecz także właściciele firm w autach firmowych. Zanim jednak zdecydujemy się na taką zmianę, ważne jest, żebyśmy umieli określić opłacalności takiej inwestycji. Poniższe zadanie pomoże Wam opanować tę umiejętność.

Czy wiecie, że oprócz nowoczesnych samochodów hybrydowych i elektrycznych są już produkowane auta napędzane wodorem? Wodór jest najpowszechniej występującym pierwiastkiem we Wszechświecie, a na Ziemi występuje głównie w cząsteczkach wody.

ZADANIE BRANŻOWE

Taksówkarz chce założyć w swoim samochodzie instalację gazową w cenie 3000 zł. Na 100 km średnie spalanie gazu w aucie wynosi 10 l, a benzyny – 8 l. Wykonaj polecenia. Przyjmij, że cena 1 l benzyny wynosi 5 zł, a 1 l gazu to 2 zł.

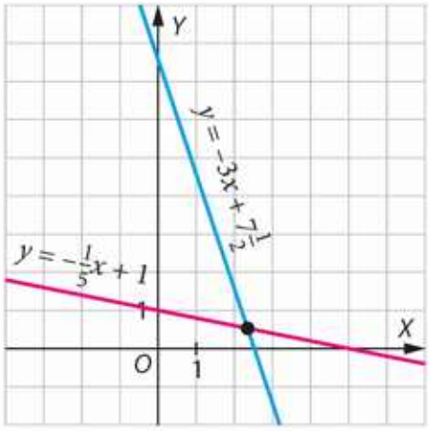
a) Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych proste opisujące koszt jazdy autem napędzanym benzyną oraz koszt jazdy autem napędzanym gazem z uwzględnieniem kosztu założenia instalacji gazowej. Dobierz odpowiednią jednostkę.

b) Odpowiedz, po ilu przejechanych kilometrach koszt założenia instalacji gazowej zacznie się zwracać.

Nie zawsze możemy dokładnie odczytać współrzędne punktu przecięcia prostych. Dzieje się tak np. wtedy, kiedy współrzędne punktu przecięcia się prostych nie są liczbami całkowitymi. Przykładowo, dla prostych o równaniach $y = -3x + 7\frac{1}{2}$ oraz $y = -\frac{1}{5}x + 1$ miejscem przecięcia jest punkt $\left(2\frac{9}{28}, \frac{15}{28}\right)$, którego współrzędne wyznaczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = -3x + 7\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{5}x + 1 \end{cases}$$

metodą podstawiania lub przeciwnych współczynników.



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Przekształcenie równania prostej do postaci $y = ax + b$ nazywamy przekształceniem do **postaci kierunkowej** równania prostej.

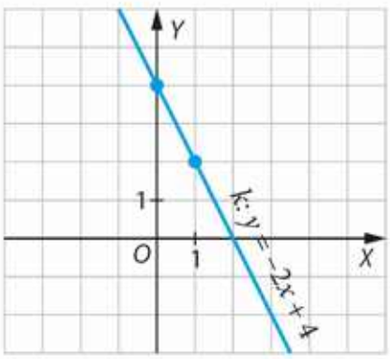
PRZYKŁAD 2

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

KROK 1 Przekształcamy równanie prostej k o wzorze $2x + y = 4$ do postaci kierunkowej i otrzymujemy $y = -2x + 4$.

KROK 2 Przygotowujemy tabelę dla współrzędnych punktów należących do prostej k: $y = -2x + 4$ i szkicujemy tę prostą:

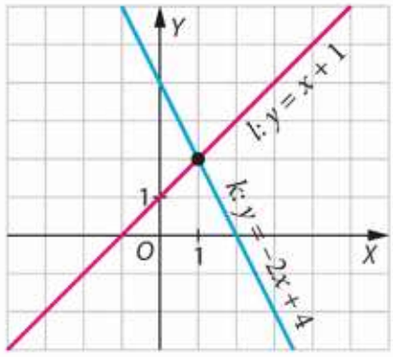
x	0	1
y	4	2



KROK 3 Przekształcamy równanie prostej l o wzorze $-x + y = 1$ do postaci kierunkowej i otrzymujemy $y = x + 1$.

KROK 4 Przygotowujemy tabelę dla współrzędnych punktów należących do prostej $l: y = x + 1$ i szkicujemy tę prostą w tym samym układzie współrzędnych, co prostą k:

x	0	1
y	1	2



Odczytujemy współrzędne punktu przecięcia obu prostych – jest to punkt $P(1, 2)$, zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

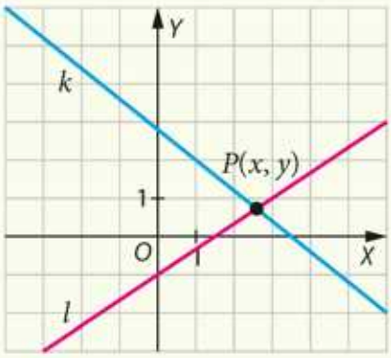
ĆWICZENIE 2

Rozwiąż graficznie układ równań.

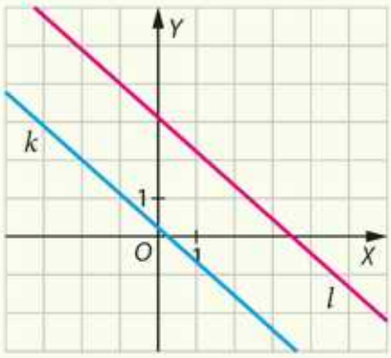
a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = -1 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ \frac{1}{2}x + y = 0 \end{cases}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

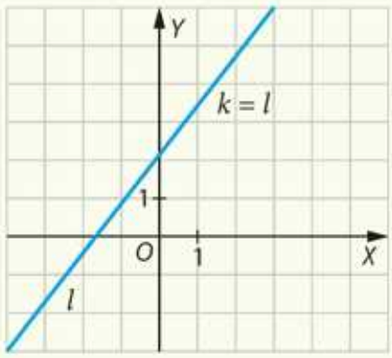
Każde z równań układu równań liniowych $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ opisuje pewne proste na płaszczyźnie – nazwijmy je k i l. Rozwiązaniami układu równań są współrzędne punktów należących jednocześnie do obu prostych k i l. Możemy się spotkać z jedną z poniższych sytuacji:



proste przecinają się w jednym punkcie $P(x, y)$, wtedy równania prostych k i l tworzą **układ oznaczony**, który ma jedno rozwiązanie będące parą liczb (x, y).



proste są równoległe i nie pokrywają się, wtedy równania prostych k i l tworzą **układ sprzeczny**, który nie ma rozwiązań.



proste pokrywają się, wtedy równania prostych k i l tworzą **układ nieoznaczony**, który ma nieskończenie wiele rozwiązań.

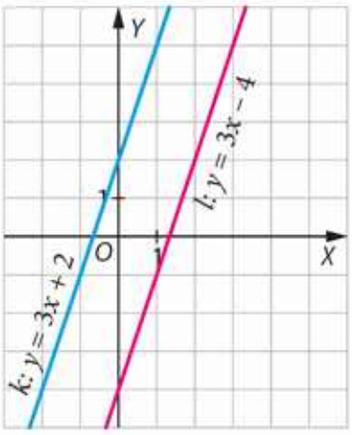
PRZYKŁAD 3

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$

KROK 1 Przekształcamy równanie $-3x + y = 2$ do postaci kierunkowej i otrzymujemy $y = 3x + 2$, czyli równanie prostej k.

KROK 2 Przekształcamy równanie $-3x + y = -4$ do postaci kierunkowej i otrzymujemy $y = 3x - 4$, czyli równanie prostej l.

KROK 3 Szkicujemy obie proste:



Zauważmy, że proste k i l są równoległe i się nie przecinają, zatem układ równań nie ma rozwiązań. Jest to układ sprzeczny.

ĆWICZENIE 3

Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x - 2y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + 6y = 1 \\ 6x - 18y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}y = \frac{1}{9} \\ 12x - 2y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -\frac{1}{500}x + \frac{1}{250}y = \frac{3}{250} \\ 500x - 1000y = 1500 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}y = \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y = -\frac{1}{5} \end{cases}$

i) $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}y = \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{7}x - \frac{1}{7}y = \frac{2}{7} \end{cases}$

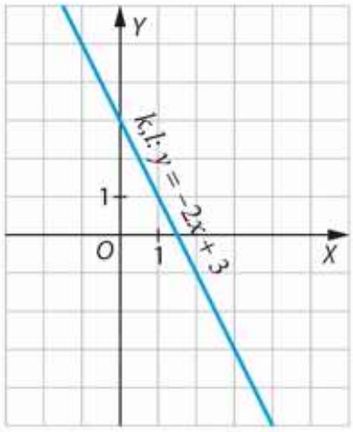
PRZYKŁAD 4

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$

KROK 1 Przekształcamy równanie $2x + y = 3$ do postaci kierunkowej i otrzymujemy $y = -2x + 3$, czyli równanie prostej k.

KROK 2 Przekształcamy równanie $4x + 2y = 6$ do postaci kierunkowej i otrzymujemy $y = -2x + 3$, czyli równanie prostej l.

KROK 3 Szkicujemy obie proste:



Zauważmy, że proste k i l się pokrywają, zatem układ równań jest układem nieoznaczonym. Oznacza to, że spełnia go nieskończenie wiele par (x, y) będących współrzędnymi punktów należących do prostej $y = -2x + 3$, czyli do l i k. Przykładowo, współrzędne punktów $(0, 3)$, $(2, -1)$ czy $(3, -3)$ spełniają ten układ równań, co możemy sprawdzić przez podstawienie.

ĆWICZENIE 4

Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 6x - 2y = -4 \end{cases}$

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 219

1. Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź rozwiązanie przez odpowiednie podstawienie.

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = -6 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y = -6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -x + 4y = 4 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

2. Przedstaw interpretację geometryczną podanego układu równań. Czy jest to układ nieoznaczony czy sprzeczny?

a) $\begin{cases} -3x + y = 3 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 10x + 5y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = 8 \end{cases}$

ZADANIA BRANŻOWE

3. Geodeta naniósł na układ współrzędnych położenie słupków granicznych działki: $A(-1, 3)$, $B(-2, -1)$, $C(4, 0)$, $D(5, 4)$. Jakie równania mają proste wyznaczające granice działki?

4. Pewna firma budowlana otrzymała projekt kwadratowej działki sporządzony w układzie współrzędnych. W projekcie tym murki ogradzające działkę znajdują się na prostych: $y_1 = x + 2$, $y_2 = -x + 2$, $y_3 = x - 2$, $y_4 = -x - 2$. Pracownik odczytał z projektu współrzędne słupków narożnych działki. Jakie to były współrzędne?

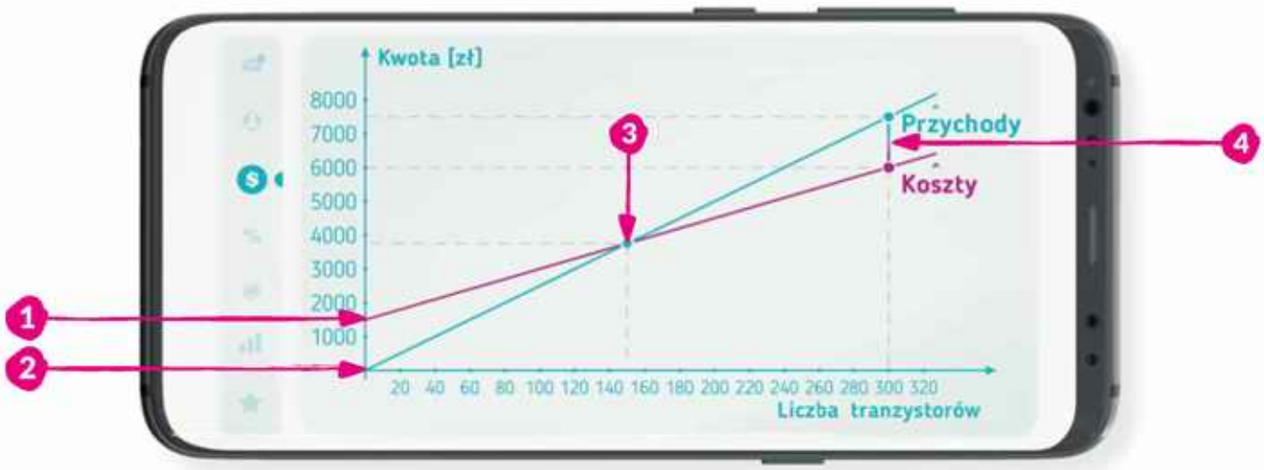
LEKCJA BRANŻOWA

7 Co się liczy w firmie?

Prowadzenie własnej działalności to odpowiedzialne zadanie. Każdy przedsiębiorca, np. stolarz zakładający własną firmę, chce, żeby rozwijała się ona jak najlepiej i przynosiła zyski.

Sytuację finansową firmy określa się, analizując jej **przychód,** czyli wartość sprzedawanych towarów lub usług, oraz **koszty,** czyli wartość wydatków związanych z prowadzeniem działalności. Różnica pomiędzy przychodem a kosztami to wynik finansowy, tzw. dochód. Dodatni **wynik finansowy** oznacza **zysk,** a ujemny – **stratę.**

PRZYKŁADOWA ANALIZA FINANSOWA



1. Na miesięczne **koszty** składają się **opłaty stałe** związane z prowadzeniem firmy oraz **koszty** np. wytworzenia towarów.

   Miesięczny koszt wyprodukowania x tranzystorów, opisuje funkcja $k(x) = 1500 + 15x$, gdzie 1500 to opłaty stałe w złotówkach, a $15x$ to koszt produkcji w złotówkach x tranzystorów, każdy po 15 zł.

2. Miesięczny **przychód** to wartość ze sprzedaży danych towarów bądź usług. Im więcej sprzedajemy, tym większy przychód.

   Miesięczny przychód producenta tranzystorów można obliczyć za pomocą funkcji $p(x) = 25x$, gdzie:
   - 25 to cena sprzedaży 1 tranzystora w złotówkach
   - x to liczba sprzedanych tranzystorów w miesiącu

3. Przy pewnej liczbie towarów x wartość kosztów i przychodów się zrównuje, czyli $k(x) = p(x)$.

   Liczbę 150 tranzystorów, przy której koszty i przychód są takie same, równe 3750 zł, można obliczyć, rozwiązując układ równań:

   $$\begin{cases} y = 1500 + 15x \\ y = 25x \end{cases}$$

4. **Wynik finansowy** firmy ustalamy, obliczając różnicę między przychodem a kosztem.

   Dla 300 sprzedanych tranzystorów przychód wynosi $p(300) = 25 \cdot 300 = 7500$ [zł], a koszt ich produkcji to $k(300) = 1500 + 15 \cdot 300 = 6000$ [zł]. Firma osiąga zysk: $7500 - 6000 = 1500$ [zł].

ZADANIA BRANŻOWE

Zapoznaj się z wykresem przedstawiającym miesięczny przychód i koszty zakładu stolarskiego produkującego huśtawki ogrodowe. Na podstawie zawartych informacji wykonaj polecenia.

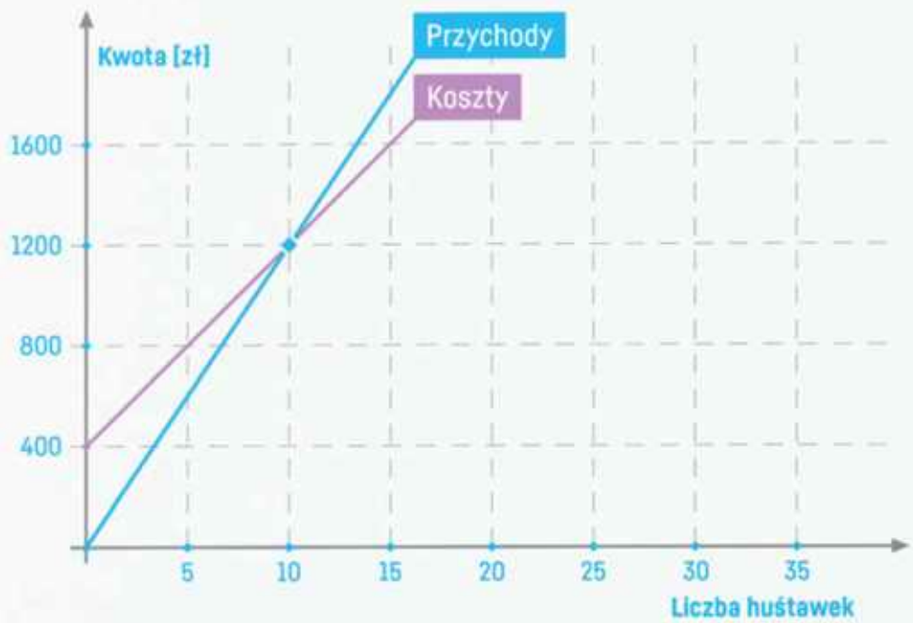
a) Podaj wzór opisujący miesięczny przychód ze sprzedaży x huśtawek.

b) Podaj wzór opisujący miesięczne koszty stałe wraz z kosztem materiałów potrzebnych do wyprodukowania x huśtawek.

c) Odczytaj z wykresu, przy jakiej liczbie wyprodukowanych i sprzedanych huśtawek koszty utrzymania zakładu są równe jego przychodowi.

d) Oblicz koszty, jakie poniósł zakład, jeśli wyprodukował 15 huśtawek.

e) Oblicz, ile wyniósł zysk, jeśli udało się sprzedać 20 huśtawek.



Powtórzenie rozdziału
FUNKCJA LINIOWA

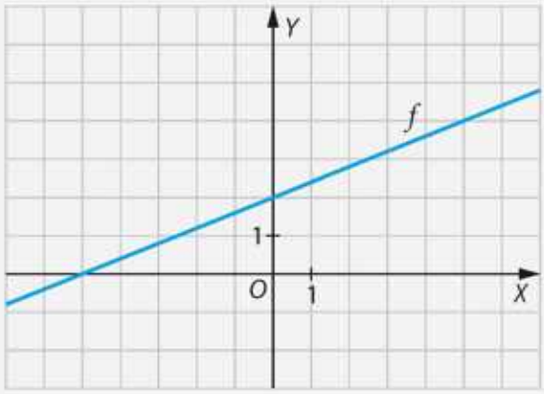
ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Wykres funkcji $f(x) = 2x + 10$ przechodzi przez następujące ćwiartki układu współrzędnych

A. I, II, III. **B.** I, III, IV. **C.** II, III, IV. **D.** I, II, IV.

2 Przyjrzyj się wykresowi funkcji *f*. Wybierz zdania prawdziwe.



A. Współczynnik kierunkowy prostej będącej wykresem funkcji *f* wynosi $a = \frac{2}{5}$.

B. Punkt (–5, 0) należy do wykresu funkcji *f*.

C. Punkt przecięcia wykresu funkcji *f* z osią *OY* ma współrzędne (0, 2).

3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Funkcja $y = (m - 2)x + 5$ jest rosnąca dla

A. $m = 2$. **C.** $m < 2$.

B. $m > 2$. **D.** każdej liczby rzeczywistej m.

4 Sprawdź, czy punkty *P*, *Q*, *S* należą do jednej prostej.

a) $P(-3,-4)$, $Q(1, 2)$, $S(3, 5)$ **b)** $P(-4,-3)$, $Q(1, 0)$, $S(5, 3)$

5 Funkcje *f* i *g* mają to samo miejsce zerowe. Znajdź *a*, jeśli wiesz, że:

a) $f(x) = -5x + 3$ i $g(x) = ax - 3$, **b)** $f(x) = 4x + 1$ i $g(x) = x - a$.

6 Znajdź równanie prostej *k*, jeśli wiesz, że punkt (0, 5) należy do prostej *k* oraz:

a) prosta *k* jest równoległa do prostej *l*: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$,

b) prosta *k* jest prostopadła do prostej *l*: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$.

7 Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki zawierają się w prostych *k*, *l*, *m*. Narysuj ten trójkąt i oblicz jego pole.

a) k: $y = 2$
l: $y = \frac{4}{3}x + 6$
m: $y = -x + 6$

b) k: $y = 2x - 8$
l: $y = -\frac{1}{3}x + 5$
m: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

1 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Wartość funkcji $y = -3x - 3$ dla argumentu $x = -1$ jest równa

A. –6. **B.** –1. **C.** –3. **D.** 0.

2 Funkcja liniowa dana jest wzorem $f(x) = -\frac{2}{5}x + 5$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Punkt (0, 5) należy do wykresu funkcji *f*.

B. Funkcja *f* jest malejąca.

C. Wykres funkcji liniowej *f* przechodzi przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych.

3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Punkt (2, –3) należy do wykresu funkcji

A. $y = -3x + 2$. **B.** $y = -3x + 7$. **C.** $y = 2x - 7$. **D.** $y = 2x - 3$.

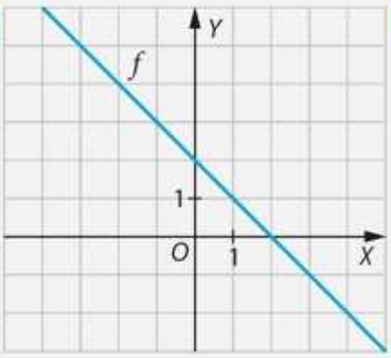
4 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Miejscem zerowym funkcji $y = -x + 1$ jest

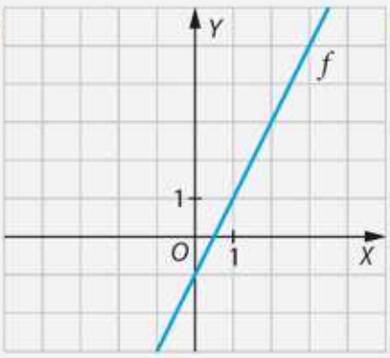
A. –1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

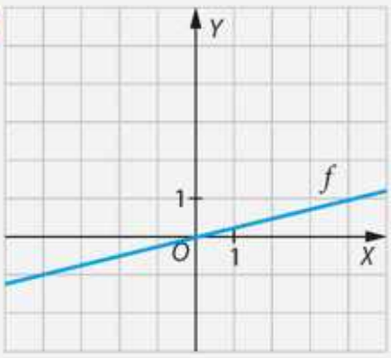
5 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Prosta dana równaniem $y = \frac{4}{3}x$ przecina oś *OY* w punkcie

A. (0, 0). **B.** $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$. **C.** $\left(0, \frac{4}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

6 Podaj wzór funkcji na podstawie jej wykresu.

a)


b)


c)


7 Dana jest prosta *k*: $y = -4x + 5$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Prosta o równaniu $y = -5x + 4$ jest równoległa do prostej *k*.

B. Prosta o równaniu $y = -4x$ nie ma punktów wspólnych z prostą *k*.

C. Wszystkie proste równoległe do prostej *k* muszą mieć współczynnik kierunkowy równy –4.

Rozdział VIII

Statystyka

TEMATY LEKCJI

1 Średnia arytmetyczna s. 179–182

2 Średnia ważona s. 183–185

3 Mediana i dominanta s. 186–189

4 Krótko o centylu s. 190–191

Powtórzenie rozdziału s. 192–193

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

LEKCJA

1 Średnia arytmetyczna

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się wykresowi, który przedstawia liczbę uczniów klas pierwszych w pewnej branżowej szkole pierwszego stopnia. Czy cztery rzędy po 19 krzeseł wystarczą dla tych uczniów?

Kiedy analizujemy liczbowe dane statystyczne, często obliczamy ich **średnią arytmetyczną**. Aby wyznaczyć średnią arytmetyczną zestawu danych liczbowych, należy je zsumować, a następnie podzielić przez ich liczbę. Średnią arytmetyczną możemy też nazywać krócej – średnią.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę: $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

$$\textbf{średnia arytmetyczna} = \frac{\textbf{suma danych}}{\textbf{liczba danych}}$$

PRZYKŁAD 1

Pięć zawodniczek reprezentacji Polski w koszykówkę z 2018 r. ma odpowiednio: 193 cm, 188 cm, 190 cm, 189 cm i 170 cm wzrostu. Oblicz średni wzrost tych zawodniczek.

KROK 1 Obliczamy sumę wzrostu zawodniczek: 193 + 188 + 190 + 189 + 170 = 930 [cm].

KROK 2 Dzielimy sumę wzrostu zawodniczek przez ich liczbę: $\frac{930}{5} = 186$ [cm].

Średni wzrost zawodniczek jest równy 186 cm.

ĆWICZENIE 1

W tabeli podano liczbę punktów zdobytych przez dwóch zawodników pewnej szkolnej drużyny piłki ręcznej. Oblicz średnią liczbę punktów zdobytych przez Karola oraz średnią liczbę punktów zdobytych przez Roberta.

Liczba punktów zdobytych w kolejnych meczach przez zawodnika						
Imię	Numer meczu					
	I	II	III	IV	V	VI
Karol	8	6	5	5	6	3
Robert	3	3	4	1	0	4

To się liczy!

W życiu codziennym każdy z nas może się spotkać z sytuacją, kiedy musimy obliczyć średnią arytmetyczną. Jest to ważne np. dla sprzedawców liczących średni zysk ze sprzedaży, a także dla przedsiębiorców liczących średnie wynagrodzenie pracowników czy uczniów, którzy chcą obliczyć średnią ocen uzyskanych na koniec roku szkolnego. Poniższe zadanie pomoże Wam opanować tę umiejętność.

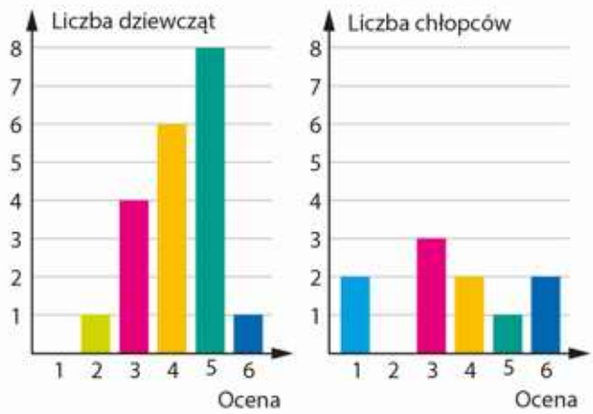
ZADANIE BRANŻOWE

Przyjrzyj się zyskom ze sprzedaży w pewnej firmie handlowej. Oblicz średni miesięczny zysk ze sprzedaży w I półroczu 2019 r.

Zysk ze sprzedaży w kolejnych miesiącach I półrocza 2019 r.					
Styczeń	Luty	Marzec	Kwieceń	Maj	Czerwiec
30 000 zł	36 000 zł	29 000 zł	41 000 zł	40 000 zł	34 000 zł

PRZYKŁAD 2

Na diagramach słupkowych przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z matematyki w pewnej klasie, z podziałem na dziewczęta i chłopców. Oblicz średnią ocen w grupie dziewcząt, w grupie chłopców i w całej klasie.



KROK 1 Odczytujemy z diagramu liczbę dziewcząt: $1 + 4 + 6 + 8 + 1 = 20$ oraz liczbę chłopców: $2 + 3 + 2 + 1 + 2 = 10$.
W klasie jest 30 osób.

KROK 2 Obliczamy średnią ocen z matematyki dziewcząt:

$$\overline{x}_d = \frac{0\cdot 1+1\cdot 2+4\cdot 3+6\cdot 4+8\cdot 5+1\cdot 6}{20} = \frac{84}{20} = 4{,}2$$

KROK 3 Obliczamy średnią ocen z matematyki chłopców:

$$\overline{x}_c = \frac{2\cdot 1+3\cdot 3+2\cdot 4+1\cdot 5+2\cdot 6}{10} = \frac{36}{10} = 3{,}6$$

KROK 4 Obliczamy średnią ocen z matematyki całej klasy:

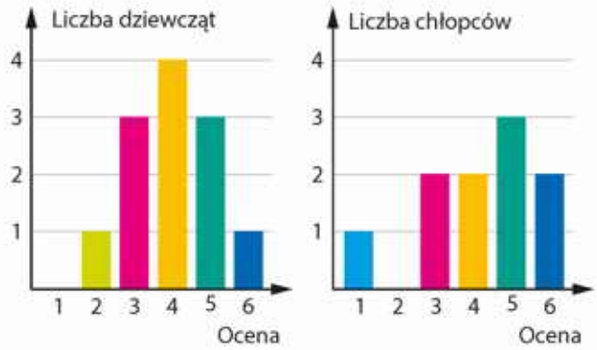
$$\overline{x}_k = \frac{2\cdot 1+1\cdot 2+7\cdot 3+8\cdot 4+9\cdot 5+3\cdot 6}{30} = \frac{120}{30} = 4$$

PODPOWIEDŹ

Zauważ, że przy różnej liczbie dziewcząt i chłopców średnia całej klasy nie jest średnią średnich grupy dziewcząt i chłopców: $\frac{4{,}2+3{,}6}{2} \neq 4$.

ĆWICZENIE 2

Na diagramach słupkowych przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z języka polskiego w pewnej klasie, z podziałem na dziewczęta i chłopców. Oblicz średnią ocen w grupie dziewcząt, w grupie chłopców i w całej klasie.



PRZYKŁAD 3

Pewna firma zatrudnia pięć osób. Średnia zarobków miesięcznych pracowników wynosi 3200 zł netto. Cztery osoby zarabiają odpowiednio: 3600 zł, 3600 zł, 2900 zł i 2500 zł netto. Oblicz wysokość zarobków piątego pracownika.

KROK 1 Oznaczamy przez x_5 wysokość zarobków piątego pracownika.

KROK 2 Układamy równanie z wykorzystaniem informacji o średnich zarobkach:

$$\frac{3600+3600+2900+2500+x_5}{5}=3200$$

KROK 3 Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{3600+3600+2900+2500+x_5}{5}=3200 \mid \cdot 5$$

$$12\,600+x_5=16\,000 \mid -12\,600$$

$$x_5=3400$$

Piąty pracownik zarabia 3400 zł netto.

ĆWICZENIE 3

3.1. W pewnej firmie zatrudnionych jest 11 pracowników, w tym jeden kierownik. Siedmiu z nich zarabia po 2350 zł, dwóch po 2950 zł, a jeden 3600 zł. Ile zarabia kierownik, jeśli średnia zarobków w firmie to 2750 zł?

3.2. Od 1 do 10 maja Adam mierzył codziennie o godzinie 12:00 temperaturę powietrza. 1, 3, 6 i 7 maja wynosiła ona 12°C, 2, 4 i 8 maja wynosiła 15°C, a 5 i 9 wynosiła 16°C. Ile wynosiła temperatura 10 maja, jeśli średnia temperatur w ciągu pierwszych dziesięciu dni maja była równa 14°C?

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 220

1. Oblicz średnią danych liczb.

a) 8, 2, 1, 6, 4, 3

b) 3, 6, 9, 12, 4, 3, 0, 3

c) 7, 6, 5, 8, 9, 7, 7, 3, 7, 3, 4

d) 101, 102, 103, 104, 105, 106

2. Do zestawu liczb 3, 5, 7, 9 dopisz jedną tak, aby ich średnia była równa:

a) 11, **b)** 15, **c)** −20, **d)** −23.

3. W pewnej firmie zatrudniającej 15 osób średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 3800 zł netto. Oblicz średnie wynagrodzenie netto wszystkich pracowników, jeśli firma dodatkowo przyjmie do pracy:

a) stażystę z wynagrodzeniem miesięcznym 2200 zł netto,

b) trzech stażystów z wynagrodzeniem miesięcznym po 2300 zł netto każdy.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Napiwki w pewnej restauracji są równo dzielone między wszystkich kelnerów. Na podstawie informacji z tabeli oblicz kwotę, jaką każda osoba otrzymała w podanych dniach.

Kwoty napiwków każdego kelnera w kolejnych dniach				
Dzień	Osoba			
	Ania	Tomek	Wiktor	Jarek
Czwartek	80 zł	120 zł	60 zł	30 zł
Piątek	125 zł	120 zł	90 zł	100 zł
Sobota	110 zł	100 zł	150 zł	80 zł

5. Stawki godzinowe betoniarzy-zbrojarzy w pewnej firmie budowlanej wynoszą odpowiednio: 20 zł, 25 zł, 31 zł i 35 zł za godzinę. Firma ta zatrudnia 25 pracowników – 10 zarabia po 20 zł za godzinę, trzech po 25 zł, pięciu po 31 zł, a pozostali po 35 zł. Oblicz, ile w tej firmie wynosi:

a) średnia stawka godzinowa zarobków betoniarzy-zbrojarzy,

b) średnie miesięczne wynagrodzenie tych pracowników (do obliczeń przyjmij, że miesiąc ma 21 dni roboczych po 8 godzin).

6. Właściciel sklepu zaczął sprzedawać artykuły metalowe w półkilogramowych zestawach. Każdy z nich składał się z pięciu rodzajów produktów po 100 g. Cenę zestawu ustalił na 13 zł. O ile wyższą ustalił cenę 1 kg tych produktów, jeśli 1 kg gwoździ kosztuje 30 zł, śrub – 35 zł, wkrętów – 20 zł, nakrętek – 25 zł, a podkładek – 15 zł?

LEKCJA

2 Średnia ważona

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się ocenom z matematyki Ani. Ile wynosi średnia tych ocen? Czy wiedząc, że praca klasowa jest pięć razy ważniejsza od kartkówki, możesz w ten sam sposób policzyć średnią?

PRZYKŁAD 1

Marek i Tomek zdawali egzamin kończący kurs spawania. Każdy z nich otrzymał dwie oceny: x_1 za umiejętności praktyczne i x_2 za wiedzę teoretyczną. Końcową ocenę z egzaminu wystawiono, korzystając ze wzoru:

$$\frac{3x_1+x_2}{3+1}$$

Oceny cząstkowe z egzaminu końcowego		
Kursant	x_1	x_2
Marek	6	2
Tomek	3	5

Na podstawie informacji z tabeli oblicz końcowe oceny Marka i Tomka.

KROK 1 Obliczamy końcową ocenę z egzaminu Marka:

$$\frac{3x_1+x_2}{3+1}=\frac{3\cdot 6+2}{3+1}=\frac{20}{4}=5$$

KROK 2 Obliczamy końcową ocenę z egzaminu Tomka:

$$\frac{3x_1+x_2}{3+1}=\frac{3\cdot 3+5}{3+1}=\frac{14}{4}=3{,}5$$

ĆWICZENIE 1

Marta i Paulina zdawały egzamin z języka angielskiego. Ich wypowiedzi oceniano w dwóch kategoriach: x_1 – ocena za umiejętność komunikacji, x_2 – ocena za poprawność gramatyczną. Ostateczną ocenę z egzaminu ustalano, korzystając ze wzoru: $\frac{2x_1+x_2}{2+1}$

Oceny cząstkowe z egzaminu		
Uczennica	x_1	x_2
Marta	5	2
Paulina	2	5

Na podstawie informacji z tabeli oblicz ostateczne oceny Marty i Pauliny.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mających wagi $w_1, w_2, \ldots, w_n$ obliczamy, korzystając ze wzoru:

$$\overline{x}_w = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \ldots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

PRZYKŁAD 2

Oblicz średnią ważoną liczb z danymi wagami.

Liczba	2	5	8	3
Waga	1	3	2	4

KROK 1 Korzystając ze wzoru na średnią ważoną, otrzymujemy:

$$\overline{x}_w = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 3}{1 + 3 + 2 + 4}$$

KROK 2 Obliczamy średnią ważoną:

$$\overline{x}_w = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 3}{1 + 3 + 2 + 4} = \frac{2 + 15 + 16 + 12}{10} = \frac{45}{10} = 4{,}5$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz średnią ważoną liczb z danymi wagami.

a)

Liczba	2	7
Waga	3	2

b)

Liczba	3	7	8	11
Waga	8	1	4	3

To się liczy!

Do ważnych umiejętności należy umiejętność obliczenia średniej ważonej. Przydaje się ona nauczycielom, którzy wystawiają oceny semestralne, oraz sprzedawcom, którzy obliczają ceny różnych produktów. Podane zadanie pomoże Wam opanować tę umiejętność.

ZADANIE BRANŻOWE

Sprzedawca zmieszał 2 kg cukierków w cenie 10 zł za 1 kg i 4 kg cukierków po 16 zł za 1 kg. Oblicz cenę mieszanki cukierków, by kwota z ich sprzedaży nie zmieniła się.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 221

1. Pewien teleturniej składa się z czterech konkurencji ocenianych w skali od 0 do 10 punktów. W tabeli podano liczbę punktów, którą zdobył każdy z trzech finalistów zabawy. Ostateczny wynik jest średnią ważoną. Który zawodnik wygrał?

Wyniki uczestników teleturnieju z czterech konkurencji wraz z ich wagami				
Uczestnik teleturnieju	I waga 0,2	II waga 0,8	III waga 0,4	IV waga 0,6
Adam	10	5	9	7
Marek	5	8	6	7
Paweł	9	4	10	8

2. W pewnej szkole oceny semestralne z poszczególnych przedmiotów wystawiane są na podstawie średniej ważonej obliczonej według następujących kryteriów:

Czynności	Aktywność	Sprawdzian	Praca klasowa	Test	Referat	Ćwiczenia	Praca domowa	Inne formy pracy
Waga	4	5	5	3	2	1	1	1

Oblicz średnią ważoną ocen z matematyki Piotra, jeśli w trakcie semestru otrzymał następujące oceny:

Czynności	Aktywność	Sprawdzian	Praca klasowa	Test	Referat	Ćwiczenia	Praca domowa	Inne formy pracy
Oceny	6, 5, 5, 5	4, 2, 4, 5, 4	5, 4, 5, 3, 5	3, 5	6, 4	4	5	4

ZADANIA BRANŻOWE

3. Krawcowa uszyła patchworkową narzutę z czterech różnych rodzajów materiałów. Każdy z nich był w innej cenie: materiał A – 20 zł za 1 m^2, materiał B – 30 zł za 1 m^2, materiał C – 40 zł za 1 m^2, a materiał D – 50 zł za 1 m^2. Do wykonania narzuty wykorzystała 0,5 m^2 materiału D, trzy razy więcej A niż D, dwa razy więcej C niż D i cztery razy więcej B niż D. Jaki jest średni koszt 1 m^2 narzuty?

LEKCJA

3 Mediana i dominanta

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się tabeli. Uporządkuj wysokości wynagrodzeń od najmniejszego do największego. Dla jakiej wartości wynagrodzenia połowa pracowników zarabia więcej, a połowa – mniej?

B9

	A	B
1	WYNAGRODZENIA: WRZESIEŃ 2019	
2	Pracownik	Wysokość wynagrodzenia netto
3	Pracownik A	2700 zł
4	Pracownik B	2100 zł
5	Pracownik C	3200 zł
6	Pracownik D	3000 zł
7	Pracownik E	5000 zł
8	Pracownik F	4000 zł

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Medianą danych nazywamy wartość środkową danych. W celu wyznaczenia mediany najpierw porządkujemy dane liczby od najmniejszej do największej. Medianą nieparzystej liczby danych jest wartość środkowa. W przypadku parzystej liczby danych medianą jest średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych uporządkowanych danych.

PRZYKŁAD 1

Wyznacz medianę danych liczb.

a) 6, 5, 2, 1, 5, 2, 2

b) 14, 7, 3, 9, 1, 2

a) **KROK 1** Porządkujemy liczby od najmniejszej do największej:

1, 2, 2, 2, 5, 5, 6

KROK 2 Odczytujemy wartość środkową zestawu liczb:

1, 2, 2, 2, 5, 5, 6

Medianą jest liczba 2.

b) **KROK 1** Porządkujemy dane liczby od najmniejszej do największej:

1, 2, 3, 7, 9, 14

KROK 2 Odczytujemy wartości środkowe zestawu liczb:

1, 2, 3, 7, 9, 14

KROK 3 Stwierdzamy, że w uporządkowanym zestawie liczb istnieją dwie wartości środkowe: 3 i 7, zatem dla tych liczb obliczamy średnią arytmetyczną:

$\frac{3+7}{2} = 5$

Mediana jest równa 5.

ĆWICZENIE 1

Wyznacz medianę danych liczb.

a) 5, 1, 4, 2, 9

b) 7, 3, 6, 3, 6, 9, 9

c) 7, 7, 8, 11, 20, 7

d) 3, 3, 4, 6, 3, 2, 6, 8

e) 4, 3, 4, 5, 2, 1, 3, 4, 5, 3, 4

f) 9, 9, 3, 9, 5, 3, 4, 9, 9, 4, 9

CIEKAWOSTKA

Mediana – oprócz zastosowania w ekonomii, np. do wyznaczania wartości środkowej wynagrodzenia w danej grupie – ma także zastosowanie w grafice komputerowej do poprawiania jakości obrazu.

PRZYKŁAD 2

Paweł ze znajomymi grał w gry planszowe. Podczas jednej z gier 20 razy rzucił sześcienną kostką. Na diagramie przedstawiono wyniki rzutów. Wyznacz medianę uzyskanych wyników.

KROK 1 Wypisujemy wyniki z diagramu w kolejności rosnącej:

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6

KROK 2 Odczytujemy wartości środkowe zestawu wyników:

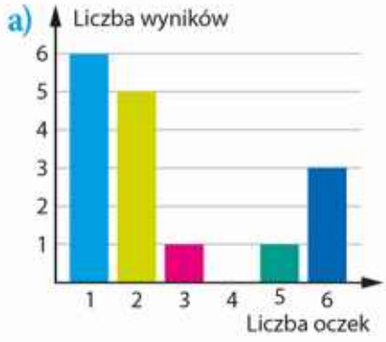
1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6

Mediana wyników równa się $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

ĆWICZENIE 2

Na diagramie przedstawiono wyniki 16 rzutów kostką. Wyznacz medianę otrzymanych wyników.

a)



b)

Analizując dane liczbowe, rozpatruje się również **dominantę** – wartość, która dominuje, czyli najczęściej występuje wśród danych. Jeśli w zestawie danych kilka liczb występuje z tą samą, najwyższą częstością, to przyjmujemy, że każda z tych liczb jest dominantą. Jeżeli natomiast wszystkie liczby występują tak samo często, to przyjmujemy, że nie ma dominanty. Dominantę możemy również nazywać wartością modalną lub modą.

PRZYKŁAD 3

Podaj dominantę liczb.

a) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6 b) 5, 7, 7, 9, 9, 10, 11 c) 3, 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7

ROZWIĄZANIE

a) Najczęściej występującą liczbą jest 2, zatem dominantą jest liczba 2.

b) Najczęściej występującymi liczbami są 7 i 9, zatem dominantami są liczby 7 i 9.

c) Wszystkie liczby występują tak samo często, zatem dominanty nie ma.

ĆWICZENIE 3

Podaj dominantę liczb.

a) 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 5

b) 42, 44, 41, 42, 43, 42, 44, 42, 45, 43

c) 1, 3, 3, 4, 7, 8, 8, 9

d) –1, –1, 0, 0, 5, 5, 11, 11

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 222

1. Tobiasz przygotował zestawienie czasu swoich rozmów telefonicznych w każdym miesiącu zeszłego roku. Informacje zamieścił w tabeli. Wyznacz medianę tych danych.

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Liczba minut	280	200	350	300	324	430	500	380	220	210	250	550

2. Nauczyciel matematyki przeprowadził w dwudziestoosobowej klasie trzy sprawdziany. Ich wyniki zapisał w tabeli. Następnie chciał przygotować nowe zestawienie, dopisując do poprzedniego oceny z kolejnego sprawdzianu. Podaj medianę i dominantę ocen w nowym zestawieniu, jeśli z tego sprawdzianu:

a) wszyscy uczniowie otrzymali ocenę dobrą,

b) połowa uczniów otrzymała ocenę bardzo dobrą, a pozostali – niedostateczną.

Ocena	Liczba ocen
1	4
2	10
3	23
4	2
5	19
6	2

3. Na diagramie zamieszczono liczbę godzin, które Jakub spędził na oglądaniu telewizji w ciągu ostatniego tygodnia. Na podstawie informacji podaj medianę i dominantę przedstawionych danych.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Pracownicy stadniny ważyli konie i otrzymali następujące wyniki w kilogramach:

- ogiery: 530, 550, 550, 590, 565, 570, 560;
- klacze: 490, 500, 510, 540, 505, 500.

Wyznacz mediany wagi ogierów, klaczy oraz wszystkich koni w stadninie.

5. W ramach akcji promocyjnej pewien salon fryzjerski oferował specjalne ceny na cztery usługi: strzyżenie – 75 zł, farbowanie – 120 zł, regenerację włosów – 80 zł, przedłużanie włosów – 400 zł. Ze strzyżenia skorzystało 10 klientek, z farbowania 15, z regeneracji 17, a z przedłużania włosów 7. Wyznacz medianę i dominantę z zarobku z każdej wykonanej usługi podczas promocji.

6. Sześcioro uczniów na zajęciach praktycznych w warsztacie samochodowym zmierzyło średnice dwóch czopów głównych w wale korbowym silnika. Wyniki zamieszczono w tabeli. Na podstawie podanych informacji wyznacz medianę i dominantę wyników pomiaru średnicy:

a) czopu I, **b)** czopu II.

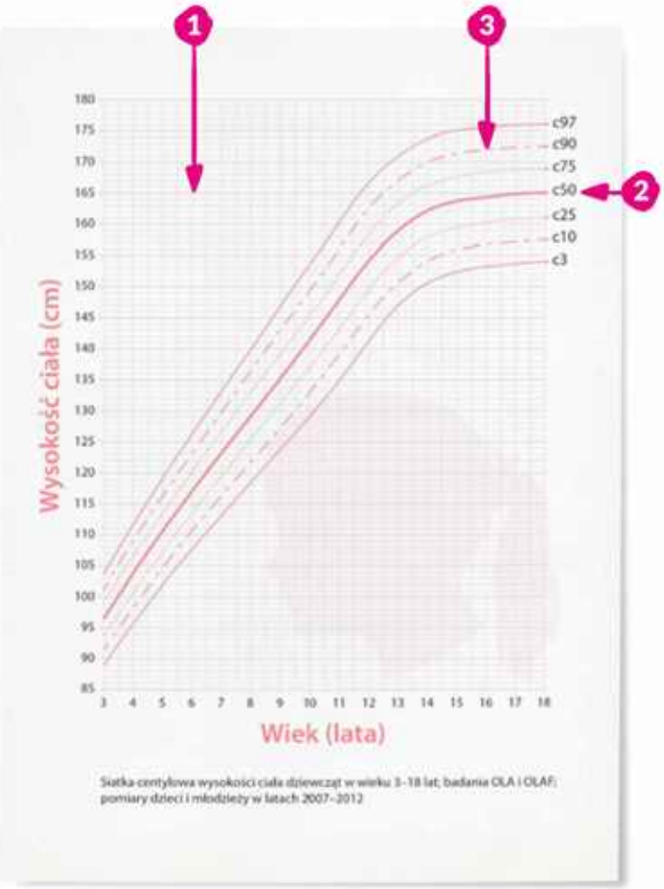
Uczeń	Wynik pomiaru	
	czop I	czop II
Roman	63,38 mm	63,52 mm
Kinga	63,39 mm	63,39 mm
Jacek	63,25 mm	63,37 mm
Oskar	63,25 mm	63,39 mm
Tobiasz	63,22 mm	63,41 mm
Filip	63,28 mm	63,45 mm

4 Krótko o centylu

Z pojęciem centyla można się spotkać, np. odczytując wyniki sprawdzianu ósmoklasisty albo sprawdzając wzrost czy wagę dziecka na tle innych dzieci. Centyle pomagają określić, czy rozwój dziecka jest prawidłowy w porównaniu z jego rówieśnikami.

Centyl to jednostka statystyczna, która opisuje położenie danego wyniku względem całej grupy wyników. Poszczególne centyle określają, ile wyników było niższych lub równych pewnemu wynikowi.

PRZYKŁADOWA SIATKA CENTYLOWA



1. **Siatka centylowa** to graficzny rozkład wyników określonej cechy wśród danej populacji. Dzięki takim wykresom, opracowanym na podstawie danych statystycznych, można ocenić np. wzrost osób w danym wieku na tle ich rówieśników. Na dolnej osi, poziomej, oznaczony jest wiek, a na pionowej wartość, którą sprawdzamy, np. wzrost.

   Zamieszczona siatka centylowa przedstawia wzrost dziewcząt w wieku 3–18 lat.

2. Na siatce zaznaczonych jest siedem wartości: centyl 3, 10, 25, 50, 75, 90 i 97. Zamieszczone krzywe wyznaczają centyle. Prawidłowy wzrost to ten, który jest równy środkowej wartości wśród wszystkich wzrostów osób z danej grupy. Oznacza to, że wzrost jest na poziomie 50 centyla. Górną granicą normy jest 97 centyl, czyli osoby bardzo wysokie, a dolną 3 centyl – osoby rosnące wolniej niż inne. Punkty zawierające się w krzywych c3 i c97 to granice normy.

   Przykładowo, jeśli wzrost pewnej dziewczyny wypada na c97 to znaczy, że 97% rówieśniczek jest tego samego wzrostu lub niższych.

3. Jeśli chcemy się dowiedzieć, ile wzrostu mają osoby z danej grupy wiekowej, sprawdzamy, w którym miejscu siatki centylowej się znajdują.

   U szesnastoletniej dziewczyny wzrost 172 cm jest równy 90 centylowi, co oznacza, że 90% szesnastolatek jest tego samego wzrostu lub niższych.

ZADANIA BRANŻOWE

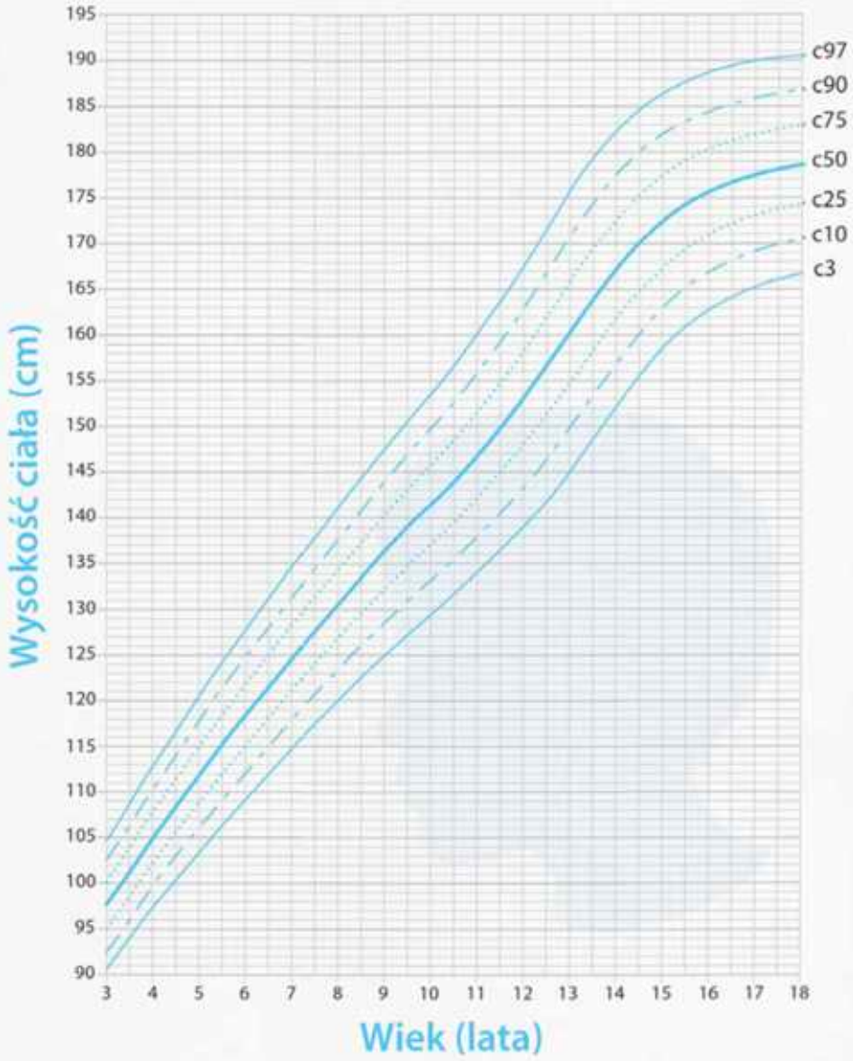
Zapoznaj się z siatką centylową wzrostu chłopców w wieku 3–18 lat. Na podstawie zawartych informacji odczytaj:

a) któremu centylowi odpowiada wzrost 133 cm u dziesięcioletniego chłopca;

b) ile wzrostu ma piętnastolatek, jeśli jego wzrost odpowiada 50 centylowi;

c) ile lat ma chłopiec o wzroście 180 cm, jeśli jego wzrost odpowiada 90 centylowi;

d) któremu centylowi odpowiada Twój wzrost (skorzystaj z zamieszczonych siatek centylowych wysokości ciała dziewcząt i chłopców).



Siatka centylowa wysokości ciała chłopców w wieku 3–18 lat; badania OLA i OLAF; pomiary dzieci i młodzieży w latach 2007–2012

Powtórzenie rozdziału
STATYSTYKA

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Ania notowała maksymalne dzienne temperatury powietrza w Gdańsku w dniach 19–23.01.2019 r.: –6°C, –5°C, –6°C, –7°C oraz –8°C.

Wybierz zdania prawdziwe.

A. Dominantą zanotowanych temperatur jest –6°C.

B. Medianą zanotowanych temperatur jest –6°C.

C. Jeśli 24.01. Ania zanotowała –6°C, to średnia arytmetyczna temperatur od 19 do 24.01. była niższa niż w okresie od 19 do 23.01.

2 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

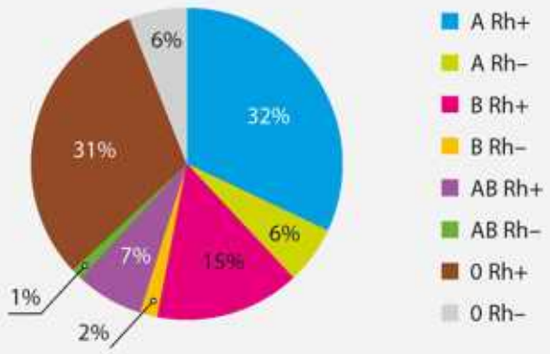
Średnia arytmetyczna wzrostu Ani, Bartka, Jakuba i Kasi jest równa 175 cm, zatem jeśli zsumujemy ich wzrost, to otrzymamy

A. 175 cm. **B.** 300 cm. **C.** 350 cm. **D.** 700 cm.

3 Przyjrzyj się diagramowi kołowemu, który przedstawia rozkład procentowy grup krwi Polaków. Następnie odpowiedz na pytania.

a) Która grupa krwi jest dominująca w Polsce?

b) Czy to prawda, że ponad połowa Polaków ma grupę krwi A Rh+ lub 0 Rh+?



4 Oblicz średnią arytmetyczną oraz wyznacz medianę i dominantę zestawu liczb.

a) 8, 2, 6, 8, 4, 2, 3, 4, 8

b) 97, 65, 58, 67, 87, 42, 34, 54

c) 15, 13, 19, 17, 25, 13, 23, 18, 19, 17

d) 90, 105, 125, 135, 145, 160, 160, 175, 255

5 Oblicz średnią ważoną liczb z danymi wagami.

a)

Liczba	10	12	14
Waga	2	5	6

b)

Liczba	3	6	10	8
Waga	3	5	2	7

6 Zbierz dane dotyczące wzrostu uczniów w Twojej klasie. Określ, któremu centylowi jest równy Twój wzrost.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

1 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Przez ostatnie pięć dni Piotr przebiegł każdego dnia odpowiednio 10 km, 9,5 km, 12 km, 8 km i 9 km, zatem średnia liczba kilometrów, które przebiegł, jest równa

A. 9. **B.** 9,5. **C.** 9,7. **D.** 10.

2 Średnia arytmetyczna liczb 3, 5, 4 i x jest równa 5. Ile wynosi x?

Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8

3 Wybierz właściwe dokończenie zdania. Mediana liczb 1, 3, 6, 2 jest równa

A. 2. **B.** 2,5. **C.** 3. **D.** 4,5.

4 Przyjrzyj się tabeli, która przedstawia liczbę sprzedanych pizz MEGA w ciągu tygodnia.

Wybierz zdania prawdziwe.

A. W ciągu tygodnia sprzedano 280 pizz MEGA.

B. Średnia liczb pizz MEGA sprzedanych w ciągu dnia jest równa 40.

C. W ciągu czterech pierwszych dni tygodnia średnia liczba sprzedanych pizz MEGA jest większa niż średnia w trzech ostatnich dniach tygodnia.

Dzień tygodnia	Liczba sprzedanych pizz MEGA
Poniedziałek	25
Wtorek	35
Środa	40
Czwartek	35
Piątek	55
Sobota	60
Niedziela	30

5 W pewnej szkole ocena końcowa z przedmiotu „obsługa i naprawa samochodów" jest średnią ważoną uwzględniającą następujące kategorie: pisemne prace klasowe – waga 0,3; kartkówki – waga 0,1; zadania praktyczne – waga 0,4.

Dodatkowo nauczyciel przybliża oceny następująco:

$\overline{x}_w < 1{,}5$ ocena 1

$1{,}5 \le \overline{x}_w < 2{,}5$ ocena 2

$2{,}5 \le \overline{x}_w < 3{,}5$ ocena 3

$3{,}5 \le \overline{x}_w < 4{,}5$ ocena 4

$4{,}5 \le \overline{x}_w < 5{,}5$ ocena 5

$5{,}5 \le \overline{x}_w$ ocena 6

Oblicz, jaką ocenę końcową z przedmiotu otrzymał Wojtek, jeśli miał następujące oceny: z prac klasowych – 5, z kartkówek – 2, 2 i 3, z zadań praktycznych – 6.

Zbiór zadań

ROZDZIAŁY

I. Liczby rzeczywiste s. 195–198

II. Potęgi i pierwiastki s. 198–200

III. Procenty i ich zastosowanie s. 201–202

IV. Równania i nierówności s. 202–205

V. Układy równań liniowych s. 206–208

VI. Funkcje s. 208–216

VII. Funkcja liniowa s. 216–219

VIII. Statystyka s. 220–222

I. Liczby rzeczywiste

1. Liczby naturalne

Lekcja 1, s. 9–11

1. Zapisz iloraz i resztę z dzielenia.

a) 78 : 4 c) 89 : 5 e) 49 : 6 g) 53 : 7

b) 131 : 4 d) 237 : 5 f) 373 : 6 h) 286 : 7

2. Przy dzieleniu pewnej liczby przez 7 otrzymujemy iloraz równy 13 i resztę równą 5. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Liczba ta jest podzielna przez 12.

B. Gdy podzielimy tę liczbę przez 11, otrzymamy resztę równą 3.

C. Reszty z dzielenia tej liczby przez 9 i przez 10 są równe.

3 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Liczba 96 969 696 nie jest podzielna przez

A. 4. B. 6. C. 9. D. 1.

4. W tabeli podano, ilu monet o nominale 5 zł i 2 zł należy użyć, by wypłacić kwotę równą 32 zł. Przygotuj podobną tabelę przy założeniu, że masz monety 5 zł i 2 zł, a chcesz wypłacić podane kwoty.

a) 21 zł b) 37 zł

5 zł	2 zł
6	1
4	6
2	11
0	16

2. Liczby całkowite

Lekcja 2, s. 12–14

1. Z basenu o pojemności 2500 m^3 rano spuszczono 800 m^3 wody. Następnie w południe spuszczono jeszcze 750 m^3 wody. Oblicz, ile wody zostało w basenie.

2. Określ, który ze znaków <, > czy = powinien stać w miejscu $\boxed{?}$.

a) $-6+(-5)\ \boxed{?}\ -6-(-5)$

b) $25-11-5\ \boxed{?}\ -25+11+5$

c) $39-13-(-11)\ \boxed{?}\ 39+(-13)+11$

3. Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb: $-12, -5, 8, 10, 4, -7, 14, -4$?
Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 8

4. Na pierwszym przystanku do pustego autobusu wsiadły 24 osoby. Na drugim przystanku wysiadło 10 pasażerów, a wsiadło 5. Na trzecim wysiadło 7 osób, a wsiadło 12. Oblicz, ilu pasażerów było w autobusie, gdy odjeżdżał z trzeciego przystanku.

3. Liczby wymierne

Lekcja 3, s. 15–19

1. Oblicz.

a) $2\frac{1}{3}+6\frac{2}{3}$
b) $6\frac{3}{5}-8\frac{4}{5}$
c) $1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
d) $5\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$
e) $2\frac{3}{4}-4\frac{1}{2}$
f) $5\frac{1}{4}-4\frac{2}{3}$
g) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\right):\frac{1}{6}$
h) $\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{15}{4}\right):\frac{6}{5}$
i) $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right):\frac{1}{6}$
j) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\right):\frac{8}{15}$
k) $\left(1\frac{2}{3}:8\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{6}{7}$
l) $\left(2\frac{6}{7}:1\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{1}{2}$

2. Tomek wydał połowę oszczędności na prezent dla swojej dziewczyny. $\frac{1}{3}$ pozostałej kwoty przeznaczył na prezent dla siostry, a za resztę pieniędzy kupił trzem młodszym braciom identyczne prezenty. Prezent dla siostry kosztował 60 zł.
Wybierz zdania prawdziwe.

A. Dziewczyna Tomka dostała prezent za 180 zł.

B. Każdy z trzech braci Tomka otrzymał prezent za 40 zł.

C. Łączna kwota, którą Tomek wydał na prezenty, to 540 zł.

*** 3.** Ile jest równa siódma część potrojonej połowy liczby 210?
Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 15 **B.** 30 **C.** 45 **D.** 60

4. Aby uzyskać farbę do włosów w kolorze ciemny fiolet, fryzjer miesza różne kolory kremów z utleniaczem. Pojemnik do mieszania farb wypełnia w $\frac{1}{4}$ kremem czerwonym, w $\frac{1}{12}$ fioletowym i w $\frac{1}{3}$ ciemnobrązowym. Pozostałą część pojemnika wypełnia utleniaczem. Oblicz, jaką część pojemnika zajmuje utleniacz.

4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Lekcja 4, s. 20–23

1. Zapisz w postaci ułamków zwykłych liczby x i y. Następnie oblicz $x \cdot y$.

a) $x = 0{,}25$
$y = 0{,}75$

b) $x = 0{,}125$
$y = 0{,}375$

2. Zapisz rozwinięcia dziesiętne podanej liczby.

a) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{60}$ e) $\frac{1}{300}$

b) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{1}{90}$ f) $\frac{7}{900}$

PODPOWIEDŹ

$\frac{1}{3} = 0{,}3333333...$
$\frac{1}{6} = 0{,}1666666...$
$\frac{1}{9} = 0{,}1111111...$

3. Dana jest liczba $3{,}4(607)$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Na dziesiątym miejscu po przecinku rozwinięcia dziesiętnego tej liczby znajduje się cyfra 7.

B. Na dwudziestym miejscu po przecinku rozwinięcia dziesiętnego tej liczby jest cyfra 7.

C. Wśród pierwszych stu cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego tej liczby cyfra 0 pojawia się 33 razy.

4. Która z podanych liczb ma takie same trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego, jak liczba $\frac{22}{7}$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\frac{23}{7}$ **B.** $\frac{63}{20}$ **C.** $\frac{128}{41}$ **D.** π

5. Pracownik ekipy remontowej kupił w sklepie budowlanym 20 m listew przypodłogowych w cenie 20,50 zł za 1 m, puszkę farby za 59,98 zł oraz dwa wałki malarskie po 29,98 zł za sztukę. Ile zapłacił za te zakupy?

6. Przybliżenia

Lekcja 6, s. 26–29

1. Ania i Stefan podali całkowite przybliżenia liczb $\sqrt{27}$, $\sqrt{37}$, $\sqrt{47}$, $\sqrt{57}$. Ania stosowała regułę zaokrąglania, a Stefan w każdej liczbie odrzucił cyfry występujące po przecinku. W przypadku których liczb ich wyniki były różne?

PODPOWIEDŹ

$\sqrt{27} \approx 5{,}19615$
$\sqrt{37} \approx 6{,}08276$
$\sqrt{47} \approx 6{,}85565$
$\sqrt{57} \approx 7{,}54983$

2. Liczbę 7,805 55 zaokrąglono z dokładnością do n miejsc po przecinku. Oblicz błąd przybliżenia.

a) $n = 1$ b) $n = 2$ c) $n = 3$ d) $n = 4$

3. Wybierz zdania prawdziwe.

PODPOWIEDŹ

$\pi \approx 3{,}14159265358979$

A. Jeśli odrzucimy wszystkie cyfry po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π, uzyskamy przybliżenie z niedomiarem.

B. Jeśli zaokrąglimy liczbę π do pięciu cyfr po przecinku, otrzymamy przybliżenie z nadmiarem.

C. Jeśli przyjmiemy $\pi \approx 3{,}14$, popełnimy błąd większy od 0,001.

4. Oblicz błąd przybliżenia, który popełniono, przybliżając wielkość x wielkością a.

a) $x = 283\,\text{g}$; $a = 300\,\text{g}$

b) $x = 31\,\text{g}$; $a = 30\,\text{g}$

c) $x = 1309\,\text{m}$; $a = 1300\,\text{m}$

d) $x = 12{,}95\,\text{m}$; $a = 13\,\text{m}$

* **5.** Uczniowie podczas zajęć praktycznych mierzyli powierzchnię podłogi w kształcie prostokąta. Rzeczywista powierzchnia podłogi wynosi $16{,}4\,\text{m}^2$. Dla jakiej długości (x) i szerokości (y) popełniony błąd bezwzględny jest najmniejszy?
Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $x = 6{,}6\,\text{m}$, $y = 2{,}3\,\text{m}$

B. $x = 6{,}5\,\text{m}$, $y = 2{,}4\,\text{m}$

C. $x = 6{,}4\,\text{m}$, $y = 2{,}5\,\text{m}$

D. $x = 6{,}3\,\text{m}$, $y = 2{,}6\,\text{m}$

II. Potęgi i pierwiastki

1. Potęga o wykładniku naturalnym

Lekcja 1, s. 33–36

1. Oblicz.

a) $9^2 + 7^2$

b) $9^3 - 6^3$

c) $3^4 + 2^4$

d) $5^4 - 4^4$

e) $(-2)^4 \cdot (-2)^3$

f) $4^3 \cdot 4^2$

g) $5^7 : 5^3$

h) $(-2)^3 \cdot (-3)^3$

i) $2^4 \cdot 5^4$

j) $15^3 : 3^3$

k) $(2^2)^3$

l) $(2^4)^2$

2. Podaj, która z liczb jest większa: x czy y.

a) $x = (2^3)^4$, $y = (2^5)^4$

b) $x = (7^2)^7$, $y = (7^3)^5$

3. Wybierz zdania prawdziwe.

A. $(-5)^6$ jest liczbą ujemną.

B. $5^{10} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ jest równe 1.

C. 3^5 jest większe od 200.

4. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Iloczyn liczb 9^4 i $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ jest równy

A. -81.

B. -27.

C. 27.

D. 81.

5. Hodowca zwierząt kupił 10 królików. Ile królików będzie mieć hodowca za 5 lat, jeśli populacja królików podwaja się co pół roku?

2. Potęga o wykładniku całkowitym

Lekcja 2, s. 37–40

1. V jest objętością sześcianu. Podaj objętość tego sześcianu w dm^3.

a) $V = 8 \cdot 10^3\ cm^3$ b) $V = 6 \cdot 10^{-2}\ m^3$ c) $V = 4 \cdot 10^4\ mm^3$

2. Krawędź pewnego sześcianu ma 2 cm. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Krawędź tego sześcianu ma długość $2 \cdot 10^{-1}$ dm.

B. Ściana boczna tego sześcianu to kwadrat o polu równym $4 \cdot 10^{-2}\ dm^2$.

C. Objętość tego sześcianu jest równa $8 \cdot 10^{-3}\ dm^3$.

3. Ile wynosi iloczyn liczb $a = 9^3$ i $b = 6^{-3}$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $9\frac{1}{6}$ B. $3\frac{3}{8}$ C. $2\frac{2}{3}$ D. $1\frac{1}{2}$

4. Stocznia przez pomyłkę podała dane techniczne pewnego jachtu w nietypowych jednostkach. Zamień je na właściwe jednostki: informacje o długości, szerokości i zanurzeniu jachtu podaj w metrach, a dane dotyczące jego masy – w kilogramach.

Dane techniczne jachtu	Wymiary
Długość całkowita jachtu	$1{,}5 \cdot 10^4$ mm
Szerokość całkowita jachtu	$4{,}3 \cdot 10^2$ cm
Zanurzenie	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$ km
Masa	$1{,}3 \cdot 10^7$ g

3. Pierwiastek kwadratowy

Lekcja 3, s. 41–43

1. Oblicz pole kwadratu, którego bok ma daną długość.

a) $\sqrt{2}$ cm b) $2\sqrt{2}$ dm c) $5\sqrt{3}$ m

2. Liczbę x zapisz jako $a\sqrt{2}$. Podaj jej przybliżenie dziesiętne przy założeniu, że $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

a) $x = \sqrt{18}$ b) $x = \sqrt{50}$ c) $x = \sqrt{8} + \sqrt{200}$

3. Kierownik ekipy budowlanej miał obliczyć obwód działki w kształcie kwadratu, o powierzchni 3,24 a. Jaki obwód ma działka?

PODPOWIEDŹ

$1\ a = 100\ m^2$

4. Prostokąt o polu P można rozciąć na dwa kwadraty. Oblicz obwód tego prostokąta, jeśli:

a) $P = 8\ cm^2$, b) $P = 18\ dm^2$, c) $P = 72\ m^2$, d) $P = \frac{1}{2}\ m^2$.

5. Prostokąt o bokach 2 cm i 18 cm ma takie samo pole, jak kwadrat o boku a cm. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Obwód tego kwadratu wynosi 24 cm.

B. Obwód tego kwadratu jest równy obwodowi prostokąta.

C. Pole tego kwadratu jest równe polu prostokąta o bokach 4 cm i 9 cm.

6. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Dane są dwa kwadraty o polach równych 256 cm^2 i 81 cm^2. Suma obwodów tych kwadratów jest równa obwodowi kwadratu o polu równym

A. 625 cm^2. **B.** 441 cm^2. **C.** 400 cm^2. **D.** 337 cm^2.

*** 7.** Sprawdź, czy podana nierówność jest prawdziwa. Skorzystaj z odpowiednich przybliżeń dziesiętnych.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}>3$ **b)** $\sqrt{3}+\sqrt{5}>4$ **c)** $2\sqrt{2}+\sqrt{5}>5$

4. Pierwiastki wyższych stopni

Lekcja 4, s. 44–47

1. Sprawdź, czy liczby x i y są sobie równe.

a) $x=\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{27}$
$y=\sqrt[3]{1000}$

b) $x=\sqrt[3]{125}-\sqrt[4]{16}$
$y=3\sqrt[3]{64}-3\sqrt[4]{81}$

c) $x=\sqrt[4]{625}-\sqrt[5]{32}$
$y=3\sqrt[3]{64}-3\sqrt[3]{27}$

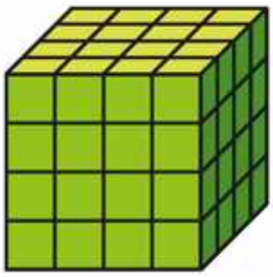
2. Sześcienny pojemnik jest wypełniony wodą do połowy. Podaj wymiary tego pojemnika, jeśli znajduje się w nim 108 l wody.

*** 3.** Sześcienny klocek o objętości 8000 cm^3 pomalowano na zielono, a następnie pocięto na 64 małe sześciany o równych objętościach. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Krawędź klocka miała długość 2 m.

B. Każdy z małych sześcianów ma krawędź o długości 0,05 m.

C. Są 24 małe sześciany, które mają dwie ściany pomalowane na zielono.



*** 4.** Sprawdź, czy podana nierówność jest prawdziwa.

a) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}>3$

b) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}>3$

c) $\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{3}<4$

d) $2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}<5$

PODPOWIEDŹ

$\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26$
$\sqrt[3]{3}\approx 1{,}44$
$\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59$
$\sqrt[3]{5}\approx 1{,}71$

III. Procenty i ich zastosowanie

1. Co to jest procent?

Lekcja 1, s. 51–55

1. Oblicz:

a) 40% liczby 50, a następnie 20% z wyniku;

b) 80% liczby 60, a następnie 150% z wyniku;

c) 110% liczby 70, a następnie 250% z wyniku.

2. Właściciel sklepu ze sprzętem AGD zmieniał ceny towarów. Oblicz, o jaki procent zmieniły się ceny towarów, jeśli:

a) obniżył je dwukrotnie o 10%,

b) podwyższył je dwukrotnie o 10%.

3. Firma organizująca koncert wydrukowała 1500 biletów. Sprzedała już 93% z nich. Wśród już sprzedanych biletów 40% to miejsca siedzące. Ile sprzedano biletów na miejsca siedzące? Wybierz właściwą odpowiedź.

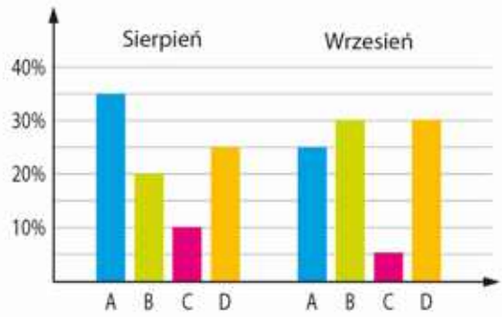
A. 424 **B.** 488 **C.** 558 **D.** 600

4. Na diagramie przedstawiono wyniki sondaży przeprowadzonych w sierpniu i we wrześniu, dotyczące poparcia partii politycznych *A*, *B*, *C* i *D*. W obu miesiącach w badaniu wzięło udział tyle samo osób. Wybierz zdania prawdziwe.

A. W sierpniu poparcie dla partii *B* było o 20 punktów procentowych wyższe niż poparcie dla partii *C*.

B. Od sierpnia do września poparcie dla partii *A* zmalało o 10 punktów procentowych.

C. W porównaniu z sierpniem poparcie dla partii *D* wzrosło we wrześniu o $\frac{1}{5}$.



3. Lokaty

Lekcja 3, s. 58–61

1. Oblicz na podstawie informacji z tabeli.

a) O ile punktów procentowych zmieniło się oprocentowanie w każdym z banków?

b) Jaką kwotę odebralibyśmy z każdego z banków po 2 latach, jeśli na początku 2017 r. wpłacilibyśmy na lokatę 15 000 zł?

Bank	Wysokość oprocentowania lokat w danym roku	
	2017 r.	2018 r.
A	4,3%	5,8%
B	5,4%	4,2%

2. Przedsiębiorca założył w banku A roczną lokatę oprocentowaną 4% w skali roku na kwotę 6000 zł. Oblicz, o ile więcej zarobiłby po roku, gdyby wpłacił tę samą kwotę do banku B, w którym oprocentowanie rocznej lokaty jest o 1,5 punktu procentowego wyższe niż w banku A.

***3.** Połowę z 6000 zł złożono na lokatę roczną w banku A, a drugą połowę – w banku B. Odsetki uzyskane po roku w banku B były o 45 zł wyższe niż odsetki w banku A. O ile punktów procentowych oprocentowanie lokaty w banku B było wyższe od oprocentowania lokaty w banku A? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 0,5 **B.** 0,75 **C.** 1 **D.** 1,5

4. Kwotę 5000 zł wpłacono do banku na dwuletnią lokatę. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 4%, a w drugim – p% w skali roku. Oblicz p, jeśli po 2 latach odebrano z banku 5512 zł.

5. Bank A oferuje półroczną kapitalizację przy rocznym oprocentowaniu lokaty równym 8%. Bank B oferuje kwartalną kapitalizację przy rocznym oprocentowaniu lokaty równym 7,6%. Oblicz, która oferta jest bardziej korzystna dla klienta w przypadku lokaty jednorocznej.

IV. Równania i nierówności

1. Równania

Lekcja 1, s. 67–70

1. Rozwiąż równanie. Sprawdź rozwiązanie.

a) $2(3x + 4) = 8$
b) $3(2 - 5x) = -9$
c) $-2(x - 6) = 4$
d) $4(x - 2) = x + 1$
e) $6(1 - x) = 3 - x$
f) $\frac{1}{2}(4x - 6) = \frac{3}{2}x$
g) $3(x - 2) = 2(2 - x)$
h) $\frac{1}{2}(2x + 1) = -3\left(x + \frac{1}{2}\right)$
i) $4(2x - 5) = -5(-2 - x)$

2. Dane jest równanie $x - 1 = 1 - x$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Rozwiązaniem tego równania jest liczba 1.
B. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań.
C. Równanie to ma jedno rozwiązanie.

3. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Rozwiązaniem równania $\frac{3}{2}(4x - 6) = \frac{2}{3}(9x - 6) - x$ jest liczba

A. mniejsza od 3.
B. nie większa niż 4.
C. mniejsza od 5.
D. nie mniejsza niż 5.

2. Równania – zastosowanie

Lekcja 2, s. 71–73

1. Drużyna hokejowa rozegrała 14 meczów. Liczba wygranych jest o 1 większa od liczby przegranych i dwukrotnie większa od liczby remisów. Oblicz, ile spotkań wygrała drużyna.

2. Podczas turnieju szachista rozegrał 19 partii. Wygrał o dwie partie więcej niż przegrał i o sześć partii więcej niż zremisował. Oblicz, ile partii wygrał, ile przegrał, a ile zremisował.

3. Za 1 km holowania samochodu osobowego trzeba zapłacić 3,5 zł. Dodatkowo za przyjazd lawety firma pobiera jednorazową opłatę w wysokości 65 zł. Oblicz, ile kilometrów holowano auto, jeśli za usługę zapłacono 152,5 zł.

4. Tomek jest o 8 cm wyższy od Huberta. Średnia arytmetyczna wzrostu Tomka i Huberta wynosi 175 cm. Oblicz wzrost każdego z nich.

5. Do skarbonki wrzucono pewną liczbę monet – łącznie 86 zł. Monet pięciozłotowych jest o sześć mniej niż dwukrotność monet dwuzłotowych i dwa razy mniej niż jednozłotowych. Ile jest monet w skarbonce? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 40 **B.** 38 **C.** 36 **D.** 30

3. Oś liczbowa i przedziały liczbowe

Lekcja 3, s. 74–79

1. Na osi liczbowej zaznaczono punkty odpowiadające liczbom ze zbioru $\{-9, -6, 0, 4, 11, 17\}$. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Największa odległość między tymi punktami wynosi

A. 0. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 26.

2. Opisz podany przedział tak, jak zrobiono to w tabeli poniżej.

a) $\langle a; b)$ **c)** $\langle a; b\rangle$ **e)** $\langle a; \infty)$ **g)** $(-\infty; a\rangle$

b) $(a; b\rangle$ **d)** $(a; \infty)$ **f)** $(-\infty; a)$

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
Przedział otwarty	$(a; b)$	$a < x < b$	

***3.** Podaj liczbę należącą do przedziału (1; 4) i

a) większą od 3,9999; **b)** mniejszą od 1,0001.

4. Ile liczb całkowitych należy do przedziału (–100; 100)? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 100 **B.** 199 **C.** 200 **D.** 201

5. Pan Robert prowadzi wypożyczalnię aut. Pewnego dnia okazało się, że polisa OC jednego z samochodów osobowych wygasła 6 dni temu, a jednego z aut ciężarowych – 16 dni temu. Na podstawie zamieszczonych informacji oblicz wysokość kary, którą zapłaci pan Robert, jeśli zgłosi ten fakt tego samego dnia.

Wysokość opłat karnych za brak obowiązkowego OC w 2018 r.		
Okres pozostawania bez ochrony ubezpieczeniowej w danym roku kalendarzowym	**Samochody osobowe**	**Samochody ciężarowe, ciągniki samochodowe i autobusy**
Do 3 dni – 20% pełnej opłaty karnej	840 zł	1260 zł
4 do 14 dni – 50% pełnej opłaty karnej	2100 zł	3150 zł
Powyżej 14 dni – 100% opłaty karnej	4200 zł	6300 zł

4. Nierówności

Lekcja 4, s. 80–83

1. Rozwiąż nierówność i podaj najmniejszą liczbę całkowitą ją spełniającą.

a) $-5(x-2) \leq 3(x-3)-4x$

b) $x-(2-3x) > 2(x-1{,}5)$

c) $4(x+1)-7-5x < 4x-3(x-3)$

d) $8(x+1)-2(x-4) > 4(x-1)+13$

2. Rozwiąż nierówność. W pierwszym kroku pomnóż obie strony nierówności przez wskazaną liczbę.

a) $\frac{1-7x}{5} > 10 \mid \cdot 5$

b) $\frac{2x-5}{2} \leq 3x \mid \cdot 2$

c) $\frac{2-2x}{3} < x-1 \mid \cdot 3$

d) $\frac{x}{2} \geq \frac{x-3}{4} \mid \cdot 4$

e) $\frac{2-3x}{4} \geq x+4 \mid \cdot 4$

f) $\frac{x-3}{2} \geq \frac{x+2}{3} \mid \cdot 6$

3. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie nierówności.

a) $x-3 < 5$ i $x+2 > 4$

b) $x+9 \geq 13$ i $2x-6 \leq 4$

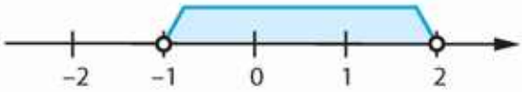
c) $3x+6 > -9$ i $1-x \geq 3$

d) $-2x+3 \leq 4$ i $5-4x > 1$

4. Wskaż nierówność równoważną nierówności $-\frac{1}{2}x+\frac{5}{6} > 0$. Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $x < 2$ **B.** $x < \frac{1}{6}$ **C.** $x < \frac{5}{6}$ **D.** $x < \frac{5}{3}$

***5.** Uzasadnij, że przedstawiony przedział jest zbiorem liczb, które jednocześnie spełniają obie podane nierówności.

a) 

$x + 3 < 5$ i $x + 7 > 6$

b)

$-2x + 1 \leq 5$ i $-3x + 7 \geq 1$

5. Nierówności – zastosowanie

Lekcja 5, s. 84–86

1. Temperatura powietrza mierzona o godzinie 12:00 w ciągu ostatnich 5 dni wynosiła odpowiednio: 15°C, 17°C, 18°C, 14°C i 13°C. Odpowiedz, jaka mogła być maksymalna temperatura o godzinie 12:00 szóstego dnia, skoro średnia temperatur z 6 dni nie przekroczyła 16°C.

2. Właścicielka salonu fryzjerskiego postanowiła zorganizować imprezę w kręgielni dla stałych klientów z okazji jubileuszu salonu. Na podstawie zamieszczonej oferty podaj, ile maksymalnie osób może zaprosić, jeśli na imprezę chciała wydać nie więcej niż 800 zł.

3. Oblicz, na ile dni należy wypożyczyć samochód, aby oferta wypożyczalni A była bardziej korzystna.

V. Układy równań liniowych

1. Co to jest układ równań?

Lekcja 1, s. 90–93

1. Która para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ -5x + y = 3 \end{cases}$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

2. Kasia i Ola mają razem 24 lata. Ola jest dwa razy młodsza od Kasi. Który układ równań opisuje treść zdania, jeśli przez x oznaczymy wiek Kasi, a przez y wiek Oli? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\begin{cases} 2x + y = 24 \\ 2x = y \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x + 2y = 24 \\ 2y = x \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x + y = 24 \\ 2x = y \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x + y = 24 \\ x = 2y \end{cases}$

3. Oznacz niewiadome i zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Ania za trzy pęczki rzodkiewek i pęczek natki pietruszki zapłaciła 5 zł 79 gr. Magda kupiła dwa pęczki rzodkiewek oraz dwa pęczki natki pietruszki za łączną kwotę 5 zł 98 gr.

b) Tomek kupił 1,5 kg pomidorów i 1 kg ogórków za łączną kwotę 13,5 zł. Kornelia za 0,5 kg pomidorów i 2 kg ogórków zapłaciła 12 zł.

2. Metoda podstawiania

Lekcja 2, s. 94–97

1. Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Wyznaczając x z równania $5x + 2y = 9$, otrzymamy

A. $x = -\frac{5}{2}y + \frac{5}{9}$. **B.** $x = -\frac{2}{5}y + \frac{9}{5}$. **C.** $x = \frac{2}{5}y + \frac{9}{5}$. **D.** $x = \frac{5}{2}y + \frac{5}{9}$.

2. Rozwiąż podany układ równań metodą podstawiania. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 9x - 8y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 80 \\ 5x - 2y = 70 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 7x - 2y = 200 \\ 3x + y = 550 \end{cases}$

3. Który układ równań ma takie samo rozwiązanie co układ $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$?
Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ -x = 22 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ 5x - 10 = 12 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 5x = 22 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ -x - 10 = 12 \end{cases}$

4. Suma połowy liczby x i liczby y jest równa 15. Różnica liczby x i podwojonej liczby y równa się 6. Znajdź te liczby.

5. Mechanik samochodowy zamówił do swojego warsztatu 16 młotków w dwóch wielkościach. Cena mniejszego młotka to 14 zł, a większego – 22 zł. Zamówienie opiewa na łączną sumę 272 zł. Ile młotków większych i ile mniejszych zamówił mechanik?

3. Metoda przeciwnych współczynników

Lekcja 3, s. 98–101

1. Podaj, ile par liczb spełnia podany układ równań.

a) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ \frac{2}{3}y - x = \frac{1}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - \frac{1}{3}y = 2\frac{1}{3} \\ -9x + 7y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \frac{x-4}{4} + \frac{y+4}{3} = -8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x + 5y = \frac{3}{2} \\ 4{,}5x - 7{,}5y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = \frac{18+x}{3} \\ x - y = \frac{18+y}{2} \end{cases}$

2. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - \frac{1}{2}y = 2 \\ 2x + \frac{1}{2}y = 8 \end{cases}$ jest para liczb, których iloczyn jest równy

A. 10. **B.** 16. **C.** 24. **D.** 3.

3. Dane są liczby x i y. Jeśli do połowy liczby x dodamy liczbę y, to otrzymamy 7. Jeśli od podwojonej liczby x odejmiemy liczbę y, otrzymamy 13. Znajdź liczby x i y.

4. Dany jest układ równań $\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ 5x - 3y = 8 \end{cases}$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb parzystych.

B. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb, których suma jest liczbą parzystą.

C. Rozwiązaniem tego układu jest para liczb, których suma kwadratów jest liczbą parzystą.

***5.** Do równania $2x - 5y = 2$ dopisz drugie równanie tak, aby powstał układ równań:

a) sprzeczny, b) nieoznaczony, c) oznaczony.

4. Układy równań – zastosowanie

Lekcja 4, s. 102–104

1. Malarz kupił 14 pędzli. Większe kosztują 18 zł za sztukę, a mniejsze są po 12 zł. Oblicz, ile pędzli każdego rodzaju kupił, jeśli łącznie kosztowały 216 zł.

2. Ola dostała propozycje pracy jako sprzedawca kosmetyków: firma P oferuje 2500 zł miesięcznie + 15% prowizji od sprzedaży, a firma S – 2000 zł miesięcznie + 20% prowizji. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Wzór $y = 2500 + 15\%x$ opisuje wynagrodzenie miesięczne w firmie P, gdzie x oznacza miesięczny przychód.

B. Oferta wynagrodzenia firmy S będzie bardziej korzystna, gdy miesięczny przychód ze sprzedaży kosmetyków wyniesie 5000 zł.

C. Wynagrodzenia oferowane przez obie firmy będą jednakowe, jeśli miesięczny przychód w obu wyniesie 10 000 zł.

3. Firma cateringowa przygotowuje jedzenie na bankiet dla 250 osób. Każdej osobie zostanie podane danie z kurczaka w cenie 20 zł albo danie z wołowiny w cenie 24 zł. Firmie za catering trzeba zapłacić 5280 zł. Który z układów równań opisuje tę sytuację? Przyjmij oznaczenia: k – liczba osób, które wybrały danie z kurczaka, w – liczba osób, które wybrały danie z wołowiny.

Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\begin{cases} k + w = 250 \\ 20k + 24w = 5280 \end{cases}$

B. $\begin{cases} k + w = 250 \\ 20k + 24w = 250 \cdot 5280 \end{cases}$

C. $\begin{cases} k + w = 5280 \\ 20k + 24w = 250 \end{cases}$

D. $\begin{cases} k + w = 5280 \\ 20k + 24w = 250 \cdot 5280 \end{cases}$

VI. Funkcje

1. Pojęcie funkcji i sposoby jej opisu

Lekcja 1, s. 108–111

1. Funkcja f określona jest dla liczb ze zbioru $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli, jeśli funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie ze zbioru X

a) jej kwadrat,

b) jej kwadrat pomniejszony o 4.

2. Tabela wyników ligi piłkarskiej jest przykładem opisu funkcji, która każdej drużynie biorącej udział w rozgrywkach przyporządkowuje liczbę zdobytych punktów. Przyjrzyj się tabeli wyników dotychczas zdobytych punktów podczas rozgrywek szkolnych. Przygotuj nową tabelę, znając wyniki kolejnej rundy:

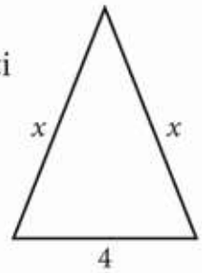
Drużyna	Liczba punktów
Jastrzębie	6
Sokoły	4
Kaczuchy	3
Młode Orły	1

Młode Orły **1:5** Sokoły

Jastrzębie **2:2** Kaczuchy

Za zwycięstwo przyznajemy 3 punkty, za remis 1 punkt, za przegraną 0 punktów.

3. Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie równej 4 i ramieniu długości x. Funkcja f opisuje długość obwodu tego trójkąta w zależności od długości x. Zapisz wzór tej funkcji.



4. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej co najmniej dwucyfrowej iloczyn jej cyfr. Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Wartość funkcji f dla liczby 12 034 jest równa

A. 24. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 0.

2. Obliczanie wartości funkcji

Lekcja 2, s. 112–114

1. Podaj, która funkcja, f czy g, przyjmuje większą wartość dla $x = 3$?

a) $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = 5x + 3$

b) $f(x) = -3x + \frac{1}{2}$, $g(x) = -2x - 5$

c) $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = x^2 + 3x$

d) $f(x) = -\frac{x^2}{4} - 4$, $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$

2. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie dodatniej liczbę dwukrotnie większą. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x + 2$.

B. Wartość funkcji dla $x = 0{,}25$ równa się $\frac{1}{2}$.

C. Funkcja ta przyjmuje wartość 9 dla pewnej liczby większej od 4.

3. Funkcja f każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje podwojoną jej wartość pomniejszoną o dwa. Ile jest równe $f(99)$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 186 **B.** 188 **C.** 196 **D.** 198

4. Jeśli pole kwadratu jest równe $x\,[\mathrm{m}^2]$, to jego obwód opisuje funkcja $f(x) = 4\sqrt{x}\,[\mathrm{m}]$. Korzystając z podanego wzoru, oblicz, ile siatki potrzebujemy do ogrodzenia kwadratowego placu o podanym polu.

a) $x = 100\,\mathrm{m}^2$ **b)** $x = 144\,\mathrm{m}^2$ **c)** $x = 400\,\mathrm{m}^2$ **d)** $x = 625\,\mathrm{m}^2$

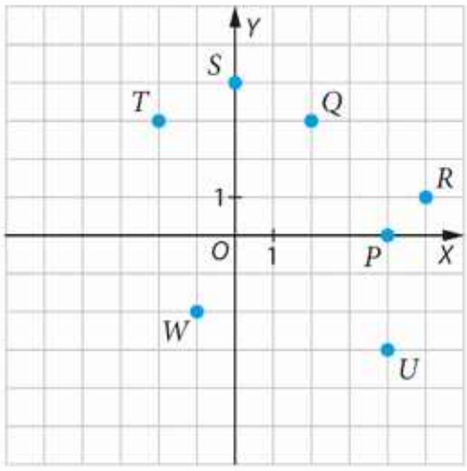
3. Układ współrzędnych

Lekcja 3, s. 115–117

1. Narysuj układ współrzędnych. Zaznacz w nim podane punkty.

a) $A(-3, 4)$ **b)** $B(2, 5)$ **c)** $C(0, 4)$ **d)** $D(-5, 0)$ **e)** $E(-1, -5)$ **f)** $F(-2, -7)$ **g)** $G\left(6, 1\frac{1}{2}\right)$ **h)** $H\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

2. W układzie współrzędnych zaznaczono punkty P, Q, R, S, T, U, W.



a) Odczytaj współrzędne tych punktów i podaj ćwiartkę lub oś, do której należy każdy z nich.

b) Dla których z tych punktów spełniony jest warunek: „Pierwsza współrzędna punktu jest większa od drugiej współrzędnej tego punktu”?

3. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Odległość między punktami $P(2, 6)$ i $Q(2, 8)$ wynosi 2.

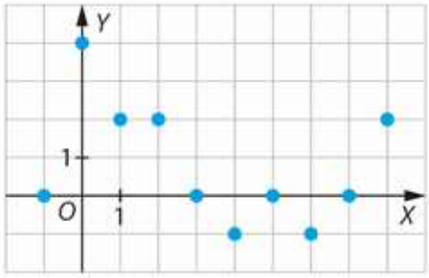
B. Przesuwając się z punktu $P(5, 1)$ o 3 jednostki w dół, znajdziemy się w IV ćwiartce.

C. Pole trójkąta ABC, gdzie $A(-2, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 5)$, jest równe 16.

4. Wykres funkcji

Lekcja 4, s. 118–123

1. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f. Wybierz zdania prawdziwe.



A. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-1, 0, 2, 4\}$.

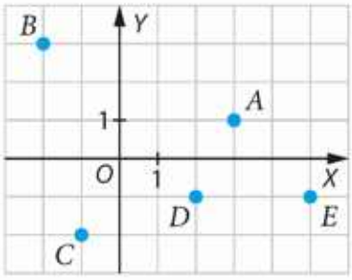
B. Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $\{-1, 0, 2, 4\}$.

C. Funkcja f dla trzech różnych argumentów przyjmuje wartość 2.

2. Wybierz właściwe dokończenia zdania.
Do wykresu funkcji f danej wzorem $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$ należy punkt

A. $\left(-8, 7\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-6, 7)$. **C.** $(6, -4)$. **D.** $\left(8, -4\frac{1}{2}\right)$.

3. W jakiej kolejności należy połączyć odcinkami punkty na rysunku obok, aby powstał wykres funkcji? Wybierz właściwą odpowiedź.



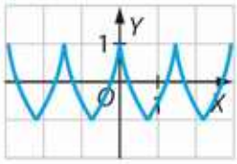
A. $ABCDE$

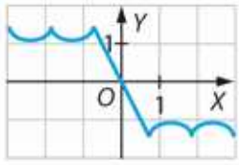
B. $BCDAE$

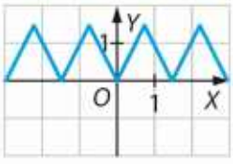
C. $BCDEA$

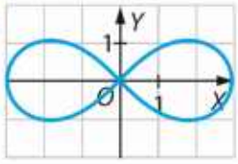
D. $BACDE$

* **4.** Który rysunek nie przedstawia wykresu funkcji? Wybierz właściwą odpowiedź.

A.


B.


C.


D.


5. Naszkicuj wykres funkcji f określonej na przedziale $\langle -3; 2\rangle$ danej wzorem:

a) $f(x) = -x + 2$, b) $f(x) = 2x + 1$, c) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

6. Naszkicuj wykres funkcji f określonej na przedziale $\langle -3; 3\rangle$ danej wzorem:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, b) $f(x) = -2x^2$, c) $f(x) = x^2 + 2$.

5. Miejsce zerowe funkcji

Lekcja 5, s. 124–125

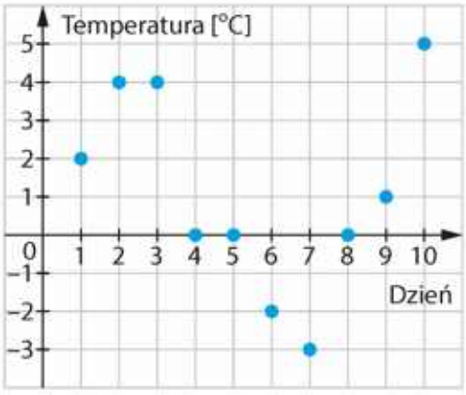
1. Funkcja $f(x) = x^2 - 4$ została określona na zbiorze $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ile miejsc zerowych ma ta funkcja? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

2. Przyjrzyj się wykresowi wyników pomiaru temperatury powietrza o godzinie 9:00 podczas kolejnych dziesięciu dni marca.

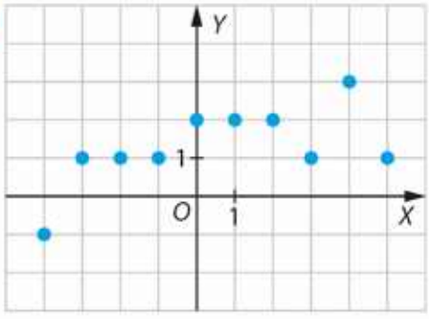
a) Odczytaj miejsca zerowe tej funkcji.

b) Podaj zbiór wartości tej funkcji.

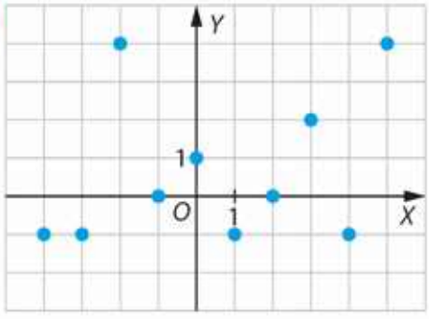


3. Funkcję ukazaną za pomocą wykresu przedstaw za pomocą tabeli. Czy ta funkcja ma miejsca zerowe? Jeśli tak, podaj je.

a)

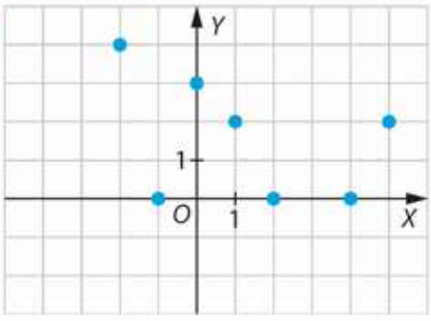


b)

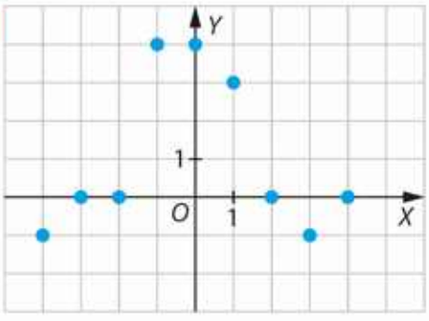


4. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f. Podaj jej dziedzinę, miejsca zerowe i zbiór wartości.

a)

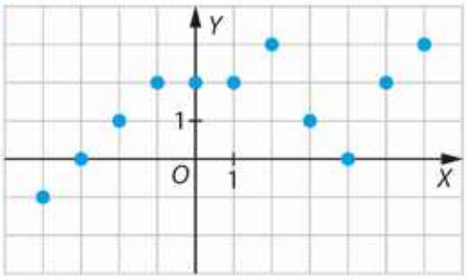


b)

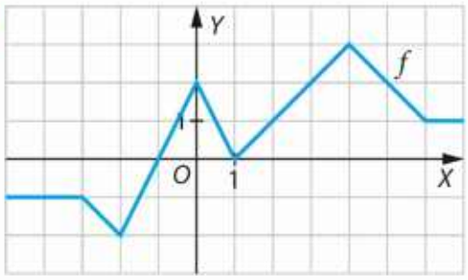


5. Odczytaj z wykresu funkcji f jej miejsca zerowe oraz argumenty, dla których przyjmuje ona wartości mniejsze od 0.

a)



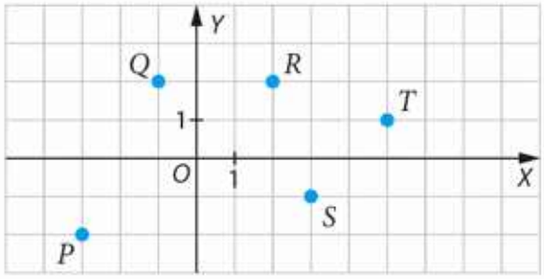
b)



6. Monotoniczność funkcji

Lekcja 6, s. 126–130

1. Które pary punktów mogą należeć do wykresu funkcji rosnącej? Wybierz właściwą odpowiedź.



A. S i T

B. R i S

C. Q i R

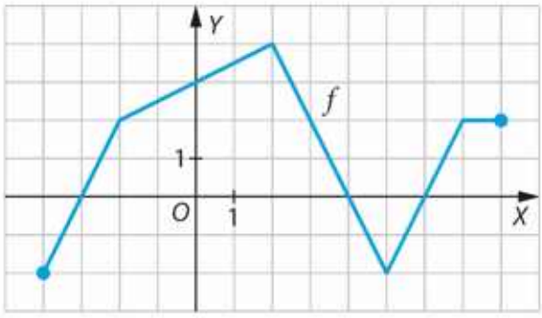
D. Q i T

2. Wykres funkcji f otrzymano, łącząc kolejno odcinkami punkty P, Q, R i S. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj jej przedziały monotoniczności.

a) $P(-5, -2)$; $Q(-3, 0)$; $R(1, 1)$; $S(5, -3)$

b) $P(-4, 4)$; $Q(-2, -1)$; $R(0, 4)$; $S(3, 0)$

3. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f. Wybierz zdania prawdziwe.

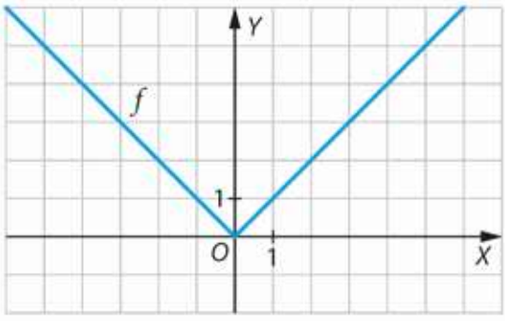


A. Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -4; 4\rangle$.

B. Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 2; 5\rangle$.

C. Funkcja f jest stała w przedziale $\langle 7; 8\rangle$.

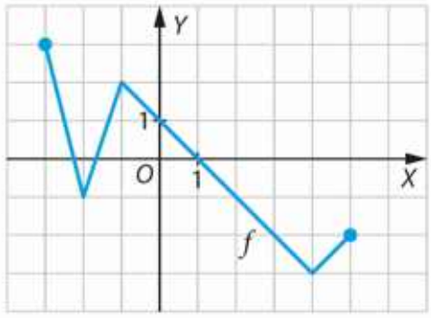
4. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f, która każdej liczbie przyporządkowuje jej wartość bezwzględną, czyli $f(x) = |x|$. Następnie uporządkuj rosnąco liczby: $a = f(-2)$, $b = f(-1)$, $c = f(0)$, $d = f(3)$.



7. Odczytywanie własności funkcji z wykresu

Lekcja 7, s. 131–135

1. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f określonej na przedziale $\langle -3; 5\rangle$. Niech p oznacza największą wartość tej funkcji, zaś q jej wartość najmniejszą. Ile jest równe p, a ile q? Wybierz właściwą odpowiedź.

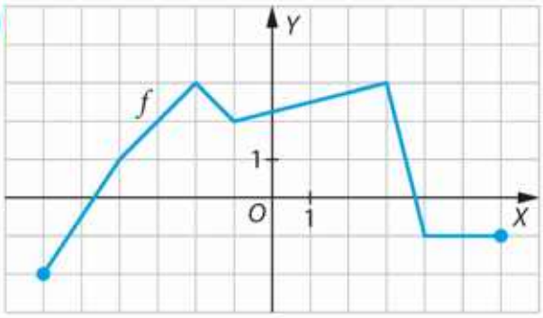


A. $p = 3$, $q = -3$ **C.** $p = 2$, $q = -3$

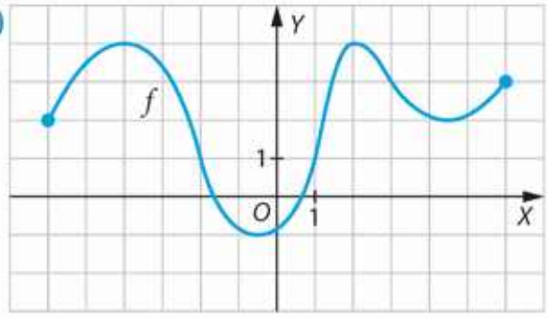
B. $p = 4$, $q = -3$ **D.** $p = 2$, $q = -2$

2. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f określonej dla liczb x takich, że $-6 \le x \le 6$. Podaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość równą 1, a dla jakich wartość większą od 1.

a)

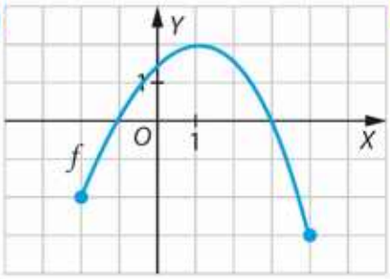


b)

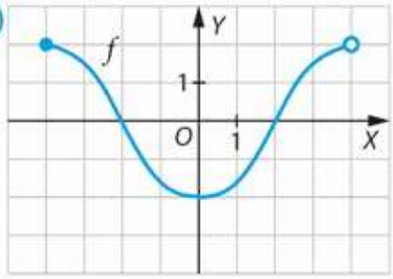


3. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

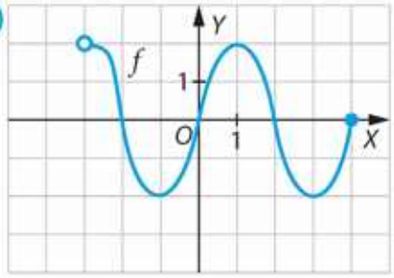
a)



b)



c)



4. Wykres funkcji f otrzymujemy, łącząc kolejno odcinkami punkty P, Q, R i S. Naszkicuj ten wykres. Odczytaj z wykresu przedziały, w których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

a) $P(-4, -2)$; $Q(-2, 2)$; $R(2, -2)$; $S(4, 2)$ b) $P(-4, 3)$; $Q(-2, -3)$; $R(3, 2)$; $S(5, -2)$

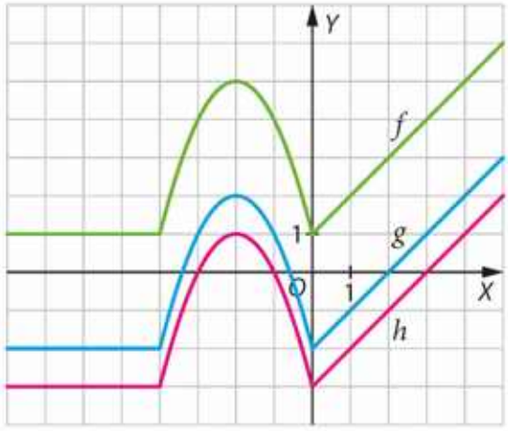
8. Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY

Lekcja 8, s. 136–138

1. Wykres funkcji f: $y = x^2 + 2$ przesunięto o 4 jednostki w dół wzdłuż osi OY i otrzymano wykres funkcji g. Jaki wzór ma funkcja g? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $y = x^2 - 4$ **B.** $y = x^2 - 2$ **C.** $y = x^2$ **D.** $y = x^2 + 4$

2. Przyjrzyj się wykresom funkcji f, g i h. Wybierz zdania prawdziwe.



A. $g(x) = h(x) + 1$

B. $g(x) = h(x) - 3$

C. $f(x) = h(x) - 4$

3. Naszkicuj wykres funkcji f: $y = x - 3$, a następnie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) - 2$ oraz $h(x) = g(x) + 5$.

4. Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $\langle -3; 5\rangle$. Podaj zbiór wartości funkcji g.

a) $g(x) = f(x) - 3$ **b)** $g(x) = f(x) - 1$ **c)** $g(x) = f(x) + 2$ **d)** $g(x) = f(x) + 5$

9. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Lekcja 9, s. 139–141

1. Podaj wzór funkcji g, która powstała przez przesunięcie funkcji f: $y = 2x^2$ o wskazaną liczbę jednostek.

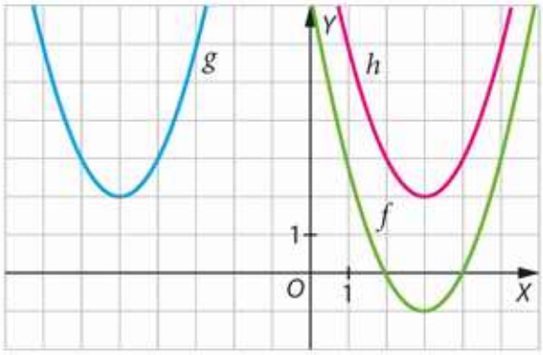
a) 2 jednostki w prawo

b) 5 jednostek w prawo

c) 4 jednostki w lewo

d) 7 jednostek w lewo

2. Przyjrzyj się wykresom funkcji f, g i h. Wybierz zdania prawdziwe.



A. $g(x) = f(x - 3)$

B. $h(x) = g(x - 8)$

C. $f(x) = h(x) - 3$

3. Wykres funkcji f: $\langle -2; 5\rangle \to R$ przesunięto o 4 jednostki w lewo wzdłuż osi OX i otrzymano wykres funkcji g. Jaka jest dziedzina funkcji g? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\langle -2; 5\rangle$ **B.** $\langle 2; 9\rangle$ **C.** $\langle -6; 1\rangle$ **D.** $\langle -6; 9\rangle$

4. Naszkicuj wykres funkcji f: $y = \frac{1}{2}x^2$, a następnie naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej miejsca zerowe.

a) $g(x) = f(x + 4)$ **b)** $g(x) = f(x + 1)$ **c)** $g(x) = f(x - 3)$

10. Symetria wykresu względem osi *OX* lub *OY*

Lekcja 10, s. 142–145

1. Dana jest funkcja $f\colon \langle -3; 4\rangle \to R$ o miejscach zerowych –2, 0 i 1. Najpierw wykres funkcji f przekształcono symetrycznie względem osi OX i otrzymano wykres funkcji g. Następnie wykres funkcji g przekształcono symetrycznie względem osi OY i otrzymano wykres funkcji h. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Dziedziną funkcji g jest zbiór $\langle -3; 4\rangle$.

B. Dziedziną funkcji h jest zbiór $\langle -4; 3\rangle$.

C. Miejscami zerowymi funkcji h są liczby –1, 0, 2.

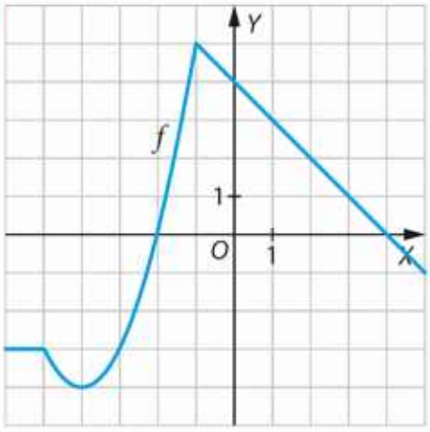
2. Dana jest funkcja $f(x) = 3x - 3$. Jaki wzór ma funkcja $g(x) = f(-x)$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $g(x) = 3x + 3$ **B.** $g(x) = -3x + 3$ **C.** $g(x) = -3x - 3$ **D.** $g(x) = 3x - 3$

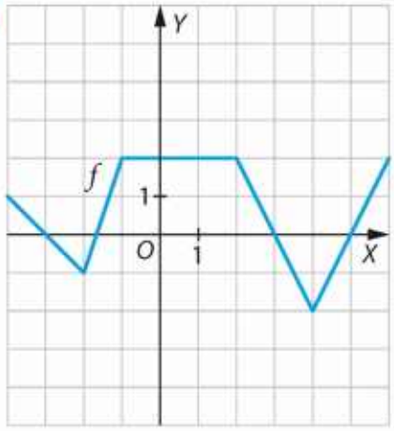
3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (x + 1)^2$, a następnie wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz $h(x) = f(-x)$. Podaj miejsca zerowe funkcji g i h.

4. Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz $h(x) = f(-x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji g i h.

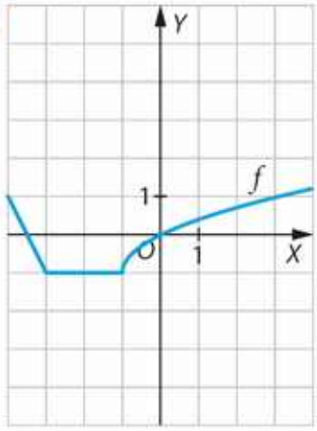
a)



b)



c)



11. Funkcje – zastosowanie

Lekcja 11, s. 146–147

1. Uczestnik biegu na 30 km poruszał się ze stałą prędkością. Przyjrzyj się fragmentowi wykresu zależności jego drogi od czasu. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Średnia prędkość biegu wynosiła 12 km/h.

B. Po godzinie uczestnik biegu pokonał już połowę trasy.

C. Uczestnik biegu dotarł do mety po 2 godzinach i 30 minutach.

2. Przyjrzyj się wykresowi przedstawiającemu zależność liczby kursów, które musi wykonać pewna ciężarówka, od masy przewożonego towaru. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Ładowność ciężarówki jest równa 9 t.

B. Aby przewieźć 18 t towaru, ciężarówka musi wykonać trzy kursy.

C. 12 kursów tej ciężarówki pozwoli na przewiezienie towaru o masie 106 t.

VII. Funkcja liniowa

1. Wykres funkcji liniowej

Lekcja 1, s. 151–155

1. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Punkt $A(2, 3)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = x + 1$.

B. Wartość funkcji liniowej $y = -2x - 1$ dla argumentu 3 wynosi 1.

C. Wykres funkcji $y = -\frac{5}{3}x + 8$ przechodzi przez punkt (9, –7).

2. W układzie współrzędnych narysowano proste równoległe. Jedna z nich jest opisana równaniem $y = 6 - 8x$. Wybierz właściwe dokończenie zdania. Współczynnik kierunkowy drugiej prostej jest równy

A. –8. **B.** –6. **C.** 6. **D.** 8.

3. Wśród podanych równań prostych wskaż pary prostych równoległych.

$l_1: y = 3$ $l_3: y = \frac{1}{3}x - 3$ $l_5: y = -\frac{1}{3}x + 3$ $l_7: y = 8 - \frac{1}{3}x$

$l_2: y = -\frac{1}{2}$ $l_4: y = 3x - 3$ $l_6: y = 4 + 3x$ $l_8: y = 4 + \frac{1}{3}x$

4. Wyznacz równanie prostej, która przechodzi przez początek układu współrzędnych i jest równoległa do prostej danej równaniem:

a) $y = 5x - 3$, *** b)** $y = ax + b$.

2. Punkty przecięcia prostej z osiami OX i OY

Lekcja 2, s. 156–158

1. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = ax - 2$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Jeśli $a = 0$, to funkcja f nie ma miejsc zerowych.

B. Jeśli $a = -8$, to funkcja f nie ma miejsc zerowych.

C. Jeśli $a = \sqrt{2}$, to funkcja f ma miejsce zerowe.

2. Ile jest równe miejsce zerowe funkcji $y = 2x - 1$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. -1 **B.** 0 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

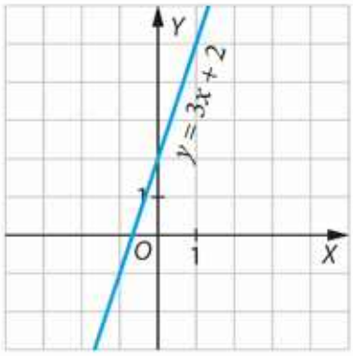
3. Wyznacz współrzędne punktów, w których prosta l przecina osie układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tą prostą i osiami układu współrzędnych.

a) $l: y = 2x - 4$ **b)** $l: y = -2x + 6$ **c)** $l: y = \frac{1}{2}x + 3$

3. Monotoniczność funkcji liniowej

Lekcja 3, s. 159–160

1. Przyjrzyj się wykresowi funkcji $y = 3x + 2$. Wybierz zdania prawdziwe.



A. Wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji maleją.

B. Współczynnik kierunkowy prostej jest równy 3.

C. Wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji rosną.

2. Określ monotoniczność funkcji liniowej f, której wykres przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych. Wybierz właściwą odpowiedź.

A. Funkcja jest rosnąca.

B. Funkcja jest malejąca.

C. Funkcja jest stała.

D. Nie można określić monotoniczności funkcji.

3. O funkcji liniowej f wiadomo, że jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0,3)$, zaś oś OX w punkcie odległym od początku układu współrzędnych o 4 jednostki. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) jest ona rosnącą, **b)** jest ona malejąca.

4. Naszkicuj czworokąt o kolejnych wierzchołkach: $A(-3, -1)$, $B(6, -1)$, $C(3, 5)$ i $D(1, 1)$. Określ znaki współczynników kierunkowych prostych zawierających boki tego czworokąta.

4. Współczynnik kierunkowy prostej

Lekcja 4, s. 161–163

1. Dana jest prosta opisana równaniem $y = \frac{1}{2}x - 4$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Prosta ta jest wykresem funkcji rosnącej.

B. Przy wzroście argumentu funkcji o 4 wartość funkcji rośnie o 2.

C. Przy wzroście argumentu funkcji o 110 wartość funkcji rośnie o 55.

2. Wybierz właściwe dokończenie zdania. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $K(-4, -4)$ i $L(3, 3)$ jest równy

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

3. Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego funkcji. Odpowiedz, jak zmienia się wartość funkcji przy wzroście argumentu o 3.

a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **b)** $y = -\frac{2}{3}x + 2$ **c)** $y = -\frac{4}{3}x + 2$

4. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej AB i prostej CD. Czy te proste są równoległe?

a) $A(-2, -2)$, $B(1, 4)$, $C(-1, -4)$, $D(1, 0)$

b) $A(0, 4)$, $B(2, -2)$, $C(-2, 3)$, $D(-1, -1)$

5. Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej

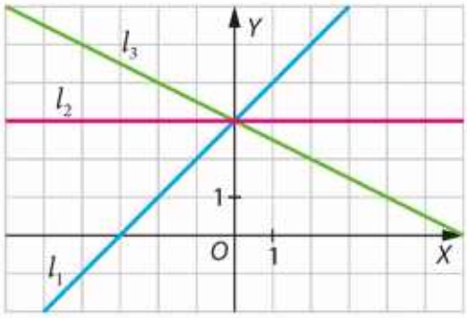
Lekcja 5, s. 164–167

1. Na rysunku obok przedstawiono proste l_1, l_2 i l_3. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Prosta l_1 dana jest równaniem $y = x + 3$.

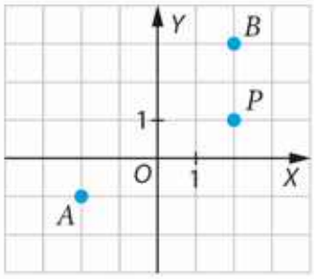
B. Prosta l_2 dana jest równaniem $y = 3$.

C. Prosta l_3 dana jest równaniem $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

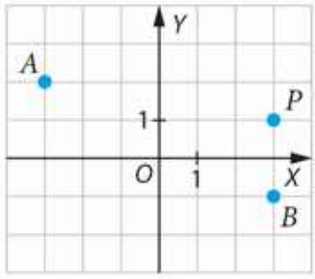


2. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B, a następnie równanie prostej równoległej do prostej AB przechodzącej przez punkt P.

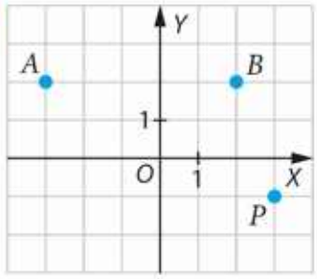
a)



b)



c)



3. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostych KL i MN. Czy proste KL i MN są prostopadłe?

a) $K(-1, -2)$, $L(1, 4)$, $M(-3, 4)$, $N(3, 2)$

b) $K(-2, -2)$, $L(2, 4)$, $M(0, 2)$, $N(6, -2)$

c) $K(-2, 1)$, $L(2, -2)$, $M(-1, -4)$, $N(2, 2)$

***4.** Wskaż właściwe dokończenie zdania. Wykres funkcji f jest prostą równoległą do prostej $y = x$ i razem z osiami układu ogranicza trójkąt o polu równym 8, wynika stąd, że funkcja f może być dana wzorem

A. $f(x) = x + 4$. **B.** $f(x) = x + 8$. **C.** $f(x) = x + 12$. **D.** $f(x) = x + 16$.

6. Interpretacja geometryczna układów równań liniowych

Lekcja 6, s. 168–173

1. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x+y=1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-3y=-9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x+2y=10 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x+3y=2 \\ 3x+y=24 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -6x+y=6 \\ x+6y=36 \end{cases}$

2. Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x+2y=b \end{cases}$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Dla $b = 4$ układ jest sprzeczny.

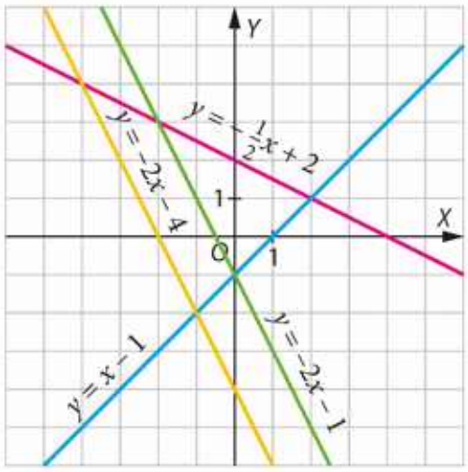
B. Dla $b = 8$ układ jest nieoznaczony.

C. Dla $b = 10$ układ jest oznaczony.

3. Dwie spośród czterech prostych przedstawionych na rysunku stanowią interpretację geometryczną układu równań

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ \frac{1}{2}x+y=2 \end{cases}$$

Korzystając z rysunku, odczytaj rozwiązanie tego układu. Wybierz właściwą odpowiedź.



A. $\begin{cases} x=-4 \\ y=4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

4. Naszkicuj proste k, l i m oraz podaj współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki zawierają się w prostych k, l i m.

a) k: $y = 4$
l: $y = -x + 1$
m: $y = 2x - 8$

b) k: $y = -2$
l: $y = x + 4$
m: $y = -2x - 2$

c) k: $y = x + 2$
l: $y = -x + 4$
m: $y = 2x - 2$

d) k: $y = -1\frac{1}{2}$
l: $y = x - 1\frac{1}{2}$
m: $y = -2x + 10\frac{1}{2}$

e) k: $y = \frac{1}{4}x + 6\frac{1}{4}$
l: $y = 2x + 15$
m: $y = -x - 7\frac{1}{2}$

f) k: $y = -4x - 7$
l: $y = \frac{1}{9}x + 5\frac{1}{3}$
m: $y = 3\frac{1}{21}x - 3\frac{10}{21}$

***5.** Trasa z domu do szkoły wynosi 1,5 km. Młodsza siostra potrzebuje 20 min na pokonanie pieszo tej trasy, a starsza – 15 min. O której godzinie starsza siostra dogoni młodszą, jeśli wyszła z domu 4 min po niej, o 7:34? Rozwiązując zadanie, przyjmij, że każda z sióstr poruszała się ze stałą prędkością.

VIII. Statystyka

1. Średnia arytmetyczna

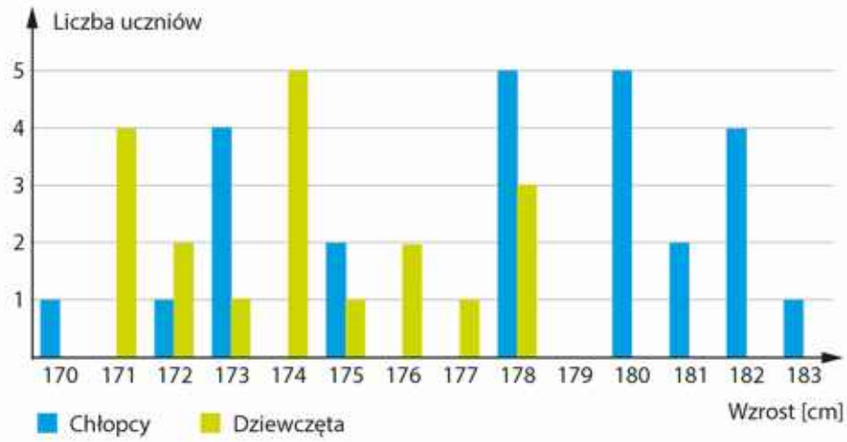
Lekcja 1, s. 179–182

1. Uczniowie pewnej klasy zostali podzieleni na trzy grupy odbywające praktyki zawodowe. Grupa I to osoby o nazwiskach zaczynających się literami od A do K, grupa II – osoby o nazwiskach od L do P, grupa III – osoby o nazwiskach od R do Ż. Średnią ocen z praktyk dla każdej z grup przedstawiono w tabeli. Ile wynosi średnia ocen z praktyk w całej klasie? Wybierz właściwą odpowiedź.

Grupa	Liczba uczniów i średnia ocen w grupie	
	Liczba uczniów	Średnia ocen
I	12	3,5
II	8	3,25
III	10	4,3

A. 3,65 **B.** 3,7 **C.** 3,8 **D.** 4

2. Na diagramie poniżej podano wzrost dziewcząt i chłopców w klasach pierwszych pewnej branżowej szkoły pierwszego stopnia. Wykonaj polecenia.



a) Oblicz średni wzrost dziewcząt, chłopców oraz wszystkich uczniów. Wyniki zaokrąglij do 1 cm.

b) Odpowiedz, ile dziewcząt ma większy wzrost od średniego w swojej grupie.

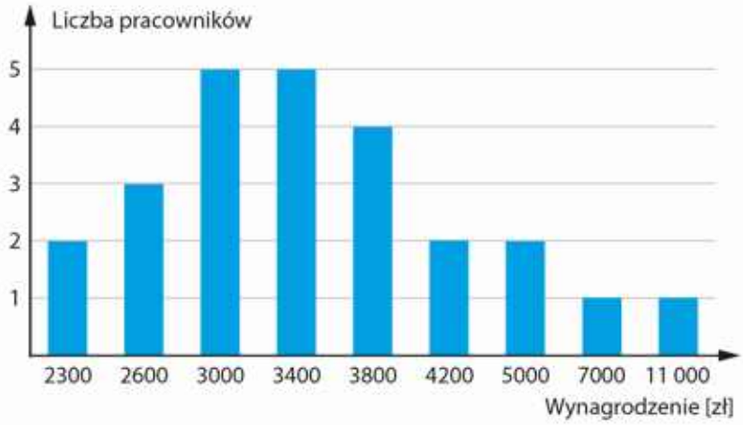
c) Określ, ilu chłopców ma większy wzrost od średniego w klasach pierwszych.

3. W pewnej firmie zatrudniającej 20 osób średnie miesięczne wynagrodzenie wynosiło 3200 zł. Na początku miesiąca do pracy przyjęto nowego pracownika. Oblicz, ile on zarabia, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest:

a) o 2% wyższe niż poprzednio,

b) o 1% niższe niż poprzednio.

4. Na diagramie przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia pracowników zakładu stolarskiego, w którym dyrektor zarabia 11 000 zł.



Na podstawie zamieszczonych informacji oblicz:

a) ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie w tym zakładzie;

b) ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie 10 najwięcej zarabiających osób, a ile – 10 najmniej zarabiających;

c) jaką podwyżkę otrzymał dyrektor, jeśli wszyscy pozostali pracownicy dostali po 200 zł, a średnie miesięczne wynagrodzenie wzrosło o 10%.

2. Średnia ważona

Lekcja 2, s. 183–185

1. Oblicz średnią ważoną liczb $x_1 = 4$ i $x_2 = 8$ z podanymi wagami.

a) $w_1 = 3$, $w_2 = 1$ **b)** $w_1 = 1$, $w_2 = 3$ **c)** $w_1 = 0{,}5$, $w_2 = 0{,}5$

2. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	6	9	12
Waga	2	1	3

b)

Liczba	7	3	4
Waga	0,2	0,3	0,5

c)

Liczba	10	3	5	7
Waga	0,6	2	0,4	1

d)

Liczba	15	15	15	15
Waga	0,3	0,8	0,2	1,7

3. Ile wynosi liczba a, jeśli średnia ważona liczb przedstawionych w tabeli jest równa 7,5? Wybierz właściwą odpowiedź.

Liczba	9	a
Waga	1	3

A. 6 **C.** 8

B. 7 **D.** 9

4. Uczestnikom kursu języka angielskiego wystawiano oceny za cztery umiejętności: x_1 – rozumienie ze słuchu, x_2 – rozumienie tekstu pisanego, x_3 – wypowiedź pisemną, x_4 – wypowiedź ustną. W tabeli podano oceny trzech uczestniczek kursu.

Uczestniczka kursu	Oceny cząstkowe				Ocena końcowa
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Asia	4	5	3	4	3,8
Basia	6	5	2	4	?
Kasia	2	6	5	4	?

Aby wystawić ocenę końcową, obliczono średnią ważoną z następującymi wagami: $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 4$, $w_4 = 3$. Wybierz zdania prawdziwe.

A. Basia otrzymała taką samą ocenę końcową, jak Asia.

B. Kasia otrzymała ocenę końcową wyższą niż Asia.

C. Gdyby przyjęto $w_1 = 4$, a pozostałe wagi byłyby bez zmian, to Basia miałaby wyższą ocenę końcową od koleżanek.

3. Mediana i dominanta

Lekcja 3, s. 186–189

1. Wyznacz medianę i dominantę zestawu liczb.

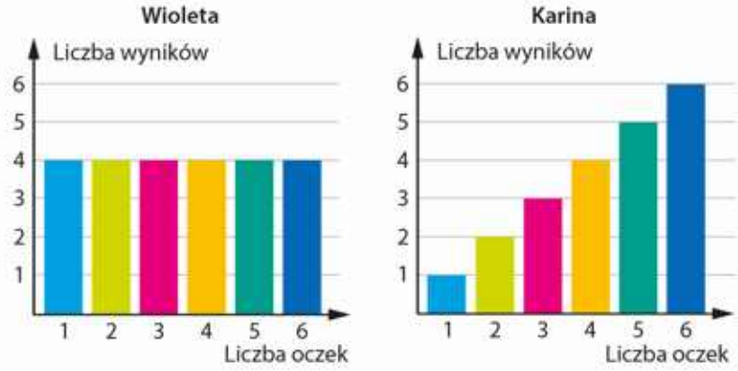
a) 9, 13, 19, 14, 16, 11, 7, 6, 13

b) 64, 60, 64, 38, 52, 65, 60, 48

c) 27, 31, 25, 19, 31, 32, 25, 26, 33, 37

d) 23, 27, 12, 20, 11, 9, 5, 10, 16, 32, 14, 31

2. Wioleta i Karina wykonały serię rzutów sześcienną kostką. Na diagramach przedstawiono wyniki ich rzutów.



Wybierz zdania prawdziwe.

A. Dominanta wszystkich wyników uzyskanych przez Wioletę i Karinę jest równa 6.

B. Mediana wszystkich wyników uzyskanych przez Wioletę i Karinę jest równa 4.

C. Mediana wszystkich wyników uzyskanych przez Wioletę i Karinę jest równa ich średniej arytmetycznej.

Odpowiedzi

Rozdział I. Liczby rzeczywiste

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 9–11	**1.** a) Liczba 1 234 567 nie jest podzielna przez 3. b) Liczba 6 751 413 jest podzielna przez 9. **2.** a) Liczba 627 714 jest podzielna przez 6. b) Liczba 119 325 jest podzielna przez 15. **3.** a) 1, 2, 4, 8 b) 1, 2, 4, 5, 10, 20 c) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 d) 1, 3, 5, 9, 15, 45 **4.** a) 2 b) 0 c) 1 d) 2	**1.** 5 **2.** a) stoliki 8-osobowe b) stoliki 6-osobowe c) stoliki 6-osobowe albo 8-osobowe **3.** Najmniejszy koszt to 465 zł, a największy 525 zł.	**1.** a) 78 : 4 = 19 reszta 2 b) 131 : 4 = 32 reszta 3 c) 89 : 5 = 17 reszta 4 d) 237 : 5 = 47 reszta 2 e) 49 : 6 = 8 reszta 1 f) 373 : 6 = 62 reszta 1 g) 53 : 7 = 7 reszta 4 h) 286 : 7 = 40 reszta 6 **2.** A, C **3.** C
2 s. 12–14	**1.** a) 18 b) 14 c) –69 d) 393 **2.** a) –147 b) 104 c) –5 d) 5 **3.** a) 8 b) –14 c) 293 d) 15 **4.** a) 4 b) 8	**1.** 25 **2.** a) 15 b) 9 **3.** 20 200 zł **4.** w kwietniu	**1.** 950 m^3 **2.** a) < b) > c) = **3.** C **4.** 24
3 s. 15–19	**1.** a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{8}{7}$ d) $-\frac{3}{4}$ e) $-\frac{8}{5}$ **2.** a) $\frac{4}{5}$ b) $1\frac{4}{15}$ c) $\frac{41}{63}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{7}{24}$ f) $-\frac{2}{65}$ g) $1\frac{11}{24}$ h) $-\frac{13}{70}$ **3.** a) 5 b) $4\frac{4}{7}$ c) $-\frac{3}{4}$ d) $-3\frac{11}{12}$ **4.** a) $\frac{25}{81}$ b) $-\frac{3}{14}$ c) 1 d) $1\frac{1}{3}$ **5.** a) $1\frac{1}{5}$ b) $-\frac{8}{15}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 60	**1.** $\frac{1}{3}$ **2.** a) 10 b) 45 c) 35 d) 96 **3.** wystarczy **4.** 3312 zł brutto **5.** 80 baniaków do aut z silnikiem benzynowym, a 60 do aut z silnikiem diesla	**1.** a) 9 b) $-2\frac{1}{5}$ c) $1\frac{5}{6}$ d) $6\frac{1}{6}$ e) $-1\frac{3}{4}$ f) $\frac{7}{12}$ g) $1\frac{7}{9}$ h) $1\frac{61}{64}$ i) 1 j) $1\frac{1}{24}$ k) $\frac{1}{6}$ l) 1 **2.** A, B **3.** C **4.** $\frac{1}{3}$
4 s. 20–23	**1.** a) 7,5 b) 2,25 c) 2,75 d) 0,375 **2.** a) 1,(6) b) 0,(5) c) 0,(81) d) 0,(428571) **3.1.** a) 2 cyfry; 9,131313131 b) 1 cyfra; 0,372222222 c) 3 cyfry; 2,0001001 d) 5 cyfr; 7,122211222 **3.2.** a) 3 – na ósmym, 3 – na dwudziestym b) 2 – na ósmym, 2 – na dwudziestym c) 7 – na ósmym, 7 – na dwudziestym d) 2 – na ósmym, 2 – na dwudziestym	**1.** a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{7}{50}$ d) $\frac{13}{20}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{71}{200}$ g) $\frac{1}{40}$ h) $\frac{11}{250}$ **2.** a) 3,25 b) 7,75 c) 5,125 d) 9,375 e) 2,(18) f) 6,(27) g) 4,(03) h) 8,(21) **3.** a) 0 b) 3 c) 3 d) 7 **4.** a) 150 g = 0,15 kg b) 14 mg = 0,000014 kg c) 2 mg = 0,0002 dag d) 17 kg = 0,017 t **5.** 30 g = 3 dag = 0,03 kg 0,025 g = 0,0025 dag = 0,000025 kg 5 g = 0,5 dag = 0,005 kg **6.** 430 zł **7.** 1255,97 zł	**1.** a) $x \cdot y = 0{,}25 \cdot 0{,}75 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ b) $x \cdot y = 0{,}125 \cdot 0{,}375 = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{64}$ **2.** a) 0,(2) b) 0,(5) c) 0,01(6) d) 0,0(1) e) 0,00(3) f) 0,00(7) **3.** A, C **4.** D **5.** 529,94 zł
6 s. 26–29	**1.** a) 3 b) 2,8 c) 7 d) 0 e) 20 f) 12 400 g) 7900 h) 8000 **2.** a) 6,78; z niedomiarem b) 8,47; z nadmiarem c) 7,9; z nadmiarem d) 5,9; z niedomiarem e) 60,99; z nadmiarem f) 68; z nadmiarem g) 589,99; z niedomiarem h) 1000; z nadmiarem	**1.** a) 3,87; z niedomiarem b) 3,873; z nadmiarem c) 3,872983; z niedomiarem d) 3,87298335; z nadmiarem **2.** a) 0,24 m b) 0,16 m **3.** Otrzymany wynik wzrośnie o 98 m. **4.** 235 cm x 139 cm	**1.** $\sqrt{47}$, $\sqrt{57}$ **2.** a) 0,00555 b) –0,00445 c) –0,00045 d) –0,00005 **3.** A, C **4.** a) –17 g b) 1 g c) 9 m d) –0,05 m **5.** D

6 s. 26–29	**3.** a) 20; błąd przybliżenia: 0,45 b) 17; błąd przybliżenia: –0,02 c) 11; błąd przybliżenia: 0,09 d) 20; błąd przybliżenia: –0,49 **4.** a) 3 b) $5\frac{1}{3}$ c) 12 d) 150 e) 2 f) 2 g) 8,1 h) 1,4 **5.** 1,3 cm		
Powtórzenie rozdziału s. 30–31	**ZADANIA PODSUMOWUJĄCE**		
	1. a) Liczba 201 212 nie jest podzielna przez 9. b) Liczba 358 965 jest podzielna przez 15. **2.** B, C **3.** a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $10\frac{11}{12}$ d) 2 e) 1 f) 1 **4.** A, B **5.** a) 32 b) 4,77 c) 0,099 **6.** a) 25 b) $\frac{5}{8}$		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. a) Liczba 123 450 jest podzielna przez 3. b) Liczba 123 450 jest podzielna przez 5. c) Liczba 123 450 nie jest podzielna przez 9. d) Liczba 123 450 jest podzielna przez 15. **2.** a) 2 b) 3 c) 2 d) 2 **3.** A **4.** a) 18 b) –4 c) 20 **5.** a) $\frac{3}{4} = 0{,}75 \approx 0{,}8$ b) $\frac{5}{8} = 0{,}625 \approx 0{,}6$ c) $1\frac{1}{3} = 1{,}(3) \approx 1{,}3$ d) $2\frac{8}{13} = 2{,}(615384) \approx 2{,}6$ **6.** a) $-\frac{5}{6}$ b) –44 **7.** $\frac{7}{12}$ **8.** D **9.** A, C		

Rozdział II. Potęgi i pierwiastki

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 33–36	**1.** 512 **2.** a) $\frac{1}{81}$ b) $\frac{1}{64}$ c) $\frac{16}{81}$ d) $-\frac{32}{243}$ e) $1\frac{61}{64}$ f) $-5\frac{1}{16}$ g) $-\frac{1000000}{27}$ h) $\frac{100000}{243}$ **3.** a) $(-4)^4, (-3)^4, (-4)^0, (-3)^5, (-4)^5$ b) $-(-10)^5, (-10)^4, (-10)^3, -(-10)^6, (-10)^7$ **4.** a) 125 b) –8 c) –216 d) –27 e) 81 f) 1 000 000 **5.** a) 1 b) 3 c) 2 d) 4	**1.** a) $4 \cdot 10^6\,mm^2$ b) $2 \cdot 10^9\,mm^2$ c) $6 \cdot 10^8\,mm^2$ d) $8 \cdot 10^{15}\,mm^2$ **2.** $10^7\,m^2$ **3.** 3^6	**1.** a) 130 b) 513 c) 97 d) 369 e) –128 f) 1024 g) 625 h) 216 i) 10 000 j) 125 k) 64 l) 256 **2.** a) y b) y **3.** B, C **4.** D **5.** 10 240 królików
2 s. 37–40	**1.** a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{64}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{32}$ f) $\frac{1}{128}$ g) $-\frac{1}{27}$ h) $\frac{1}{81}$ i) $-\frac{1}{243}$ j) $\frac{1}{25}$ k) $-\frac{1}{125}$ l) $\frac{1}{625}$ **2.** a) 6 b) 16 c) $4\frac{17}{27}$ d) $\frac{81}{256}$ e) $-\frac{8}{27}$ f) $-\frac{4}{7}$ g) $5\frac{1}{16}$ h) $\frac{81}{10000}$ **3.** a) 10^4 b) 10^{-2} c) 10^{-4} d) 10^{-6} **4.** a) 27 b) 49 c) $\frac{1}{64}$	**1.** a) x b) x **2.** 1700 **3.** 10^{-2} l **4.** 1000	**1.** a) 8 dm^3 b) 60 dm^3 c) 0,04 dm^3 **2.** A, B, C **3.** B **4.** Długość całkowita jachtu wynosi 15 m, szerokość całkowita jachtu – 4,3 m, zanurzenie – 1,1 m, masa – 13 000 kg.

3 s. 41–43	**1.** a) 20 b) –1 c) 0,6 d) 1,5 e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{7}$ **2.** a) 20 cm b) 36 mm c) 48 dm d) 60 m **3.** a) 14,1 b) 3,46 c) 11,2 **4.** a) 12 b) 3 c) $1\frac{4}{5}$ d) $1\frac{7}{13}$ **5.** a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{5}$ d) $10\sqrt{5}$	**1.** 142 m **2.** 324 m^2 **3.** Obrus ma kształt kwadratu o boku 2,1 m.	**1.** a) 2 cm^2 b) 8 dm^2 c) 75 m^2 **2.** a) $x = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2$ b) $x = 5\sqrt{2} \approx 7$ c) $x = 12\sqrt{2} \approx 16{,}8$ **3.** 72 m **4.** a) 12 cm b) 18 dm c) 36 m d) 3 m **5.** A, C **6.** A **7.** a) nierówność prawdziwa b) nierówność fałszywa c) nierówność prawdziwa
4 s. 44–47	**1.** a) 9 b) 14 c) –6 d) –2 e) $\frac{1}{6}$ f) 0,6 **2.** a) 2 cm b) 3 dm c) 4 m **3.** a) 2 b) 3 c) 5 d) 6 e) 10 f) –10 g) –1 h) –5 **4.** a) 15 b) 12 c) $-\frac{3}{4}$ d) $1\frac{1}{4}$ **5.** a) $2\sqrt[3]{2}$ b) $2\sqrt[4]{2}$ c) $3\sqrt[3]{3}$ d) $2\sqrt[4]{4}$ **6.** a) $-5\sqrt[3]{10}$ b) $-7\sqrt[4]{5}$	**1.** 50 cm **2.** 15 cm **3.** 113 cm x 113 cm x 113 cm **4.** Wysokość kartonu wynosi 30 cm. Wszystkie kartony zajmują 13,5 m^3.	**1.** a) $x = y$ b) $x = y$ c) $x = y$ **2.** Pojemnik ma kształt sześcianu o krawędzi 60 cm. **3.** B, C **4.** a) nierówność fałszywa b) nierówność prawdziwa c) nierówność fałszywa d) nierówność prawdziwa
Powtórzenie rozdziału s. 48–49	**ZADANIA PODSUMOWUJĄCE**		
	1. $(-5)^5$, $(-5)^3$, $(-5)^2$, $(-5)^6$ **2.** 5^2 **3.** a) 125 b) 16 c) 6 d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{64}$ f) 1 **4.** C **5.** a) 2,8 cm b) 11,2 cm c) 424,3 cm **6.** B **7.** A, C **8.** 40 cm **9.** a) 8 cm b) 20 cm c) 2400 cm **10.** a) 1 b) –1 c) 3 d) –3 e) 6 f) –6		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. 5 **2.** D **3.** a) 9 b) 4 c) 5 **4.** $5^{-2} = \frac{1}{25}$ **5.** D **6.** a) 10^6 b) 10^5 c) 10^{-4} d) 10^{-5} **7.** B **8.** a) 4 b) 8 c) $5\sqrt{3}$ **9.** A **10.** A, B **11.** a) $10\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $9\sqrt{3}$ d) $40\sqrt{2}$		

Rozdział III. Procenty i ich zastosowanie

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 51–55	**1.** a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$ f) 1 g) $1\frac{1}{5}$ h) $1\frac{1}{2}$ **2.** 1320 zł **3.** a) 4 b) 5 c) 3 d) 4 e) 6 **4.** 40 **5.** 432 zł **6.** a) 4 b) 25% c) 2 d) 20%	**1.** 75% **2.** 320 **3.** dziewczyny – 20%, chłopcy – 80% **5.** 320 zł **6.** koszula – 30%, spodnie – 10%, sweter – 15% **7.** 28%	**1.** a) 40% z 50 to 20; 20% z 20 to 4 b) 80% z 60 to 48; 150% z 48 to 72 c) 110% z 70 to 77; 250% z 77 to 192,5 **2.** a) Ceny towarów zmalały o 19%. b) Ceny towarów wzrosły o 21%. **3.** C **4.** B, C

3 s. 58–61	**1.** a) 4080 zł b) 4140 zł c) 4160 zł **2.** a) 4410 zł b) 4862,03 zł c) 5920,98 zł **3.** a) 5202 zł b) 5414,28 zł c) 6094,97 zł	**1.** a) 8480 zł b) 8487,20 zł c) 8490,91 zł **2.** 2251,02 zł **3.** a) 10 496,33 zł b) 10 900,04 zł c) 10 299,98 zł **4.** Kwota z lokaty wyniesie 12 355,07 zł, więc wystarczy ona na remont.	**1.** a) W banku A oprocentowanie zwiększyło się o 1,5 punktu procentowego, a w banku B zmniejszyło się o 1,2 punktu procentowego. b) bank A – 16 552,41 zł, bank B – 16 474,02 zł **2.** 90 zł **3.** D **4.** p = 6 **5.** bank A: $k \cdot 1{,}04^2 = 1{,}0816k$ bank B: $k \cdot 1{,}019^4 \approx 1{,}0786k$ Bardziej korzystna jest oferta banku A.
Powtórzenie rozdziału s. 64–65	**ZADANIA PODSUMOWUJĄCE**		
	1. A, B, C **2.** B, C **3.** a) 1440 zł b) Nowa cena jest o 4% niższa od ceny początkowej. **4.** a) 20% z 80 to 16; 25% z 16 to 4 b) 17% z 85 to 14,45; 40% z 14,45 to 5,78 c) 130% z 40 to 52; 125% z 52 to 65 **5.** a) 2081,21 zł b) 2252,32 zł **6.** 100 zł		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{17}{20}$ **2.** B **3.** B **4.** D **5.** a) 5 b) 5 c) 5 **6.** kwota netto – 50 zł, kwota brutto – 61,50 zł **7.** 2707,14 zł		

Rozdział IV. Równania i nierówności

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 67–70	**1.** a) –3 b) –2 c) –2 d) –3 e) –2 f) –2, –3 **2.** a) $x = 9$ b) $x = 4{,}5$ c) $x = -8$ d) $x = 3\frac{1}{3}$ **3.** a) równanie tożsamościowe b) równanie sprzeczne c) równanie sprzeczne	**1.** a) $x = -6$ b) $x = 4{,}8$ c) $x = -1$ d) $x = -1$ e) $x = \frac{7}{18}$ f) $x = 2\frac{2}{3}$ **2.** a) Podane równania są spełnione przez tę samą liczbę, przez $x = 11$. b) Podane równania nie są spełnione przez tę samą liczbę. c) Podane równania nie są spełnione przez tę samą liczbę. d) Podane równania są spełnione przez tę samą liczbę, przez $x = 3$. **3.** a) $x = 0{,}5$ b) $x = 2$ **4.** –5, –4, –3 **5.** 2, 4, 6 **6.** a) $x = 4$ b) $x = -\frac{2}{3}$ c) $x = \frac{3}{5}$ d) $x = 5$ e) $x = -\frac{1}{10}$ f) $x = \frac{1}{7}$ **7.** Tomek w kwietniu zarobił 1900 zł, a w maju – 2100 zł. **8.** Mniejszy skwerek ma kształt kwadratu o boku 5 m, a większy skwerek ma kształt kwadratu o boku 10 m.	**1.** a) $x = 0$ b) $x = 1$ c) $x = 4$ d) $x = 3$ e) $x = \frac{3}{5}$ f) $x = 6$ g) $x = 2$ h) $x = -\frac{1}{2}$ i) $x = 10$ **2.** A, C **3.** D

2 s. 71–73	**1.1.** 5 cm i 15 cm **1.2.** 5,5 cm i 8,5 cm **2.1.** Weronika – 22 lata, Halina – 17 lat **2.2.** Kajetan – 15 lat, Marek – 9 lat, Darek – 17 lat **3.1.** 15 x 2 zł, 5 x 5 zł **3.2.** 3 x 1 zł, 5 x 2 zł, 8 x 5 zł	**1.** 14 lat **2.** 19 lat **3.** 1 m **4.** 3 godziny **5.** montaż drzwi – 300 zł, montaż progu – 15 zł	**1.** 6 **2.** 9 partii wygrał, 7 partii przegrał, 3 partie zremisował. **3.** 25 km **4.** Tomek – 179 cm, Hubert – 171 cm **5.** B
3 s. 74–79	**2.** $E = -3\frac{1}{2}$, $F = -1\frac{1}{3}$, $G = \sqrt{3}$, $H = 2\frac{1}{3}$ **3.** a) 3 liczby całkowite b) 5 liczb całkowitych c) 4 liczby całkowite **4.** a) 6 liczb całkowitych b) 6 liczb całkowitych c) 0 liczb całkowitych **5.** a) $-2 \le x < 1$; −2, −1, 0 b) $-4 < x \le 2$; −3, −2, −1, 0, 1, 2 c) $0 < x \le 3$; 1, 2, 3 **6.** a) $x > -2$ b) $x < 2$; 2 liczby naturalne **7.** a) $(-\infty; -4\rangle$ b) $\langle 5; \infty)$	**1.** a) −2, −1, 0 b) 1, 2 c) −2, −1, 0 d) −1, 0, 1 e) −2, −1, 0 f) 0, 1, 2 g) −1, 0 h) 0, 1 i) −2, −1, 0, 1, 2 j) −2, −1 k) −2, −1, 0, 1, 2 l) 2 **2.** a) $(-1; 2)$; $-1 < x < 2$ b) $\langle -2; 2\rangle$; $-2 \le x \le 2$ c) $\langle -2; 0)$; $-2 \le x < 0$ d) $(-1; 1\rangle$; $-1 < x \le 1$ **3.** a) $-4 < x < 2$ b) $1 < x \le 3\frac{1}{2}$ c) $-6 \le x \le 1$ d) $-3 \le x < -2\frac{1}{2}$ e) $x > 2\frac{1}{2}$ f) $x \ge -4$ g) $x < 3\frac{1}{2}$ h) $x \le -\frac{1}{2}$ **4.** a) mandat do 50 zł b) mandat od 50 zł do 100 zł i 2 pkt karne c) mandat od 100 zł do 200 zł i 4 pkt karne d) mandat od 100 zł do 200 zł i 4 pkt karne	**1.** a) D **3.** a) np. 3,99999 b) np. 1,00009 **4.** B **5.** 8400 zł
4 s. 80–83	**1.** a) spełnia b) spełnia c) nie spełnia d) nie spełnia **2.** a) $x < -2$ b) $x \ge 3$ c) $x < 1$ **3.** a) Podane nierówności są równoważne. b) Podane nierówności są równoważne. **4.** a) nierówność sprzeczna b) nierówność tożsamościowa c) nierówność sprzeczna d) nierówność tożsamościowa **5.** a) $x \le 9$ b) $x > 6$ c) $x \ge 6$ **6.** a) $x > -3$ b) $x \le 3$ c) $x > -\frac{1}{2}$	**1.** a) $x \le -3$ b) $x \ge -4$ c) $x < -1$ d) $x > -1$ e) $x \ge 5$ f) $x < -6$ **2.** a) $\{-6, \frac{1}{2}\}$ b) $\{\frac{1}{2}, 2\}$ c) $\{-6, \frac{1}{2}, 2\}$ **3.** a) $x > -3$; $\{-2, -1\}$ b) $x \ge -4$; $\{-4, -3, -2, -1\}$ c) $x > -10$; $\{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$	**1.** a) $x \ge 4\frac{3}{4}$; 5 b) $x > -\frac{1}{2}$; 0 c) $x > -6$; −5 d) $x > -3{,}5$; −3 **2.** a) $x < -7$ b) $x \ge -1\frac{1}{4}$ c) $x > 1$ d) $x \ge -3$ e) $x \le -2$ f) $x \ge 13$ **3.** a) $(2; 8)$ b) $\langle 4; 5\rangle$ c) $(-5; -2\rangle$ d) $\langle -\frac{1}{2}; 1)$ **4.** D
5 s. 84–86	**1.** a) $x - 11 \le 9$; $x \le 20$ b) $3x + 17 \ge 23$; $x \ge 2$ **2.** mniej niż 18 punktów	**1.** po 7 miesiącach **2.** a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 b) −1, −2, −3, −4 **3.** co najmniej 26 punktów **4.** maksymalnie 72 osoby **5.** co najmniej 200 000 zł **6.** powyżej 25 dni	**1.** 19°C **2.** maksymalnie 20 osób **3.** co najmniej 11 dni

Powtórzenie rozdziału s. 87–88	**ZADANIA PODSUMOWUJĄCE**
	1. a) 0, 1, 2, 3 b) 4, 5, 6 c) 11, 12, 13, 14 **2.** Jest to równanie tożsamościowe, zatem każda liczba je spełnia. **3.** $x = \frac{2}{3}$; $(-\infty; 1)$ to zbiór rozwiązań nierówności $x - 1 > 2x - 2$, zatem $x = \frac{2}{3}$ należy do tego zbioru rozwiązań. **4.** $x < 1$ **5.** A, C **6.** C **7.** A **8.** 27, 29, 31 **9.** 60 zł **10.** 240 zł
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ
	1. A, C **2.** A, B **3.** D **4.** a) $x = \frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$ nie należy do przedziału $(1; 5\rangle$. b) $x = 3\frac{1}{3}$; $3\frac{1}{3}$ należy do przedziału $(1; 5\rangle$. c) $x = 5$; 5 należy do przedziału $(1; 5\rangle$. **5.** D **6.** a) $x \leq -20$; -2 nie należy, 0 nie należy, 1 nie należy b) $x < 0$; -2 należy, 0 nie należy, 1 nie należy c) $x \leq -72$; -2 nie należy, 0 nie należy, 1 nie należy **7.** 8, 9, 10, 11 **8.** Potrzebuje 15 pudełek. **9.** D

Rozdział V. Układy równań liniowych

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 90–93	**1.** a) np. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ b) np. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$ c) np. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$ d) np. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1{,}25 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}$ **2.1.** a) spełnia b) nie spełnia c) spełnia **2.2.** a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ **3.** a) x – liczba książek Moniki y – liczba książek Łukasza $\begin{cases} x + y = 87 \\ x - y = 22 \end{cases}$ b) b – liczba bułek r – liczba rogali $\begin{cases} 0{,}30b + 0{,}60r = 3 \\ b + r = 7 \end{cases}$ c) g – cena gitary elektrycznej w – cena wzmacniacza $\begin{cases} g + w = 2400 \\ 0{,}8g + 1{,}1w = 2220 \end{cases}$	**1.** a) spełnia b) nie spełnia c) nie spełnia d) spełnia e) spełnia f) nie spełnia g) nie spełnia h) spełnia i) nie spełnia **2.** a) t – liczba sadzonek truskawek p – liczba sadzonek poziomek $\begin{cases} t + p = 35 \\ 1{,}6t + 2p = 62 \end{cases}$ b) p – liczba stron pierwszego tomu d – liczba stron drugiego tomu $\begin{cases} p + d = 1080 \\ d - p = 138 \end{cases}$ c) s – liczba piłek do siatkówki k – liczba piłek do koszykówki $\begin{cases} s + k = 20 \\ s - 2 = 2(k - 3) \end{cases}$	**1.** C **2.** D **3.** a) r – cena 1 pęczka rzodkiewki p – cena 1 pęczka natki pietruszki $\begin{cases} 3r + p = 5{,}79 \\ 2r + 2p = 5{,}98 \end{cases}$ b) x – cena 1 kg pomidorów y – cena 1 kg ogórków $\begin{cases} 1{,}5x + y = 13{,}5 \\ 0{,}5x + 2y = 12 \end{cases}$

2 s. 94–97	**1.** a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$ **2.** Kupiono 8 biletów normalnych i 2 ulgowe.	**1.** a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = 13 \\ y = 7 \end{cases}$ **3.** Kierownik ekipy remontowo-budowlanej kupił 2 małe wkrętaki i 5 dużych. **4.** 3 autokary 18-osobowe, 7 autokarów 40-osobowych	**1.** B **2.** a) $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -90 \\ y = -260 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 100 \\ y = 250 \end{cases}$ **3.** C **4.** $\begin{cases} x = 18 \\ y = 6 \end{cases}$ **5.** Mechanik samochodowy zamówił 10 młotków mniejszych i 6 większych.
3 s. 98–101	**1.** a) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ **2.** a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1\frac{16}{23} \\ y = \frac{17}{23} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ **3.** a) Podany układ równań to układ sprzeczny. b) Podany układ równań to układ oznaczony. c) Podany układ równań to układ sprzeczny. d) Podany układ równań to układ oznaczony. e) Podany układ równań to układ sprzeczny. f) Podany układ równań to układ sprzeczny. **4.** a) Podany układ równań to układ nieoznaczony. b) Podany układ równań to układ nieoznaczony. c) Podany układ równań to układ nieoznaczony.	**1.** Szukane liczby to 5 i 6. **2.** Zamówiono 69 mniejszych odżywek do włosów i 31 większych. **3.** a) 1 gałka lodów kosztuje 2,50 zł, a 1 wafelek 0,60 zł. b) Dzienny utarg wyniesie 2865 zł.	**1.** a) 1 para liczb b) żadna para liczb c) 1 para liczb d) 1 para liczb e) żadna para liczb f) nieskończenie wiele par liczb **2.** B **3.** $\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$ **4.** B, C **5.** a) np. $\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$ b) np. $\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ -2x + 5y = -2 \end{cases}$ c) np. $\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$
4 s. 102–104	**1.** 498 osób dorosłych oraz 252 dzieci **2.** a) x_A – liczba godzin pracy elektryka z firmy A y_A – cena usługi firmy A $y_A = 30 + 40x_A$ x_B – liczba godzin pracy elektryka z firmy B y_B – cena usługi firmy B $y_B = 50 + 35x_B$ b) 4 godziny	**1.** o 5 więcej **2.** 81 kg jabłek oraz 21 kg gruszek **3.** 5 sof i 10 foteli **4.** strzyżenie z modelowaniem – 60 zł, modelowanie – 40 zł **5.** wymiana klocków hamulcowych – 50 zł, zmiana opon – 70 zł	**1.** 8 większych pędzli oraz 6 mniejszych **2.** A, C **3.** A
Powtórzenie rozdziału s. 105–106	**ZADANIA PODSUMOWUJĄCE**		
	1. C **2.** A, B, C **3.** a) układ oznaczony b) układ nieoznaczony c) układ sprzeczny **4.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ **5.** 40 dorosłych oraz 35 dzieci **6.** 102 opakowania popcornu oraz 138 opakowań orzeszków **7.** 84 cm		

	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ
Powtórzenie rozdziału s. 105–106	**1.** C **2.** D **3.** A **4.** B, C **5.** a) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases}$ c) układ sprzeczny **6.** a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 15 \\ \frac{1}{3}x + 2y = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 27 \\ y = 3 \end{cases}$ **7.** 30 pokoi jednoosobowych oraz 120 pokoi dwuosobowych

Rozdział VI. Funkcje

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 108–111	**1.** a) W domu o numerze 6 mieszka Asia, a w domu o numerze 8 mieszka Basia i Romek. b) W domu o numerze 10 nie mieszka żadna z osób. **2.** a) $f(1) = -1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, $f(5) = 3$ c) $f(x) = x - 2$	**1.** a) tak b) nie **2.** a) $ZW = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$; Dla trzech argumentów funkcja przyjmuje wartość ujemną. b) $ZW = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; Dla dwóch argumentów funkcja przyjmuje wartość ujemną. **3.** a) $f(x) = 2x + 4$ b) $f(x) = 2(x + 4)$ c) $f(x) = x^2 + 6$ d) $f(x) = (x + 6)^2$ **4.** a) $X = \{10, 11, 12, \ldots, 97, 98, 99\}$ b) $f(11) = 2$, $f(20) = 2$, $f(55) = 10$, $f(64) = 10$, $f(66) = 12$ c) $ZW = \{1, 2, 3, \ldots, 16, 17, 18\}$ d) $f(x) = 3$ dla $x \in \{12, 21, 30\}$, $f(x) = 7$ dla $x \in \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$	**3.** $f(x) = 2x + 4$ **4.** D
2 s. 112–114	**2.** a) $f(2) = 4$, $f(-2) = -8$ b) $f(2) = 13$, $f(-2) = 5$ c) $f(2) = -17$, $f(-2) = 11$ d) $f(2) = 6$, $f(-2) = 6$ e) $f(2) = -1$, $f(-2) = -1$ f) $f(2) = -2$, $f(-2) = -6$	**1.** a) $f(-1) = 7$, $f(0) = 4$, $f(\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{4}$ b) $f(-1) = -4$, $f(0) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = -1$ c) $f(-1) = 4$, $f(0) = 4$, $f(\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{4}$ d) $f(-1) = -7\frac{3}{4}$, $f(0) = -8$, $f(\frac{1}{2}) = -7\frac{9}{16}$ **2.** a) $f(2{,}5) = 6{,}25$ b) $f(3{,}5) = 12{,}25$ c) $f(4{,}2) = 17{,}64$ **3.** a) $f(2) = 4$ b) $f(-4) = -32$ c) $f(0{,}3) = 0{,}0135$ **4.** a) $f(-2) = 2$, $g(-2) = -6$, $h(-2) = 3$; Najmniejszą wartość dla $x = -2$ przyjmuje funkcja g. b) $f(-2) = 10$, $g(-2) = 2$, $h(-2) = -7$; Najmniejszą wartość dla $x = -2$ przyjmuje funkcja h. c) $f(-2) = 4$, $g(-2) = 0$, $h(-2) = -8$; Najmniejszą wartość dla $x = -2$ przyjmuje funkcja h. **5.** a) 5 cali to 12,7 cm b) 20 cali to 50,8 cm c) 150 cali to 381 cm **6.** a) 28 kg b) 105 kg **7.** a) $P = 24\ \text{cm}^2$, $V = 8\ \text{cm}^3$ b) $P = 54\ \text{cm}^2$, $V = 27\ \text{cm}^3$ c) $P = 1{,}5\ \text{cm}^2$, $V = \frac{1}{8}\ \text{cm}^3$ d) $P = 3\frac{3}{8}\ \text{cm}^2$, $V = \frac{27}{64}\ \text{cm}^3$	**1.** a) g b) f c) $f(3) = g(3)$ d) g **2.** B, C **3.** C **4.** a) 40 m b) 48 m c) 80 m d) 100 m

3 s. 115–117	**1.1.** $Q(2, 5)$, $R(-2, 4)$, $S(1, -2)$, $T(4, -3)$, $U(-3, 0)$, $W(0, -5)$ **2.** a) II b) IV c) I d) III	**1.** deltoid **2.** $(-2, 3)$	**2.** a) $P(4, 0)$, oś OX; $Q(2, 3)$, I ćwiartka; $R(5, 1)$, I ćwiartka; $S(0, 4)$, oś OY; $T(-2, 3)$, II ćwiartka; $U(4, -3)$, IV ćwiartka; $W(-1, -2)$, III ćwiartka; b) P, R, U, W **3.** A, B
4 s. 118–123	**1.1.** a) (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 4), (5, 2), (6, 2), (7, 1), (8, 8) b) (–2, 1), (–1, –1), (0, 2), (1, –2), (2, 3), (3, –3), (4, 4), (5, –4), (6, 5) **1.3.** c) $ZW = \{-4, -3, -2, -1\}$	**1.** a) $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 3$, $f(4) = 2$, $f(5) = 2$, $f(6) = 2$, $f(7) = 3$, $f(8) = 1$ b) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 0$, $f(5) = 1$, $f(6) = 2$, $f(7) = 3$, $f(8) = 0$	**1.** B, C **2.** B **3.** B **4.** D
5 s. 124–125	**1.** a) –5, –1, 0, 2 b) 0, 2, 4, 6 **2.** a) 4, 8 b) Temperatura była dodatnia 5, 6 i 7 dnia.	**1.** a) Funkcja f nie ma miejsc zerowych. b) –2, 2 c) –2 **3.** Inwestycja zwróci się 5 października.	**1.** C **2.** a) 4, 5, 8 b) $ZW = \{-3, -2, 0, 1, 2, 4, 5\}$ **3.** a) Przedstawiona funkcja nie ma miejsc zerowych. b) –1, 2 **4.** a) $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$; –1, 2, 4; $ZW = \{0, 2, 3, 4\}$ b) $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; –3, –2, 2, 4; $ZW = \{-1, 0, 3, 4\}$ **5.** a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3; 4\}$; $f(x) < 0$ dla $x = -4$ b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1; 1\}$; $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1)$
6 s. 126–130	**1.** a) Średnia prędkość podczas pierwszej godziny jazdy wynosiła 50 km/h, a podczas drugiej godziny 40 km/h. b) Wykres przedstawia funkcję rosnącą. **2.** b) Wykres przedstawia funkcję malejącą. **3.** Wykres przedstawia funkcję stałą. **4.** a) Wykres przedstawia funkcję malejącą. b) Wykres przedstawia funkcję rosnącą. c) Wykres przedstawia funkcję stałą. **5.** a) Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $\langle -3; -1\rangle$, $\langle 3; 4\rangle$, a malejąca w przedziale $\langle -1; 3\rangle$. b) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 2; 3\rangle$, malejąca w przedziałach $\langle -4, -2\rangle$, $\langle 1; 2\rangle$ oraz stała w przedziale $\langle -2; 1\rangle$ c) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -1; 3\rangle$, a malejąca w przedziałach $\langle -3; -1\rangle$, $\langle 3; 4\rangle$.	**1.** d, c, b, a **3.** a) $\langle 0; 12\rangle$, $\langle 15; 27\rangle$, $\langle 30; 42\rangle$ b) $\langle 45; 57\rangle$, $\langle 60; 72\rangle$, $\langle 75; 87\rangle$	**1.** A **2.** a) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -5; 1\rangle$, a malejąca w przedziale $\langle 1; 5\rangle$. b) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -2; 0\rangle$, a malejąca w przedziałach $\langle -4; -2\rangle$, $\langle 0; 3\rangle$. **3.** B, C **4.** c, b, a, d

7 s. 131–135	**1.** a) $f(0) = 3$ b) $f(2) = 1$ c) $f(4) = 3$ d) $f(5) = -1$ **2.** a) $f(x) = 1$ dla $x = -1$; Funkcja f nie przyjmuje wartości równej -3. b) $f(x) = 1$ dla $x \in \{1, 3\}$; Funkcja f nie przyjmuje wartości równej -3. c) Funkcja f nie przyjmuje wartości równej 1.; $f(x) = -3$ dla $x \in \{2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\}$ **3.** a) Najmniejsza wartość równa się -2, a największa 3.; $ZW = \langle -2; 3\rangle$ b) Najmniejsza wartość równa się -2, a największej wartości funkcja nie ma.; $ZW = \langle -2; 3)$ c) Najmniejszej wartości funkcja nie ma, a największa równa się 4.; $ZW = (-2; 4\rangle$ **4.** a) $X = \langle -3; 3)$; $ZW = \langle -1; 2)$; Najmniejsza wartość równa się -1, a wartości największej funkcja nie ma.; $f(x) = 0$ dla $x = -1$; $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -3; -1)$; $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -1; 3)$; b) $X = (-3; 3)$; $ZW = \langle -1; 2)$; Wartość najmniejsza równa się -1, a wartości największej funkcja nie ma.; $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 1\}$; $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 1)$; $f(x) \geq 0$ dla $x \in (-3; -1\rangle$ lub $x \in \langle 1; 3)$ c) $X = (-4; 4\rangle$; $ZW = \langle -2; 4\rangle$; Wartość najmniejsza równa się -2, a wartość największa równa się 4.; $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 0, 2\}$; $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; -3)$ lub $x \in (0; 2)$; $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -3; 0\rangle$ lub $x \in \langle 2; 4\rangle$	**1.** a) $f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 4)$; $f(x) < -1$ dla $x \in \langle -6; -3)$ lub $x \in (5; 7\rangle$ b) $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -6; -4)$ lub $x \in (-2; 2)$ lub $x \in (6; 7\rangle$; $f(x) < -1$ dla $x \in (3; 5)$ **2.** a) Wartość największa równa się 6, a wartość najmniejsza -2.; $ZW = \langle -2; 6\rangle$ b) Wartość największa równa się 6, a wartość najmniejsza -2.; $ZW = \langle -2; 6\rangle$ c) Wartości największej funkcja nie ma, a wartość najmniejsza równa się -2.; $ZW = \langle -2; 6)$ d) Wartości największej ani najmniejszej funkcja nie ma.; $ZW = (-2; 6)$ **3.** a) 130 000 zł b) 320 000 zł **4.** a) 10 września – 3 umowy, 15 września – 0 umów b) 2 września, 9 września, 15 września, 23 września, 30 września c) 6 września i 21 września d) Liczba zawartych umów nie może być liczbą ujemną.	**1.** A **2.** a) $f(x) = 1$ dla $x \in \{-4, 3\frac{1}{2}\}$, $f(x) > 1$ dla $x \in (-4; 3\frac{1}{2})$ b) $f(x) = 1$ dla $x \in \{-2, 1\}$, $f(x) > 1$ dla $x \in \langle -6; -2)$ lub $x \in (1; 6\rangle$ **3.** a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 3\}$, $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -1; 3\rangle$ b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 2\}$, $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; -2\rangle$ lub $x \in \langle 2; 4)$ c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0, 2, 4\}$, $f(x) \geq 0$ dla $x \in (-3; -2\rangle$ lub $x \in \langle 0; 2\rangle$ lub $x = 4$ **4.** a) $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -4; -3)$ lub $x \in (0; 3)$ b) $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 1)$ lub $x \in (4; 5\rangle$
8 s. 136–138	**1.** Wykres $y = x^2 + 2$ otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OY o 2 jednostki do góry. Wykres $y = x^2 - 3$ otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OY o 3 jednostki w dół. **3.** $ZW = \langle -3; 2\rangle$	**2.** a) $g(x) = \lvert x\rvert + 1{,}5$; $h(x) = \lvert x\rvert - 1$ b) Dla funkcji f $ZW = \langle 0; \infty)$. Dla funkcji g $ZW = \langle 1{,}5; \infty)$. Dla funkcji h $ZW = \langle -1; \infty)$.	**1.** B **2.** A **4.** a) $ZW = \langle -6; 2\rangle$ b) $ZW = \langle -4; 4\rangle$ c) $ZW = \langle -1; 7\rangle$ d) $ZW = \langle 2; 10\rangle$

9 s. 139–141	**1.** Wykres $y = (x - 2)^2$ otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OX o 2 jednostki w prawo. Wykres $y = (x + 1)^2$ otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OX o 1 jednostkę w lewo. **3.** $X = \langle -7; 2\rangle$; $g(x) = 0$ dla $x \in \{-6, -3, -1\}$	**1.** a) $g(x) = 0$ dla $x \in \{1, 4, 7\}$ b) $g(x) = 0$ dla $x \in \{-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\}$ c) $g(x) = 0$ dla $x \in \{-6, -3, 0\}$ d) $g(x) = 0$ dla $x \in \{-3\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\}$ **2.** a) Dla funkcji g $X = \langle -4; 8\rangle$. Dla funkcji h $X = \langle -11; 1\rangle$. b) Dla funkcji g $X = \langle -2; 9\rangle$. Dla funkcji h $X = \langle -9; 2\rangle$. **3.** g: $y = x - 4$; h: $y = x + 2$ **4.** h: $y = (x - 2)^2 - 3$	**1.** a) g: $y = 2(x - 2)^2$ b) g: $y = 2(x - 5)^2$ c) g: $y = 2(x + 4)^2$ d) g: $y = 2(x + 7)^2$ **2.** B, C **3.** C **4.** a) $g(x) = 0$ dla $x = -4$ b) $g(x) = 0$ dla $x = -1$ c) $g(x) = 0$ dla $x = 3$
10 s. 142–145	**1. 2.** a) $X = \langle -5; 4\rangle$; $ZW = \langle -3; 1\rangle$; $-f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0, 3\frac{1}{4}\}$; Funkcja $y = -f(x)$ jest malejąca w przedziałach $\langle -5; -3\rangle$, $\langle -1; 1\rangle$, a rosnąca w przedziałach $\langle -3; -1\rangle$, $\langle 1; 4\rangle$. b) $X = \langle -5; 4)$; $ZW = \langle -3; 3\rangle$; $-f(x) = 0$ dla $x \in \{-3\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2\}$; Funkcja $y = -f(x)$ jest malejąca w przedziałach $\langle -5; -2\rangle$, $\langle 1; 3\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 1\rangle$ oraz stała w przedziale $\langle 3; 4)$. **2.1.** $X = \langle -5; 2\rangle$; $f(-x) = 0$ dla $x \in \{-5, -4, 0, 1, 2\}$ **2.2.** a) $X = \langle -4; 5\rangle$; $ZW = \langle -1; 3\rangle$; $f(-x) = 0$ dla $x \in \{-3\frac{1}{4}, 0, 2\}$. b) $X = (-4; 5\rangle$; $ZW = \langle -3; 3\rangle$; $f(-x) = 0$ dla $x \in \{-2, -\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}\}$.	**3.** $g(x) = 0$ dla $x = 3$; $h(x) = 0$ dla $x = -3$	**1.** A, B, C **2.** C **3.** $g(x) = 0$ dla $x = -1$; $h(x) = 0$ dla $x = 1$ **4.** a) Funkcja g jest stała w przedziale $(-\infty; -5\rangle$, rosnąca w przedziałach $\langle -5; -4\rangle$, $\langle -1; \infty)$, malejąca w przedziale $\langle -4; -1\rangle$. Funkcja h jest stała w przedziale $\langle 5; \infty)$, rosnąca w przedziałach $(-\infty; 1\rangle$, $\langle 4; 5\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1; 4\rangle$. b) Funkcja g jest stała w przedziale $\langle -1; 2\rangle$, rosnąca w przedziałach $(-\infty; -2\rangle$, $\langle 2; 4\rangle$, malejąca w przedziałach $\langle -2; -1\rangle$, $\langle 4; \infty)$. Funkcja h jest stała w przedziale $\langle -2; 1\rangle$, rosnąca w przedziałach $\langle -4; -2\rangle$, $\langle 2; \infty)$, malejąca w przedziałach $(-\infty; -4\rangle$, $\langle 1; 2\rangle$. c) Funkcja g jest stała w przedziale $\langle -3; -1\rangle$, rosnąca w przedziale $(-\infty; -3\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; \infty)$. Funkcja h jest stała w przedziale $\langle 1; 3\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 3; \infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 1\rangle$.
11 s. 146–147	**1.** b) Parking Niebieski – 6 zł, Parking Fioletowy – 6 zł c) Opłata za 6-godzinny postój jest niższa na Parkingu Fioletowym.	**1.** $y = 60x$; 9 h 43 min **2.** 27 zł to koszt wynajmu dwóch kajaków na 3 godziny i trzech kajaków na 2 godziny. **3.** 72 t **4.** b) 11 zł	**1.** A, C **2.** A, C
Powtórzenie rozdziału s. 148–149	**ZADANIA PODSUMOWUJĄCE**		
	1. A, B **2.** C **3.** D **5.** a) $f(x) = 0$ dla $x = -\frac{1}{3}$; $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -\frac{1}{3}; 3\rangle$ b) f nie ma miejsc zerowych.; $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle 1; 4\rangle$ c) $f(x) = 0$ dla $x = 0$; $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -4; 0\rangle$ d) $f(x) = 0$ dla $x = 1$; $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle 0; 1\rangle$ **6.** A, B, C		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. A, B **2.** $f(-2) = 4$, $f(4) = 1$, $f(5) = \frac{1}{2}$; Największa wartość dla podanych argumentów wynosi 4. **3.** a) $f(x) = 0$ dla $x = -1$ b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{2, 4\}$ **4.** D **5.** B **6.** a) $X = \langle -1; 9\rangle$; $ZW = \langle -2; 3\rangle$; $g(x) = 0$ dla $x \in \{3, 5\}$ b) $X = \langle -3; 7\rangle$; $ZW = \langle 0; 5\rangle$; $g(x) = 0$ dla $x = 2$ c) $X = \langle -3; 7\rangle$; $ZW = \langle -3; 2\rangle$; $g(x) = 0$ dla $x \in \{1, 3\}$ d) $X = \langle -7; 3\rangle$; $ZW = \langle -2; 3\rangle$; $g(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1\}$		

Rozdział VII. Funkcja liniowa

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 151–155	**1.** a) należy b) należy c) nie należy **5.** a) k, m b) k, m c) k, m **6.** a) $y = 2x + 1$ b) $y = 2x - 4$ c) $y = 2x + 5$	**1.** a) $y = 2x - 10$ b) $y = 6$ **2.** $y = 2{,}5x + 7$, x – liczba przejechanych kilometrów, y – koszt przejazdu **3.** 110 zł **5.** Opłata wstępna w firmie B jest mniejsza od 5 zł. Opłata wstępna w firmie C jest większa od 5 zł.	**1.** A, C **2.** A **3.** l_1 i l_2; l_3 i l_8; l_4 i l_6; l_5 i l_7 **4.** a) $y = 5x$ b) $y = ax$
2 s. 156–158	**1.1.** a) (0, 2) b) (0, 1) c) (0, –2) d) (0, 5) **2.** a) –2 b) 3 c) 1 **3.1.** a) –3; (–3, 0) b) $\frac{1}{2}$; ($\frac{1}{2}$, 0) c) $1\frac{1}{3}$; ($1\frac{1}{3}$, 0) **3.2.** np. $y = 5$ **3.3.** Funkcja $y = 0$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.	**1.** a) np. $y = 2x + 3$, $y = -\frac{3}{4}x + 3$ b) np. $y = -10x - 2$, $y = \frac{1}{2}x - 2$ c) np. $y = -\frac{3}{4}$, $y = 0{,}5x - \frac{3}{4}$ **2.** a) (1, 0), (0, –3) b) (–2, 0), (0, 4) c) (3, 0), (0, 6) d) (–2, 0), (0, –6) e) (4, 0), (0, –2) f) (3, 0), (0, 2) **3.** a) 2; (2, 0), (0, –8) b) $\frac{1}{2}$; ($\frac{1}{2}$, 0), (0, 3) c) –6; (–6, 0), (0, 2)	**1.** A, C **2.** C **3.** a) (2, 0), (0, –4); $P = 4$ b) (3, 0), (0, 6); $P = 9$ c) (–6, 0), (0, 3); $P = 9$
3 s. 159–160	**1.** a) f jest rosnąca; $f(1) < f(2) < f(5)$ b) f jest rosnąca; $f(1) < f(2) < f(5)$ c) f jest malejąca; $f(5) < f(2) < f(1)$ d) f jest stała; $f(1) = f(2) = f(5)$ e) f jest rosnąca; $f(1) < f(2) < f(5)$ f) f jest malejąca; $f(5) < f(2) < f(1)$ **2.** a) $a > 0$ b) $a = 0$ c) $a < 0$	**1.** a) f jest rosnąca b) f jest malejąca c) f jest rosnąca d) f jest malejąca e) f jest stała f) f jest stała **2.** 2100 klientów mniej **3.** a) $y = 10x$ b) 70 zł	**1.** B, C **2.** B **4.** $a_1 = 0$ dla prostej przechodzącej przez punkty A, B; $a_2 < 0$ dla prostej przechodzącej przez punkty B, D; $a_3 > 0$ dla prostej przechodzącej przez punkty A, C; $a_4 > 0$ dla prostej przechodzącej przez punkty C, D
4 s. 161–163	**1.** a) $a = 1$ b) $a = 1\frac{1}{8}$ c) $a = 1\frac{2}{3}$	**1.** a) $P(-3, -1)$, $Q(3, 2)$; $a = \frac{1}{2}$ b) $P(-3, 4)$, $P(3, 2)$; $a = -\frac{1}{3}$ c) $P(-3, -2)$, $P(1, 4)$; $a = 1\frac{1}{2}$ **2.** a) Współczynniki kierunkowe prostych PQ i RS są równe. b) PQ **3.** 30% **4.** a) $a = \frac{2}{3}$ b) $a = \frac{3}{5}$	**1.** A, B, C **2.** A **3.** a) Przy wzroście argumentu o 3 wartość funkcji maleje o 1. b) Przy wzroście argumentu o 3 wartość funkcji maleje o 2. c) Przy wzroście argumentu o 3 wartość funkcji maleje o 4. **4.** a) $a_1 = 2$ dla prostej AB, $a_2 = 2$ dla prostej CD; Proste AB i CD są równoległe. b) $a_1 = -3$ dla prostej AB, $a_2 = -4$ dla prostej CD; Proste AB i CD nie są równoległe.

5 s. 164–167	**1.** a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ **2.** a) $y = x - 1$ b) $y = \frac{2}{5}x + 1\frac{4}{5}$ c) $y = -2x + 4$ **3.** a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b) $y = 2\frac{1}{2}x - 5$ c) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ **4.** a) Proste *k* i *l* są prostopadłe. b) Proste *k* i *l* są prostopadłe. c) Proste *k* i *l* nie są prostopadłe. **5.** a) $y = -\frac{1}{7}x + 3\frac{2}{7}$ b) $y = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$	**1.** a) $f(x) = 1\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{3}$; Funkcja *f* jest rosnąca. b) $f(x) = -\frac{2}{9}x + 2\frac{1}{3}$; Funkcja *f* jest malejąca. c) $f(x) = 4$; Funkcja *f* jest stała. **2.** a) $y = -x + 7$; (7, 0), (0, 7) b) $y = -2x + 14$; (7, 0), (0, 14) c) $y = x + 2$; (–2, 0), (0, 2)	**1.** A, B, C **2.** a) $y = x + 1$; $y = x - 1$ b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ c) $y = 2$; $y = -1$ **3.** a) $a_1 = 3$ dla prostej *KL*, $a_2 = -\frac{1}{3}$ dla prostej *MN*; Proste *KL* i *MN* są prostopadłe. b) $a_1 = 1\frac{1}{2}$ dla prostej *KL*, $a_2 = -\frac{2}{3}$ dla prostej *MN*; Proste *KL* i *MN* są prostopadłe. c) $a_1 = -\frac{3}{4}$ dla prostej *KL*, $a_2 = 2$ dla prostej *MN*; Proste *KL* i *MN* nie są prostopadłe. **4.** A
6 s. 168–173	**1.** a) (3, –1) b) (–1, 5) c) (1, 2) **2.** a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ **3.** a) układ sprzeczny b) układ sprzeczny c) układ sprzeczny d) układ sprzeczny e) układ sprzeczny f) układ sprzeczny g) układ sprzeczny h) układ sprzeczny i) układ sprzeczny **4.** a) układ nieoznaczony b) układ nieoznaczony c) układ nieoznaczony	**1.** a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases}$ **2.** a) Proste, których równania podane zostały w układzie równań, są równoległe i nie pokrywają się. Jest to układ sprzeczny. b) Proste, których równania podane zostały w układzie równań, pokrywają się. Jest to układ nieoznaczony. c) Proste, których równania podane zostały w układzie równań, są równoległe i nie pokrywają się. Jest to układ sprzeczny. **3.** $y = 4x + 7$, $y = \frac{1}{6}x + 3\frac{1}{6}$, $y = 4x - 16$, $y = \frac{1}{6}x - \frac{2}{3}$ **4.** (0, 2), (2, 0), (0, –2), (–2, 0)	**1.** a) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$ **2.** A, B **3.** B **4.** a) (–3, 4), (6, 4), (–3, –2) b) (–2, 2), (–6, –2), (0, –2) c) (1, 3), (2, 2), (4, 6) d) $(4, 2\frac{1}{2})$, $(0, -1\frac{1}{2})$, $(6, -1\frac{1}{2})$ e) (–5, 5), $(-11, 3\frac{1}{2})$, $(-7\frac{1}{2}, 0)$ f) (–3, 5), $(3, 5\frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{2}, -5)$ **5.** o 7:46
Powtórzenie rozdziału s. 176–177	**ZADANIA PODSUMOWUJĄCE**		
	1. A **2.** A, B, C **3.** B **4.** a) Punkty *P*, *Q*, *S* należą do jednej prostej. b) Punkty *P*, *Q*, *S* nie należą do jednej prostej. **5.** a) $a = 5$ b) $a = -\frac{1}{4}$ **6.** a) $y = -\frac{2}{5}x + 5$ b) $y = 2{,}5x + 5$ **7.** a) (–3, 2), (0, 6), (4, 2); $P = 14$ b) $(-5\frac{4}{7}, 6\frac{6}{7})$, $(5\frac{4}{7}, 3\frac{1}{7})$, $(1\frac{6}{7}, -4\frac{2}{7})$; $P = 48\frac{2}{7}$		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. D **2.** A, B **3.** C **4.** C **5.** A **6.** a) $y = -x + 2$ b) $y = 2x - 1$ c) $y = \frac{1}{4}x$ **7.** B, C		

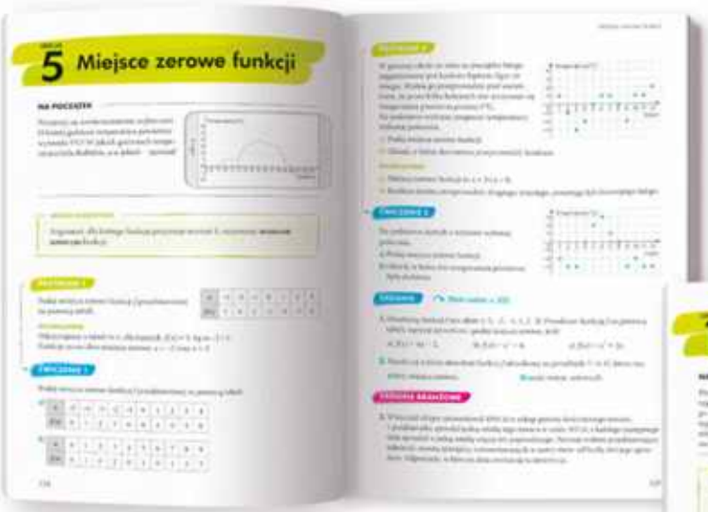
Rozdział VIII. Statystyka

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 179–182	**1.** Karol – 5,5; Robert – 2,5 **2.** dziewczęta: 4; chłopcy: 4,2; cała klasa: $4\frac{1}{11}$ **3.1.** 4300 zł **3.2.** 15°C	**1.** a) 4 b) 5 c) 6 d) 103,5 **2.** a) Dopisana liczba to 31. b) Dopisana liczba to 51. c) Dopisana liczba to –124. d) Dopisana liczba to –139. **3.** a) 3700 zł netto b) 3550 zł netto **4.** czwartek – 72,50 zł, piątek – 108,75 zł, sobota – 110 zł **5.** a) 27 zł b) 4536 zł **6.** o 1 zł	**1.** B **2.** a) dziewczęta – 174 cm, chłopcy – 178 cm, cała klasa – 176 cm b) 7 c) 17 **3.** a) 4544 zł b) 2528 zł **4.** a) 3840 zł b) 5160 zł, 2740 zł c) 4800 zł
2 s. 183–185	**1.** Marta – 4, Paulina – 3 **2.** a) $\overline{x}_w = 4$ b) $\overline{x}_w = 6$	**1.** Marek **2.** $\overline{x}_w \approx 4{,}38$ **3.** 31 zł	**1.** a) $\overline{x}_w = 5$ b) $\overline{x}_w = 7$ c) $\overline{x}_w = 6$ **2.** a) $\overline{x}_w = 9{,}5$ b) $\overline{x}_w = 4{,}3$ c) $\overline{x}_w = 5{,}25$ d) $\overline{x}_w = 15$ **3.** B **4.** B
3 s. 186–189	**1.** a) 4 b) 6 c) 7,5 d) 3,5 e) 4 f) 9 **2.** a) 2 b) 4,5 **3.** a) 4 b) 42 c) 3 i 8 d) brak	**1.** 312 **2.** a) mediana: 4, dominanta: 3 b) mediana: 3, dominanta: 5 **3.** mediana: 2, dominanta: 1 i 2 **4.** ogiery: 560; klacze: 502,5; wszystkie konie: 540 **5.** mediana: 80 zł, dominanta: 80 zł **6.** a) mediana: 63,265; dominanta: 63,25 b) mediana: 63,4; dominanta: 63,39	**1.** a) mediana: 13, dominanta: 13 b) mediana: 60, dominanta: 60 i 64 c) mediana: 29, dominanta: 25 i 31 d) mediana: 15, dominanta: brak **2.** A, B
Powtórzenie rozdziału s. 192–193	**ZADANIA PODSUMOWUJĄCE**		
	1. A, B **2.** D **3.** a) A Rh+ b) prawda **4.** a) $\overline{x} = 5$; mediana: 4; dominanta: 8 b) $\overline{x} = 63$; mediana: 61,5; dominanta: brak c) $\overline{x} = 17{,}9$; mediana: 17,5; dominanta: 13, 17 i 19 d) $\overline{x} = 150$; mediana: 145; dominanta: 160 **5.** a) $\overline{x}_w = 12\frac{8}{13}$ b) $\overline{x}_w = 6\frac{13}{17}$		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. C **2.** D **3.** B **4.** A, B **5.** 5		

nowa era *Twoje mocne strony*

To się liczy!

Podręcznik *To się liczy!* dla klasy pierwszej szkoły branżowej jest podzielony na dwie części. Pierwsza z nich składa się z ośmiu rozdziałów, w których ujęto wszystkie treści obowiązkowe, w tym lekcje i zadania branżowe poświęcone wykorzystaniu matematyki w praktyce. Druga część to zbiór dodatkowych zadań. W podręczniku zastosowano rozwiązania ułatwiające przyswajanie wiedzy, takie jak ćwiczenia wprowadzające w tematykę lekcji, przykłady rozwiązane krok po kroku, ćwiczenia o zróżnicowanym poziomie trudności oraz zadania dotyczące różnych branż.



Zagadnienia matematyczne krok po kroku

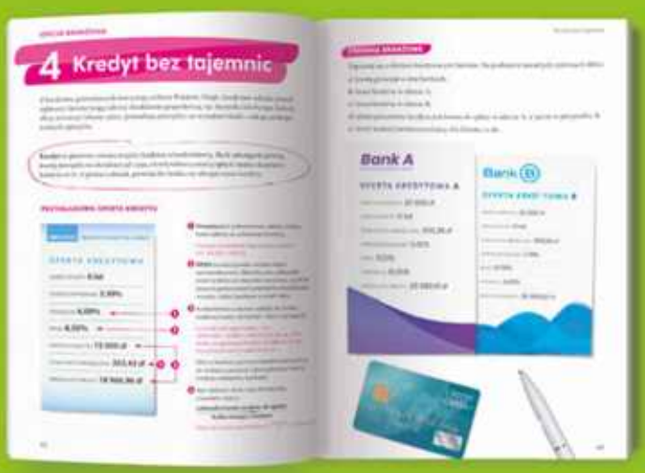
Umiejętności matematyczne zostały przedstawione poprzez przykłady rozwiązane krok po kroku. Dzięki temu uczeń może samodzielnie przejść od treści zadania do jego rozwiązania.

Przemyślana budowa

Poszczególne lekcje są zbudowane według stałej, uporządkowanej struktury, ułatwiającej intuicyjne poruszanie się w obrębie danej jednostki tematycznej.

Matematyka bliska uczniowi

W podręczniku zamieszczono lekcje branżowe dotyczące takich zagadnień, jak faktura VAT, kredyty czy finanse w firmie, z którymi absolwenci szkoły branżowej mogą się spotkać w życiu zawodowym. Pojęcia omawiane w tych lekcjach są wyjaśnione prostym językiem i dodatkowo obudowane przykładami, tak żeby pokazać uczniom zastosowanie matematyki w praktyce.



Nowa Era Sp. z o.o.
www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-3614-8
9 788326 736148